

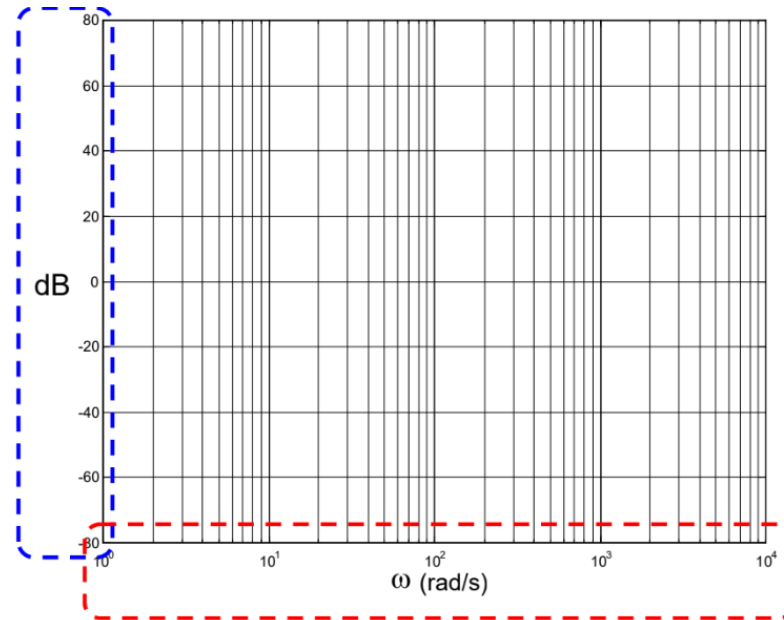
# Filtros

---

# Diagrama de bode Magnitud

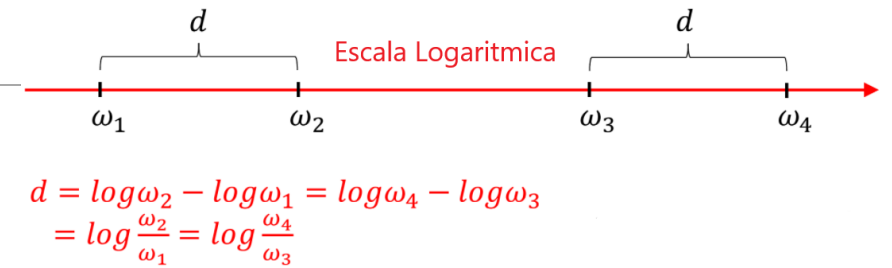
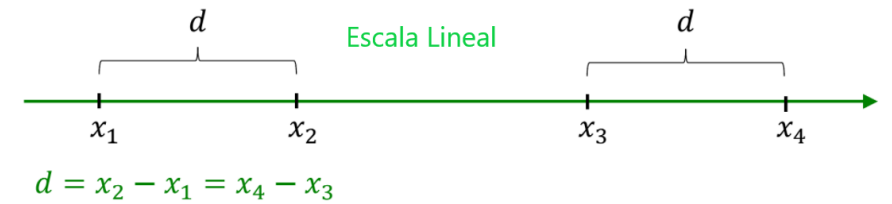
Ordenas en dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|$$



Abcisas en escalas  
logaritmica

$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



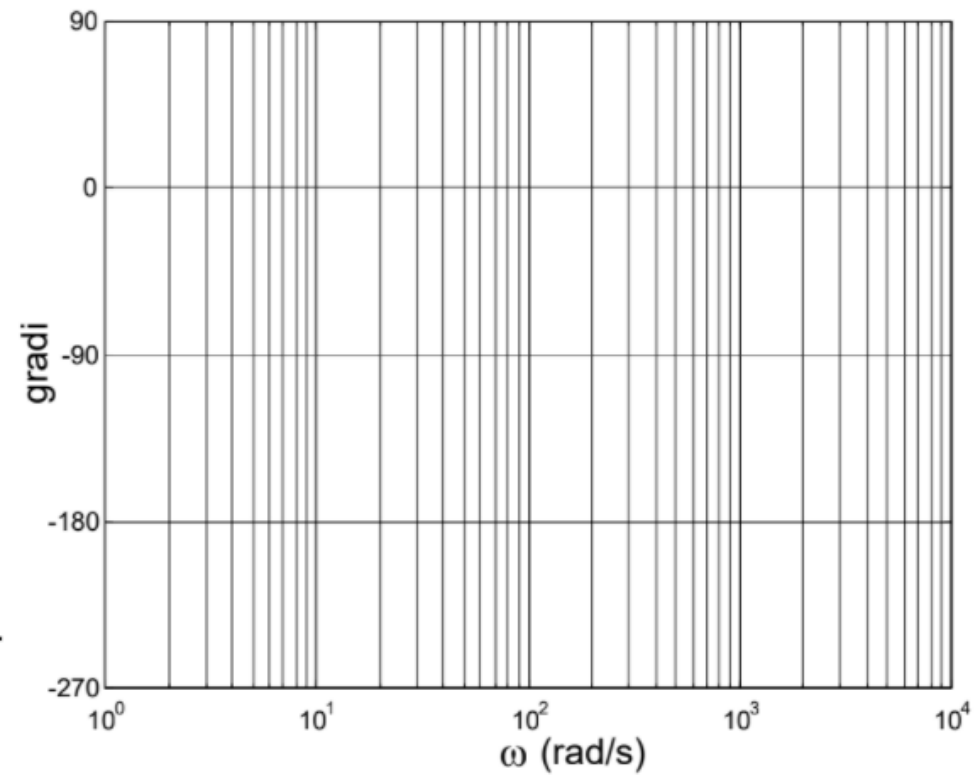
# Diagrama de bode Fase

➤ Ordenada en Grados

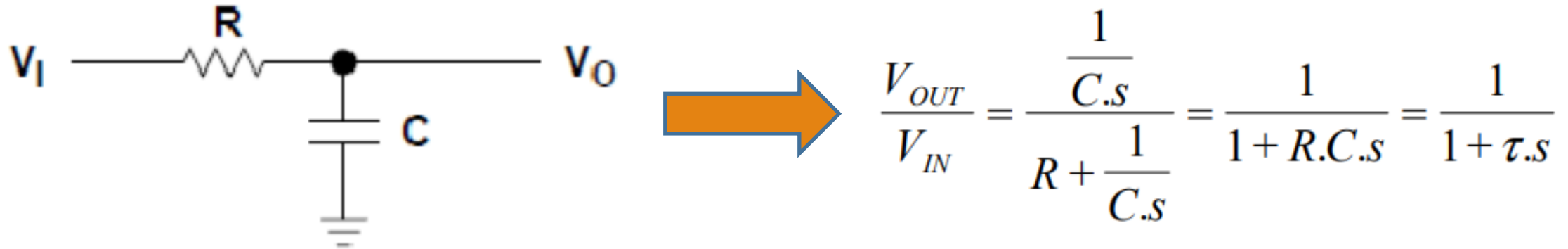
$$\angle G(j\omega)$$

➤ Abscisa en escala  
logaritmica

$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



## Diagrama de bode



Donde  $s = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  y  $R.C = \tau$

El módulo de la función de transferencia es:  $\left| V_{OUT} / V_{IN} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\tau.\omega)^2}}$

# Diagrama de bode

Donde  $s = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  y  $R.C = \tau$

El módulo de la función de transferencia es:  $|V_{OUT}/V_{IN}| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\tau.\omega)^2}}$

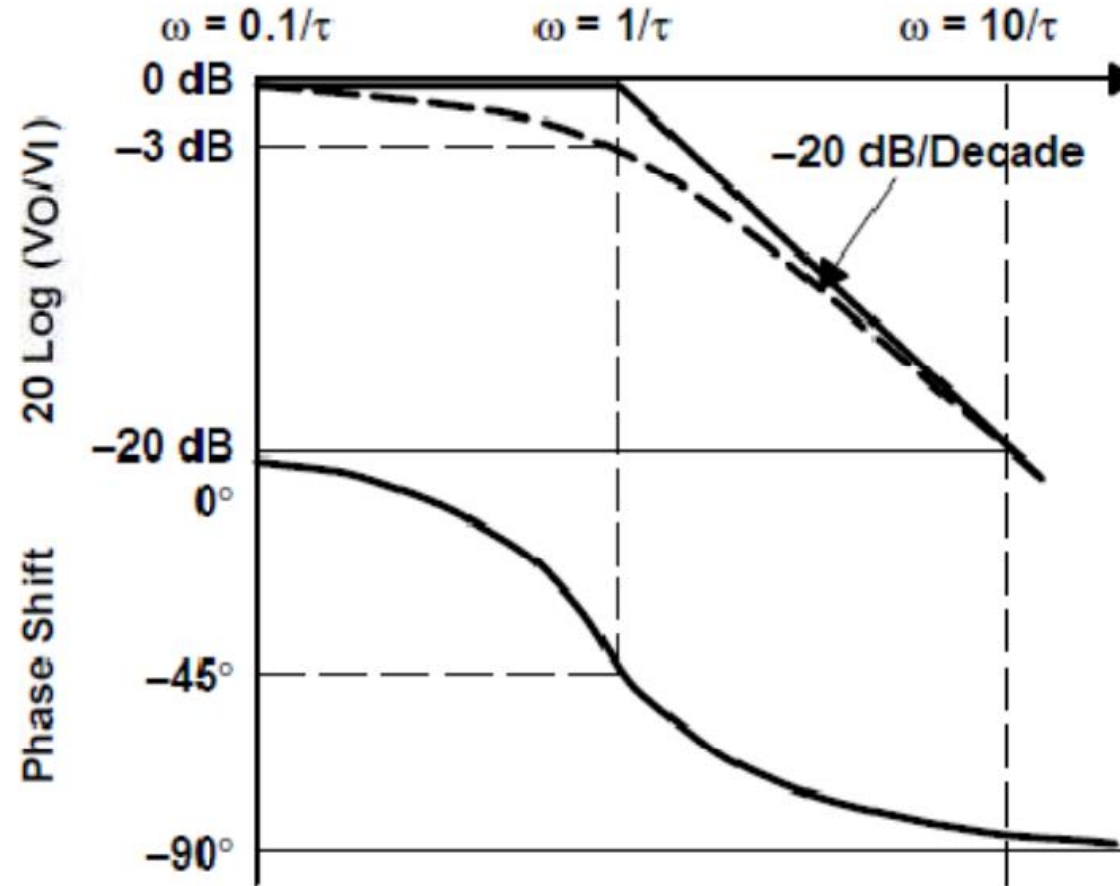
El módulo  $|V_{OUT}/V_{IN}| \cong 1$  cuando  $\omega = 0,1/\tau$ , es igual a 0,707 cuando  $\omega = 1/\tau$  y es aproximadamente igual a 0,1 cuando  $\omega = 10/\tau$ . Estos puntos son utilizados en la gráfica de la figura para realizar una aproximación asintótica del diagrama.

---

El diagrama de fase para el filtro pasa bajo o cualquier otra función de transferencia es calculado según la siguiente ecuación:

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}}\right) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega.\tau}{1}\right)$$

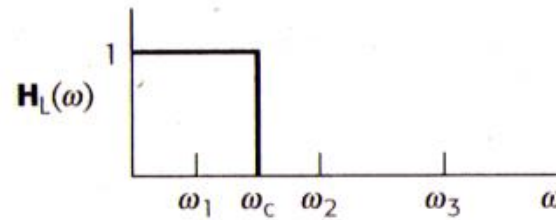
## Diagrama de bode del filtro pasa bajos pasivo



# Tipos de filtros

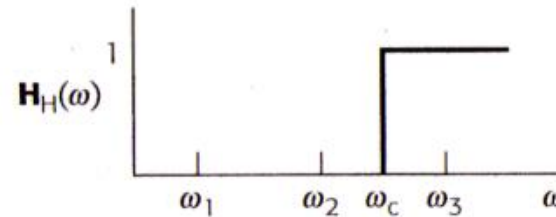
$$v_{ent}(t) = \cos \omega_1 \cdot t + \cos \omega_2 \cdot t + \cos \omega_3 \cdot t$$

Pasabajas



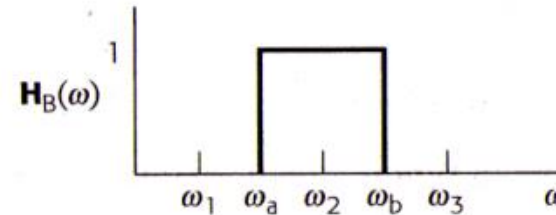
$$v_{ent}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t \quad \rightarrow \quad \boxed{H_L(\omega)} \quad \rightarrow \quad v_{sal}(t) = \cos \omega_1 t$$

Pasaaltas



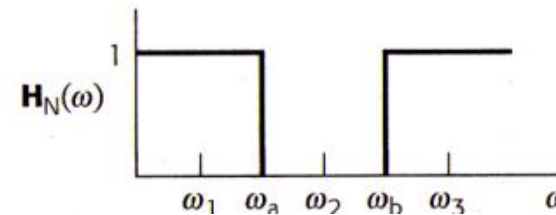
$$v_{ent}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t \quad \rightarrow \quad \boxed{H_H(\omega)} \quad \rightarrow \quad v_{sal}(t) = \cos \omega_3 t$$

Pasabanda



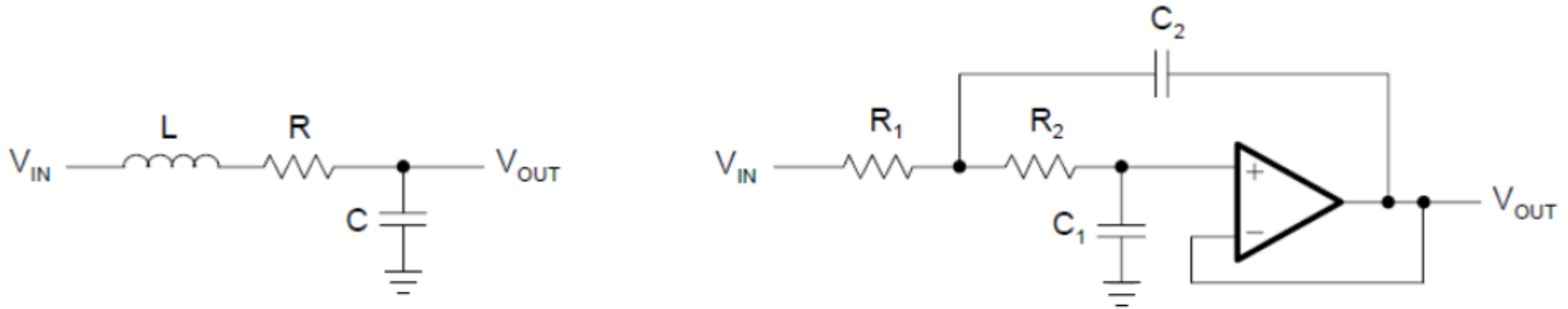
$$v_{ent}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t \quad \rightarrow \quad \boxed{H_B(\omega)} \quad \rightarrow \quad v_{sal}(t) = \cos \omega_2 t$$

Supresor de banda  
(de muesca)



$$v_{ent}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t \quad \rightarrow \quad \boxed{H_N(\omega)} \quad \rightarrow \quad v_{sal}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_3 t$$

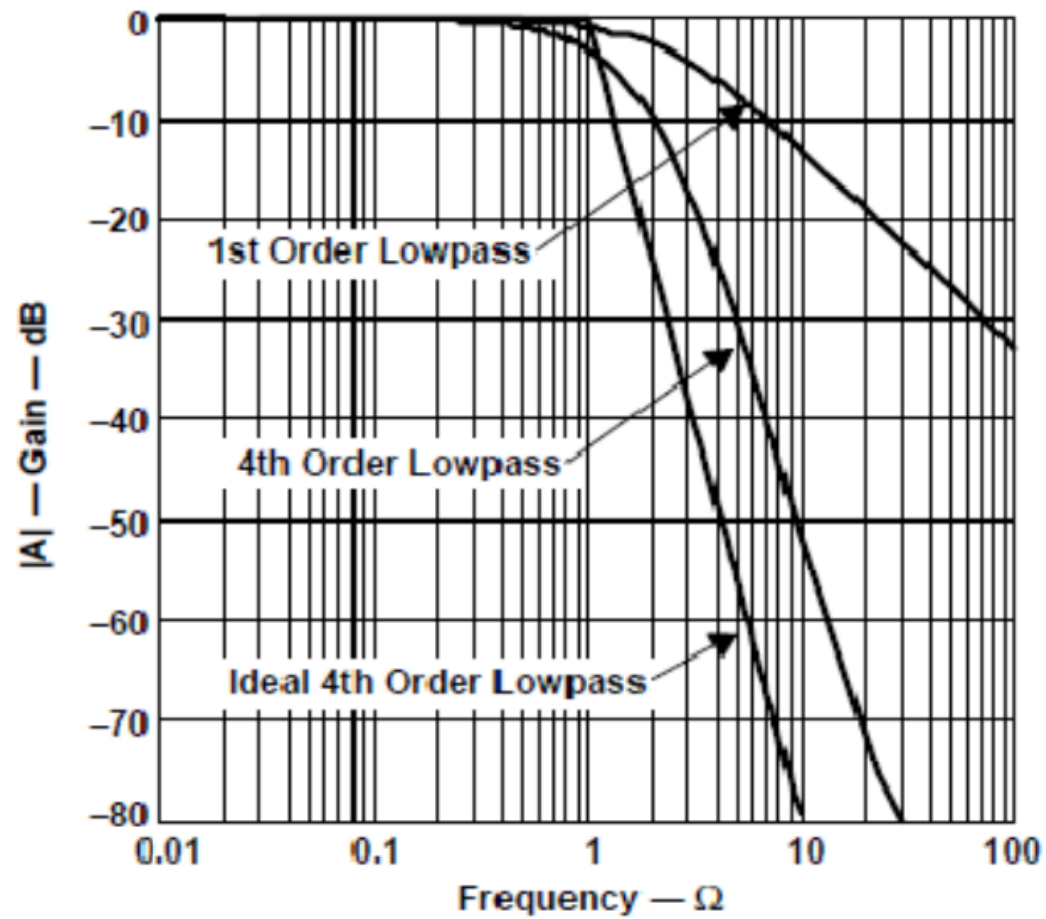
# Tipos de filtros pasivos y activos



Filtro pasa bajo de segundo orden pasivo y activo.

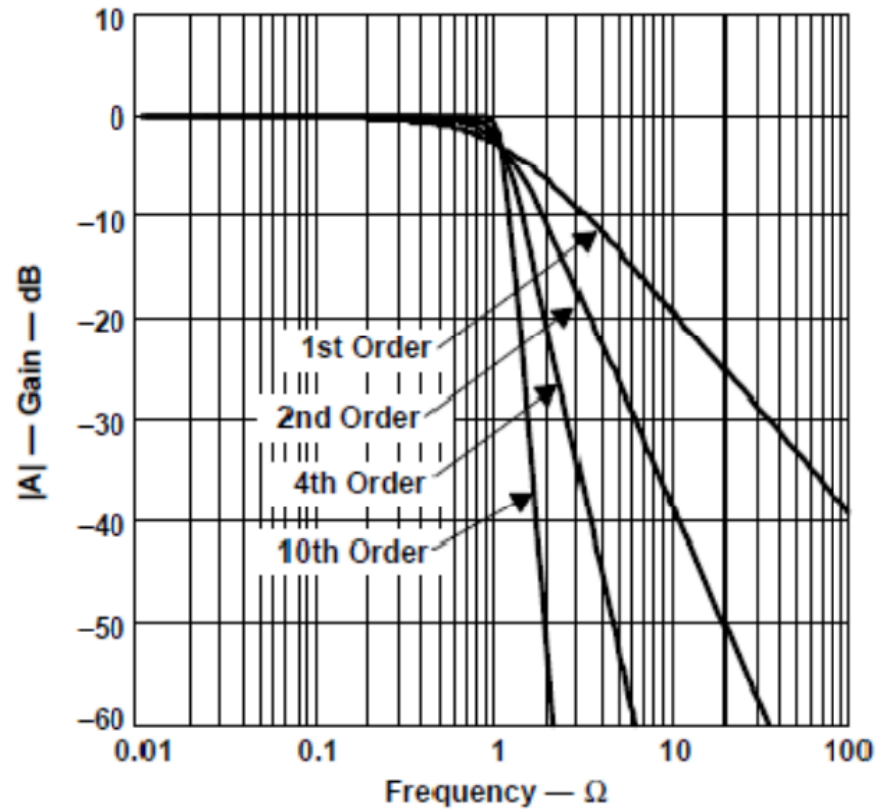


## Respuesta del filtro según el orden



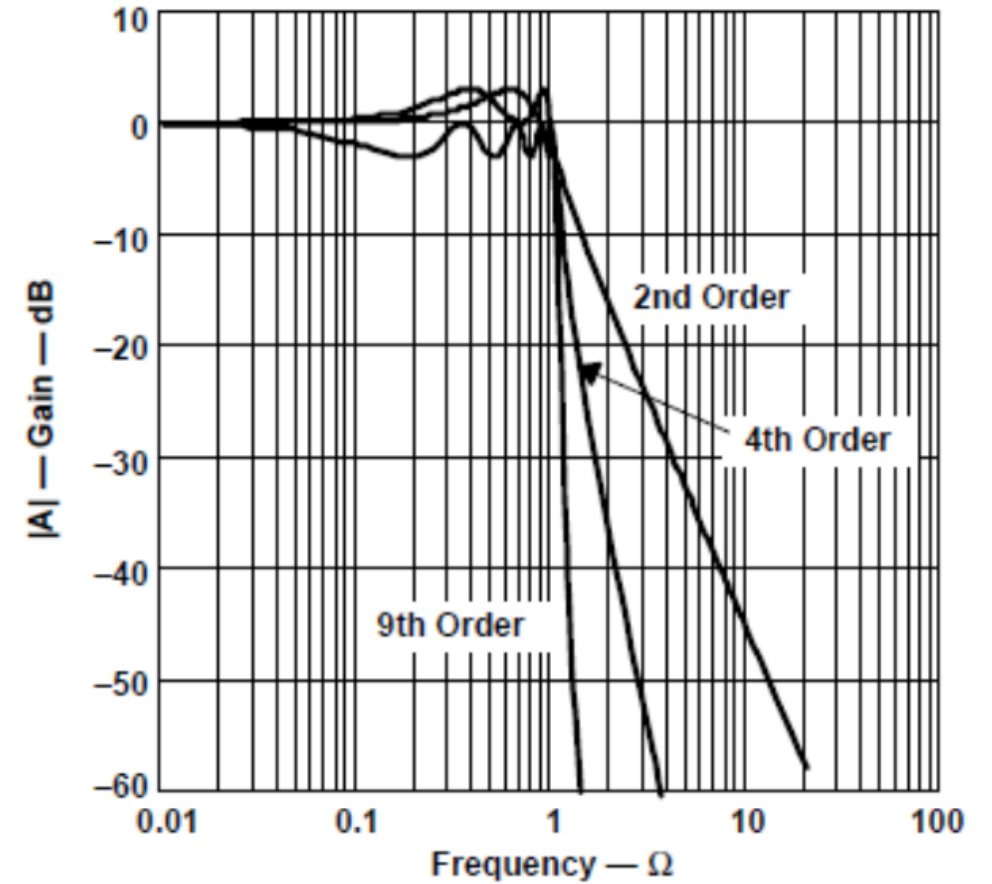
# Filtros Predefinidos

## FILTRO PASA BAJO DE BUTTERWORTH



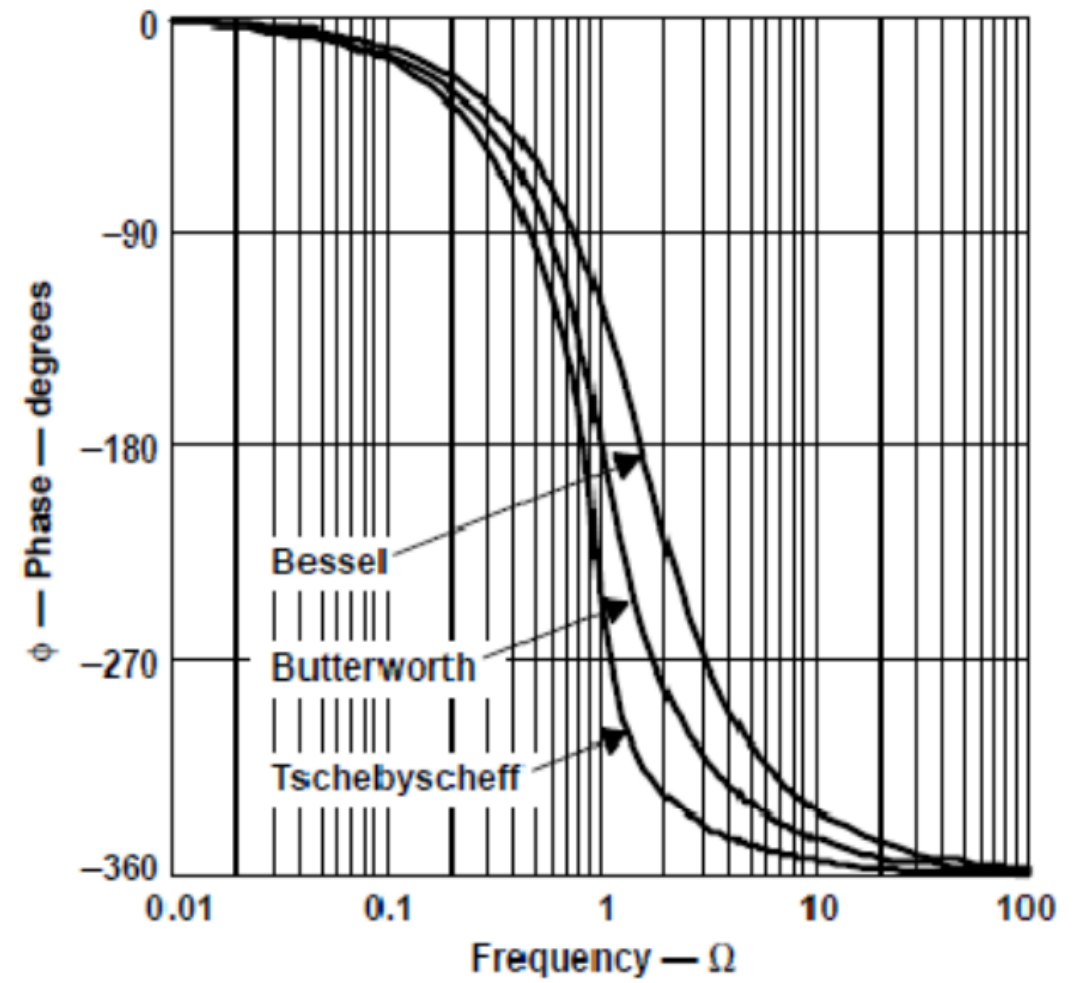
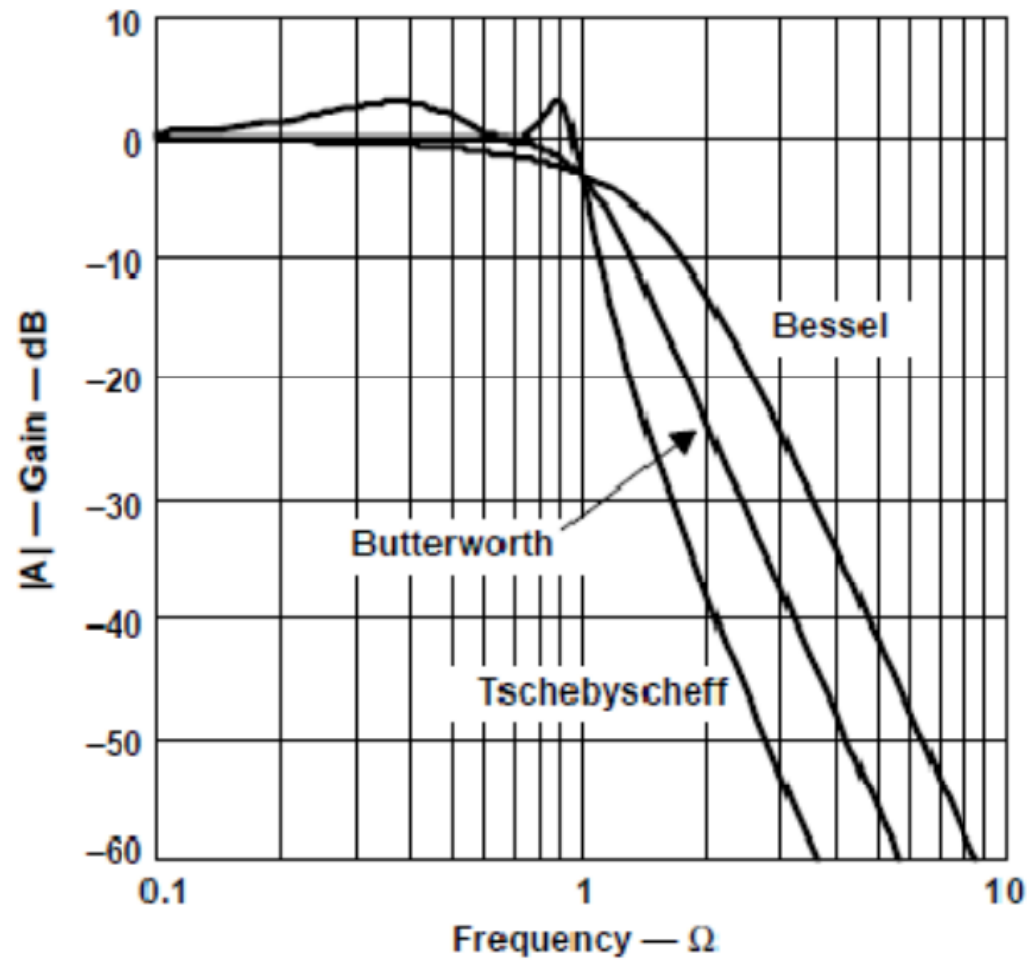
Respuesta amplitud-frecuencia de un filtro pasa bajo de Butterworth.

## FILTRO PASA BAJO DE CHEBYSHEV



Respuesta amplitud-frecuencia de un filtro pasa bajo de Chebyshev.

## Diferencias en diagramas de magnitud y fase



# Funciones transferencias

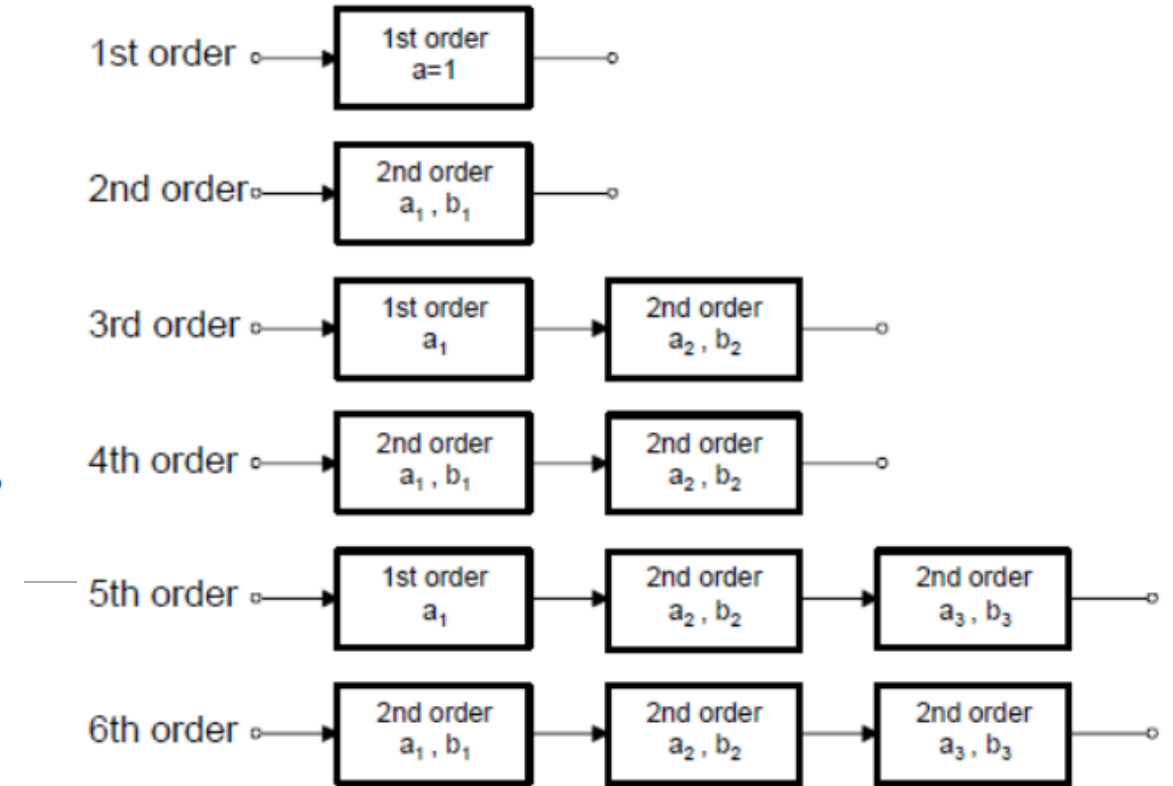
La función de transferencia de un filtro pasa bajo tiene la forma general:

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + a_1s + b_1s^2)(1 + a_2s + b_2s^2) \dots (1 + a_ns + b_ns^2)}$$

Donde  $a_n$  y  $b_n$  son reales y positivos. Para  $n$  de orden impar, el coeficiente  $b_1$  es cero.

Como ya se había mencionada anteriormente, en un filtro de 1° orden el coeficiente  $b$  siempre es cero, por lo que la ecuación anterior la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + a_1s}$$

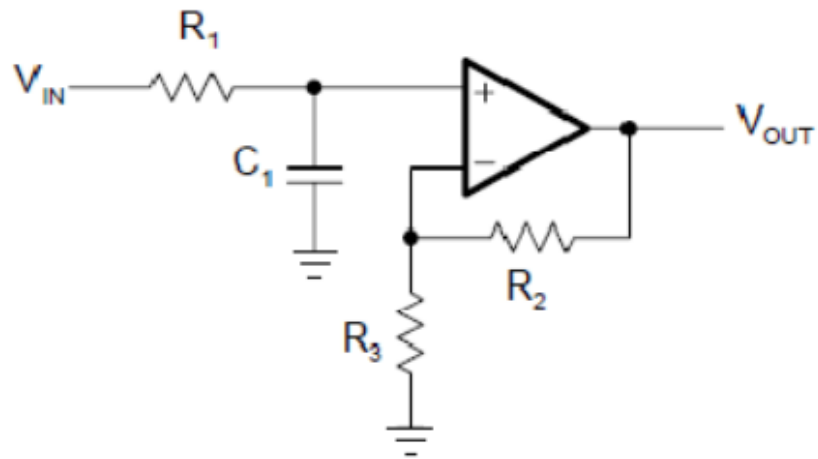


# Tablas

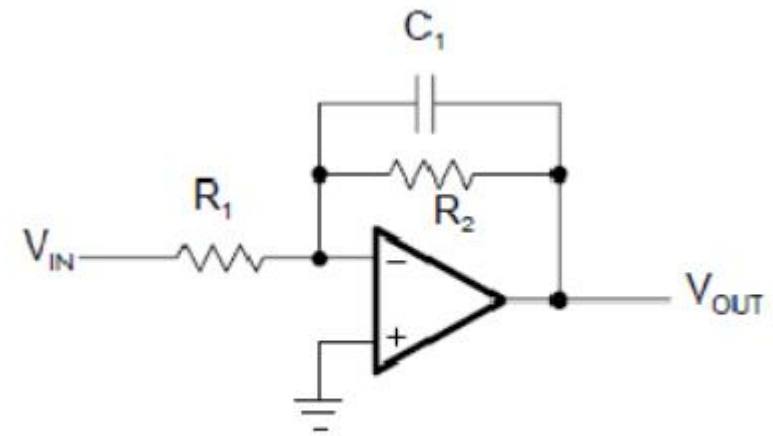
n	i	a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>	k <sub>i</sub> = f <sub>ci</sub> / f <sub>C</sub>	Q <sub>i</sub>
1	1	1.0000	0.0000	1.000	—
2	1	1.4142	1.0000	1.000	0.71
3	1	1.0000	0.0000	1.000	—
	2	1.0000	1.0000	1.272	1.00
4	1	1.8478	1.0000	0.719	0.54
	2	0.7654	1.0000	1.390	1.31
5	1	1.0000	0.0000	1.000	—
	2	1.6180	1.0000	0.659	0.62
	3	0.6180	1.0000	1.448	1.62
6	1	1.9319	1.0000	0.676	0.52
	2	1.4142	1.0000	1.000	0.71
	3	0.5176	1.0000	1.479	1.93
7	1	1.0000	0.0000	1.000	—
	2	1.8019	1.0000	0.745	0.55
	3	1.2470	1.0000	1.117	0.80
	4	0.4450	1.0000	1.499	2.25
8	1	1.9616	1.0000	0.661	0.51
	2	1.6629	1.0000	0.829	0.60
	3	1.1111	1.0000	1.206	0.90
	4	0.3902	1.0000	1.512	2.56
9	1	1.0000	0.0000	1.000	—
	2	1.8794	1.0000	0.703	0.53
	3	1.5321	1.0000	0.917	0.65
	4	1.0000	1.0000	1.272	1.00
	5	0.3473	1.0000	1.521	2.88
10	1	1.9754	1.0000	0.655	0.51
	2	1.7820	1.0000	0.756	0.56
	3	1.4142	1.0000	1.000	0.71
	4	0.9080	1.0000	1.322	1.10
	5	0.3129	1.0000	1.527	3.20

· Coeficientes de Butterworth.

# Ejemplo



Filtro pasa bajo de 1°orden en configuración no inversora .



Filtro pasa bajo de 1°orden en configuración inversora.

# Ejemplo

La función de transferencia de estos circuitos es:

$$A(s) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_3}}{1 + \omega_c \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot s} \quad \text{y} \quad A(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \omega_c \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot s}$$

El signo negativo indica que el amplificador inversor produce un cambio de fase de  $180^\circ$  en la señal de entrada. Es decir que a la salida obtendremos la señal de entrada invertida.

Comparando los coeficientes de ambas funciones de transferencia obtenemos:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + \frac{R_2}{R_3} & \text{y} & & A_0 &= -\frac{R_2}{R_1} \\ a_1 &= \omega_c \cdot R_1 \cdot C_1 & \text{y} & & a_1 &= \omega_c \cdot R_2 \cdot C_1 \end{aligned}$$

---

Para el diseño del circuito, tendremos como dato la frecuencia de corte ( $f_c$ ), la ganancia del circuito ( $A_0$ ) y el valor de  $C_1$  que será definido de antemano. Con estos datos solo nos resta calcular  $R_1$  y  $R_2$ .

---

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a_1}{2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot C_1} & \text{y} & & R_2 &= \frac{a_1}{2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot C_1} \\ R_2 &= R_3 \cdot (A_0 - 1) & \text{y} & & R_1 &= -\frac{R_2}{A_0} \end{aligned}$$

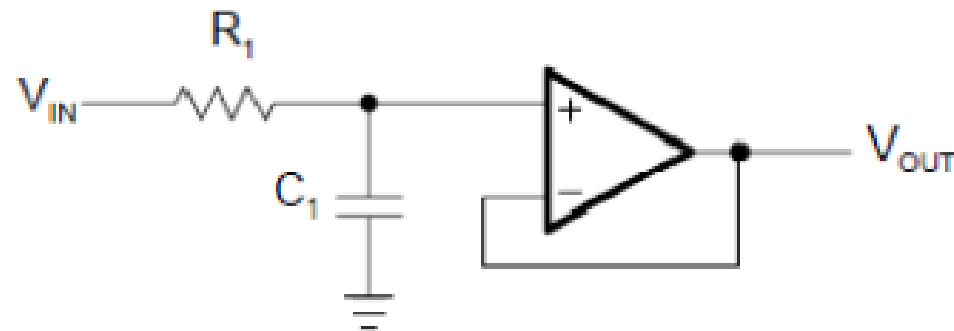
El coeficiente  $a_1$  se obtiene por tabla (ver apartado 10). Para los filtros de 1º orden de todos los tipos, este coeficiente toma el valor 1, sin embargo, para filtros de un orden superior este coeficiente toma valores diferentes a 1.

## Ejemplo

Diseño de un filtro pasa bajo de 1°orden con ganancia unitaria.

Diseñar un filtro pasa bajo de 1°orden con una frecuencia de corte  $f_c = 1 \text{ kHz}$  y  $C_1 = 47 \text{ nF}$ .

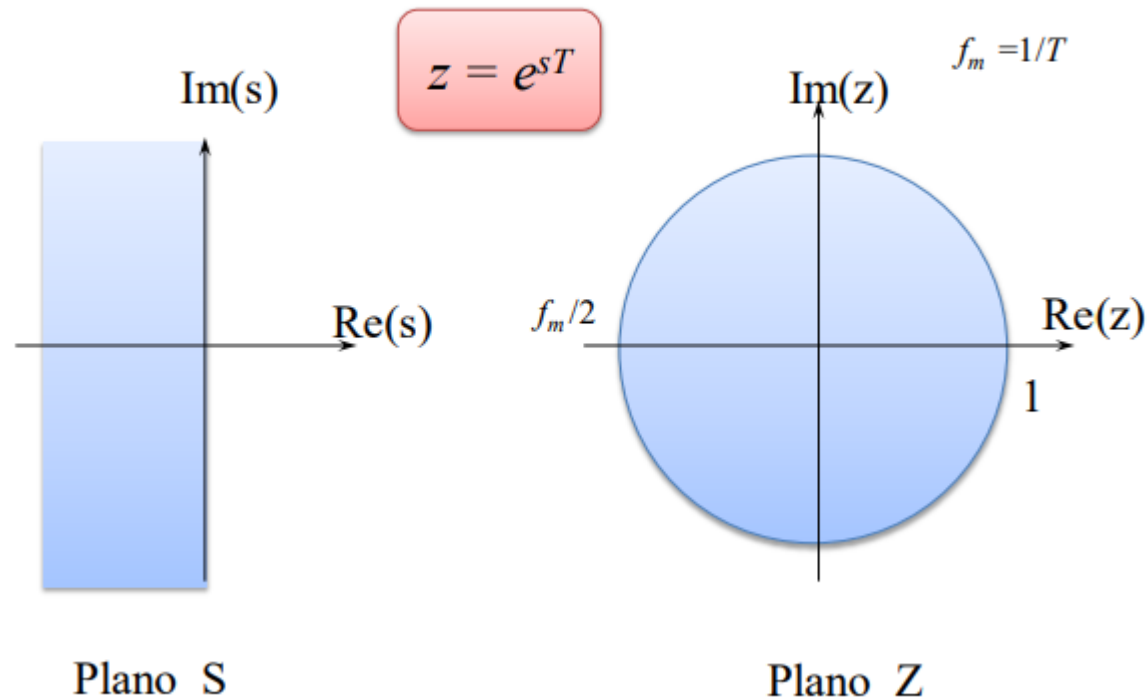
$$R_1 = \frac{a_1}{2.\pi.f_c.C_1} = \frac{1}{2.\pi.1.10^3 \text{ Hz}.47.10^{-9} \text{ F}} = 3,38 \text{ k}\Omega$$





# Transformadas conformes

## Relación entre TZ y TL...

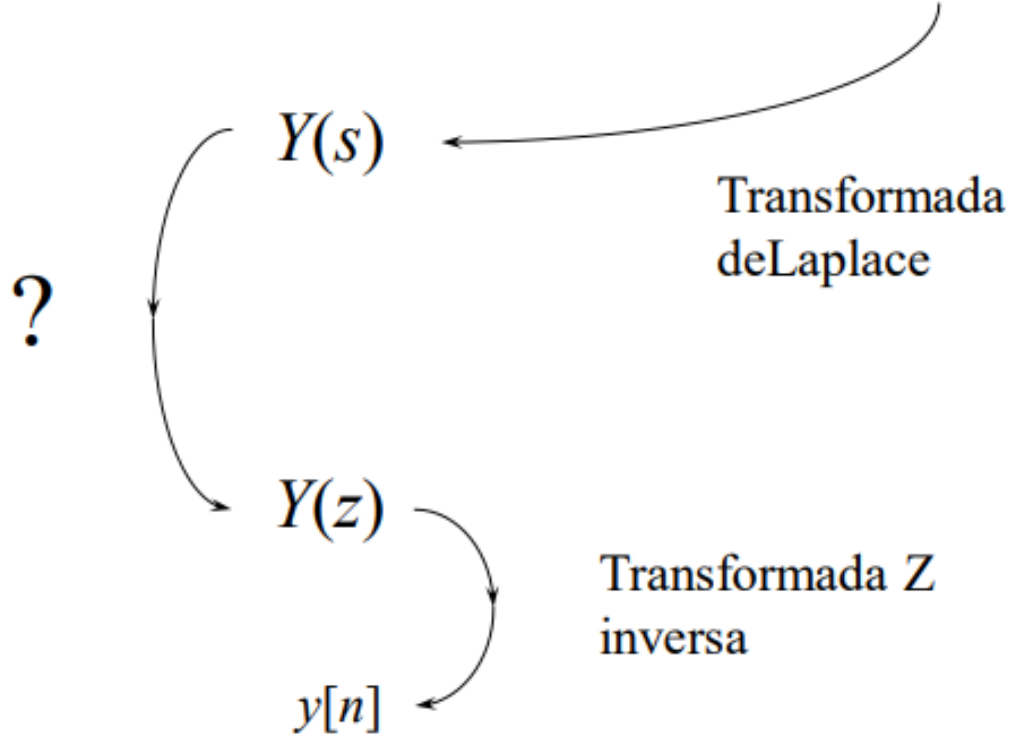


- La TZ,  $X(z)$ , de una secuencia  $x(nT)$  no es otra cosa que la TL de la señal muestreada  $x^*(t)$  con  $e^{sT}$  sustituida por la variable  $z$ .
- Esto define un mapeo entre el plano  $S$  y el plano  $Z$  denominado mapeo ideal:

$$s = \ln(z/T)$$

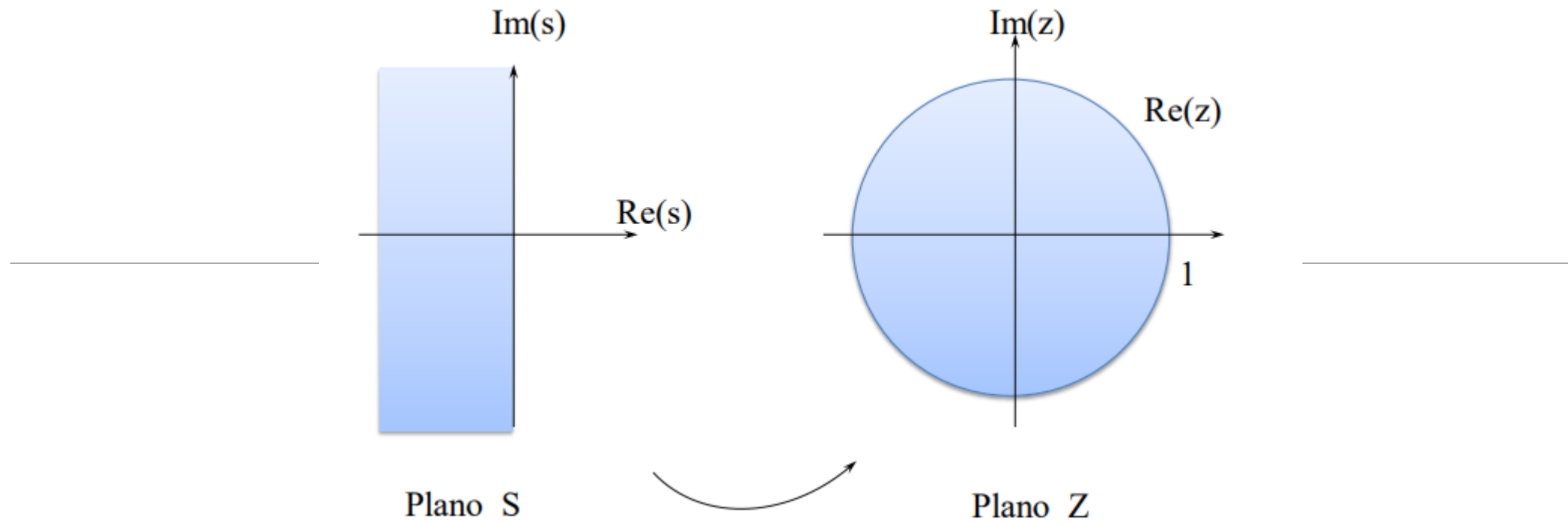
# Transformadas conformes

$$dy^n(t)/dt = f(dx^m(t)/dt, \dots, x(t), dy^{n-1}(t)/dt, \dots, y(t))$$



# Transformaciones Conformes

$$S \longrightarrow Z$$



# Transformadas conformes

- Transformación “ideal”
- Transformación de Euler
- Transformación Bilineal

# Transformación de Euler

- La transformación de Euler aproxima la derivada de una función continua  $dy/dt$  por un cociente incremental:

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right] = \left[ \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \right]$$

$T$ : período de muestreo

De modo que:

$$L\left[ \frac{dy}{dt} \right] = sY(s)$$

se transforma en:

$$Z\left[ \frac{dy}{dt} \right] = Z\left[ \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \right] = \frac{(1 - z^{-1})Y[z]}{T}$$

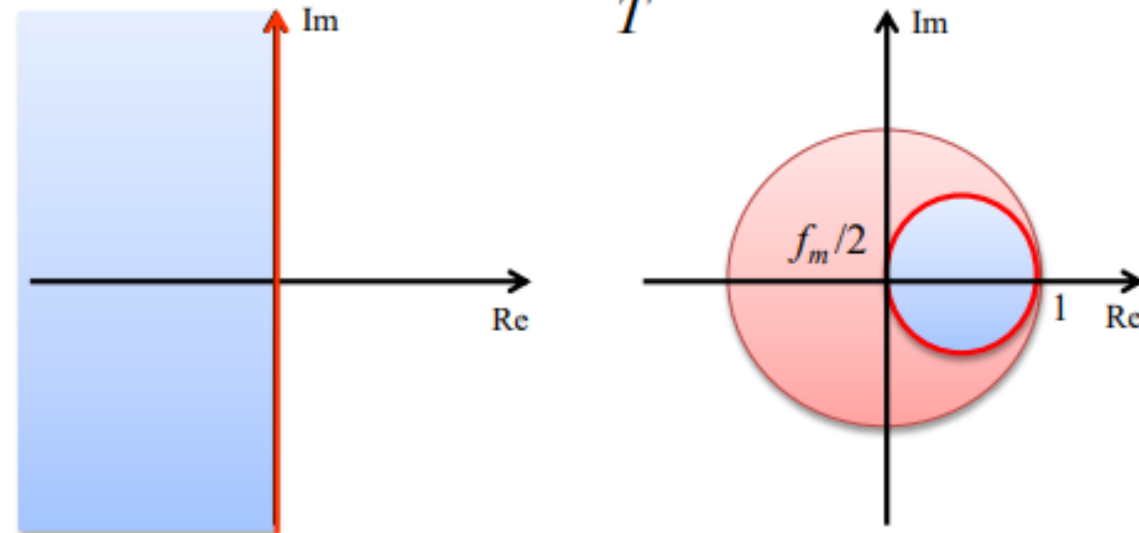
---

De lo anterior se deduce que el mapeo entre el plano  $S$  y el plano  $Z$  queda definido por:

$$s = \frac{(1 - z^{-1})}{T}$$

# Transformación de Euler

$$s = \frac{(1 - z^{-1})}{T}$$



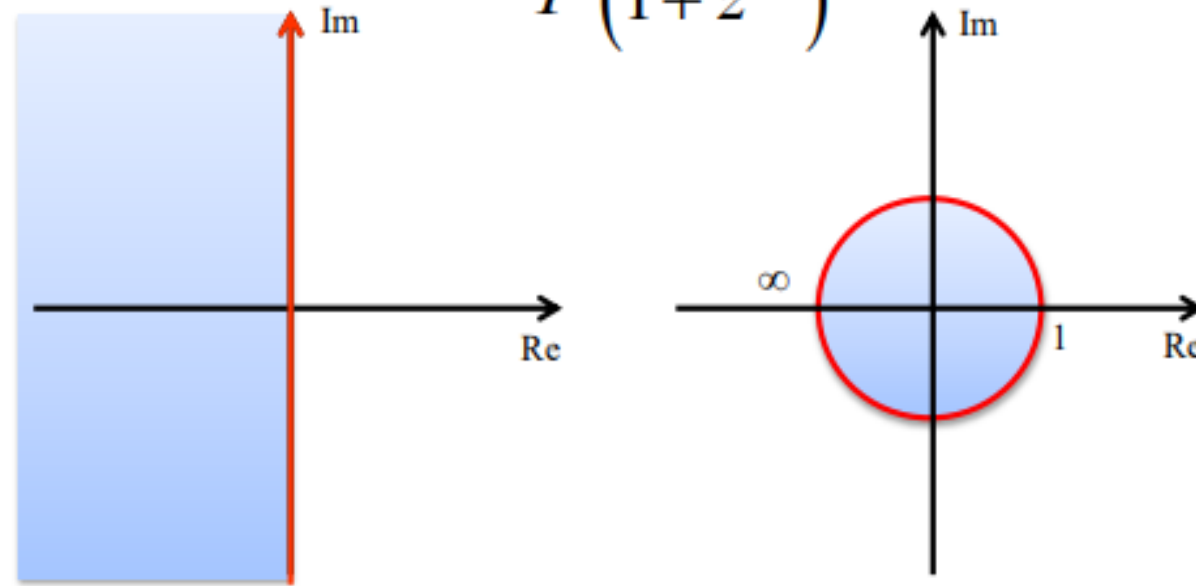
Plano S

Plano Z

- Esta transformación puede ser utilizada únicamente en el mapeo de sistemas tipo pasa bajo, con frecuencias de corte bajas, ya que no cumple con todas las condiciones de mapeo.

# Transformación de Bilineal

$$s = \frac{2}{T} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}$$



Plano S

Plano Z

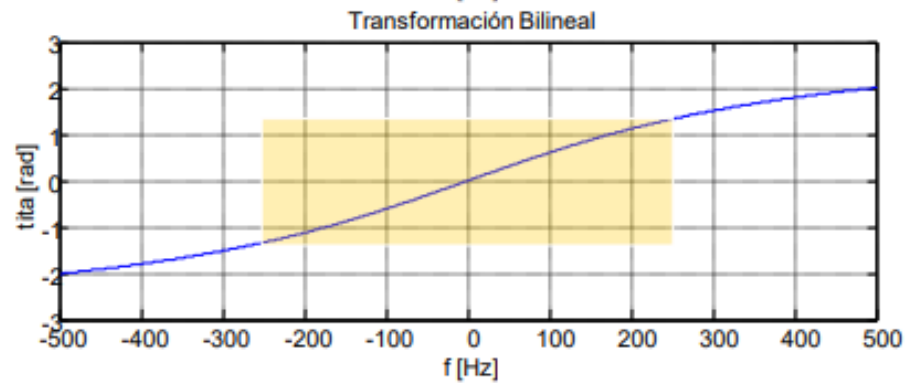
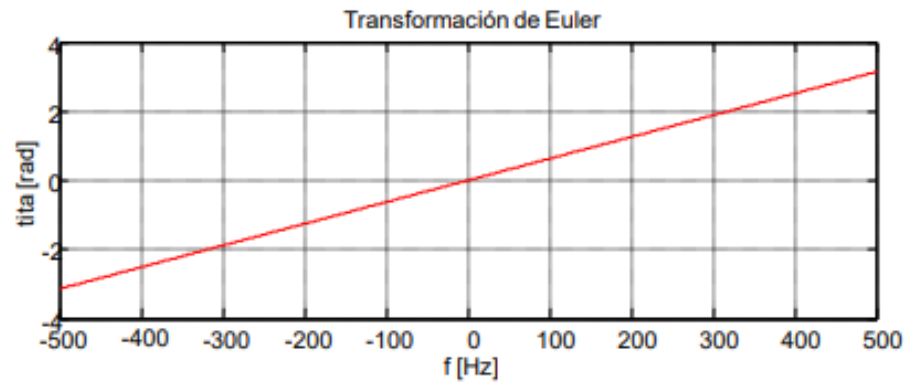
Evaluar  $z$  sobre el círculo unitario ( $z = e^{j\omega}$ ) es equivalente a evaluar  $s$  en el eje imaginario  $j\Omega$ , esto es:

$$j\Omega = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2}{T} \left( \frac{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \left( \frac{2j}{2j} \right)}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) \left( \frac{2}{2} \right)} \right) = j \frac{2}{T} \left( \frac{\text{sen}(\omega / 2)}{\cos(\omega / 2)} \right)$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}$$



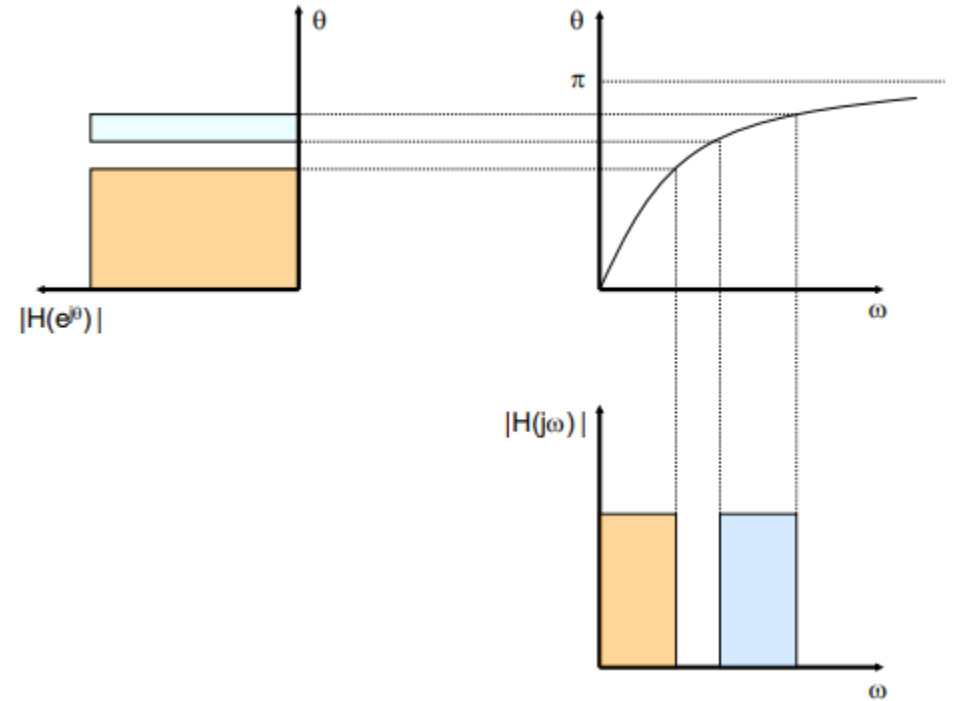
# Transformación de Bilineal



$$\theta = \omega T$$

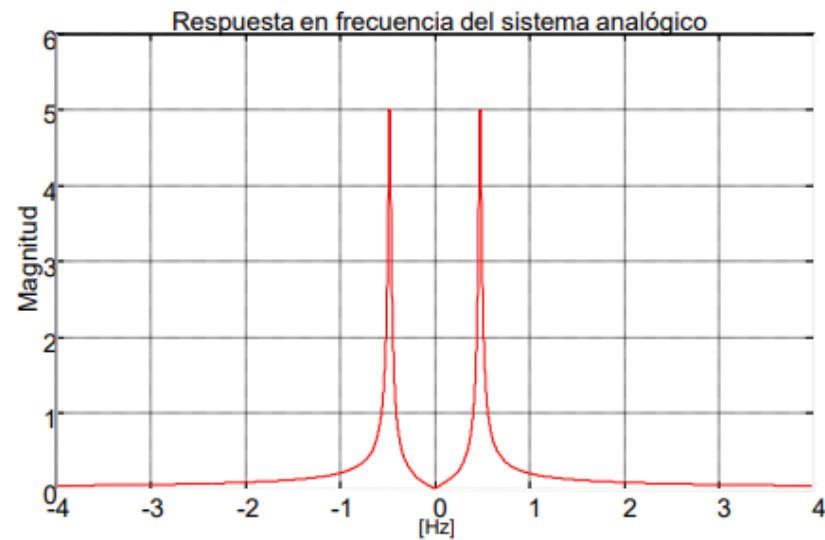
$$f_m = 1 \text{ kHz}$$

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

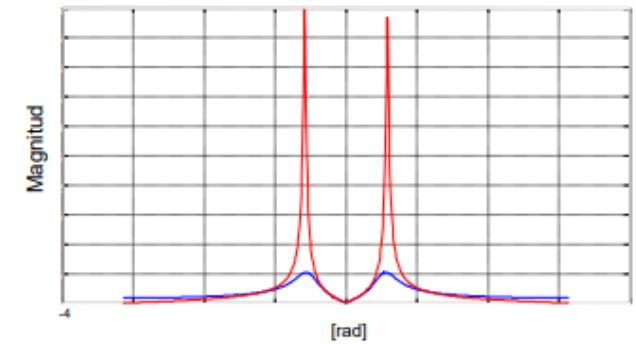


# Ejemplo

$$H(s) = \frac{1 + 0,1s}{s^2 + 0,2s + 9,01}$$

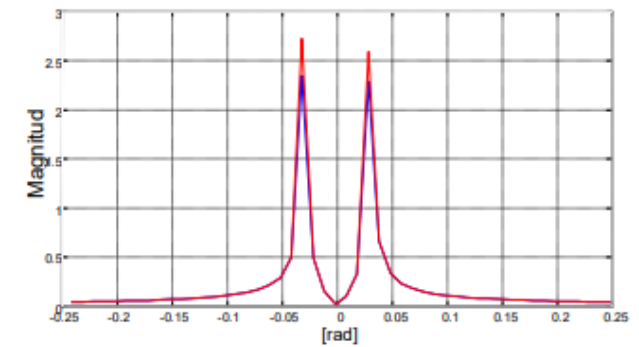


$f_m = 5$  Hz



Respuesta en frecuencia del sistema discreto  
(Azul: Euler, Rojo: Bilineal)

$f_m = 100$  Hz

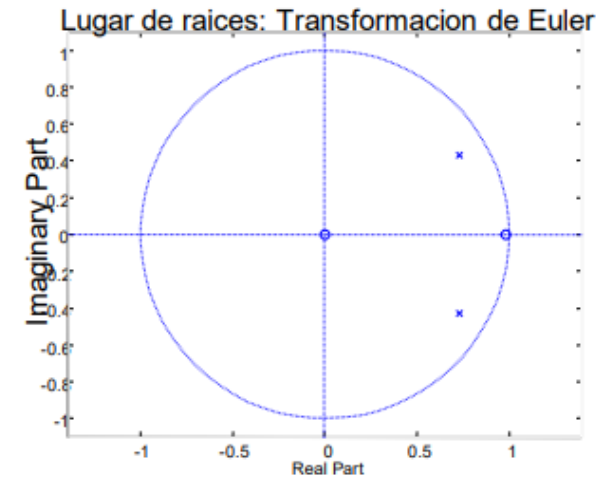
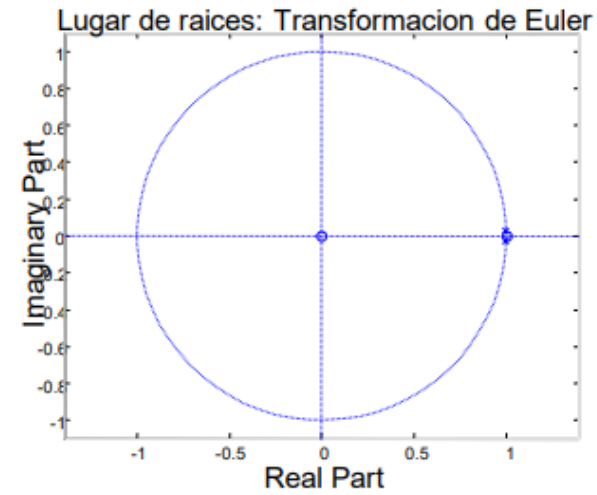


# Ejemplo

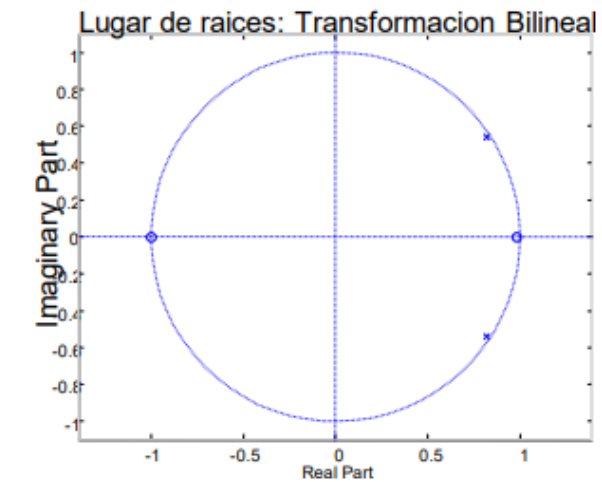
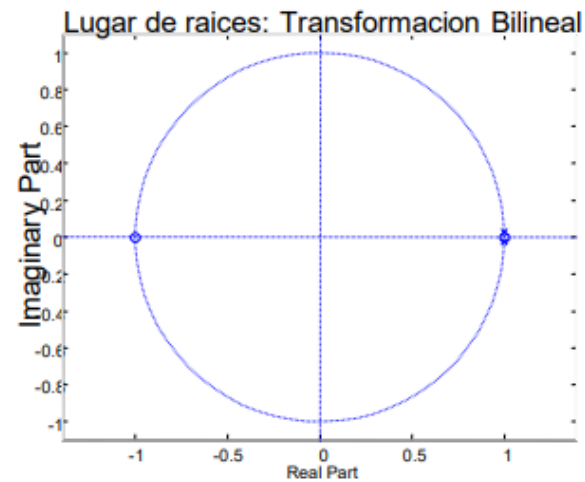
$$f_m = 100 \text{ Hz}$$

$$f_m = 5 \text{ Hz}$$

Euler



Bilinear



# Conclusión

La transformación de Euler puede ser utilizada sin problemas únicamente en el mapeo de sistemas del tipo pasabajos y pasabanda, ya que no cumple perfectamente con las dos condiciones de mapeo mencionadas.

La condición de que el eje imaginario del plano  $s$  se mapee en el círculo unitario, se aproxima aceptablemente hasta  $\theta < \pi/6$  radianes. Supongamos que se dispone de una secuencia  $x[n]$ , con un periodo de muestreo  $T = 1/f_m$ .

Por el teorema del muestreo, se tiene que  $f_m > 2f_M$ , con  $f_M$  la frecuencia máxima presente en  $x[n]$ . Además, como  $\theta = 2\pi f$ , y teniendo en cuenta la restricción  $\theta < \pi/6$  rad., se tendrá que  $f_M < f_m/12$  para así cumplir con la condición que el eje imaginario del plano  $s$  se mapee aproximadamente sobre la circunferencia unidad en el plano  $z$ .

