Ejemplos

Ejemplo de ecuaciones recursivas

Considere un sistema LTI con la entrada u(k) y la salida y(k) descritas utilizando la siguiente función de transferencia

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{4z^2-z+2}{z^2+2z+2}$$

Se tiene entonces

$$Y(z)\left(z^2+2z+2\right)=\left(4z^2-z+2\right)U(z)$$

$$z^2Y(z)+2zY(z)+2Y(z)=4z^2U(z)-zU(z)+2U(z)$$

Antitransformando y recordando la propiedad del anticipo:

$$y(k+2)+2y(k+1)+2y(k)=4u(k+2)-u(k+1)+2u(k)$$

Se obtiene

$$y(k+2)=-2y(k+1)-2y(k)+4u(k+2)-u(k+1)+2u(k)$$

$$y(k)=-2y(k-1)-2y(k-2)+4u(k)-u(k-1)+2u(k-2)$$

Ejemplo de ecuaciones recursivas

Calcular la respuesta impulsiva del sistema para

$$y(0), y(1), y(2), y(3)$$

Y la función de transferencia $$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

Se escribe la ecuación recursiva

$$\left(z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}\right)Y(z) = \left(z^2 + z + 1\right)U(z)$$

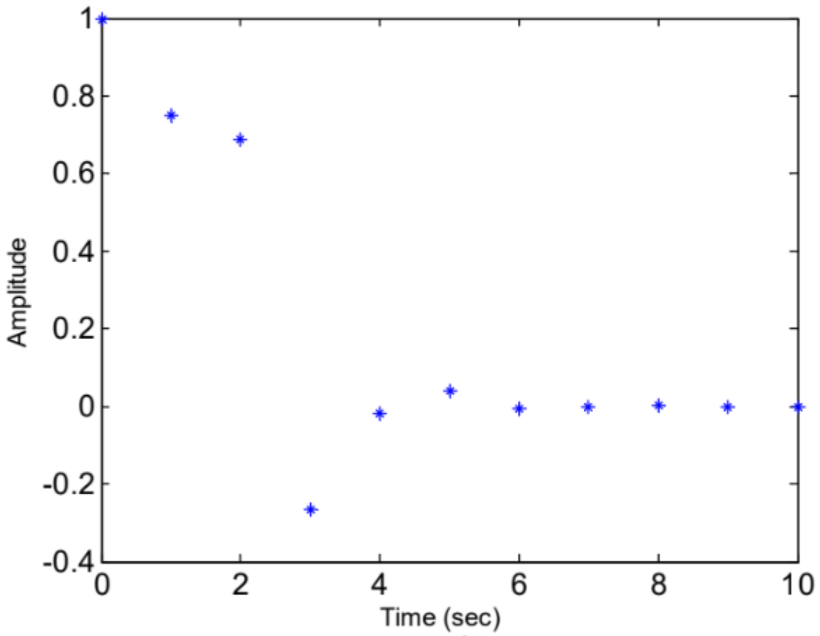
$$y(k+2) + \frac{1}{4}y(k+1) + \frac{1}{8}y(k) = u(k+2) + u(k+1) + u(k)$$

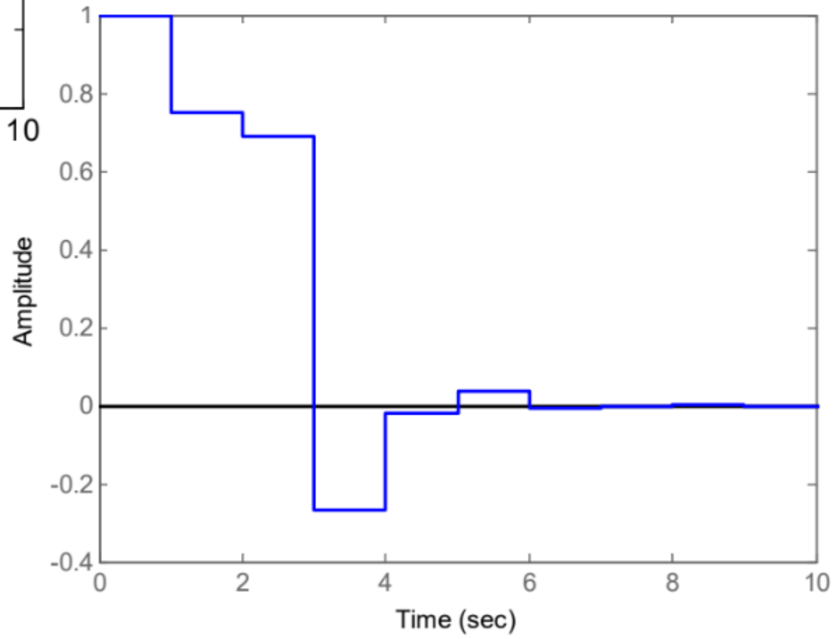
$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

$$u(k)=\mathrm{imp}(k)=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ 1 & k=0\end{cases}$$

$$y(k)=-\frac{1}{4}y(k-1)-\frac{1}{8}y(k-2)+u(k)+u(k-1)+u(k-2)$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0)=-\frac{1}{4}y(-1)-\frac{1}{8}y(-2)+u(0)+u(-1)+u(-2)=1$
1	0	$y(1)=-\frac{1}{4}y(0)-\frac{1}{8}y(-1)+u(1)+u(0)+u(-1)=\frac{3}{4}$
2	0	$y(2)=-\frac{1}{4}y(1)-\frac{1}{8}y(0)+u(2)+u(1)+u(0)=-\frac{3}{16}-\frac{1}{8}+1=\frac{11}{16}$
3	0	$y(3)=-\frac{1}{4}y(2)-\frac{1}{8}y(1)+u(3)+u(2)+u(1)=-\frac{11}{64}-\frac{3}{32}=-\frac{17}{64}$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
Amplitude
0
2
4
6
8
10
Time (sec)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
Amplitude
0
2
4
6
8
10
Time (sec)

Sistemas FIR(respuesta finita al impulso)

Son sistemas dinámicos LTI en tiempo discreto con todos los polos solamente en el origen.

Estos sistemas tienen la característica de que su respuesta al escalón unitario alcanza el valor en estado estacionario en un tiempo finito.
En particular, si n es el orden del sistema, el valor del régimen se alcanza después de n pasos.

Esta propiedad no se aplica a los sistemas LTI de tiempo continuo, dado que la respuesta escalón unitario nunca alcanza el valor régimen, pero si tiende asintóticamente.

Sistemas FIR(respuesta finita al impulso)

Por lo tanto, un sistema FIR de orden *n* se define por la siguiente función de transferencia:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n}$$

$$z^n Y(z) = \left(b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0\right) U(z)$$

$$y(k+n) = b_n u(k+n) + b_{n-1} u(k+n-1) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

$$y(k) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \cdots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n)$$

La salida en el tiempo *k* depende de las muestras de la entrada hasta el momento *k*-*n*.

Calculamos la respuesta al escalón

$$u(k)=\mathrm{sca}(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\geq 0\end{cases}$$

$$y(0)=b_n u(0)=b_n$$

$$y(1)=b_n u(1)+b_{n-1}u(0)=b_n+b_{n-1}$$

$$y(2)=b_n u(2)+b_{n-1}u(1)+b_{n-2}u(0)=b_n+b_{n-1}+b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$y(n)=b_n u(n)+b_{n-1}u(n-1)+\cdots+b_1u(1)+b_0u(0)=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+b_0=F(1)=\mu$$

$$y(n+1)=b_n u(n+1)+b_{n-1}u(n)+\cdots+b_1u(2)+b_0u(1)=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+b_0=F(1)=\mu$$

$$\vdots$$

$$y(n+m)=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+b_0=F(1)=\mu \qquad \forall\, m\geq 1$$

Ejemplo, calcular los primero 4 muestreos para la respuesta al escalón

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}}{z^3}$$

$$z^3Y(z)=\left(z^2+\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}\right)U(z)$$

$$y(k+3)=u(k+2)+\frac{5}{4}u(k+1)+\frac{3}{8}u(k)$$

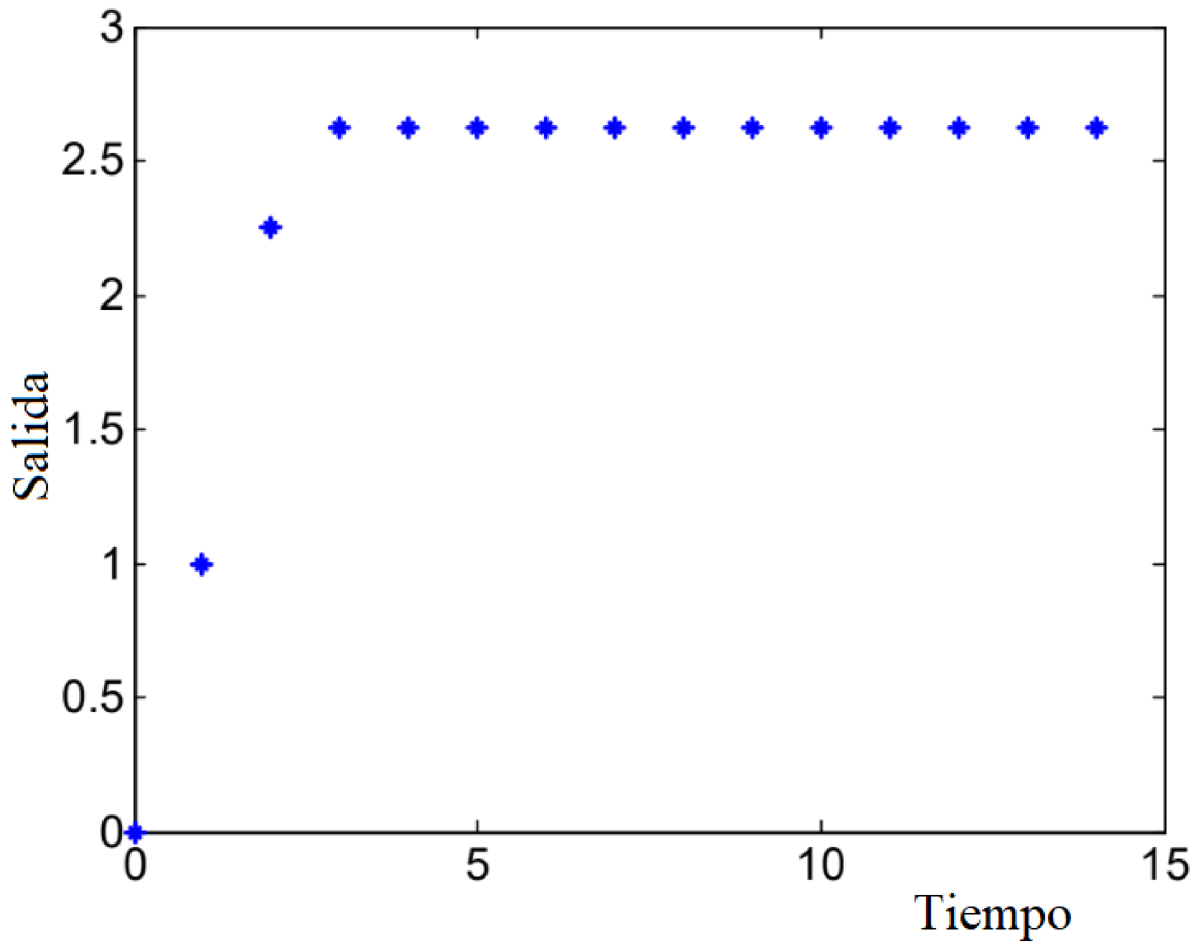
$$y(k)=u(k-1)+\frac{5}{4}u(k-2)+\frac{3}{8}u(k-3)$$

$$u(k)=\mathrm{sca}(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\geq 0\end{cases}$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0)=0+\frac{5}{4}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 0=0$
1	1	$y(1)=1+\frac{5}{4}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 0=1$
2	1	$y(2)=1+\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 0=\frac{9}{4}$
3	1	$y(3)=1+\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{21}{8}$
4	1	$y(4)=1+\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{21}{8}$

18

Ejemplo, calcular los primero 4 muestreos para la respuesta al escalón



Método de Representación de un sistema LTI SISO en tiempo discreto

1 Función de transferencia

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

2 Ecuación recursiva

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_k-n_b)$$

$n_k \geq 0$ retardo puro

3 ~~Variables de Estado~~

$$\cancel{\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}}$$

$$2 \longrightarrow 1$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_k-n_b)$$

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} Y(z) + b_0 z^{-n_k} U(z) + \cdots + b_{n_b} z^{-n_k-n_b} U(z)$$

$$Y(z)\left(1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}\right) = z^{-n_k}\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b}\right) U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-n_k}\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b}\right)}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}} =$$

$$= z^{n_a-n_b-n_k} \frac{b_0 z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \cdots + b_{n_b-1} z + b_{n_b}}{z^{n_a} - a_1 z^{n_a-1} - \cdots - a_{n_a}}$$

Ejemplo de pasaje de 2 a 1

$n_a \qquad n_k \qquad n_k + n_b$

$$y(k) = 0.25y(k-1) + 0.25y(k-3) + u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$

$$Y(z) = 0.25z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-3}Y(z) + z^{-3}U(z) + 0.5z^{-4}U(z) + 0.75z^{-5}U(z)$$

$$\left(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3}\right)Y(z) = z^{-3}\left(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2}\right)U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3}\left(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2}\right)}{\left(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3}\right)}$$

n_b

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\left(z^{2} + 0.5z + 0.75\right)}{z^{2}\left(z^{3} - 0.25z^{2} - 0.25\right)}$$

$-(n_a - n_k - n_b) \qquad n_a$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{2} + 0.5z + 0.75}{z^{5} - 0.25z^{4} - 0.25z^{2}}$$

$$\textcircled{1} \longrightarrow \textcircled{2}$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0 z^{m_b}+b_1 z^{m_b-1}+\cdots+b_{m_b-1}z+b_{m_b}}{z^{m_a}-a_1 z^{m_a-1}-\cdots-a_{m_a}}= \qquad m_a \geq m_b$$

$$=\frac{z^{m_b}\left(b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_{n_b-1}z^{-n_b+1}+b_{n_b}z^{-n_b}\right)}{z^{m_a}\left(1-a_1 z^{-1}-\cdots-a_{n_a}z^{-n_a}\right)}$$

$$Y(z)\left(1-a_1 z^{-1}-\cdots-a_{n_a}z^{-n_a}\right)=z^{m_b-m_a}\left(b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_{n_b-1}z^{-n_b+1}+b_{n_b}z^{-n_b}\right)U(z)$$

$$m_b-m_a=-n_k\leq 0 \quad \text{retardo puro}$$

$$y(k)=a_1 y(k-1)+\cdots+a_{n_a}y(k-n_a)+b_0 u(k-n_k)+\cdots+b_{n_b}u(k-n_k-n_b)$$

Ejemplo 1 a 2

m_b

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+0.5z+0.75}{z^5-0.25z^4-0.25z^2}$$

m_a

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2\left(1+0.5z^{-1}+0.75z^{-2}\right)}{z^5\left(1-0.25z^{-1}-0.25z^{-3}\right)}$$

$m_b - m_a = -n_k$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^{-3}\left(1+0.5z^{-1}+0.75z^{-2}\right)}{\left(1-0.25z^{-1}-0.25z^{-3}\right)}$$

$$\left(1-0.25z^{-1}-0.25z^{-3}\right)Y(z)=z^{-3}\left(1+0.5z^{-1}+0.75z^{-2}\right)U(z)$$

$$Y(z)-0.25z^{-1}Y(z)-0.25z^{-3}Y(z)=z^{-3}U(z)+0.5z^{-4}U(z)+0.75z^{-5}U(z)$$

$$y(k)-0.25y(k-1)-0.25y(k-3)=u(k-3)+0.5u(k-4)+0.75u(k-5)$$

$$y(k)=0.25y(k-1)+0.25y(k-3)+u(k-3)+0.5u(k-4)+0.75u(k-5)$$