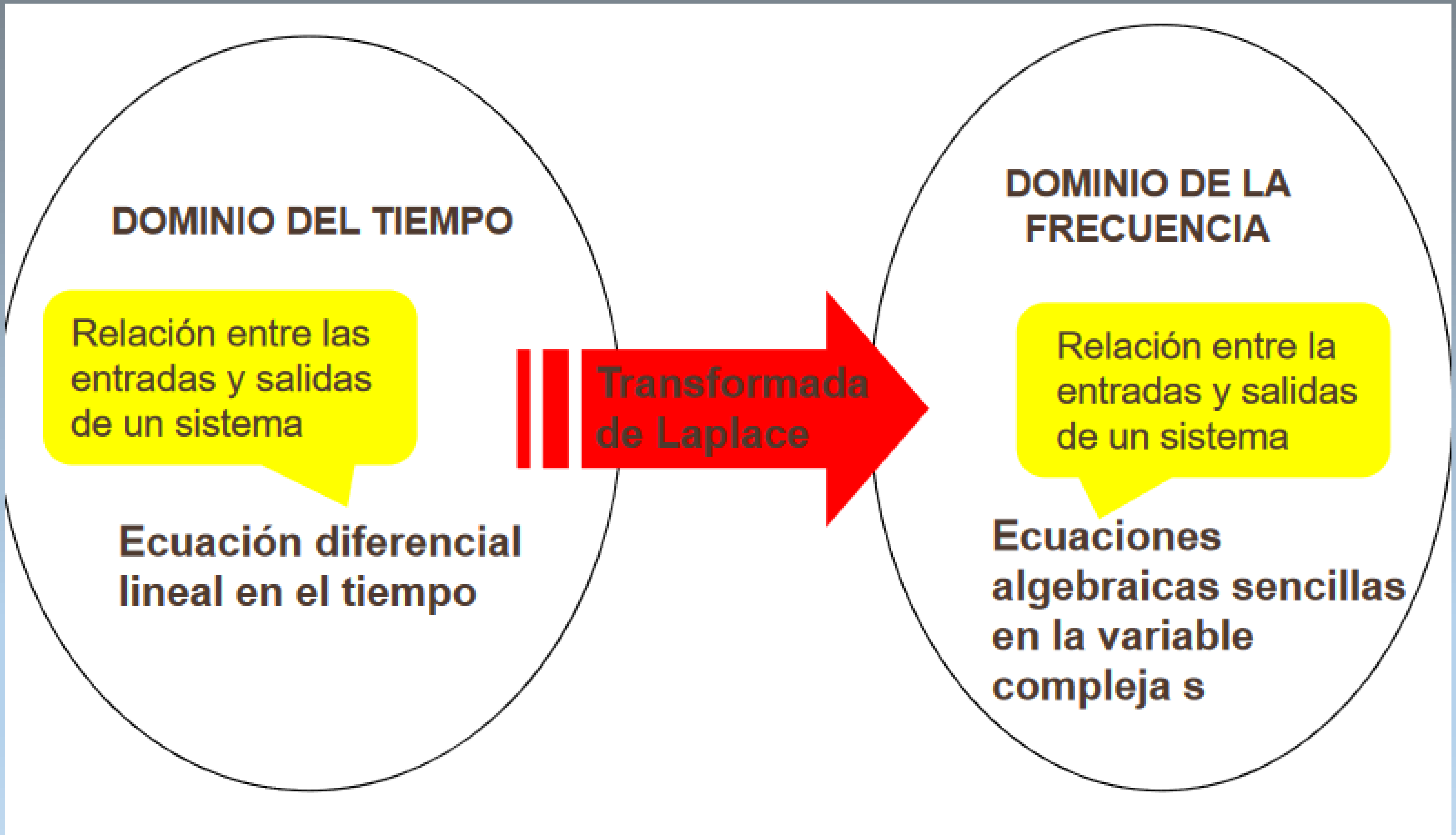
Procesamiento de Señales

Transformada Z

Objetivos

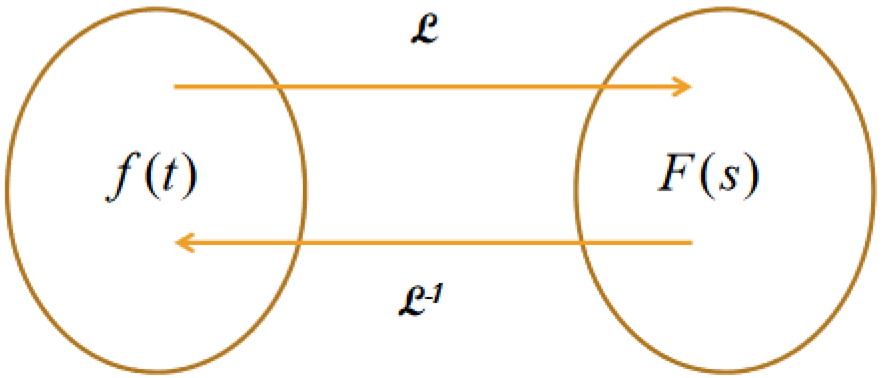
- Utilizar la transformada Z como herramienta para obtener la función de transferencia de un sistema de tiempo discreto.
- Obtener la respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo discreto.
- Analizar las limitaciones de las transformaciones conformes utilizadas.

Transformada de Laplace



Transformada de Laplace

La **transformada de Laplace** es una herramienta matemática que nos permite pasar del dominio temporal al frecuencial.



$$f(t) = 0, t \le 0$$

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$$

En donde F(s) es una función compleja de variable compleja:

$$s = \sigma + j\omega$$

Transformada de Laplace

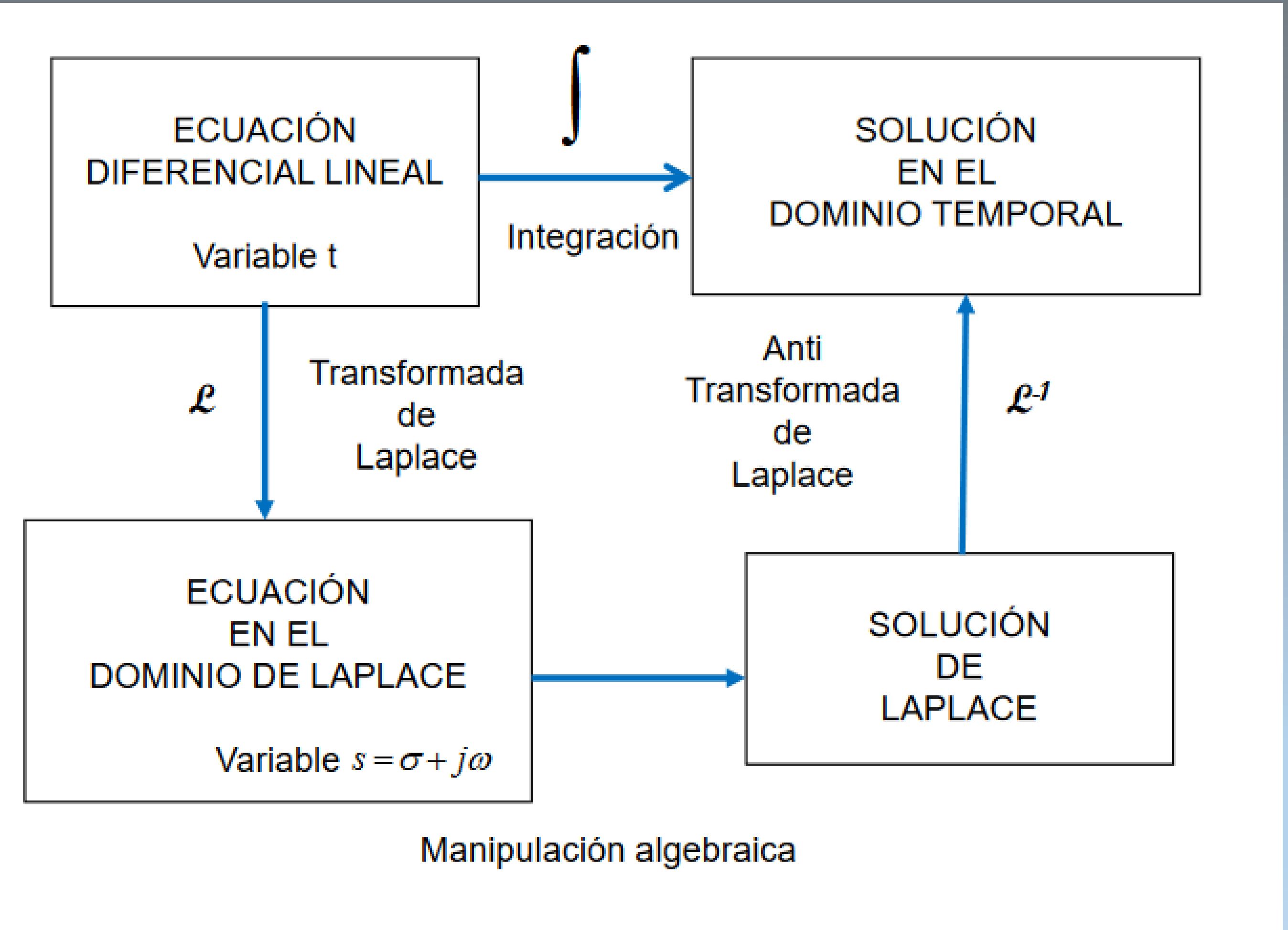
La **transformada inversa o anti-transformada de Laplace** es una herramienta matemática que nos permite pasar del dominio frecuencial al temporal

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{ts} ds$$

$c \in R$, abcisa de convergencia. Incluye valores singulares de *F(s)*

Las expresiones anteriores no se suelen aplicar.
Trabajaremos con tablas y usando las propiedades

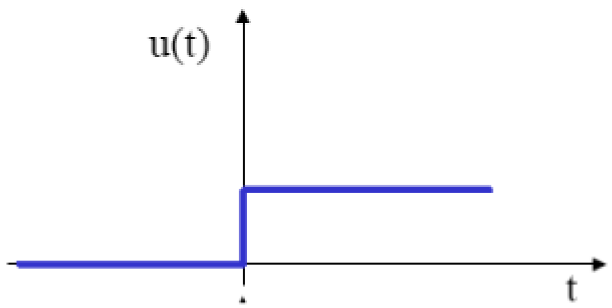
Transformada de Laplace



Transformada de Laplace

- Escalón unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow U(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

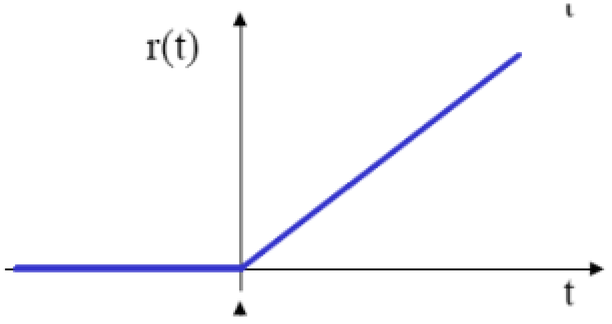


Escalón

Transformada de Laplace

- Rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$



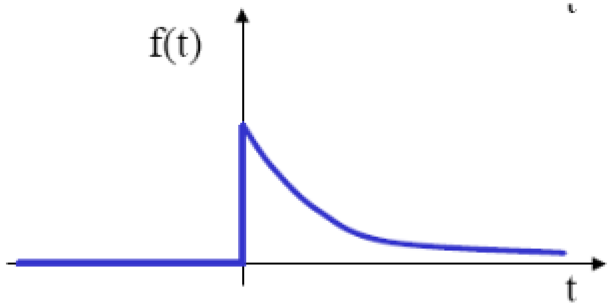
Rampa

Transformada de Laplace

- Exponencial

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t}, t \geq 0 \\ 0, \qquad t < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(\sigma+s)t} dt = \left[-\frac{1}{s+\sigma} e^{-(s+\sigma)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\sigma}$$



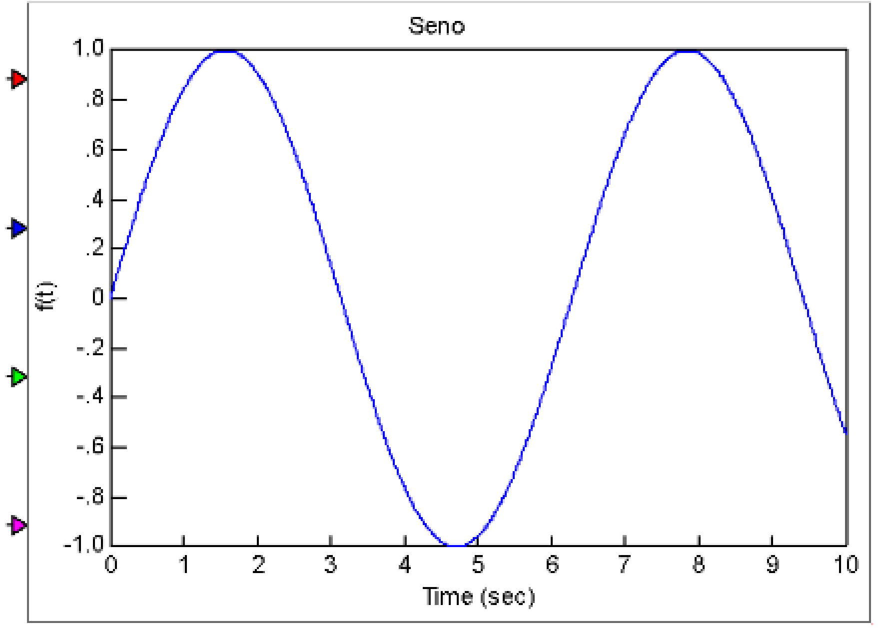
Exponencial

Transformada de Laplace

- seno

$$f(t) = sen(wt) \rightarrow F(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$w = 2\pi f = 2\pi / T$$



Es especialmente útil para el estudio de la respuesta en frecuencia que estudiaremos más adelante.

Transformada de Laplace

- Impulso unitario

$$f(t) = \delta(t) \rightarrow F(s) = 1$$

El impulso unitario (o función delta de Dirac) es una función que es nula para todo t excepto para $t = 0$ donde se hace infinita. Se puede ver como un límite de la función pulso $p_\epsilon(t)$:

$$\begin{aligned} p_\epsilon(t) &= \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t < 0 \\ 0 & t < 0, t > \epsilon \end{cases} \\ \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_\epsilon(t) \end{aligned}$$

Transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^{k-1}e^{-at}$	$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$t-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$

$f(t)$	$F(s)$
t^{k-1}	$\frac{(k-1)!}{s^k}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

Transformada de Laplace

Linealidad	$\mathscr{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s)$
Integración real	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\dfrac{F(s)}{s}$
Derivación real	$\mathscr{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0^+)$
Valor final	$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$ si existen los dos límites
Valor inicial	$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$ si existen los dos límites
Traslación en el tiempo	$\mathscr{L}[f(t-\alpha)]=e^{-\alpha s}F(s)$
Traslación en Laplace	$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)$
Convolución	$\mathscr{L}[f(t)\otimes g(t)]=F(s)G(s)$ con $f(t)\otimes g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
Escalado en el tiempo	$\mathscr{L}\left[f\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)\right]=\alpha F(\alpha s)$

Transformada de Laplace

Ecuaciones diferenciales

- Resolver la ecuación diferencial:

$$\boxed{5\frac{dy}{dt}+4y=2, \qquad y(0)=1}$$

1.- Tomar Transformada de Laplace de ambos lados de la igualdad

$$5\left(sY(s)-1\right)+4Y(s)=\frac{2}{s}$$

2.-Despejar la función

$$\boxed{Y(s)=\frac{5s+2}{s(5s+4)}}$$

3.- Hallar la transformada inversa ayudándose de las tablas

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[y(t)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+2}{s(5s+4)}\right]\Rightarrow \boxed{y(t)=0.5+0.5e^{-0.8t}}$$

Función Transferencia

La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas.

O sea, si el sistema viene dado por la ecuación diferencial:

$$a_n y^n(t) + a_{n-1} y^{n-1}(t) + .. + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^m(t) + b_{m-1} u^{m-1}(t) + .. + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

en donde $u(t)$ es la entrada e $y(t)$ es la salida.

la Función de Transferencia del sistema, **G(s),** será:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_0^m b_i s^i}{\sum_0^n a_j s^j}$$

Función Transferencia

- Ventajas de la Función de Transferencia:
  - Es una representación compacta de un sistema lineal como cociente de polinomios en s.
  - Permite predecir la forma de las señales sin necesidad de resolver la ecuación diferencial
  - Tiene una interpretación inmediata en la frecuencia: $s=jw$
  - Es una propiedad del sistema: independiente de la magnitud y la naturaleza de la señal de entrada.
  - Si se desconoce la ecuación diferencial que describe el sistema, se puede obtener su Función de Transferencia de forma experimental, excitando al sistema con entradas conocidas y estudiando su respuesta.

Función Transferencia

Polos y Ceros

- Las **raíces** del polinomio del numerador $N(s)$ son los ***ceros*** del sistema (**z_i**).
- Las **raíces** del polinomio del denominador $D(s)$ son los ***polos*** del sistema (**p_j**).
- El ***orden*** del sistema se corresponde con el grado del polinomio del denominador $D(s)$

Ejemplo 1: sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

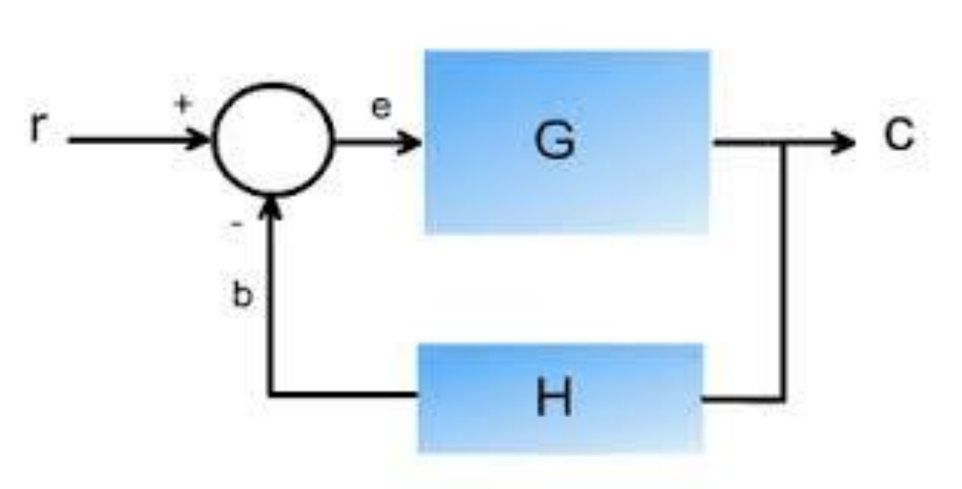
Ejemplo 2: sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Función Transferencia

Lugar de Raíces

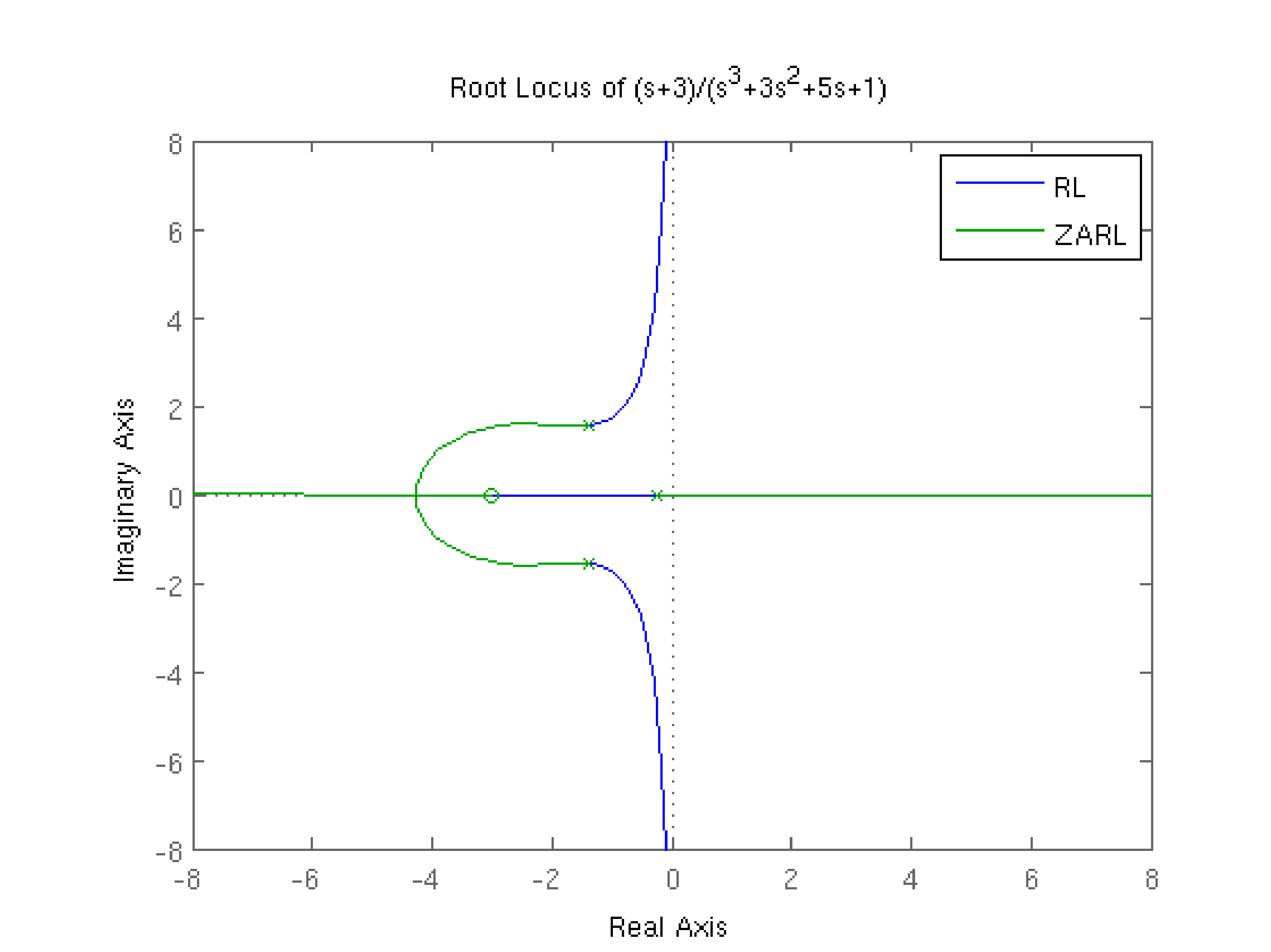
Es el lugar geométrico de los polos y ceros de una función transferencia
a medida que se varía la ganancia del sistema K en un determinado intervalo.
El método del lugar de raíces permite determinar la posición de los polos de la función de transferencia a lazo cerrado para un determinado valor de ganancia K a partir de la función de transferencia a lazo abierto. (Variar k para 1+k G(s).H(s)=0)



Función Transferencia

Lugar de Raíces

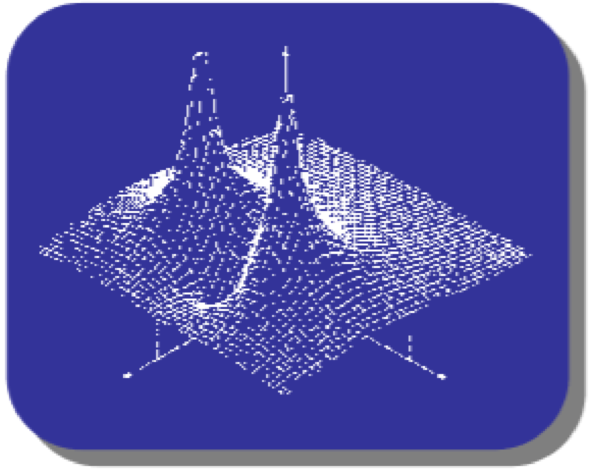
Ejemplo

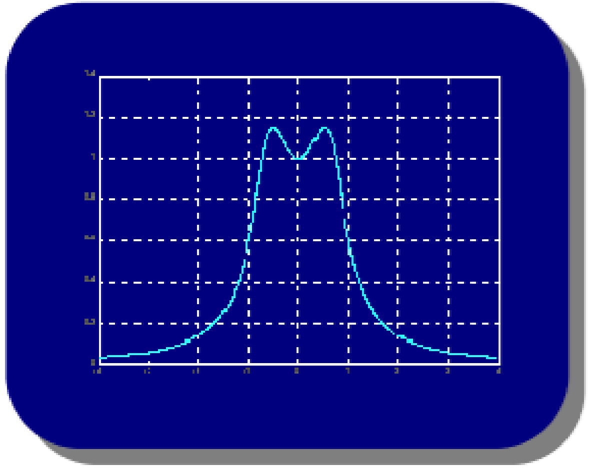


Transformada Laplace

Conceptos generales

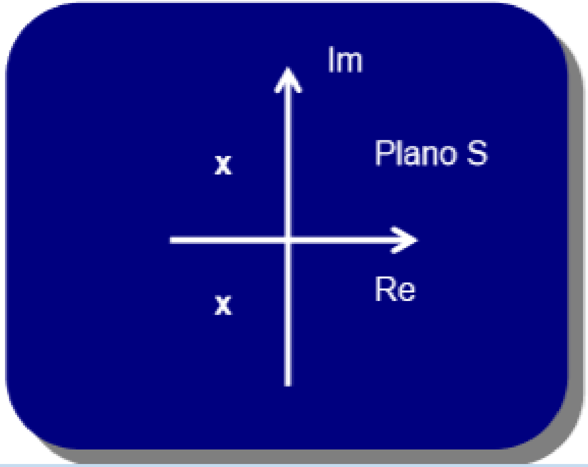
Función de transferencia.





Respuesta en frecuencia.

Análisis de estabilidad.



Transformada Z

Conceptos generales

x[n] secuencia discreta, $-\infty < n < +\infty$

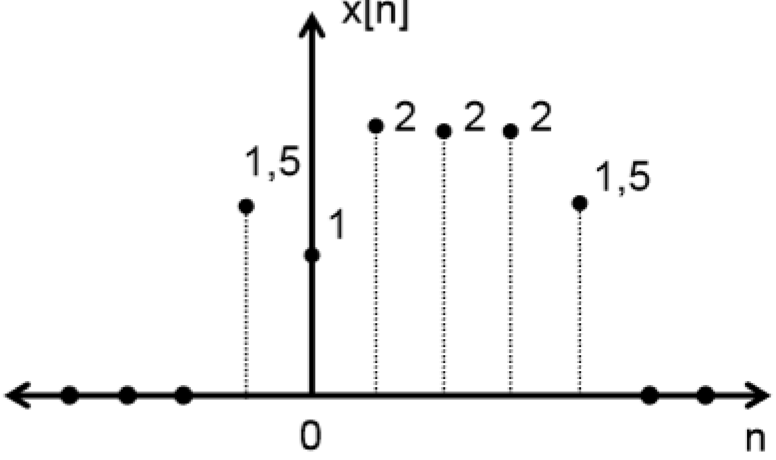
$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$X(z) = Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].\, z^{-n}$$ TZ bilateral.

$$X(z) = Z(x[n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n].\, z^{-n}$$ TZ unilateral o causal.

Transformada Z

Ejemplo



$$x[n] = [1{,}5 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1{,}5]$$

$$X(z) = 1{,}5.z^{1} + 1 + 2.z^{-1} + 2.z^{-2} + 2.z^{-3} + 1{,}5.z^{-4}$$

Transformada Z

Expresión de la transformada Z

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\, e^{-st}.dt$$

$$x^*(t) = \delta(t)_T.x(t), \quad \text{donde } \delta(t)_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT]$$

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT].\delta[t - nT]$$

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT].\delta[t - nT] \quad e^{-st}.dt$$

Transformada Z

Intercambiando el orden de la sumatoria y la integral:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t-nT\right)e^{-st}\,dt\right]$$

integrando se obtiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right)e^{-snT}$$

Si comparamos esta ecuación con la definición de la Transformada Z, reemplazando previamente $x(nT)$ por $x[n]$, encontramos que basta la siguiente relación para igualarlas:

$$\boxed{z = e^{sT}}$$

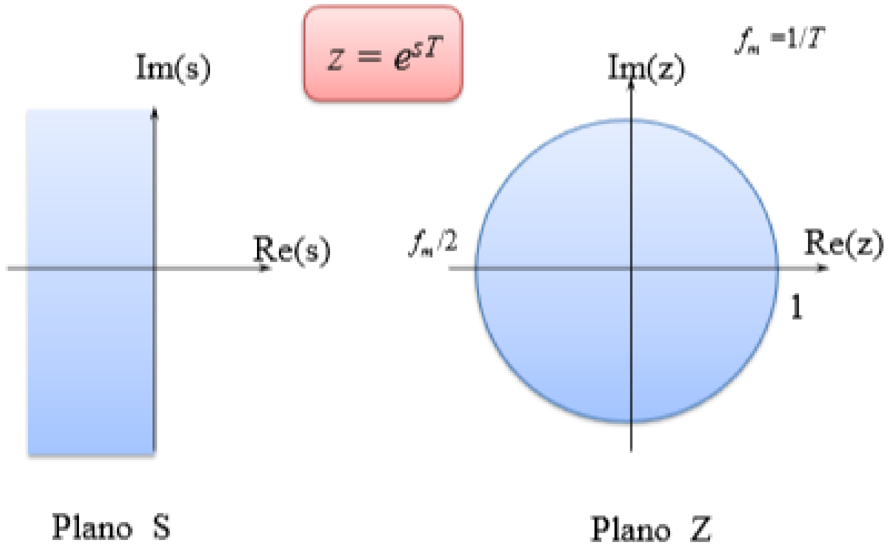
Transformada Z

$$z = e^{sT}$$

Relación entre TZ y TL...

- La TZ, $X(z)$, de una secuencia $x(nT)$ no es otra cosa que la TL de la señal muestreada $x^*(t)$ con e^{sT} sustituida por la variable z.
- Esto define un mapeo entre el plano S y el plano Z denominado mapeo ideal:

$$s = \ln(z/T)$$



Transformada Z

$$z = e^{sT}$$

Esta igualdad resulta clave para encontrar la relación entre la Transformada Z con otras transformaciones lineales de interés.

Si ahora sustituimos z por su expresión en forma polar se puede interpretar $X(z)$ en términos de la Transformada de Fourier:

$$X(z)|_{z=re^{jw}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(re^{jw}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-jwn}$$

cuando $r = 1$ se obtiene

$$X(z)|_{z=re^{jw}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn}$$

De esta última ecuación se observa que la Transformada de Fourier de una secuencia discreta es en realidad la Transformada Z de la secuencia evaluada sobre el círculo unitario. Si esta evaluación se realiza sobre una única vuelta del círculo unitario y a intervalos discretos determinados, entonces estamos en el caso de la Transformada Discreta de Fourier.

Transformada Z

Región de Convergencia:

El conjunto de valores de z para los cuales la Transformada Z converge se denomina región de convergencia.

Para que la Transformada Z de una secuencia sea convergente es necesario que la serie sea absolutamente sumable

Transformada Z

Región de Convergencia

$$Z = r.e^{j\theta}$$

$$X(z) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} x[n].\, z^{-n} = \sum_{n=\infty}^{+\infty} x[n].\, r^{-n}.e^{-j\theta n}$$

En la región de convergencia $|X(z)| < \infty$

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].\, r^{-n}.e^{-j\theta n} \right|$$

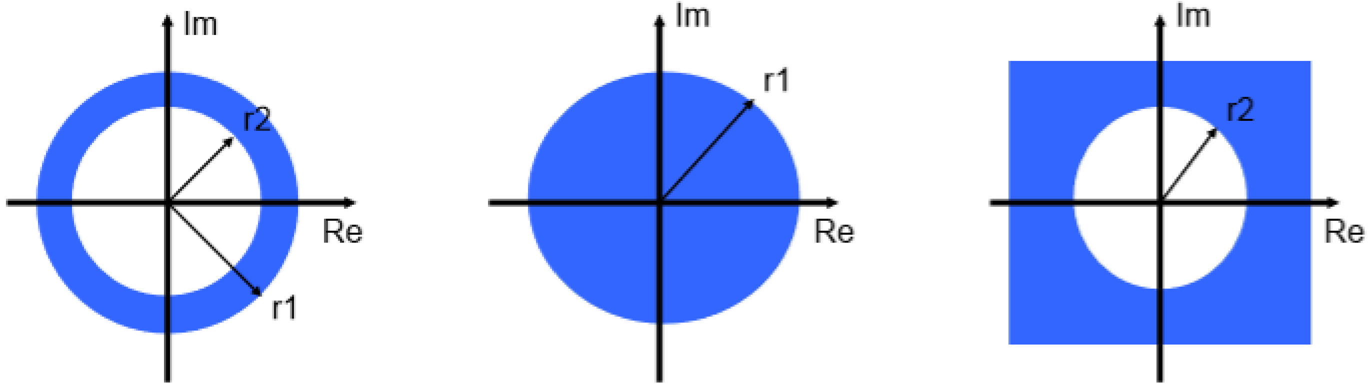
$$\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x[n].\, r^{-n}.e^{-j\theta n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x[n].\, r^{-n} \right|$$

Transformada Z

Región de Convergencia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n].r^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|x[n].r^{-n}\right| + \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^{n}}\right|$$

$$\left|X(z)\right| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left|x[-n].r^{n}\right|}_{\text{Parte no causal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^{n}}\right|}_{\text{Parte causal}}$$



Transformada Z

Región de Convergencia

Ejemplo 2 (ROC causal)

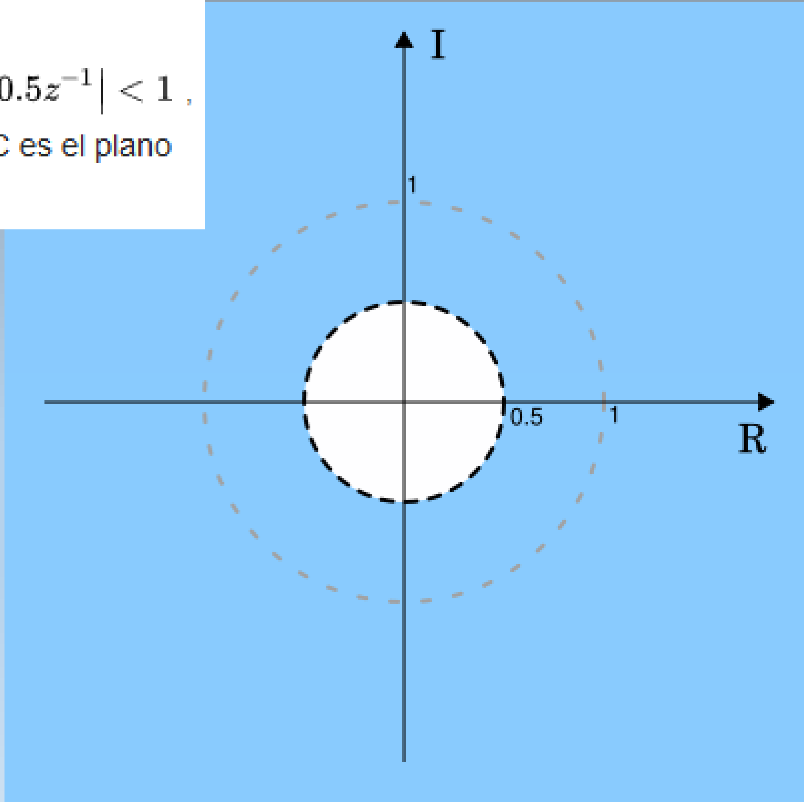
Sea $x[n] = 0.5^n u[n]$ (donde u es la función escalón). Expandiendo $x[n]$ en $(-\infty, \infty)$ obtenemos

$$x[n] = \{\dots, 0, 0, 0, 1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, \dots\}$$

Siendo la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

La última igualdad se obtiene con la fórmula del sumatorio para series geométricas, y la igualdad sólo se conserva si $|0.5z^{-1}| < 1$, lo cual puede ser reescrito para definir z de modo $|z| > 0.5$. Por lo tanto, la ROC es $|z| > 0.5$. En este caso la ROC es el plano complejo exterior al círculo de radio 0,5 con origen en el centro.



Transformada Z

Región de Convergencia

Ejemplo 3 (ROC anticausal)

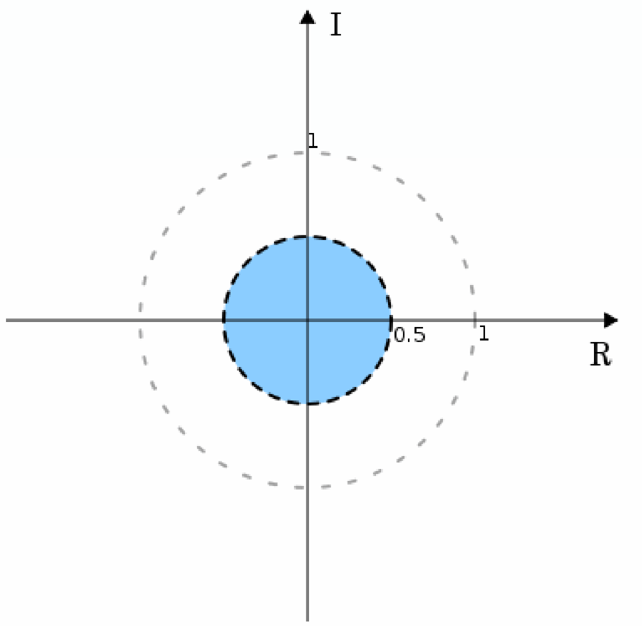
Sea $x[n] = -(0.5)^n u[-n-1]$ (donde u es la función escalón). Expandiendo $x[n]$ entre $(-\infty, \infty)$ obtenemos

$$x[n] = \{\dots, -(0.5)^{-3}, -(0.5)^{-2}, -(0.5)^{-1}, 0, 0, 0, \dots\}$$

Siendo la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 0.5^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{0.5}\right)^{-n}$$
$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z}{0.5}\right)^{m} = -\frac{0.5^{-1}z}{1-0.5^{-1}z} = \frac{z}{z-0.5} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

De nuevo, usando la fórmula de sumatorio para series geométricas, la iguadad sólo se mantiene si $|0.5^{-1}z| < 1$, de modo que podemos definir z como $|z| < 0.5$. Aquí, la ROC es $|z| < 0.5$, es decir, el interior de un círculo centrado en el origen de radio 0,5.



Transformada Z

Región de Convergencia

Región de convergencia

Causal: $|z| > r_2$.

No causal: $z| < r_1$.

Bilateral: $r_2 < z| < r_1$.

Señales de duración infinita

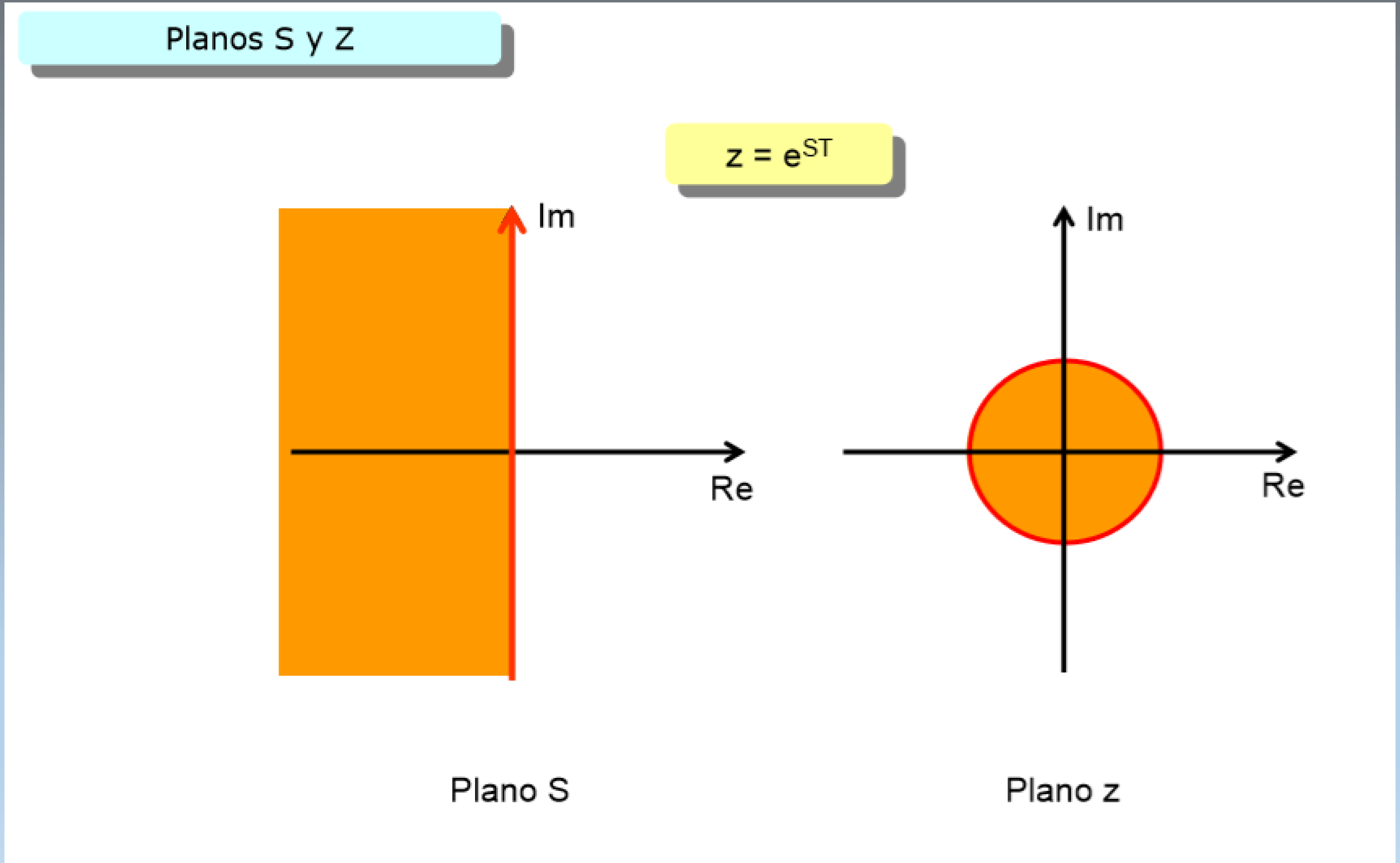
Causal: plano Z excepto $z = 0$.

No causal: plano Z excepto $z = \propto$.

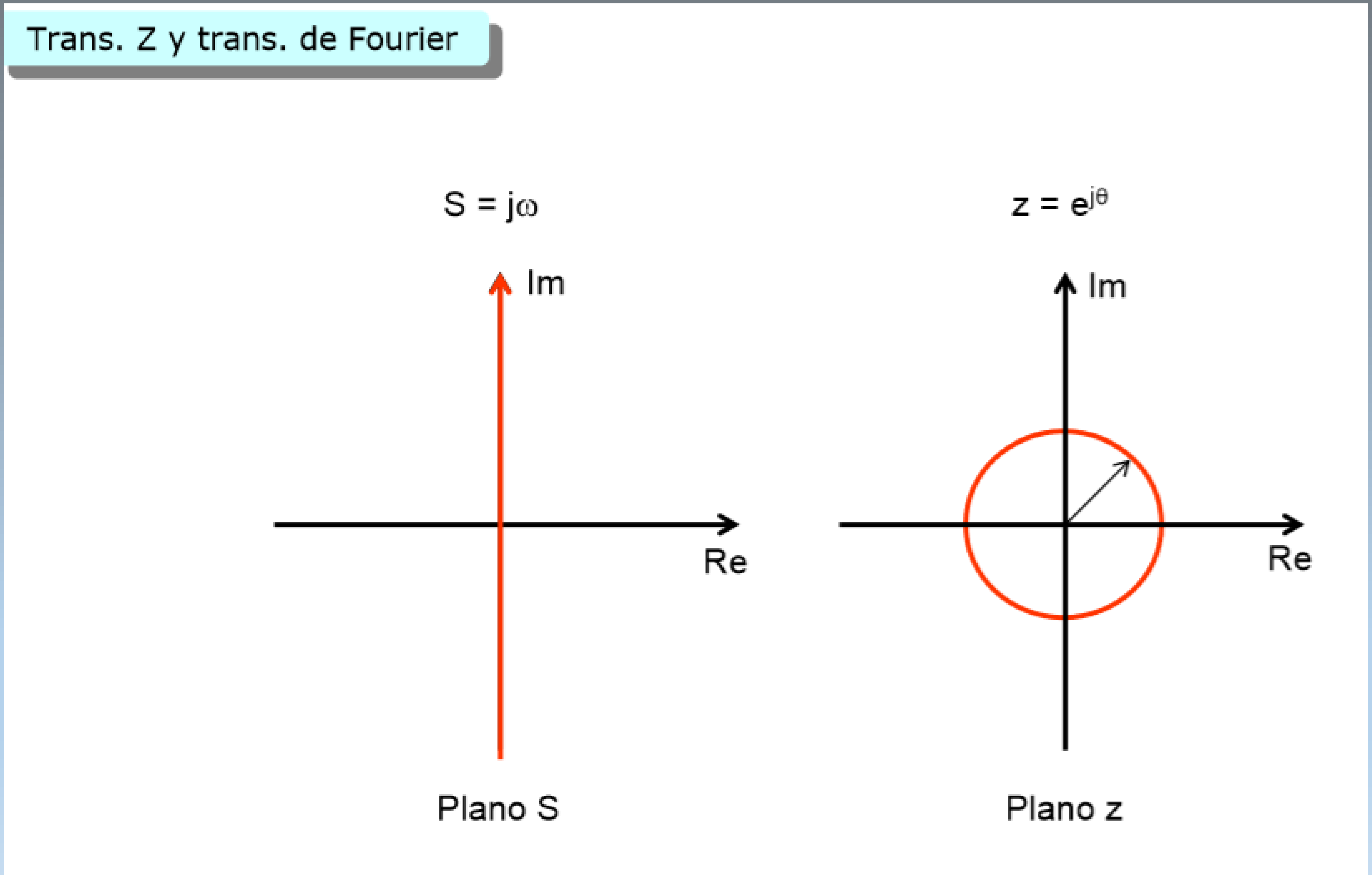
Bilateral: plano Z excepto $z = 0$ y $z = \propto$.

Señales de duración finita

Transformada Z



Transformada Z



Transformada Z

Trans. Z y trans. de Fourier

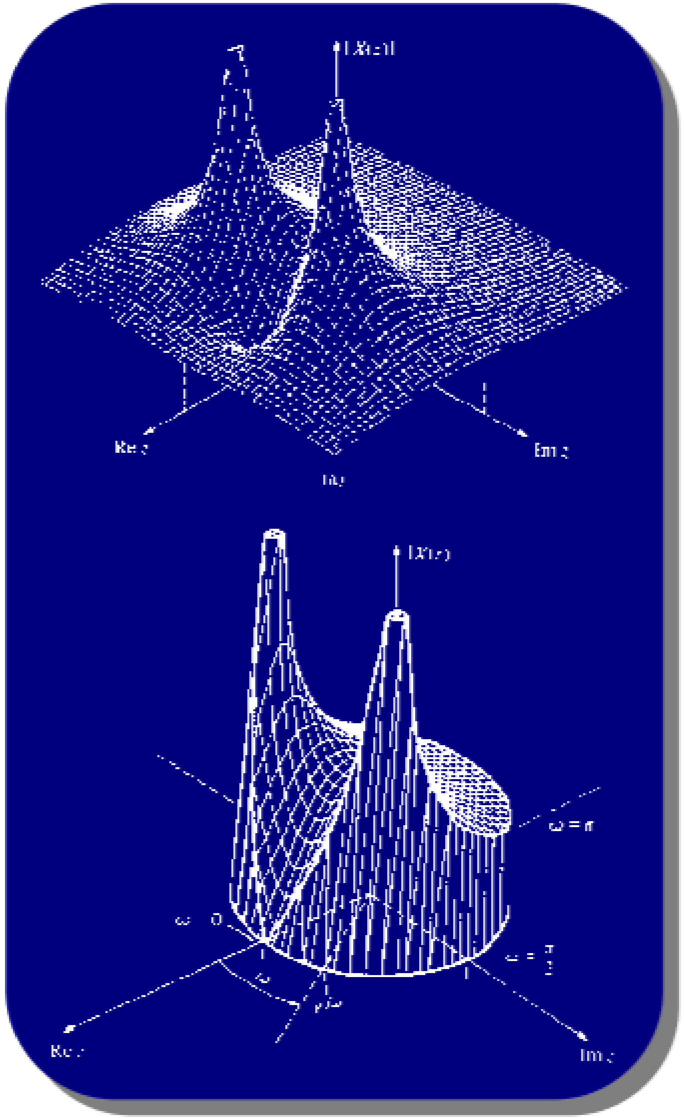
$$X(z) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} x[n] . r^{-n} . e^{-j\theta n}$$

$$TF\ (x[n]) = X(z)\Big|_{z = e^{j\theta}}$$

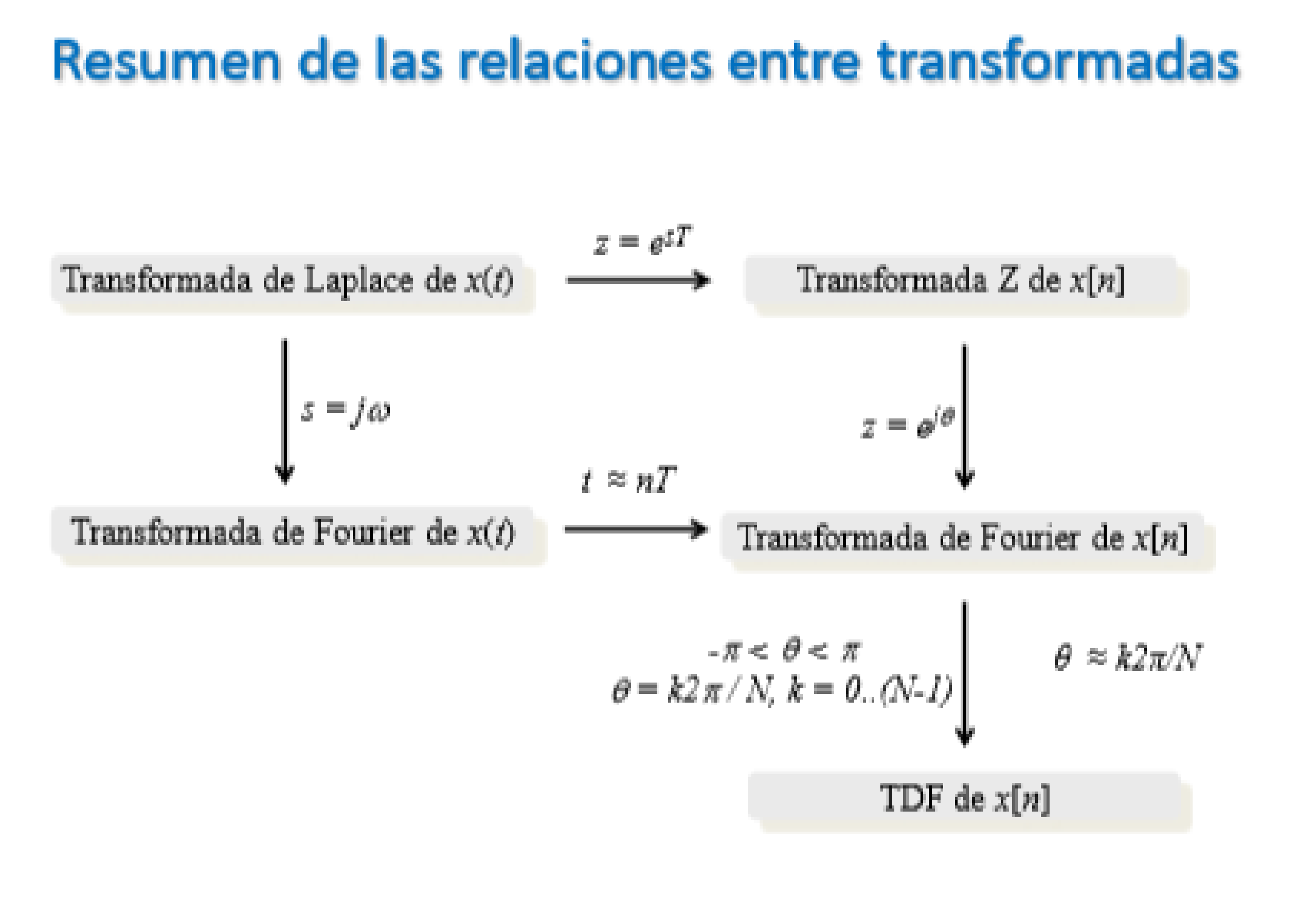
$$X(e^{-j\theta n}) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} x[n] . e^{-j\theta n}$$

Transformada Z

Trans. Z y trans. de Fourier



Transformada Z



Transformada Z

Propiedades

- **Unicidad:**
  - Para cada secuencia $x[n]$ corresponde una única transformada $X(z)$.
- **Linealidad:**
  - Para una secuencias $x[n]$ y $y[n]$ con transformadas $X(z)$ y $Y(z)$, entonces a $a\,x[n] + b\,y[n]$ le corresponde una transformada $a\,X(\mathrm{z}) + b\;Y(\mathrm{z})$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
- **Convolución:**
  - Si $X(z)$, $Y(z)$ y $H(z)$ son las TZ de $x[n]$, $y[n]$ y $h[n]$ entonces la TZ de:

$$y[n] = x[n]*h[n], \text{ es } \; Y(z) = X(z)H(z)$$

Transformada Z

Teorema del desplazamiento

- Dada $x[n]$, se forma la secuencia $x_1[n] = x[n - 1]$ obtenida desplazando $x[n]$ en una unidad
- Expresando la TZ de $x_1[n]$ en función de la TZ de $x[n]$:

$$X_1(z) = x_1[0] + x_1[1]z^{-1} + \ldots + x_1[1]z^{-n} + \ldots$$
$$= x[-1] + x[0]z^{-1} + x[1]z^{-2} + \ldots$$
$$= x[-1] + z^{-1}\{x[0] + x[1]z^{-1} + \ldots\}$$

Es decir que:

$$X_1(z) = x[-1] + z^{-1}\ \{x[0] + x[1]\ z^{-1} + \ldots\}$$

- Es decir que:

$$X_1(z) = x[-1] + z^{-1}\ \underbrace{\{x[0] + x[1]\ z^{-1} + \ldots\}}_{X(z)}$$

- Entonces:

$$X_1(z) = x[-1] + z^{-1}X(z)$$

Resumiendo

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}\ X(z) + x[-1]$$

Transformada Z

Generalizando

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$x[n\text{-}m] \leftrightarrow z^{-m}\, X(z)$$

Siempre que $x[n]$ sea causal

Transformada Z

Generalizando

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$x[n\text{-}m] \leftrightarrow z^{-m}\, X(z)$$

Siempre que $x[n]$ sea causal

Transformada Z

Función Transferencia

Encuentro la transferencia en Z

$$B_2 d^2y(t)/dt^2 + B_1 dy(t)/dt + B_0 y(t) = A_0\, x(t)$$

Aproximamos derivados con incrementos finitos:

$$B_2\, \Delta^2 y[n]/T^2 + B_1\, \Delta y[n]/T + B_0\, y[n] = A_0\, x[n]$$

Multiplicamos ambos miembros por T^2:

$$B_2\, \Delta^2 y[n] + B_1 \Delta y[n] T + B_0\, y[n]\; T^2 = A_o T^2\, x[n]$$

Despejamos $\Delta^2 y[n]$:

$$\Delta^2 y[n] = -(B_1/B_2)\Delta y[n] T - (B_0/B_2)\; y[n] T^2 + (A_0/B_2)\; T^2\, x[n]$$

Recordamos...

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n\text{-}1]$$

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n] - \Delta x[n\text{-}1] = x[n] - 2x[n\text{-}1] + x[n\text{-}2]$$

Transformada Z

Función Transferencia

Expresamos como secuencias…

$$y[n] - 2y[n-1] - y[n-2] =$$
$$-(B_1/B_2)\,T\,(y[n] - y[n-1]) - (B_0/B_2)\,T^2\,y[n] + (A_0/B_2)\,T^2\,x[n]$$

Agrupamos y nos queda la ecuación de recurrencia:

$$y[n] = b_1\,y[n-1] + b_2\,y[n-2] + a_0\,x[n]$$

Aplicamos el teorema del desplazamiento:

$$Y(z)\ \{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}\} = a_0\,X(z)$$

Con lo que hallamos la función de transferencia en Z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

Transformada Z

Función Transferencia

Expresamos como secuencias…

$y[n] - 2y[n-1] - y[n-2] =$

$-(B_1/B_2)\,T\,(y[n] - y[n-1]) - (B_0/B_2)\,T^2\,y[n] + (A_0/B_2)\,T^2\,x[n]$

Agrupamos y nos queda la ecuación de recurrencia:

$$y[n] = b_1\,y[n-1] + b_2\,y[n-2] + a_0\,x[n]$$

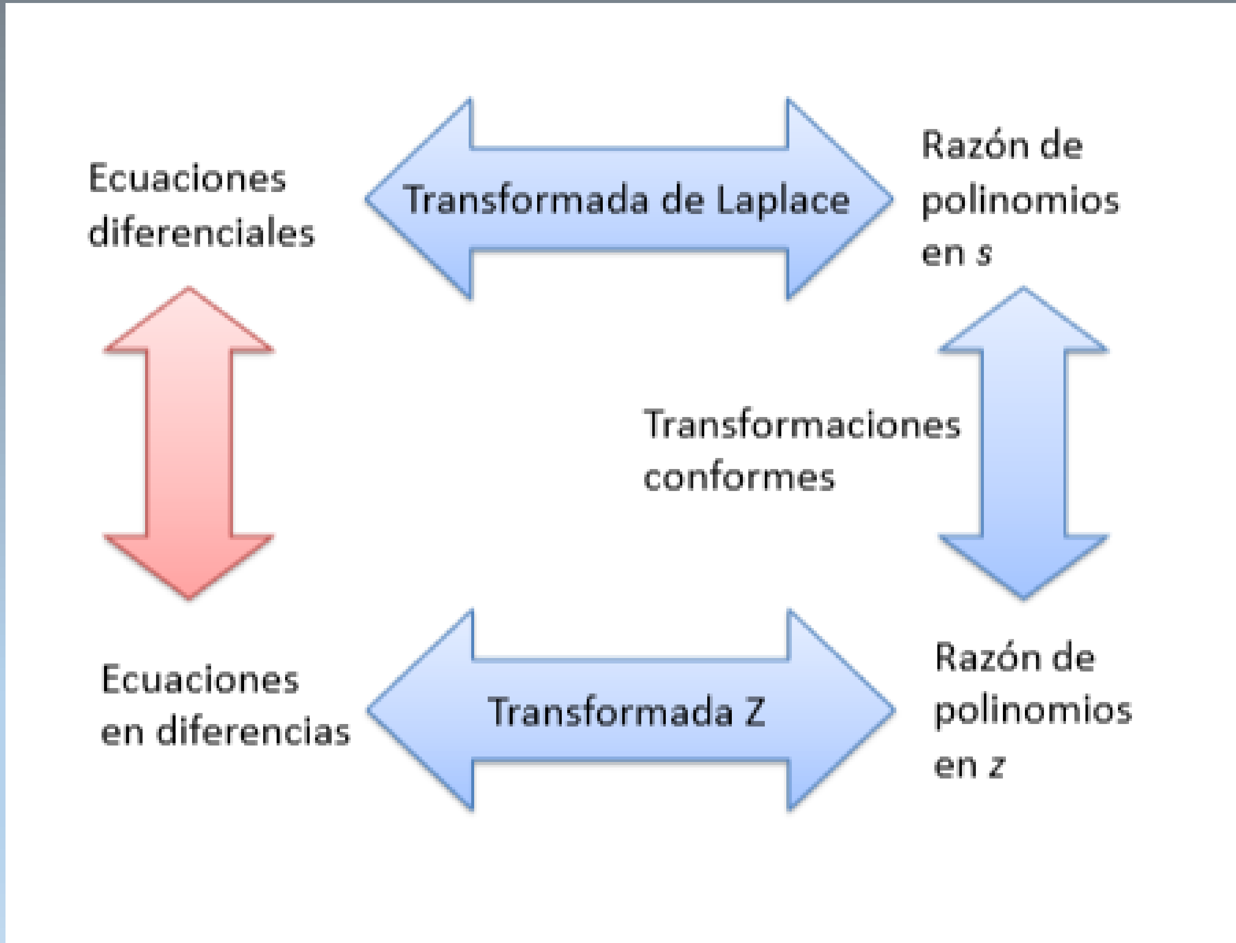
Aplicamos el teorema del desplazamiento:

$$Y(z)\ \{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}\} = a_0\,X(z)$$

Con lo que hallamos la función de transferencia en Z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

Transformada Z



Transformada Z

ECUACION DIFERENCIAL

$$dy^n(t)/dt = f\,(dx^m(t)/dt,\ \ldots\ ,\ x(t), dy^{n\text{-}1}(t)/dt, \ldots, y(t))$$

$$Y(s)$$

$$Y(z)$$

$y[n]$ ECUACION DE RECURRENCIA

$$dy^n(t)/dt = f\,(dx^m(t)/dt,\ \ldots\ ,\ x(t), dy^{n\text{-}1}(t)/dt, \ldots, y(t))$$

$$Y(s)$$

Transformada
de Laplace

$$Y(z)$$

$y[n]$

$$dy^n(t)/dt = f\,(dx^m(t)/dt,\ \ldots\ ,\ x(t), dy^{n\text{-}1}(t)/dt, \ldots, y(t))$$

$$Y(s)$$

Transformada
de Laplace

$$Y(z)$$

Transformada Z
inversa

$y[n]$

$$dy^n(t)/dt = f\,(dx^m(t)/dt,\ \ldots\ ,\ x(t), dy^{n\text{-}1}(t)/dt, \ldots, y(t))$$

$$Y(s)$$

Transformada
deLaplace

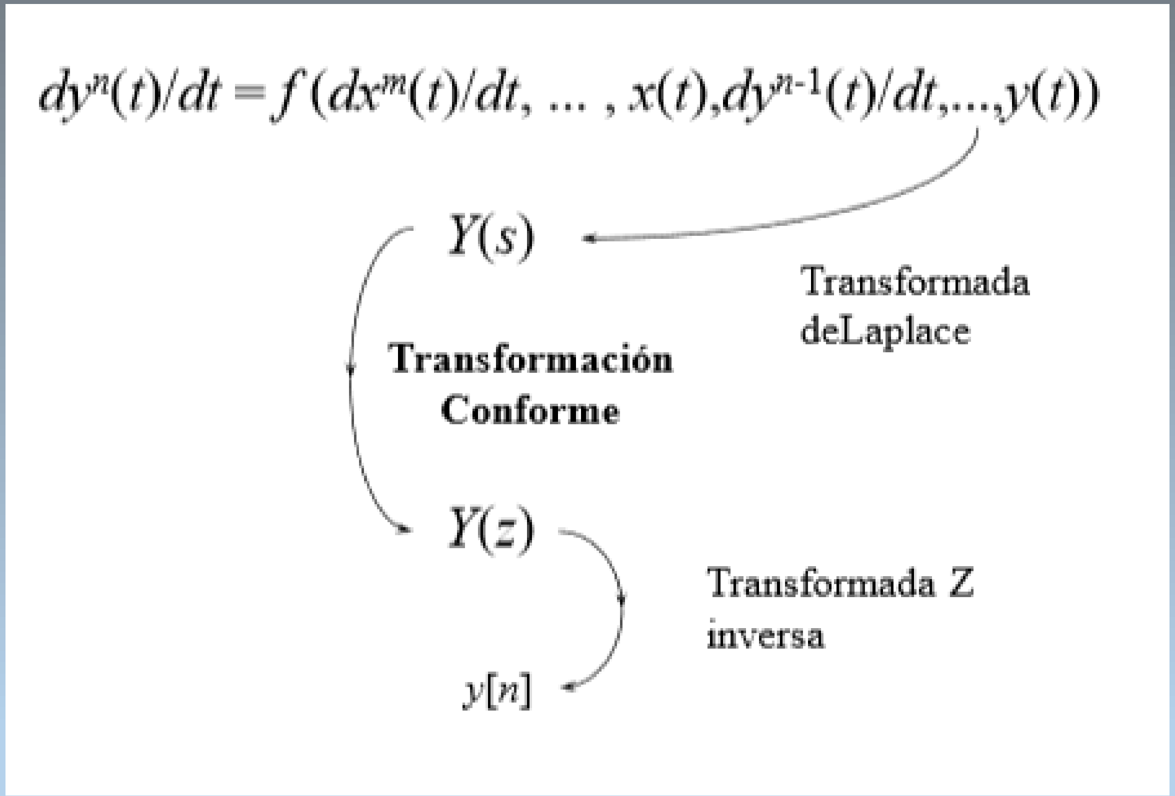
?

$$Y(z)$$

Transformada Z
inversa

$y[n]$

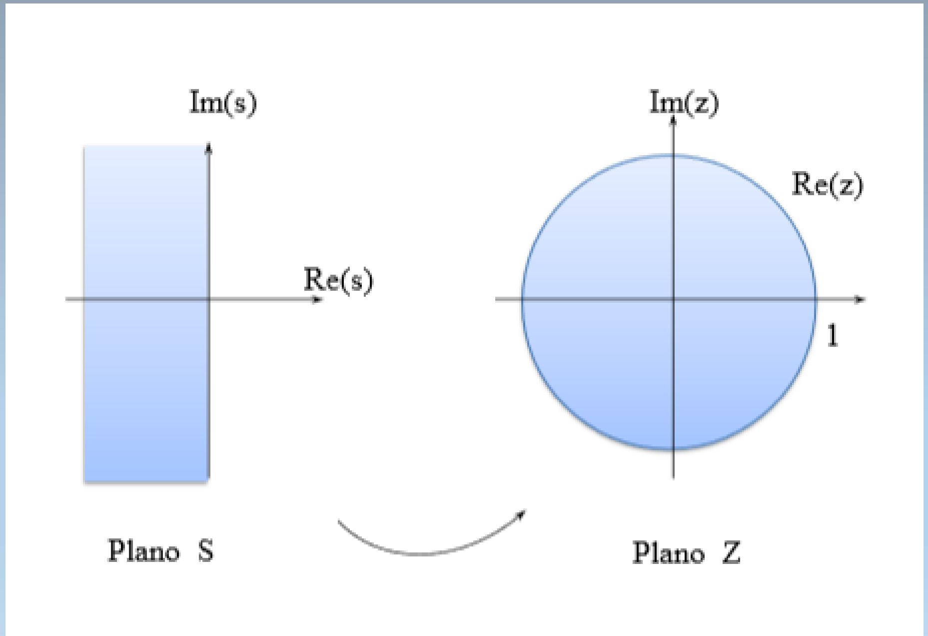
Transformada Z



Transformada Z

Transformaciones Conformes

S ⟶ Z



Transformada Z

Las transformaciones conformes deben cumplir ciertas condiciones impuestas por la relación $z = e^{sT}$, éstas se mencionan a continuación y se representan en la Figura

Condición 1: el eje imaginario del plano s debe ser mapeado en el círculo unitario del plano z, esta condición es necesaria para preservar las características de respuesta en frecuencia del sistema continuo.

Condición 2: el semiplano izquierdo del plano s $(Re(s) < 0)$ debe ser mapeado en el interior del círculo unitario del plano z.

Las condiciones son impuestas a toda transformación que intente mapear sistemas de tiempo continuo estables (polos en el semiplano izquierdo del plano s) en sistemas de tiempo discreto estables (polos en el interior del círculo unitario con centro en el origen del plano z).

Transformada Z

Transformaciones Conformes

- Transformación “ideal”
- Transformación de Euler
- Transformación Bilineal

Transformada Z

Transformadas Conformes

Transformación de Euler

- La transformación de Euler aproxima la derivada de una función continua dy/dt por un cociente incremental:

$$\left[\frac{dy}{dt}\right] = \left[\frac{y[n] - y[n-1]}{T}\right]$$

T: período de muestreo

De modo que:

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s)$$

se transforma en:

$$Z\left[\frac{dy}{dt}\right] = Z\left[\frac{y[n] - y[n-1]}{T}\right] = \frac{(1 - z^{-1})Y[z]}{T}$$

Transformada Z

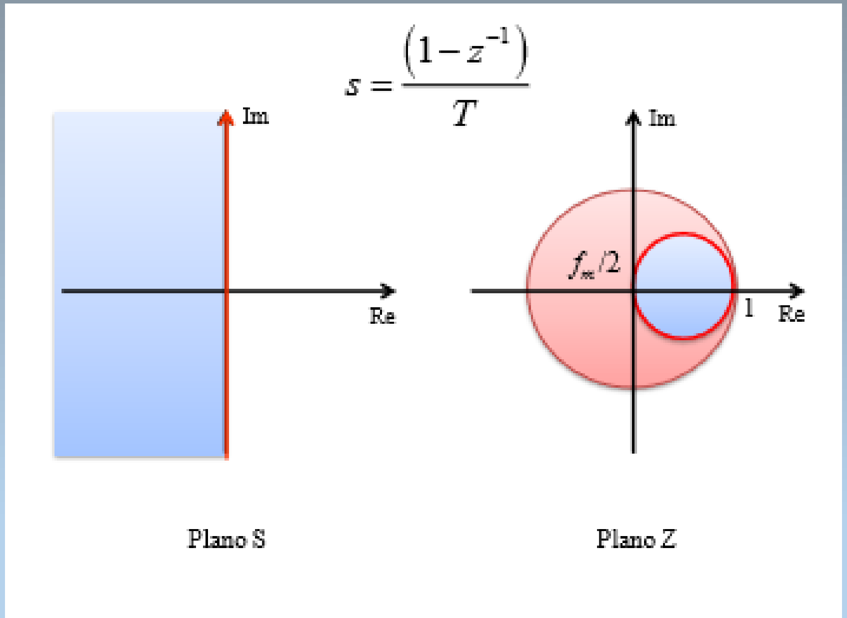
Transformadas Conformes

Transformación de Euler

De lo anterior se deduce que el mapeo entre el plano S y el plano Z queda definido por:

$$s = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{T}$$

- Esta transformación puede ser utilizada únicamente en el mapeo de sistemas tipo pasa bajo, con frecuencias de corte bajas, ya que no cumple con todas las condiciones de mapeo.

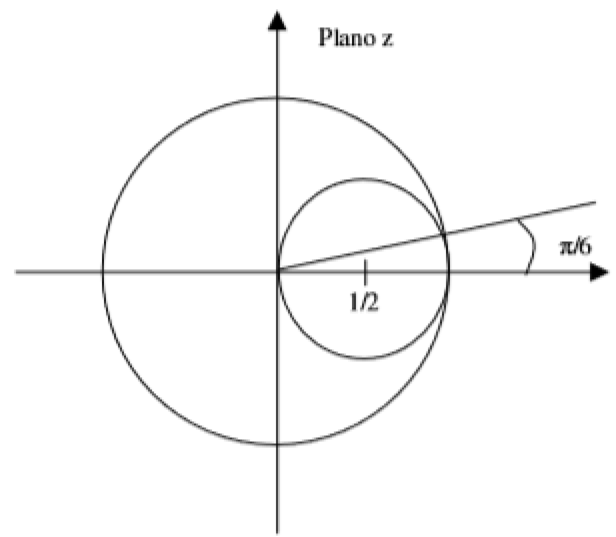


Transformada Z

Transformadas Conformes

Esta transformación puede ser utilizada sin problemas únicamente en el mapeo de sistemas del tipo pasabajos y pasabanda, ya que no cumple perfectamente con las dos condiciones de mapeo mencionadas. La Figura muestra que la condición de que el eje imaginario del plano s se mapee en el círculo unitario, se aproxima aceptablemente hasta $\theta < \pi/6$ radianes.

Supongamos que se dispone de una secuencia $x[n]$, con un período de muestreo $T = 1/f_m$. Por el teorema del muestreo, se tiene que $f_m > 2f_M$, con f_M la frecuencia máxima presente en $x[n]$. Además, como $\theta = 2\pi f$, y teniendo en cuenta la restricción $\theta < \pi/6$ rad., se tendrá que $f_M < f_m/12$ para así cumplir con la condición que el eje imaginario del plano s se mapee aproximadamente sobre la circunferencia unidad en el plano z.



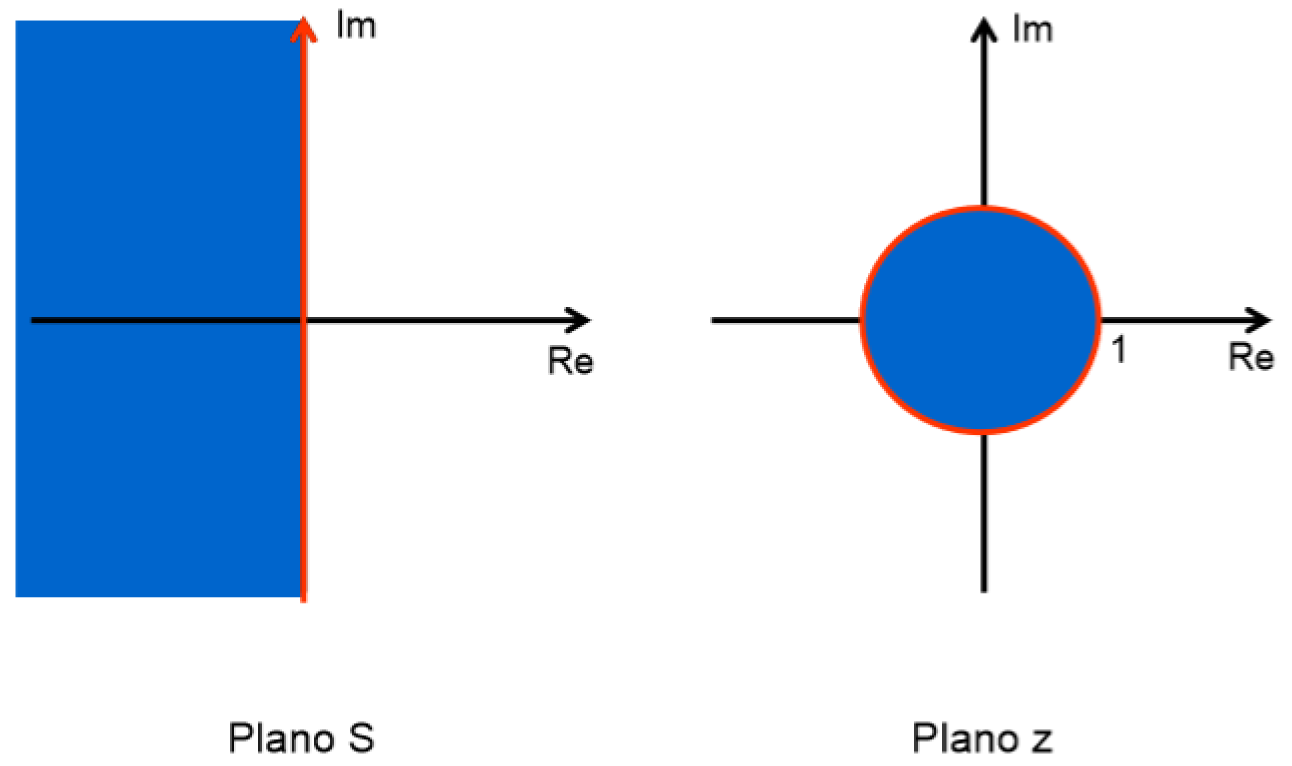
. Restricción en θ para que el plano s se mapee en el círculo unitario.

Transformada Z

Transformadas Conformes

Transformación bilineal

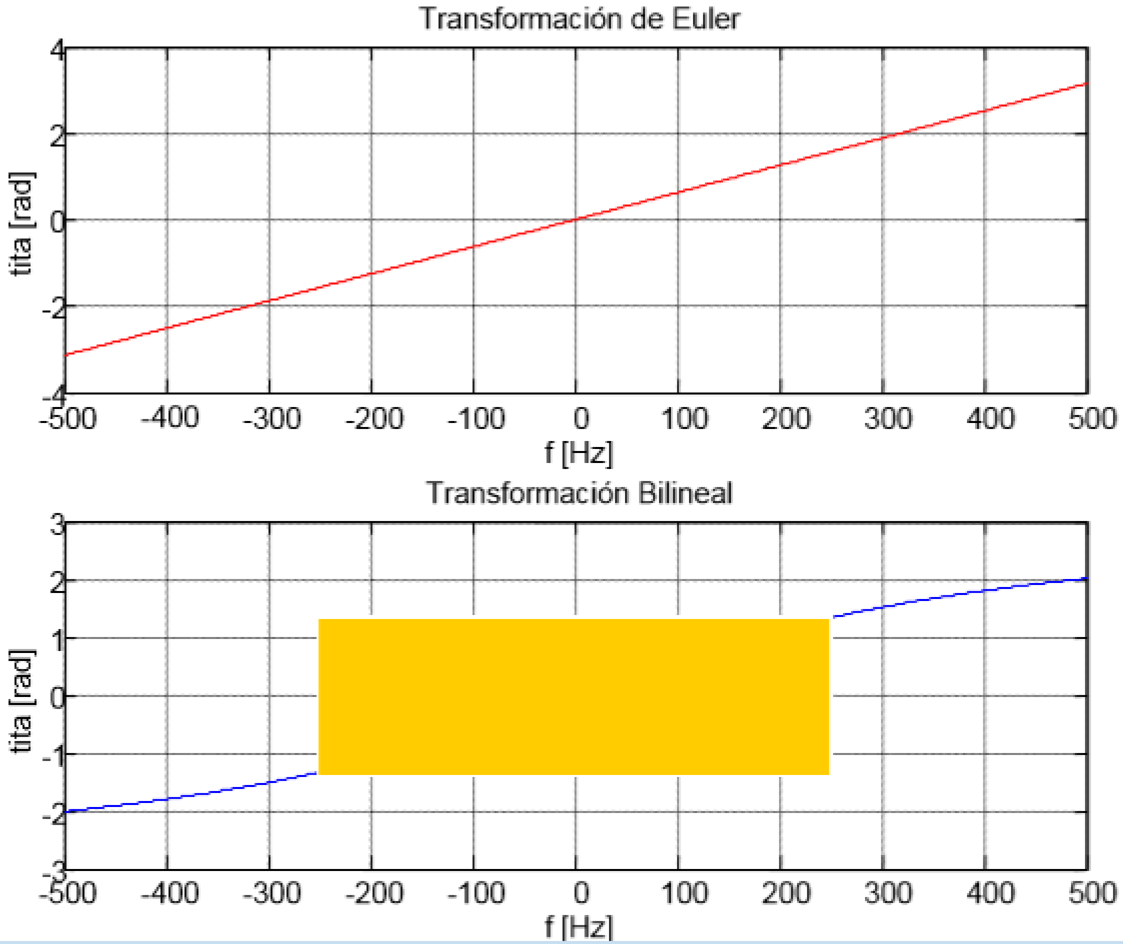
$$s = \frac{2}{T}\frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 + z^{-1}\right)}$$



Transformada Z

Transformadas Conformes

Transformación bilineal



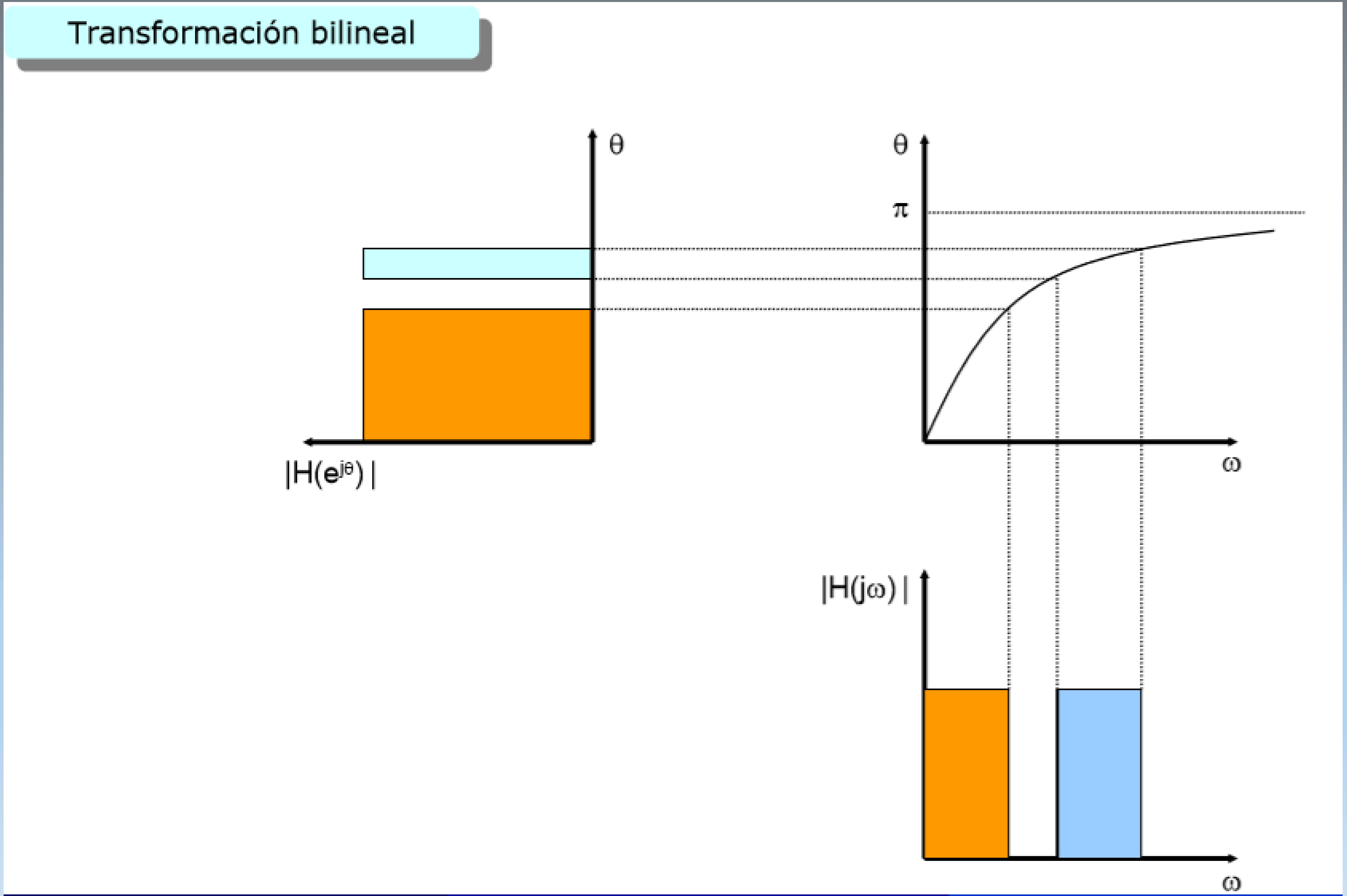
$\theta = \omega T$

$f_m = 1\text{ kHz}$

$\omega = \frac{2}{T}.\tan(\frac{\theta}{2})$

Transformada Z

Transformadas Conformes

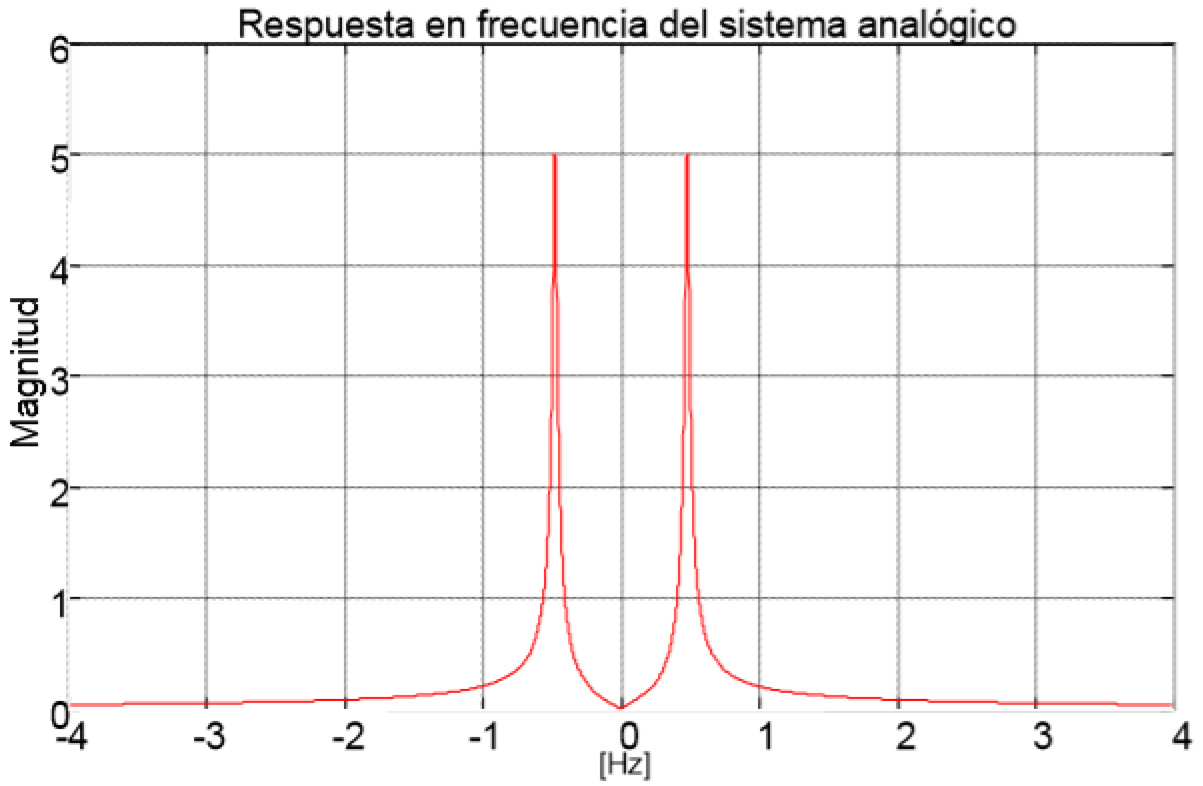


Transformada Z

Transformadas Conformes

Consideraciones prácticas

$$H(s) = \frac{1 + 0{,}1 \cdot s}{s^2 + 0{,}2 \cdot s + 9{,}01}$$

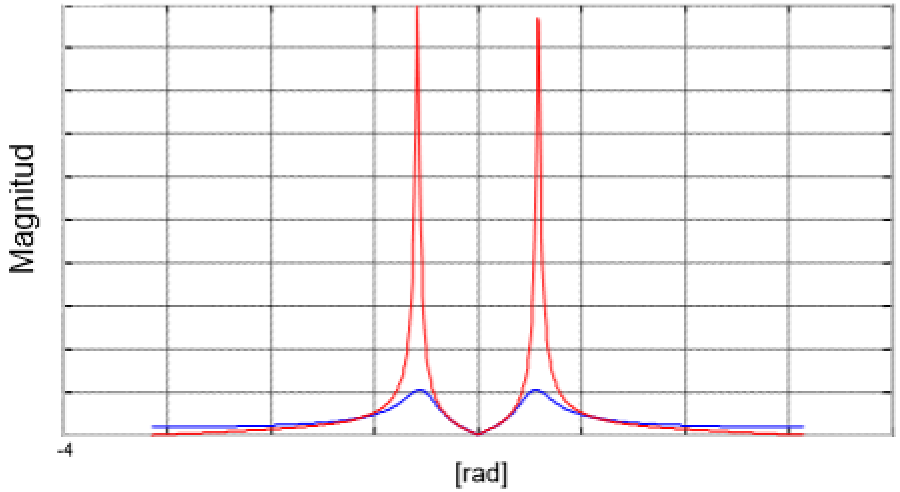


Transformada Z

Transformadas Conformes

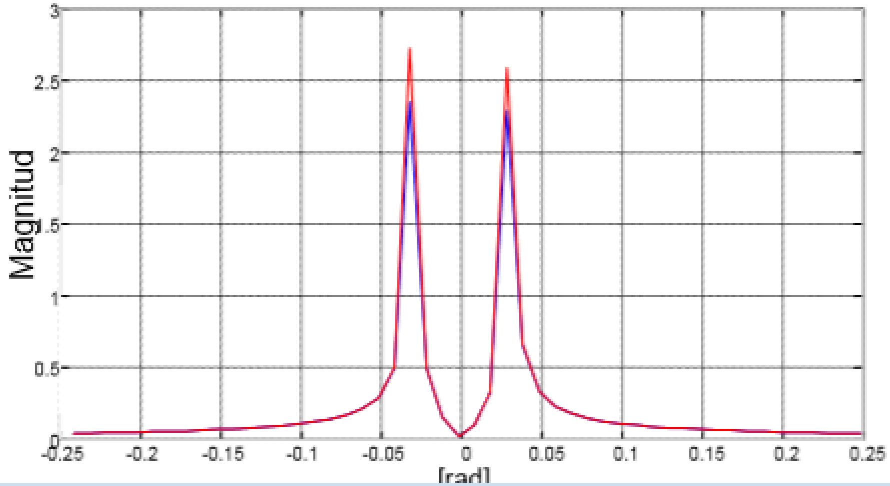
Consideraciones prácticas

f_m = 5 Hz



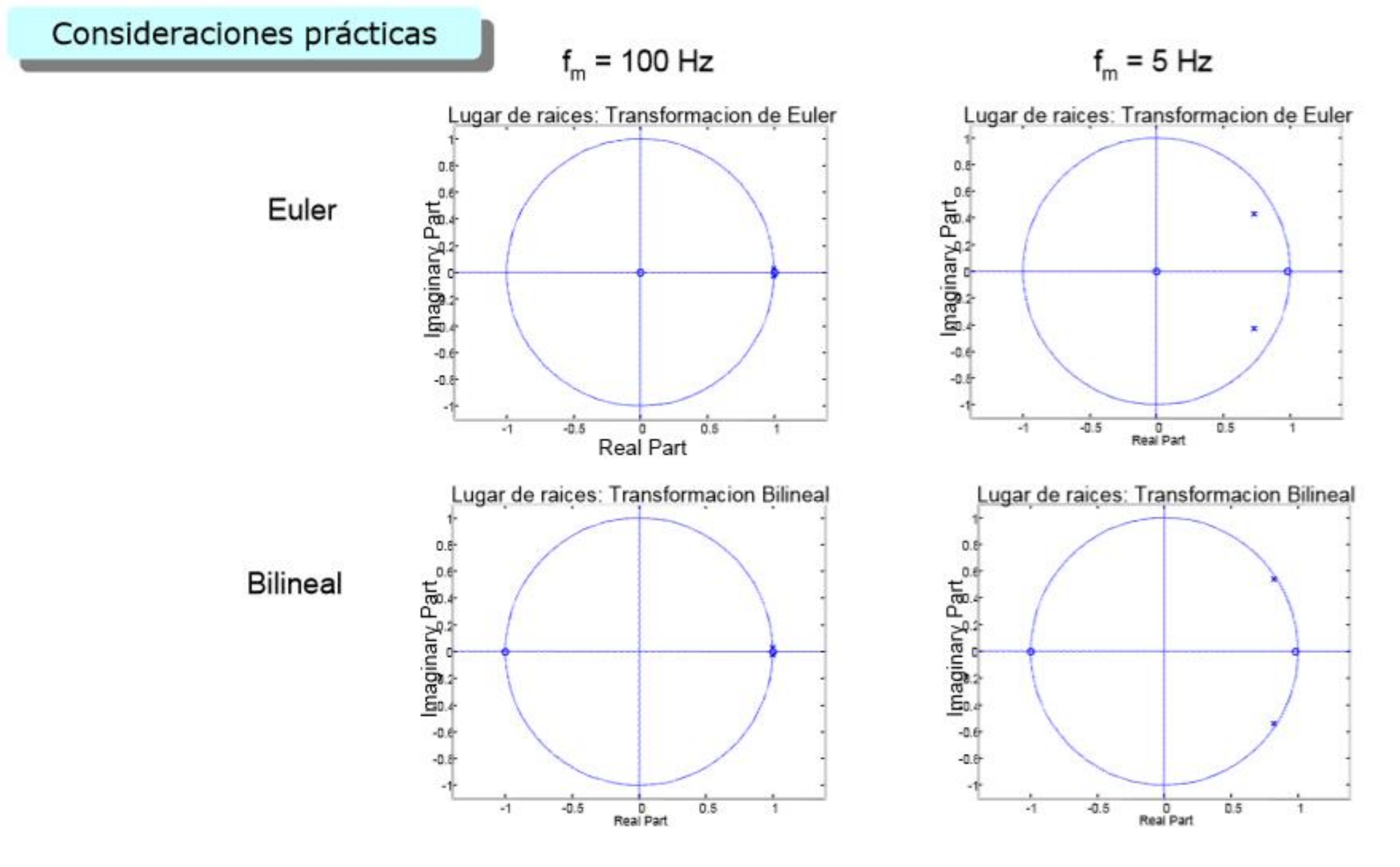
Respuesta en frecuencia del sistema discreto
(Azul: Euler, Rojo: Bilineal)

f_m = 100 Hz



Transformada Z

Transformadas Conformes



Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

- Cualquier ecuación diferencial ordinaria y de coefs constantes :

$$A_n y^{(n)}(t)+\ldots+A_1 y'(t)+A_o y(t) = B_m x^{(m)}(t) +\ldots+ B_o x(t)$$

donde $y(t)$ es la salida frente a un estímulo $x(t)$, puede expresarse mediante una ecuación de recurrencia de la forma:

$$y[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] + \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

- Partiendo la función de transferencia del sistema, esta se puede expresar en términos de la transformada *Z*:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1-\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$Y(z)-\sum_{i=1}^{N} a_i Y(z) z^{-i}=\sum_{j=0}^{M} b_j X(z) z^{-j}$$

$$Y(z)=\sum_{i=1}^{N} a_i Y(z) z^{-i}+\sum_{j=0}^{M} b_j X(z) z^{-j}$$

Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

- Si anti-transformamos la ecuación:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i Y(z) z^{-i} + \sum_{j=0}^{M} b_j X(z) z^{-j}$$

- Obtenemos:

$$y[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] + \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

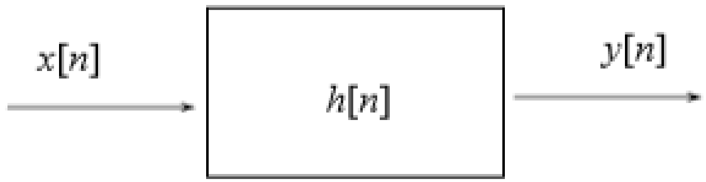
Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

- Los sistemas LTI pueden representarse mediante una ecuación de recurrencia de la forma:

$$y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_M y[n-M] = a_o x[n] + \ldots + a_N x[n-N]$$

$$y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_M y[n-M] = a_o x[n] + \ldots + a_N x[n-N]$$



- $x[n]$ es una secuencia de entrada conocida, $y[n]$ la secuencia de salida a esa entrada y $h[n]$ la secuencia de la respuesta impulsional.

Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de la ecuación usando TZ

1- Obtener la transformada de ambos miembros:

$\{y[n] + \ldots + b_m y[n-m]\}\, z^{-n} = \{\, a_o x[n] + \ldots + a_m x[n-m]\}\, z^{-n}$

Por el teorema del desplazamiento, el segundo miembro es:

$$(a_0 + \ldots + a_m z^{-m})\, X(z)$$

y el primero se puede expresar en función de la transformada $Y(z)$ de $y[n]$ y de las condiciones iniciales.

2-Resolver la ecuación algebraica que resulta para $Y(z)$.

3-Determinar la transformada inversa de $Y(z)$.

Transformada Z

Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de la ecuación usando TZ

1- Obtener la transformada de ambos miembros:

$$\{y[n] + \ldots + b_m y[n-m]\}\, z^{-n} = \{\, a_o x[n] + \ldots + a_m x[n-m]\}\, z^{-n}$$

Por el teorema del desplazamiento, el segundo miembro es:

$$(a_0 + \ldots + a_m z^{-m})\, X(z)$$

y el primero se puede expresar en función de la transformada $Y(z)$ de $y[n]$ y de las condiciones iniciales.

2-Resolver la ecuación algebraica que resulta para $Y(z)$.

3-Determinar la transformada inversa de $Y(z)$.

Transformada Z

Función Transferencia de Sistemas Discretos

Sistemas AR

- Su salida en un instante depende del valor actual de la entrada y de los valores anteriores de la propia salida

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}\right)}$$

Transformada Z

Función Transferencia de Sistemas Discretos

Sistemas MA

- Su salida depende solamente del valor actual de la señal de entrada y sus valores anteriores.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}$$

Transformada Z

Función Transferencia de Sistemas Discretos

Sistemas ARMA

- Son los más generales, donde la salida depende de valores anteriores de la entrada y de la propia salida.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\left(a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}\right)}{\left(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_mz^{-m}\right)}$$

Transformada Z

Inversión de X(Z)

El Problema de la Inversión

Dada una $X(z)$:

¿Cómo hallar la secuencia $x[n]$ asociada?

- Fórmula de Inversión
- Desarrollo en serie de potencias
- Uso de tablas

Transformada Z

Inversión de X(Z)

Fórmula de Inversión

- La secuencia $x[n]$ se obtiene resolviendo una integral de contorno por aplicación del teorema de los residuos.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

- Frecuentemente esta metodología es muy compleja y por lo tanto poco utilizada.

Desarrollo en serie e inspección

- Se desarrolla

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} =$$

$$= x[0] + x[T]z^{-1} + x[2T]z^{-2} + \ldots$$

- y se obtienen los valores de $x[n]$ por inspección

Transformada Z

Inversión de X(Z)

Tablas

- En este método se intenta expresar la función $X(z)$ como una suma:

$$X(z) = X_1(z) + \ldots + X_k(z)$$

donde $X_1(z), \ldots, X_k(z)$ son funciones con transformadas inversas conocidas:

$$x_1[n], \ldots, x_k[n]$$

- Si $X(z)$ puede expresarse así, su transformada inversa $x[n]$ será la suma:

$$X[n] = x_1[n] + \ldots + x_k[n]$$

Bibliografía

Carpeta Catedra Bioingeniería I. Facultad de Bioingeniería- UNER.
Profesor Rufiner y Milone.

Señales y Sistemas.
Oppenheim –Willsky.

https://es.wikipedia.org/wiki/Lugar_de_ra%C3%ADces

https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_Z

http://www.monografias.com/trabajos102/sistemas-control-estabilidad-y-lugar-geometrico-raices/sistemas-control-estabilidad-y-lugar-geometrico-raices.shtml