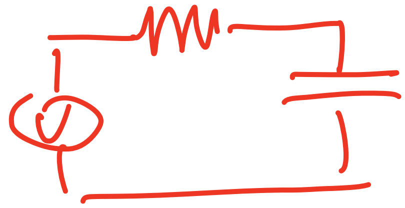
Partimos de un ejemplo sencillo de un filtro RC y su ecuación Dinámica.

$$\overset{V_c}{y(t)} = \overset{V_{in}}{x(t)} - RC\,\frac{d\,\overset{V_c}{y(t)}}{dt}$$



Por definición de derivada podemos expresarla de la siguiente forma y si tomamos un Ts pequeño la discretizariamos:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{\delta \to 0} \frac{y(t)-y(t-\delta)}{\delta}$$

$$= \frac{y(nT_s) - y((n-1)T_s)}{T_s}$$

Ts: suficientemente pequeño:

$$y(nT_s) = x(nT_s) - RC\,\frac{y(nT_s) - y((n-1)T_s)}{T_s}$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar Ts = 1

$$y(n) = x_n - RC\,y(n) + RC\,y(n-1)$$

$$y(n) + RC\,y(n) = x(n) + RC\,y(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{RC}\,x(n) + \frac{RC}{1+RC}\,y(n-1)$$

$$y(n) = \alpha\,x(n) + \beta\,y(n-1)$$

Calculemos su respuesta al impulso: para esto evaluamos en con x[n]=[1,0,0,0,0,0,0…]

$$y(n) = \alpha x(n) + \beta y(n-1)$$

$$y(0) = \alpha \delta(0) + \beta y(-1) = \alpha$$

$$y(1) = \alpha \delta(1) + \beta \cdot \alpha = \alpha\beta$$

$$y(2) = \alpha \delta(2) + \beta \cdot \alpha\beta = \alpha\beta^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y(n) = h(n) = \alpha \delta(n) + \beta y(n-1) = \alpha \beta^n u[n]$$

Cuando aplicamos las trasformaciónes que ya conocen estas ecuaciones diferenciales o en diferencias se estudián en un plano de análisis.

Como es el caso del plano complejo en la Transformada de Laplace tendremos un equivalente para la transformada Z.

$$T_f \longrightarrow T_z$$

Es así como hablaremos habitualmente de la region de convergencia (ROC) para la transformada Z.

Previamente Presentamos la transformada Z que parte de una señal discreta x(n)

$$\boxed{x(n) \overset{z}{\Longleftrightarrow} X(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

con: $z = Re(z) + j\, Im(z)$

$$\boxed{\text{Plano } z \Rightarrow \text{ROC}}$$

Se define ROC como aquel conjunto del plano imaginario en donde la transformada Z converge.
Probemos un ejemplo aplicando la transformada a una función delta de Kronecker.

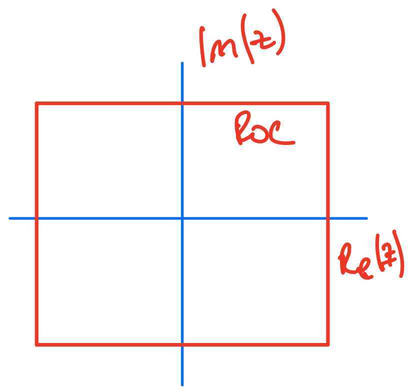
$$x(n) = \delta(n)$$

$$X(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta(n) . z^{-n}$$

$$= \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta(0) . z^{-0}$$

$$\boxed{X(z) = 1}$$

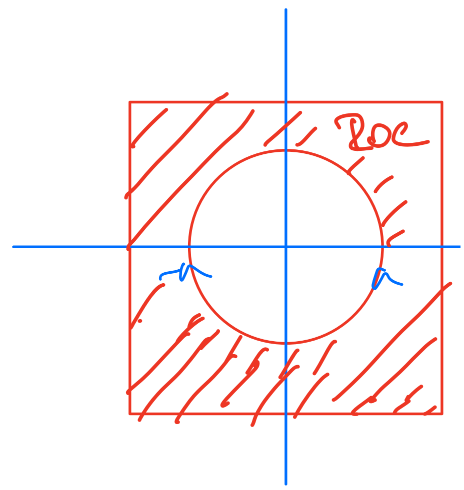


Para este ejemplo la transformada converge para todo Z

El siguiente ejemplo es un decaimiento exponencial, por una función salto unidad centrada. Recomendamos intentar graficar su fuinción.

$$\boxed{x(n) = a^n u(n) \qquad |a| < 1}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (a^1 \cdot z^{-1})^n}_{\text{Serie geométrica}} = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^\infty}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |az^{-1}| < 1$$

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Longrightarrow |a| < |z|$$

Ejemplo función salto unidad:

$$x(n) = u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} u(n) \cdot z^{-n}$$

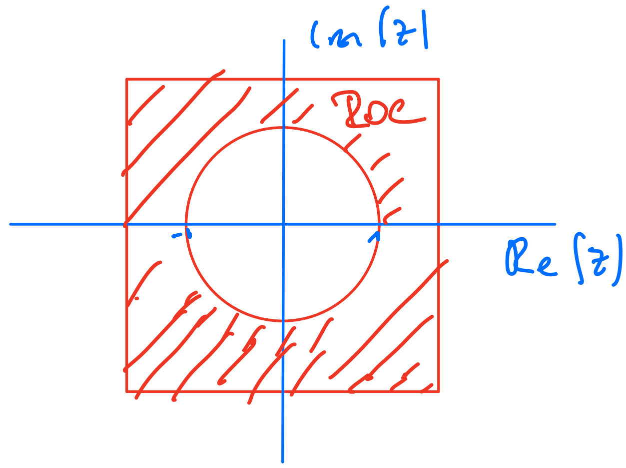
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n} = \frac{\left(z^{-1}\right)^{0} - \left(z^{-1}\right)^{\infty}}{1 - z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \left|z^{-1}\right| < 1$$

Para este ejemplo la region de convergencia:

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \qquad |1| < |z| \qquad ROC \ |z| > |1|$$



Ahora apliquemos la transformada al filtro RC que vimos al principio:

$$h(n) = a b^n u(n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a b^n \cancelto{1}{u(n)} z^{-n}$$

$$a \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} \left(b z^{-1}\right)^n$$

$$= a \left(\frac{1}{1 - b z^{-1}} \right) = \frac{a}{1 - b z^{-1}}$$

ROC $|z| > |b|$

En General las funciones transferencia de los sistemas LTI se pueden enscribir como cociente de polinomios:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n \quad {}^{n}}$$

Las Raíces del polinomio de numerador se llaman “Ceros” y las raíces del Polinomio del denominador se llaman polos. En los gráficos es habitual representarlos con “o” y “x” a cada uno respectivamente:

Ejemplo determinar los polos y los ceros del siguiente sistema LTI

$$H(z) = \frac{a}{1-bz^{-1}} = \frac{a}{z^{-1}(z-b)} = \frac{az}{z-b}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{cero} & \text{en} & z=0 \\ \text{Polo} & \text{en} & z=b \end{array}}$$

Siendo la función transferencia :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Cuando :

$$A(z) = 1$$

SISTEMA FIR
FINITE IMPULSE RESPONE

En cambio cuando A(z) Tenga Raíces.

$A(z) \rightarrow$ Raíces

SISTEMA IIR
INFINITE IMPULSE RESPONE

Una propiedad importante de la transformada Z es el desplazamiento en el tiempo:

$$x(n) \Longleftrightarrow X(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$X(n) = X(n-n_0) \Longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n-n_0)\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(m) \cdot z^{-(m+n_0)}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m)\, z^{-m}$$

$$X_1(z) = z^{-n_0}\, X(z)$$

Desplazamiento en el tiempo: equivale a multiplicar a nuestra trasformada por Z^(-n0)

Transformada Z y respuesta en frecuencia:

Como vimos al inicio de la cursada los sistemas LTI pueden describirse mediante su respuesta al impulso h(n) y la TFDT[h(n)] Es decir la trasformada de Fourier en tiempo discrto de dicha respuesta al impulso nos brinda la “Respuesta en Frecuencia”

Conceptualmente podemos interpretar mejor este si tenemos en cuenta que la respuesta al impulso es el resultado (salida del sistema) cuando en la entrada x(n) colocamos una delta de Kronecker. Cuyo espectro si calculamos la TFDT de la misma corresponde con un espectro plano de frecuencias es decir todas las frecuencias a igual magnitud.

$$h(n) \overset{TFDT}{\Longleftrightarrow} H(w) = H(e^{jw}) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-jwn}$$

Ahora si miramos bien la expresión anterior debiéramos de identificar que la TFDT es idéntica a la trasformada Z de dicha fución cuando es evaluada en Z= e^jw. (w=omega)

$$\boxed{z = e^{jw}}$$

$$z = e^{j\omega}$$

Esta expresión corresponde con evaluar la Transformada sobre el circulo unitario del plano Z y por tanto coincidente con evaluar la respuesta en frecuencia de un sistema LTI al que se le haya aplicado esta transformada.

$$h(n) \Longleftrightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$$H\left(z\big|_{e^{j\omega}}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) = H(\omega)$$

Para nuestro ejemplo inicial (el filtro RC):

$$h(n) = a\, b^{n}\, u(n)$$

$$H(z) = a\left(\frac{1}{1 - b z^{-1}}\right) = \frac{a}{1 - b z^{-1}}$$

$$H(w) = \frac{a}{1 - b e^{-jw}}$$

Repuesta en frecuencia evaluando en Z = e^(-jw)