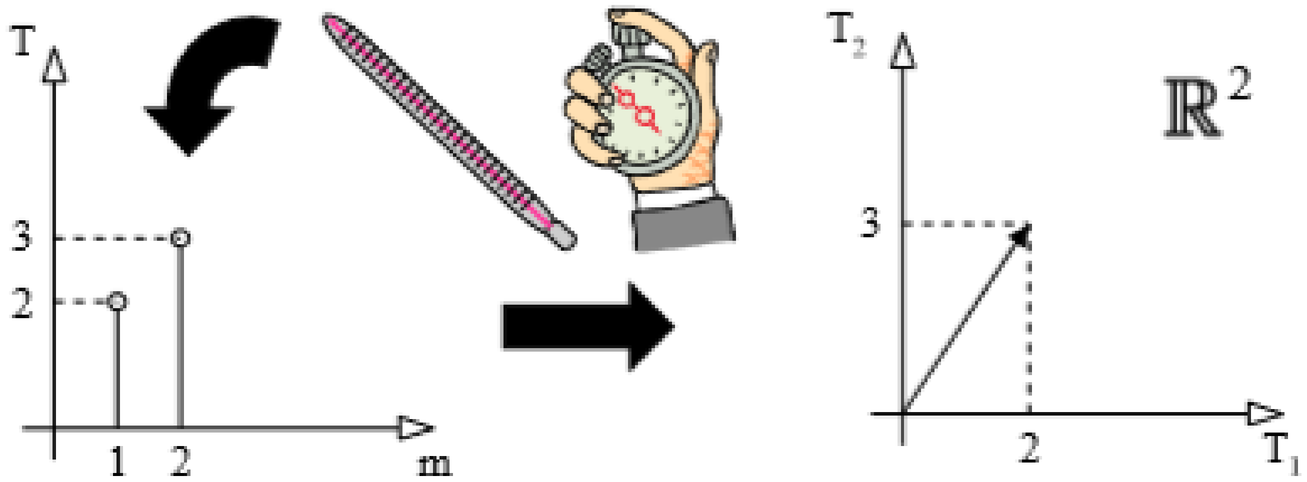
Procesamiento de Señales

Espacios de Señales

Introducción

- En general asociamos a las señales con "elementos aislados".
- Ahora vamos a incorporar a las señales en "marcos estructurados" como los espacios vectoriales.
- Considerando a las señales como vectores de un espacio n-dimensional, podemos:
  - aprovechar las propiedades de la estructura algebraica de los espacios vectoriales.
  - interpretar el procesamiento de las señales desde una perspectiva geométrica.
  - con un abordaje conceptual sencillo e intuitivo…

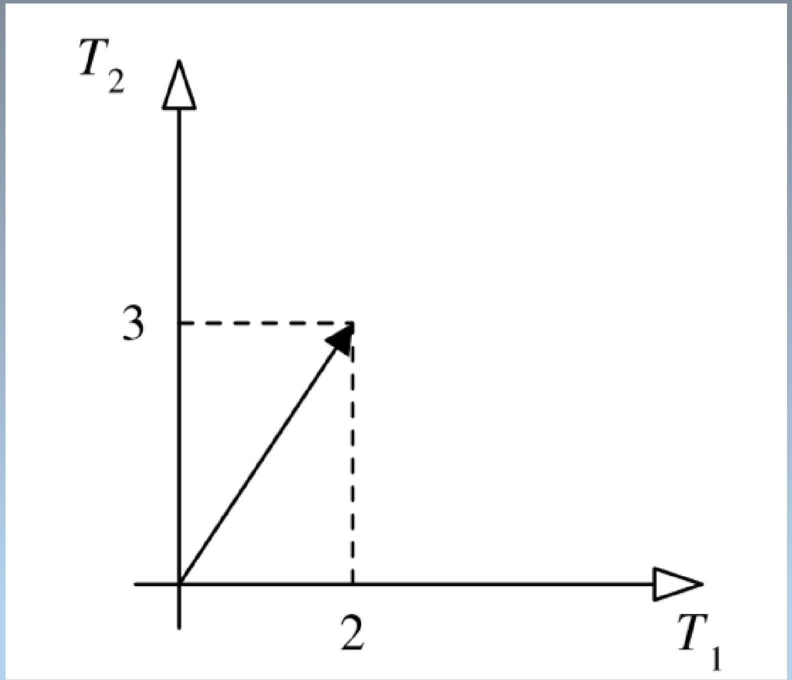
Experimento conceptual



•Medimos la temperatura ambiente a intervalos de 1 minuto...

•Representamos en una gráfica en donde el eje de las ordenadas indica el tiempo y el de las abscisas la magnitud de la temperatura.

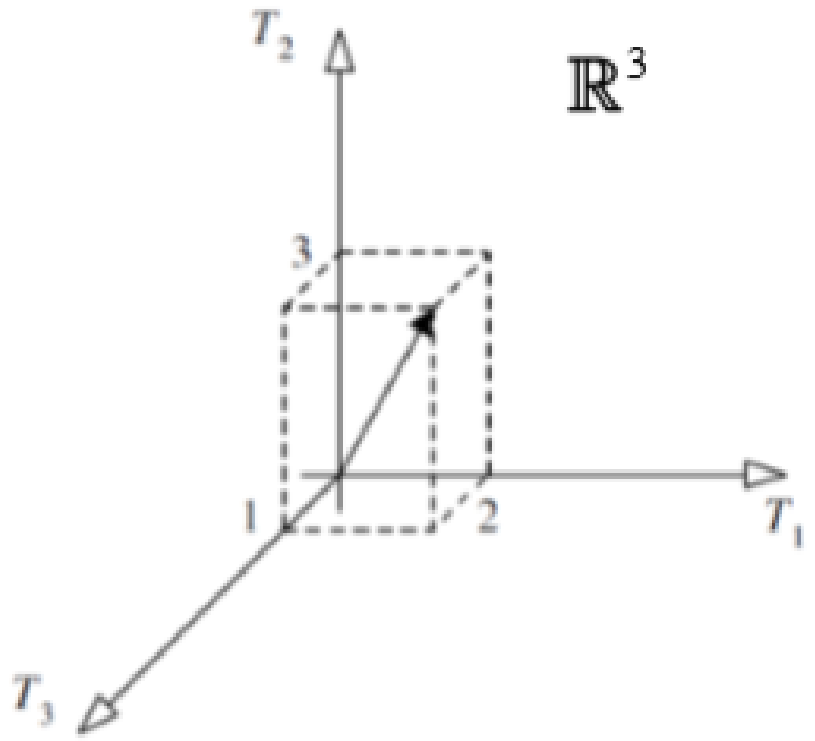
Podemos también representar estos valores como un vector en un espacio de dos dimensiones



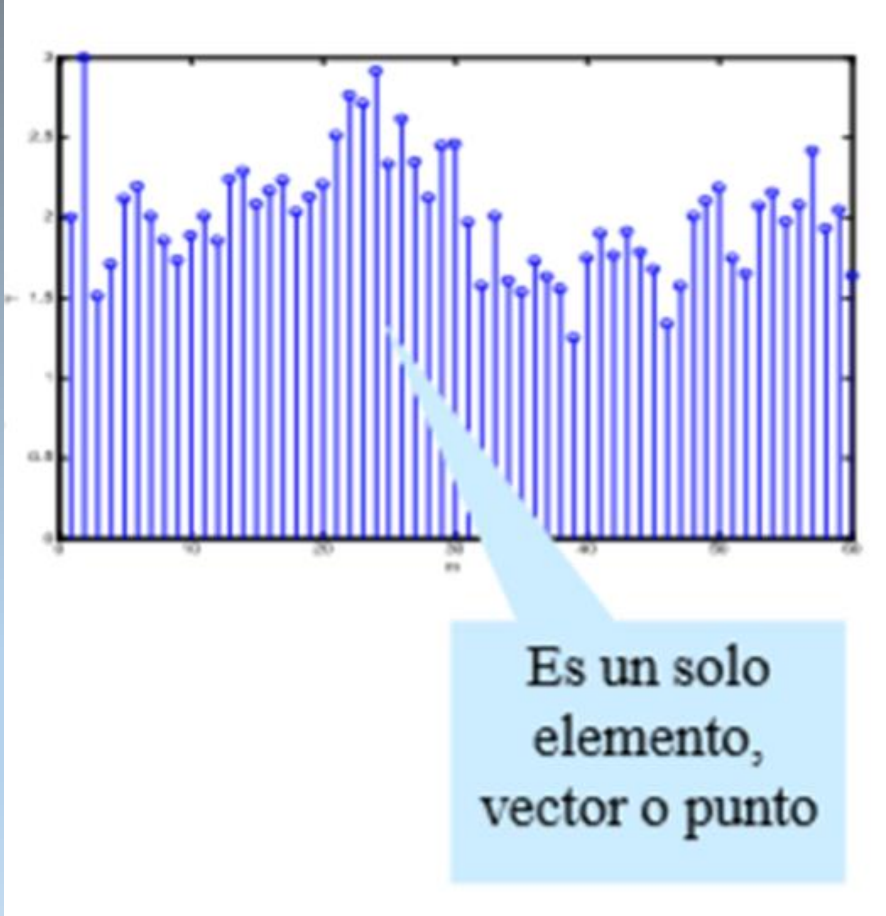
Observamos que esta señal de 2 muestras puede ser representada mediante un vector de 2 componentes reales, es decir un vector en R^2

Señales y vectores...

- Si volvemos a medir luego de 1 minuto y vemos que la temperatura es 1 ° C …

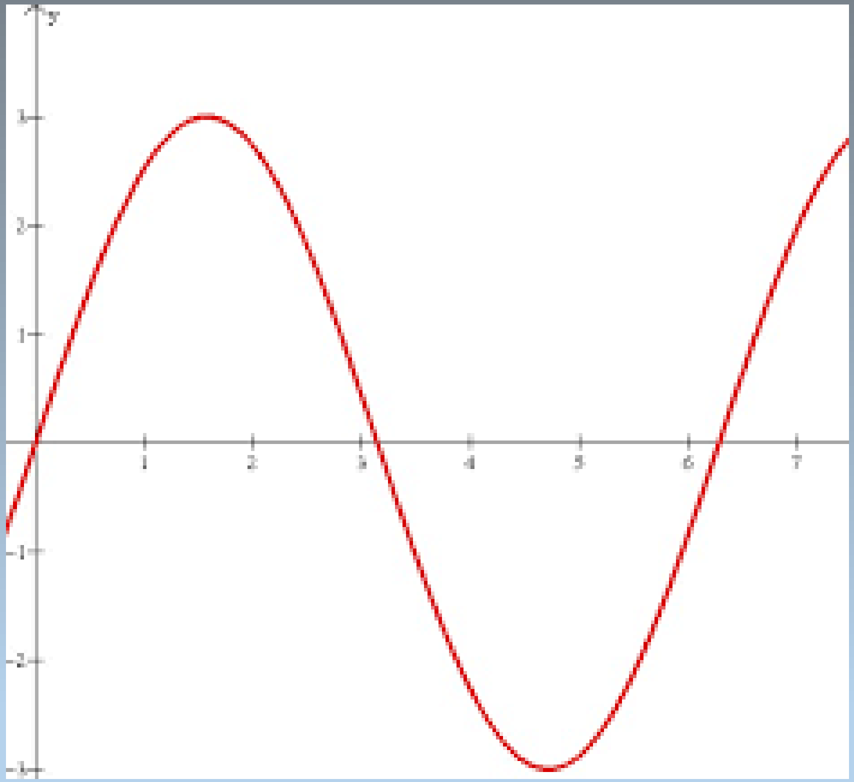


Siguiendo con esta idea, vemos que al cabo de una hora tendremos una señal de 60 muestras, que podría ser interpretada como un vector en $\mathbb{R}^{60}$ (pero no podremos representarlo gráficamente).



Se entiende que el concepto es el mimo

¿Es posible aplicar estas ideas a señales continuas? ¿Cómo representaría la señal $s(t) = \sin(\omega t)$? ¿En qué dimensión estaría el vector?



Observamos que para cualquier intervalo de tiempo que tomemos habrá infinitos valores. Así podemos ver a las señales continuas como vectores en R^{∞}

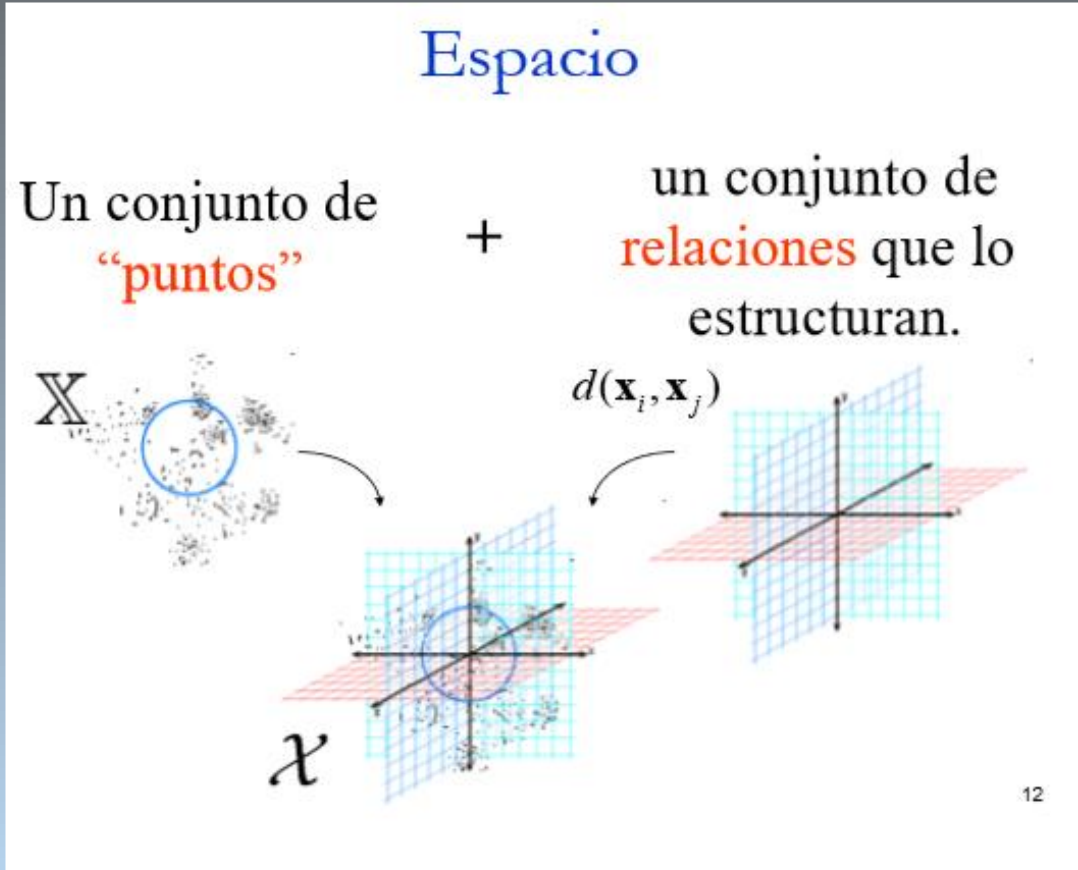
Señales y vectores...

- Definimos una señal **x** discreta en R^N como:

$$\mathbf{x} = [x_n]\,; \quad n \in \mathbb{N}; x_n \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

- Definimos una señal **x** continua en R^∞ como:

$$\mathbf{x} = [x(t)]\,; \quad t \in \mathbb{R}; x(t) \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$$



Definición

Un espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna (llamada suma, definida para los elementos del conjunto) y una operación externa (llamada producto por un escalar, definida entre dicho conjunto y otro conjunto, con estructura de cuerpo), con sus propiedades fundamentales.

coggle
made for free at coggle.it

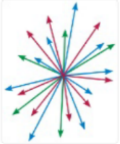
ESPACIO VECTORIAL Y SUS PROPIEDADES

EJEMPLOS

Dado que lo mismo se puede decir para vectores con tres, cuatro o n componentes, entonces Real elevado a n potencias con las propiedades correspondientes, son espacios vectoriales.
Como la suma y la multiplicación por un escalar de todos los vectores con dos componentes satisfacen las 10 propiedades anteriores, decimos que Reales elevado a la 2(Potencia), con estas propiedades es un espacio vectorial.

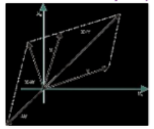
SU DEFINICION

Un espacio vectorial es una estructura algebraica creada apartir de un conjunto no vacío.



Contiene dos operaciones

Una operación interna (llamada suma,definida para los elementos del conjunto)

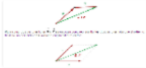


Una operación externa(llamada producto (Multiplicación) por un escalar, definida entre dicho conjunto y un cuerpo matemático)

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores y a los elementos del cuerpo, escalares.

Tiene 10 propiedades Fundamentales

Propiedades de la suma de vectores. Sean u,v, w vectores en V



1) La Suma Vector u + Vector v = Vector z. es otro vector en V
2) Vector u + Vector v = Vector v + Vector u. Es decir, la suma es conmutativa
3) (Vector u + Vector v) + Vector w = Vector u + (Vector v + Vector w) Es decir , la suma es asociativa
4) Existe un Vector 0, Tal que Vector u + Vector 0 = Vector 0 + Vector u = Vector u
5) Para todo vector, Vector u existe un vector -Vector u, tal que Vector u + (- Vector u) = Vector 0 y se denomina inverso aditivo

Propiedades de la multiplicación por un escalar. Sean u y v Vectores en V, c y d constantes. (escalares)

1) El Vector cu es un Vector V
2) c (Vector u + Vector v) = c Vector u + c Vector v
3) (c + d) Vector u = c Vector u + d Vector u Los incisos 2 y 3 representan la propiedad distributiva.
4) c (d Vector u +) = (cd) Vector u
5) Para todo Vector u, 1 Vector u = Vector u, Tal que Vector u + (-Vector u) = Vector 0 , Y se denomina inverso aditivo

- Un espacio es un conjunto $\mathbb{X}$ de elementos $\mathbf{x}$ que satisfacen una condición p, pero además...
  - Se requieren otra/s propiedad/es para poder llamar al conjunto “espacio”...
  - En particular, se debe dotar al conjunto de (al menos una):
    - **Estructura geométrica** (espacio de señales).
    - **Estructura algebraica** (espacio vectorial).

Relaciones geométricas:
distancias, tamaños, formas,
alineaciones, ángulos, conexidad.

Espacio de Señales

- Si al conjunto de señales $\mathbb{X}$ definido anteriormente le agregamos una métrica *d* entonces se convierte en un espacio de señales $\mathcal{X}$.
- Los espacios de señales son espacios métricos cuyos elementos son señales.

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{X}; d\}$$

Espacio de señales

Conjunto de señales

$+$

Estructura geométrica

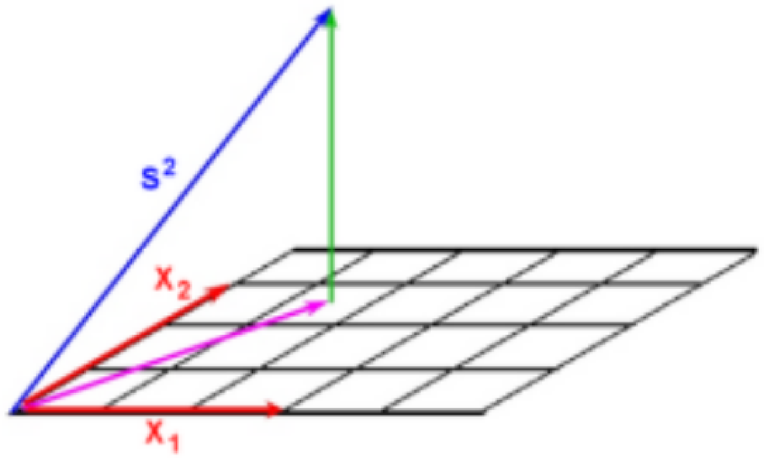
$$\mathcal{X} = \{\mathbb{X}; d\}$$

Distancia / Norma

Norma *vs* Distancia

- Norma: depende de un punto del espacio.

- Distancia: función de dos puntos del espacio.



Norma

- Nos proporciona información acerca del "tamaño" de una señal o vector x:
  - Es un número real no negativo:

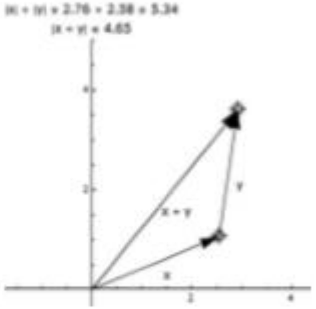
$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

  - Es homogénea con respecto a la escala:

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$$

  - Satisface la desigualdad triangular:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|,$$



- Hay diferentes normas pero la más empleada es la denominada norma-p.

Norma - p

- Secuencias temporales:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

- Señales continuas: $1 \leq p < \infty$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

Si $p = 1$, tenemos la norma 1, también conocida como *acción* de la señal:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n| \quad \text{o} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt$$

Si $p = 2$, tenemos la norma 2:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)} \quad \text{o} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt\right)}$$

La norma 2 da una idea del tamaño del objeto en un sentido físico, específicamente en el caso de vectores se trata de la longitud de éstos. Esta norma está directamente relacionada con la *energía* de la señal, que se define como:

$$E(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

Si $p = \infty$, tenemos la norma infinito:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n\in[1,N]} |x_n| \quad \text{o} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$$

que en el análisis de señales corresponde a la *amplitud* de una señal positiva:

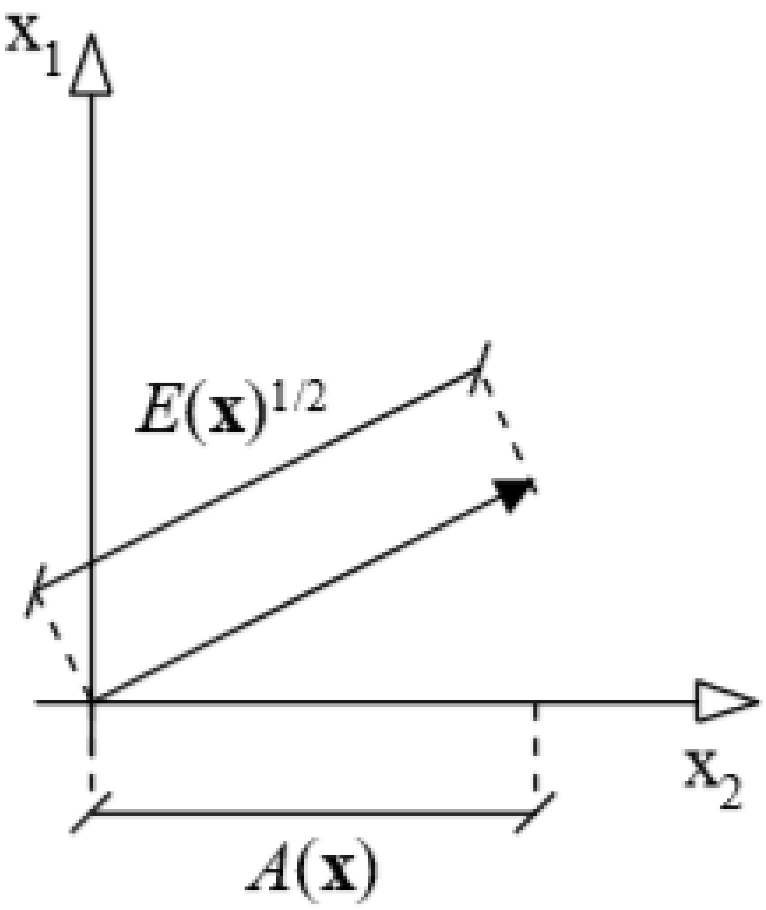
$$A(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$\|\mathbf{x}\|_\infty$ Se denomina amplitud de la señal $\mathbf{x}$

$\|\mathbf{x}\|_2^2$ Se conoce como energía de la señal $\mathbf{x}$

$\|\mathbf{x}\|_1$ Suele llamarse acción de la señal $\mathbf{x}$

Ejemplo: amplitud y energía



Existen otras medidas de interés para caracterizar las señales y, en algunos casos, estas medidas están directamente relacionadas con la norma. Cuando la energía de una señal no es finita, es útil definir su *potencia* o valor cuadrático medio como:

$$P(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2 \quad \text{o} \quad P(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt.$$

Otra medida muy útil es la raíz del valor cuadrático medio (RMS, del inglés *root mean square*), definida como:

$$RMS(\mathbf{x}) = \sqrt{P(\mathbf{x})}.$$

Por último, el *valor medio* de una señal se define como:

$$m(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x_n \quad \text{o} \quad m(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) dt.$$

Distancia

- La distancia es un concepto muy importante asociado a un espacio.
- Nos permite dar sentido geométrico al espacio a través de una "métrica".

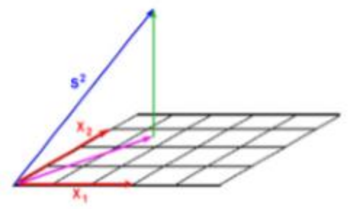
- **Significados:** "error" o "diferencia", "disimilitud" o "grado de aproximación" entre dos señales.

Norma vs Distancia

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

- La norma se refiere a un solo elemento, mientras que la distancia a dos (norma ≡ distancia al origen).

- Norma: depende de un punto del espacio.
- Distancia: función de dos puntos del espacio.



Distancia: Propiedades

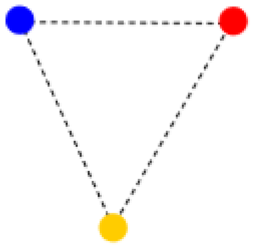
1) Es una función de dos puntos x, y con valor real positivo:

$$d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

?

2) Es simétrica:

$$d(x,y) = d(y,x)$$

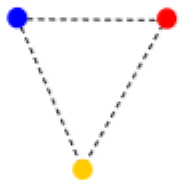


3) Cumple con la desigualdad del triángulo:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Desigualdad triangular: sentido común …

"Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos"



"Si antes de ir a casa paso por lo de un amigo, camino más que si voy derecho a casa, salvo que su casa esté de camino a la mía"

"Si para volar a Buenos Aires hago una escala en Córdoba, tomo otro vuelo de Córdoba a Buenos Aires, pago más que volando directamente"

¡No siempre!

Distancias definida por la norma-p

Como vimos una métrica se puede definir a partir de una norma, por ejemplo la norma-p: $d(x, y) = \|x - y\|_p$

- Métricas
  - *Distancias de Minkowski*:

$$L_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

- Ejemplos:
  - *Manhattan (p=1)*: $L_1(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$
  - *Euclidiana (p=2)*: $L_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2}$
  - *Máximo (p=inf)*: $L_\infty(x, y) = \max_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$

Distancias definida por la norma-p

Como vimos una métrica se puede definir a partir de una norma, por ejemplo la norma-p: $d(x,y) = \|x - y\|_p$

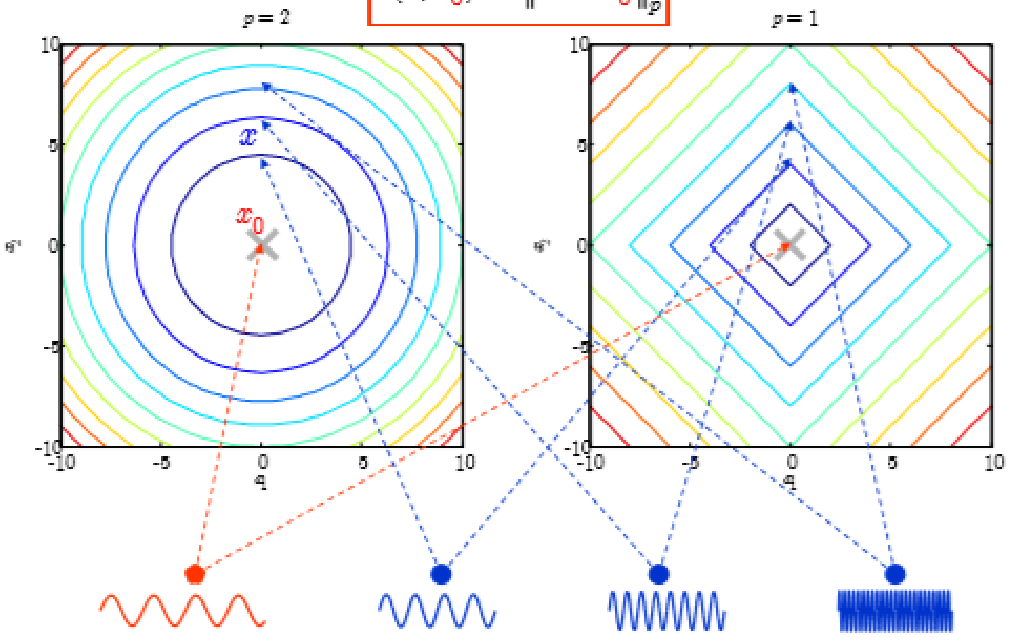
- **Métricas**
  - *Distancias de Minkowski:*

$$L_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

- **Ejemplos:**
  - *Manhattan (p=1):* $L_1(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$
  - *Euclidiana (p=2):* $L_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2}$
  - *Máximo (p=inf):* $L_\infty(x,y) = \max_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$

¿Qué ocurre cuando varío p?

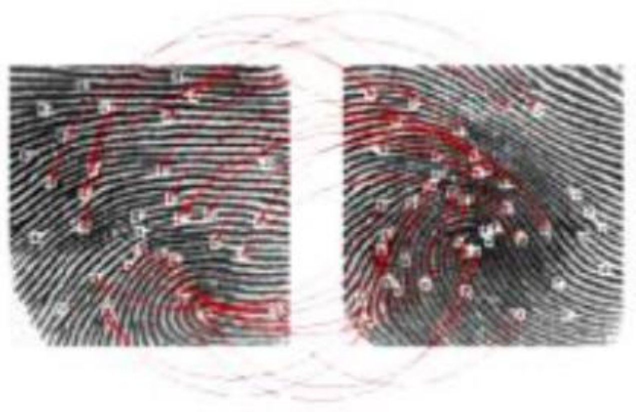
$$\boxed{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_p}$$



Ejemplo

Distancia entre huellas digitales …

La mejor distancia a utilizar depende de la aplicación …



Ejemplo

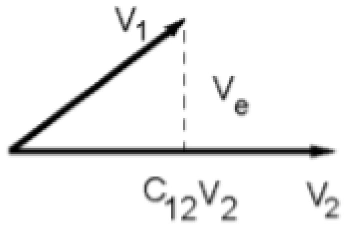
Distancia de Levenshtein

También llamada "distancia de edición":

- Distancia entre palabras:
  - Número mínimo de operaciones requeridas para transformar una cadena de caracteres en otra.
  - Operaciones: inserción, eliminación o sustitución de un carácter.
- Es útil en programas que determinan cuán similares son dos cadenas de caracteres, como es el caso de los correctores de ortografía.

Producto Interno

Componente de un vector en otro



- Proyección de $\mathbf{v}_1$ sobre $\mathbf{v}_2$
- Menor error de modo que:

$$\mathbf{v}_1 = c_{12}\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_e$$

¿Cómo calculamos c_{12}?

La componente de la componente de $\mathbf{v}_1$ a lo largo de $\mathbf{v}_2$ será:

$$c_{12}\,|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|\cos(\theta)$$

La componente de la componente de $\mathbf{v}_1$ a lo largo de $\mathbf{v}_2$ será:

$$c_{12}\,|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|\cos(\theta)$$

Además, sabemos que:

$$< \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 > = |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|\cos(\theta)$$

Ahora podemos escribir:

$$c_{12} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

c_{12} mide el ***parecido*** entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

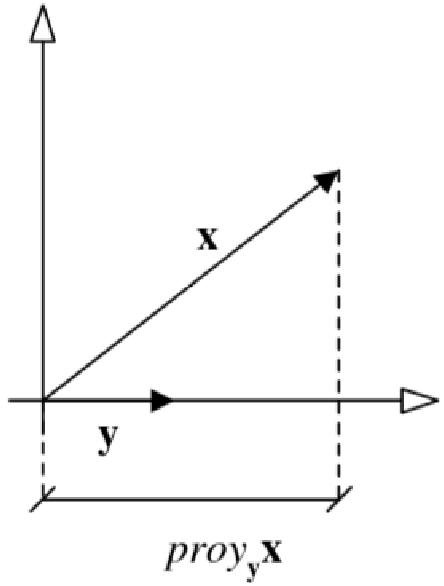
El producto interno de vectores tiene una clara interpretación geométrica relacionada con la proyección o componente de un vector sobre otro.

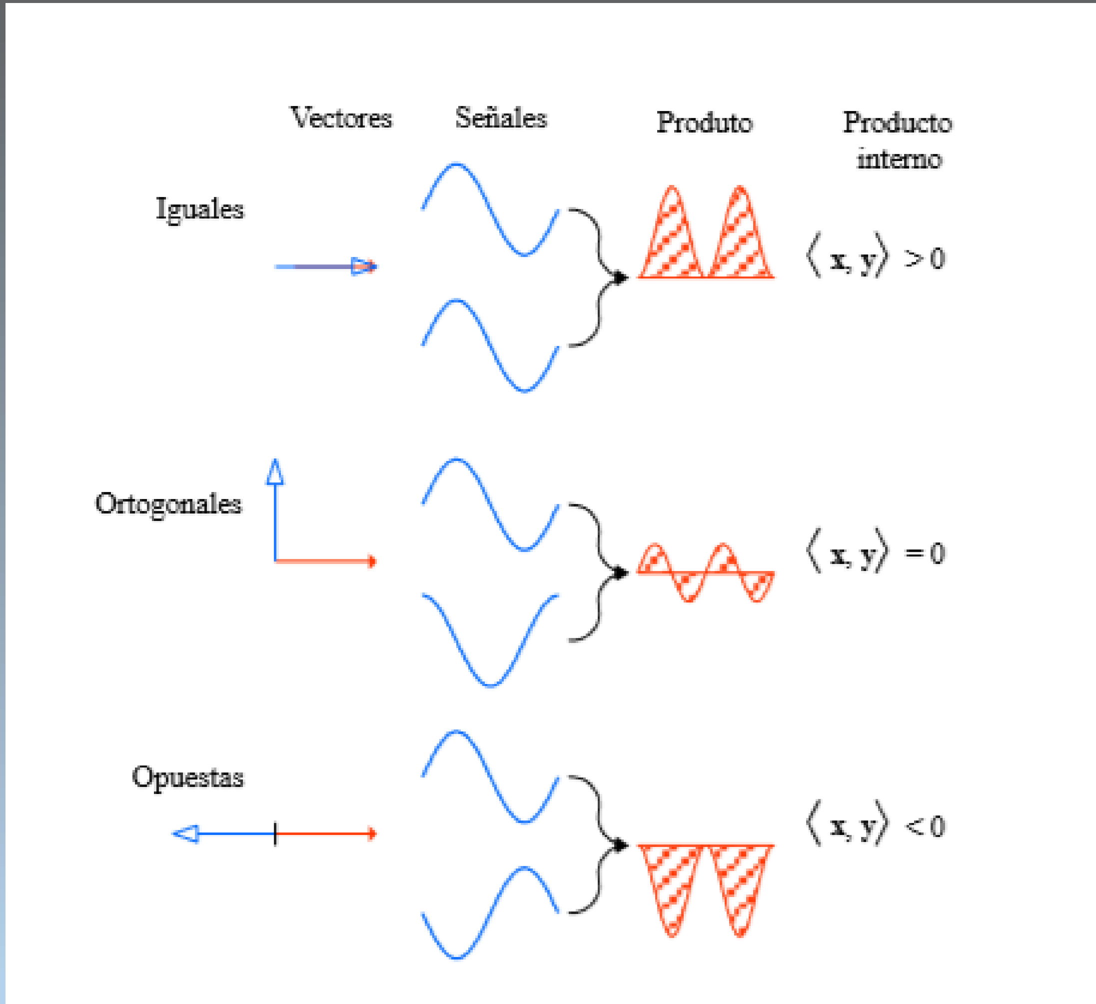
Ahora podemos escribir:

$$c_{12} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

$$proy_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|_2}.$$

Podemos ver que el producto interno nos da una idea del aporte de una señal en otra. Para independizarnos de la energía de la señal con la que estamos comparando, dividimos el producto interno por la norma 2 de ésta (en un espacio euclídeo). Esta interpretación del producto interno como proyección de una señal en otra puede verse gráficamente





Una vez aclarados estos conceptos básicos sobre vectores y su interpretación en el ámbito de las señales, pasaremos a formalizar lo relacionado con espacios vectoriales.

Bases y transformaciones

Dado un conjunto de N vectores $X_0 = \{\mathbf{x}_i\}$, con $N < \infty$, se llama *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{x}_i$ a una expresión de la forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

Conjunto generador

donde los α_i son escalares.

Se dice que un vector $\mathbf{x}$ es linealmente dependiente del conjunto de vectores X_0 si y sólo si se puede escribir a $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_i$. En caso contrario se dice que el vector $\mathbf{x}$ es linealmente independiente del conjunto de vectores X_0.

Un conjunto de vectores se dice que es *linealmente independiente* si la relación

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

sólo puede satisfacerse siendo nulos todos los escalares α_i. Dicho de otro modo, un conjunto es linealmente independiente si ninguno de sus vectores puede expresarse como combinación lineal de los demás vectores del mismo conjunto.

Bases

Dado un espacio vectorial $\mathcal{X}$, se dice que el conjunto de vectores X_0 constituyen una *base* de $\mathcal{X}$ si X_0 es linealmente independiente y genera a $\mathcal{X}$. Es decir, para que X_0 sea una base del espacio vectorial, cualquier vector perteneciente a $\mathcal{X}$ debe poder escribirse como una combinación lineal de los vectores de X_0 y además, ninguno de los vectores de X_0 debe poder escribirse como una combinación lineal de los demás.

$$\text{Base} \begin{cases} \text{Conjunto generador.} \\ \{\mathbf{x}_i\} \text{ linealmente independientes.} \end{cases}$$

$\{\mathbf{x}_i\}$ son linealmente independientes si:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

Ortogonalidad y ortonormalidad

Se dice que un conjunto X_0 es *ortogonal* si se verifica que para todos sus elementos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle &= 0 \qquad \forall i \neq j \quad \text{y} \\ \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle &= k \qquad \forall i = j \end{aligned}$$

donde k es una constante escalar distinta de cero. En particular, si la constante $k = 1$, se dice que el conjunto es *ortonormal*. Si X_0 es además una base para espacio vectorial $\mathcal{X}$, esta base posee la ventaja de que cuando se quiere expresar un vector como una combinación lineal de los elementos de la base, los coeficientes α_i se puede obtener simplemente mediante el producto interno entre el vector y cada uno de los elementos de la base. Por ejemplo, si queremos expresar $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de la base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ formada por $X_0 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3$$

Si el conjunto $\mathbb{X}_0$ es **ortogonal** $\begin{cases} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0 \ \forall \ i \neq j \\ \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = k \ \forall \ i = j \end{cases}$

O, si $k = 1$ entonces $\mathbb{X}_0$ es **ortonormal**.

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3$$

Si quisiéramos obtener α_1, se puede hacer el producto interno a ambos lados por $\mathbf{x}_1$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle + \alpha_3 \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \rangle$$

Pero por ser una base ortogonal $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$ y por ser orto*normal* $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle = 1$. De esta forma se puede obtener α_1 simplemente mediante la proyección $\alpha_1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle$. Es decir, para cualquier i tenemos:

$$\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle = \sum_n x_n x_{in}$$

En esta forma, cada coeficiente es una medida del *parecido* entre el vector y el elemento correspondiente de la base. Como vimos antes, conceptualmente $\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle$ es la *componente* de la señal $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}_i$.

Representación de señales

Si $\mathbb{X}_0$ es ortogonal, entonces: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle$

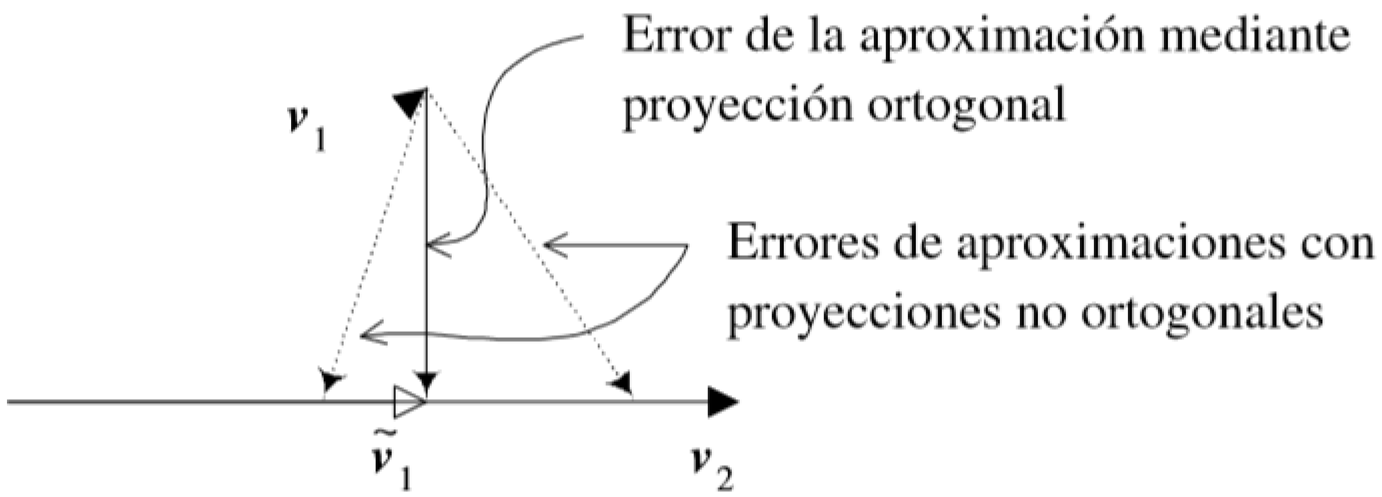
$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle}{\left\| \mathbf{x}_i \right\|^2}$$

Si $\mathbb{X}_0$ es ortonormal, entonces: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle$

$$\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle$$

Concepto importante: α_i es la componente de la señal $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}_i$.

Es decir, el valor de α es la proyección ortogonal de $\mathbf{v}_1$ sobre $\mathbf{v}_2$ normalizada por la longitud de $\mathbf{v}_2$. Esto se puede apreciar en el diagrama de vectores de la Figura , donde se pueden ver $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\tilde{\mathbf{v}}_1$, la aproximación de $\mathbf{v}_1$ en la dirección de $\mathbf{v}_2$. También se aprecia el error de la aproximación ortogonal $\epsilon = \|\tilde{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{v}_1\|$ y otros errores de proyecciones no ortogonales que —como las que se indican en líneas punteadas— siempre son mayores.



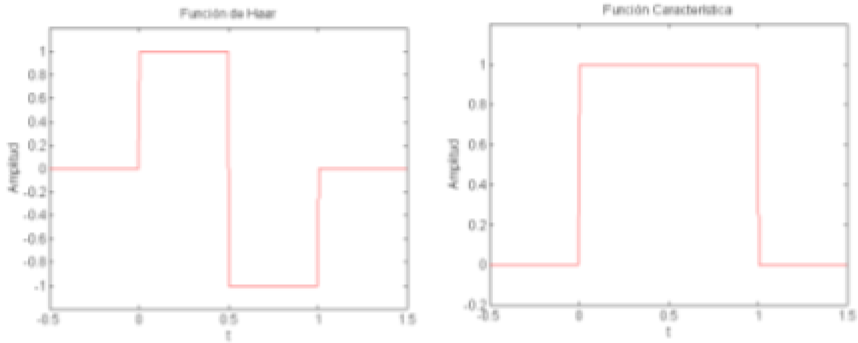
Note que no estamos diciendo que el vector $\mathbf{v}_2$ sea el mejor para aproximar $\mathbf{v}_1$, sino que la mejor manera de calcular α es a través de una proyección ortogonal.

Ejemplos: Bases ortogonales

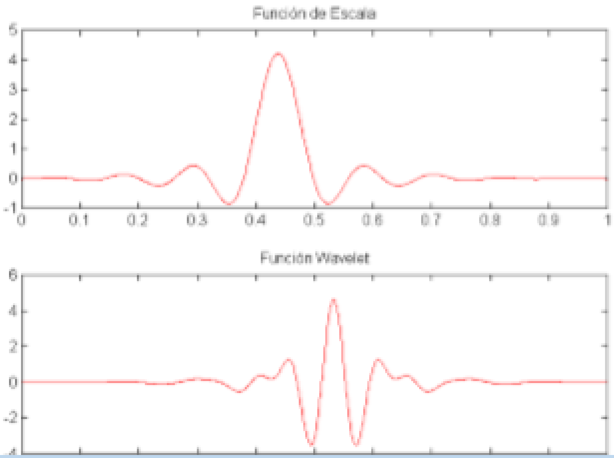
- Polinomios de Legendre [-1,1]
- Polinomios de Chebyshev [-1, 1]
- Polinomios de Hermite [- ∞, ∞]
- Funciones de Hermite [- ∞, ∞]
- Funciones de Walsh [0,T]
- Funciones de Haar [0,1]
- Wavelets
- Funciones de Fourier

Ejemplo: Wavelets

Funciones de Haar:



Onditas de Meyer:



$$y(t) = \begin{cases} -1 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Para representar esta señal podemos usar un conjunto de funciones de Legendre, que son ortonormales en el intervalo $[-1, 1]$. Estas funciones se pueden calcular a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\phi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\phi_1(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \\
\phi_2(t) &= \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \\
\phi_3(t) &= \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) \\
&\vdots \\
\phi_n(t) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n
\end{aligned}$$

Utilizando las cuatro primeras funciones y el producto interno se puede encontrar una representación aproximada de la señal propuesta:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{2}}\, y(t)dt = 0 \\
\alpha_1 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\, y(t)dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
\alpha_2 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) y(t)dt = 0 \\
\alpha_3 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) y(t)dt = -\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &\approx \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} t\right) + \left(-\sqrt{\frac{7}{32}}\right) \left(\sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right)\right) \\
&= \frac{45}{16}\, t - \frac{35}{16}\, t^3
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que si aumentamos el número de funciones aproximantes, el error se irá reduciendo. En el caso de señales muestreadas, tendremos vectores de $\mathbb{R}^M$ y la aproximación será exacta si se usan M

Cambio de base

Para un espacio vectorial dado existen infinitas bases. De todas estas bases, cuando representamos una señal simplemente mediante $\mathbf{x} = [4, 8, 9]$, estamos utilizando implícitamente la base canónica:

$$X_e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ya que la señal $\mathbf{x}$ puede escribirse como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1\alpha_1 + \mathbf{e}_2\alpha_2 + \mathbf{e}_3\alpha_3 = \mathbf{e}_1 4 + \mathbf{e}_2 8 + \mathbf{e}_3 9$$

también podríamos representar esta misma señal en otra base de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, si utilizáramos la base *ortonormal*:

$$X_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$$

podemos expresar la señal $\mathbf{x}$ como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1\beta_1 + \mathbf{x}_2\beta_2 + \mathbf{x}_3\beta_3$ donde simplemente $\beta_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle$ (por ser una base ortonormal). Utilizando este producto interno encontramos la representación de la señal $\mathbf{x}$ en la base X_1 como:

$$\mathbf{x}_{X_1} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [6\sqrt{2}, \frac{11}{3}\sqrt{6}, \frac{5}{3}\sqrt{3}]$$

Hay que tener en cuenta que tanto $\mathbf{x}_{X_1}$ como $\mathbf{x}_{X_e}$ son la misma señal $\mathbf{x}$ vista desde diferentes perspectivas. Ambas representaciones contienen la misma información pero se ha efectuado un cambio de base. Podemos expresar $\mathbf{x}_{X_e}$ a partir de $\mathbf{x}_{X_1}$ como:

$$\mathbf{x}_{X_e} = \mathbf{x}_1\beta_1 + \mathbf{x}_2\beta_2 + \mathbf{x}_3\beta_3 = \mathbf{x}_1 6\sqrt{2} + \mathbf{x}_2 \frac{11}{3}\sqrt{6} + \mathbf{x}_3 \frac{5}{3}\sqrt{3} = [4, 8, 9]$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

o simplemente $\mathbf{x}_{X_e} = \mathbf{M}\mathbf{x}_{X_1}$, donde la matriz $\mathbf{M}$ contiene como columnas los vectores de la base X_1. Ahora observe que en el cálculo de los coeficientes $\beta_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle$ también podemos expresar los productos internos como un producto matricial:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} [& 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 &] \\ [& -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} &] \\ [& 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} &] \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

La matriz $\mathbf{M}$ se denomina matriz de *transición* o matriz de *cambio de base* X_0 a Y_0. Su inversa será la matriz de transición de la base Y_0 a la base X_0.

Supongamos que se desea analizar una señal de N muestras $x[n]$, pero no podemos extraer la información que nos interesa en la base que está representada. Entonces nos planteamos la posibilidad de realizar un *cambio de base* de manera tal que la información se represente de otra forma.

Nuestro interés al hacer esta transformación es lograr representar la información que contiene la señal $x[n]$, de tal manera que resulte más sencillo analizarla, extraer datos de ella, o incluso procesarla de manera de eliminar información que no nos interesa (por ejemplo, ruido). O sea que las señales que constituyan nuestra base no pueden ser cualquiera, sino que deben permitirnos representar nuestra señal en una forma más útil.