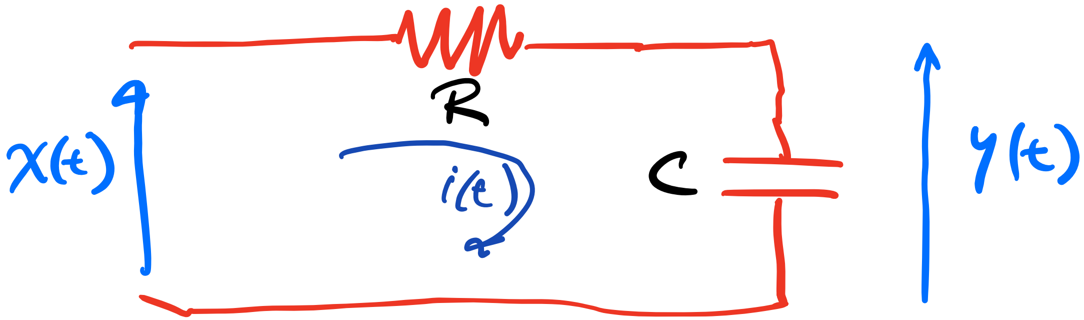
TRANSFORMADA Z

$$i_c = C \cdot \frac{dv_c}{d\tau}$$



$$\underset{V_c}{y(t)} = \underset{V_{in}}{x(t)} - RC\,\frac{dy(t)}{d\tau}$$

Discretizando la ecuación

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \lim_{\delta \to 0} \frac{y(t)-y(t-\delta)}{\delta} = \frac{y(nT_s)-y((n-1)T_s)}{T_s}$$

$$y(nT_s) = x(nT_s) - RC \cdot \left[\frac{y(nT_s)-y((n-1)T_s)}{T_s}\right]$$

Sin perder generalidad haciendo $T_s = 1$

$$y(n) = x(n) - RC\,y(n) + RC\,y(n-1)$$

$$y(n) + RC\,y(n) = x(n) + RC\,y(n-1)$$

$$y(n)(1+RC) = x(n) + RC\,y(n-1)$$

$$y(n) = \underbrace{\frac{1}{1+RC}}_{\alpha}\,x(n) + \underbrace{\frac{RC}{1+RC}}_{\beta}\,y(n-1)$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + RC} \qquad \beta = \frac{RC}{1 + RC}$$

$$y(n) = \alpha\, x(n) + \beta \cdot y(n-1)$$

$$x(n) \longrightarrow \delta[n]$$

$$y(0) = \alpha\, \delta[0] + \beta \cdot y(0-1) = \alpha$$

$$y(1) = \alpha\, \delta[1] + \beta \cdot y(0) = \alpha \beta$$

$$y(2) = \alpha\, \delta[2] + \beta \cdot y(1) = \alpha \beta \cdot \beta$$

$$y(3) = \alpha\, \delta[3] + \beta \cdot y(2) = \alpha \cdot \beta \cdot \beta\, \beta$$

$$h[n] = \alpha \cdot \beta^{n} \cdot u[n]$$

TRANSFORMADA Z

En los sistemas continuos es común utilizar la transformada de laplace que en resumidas cuentas permite resolver sistemas de ecuaciones diferenciales como funciones lineales siendo muy común su uso en análsistemas dinámicos. En el caso de sistemas discretos se emplea la transformada z.

$$x(n) \Rightarrow X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

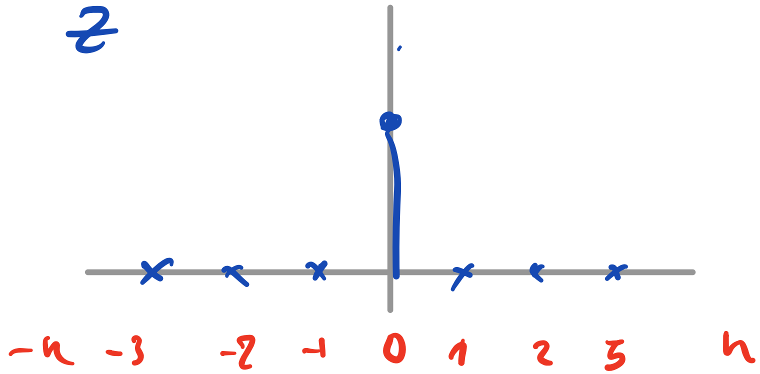
$$z = Re(z) + j.lm(z)$$

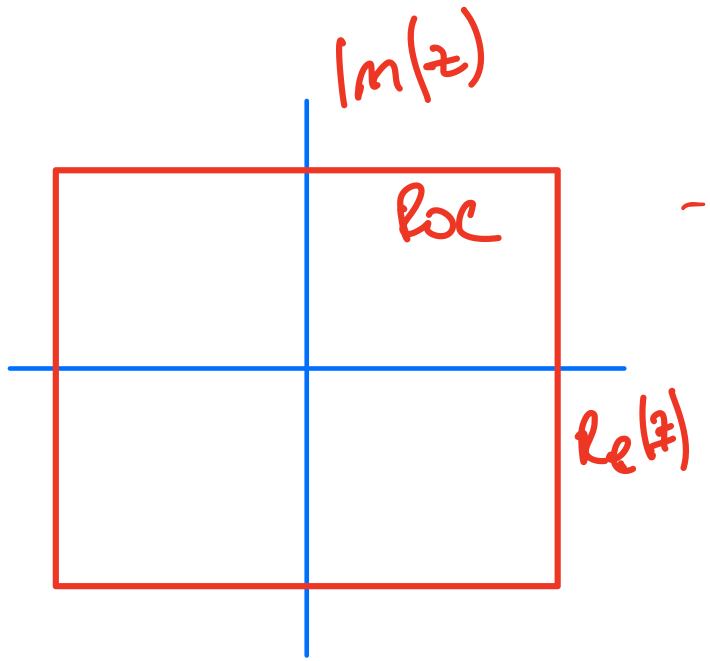
Como se trata de una suma infinita puede existir un conjunto de valores de z para los cuales la sumatoria no converge por lo tanto es necesario describir la **ROC.** Región de Convergencia es decir el conjunto de valores para el cual la transformada Z existe.

$$x(n) = \delta(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(0)\, z^{-0}$$

$X(z) = 1$ ROC Todo el plano z





$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(z)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)\, z^{-n}$$

$\text{z.B. } a < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{(a \cdot z^{-1})}^n$$

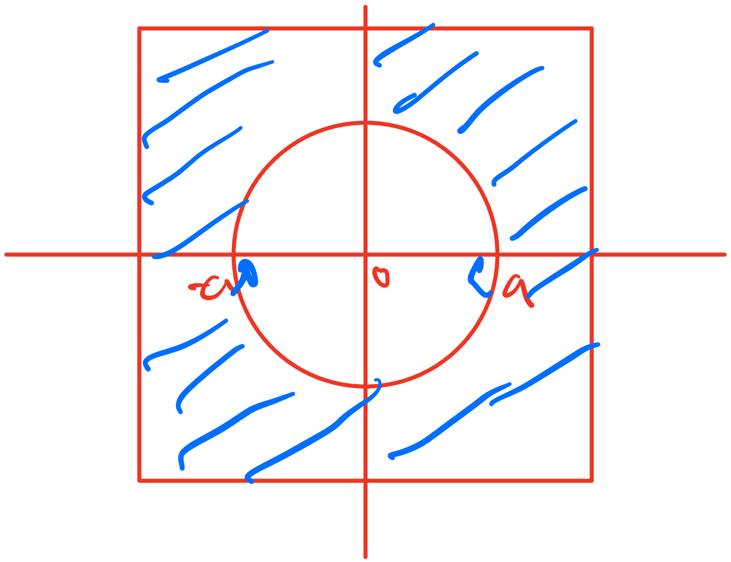
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

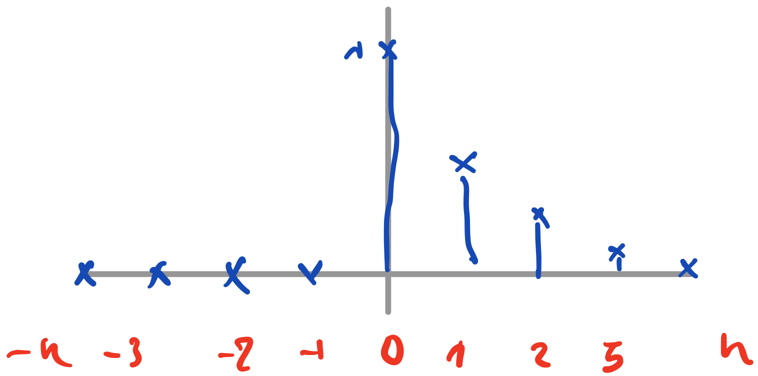
$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$$|a \cdot z^{-1}| < 1$$

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

$$\boxed{|a| < |z|}$$





$$x(n) = u(n)$$

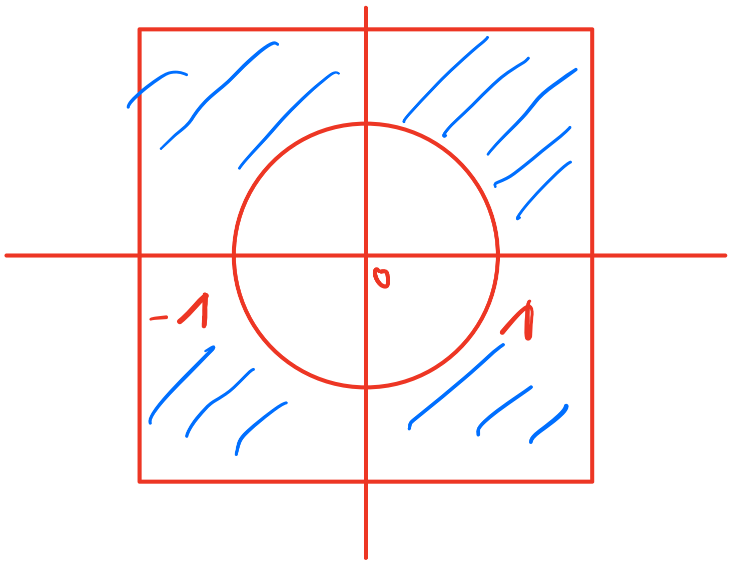
$$(z^{-1})^n$$

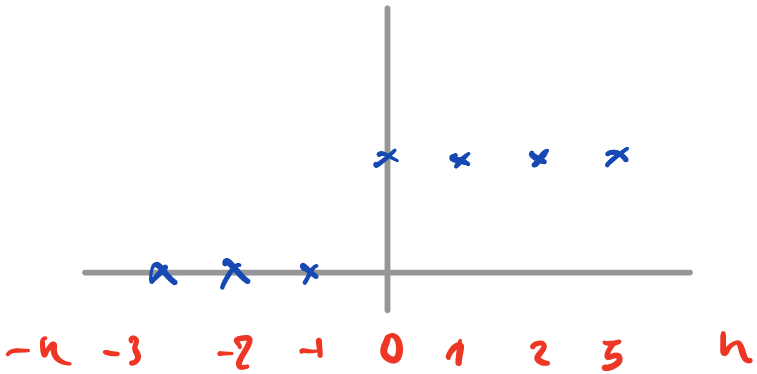
$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1\, z^{-n}$$

$$X[z] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow |z^{-1}| < 1$$

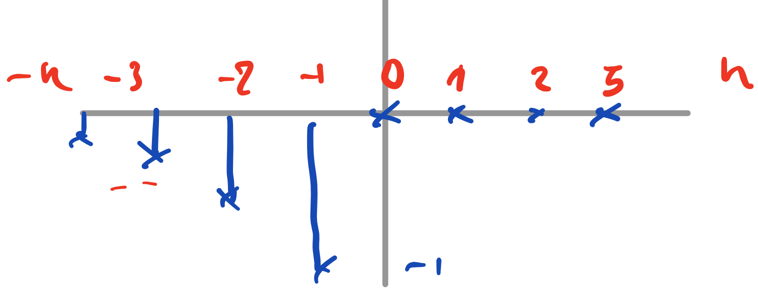
$$\frac{1}{|z|} < 1$$

$$1 < |z|$$





$$x(n) = -a^n u(-n-1) \qquad |a|<1$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) \cdot z^{-n}$$

$$u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ 1 & n<0 \end{cases}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a z^{-1})^n$$

$$n \to -m$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} (a z^{-1})^{-m} = -\sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1} z)^m$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1} z)^m$$

$$|a^{-1} z| < 1$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z}$$

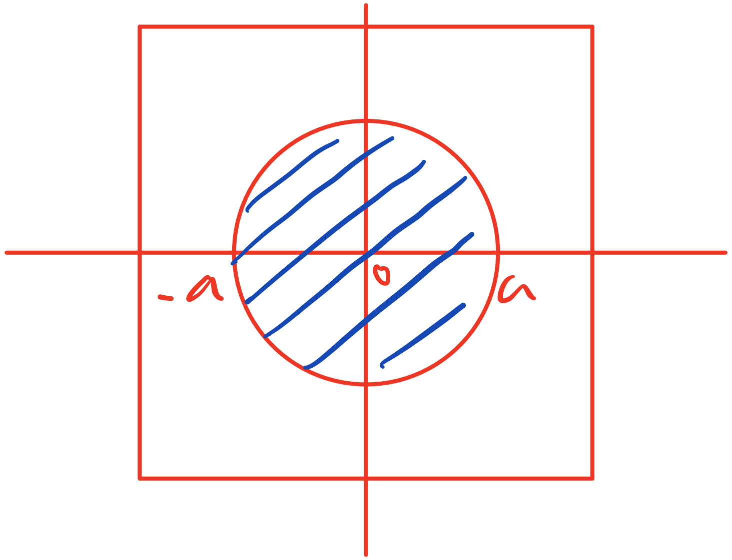
$$\frac{|z|}{|a|} < 1$$

$$|z| < |a|$$

$$1 - \frac{1}{1 - (a^{-1} \cdot z)} =$$

$$\frac{\cancel{1} - (a^{-1} z) \cancel{-1}}{1 - (a^{-1} z)}$$

$$\frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z}$$



$$|a^{-1} \cdot z| < 1$$

$$\frac{|z|}{|a|} < 1$$

$$\boxed{z < a}$$

$$\frac{-\frac{z}{a}}{1 - \frac{z}{a}} : \frac{-\frac{a}{z}}{-\frac{a}{z}} = \frac{1}{-\frac{a}{z} + 1} = \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

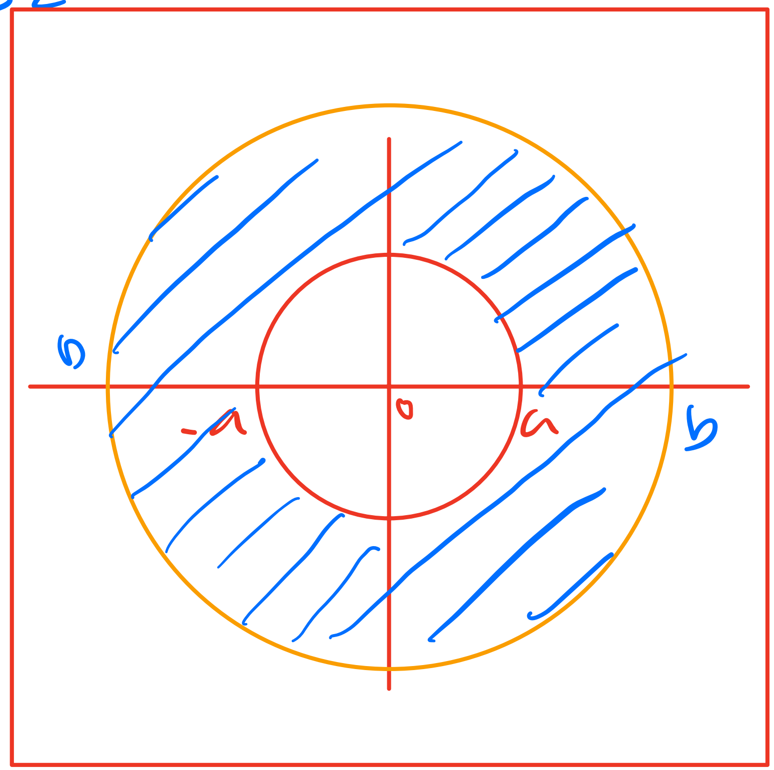
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1) \qquad |a|, |b| < 1$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n-\infty}^{\infty} \left[a^n u[n] - b^n u(-n-1) \right] z^{-n}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad |az^{-1}| < 1 \text{ y } |b^{-1}z| < 1$$

Roc $\quad |z| > |a| \cap |z| < |b|$



$a < b$

$|a| < |z| < |b|$

Que pasa con nuestro ejemplo inicial

$$h(n) = a\, b^n u(n)$$ respuesta al impulso

Su Transformada

$$H(z) = a\left(\frac{1}{1 - b z^{-1}}\right) = \frac{a}{1 - b z^{-1}}$$

Roc

$|z| > |b|$

$$\mathcal{L}\left(h(t)\right) \Rightarrow \underline{\underline{H(s)}}$$ (funcion Transferencia)

$$T_z\left(h(n)\right) \Rightarrow H(z)$$ (funcion Transferencia discreta) LTI

Función Transferencia de sistemas discretos se puede escribir como razón de polinomios

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

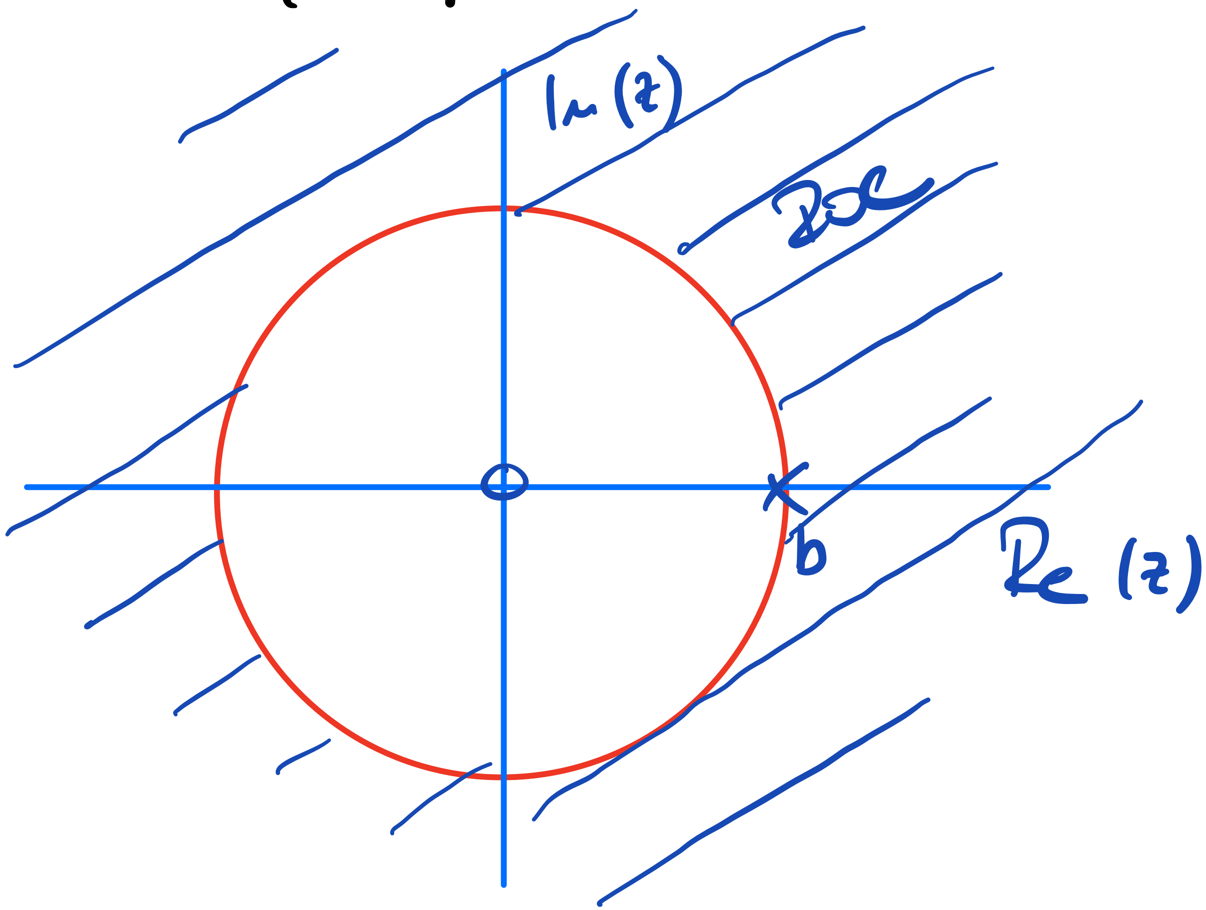
Las raíces del numerador se llaman ceros

Las raíces del denominador se llaman polos

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}} \cdot \frac{z}{z} \quad \text{Roc } |z| > |b|$$

$$= \frac{az}{z - b}$$



Que ocurre cuando nuestra FT solo contiene ceros?

$$H(z) = \frac{C(z)}{P(z)=1} \qquad \text{FIR}$$

$$H\left(z\right)=\frac{B\left(z\right)}{A\left(z\right)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+b_Nz^{-N}}$$

TABLA 3.1 ALGUNAS PAREJAS COMUNES DE TRANSFORMADAS Z

Secuencia	Transformada	RDC
1. $\delta[n]$	1	Todo z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	Todo z excepto 0 (si $m>0$) o ∞ (si $m<0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $\operatorname{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $r^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\operatorname{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

TABLA 3.2 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Número de propiedad	Referencia de sección	Secuencia	Transformada	RDC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contiene $R_{x_1} \quad R_{x_2}$
2	3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, excepto por la posible adición o eliminación del origen o del ∞
3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\lvert z_0\rvert R_x$
4	3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x
5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6		$Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contiene R_x
7		$Im\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contiene R_x
8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9	3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contiene $R_{x_1} \quad R_{x_2}$

Propiedades de la ROC

→ ROC no contiene polos

→ ROC de $X(z)$ es un anillo centrado al

→ $\mathcal{F}\{x[n]\}$ converge   ROC incluye el círculo unitario

$x[n]$ finita duración   ROC es el plano con posibles excepciones en 0 y $z=\infty$

Si la secuencia es derecha la ROC debiera estar por fuera del polo más alejado

$$x(n) \Longleftrightarrow X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$x_1(n) = x(n-n_0) \Longleftrightarrow X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)\, z^{-n}$$

$$m = n - n_0 \qquad n = m + n_0$$

$$X[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot z^{-(m+n_0)} = \boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m}} \cdot z^{-n_0}$$

$$X[z] = X[z] \cdot z^{-n_0}$$

Transformada z y repuesta en frecuencia.

Un sistema LTI se puede representar íntegramente con la respuesta al impulso

y su transformada de Fourier es la respuesta en frecuencia del sistema.

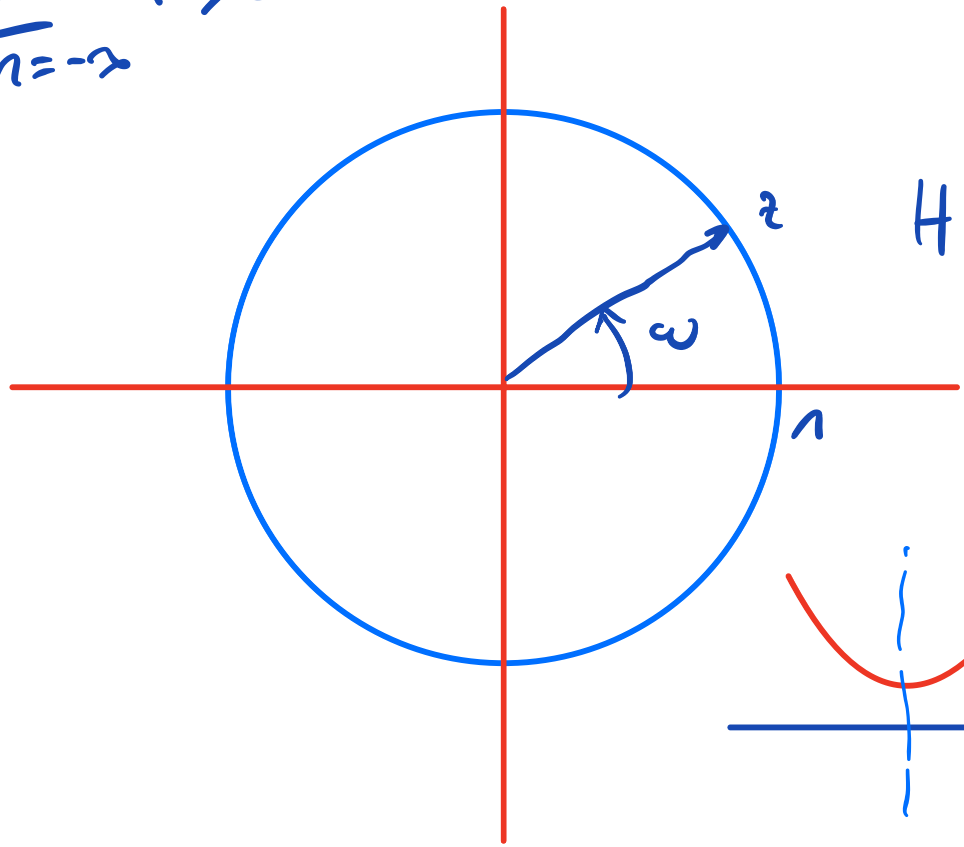
$$h(n) \overset{TDFD}{\Longleftrightarrow} H(\omega) = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

si evaluamos $z = e^{j\omega}$ Equivale a la Transformada de Fourier

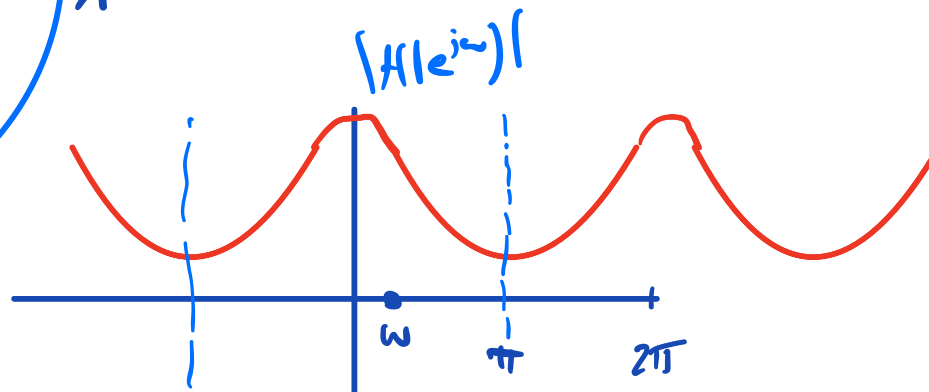
$$h(n) \overset{z}{\Longleftrightarrow} H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$$z = e^{j\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$$

$$h(n) \overset{Z}{\Longleftrightarrow} H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$



$$H\left(z\big|_{e^{j\omega}}\right) = H(e^{j\omega}) = H(\omega)$$



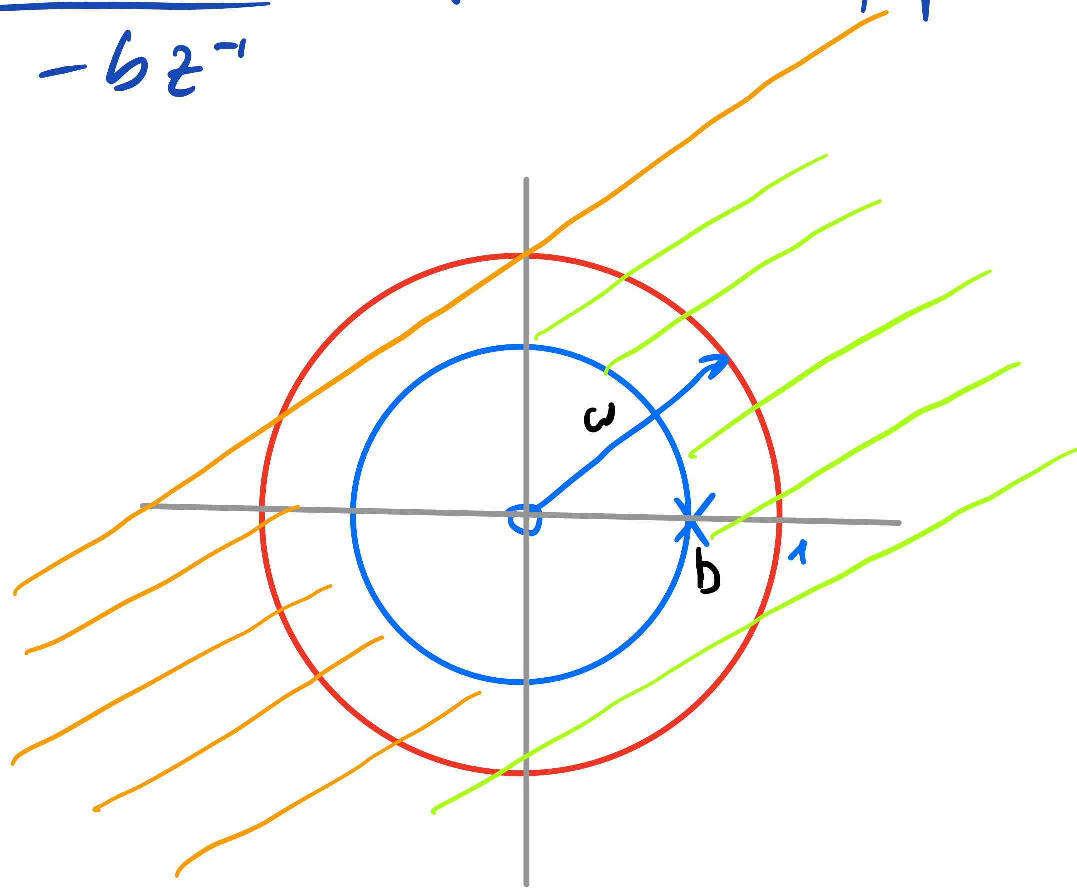
$$h(n) = a b^n u(n)$$

$$H(z) = a\left(\frac{1}{1-bz^{-1}}\right) = \frac{a}{1-bz^{-1}}$$

ROC $|z| > |b|$

Respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a}{1-b e^{-j\omega}}$$



LTI causal y Estable

$$h(n) = 0 \quad n < 0$$ causal Realizable

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$ absolutamente sumable

polos dentro del círculo unitario

- ROC es un anillo centrado en el origen
- TDFD → converge si la ROC de $X(z)$ incluye al círculo unitario
- La ROC no puede tener polos $H(\text{polo}) = \infty$
- Una secuencia de duración finita la ROC es el plano z excepto quizá $z = 0$ y/o $z = \infty$
- Secuencia causal (derecha) se extiende desde el polo más alejado a ∞
- Secuencias de ambos lados (anillo)
- ROC debe ser una región conectada