Stephan Kesper

Einführung in die Mathematik

Zum Selbststudium oder als Grundlage für den Unterricht

24. Oktober 2013

Vorwort

Dies ist ein sogenanntes „offenes“ Schulbuch, das bedeutet, dass dieses Buch kostenlos Jedem zur Verfügung gestellt wird. Es enthält Wissen, dass von Freiwilligen ohne finanzielle Interessen zusammengetragen wurde.

Die Mathematik stellt zusammen mit der Sprache, eine Basis allen Wissens dar. Jedoch ist die Sprache grundlegender in dem Sinne, das sie Voraussetzung für die Erklärungen zum Verständnis der Mathematik ist. Folgerichtig ist dieses Buch erst dann zu verwenden, wenn der Lernende bereits ein gewisses Grundverständnis von Sprache besitzt.

Koblenz, 24. Oktober 2013 *Stephan Kesper*

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Arithmetik

Kapitel 1
Ganze Zahlen

Der Mengenbegriff (im Sinne von Anzahl) birgt ein natürliches Verständnis dafür, was eine Zahl ist. Im Verständnis der meisten Menschen ist eine Zahl unmittelbar mit dem Begriff der Anzahl von Dingen verbunden — zum Beispiel drei Äpfel oder fünf Orangen.

Um einem Obsthändler zu erklären, wie viele Äpfel man haben möchte, ist die Nutzung von Zahlen durchaus praktisch. Genauso wie beim Metzger Zahlen etwas abstrakter verwendet werden. So möchte man 500 Gramm Hackfleisch. Das Hackfleisch besteht nicht aus 500 Einzelteilen, sondern die Zahl bezeichnet das Gewicht dessen, was man bestellt.

1.1 Natürliche Zahlen

Dem Ziel, zu erklären, was ganze Zahlen sind, nähern wir uns über den Umweg der natürlichen Zahlen, die einen wesentlichen Bestandteil der ganzen Zahlen bilden.

Definition 1.1. Zahlen – im Sinne von Anzahl – werden in der Mathematik als **natürliche** Zahlen bezeichnet. Ihre Gesamtheit, d.h. alle natürlichen Zahlen inklusive etwas, das als „unendlich“ bezeichnet wird – darauf kommen wir später zurück – wird mit dem Zeichen $\mathbb{N}$ abgekürzt.

Die folgenden Symbole bezeichnen die ersten neun natürlichen Zahlen.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Sie bilden den Grundstock aller folgenden Zahlen, die aus diesen zusammengesetzt sind. Wie diese zusammen gesetzt werden, erfahren wir gleich.

1.2 Grundlagen

1.2.1 Gleichheit, Ungleichheit, Vergleiche

Definition 1.2. Mit dem Symbol „=“ wird die Anforderung beschrieben, dass alles, was auf der linken Seite des Symbols steht den selben Wert hat wie das, was auf der rechten Seite des Symbols steht.

Folgendes ist demnach korrekt:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 5 &= 5 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Während das folgende falsch ist:

$$\begin{aligned} 1 &= 7 \\ 5 &= 3 \\ 7 &= 1 \end{aligned}$$

Es liegt in der Verantwortung desjenigen, der die Gleichung aufstellt, dafür zu garantieren, dass die Gleichheit auch wirklich erfüllt ist. Papier ist geduldig! Man kann hinschreiben, was man will, ob ein hingeschriebenes Gleichheitszeichen auch wirklich Gleichheit bedeutet, kann nur der Hinschreibende wissen.

Für Gleichungen gilt im allgemeinen, dass Gleichheit erhalten bleibt, wenn auf beiden Seiten der Gleichung die selben Operationen ausgeführt werden. Multipliziert man beide Seiten mit der selben Zahl, oder addiert auf beiden Seiten die selbe Zahl, so bleibt die Gleichheit erhalten.

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \qquad\qquad |+1 \\ 5+1 &= 5+1 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Das, was man auf beiden Seiten einer Gleichung macht, kann durch einen abgesetzten senkrechten Strich dargestellt werden. Alles, was auf der rechten Seite des Strichs steht, wird auf beiden Seiten der Gleichung angewendet. Hier also jeweils eine 1 addiert.

Definition 1.3. Möchte man ausdrücken, dass die linke und rechte Seite nicht übereinstimmt, so verwendet man das Symbol „$\neq$“.

So werden oben angegebene Falschaussagen wieder korrekt indem man das Ungleichzeichen verwendet:

$$1 \neq 7$$
$$5 \neq 3$$
$$7 \neq 1$$

Der Ungleichheit stehen noch qualifizierende Ungleichzeichen zur Seite. Dass 1 nicht gleich 7 ist stimmt zwar, ist aber weniger interessant, als die Aussage, dass 1 kleiner als 7 ist. Wenn Hans einen Apfel besitzt und Peter zwei, dann hat Hans weniger Äpfel als Peter, wie Peter mehr Äpfel hat als Hans. Dies drückt man durch die folgenden Symbole aus:

$$1 < 7$$
$$1 < 2$$
$$2 > 1$$

Hat man eine Ungleichung aufzustellen, bei der es akzeptabel ist, dass beide Seite auch den gleichen Wert haben können, so verwendet man die selben Symbole mit einem Unterstrich:

$$1 \leq 7$$
$$5 \geq 3$$
$$7 \geq 1$$

Das Symbol „$\leq$“ wird „kleiner oder gleich“ ausgesprochen und das Symbol „$\geq$“ „größer oder gleich“. Es ist zu beachten, dass folgende Ungleichungen ebenfalls **alle** korrekt sind:

$$4 \leq 5$$
$$5 \leq 5$$
$$6 \geq 5$$
$$5 \geq 5$$

Wenn für beiden Seiten einer Ungleichung sowohl das $\leq$ als auch das $\geq$ korrekt ist, so gilt $=$ Gleichheit. Dies sollte im Kopf behalten werden, denn es gibt einige Beweise in der Mathematik, die genau dies ausnutzen.

Auch für Ungleichungen gilt, dass Operationen, die auf beiden Seiten ausgeführt werden, die Ungleichung erhalten. Das gilt bei Ungleichungen allerdings nur in etwas eingeschränkter Form, nämlich die Multiplikation mit einer negativen Zahl (< 0) führt dazu, dass sich das Ungleichzeichen umdreht. Aber dazu später mehr.

1.2.2 Addition und Multiplikation

Definition 1.4. Um mit natürlichen Zahlen rechnen zu können, definieren wir zwei Operationen. Die Multiplikation, dargestellt durch das Zeichen „·“ und die Addition, dargestellt durch das Zeichen „+“. Diese Operationen werden als **Verknüpfung** bezeichnet, weil sie zwei Zahlen miteinander „verknüpfen“ zu einer neuen Zahl.

Mit der Addition fügen wir einzelne Mengen zu größeren Mengen zusammen. Hat Hans 2 Äpfel und Peter 3 Äpfel, so haben sie zusammen 5 Äpfel, oder einfacher formuliert:

$$2+3=5$$

Hätte Peter keinen Apfel

$$2+?=2$$

dann wäre eine Zahl hinzuzuzählen, die keinen Wert besitzt.

Definition 1.5. Eine Zahl ohne Wert wird mit dem Symbol „0“ dargestellt.

Sie ist eine Invariante bezüglich der Addition – d.h. Additionen mit dieser Zahl ändern nicht den Wert der ursprünglichen Zahl. Man nennt sie „Null“.

Definition 1.6. Etwas wird als Invariante einer Verknüpfung bezeichnet, wenn sie den Wert einer Zahl mit der sie Verknüpft wird, nicht verändert.

Demnach erweitern sich die Symbole der ersten zehn natürlichen Zahlen auf diese Weise:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

Die Null ist per Definition nicht Teil der natürlichen Zahlen. Das hat historische Gründe – so dachte man im Mittelalter, dass die Zahl Null vom Teufel erdacht worden sei[1]. Für unsere Betrachtung sollte sie aber Teil der natürlichen Zahlen sein. Daher werden wir von nun an mit einer Zahlenmenge umgehen, die mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet wird, sie besteht aus allen natürlichen Zahlen, inklusive der 0.

Was kommt nach der 9?

Die Zahl, die nach der 9 kommt, ist definiert durch die Summe $9+1$. Es wurde in frühen Zeiten einmal festgelegt[2], dass wir ein Zahlensystem bestehend aus zehn Ziffern verwenden. Die zehn Ziffern beinhalten die Null, daher ist für die zehn kein eigenes Symbol mehr übrig. Daher wurden die zusammengesetzten Zahlen erfunden. So ist die Symbolfolge

$$10$$

diejenige Zahl, die nach der 9 kommt, also

$$9+1=10$$

[1] Historischer Beleg?

[2] Historischer Beleg?

Das ist eine Definition die bedeutet, dass wenn einem die Symbole ausgehen, kann man eine zusätzliche Stelle verwenden um diese darzustellen. Zusätzliche – im Sinne von höherwertigen – Stellen werden links an die Zahl angehängt. Das funktioniert auch mit drei, vier und allen weiteren Stellen:

$$\begin{aligned} 99+1 &= 100 \\ 999+1 &= 1000 \\ &\dots \end{aligned}$$

Interessant an der Zehn ist, dass sie aus einer 1 sowie der 0 zusammengesetzt ist. Also hatten die Menschen früher kein Problem mit der 0, solange sie als Teil einer anderen Zahl auftrat. Nur wenn sie alleine stand, wurde sie als verwirrend angesehen.
Wie werden aber dann Zahlen zusammengesetzt?
Sehen wir uns ein Beispiel an:

$$9+5=?$$

Wir wissen, dass

$$9+1=10$$

ist, und dass

$$1+4=5$$

So können wir schreiben:

$$9+1+4=10+4=14$$

An dieser Stelle haben wir eine Eigenschaft verwendet, die das **Assoziativgesetz** genannt wird. Wir haben 5 durch die Summe von zwei Zahlen ersetzt und die gesamte Summe anders kombiniert. Sehen wir uns das mit Klammern an:

$$9+5=9+(1+4)=(9+1)+4=10+4=14$$

Klammern bevorzugen eine Operation. So ist

$$9+(1+4)=9+5$$

dass wir die 1 von $1+4$ wegnehmen und zu $9+1$ hinzufügen dürfen ist in der Anschauung vollkommen klar, ob nun Hans 9 Äpfel und Peter 5 Äpfel besitzen, oder Hans 10 und Peter 4, macht für die Gesamtanzahl keinen Unterschied. Aber dieser Operation liegt das obengenannte Assoziativgesetz zugrunde, das wir im restlichen Buch immer wieder verwenden werden. Dass wir es verwenden dürfen, liegt an der „Harmlosigkeit“ der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Wir werden später noch Konstrukte kennen lernen, die das Assoziativ- und im Besonderen das Kommutativgesetz nicht erfüllen. Trotzdem kann man mit diesen Konstrukten genauso rechnen, wie wir das mit den natürlichen Zahlen tun, man darf mit ihnen nur nicht alles machen, was man mit Zahlen tun kann.

Die nächste Operation, die wir kennenlernen, ist die Multiplikation:

$$3 \cdot 4 = ?$$

Diese entspricht ebenfalls der Anschauung. Lägen in drei Körben jeweils vier Äpfel, so hätte man insgesamt

$$\underbrace{4+4+4}_{3\,\text{mal}} = 12$$

Äpfel. Also sind

$$3 \cdot 4 = 12$$

Das Ergebnis bliebe gleich, wenn man vier Körbe mit jeweils drei Äpfeln hätte:

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$$

Das ist das **Kommutativgesetz**.

Gehen wir jetzt mal davon aus, wir hätten drei Körbe mit jeweils 2 grünen und 4 roten Äpfeln. Wie viele grüne Äpfel, wie viele rote und wie viele Äpfel insgesamt hätten wir dann?

Die einzelnen Summen können wir leicht bestimmen:

$$3 \cdot 2 = 6$$

grüne Äpfel,

$$3 \cdot 4 = 12$$

rote Äpfel und somit

$$6 + 12 = 18$$

Äpfel insgesamt. Dabei haben wir zunächst nur die Anzahl der grünen, dann die der roten Äpfel berechnet. Wir haben also folgendes gemacht:

$$3 \cdot \underbrace{(2+4)}_{\text{Inhalt eines Korbes}} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18$$

Zur Berechnung der Gesamtsumme hätten wir aber auch gleich die roten und grünen Äpfel pro Korb summieren können:

$$3 \cdot (2+4) = 3 \cdot (6) = 3 \cdot 6 = 18$$

Dass wir zuerst die Anzahlen aller grünen Äpfel und dann die aller roten Äpfel berechnen konnten, wird als **Distributivgesetz** bezeichnet.

1.2.3 Subtraktion und Division

Der Grund warum Subtraktion und Division ein eigenes Unter-Kapitel bilden liegt darin begründet, dass sie nicht das Kommutativgesetz beachten, wie wir gleich sehen werden.

Wenn Hans drei Äpfel besitzt und zwei davon isst, bleibt ihm nur einer übrig. Die Frage, die sich der Lernende stellen sollte ist:

Welche Zahl erfüllt folgende Gleichung?

$$3+? = 1$$

Die Zahl, die diese Gleichung erfüllt, muss kleiner als 0 sein, denn $3+0 > 1$. Was also ist kleiner als 0? Solche Zahlen werden als negative Zahlen bezeichnet. Addiert man eine natürliche Zahl mit einer negativen Zahl, so ist das Ergebnis kleiner, als die natürliche Zahl selbst.

Definition 1.7. Eine negative Zahl ist eine natürliche Zahl, die mit einem „$-$“ Zeichen als negativ gekennzeichnet wird.

Zur Vereinfachung der Darstellung gilt:

$$\begin{aligned} 3+-2 &= 1 && \text{falsch} \\ 3+(-2) &= 1 && \text{richtig, aber umständlich} \\ 3-2 &= 1 && \text{ok} \end{aligned}$$

Die Menge aller negativen Zahlen wird mit dem Zeichen $-\mathbb{N}$ dargestellt. Die Vereinigung der Mengen $-\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ wird als die Menge der **ganzen Zahlen** bezeichnet und $\mathbb{Z}$ genannt. Also ist

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0 = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

1.3 Aufgaben

1.1. Welche der folgenden Gleichungen und Ungleichungen sind richtig oder falsch?

$1 = 2$	$3 < 5$	$9 < 10$	$10 > 9$
$8 = 8$	$3 < 6$	$10 < 10$	$11 > 10$
$5 = 5$	$10 < 10$	$10 < 11$	$999 \geq 1000$

1.2. Ausgehend von der Gleichung $2+3 = 5$ führe folgende Operationen auf beiden Seiten der Gleichung durch:

1. addiere auf beiden Seiten eine 2
2. multipliziere mit 3

3. wende das Distributiv Gesetz auf beiden Seiten der Gleichung an
4. vereinfache soweit, bis auf beiden Seiten nur noch eine Zahl steht.

Kapitel 2
Zahlen

In diesem Kapitel wird der Begriff der Zahl erweitert. Im letzten Kapitel haben wir die ganzen Zahlen kennengelernt. Diese sind aber nur ein Teil der Zahlen, mit denen wir täglich umgehen. Beim Einkaufen zum Beispiel besorgen wir zwar Äpfel und Milchtüten in ganzen Einheiten, aber schon beim Brot lassen wir uns oft nur die „Hälfte“ geben.

2.1 Bruchrechnung

$\mathbb{Q}$

2.2 Rationale und irrationale Zahlen

$\mathbb{R}, e, \pi, \dots$

2.3 Potenzrechnung

positive, negative und rationale Exponenten

2.4 Aufgaben

Teil II
Algebra

Kapitel 3
Lineare Algebra

3.1 Grundlagen

Die Algebra konzentriert sich – im Gegensatz zur Arithmetik – auf die Verallgemeinerung der Begriffe der Analyse bestimmter Sachverhalte. Der Arithmetik Teil dieses Buches begann mit Berechnungen auf Basis von Äpfeln. Diese geben einen unmittelbaren Zugang zu den Begriffen des Rechnens. In der Algebra wird es solches nicht geben. Die Ansätze hier sind rein abstrakt zu verstehen. Auch wenn direkte, anschauliche Beispiele zu bestimmten algebraischen Sachverhalten existieren, so sollte der Lernende versuchen, nicht anhand dieser sein Verständnis auszubilden, sondern rein in der Sache selbst. Das führt letztlich dazu, dass er vollständig ohne konkrete Anschauung Sachverhalte analysieren und Probleme lösen kann. Vollständig unabhängig davon, ob diese Probleme einen realen, abstrakten oder mit dem Verstand nicht nachvollziehbaren Hintergrund haben. Wenn z.B. im Raum der Polynome zwei Funktionen die Bedingung erfüllen

$$f^2(x) + g^2(x) = 1$$

so stellt dies genauso den Satz des Pytagoras dar, als wenn ein Dreieck betrachtet würde.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.1.1 Zeichen

In der Algebra verwendet man anstelle von Zahlen im allgemeinen Buchstaben. Es immer vom Kontext abhängig, welcher Buchstabe was bedeutet. Aber es haben sich bestimmte Dinge eingebürgert. So sind Konstanten meistens mit den Buchstaben

$$a, b, c, \ldots$$

bezeichnet. Unbekannte in Gleichungen meist mit

$$x, y, z, p, q, \ldots$$

Sowie Indizes mit

$$i, j, k, \ldots$$

Es können aber auch griechische Buchstaben auftauchen. Hier eine Übersicht

Kleiner Buchstabe	**Großbuchstabe**	**Bezeichnung**
α	A	Alpha
β	B	Beta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ε	E	Epsilon
ζ	Z	Zeta
η	H	Eta
θ	Θ	Theta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rho
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Ypsilon
ϕ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

3.2 Mengen

Kategorisierung spielt in der (Linearen) Algebra eine sehr wichtige Rolle. Kennt man die Eigenschaften eines Dinges, so kann man damit umgehen. Daher ist es nicht verwunderlich, dass Mathematiker versuchen, Dinge, die identische Eigenschaften besitzen zu Mengen zusammenzustellen. Und – soweit möglich – Operationen und Eigenschaften mit dem Namen dieser Zusammenstellung zu verbinden. Die bereits im Arithmetik Teil vorgekommene Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bildet da ein gutes Beispiel für den Einstieg.

Im Folgenden werden wir immer mehr Vorgehensweisen kennenlernen, mit denen man Mengen untersuchen kann. Kann man bestimmte Eigenschaften an einer Menge feststellen, so wird sie zur Gruppe. Hat man weitere Eigenschaften an der Gruppe, so wird sie zum Ring. Und eine letzte Eigenschaft macht einen Ring zu einem Körper. Der Körper ist das, was unserer üblichen Vorstellung von Zahlen am nächsten kommt. Für viele Objekte der Mathematik kann man aber z.B. nur Gruppenstruktur nachweisen.

HINWEIS: Der hier verwendete Begriff „Menge“ hat nichts mit der Anzahl zu tun, wie er im Arithmetik Teil verwendet wurde. Hier bezeichnet „Menge“ eine Ansammlung von gleichartigen Objekten.

Mengen werden in der Mathematik in geschweiften Klammern $\{\dots\}$ dargestellt. Also könnte man die natürlichen Zahlen wie folgt definieren:

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,5,\dots\}$$

Die Punkte „...“ symbolisieren dabei, dass die Reihe nicht enden soll. Dementsprechend gehört ∞ „Unendlich“ zu den natürlichen Zahlen.

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,5,\dots,\infty\}$$

Zusammengefasst sind Mengen einfache Ansammlungen von im allgemeinen gleichartigen Dingen. Die folgende Zeichenfolge bedeutet, dass x ein Element der Menge M ist:

$$x \in M$$

So ist zum Beispiel

$$7 \in \mathbb{N}$$

3.2.1 Abbildung

Eine Abbildung bildet Elemente aus einer Menge auf Elemente einer anderen Menge ab. Seien X,Y Mengen. Dann ordnet die Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

das Element $x \in X$ auf $y \in Y$ ab. Das wird so ausgedrückt:

$$f(x) = y$$

Die Addition ist ebenfalls eine Abbildung. Sie bildet zwei Elemente einer Menge auf Elemente der selben Menge ab:

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

Also kann man die Summe

$$x + y = z$$

auch in Funktionenform schreiben:

$$+(x, y) = z$$

3.2.2 Gruppen, Ringe, Körper

Im Folgenden bezeichenen X, Y und Z immer Mengen.

Definition 3.1. Eine Funktion

$$\circ : X \times X \longrightarrow X$$

wird als Verknüpfung auf X bezeichnet. Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind Verknüpfungen.

Definition 3.2. Eine Verknüpfung wird *assoziativ* genannt, wenn gilt:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Definition 3.3. Sie wird *kommutativ* genannt, wenn gilt:

$$a \circ b = b \circ a$$

Für alle $a, b, c \in X$

Definition 3.4. Ein Element $e \in X$ wird als *neutrales Element* bezüglich einer Verknüpfung bezeichnet, wenn

$$e \circ a = a \circ e = a$$

für alle $a \in X$ gilt.

Behauptung. Falls es in X ein neutrales Element gibt, so ist es eindeutig.

Beweis. Seien e_1 und e_2 neutrale Element bezüglich $\circ$, dann gilt:

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$$

□

Definition 3.5. Eine Menge X mit assoziativer Verknüpfung und zugehörigem neutralem Element heißt *Monoid*.

Definition 3.6. Sei X ein Monoid mit der Verknüpfung $\circ$ und zugehörigem neutralen Element e. Wenn gilt

$$a \circ b = e$$

für $a, b \in X$, so wird a das *Linksinverse* von b genannt, sowie b das *Rechtsinverse* von a. Gilt zudem

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Dann sind a und b jeweils ihre *Inversen*.

Definition 3.7. Ist in einem Monoid jedes Element invertierbar, so nennt man dies eine *Gruppe*.

Definition 3.8. Eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist, nennt man eine *abelsche Gruppe*.

Definition 3.9. Ein *Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Wobei R bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe ist und bezüglich der Multiplikation ein Monoid. Des Weiteren muss das Distributivgesetz gelten

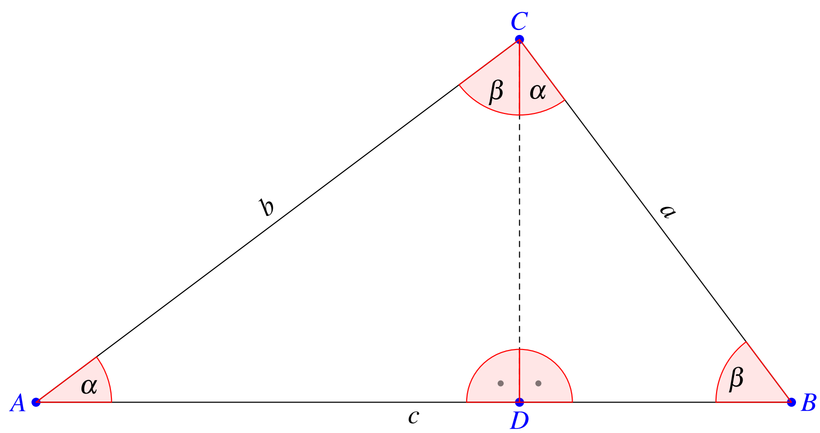
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

für alle $a, b, c \in R$. Ist R bezüglich $\cdot$ kommutativ, so ist R ein *kommutativer Ring*.

Definition 3.10. Sei K ein kommutativer Ring, dessen neutrales Element bezüglich der Addition 0 ist. Falls alle Elemente von $K \setminus \{0\}$ invertierbar sind, heißt K ein *Körper*.

Teil III
Geometrie

Kapitel 4
Grundlagen



Teil IV
Analysis

Teil V
Anhang

Anhang A
Lösungen

A.1 Arithmetik

1.1

falsch	richtig	richtig	richtig
richtig	richtig	falsch	richtig
richtig	richtig	richtig	falsch

1.2

$$
\begin{aligned}
2+3 &= 5 && \mid +2 \\
2+3+2 &= 5+2 && \mid \cdot 3 \\
(2+3+2)\cdot 3 &= (5+2)\cdot 3 \\
2\cdot 3+3\cdot 3+2\cdot 3 &= 5\cdot 3+2\cdot 3 \\
6+9+6 &= 15+6 \\
21 &= 21
\end{aligned}
$$