

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Литвинов Степан Сергеевич

Влияние ошибок округления на решение СЛАУ. Числа обусловленности.

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи	3
2. Теорминимум	4
3. Тесты	5
4. Вывод	9
5. Код можно посмотреть	10

1. Постановка задачи

Имеем СЛАУ, которые представим в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где A — это матрица системы, x — столбец неизвестных, а b — столбец свободных членов.

- Для известных A и b найти x .
- Затем варьируем A , и b .
- Для изменённой пары A и b находим решение \tilde{x} и сравниваем его с точным решением x .
- Находим числа обусловленности матрицы A (спектральный критерий, объемный критерий (критерий Ортеги), угловой критерий).
- Делаем вывод, есть ли корреляция между величиной чисел обусловленности и погрешностью решения.

2. Теорминимум

Три критерия обусловленности, использующиеся в данном задании:

- Спектральный критерий

$$cond_s = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- Объемный критерий (критерий Ортеги)

$$cond_v = \frac{\prod_{n=1}^N |a_n|}{|\det A|}$$

- Угловой критерий

$$cond_a = \max_n (|a_n| \cdot |c_n|),$$

где c_n — n -й вектор-столбец матрицы $C = A^{-1}$.

3. Тесты

Матрица и свободный коэффициент:

	1	2	b
1	-401.52000000	200.16000000	88
2	1200.96000000	-601.68000000	0

Числа обусловленности:

Спектральный критерий:1668.0023952096462
Критерий Ортеги:501.20003952284793
Угловой критерий:501.2000395228477

=====

"Точное" решение: -44.03512974 -87.89461078

при $e=10^{-2}$:

Приближенное	-43.16604438	-86.15774069
х-х	-0.86908536	-1.73687009

при $e=10^{-5}$:

Приближенное	-44.03424329	-87.89283921
х-х	-0.00088645	-0.00177157

при $e=10^{-8}$:

Приближенное	-44.03512885	-87.89460901
х-х	-0.00000089	-0.00000177

а)

Матрица и свободный коэффициент:

	1	2	b
1	-403.15000000	200.95000000	98
2	1205.70000000	-604.10000000	77

Числа обусловленности:

Спектральный критерий:1607.6024850894462
Критерий Ортеги:483.0800409904852
Угловой критерий:483.0800409904851

=====

"Точное" решение: -59.38365805 -118.64902584

при $e=10^{-2}$:

Приближенное	-58.25908037	-116.40161660
х-х	-1.12457769	-2.24740924

при $e=10^{-5}$:

Приближенное	-59.38251191	-118.64673534
х-х	-0.00114614	-0.00229051

при $e=10^{-8}$:

Приближенное	-59.38365691	-118.64902355
х-х	-0.00000115	-0.00000229

б)

Рис. 1: Матрицы из методички А.Н.Пакулиной, часть 1

Матрица и свободный коэффициент:

	1	2	3	4	5	b
1	1.00000000	0.50000000	0.33333333	0.25000000	0.20000000	26
2	0.50000000	0.33333333	0.25000000	0.20000000	0.16666667	29
3	0.33333333	0.25000000	0.20000000	0.16666667	0.14285714	3
4	0.25000000	0.20000000	0.16666667	0.14285714	0.12500000	81
5	0.20000000	0.16666667	0.14285714	0.12500000	0.11111111	17

Числа обусловленности:

Спектральный критерий: 480849.11699433636

Критерий Ортеги: 16085725624.19305

Угловой критерий: 95157.69988922618

=====

"Точное" решение: -107589.99999988 2037779.99999810 -8844359.99999253 13406119.99998949 -6573419.99999513

при $\epsilon=10^{-2}$:

Приближенное	-113021.39999990	2168133.59999875	-9528716.39999615	14622753.59999578	-7257776.39999851
x-x	5431.40000002	-130353.60000065	684356.40000361	-1216633.60000630	684356.40000339

при $\epsilon=10^{-5}$:

Приближенное	-107594.07456879	2037877.78965070	-8844873.39566430	13407032.70340034	-6573933.39566134
x-x	4.07456891	-97.78965260	513.39567177	-912.70341086	513.39566622

при $\epsilon=10^{-8}$:

Приближенное	-107590.00407312	2037780.09775731	-8844360.51323372	13406120.91242500	-6573420.51324294
x-x	0.00407324	-0.09775921	0.51324119	-0.91243552	0.51324781

а)

Рис. 2: Матрица Гильберта 5 порядка

Матрица и свободный коэффициент:

	1	2	3	4	5	6	b
1	1.00000000	0.50000000	0.33333333	0.25000000	0.20000000	0.16666667	30
2	0.50000000	0.33333333	0.25000000	0.20000000	0.16666667	0.14285714	12
3	0.33333333	0.25000000	0.20000000	0.16666667	0.14285714	0.12500000	95
4	0.25000000	0.20000000	0.16666667	0.14285714	0.12500000	0.11111111	88
5	0.20000000	0.16666667	0.14285714	0.12500000	0.11111111	0.10000000	35
6	0.16666667	0.14285714	0.12500000	0.11111111	0.10000000	0.09090909	33

Числа обусловленности:

Спектральный критерий: 15118987.12699086

Критерий Ортеги: 3955105185456529.5

Угловой критерий: 2441571.413179607

=====

"Точное" решение: -179436.00000726 5433120.00021852 -37807560.00151855 99895320.00401440 -111331080.00447905 44146872.00177839

при $e=10^{-2}$:

Приближенное	-194176.78126885	5949047.34430841	-41934978.75387526	112277576.26029074	-126808900.32406788	50957112.94213510
x-x	14740.78126159	-515927.34408990	4127418.75235672	-12382256.25627634	15477820.31958883	-6810240.94035670

при $e=10^{-5}$:

Приближенное	-179445.43752222	5433450.31313139	-37810202.50421443	99903247.51076806	-111340989.38664444	44151232.12948675
x-x	9.43751495	-330.31291287	2642.50269588	-7927.50675365	9909.38216539	-4360.12770835

при $e=10^{-8}$:

Приближенное	-179436.00944368	5433120.33048669	-37807562.64361513	99895327.93017171	-111331089.91202983	44146876.36104459
x-x	0.00943641	-0.33026818	2.64209658	-7.92615731	9.90755078	-4.35926619

а)

Рис. 3: Матрица Гильберта 6 порядка

Матрица и свободный коэффициент:

	1	2	3	4	5	b
1	6	-1	0	0	0	58
2	-1	6	-1	0	0	68
3	0	-1	6	-1	0	35
4	0	0	-1	6	-1	17
5	0	0	0	-1	6	59

Числа обусловленности:

Спектральный критерий: 5.481288320677154
Критерий Ортеги: 1.2506733171968796
Угловой критерий: 1.1220990213219455

=====

"Точное" решение:	12.15295815	14.91774892	9.35353535	6.20346320	10.86724387
-------------------	-------------	-------------	------------	------------	-------------

при $\epsilon=10^{-2}$:

Приближенное	12.26292050	15.04648532	9.48495376	6.33219960	10.97720621
x-x	-0.10996234	-0.12873640	-0.13141841	-0.12873640	-0.10996234

при $\epsilon=10^{-5}$:

Приближенное	12.15306686	14.91787618	9.35366527	6.20359047	10.86735257
x-x	-0.00010870	-0.00012726	-0.00012991	-0.00012726	-0.00010870

при $\epsilon=10^{-8}$:

Приближенное	12.15295826	14.91774905	9.35353548	6.20346333	10.86724398
x-x	-0.00000011	-0.00000013	-0.00000013	-0.00000013	-0.00000011

а)

Рис. 4: Трехдиагональная матрица с диагональным преобладанием

4. Вывод

Можно предположить, что действительно существует взаимосвязь между величиной чисел обусловленности и разностью "точного" и "приближенного" решений.

5. Код можно посмотреть

тут