Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Литвинов Степан Сергеевич

Решение задачи теплопроводности сеточными методами (явная и неявная схемы)

Практическая работа

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

1. Постановка задачи

Реализовать решение уравнения теплопроводности по двум схемам: одной из неявных и явной.

2. Теорминимум

Задача вида

$$u_t(x,t) = \kappa u_{xx} + f(x,t),$$

$$\kappa = const > 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T.$$

Заданы одно начальное и два граничных условия

$$u(x,0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(a,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Неоходимо найти решение $u(x,t)$ нашего уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

Разбиваем отрезок $[0,a]$ на N равных частей, а отрезок $[0,T]$ на M равных частей. Обозначим

$$h = \frac{a}{N}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \ldots, N,$$

$$\tau = \frac{T}{M}, \quad t_k = k\tau, \quad k = 0, \ldots, M.$$

Строим сетку $\{(x_i, t_k),\, i = 0, \ldots, N,\, k = 0, \ldots, M\}$.

Приближенное решение получаем в виде таблицы значений в узлах сетки. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k).

Заменяем производные в изначальном уравнении разностными производными.

Схема с весами имеет вид

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = \frac{\kappa}{h^2}\big(\sigma(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)+$$

$$+ (1-\sigma)\left(u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}\right)\big) + f(x_i, t_{k-1} + \sigma\tau).$$

При $\sigma = 0$ получаем явную разностную схему.

В этом случае находим u_i^k из формулы, а u_i^0, u_0^k, u_N^k соответственно равны

$$u_i^0 = \mu(x_i),$$

$$u_0^k = \mu_1(t_k),$$

$$u_N^k = \mu_2(t_k).$$

При $\sigma = 1$ получаем неявную разностную схему.

$$\begin{cases} u_0^k = \mu_1(t_k) \\ \frac{\kappa}{h^2} u_{i-1}^k + \left(-\frac{2\kappa}{h^2} - \frac{1}{\tau}\right) u_i^k + \frac{\kappa}{h^2} u_{i+1}^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - f(x_i, t_k) \\ u_N^k = \mu_2(t_k) \end{cases}$$

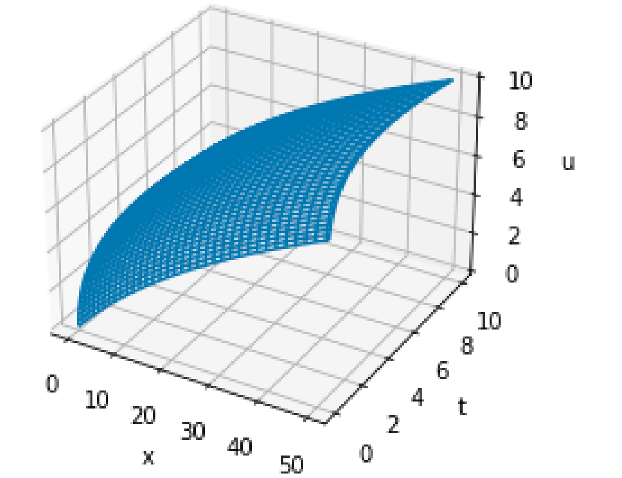
Перепишем полученную СЛАУ в более удобном виде

$$\begin{cases} B_0 u_0^k = D_0^k \\ A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i^k \\ B_n u_n^k = D_n^k \end{cases}$$

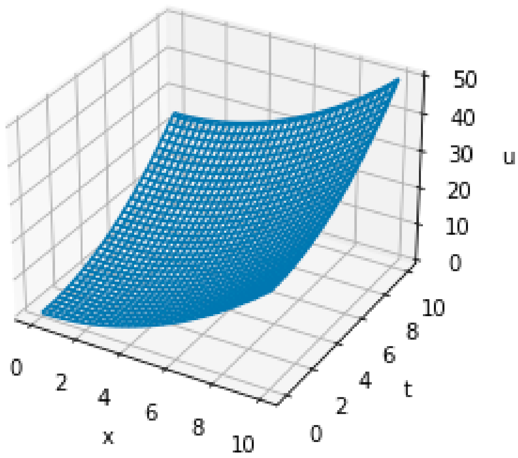
Решаем полученную систему методом прогонки и находим u_i^k.

3. Тесты

- $$u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + \frac{t}{2} - 0.0005,$$
$$u(x,0) = \frac{x^2}{4}, \quad u(0,t) = \frac{t^2}{4}, \quad u(a,t) = \frac{t^2}{4} + 25,$$
$$a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$$



a)



b)

Рис. 1: Приближенное решение полученное a) неявной схемой, b) явной схемой

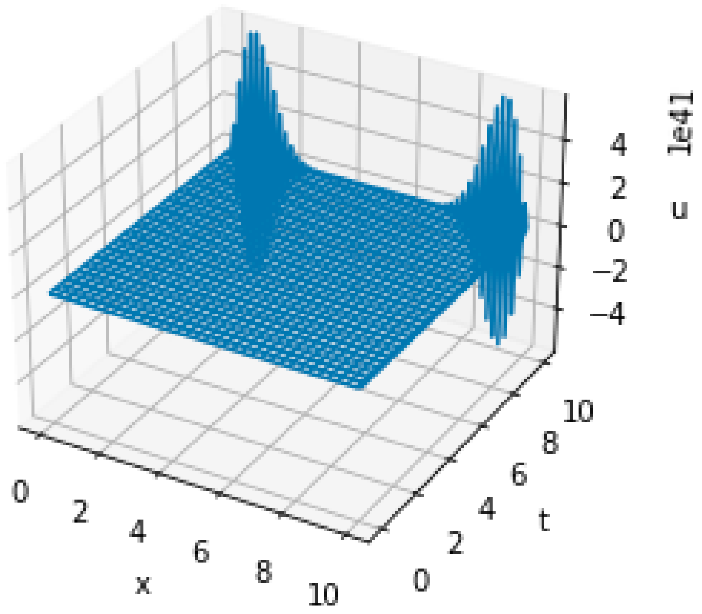


Рис. 2: Приближенное решение полученное явной схемой при $\kappa = 0.1$, при котором не выполняется условие устойчивости

- $$u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + x,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 10t,$$
$$a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$$

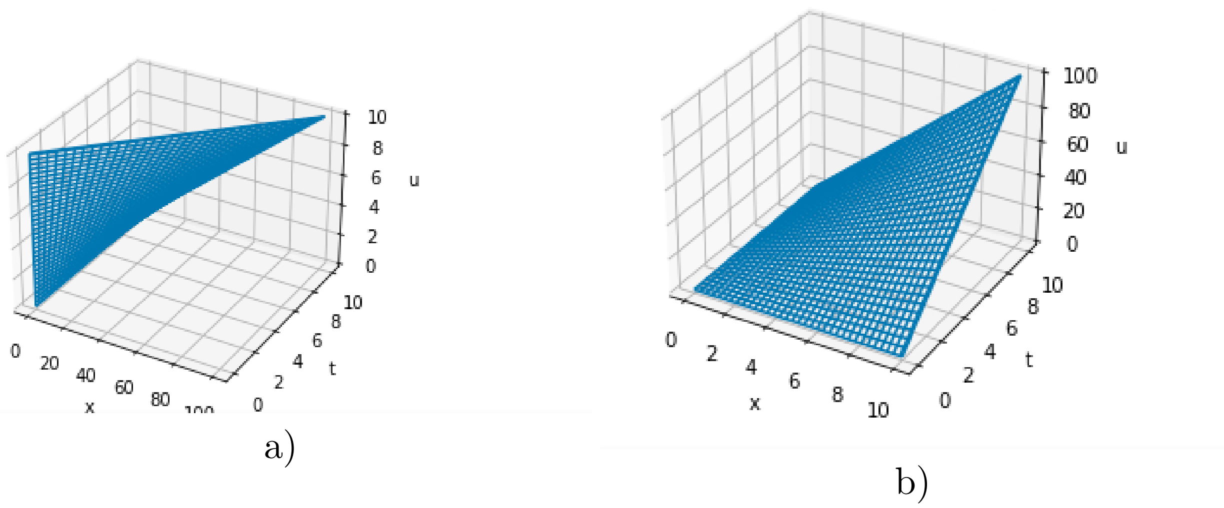


Рис. 3: Приближенное решение полученное a) неявной схемой, b) явной схемой

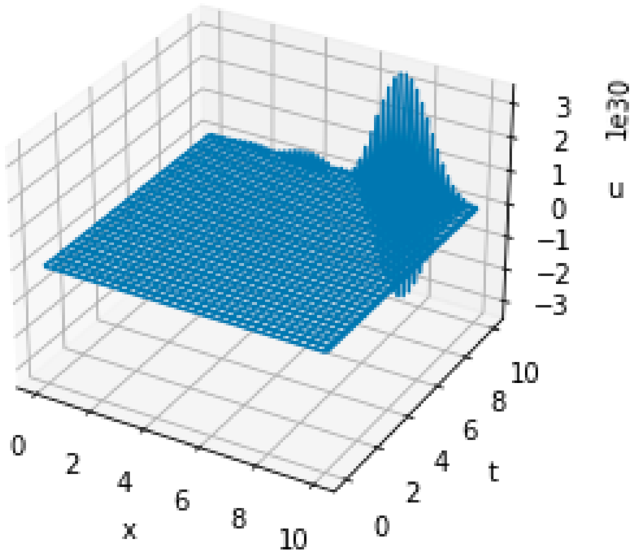
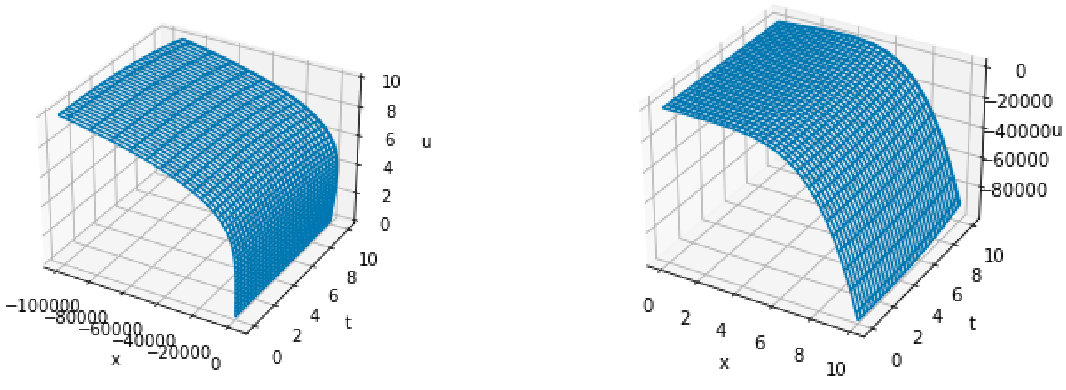


Рис. 4: Приближенное решение полученное явной схемой при $\kappa = 0.1$, при котором не выполняется условие устойчивости

- $$u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + 3t^2x + 0.02x^3,$$
$$u(x,0) = -x^5 - 2x + 25, \quad u(0,t) = 25, \quad u(a,t) = 10t^3 - 99995,$$
$$a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$$



a)

b)

Рис. 5: Приближенное решение полученное a) неявной схемой, b) явной схемой

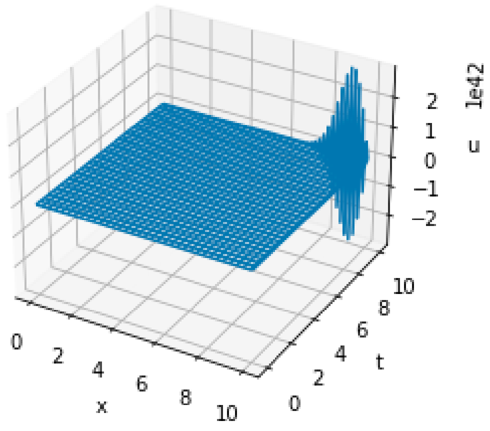


Рис. 6: Приближенное решение полученное явной схемой при $\kappa = 0.1$, при котором не выполняется условие устойчивости

4. Код

Можно посмотреть здесь