Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Литвинов Степан Сергеевич

Метод квадратного корня

Практическая работа

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

1. Постановка задачи

Нужно решить СЛАУ методом квадратного корня. Использовать регуляризацию для плохо обусловленных матриц. В регуляризации поварьировать коэффициент регуляризации и для каждого случая определить наилучший коэффициент.

2. Теорминимум

2.1. Метод квадратного корня

Изначально имеем дело со СЛАУ представимой в виде

$$Ax = b,$$

где A — это матрица системы, x — столбец неизвестных, а b — столбец свободных членов.

Для использования метода квадратного корня накладываем ограничения на A: A — симметричная положительно определенная матрица.

Представляем матрицу A в виде

$$A = LL^{\mathrm{T}},$$

где L — нижняя треугольная матрица.

Формулы для нахождения элементов матрицы L:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{1j} = a_{1j}/l_{11}, \quad j > i$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2}, \quad 1 < i \leq n;$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj}}{l_{ii}}, \quad i < j.$$

$$l_{ij} = 0, \quad i > j$$

Нахождение решения исходной СЛАУ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$Ly = b, \quad L^{\mathrm{T}}x = y.$$

2.2. Регуляризация

Регуляризация заключается в замене исходной задачи

$$Ax = b$$

задачей минимизации функционала

$$||Ax - b||^2 + \alpha||x||^2,$$

где α — параметр регуляризации. Параметр α фиксирован. При $\alpha \to 0$ приближенное решение стремится к точному решению.

Если A — положительно определенная матрица, то минимазация функционала представляет собой решение системы

$$(A + \alpha E)x_\alpha = b.$$

3. Тесты

```
Матрица:
[1.00000000 0.50000000 0.33333333]
[0.50000000 0.33333333 0.25000000]
[0.33333333 0.25000000 0.20000000]
```

alpha	cond(A)	cond(A + alpha * E)	||x - x_a||
0.01	524.057	111.79	0.0945095
0.001	524.057	382.205	0.0283085
1e-05	524.057	522.118	0.000383955
1e-07	524.057	524.037	3.85343e-06
1e-09	524.057	524.057	3.85357e-08
1e-12	524.057	524.057	3.85441e-11

```
Наилучшее значение alpha = 1e-12

||x - x_a|| для различных матриц:
```

Ax = b	A + alpha * x = b	A + 10 * alpha * x = b	A + 0.1 * alpha * x = b
6.88439e-14	1.04649e-09	1.04646e-08	1.04718e-10

Рис. 1: Матрица Гильберта 3 порядка

```
Матрица:
[1.00000000 0.50000000 0.33333333 0.25000000]
[0.50000000 0.33333333 0.25000000 0.20000000]
[0.33333333 0.25000000 0.20000000 0.16666667]
[0.25000000 0.20000000 0.16666667 0.14285714]
```

alpha	cond(A)	cond(A + alpha * E)	||x - x_a||
0.01	15513.7	149.575	0.117184
0.001	15513.7	1368.84	0.0310994
1e-05	15513.7	14059.9	0.00214018
1e-07	15513.7	15497.7	2.3559e-05
1e-09	15513.7	15513.6	2.35828e-07
1e-12	15513.7	15513.7	2.36637e-10

```
Наилучшее значение alpha = 1e-12

||x - x_a|| для различных матриц:
```

Ax = b	A + alpha * x = b	A + 10 * alpha * x = b	A + 0.1 * alpha * x = b
8.09426e-13	2.80713e-07	2.80707e-06	2.80764e-08

Рис. 2: Матрица Гильберта 4 порядка

```
Матрица:
[1.00000000 0.50000000 0.33333333 0.25000000 0.20000000]
[0.50000000 0.33333333 0.25000000 0.20000000 0.16666667]
[0.33333333 0.25000000 0.20000000 0.16666667 0.14285714]
[0.25000000 0.20000000 0.16666667 0.14285714 0.12500000]
[0.20000000 0.16666667 0.14285714 0.12500000 0.11111111]
```

alpha	cond(A)	cond(A + alpha * E)	||x - x_a||
0.01	476607	157.653	0.130061
0.001	476607	1562.91	0.0387793
1e-05	476607	117931	0.00379261
1e-07	476607	462539	0.000139421
1e-09	476607	476462	1.43573e-06
1e-12	476607	476607	1.38947e-09

Наилучшее значение alpha = 1e-12

||x - x_a|| для различных матриц:

Ax = b	A + alpha * x = b	A + 10 * alpha * x = b	A + 0.1 * alpha * x = b
8.1724e-10	4.51359e-06	4.51284e-05	4.51e-07

Рис. 3: Матрица Гильберта 5 порядка

Лучшим параметром регуляризации α оказался наименьший, однако, при уменьшении параметра α растут числа обусловленности.

4. Код

Ссылка на код