Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Литвинов Степан Сергеевич

Метод вращений

Практическая работа

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

1. Постановка задачи **3**

2. Теорминимум **4**

3. Тесты **7**

4. Код **8**

1. Постановка задачи

Сравнить погрешности решения методом квадратного корня, который рассматривался в прошлом задании, и метода вращения

2. Теорминимум

Представляем матрицу СЛАУ A в виде

$$A = QR,$$

где Q — унитарная, а R — правая треугольная матрица. Q представляет собой произведение матриц вращения T_{ij}

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{ij} & 0 & \dots & 0 & -s_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{ij} & 0 & \dots & 0 & c_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Метод вращения состоит из прямого и обратного хода. При прямом ходе мы приводим матрицу к треугольному виду, последовательно исключая переменные.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Для исключения x_1 из 2-го уравнения вычисляем числа

$$c_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \qquad s_{12} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

Заменяем коэффициенты 1-го и 2-го уравнения новыми коэффициентами

$$a_{1j}^{(1)} = c_{12}a_{1j} + s_{12}a_{2j}, \qquad a_{2j}^{(1)} = c_{12}a_{2j} - s_{12}a_{1j},$$
$$b_1^{(1)} = c_{12}b_1 + s_{12}b_2, \qquad b_2^{(1)} = c_{12}b_2 - s_{12}b_1.$$

Результат:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Далее исключаем x_1 из 3-го уравнения. Числа s и c в данном случае такие:

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}, \qquad s_{13} = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}.$$

Аналогично заменяем коэффициенты и получаем

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\quad a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

За n–1 таких преобразований избавимся от x_1 во всех уравнениях системы, кроме первого. В итоге получаем

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Проделывая аналогичные действия, получим спустя n–1 шагов прямого хода треугольную матрицу

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)}x_n = b_2^{(n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Неизвестные вычисляем обратным ходом.

3. Тесты

Порядок	x - x_rot	x - x_sqrt
3	3.911434501196473e-12	2.602820459648654e-12
4	7.604680583663828e-11	8.593673709481708e-11
5	1.5124006574256817e-10	3.4165585617978954e-10
10	0.029068267913885528	0.00022259959330804552

Рис. 1: Сравнение погрешностей решений методом вращения и решений методом квадратного корня для матриц Гильберта различных порядков

Как видно из таблички, методы примерно равны в точности.

4. Код

Код можно посмотреть здесь