

## question2

29 Οκτωβρίου 2024

### ΕΚΦΩΝΗΣΗ:

#### Πρόβλημα 2

Έχετε το εξής πρόβλημα αναζήτησης:

- Ο χώρος καταστάσεων αναπαρίσταται ως δένδρο.
- Ο κόμβος της ρίζας (αρχική κατάσταση) έχει τρεις κόμβους-παιδιά.
- Κάθε ένας από αυτούς τους κόμβους-παιδιά έχει επίσης τρεις κόμβους-παιδιά.ο.κ. Δηλαδή, το δένδρο έχει ομοιόμορφο παράγοντα διακλάδωσης ίσο με 3.
- Ο στόχος βρίσκεται στο βάθος 4.

Να υπολογίσετε θεωρητικά τον μικρότερο και το μεγαλύτερο αριθμό κόμβων που επεκτείνονται από κάθε έναν από τους παρακάτω αλγόριθμους αναζήτησης, υποθέτοντας ότι εκτελούν πλήρη αναζήτηση (δηλαδή, μέχρι να βρεθεί ο στόχος):

- Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος (*BFS*)
- Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος (*DFS*). Υποθέστε ότι ο *DFS* εξετάζει πάντα πρώτα το αριστερότερο παιδί.
- Αναζήτηση με επαναληπτική εκβάθυνση (*IDS*).

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

#### 1. ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΟΣ (*BFS*)

Ο αλγόριθμος *BFS* εξερευνεί το δέντρο επίπεδο ανά επίπεδο.

Δηλαδή, εξερευνεί κάθε κόμβο σε ένα επίπεδο πριν προχωρήσει στο επόμενο.

Άρα οι κόμβοι στα επίπεδα  $> 4$  δεν μας ενδιαφέρουν.

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΜΒΩΝ

Στην χειρότερη περίπτωση, ο *BFS* θα εξερευνήσει κάθε κόμβο στο επίπεδο 0, 1, 2, 3 και 4. Δηλαδή ο κόμβος στόχου είναι ο τελευταίος που εξερευνείται στο επίπεδο 4.

Επομένως, εφόσον βρισκόμαστε σε ένα τριαδικό δέντρο θα εξερευνήσει:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 \text{ κόμβους,}$$

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΜΒΩΝ

Ακόμα και στην καλύτερη περίπτωση, ο *BFS* θα εξερευνήσει κάθε κόμβο στο επίπεδο 0, 1, 2, 3. Όμως όταν φτάσει στο επίπεδο 4, ο κόμβος στόχου θα είναι ο πρώτος που θα συναντήσει.

Επομένως, εφόσον βρισκόμαστε σε ένα τριαδικό δέντρο θα εξερευνήσει:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 1 = 41 \text{ κόμβους,}$$

## 2. ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΚΑΤΑ ΒΑΘΟΣ (*DFS*)

Ο αλγόριθμος *DFS* απ'την άλλη, διαλέγει ένα branch του δέντρου και το εξερευνεί όσο πιο βαθιά γίνεται, πριν κάνει backtracking και διαλέξει ένα άλλο branch. Επομένως, μας ενδιαφέρουν και οι κόμβοι σε επίπεδα  $> 4$ .

Ας ορίσουμε το βάθος του δέντρου του προβλήματος ως  $L$ .

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΜΒΩΝ

Στην χειρότερη περίπτωση, ο κόμβος στόχου θα είναι ο δεξιότερος κόμβος του επιπέδου 4 (καθώς ο *DFS* επιλέγει πάντα τον αριστερότερο κόμβο).

Σε αυτή την περίπτωση, ο *DFS* θα εξερευνήσει επιπλέον (εκτός από κάθε κόμβο στα επίπεδα 0-4), **κάθε** υπόδεντρο του επιπέδου 4 (εκτός από το υπόδεντρο του κόμβου-στόχου, δηλαδή  $3^4 - 1 = 80$  υπόδεντρα) πριν τελικά βρει τον στόχο μέσω backtracking. Κάθε υπόδεντρο, εφόσον είμαστε στο επίπεδο 4 θα έχει βάθος  $L - 4$ . Αυτό μας δίνει:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + (3^4 - 1) \cdot (3^1 + \dots + 3^{L-5}) = \\ 121 + 80 \cdot (3^1 + \dots + 3^{L-4})$$

κόμβους. (στο άθροισμα  $(3^1 + \dots + 3^{L-5})$  δεν περιλάβαμε το  $3^0$  διότι ήδη το μετράμε από τους κόμβους στον όρο  $3^4$ ).

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΜΒΩΝ

Στην καλύτερη περίπτωση, ο κόμβος στόχου θα είναι το αριστερότερο παιδί στο επίπεδο 4. Σε αυτή τη περίπτωση, ο *DFS*, αφού εξερευνεί πάντα το αριστερότερο παιδί, θα εξερευνήσει:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

κόμβους πριν βρει τον κόμβο στόχου (τον αριστερότερο κόμβο κάθε επιπέδου).

### 3. ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΚΒΑΘΥΝΣΗ (*IDS*)

Ο *IDS* εξερευνά τους κόμβους επίπεδο προς επίπεδο, παρόμοια με τον *BFS*, αλλά επανεξετάζει τους κόμβους πολλές φορές καθώς αυξάνει το όριο βάθους. Εάν το δέντρο έχει  $L$  επίπεδα και ο στόχος βρίσκεται στον δεξιότερο κόμβο σε βάθος 4, ο *IDS* δεν θα επεκτείνει κόμβους κάτω από το βάθος 4, επειδή βαθαίνει προοδευτικά το όριό του και σταματά μόλις φτάσει στο στόχο.

#### ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΜΒΩΝ

Ο μέγιστος συνολικός αριθμός των κόμβων που εξερευνά ο *IDS* είναι το άθροισμα των κόμβων που εξερευνώνται σε κάθε όριο βάθους από το 0 έως το 4 (ο κόμβος στόχου είναι ο τελευταίος στο επίπεδο 4) :

- Βάθος 0: 1 κόμβος.
- Βάθος 1:  $1 + 3 = 4$  κόμβοι.
- Βάθος 2:  $1 + 3 + 9 = 13$  κόμβοι.
- Βάθος 3:  $1 + 3 + 9 + 27 = 40$  κόμβοι.
- Βάθος 4:  $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$  κόμβοι.

Έτσι, ο συνολικός αριθμός των κόμβων που διερευνήθηκαν στη χειρότερη περίπτωση:

$$1 + 4 + 13 + 40 + 121 = 179$$

Επομένως, μέγιστοι κόμβοι που επεκτείνονται από το *IDS* = 179 κόμβοι.

#### ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΜΒΩΝ

Στην καλύτερη περίπτωση, ο στόχος είναι ο πρώτος κόμβος που θα συναντήσει στο βάθος 4. Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, ο *IDS* θα πρέπει να περάσει από όλα τα προηγούμενα επίπεδα βάθους πριν βρει τον στόχο στο βάθος 4.

Όταν θα φτάσει στην 4η επεκταση βαθους και πηγαίνει έως το βάθος 4, θα βρει κατευθείαν τον κόμβο στόχου (θα εξερευνήσει 5 κόμβους, όπως στην καλύτερη περίπτωση *DFS*).

- Σύνολο εξερευνηθέντων κόμβων:

$$1 + 4 + 13 + 40 + 5 = 63$$

Επομένως, ελάχιστοι κόμβοι που επεκτείνονται από τον *IDS* = 63 κόμβοι.

# question3

October 29, 2024

## 1 Running A\* Algorithm

### 1. Inserting S

- Frontier:  $[(S, 8.0)]$
- Explored:  $[\emptyset]$

### 2. Removing S and inserting its neighbors (R, R)

- Frontier:  $[\ ]$
- Explored:  $[(S, 0.0)]$

### 3. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, R)

- Frontier:  $[(R, 8.5)]$
- Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0)]$

### 4. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, B)

- Frontier:  $[(R, 9.0) \mid (B, \infty)]$
- Explored:  $[(R, 1.0), (R, 1.0), (S, 0.0)]$

### 5. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, R)

- Frontier:  $[(R, 9.0) \mid (B, \infty)]$
- Explored:  $[(R, 1.0), (R, 1.0), (R, 2.0), (S, 0.0)]$

### 6. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, P)

- Frontier:  $[(R, 9.5) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (R, 2.0), (R, 2.0), (R, 1.0)]$
7. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, B)
- Frontier:  $[(R, 9.5) \mid (P, 10.5) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 2.0), (R, 1.0)]$
8. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, R)
- Frontier:  $[(R, 10.0) \mid (P, 10.5) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0)]$
9. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, B, H)
- Frontier:  $[(R, 10.0) \mid (P, 10.5) \mid (R, 10.0) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 4.0)]$
10. Removing H (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, B, H)
- Frontier:  $[(R, 10.0) \mid (P, 10.5) \mid (R, 10.0) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (R, 10.5)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 4.0)]$
11. Removing H (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, W, R)
- Frontier:  $[(R, 10.0) \mid (P, 10.5) \mid (R, 10.0) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (R, 10.5) \mid (B, \infty)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 4.0)]$
12. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, P, R)
- Frontier:  $[(R, 10.0) \mid (R, 10.5) \mid (R, 10.5) \mid (R, 10.5) \mid (P, 10.5) \mid (B, \infty) \mid (W, \infty) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty) \mid (B, \infty)]$
  - Explored:  $[(R, 1.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 4.0)]$

13. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (B, R)
- Frontier: [(R,10.5) | (P,10.5) | (R,10.5) | (R,10.5) | (R,10.5) | (R,10.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
  - Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 4.0)]
14. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, R, R)
- Frontier: [(P,10.5) | (R,10.5) | (R,10.5) | (B,∞) | (R,10.5) | (R,10.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
  - Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 4.0)]
15. Removing P (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, P)
- Frontier: [(R,10.5) | (R,10.5) | (R,10.5) | (B,∞) | (R,10.5) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,12.0)]
  - Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (P, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 4.0)]
16. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, P, B)
- Frontier: [(R,10.5) | (R,10.5) | (R,10.5) | (B,∞) | (P,12.0) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,12.0)]
  - Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (P, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 5.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 4.0)]
17. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, B, R)
- Frontier: [(R,10.5) | (R,10.5) | (R,11.0) | (B,∞) | (P,12.0) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,12.0)]
  - Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (P, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 5.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 4.0)]
18. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, P, R)

- Frontier: [(R,10.5) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (P,12.0) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,12.0)]
- Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (P, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 5.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 5.0), (R, 6.0), (R, 4.0)]

19. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (W, B)

- Frontier: [(R,11.0) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (P,12.0) | (R,12.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 1.0), (R, 4.0), (P, 4.0), (S, 0.0), (H, 5.0), (R, 4.0), (R, 5.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 3.0), (R, 5.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 5.0), (R, 6.0), (R, 4.0)]

20. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, H, B)

- Frontier: [(R,11.0) | (R,11.0) | (R,11.0) | (B,∞) | (P,12.0) | (R,12.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0)]

21. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (P, R)

- Frontier: [(R,11.0) | (R,11.0) | (R,11.5) | (B,∞) | (P,12.0) | (R,12.0) | (H,12.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

22. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, W)

- Frontier: [(R,11.0) | (P,12.0) | (R,11.5) | (P,12.5) | (B,∞) | (R,12.0) | (H,12.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

23. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, W, P)
- Frontier: [(R,11.5) | (R,11.5) | (R,12.0) | (P,12.0) | (B,∞) | (W,∞) | (H,12.0) | (P,12.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
  - Explored: [(R, 4.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]
24. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (P, B)
- Frontier: [(R,11.5) | (R,11.5) | (R,12.0) | (P,12.0) | (B,∞) | (W,∞) | (H,12.0) | (P,12.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
  - Explored: [(R, 4.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]
25. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (P, B, R)
- Frontier: [(R,11.5) | (P,12.0) | (R,12.0) | (P,12.5) | (B,∞) | (W,∞) | (H,12.0) | (P,13.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
  - Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]
26. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, R, H)
- Frontier: [(R,12.0) | (P,12.0) | (H,12.0) | (R,12.0) | (B,∞) | (W,∞) | (P,13.0) | (P,13.0) | (P,12.5) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
  - Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]



27. Removing H (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, P, H)

- Frontier: [(R,12.0) | (P,12.0) | (H,12.0) | (R,12.0) | (B,∞) | (W,∞) | (P,13.0) | (P,13.0) | (R,12.0) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,12.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

28. Removing H (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, P, R)

- Frontier: [(R,12.0) | (P,12.0) | (H,12.0) | (R,12.0) | (B,∞) | (W,∞) | (P,13.0) | (P,13.0) | (R,12.0) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,12.5) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

29. Removing R (MOVE: UP) and inserting its neighbors (W, H)

- Frontier: [(H,12.0) | (P,12.0) | (P,13.0) | (R,12.0) | (R,12.0) | (W,∞) | (B,∞) | (P,13.0) | (R,12.0) | (B,∞) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,12.5) | (B,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

30. Removing H (MOVE: UP) and inserting its neighbors (H)

- Frontier: [(P,12.0) | (R,12.0) | (P,13.0) | (R,12.0) | (R,12.0) | (W,∞) | (B,∞) | (P,13.0) | (P,12.5) | (B,∞) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]

- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

31. Removing P (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B)

- Frontier: [(R,12.0) | (R,12.0) | (P,13.0) | (P,12.5) | (R,12.0) | (W,∞) | (B,∞) | (P,13.0) | (B,∞) | (H,13.0) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

32. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (P, W)

- Frontier: [(R,12.0) | (R,12.0) | (P,13.0) | (P,12.5) | (H,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (P,13.0) | (B,∞) | (B,∞) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

33. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, P, B)

- Frontier: [(R,12.0) | (P,12.5) | (P,13.0) | (P,13.0) | (H,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

34. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, B, R)

- Frontier: [(P,12.5) | (R,12.5) | (P,13.0) | (P,13.0) | (H,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

35. Removing P (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (P)

- Frontier: [(R,12.5) | (R,12.5) | (P,13.0) | (P,13.0) | (H,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (R,13.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

36. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (W, R, R)

- Frontier: [(R,12.5) | (H,13.0) | (P,13.0) | (P,13.0) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.5) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

37. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (H, R, B)

- Frontier: [(H,13.0) | (P,13.0) | (P,13.0) | (R,13.5) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.0) | (W,∞)]

| (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) |  
(W,∞) | (R,14.0)]

- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

38. Removing H (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, H, R)

- Frontier: [(H,13.0) | (P,13.0) | (P,13.0) | (R,13.5) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.0) | (W,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.0) | (B,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

39. Removing H (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, H)

- Frontier: [(P,13.0) | (R,13.0) | (P,13.0) | (R,13.5) | (R,13.0) | (H,13.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,13.0) | (R,14.0) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.0) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

40. Removing P (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R)

- Frontier: [(R,13.0) | (R,13.0) | (P,13.0) | (R,13.5) | (R,13.0) | (H,13.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,14.0) | (H,14.0) |

(B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞)  
 | (R,14.0) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞)]

- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

41. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (R, R, B)

- Frontier: [(P,13.0) | (R,13.0) | (H,13.5) | (R,13.5) | (R,13.0) | (H,14.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (P,13.5) | (R,14.0) | (R,14.5) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.0) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

42. Removing P (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, R, P)

- Frontier: [(R,13.0) | (R,13.0) | (H,13.5) | (R,13.5) | (P,13.5) | (H,14.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (R,14.0) | (R,14.0) | (R,14.5) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0)]

43. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (H, B)

- Frontier: [(R,13.0) | (P,13.5) | (R,13.5) | (R,13.5) | (R,14.0) | (H,13.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (R,14.0) | (H,14.0) | (R,14.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞) | (R,14.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0)]

44. Removing H (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, W)

- Frontier: [(R,13.0) | (P,13.5) | (R,13.5) | (R,13.5) | (R,14.0) | (H,13.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (R,14.0) | (H,14.0) | (R,14.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞) | (R,14.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0)]

45. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (G, R, B)

- Frontier: [(P,13.5) | (R,13.5) | (R,13.5) | (R,14.5) | (R,14.0) | (H,13.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (R,14.0) | (H,14.0) | (R,13.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (W,∞) | (R,14.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0)]

46. Removing P (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R)

- Frontier: [(R,13.5) | (R,14.0) | (R,13.5) | (R,14.5) | (R,14.0) | (H,13.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (H,14.0) | (R,13.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.5) | (G,13.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0)]

47. Removing R (MOVE: RIGHT) and inserting its neighbors (B, R)

- Frontier: [(R,13.5) | (R,14.0) | (H,13.0) | (R,14.5) | (R,14.0) | (R,13.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (H,14.0) | (G,13.5) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 11.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0)]

48. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, R, R)

- Frontier: [(H,13.0) | (R,14.0) | (R,13.5) | (R,14.5) | (R,14.0) | (G,13.5) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (H,14.0) | (R,15.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.5)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 11.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0)]

5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 11.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0), (R, 10.0)]

49. Removing H (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, W)

- Frontier: [(R,13.5) | (R,14.0) | (G,13.5) | (R,14.5) | (R,14.0) | (H,14.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.5) | (R,14.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,15.0) | (R,15.0)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 11.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0), (R, 10.0)]

50. Removing R (MOVE: DOWN) and inserting its neighbors (R, R)

- Frontier: [(G,13.5) | (R,14.0) | (H,14.0) | (R,14.5) | (R,14.0) | (R,14.0) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,14.5) | (R,15.0) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (B,∞) | (W,∞) | (R,15.0)]
- Explored: [(R, 4.0), (R, 7.0), (R, 4.0), (P, 10.0), (P, 10.0), (H, 8.5), (R, 10.0), (R, 2.0), (R, 12.5), (P, 6.0), (R, 1.0), (R, 6.0), (H, 8.0), (R, 6.0), (R, 4.0), (H, 11.5), (R, 10.0), (R, 3.0), (R, 8.0), (R, 6.0), (R, 10.0), (P, 9.0), (P, 9.0), (R, 1.0), (H, 7.5), (P, 4.0), (R, 8.0), (H, 5.0), (R, 11.0), (H, 11.5), (R, 5.0), (R, 5.0), (H, 9.0), (R, 7.0), (R, 8.0), (R, 9.0), (S, 0.0), (R, 12.5), (R, 11.0), (R, 3.0), (R, 2.0), (H, 4.5), (R, 7.0), (R, 5.0), (R, 7.0), (R, 7.0), (R, 11.0), (R, 10.0)]

## 2 Results

- The order in which the nodes will exit the fringe is displayed above.
- Total cost of optimal path: 13.5



- Number of expanded nodes: 48 (not counting start)
- Optimal path (in RLUD format): RRRDRRDDDRRDDDD
- Optimal path (coordinates):  
 $(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (0,2) \rightarrow (0,3) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,4) \rightarrow (1,5) \rightarrow (2,5) \rightarrow (3,5) \rightarrow (4,5) \rightarrow (4,6) \rightarrow (4,7) \rightarrow (5,7) \rightarrow (6,7) \rightarrow (7,7) \rightarrow (8,7) \rightarrow (9,7)$

### 3 Grid Visualization

```

* * * * B W R H H H
R B B * * * R R B H
R P P R B * R R B R
R R R R W * P P R R
R R B R R * * * R B
B W R P P R B * R R
P P R R R R R * B B
R B R R R W H * R R
R R R R B R R * B R
H H H B B R R * R R

```

### 4 Two other admissable heuristics

- Euclidean distance ( $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ )  
 Straight-line distance, obviously always smaller than or equal to manhattan. Therefore, admissable.
- Zero heuristic (always return 0)  
 Nothing much here, always return 0 as heuristic. Never overestimates (obviously), therefore admissable. A\* actually becomes *BFS*.

## question4

29 Οκτωβρίου 2024

### ΕΚΦΩΝΗΣΗ:

#### Πρόβλημα 4

Θεωρήστε τον αλγόριθμο αμφίδρομης αναζήτησης που παρουσιάσαμε στις διαλέξεις.

Θεωρείστε ότι στα προβλήματα αναζήτησης που θα εφαρμοστεί ο αλγόριθμος υπάρχει μοναδική κατάσταση στόχου.

Υποθέτουμε ότι τα ζευγάρια αλγορίθμων που χρησιμοποιεί η αμφίδρομη αναζήτηση σαν υπορουτίνες για την (προς τα εμπρός) αναζήτηση από την αρχική κατάσταση και την (προς τα πίσω) αναζήτηση από την κατάσταση στόχου είναι:

- (α) Αναζήτηση πρώτα σε πλάτος και αναζήτηση περιορισμένου βάθους
- (β) Αναζήτηση με επαναληπτική εκβάθυνση και αναζήτηση περιορισμένου βάθους
- (γ)  $A^*$  και αναζήτηση περιορισμένου βάθους
- (δ)  $A^*$  και  $A^*$

Είναι ο αλγόριθμος αμφίδρομης αναζήτησης με υπορουτίνες όπως στα (α)-(δ) πλήρης; Είναι βέλτιστος; Ναι ή όχι και υπό ποιες συνθήκες.

Πως μπορεί να γίνει αποδοτικά ο έλεγχος ότι οι δύο αναζητήσεις συναντιούνται σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις (α)-(δ).

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αρχικά θα θεμελιώσουμε τα εξής:

- Είναι προφανές ότι για να είναι το bidirectional search complete, αρκεί ένας από τους αλγορίθμους να είναι complete. Όσο και αν 'ξεφύγει' ένας από τους 2 αλγορίθμους, αν είναι ζομπλετε ο άλλος θα βρει την λύση αργά ή γρήγορα.
- Για να είναι optimal το bidirectional search, πρέπει (αλλά όχι αρκεί) **και οι 2 αλγόριθμοι** να είναι optimal.
- Αν το branching factor  $b$  δεν είναι πεπερασμένος, τότε κανένας αλγόριθμος δεν είναι πλήρης, άρα ποτέ ο Bidirectional δεν είναι πλήρης. Επομένως, θα

υποθέσουμε ότι το branching factor είναι πάντα πεπερασμένο για να μην πάρουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά ενώ καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Με βάση αυτά + αυτά που γνωρίζουμε για τους παραπάνω αλγόριθμους (πότε είναι πλήρης, πότε είναι βέλτιστοι κλπ) θα απαντήσουμε.

### **(α) Αναζήτηση πρώτα σε πλάτος και αναζήτηση περιορισμένου βάθους**

**Πλήρης;**

**Ναι**, αφού η αναζήτηση πρώτα σε πλάτος είναι πλήρης.

**Βέλτιστος;**

**Όχι**, διότι η αναζήτηση περιορισμένου βάθους δεν είναι βέλτιστη, είτε το state space είναι φινιτε είτε όχι. Αφού ο ένας από τους δύο δεν είναι βέλτιστος, τότε δεν είναι βέλτιστος ο βιδιρεκτιοναλ.

### **(β) Αναζήτηση με επαναληπτική εκβάθυνση και αναζήτηση περιορισμένου βάθους**

**Πλήρης;**

**Ναι**, αν το state space είναι πεπερασμένο. Σε αυτή τη περίπτωση, η Αναζήτηση με επαναληπτική εκβάθυνση είναι πλήρης και άρα ο Bidirectional είναι πλήρης.

Επιπλέον **ναι**, αν ο κόμβος στόχου βρίσκεται σε βάθος μικρότερο από το όριο βάθους της αναζήτησης περιορισμένου βάθους.

Άρα ο Bidirectional δεν είναι πλήρης αν το state space είναι άπειρο και ο κόμβος στόχου βρίσκεται σε βάθος μεγαλύτερο από το όριο βάθους της αναζήτησης περιορισμένου βάθους.

**Βέλτιστος;**

**Όχι**, διότι τόσο η αναζήτηση περιορισμένου βάθους όσο και η αναζήτηση με επαναληπτική εκβάθυνση δεν είναι ποτέ βέλτιστες, είτε το state space είναι φινιτε είτε όχι καθώς και είτε ο κόμβος στόχου βρίσκεται σε reachable βάθος είτε όχι.

### **(γ) $A^*$ και αναζήτηση περιορισμένου βάθους**

**Πλήρης;**

**Ναι**, αφού ο αλγόριθμος  $A^*$  είναι πλήρης.

**Βέλτιστος;**

**Όχι**, διότι η αναζήτηση περιορισμένου βάθους δεν είναι βέλτιστη. Αφού ο ένας από τους δύο δεν είναι βέλτιστος, τότε δεν είναι βέλτιστος ο bidirectional.

**(δ)  $A^*$  και  $A^*$**

**Βέλτιστος;**

**Ναι**, αφού ο αλγόριθμος  $A^*$  είναι πλήρης.

**Βέλτιστος;**

**Όχι.** Το γεγονός ότι θα συναντηθούν οι 2  $A^*$  σε έναν κόμβο (ας πούμε  $M$ ) δεν σημαίνει ότι θα έχουν φτάσει στο  $M$  με τον βέλτιστο μονοπάτι, και ούτε καν ότι το πραγματικό βέλτιστο μονοπάτι από αρχή έως στόχο θα περιέχει το  $M$ . Η εξασφάλιση βέλτιστου bidirectional  $A^*$  είναι πολύ πιο σύνθετο πρόβλημα.

### **Έλεγχος συνάντησης αλγορίθμων**

Για να διαπιστωθεί αποτελεσματικά αν οι δύο αναζητήσεις έχουν συγκλίνει, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας πίνακας κατακερματισμού (hash table) για να παρακολουθούνται όλοι οι κόμβοι που έχουν επισκεφθεί και οι δύο αλγόριθμοι. Κάθε φορά που ένας από τους δύο αλγορίθμους επισκέπτεται έναν κόμβο, ελέγχουμε αν ο κόμβος αυτός υπάρχει ήδη στο hash table. Αν ναι, αυτό σημαίνει ότι οι δύο αναζητήσεις έχουν συναντηθεί- αν όχι, προσθέτουμε τον κόμβο στον πίνακα κατακερματισμού. Αυτή η προσέγγιση μας δίνει  $O(1)$  αναζήτηση για κάθε κόμβο, άρα είναι πολύ αποδοτικός.