hw4

12 Ιανουαρίου 2025

1:

(a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Απόδειξη με πίνακα αλήθειας:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Απόδειξη με ανάλυση:

Θα φέρω την πρόταση σε CNF μορφή:
$\neg((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow \neg A) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \wedge A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge A \equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$

Άρα έχω τις προτάσεις:
$(\neg A \vee B)$
και
$\neg(\neg A \vee B)$
Από τις προτάσεις αυτές καταλήγω σε: $\{\}$ (αντίφαση).
Άρα η πρόταση είναι έγκυρη.

(b) $A \Rightarrow B \models (C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$

Με πίνακα αλήθειας:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$C \Rightarrow A$	$C \Rightarrow B$	$(C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Όπως βλέπουμε, δεν υπάρχει γραμμή που η $A \Rightarrow B$ να ισχύει και η $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$ όχι.

Απόδειξη με ανάλυση:

Αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση:
$A \Rightarrow B \wedge \neg((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$
είναι μη ικανοποιήσημη.

Θα μετατρέψουμε πρώτα την άρνηση της πρότασης του δεξιού μέλους σε CNF.
$\neg((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \equiv \neg(\neg(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \equiv (C \Rightarrow A) \wedge \neg(C \Rightarrow B) \equiv (\neg C \vee A) \wedge C \wedge \neg B$

Άρα έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις:
$\neg A \vee B$ (από $A \Rightarrow B$)
$\neg C \vee A$
C
$\neg B$

Από $\neg C \vee A$ και C, έχουμε A. Από την A και $\neg A \vee B$, έχουμε B. Από την B και την $\neg B$, φτάνουμε στην κενή φράση, άρα αντίφαση, άρα μη ικανοποιήσημη. Επομένως η αρχική πρόταση είναι έγκυρη.

(c) $\neg((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

Με πίνακα αλήθειας:

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\neg((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
T	T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F

Όπως βλέπουμε, η στήλη της πρότασης περιέχει μόνο F για οποιαδήποτε ερμηνεία.

Απόδειξη με ανάλυση:

Αρχικά θα μετατρέψουμε την πρόταση σε CNF και αρκεί να φτάσουμε σε κενή φράση.
$\neg((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \equiv \neg(\neg(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (A \Rightarrow B)) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A) \wedge \neg(A \Rightarrow B) \equiv (B \vee \neg A) \wedge A \wedge \neg B$
Έχουμε τις εξής προτάσεις:
$B \vee \neg A$
A
$\neg B$
Από την $B \vee \neg A$ και την $\neg B$ έχουμε $\neg A$ και από την A και $\neg A$ έχουμε {} (κενή φράση).
Άρα η πρόταση δεν είναι ικανοποιήσημη.

2:

a

$(\forall x)(Student(x) \wedge KnowsLanguage(x, Python) \Rightarrow CanPass(x, AI\_COURSE))$

b

$(\forall x)(Student(x) \wedge HasTaken(x, AI\_COURSE) \Rightarrow (\exists y)(Course(y) \wedge Delivers(x, y)))$

c

$(\exists x)(Student(x) \wedge HasTaken(x, AI\_COURSE) \wedge (\forall y)(Assignment(y, AI\_COURSE) \implies \neg DeliveredAssignment(x, y)))$

d

$(\forall x)(\forall y)(Student(x) \wedge Course(y) \wedge (\forall z)(AssignmentOf(y, z) \implies DeliveredAssignment(x, z)) \implies Passes(x, y))$

e

$(\exists x)(Teacher(x) \wedge (\forall y)(Student(y) \implies Likes(y, x)))$

f

$(\forall x)(Student(x) \wedge (\exists y)(Friend(y,x) \wedge (\forall z)(Assignment(z, AI\_COURSE) \Rightarrow HasDelivered(y,z)) \Rightarrow (\exists w)(Friend(w,x) \wedge (\forall v)(Assignment(v, AI\_COURSE) \Rightarrow \neg HasDelivered(w,v)))))$

g

$(\forall x)(\forall y)(GreekPolitician(x) \wedge GreekPolitician(y) \wedge \neg SameParty(x,y) \implies \neg Likes(x,y))$

h

$(\exists x)(Person(x) \wedge (\forall y)(Joke(y) \wedge Clever(y) \wedge Tells(x,y) \Rightarrow Drunk(x)))$

i

$(\forall x)(\neg Likes(x,x) \Rightarrow \neg Likes(John, x))$

j

$(\forall p)(Politician(p) \Rightarrow ((\exists v)(Voter(v) \wedge (\forall t)(Time(t) \Rightarrow Fools(p,v,t)))) \wedge ((\exists t)(Time(t) \wedge (\forall v)(Voter(v) \Rightarrow Fools(p,v,t)))) \wedge \neg((\forall v)(\forall t)(Voter(v) \wedge (Time(t) \Rightarrow Fools(p,v,t)))))$

k

$\neg(\exists b)(Barber(b) \wedge \forall y(Shaves(b,y) \Leftrightarrow \exists z(Shaves(y,z) \wedge Shaves(z,z))))$

l

$(\forall x)(\forall y)(Man(x) \wedge Man(y) \wedge (\exists z)(\exists w)(Wife(z,x) \wedge Wife(w,y) \wedge Sister(z,w)) \Leftrightarrow Batzanakis(x,y))$

m

$(\forall x)(\forall y)(Subset(x,y) \Leftrightarrow (\forall w)(Element(w,x) \Rightarrow Element(w,y))))$

n

$(\forall x)(Rectangle(x) \Leftrightarrow Polygon(x) \wedge NumberOfSides(x,4) = 4 \wedge ((\forall y)(AngleOf(x,y) \Rightarrow Degrees(y) = 90))$

o

$(\forall x)(Square(x) \Leftrightarrow Rectangle(x) \wedge ((\forall s_1)(\forall s_2)(SideOf(x,s_1) \wedge SideOf(x,s_2) \Rightarrow Length(s_1) = Length(s_2)))$

3:

(a)

Σύμβολα σταθερών: Emma Stone, Mark Ruffalo
Σύμβολα κατηγορημάτων: Man, Woman, Asleep

Αρχικα ορίζουμε το πεδίο της ερμηνείας I ως εξής:

$$|I| = \{emma, mark\}$$

Για τα σύμβολα σταθερών, έχουμε:

$$Emma\ Stone^I = emma, Mark\ Ruffalo^I = mark$$

Για τα σύμβολα κατηγορημάτων, έχουμε:

$$Man^I = \{\langle mark \rangle\}$$
$$Woman^I = \{\langle emma \rangle\}$$
$$Asleep^I = \{\langle mark \rangle\}$$

(b)

Για να ικανοποιείται η πρόταση ϕ_1 από τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με υπαρξιακό ποσοδείκτη, πρέπει να υπάρχει $d \in |I|$ τέτοιο ώστε:
$\models_I (Man(x) \wedge Asleep(x))[s(x|d)]$
Αν αναθέσω στην μεταβλητή x την τιμή $mark$ ως εξής:
$\models_I (Man(x) \wedge Asleep(x))[s(x|mark)]$
Πρέπει $\langle mark \rangle\ \in Asleep^I$ και $\langle mark \rangle\ \in Man^I$

Το οποίο ισχύει αφού $Man^I = Asleep^I = \{\langle mark \rangle\}$
Άρα το $\models_I (Man(mark) \wedge Asleep(mark))[s]$ ισχύει και η πρόταση ικανοποιείται.

Για να ικανοποιείται η πρόταση ϕ_2 από τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με καθολικό ποσοδείκτη, πρέπει για κάθε $d \in |I|$:
$\models_I (Man(x) \vee Woman(x))[s(x|d)]$
Θα το εξετάσουμε για κάθε τιμή στο πεδίο $|I|$:

1)
$\models_I (Man(x) \vee Woman(x))[s(x|mark)]$
το οποίο ισχύει αφού $Man^I\ = \langle mark \rangle$
2)
$\models_I (Man(x) \vee Woman(x))[s(x|emma)]$
το οποίο ισχύει αφού $Woman^I\ = \langle emma \rangle$

Αφού η ϕ_2 ικανοποιείται για κάθε αντικείμενο, ικανοποιείται από την I.

Για να ικανοποιείται η πρόταση ϕ_3 από τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με υπαρξιακό ποσοδείκτη, πρέπει να υπάρχει $d \in |I|$ τέτοιο ώστε:
$\models_I (Woman(x) \wedge Asleep(x))[s(x|d)]$

Όμως: $Woman^I = \{\langle emma \rangle\}$ και $Asleep^I = \{\langle mark \rangle\}$
Τα δύο σύμβολα κατηγορήματος δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, επομένως για κανένα αντικείμενο δεν γίνεται να ισχύει η πρόταση ϕ_3.

4:

Θα μετατρέψουμε τις προτάσεις σε προτάσεις λογικής πρώτης τάξης.
$(\forall x)(Rose(x) \Rightarrow Flower(x))$
$(\exists x)(Flower(x) \wedge FadeQuickly(x))$
$(\exists x)(Rose(x) \wedge FadeQuickly(x))$

Θα υποθέσουμε πεδίο $|I| = \{rose1, rose2, sunflower\}$
Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα κατηγορηματικά σύμβολα:

$Rose^I : \{rose1, rose2\}$ (all roses are flowers)
$Flower^I : \{rose1, rose2, sunflower\}$
$FadeQuickly^I : \{sunflower\}$ (some flowers fade quickly)

Με αυτήν την ερμηνεία ικανοποιείται η πρώτη πρόταση, καθώς $Rose^I \subset Flower^I$.
Επιπλέον, ικανοποιείται και η δεύτερη πρόταση καθώς ισχύει:
$\langle sunflower \rangle \in Flower^I \wedge \langle sunflower \rangle \in FadesQuickly^I$

Ωστόσο, η πρόταση $(\exists x)(Rose(x) \wedge FadeQuickly(x))$ δεν ικανοποιείται, καθώς τα σύμβολα κατηγορήματος $Rose$ και $FadeQuickly$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Επομένως **ΔΕΝ** μπορούμε να συμπεράνουμε την 3η πρόταση από τις άλλες 2.

Αυτό διαισθητικά συμβαίνει διότι υπάρχουν περισσότερα είδη λουλουδιών από τα τριαντάφυλλα, οπότε τα ¨κάποια' λουλούδια που μαραίνονται γρήγορα δεν χρειάζεται να περιλαμβάνουν τα τριαντάφυλλα.

5:

(a)

Αρκεί να παραθέσουμε ένα αντιπαράδειγμα.
Θεωρούμε ερμηνεία I με πεδίο $|I| = \{a, b\}$ και σύμβολα κατηγορήματος $P,\ Q$ όπου:

$$P^I = \{\langle a \rangle\}$$

$$Q^I = \{\langle b \rangle\}$$

Με αυτή την ερμηνεία, έχουμε:

$$\models_I (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

Διότι για κάθε στοιχείο στο $|I|$ (a και b) θα ισχύει είτε το P είτε το Q.

Ωστόσο, η πρόταση $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ δεν ικανοποιείται, διότι κανένα αντικείμενο δεν βρίσκεται και στο P^I και στο Q^I. Η ερμηνεία που επιλέξαμε δεν ικανοποιεί αυτή τη πρόταση, άρα δεν είναι έγκυρη.

(b)

Θα υποθέσουμε μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών s, τέτοιες ώστε:

$$\models_I (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)[s]$$

Τότε με βάση τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με διάζευξη, έχουμε:

$$\models_I (\forall x)P(x)[s]$$

ή

$$\models_I (\forall x)Q(x)[s]$$

Πρώτη περίπτωση $\models_I (\forall x)P(x)[s]$:

Σύμφωνα με τον ορισμό ικανοποίησης για τους τύπους με καθολικό ποσοδείκτη, έχουμε ότι $\forall d \in |I|$, $\models_I P(x)[s(x|d)]$.
Τότε επίσης ισχύει:
$\models_I P(x) \vee Q(x)[s(x|d)]$
από τον ορισμό ικανοποίησης τύπων με διάζευξη.
Επομένως:

$$\models_I (\forall x)(P(x) \vee Q(x))[s]$$

Από τον ορισμό ικανοποίησης τύπων με καθολικό ποσοδείκτη.

Δεύτερη περίπτωση $\models_I (\forall x)Q(x)[s]$:

Σύμφωνα με τον ορισμό ικανοποίησης για τους τύπους με καθολικό ποσοδείκτη, έχουμε ότι $\forall d \in |I|$, $\models_I Q(x)[s(x|d)]$.
Τότε επιπλέον ισχύει:
$\models_I Q(x) \vee P(x)[s(x|d)]$
από τον ορισμό ικανοποίησης τύπων με διάζευξη.
Επομένως, ισχύει ότι:

$$\models_I (\forall x)(Q(x) \vee P(x))[s] \equiv \models_I (\forall x)(P(x) \vee Q(x))[s]$$

Από τον ορισμό ικανοποίησης τύπων με καθολικό ποσοδείκτη.
Επομένως και στις δύο περιπτώσεις, αν $\models_I (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)[s]$, τότε
$\models_I (\forall x)(P(x) \vee Q(x))[s]$.

6:

Θα ονομάσουμε KB την πρόταση $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ και ϕ την πρόταση $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$. Θα δείξουμε ότι $KB \models \phi$, δηλαδή ότι η $KB \wedge \neg\phi$ μη ικανοποιήσιμη.
Αρχικά θα μετατρέψουμε την KB σε CNF:

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow P(x) \vee Q(y)$ (απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών).

Το ίδιο θα κάνουμε για την $\neg\phi$:
$\neg\phi = (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \neg P(A), \neg Q(A)$ (απαλοιφή υπαρξιακού ποσοδείκτη, απαλοιφή σύζευξης).

Από τις προτάσεις $P(x) \vee Q(y)$ και $P(A)$ με MGU $\{x/A\}$ έχουμε:
$Q(y)$
Από τις προτάσεις $Q(y)$ και $\neg Q(A)$ με MGU $\{y/A\}$ καταλήγουμε σε:
$\{\}$ (αντίφαση)
Τελικά, $KB \models \phi$ άρα η πρόταση:

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

είναι έγκυρη.

7:

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο ενοποίησης. Προφανώς, δεν θα τον τρέξουμε τελείως αναλυτικά παραθέτοντας κάθε αναδρομική κλήση, παρά μόνο τα βασικά βήματα ενοποιήσης μεταβλητών.

(a) $P(x, F(y), A, w)$ και $P(G(u), v, u, x)$

- Ενοποίηση x με $G(u)$: $\{x/G(u)\}$
- Ενοποίηση $F(y)$ με v: $\{V/F(y)\}$
- Ενοποίηση A με u: $\{U/A\}$
- Ενοποίηση w με $G(A)$: $\{w/G(A)\}$

Τελικά, **MGU**: $\{x/G(A), v/F(y), u/A, w/G(A)\}$.

(b) $Q(x, y, w, z)$ και $Q(A, F(B), z, G(z))$

- Ενοποίηση x με A: $\{x/A\}$
- Ενοποίηση y με $F(B)$: $\{y/F(B)\}$
- Ενοποίηση w με z: $\{w/z\}$
- **occurs-check**, z occurs in G(z). failure.

Τελικά, ο MGU **ΔΕΝ** υπάρχει διότι δεν ενοποιούνται οι όροι z και G(z).

(c) $R(F(x), G(y), z, d)$ και $R(u, v, H(u), v)$

- Ενοποίηση $F(x)$ με u: $\{u/F(x)\}$
- Ενοποίηση $G(y)$ με v: $\{v/G(y)\}$
- Ενοποίηση z με $H(u)$: $\{z/H(F(x)\}$ (αφού $\{u/F(x)\}$)
- Ενοποίηση d με v: $\{d/G(y)\}$ (αφού $\{v/G(y)\}$)

Τελικά, **MGU**: $\{u/F(x), v/G(y), z/H(F(x)), d/G(y)\}$.

(d) $S(x, y, z, e)$ και $S(F(w), w, G(w), H(w))$

- Ενοποίηση x με $F(w)$: $\{x/F(w)\}$
- Ενοποίηση y με w: $\{y/w\}$
- Ενοποίηση z με $G(w)$: $\{z/H(F(x)\}$

- Ενοποίηση e με $H(w)$: $\{e/H(w)\}$

Τελικά, **MGU**: $\{x/F(w), y/w, z/H(F(x)), e/H(w)\}$.

(e) $T(x, A, y, w)$ και $T(G(z), z, H(w), K)$

- Ενοποίηση x με $G(z)$: $\{x/G(z)\}$
- Ενοποίηση A με z: $\{z/A\}$
- Ενοποίηση y με $H(w)$: $\{y/H(w)\}$
- Ενοποίηση w με K: $\{w/K\}$

Τελικά, **MGU**: $\{x/G(z), z/A, y/H(w), w/K\}$.

8:

(a)

Θα ορίσουμε τα σύμβολα:

$Steven, Theodora, Giota, TOKASELAKI, Capitalism, Socialism$

Και τα σύμβολα κατηγορημάτων:

$Member(x, y)$ (Ο x είναι μέλος του κόμματος y)
$Rightist(x)$ (ο x είναι δεξιός)
$Liberal(x)$ (ο x είναι φιλελεύθερος)
$Likes(x, y)$ (στον x αρέσει το y)

Η βάση γνώσης που προκύπτει είναι οι εξής προτάσεις λογικής πρώτης τάξης:

i)
$Member(Steven, TO\ KASELAKI) \wedge Member(Theodora, TO\ KASELAKI) \wedge Member(Giota, TO\ KASELAKI)$
ii)
$(\forall x)(Member(x, TO\ KASELAKI) \wedge \neg Rightist(x) \implies Liberal(x))$
iii)
$(\forall x)(Rightist(x)) \implies \neg Likes(x, Socialism)$
iv)
$(\forall x)(\neg Likes(x, Capitalism) \implies \neg Filelujeroc(x))$
v)
$(\forall x)(Likes(Steven, x) \iff \neg Likes(Theodora, x))$
vi)
$Likes(Theodora, Capitalism) \wedge Likes(Theodora, Socialism)$

Και φ η πρόταση:
$(\exists x)(Member(x, TO\ KASELAKI) \wedge Liberal(x) \wedge Rightist(x))$

(b)

Θα μετατρέψουμε τις προτάσεις της KB σε CNF.

i)
$Member(Steven, TO\ KASELAKI) \wedge Member(Theodora, TO\ KASELAKI) \wedge Member(Giota, TO\ KASELAKI)$
ii)
$(\forall x)(Member(x, TO\ KASELAKI) \wedge \neg Rightist(x) \implies Liberal(x))$
$\downarrow$
$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x) \vee Liberal(x)$
iii)

$(\forall x)(Rightist(x)) \implies \neg Likes(x, Socialism)$
$\downarrow$
$\neg Rightist(x) \vee \neg Likes(x, Socialism)$
iv)
$(\forall x)(\neg Likes(x, Capitalism) \implies \neg Liberal(x))$
$\downarrow$
$Likes(x, Capitalism) \vee \neg Liberal(x)$
v)
$(\forall x)(Likes(Steven, x) \iff \neg Likes(Theodora, x))$
$\downarrow$
$(\neg Likes(Steven, x) \vee \neg Likes(Theodora, x)) \wedge (Likes(Theodora, x) \vee Likes(Steven, x))$
vi)
$Likes(Theodora, Capitalism) \wedge Likes(Theodora, Socialism)$
Άρα έχω τις εξής CNF προτάσεις:

$Member(Steven, TO\ KASELAKI)$
$Member(Theodora, TO\ KASELAKI)$
$Member(Giota, TO\ KASELAKI)$
$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x) \vee Liberal(x)$
$\neg Rightist(x) \vee \neg Likes(x, Socialism)$
$Likes(x, Capitalism) \vee \neg Liberal(x)$
$\neg Likes(Steven, x) \vee \neg Likes(Theodora, x)$
$Likes(Theodora, x) \vee Likes(Steven, x)$
$Likes(Theodora, Capitalism)$
$Likes(Theodora, Socialism)$
$\neg\phi : \neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee \neg Liberal(x) \vee Rightist(x)$

Θα δείξουμε (ισοδύναμα με $KB \models f$) ότι: $KB \wedge \neg f$ είναι μη ικανοποιήσιμη.

Από τις προτάσεις:

$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x) \vee Liberal(x)$
και
$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee \neg Liberal(x) \vee Rightist(x)$

προκύπτει ότι
$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x)$.

Όμοια, από τις προτάσεις

$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x)$
και
$Member(Theodora, TO\ KASELAKI)$

Με ανάθεση $\{x/Theodora\}$ έχουμε: $Rightist(Theodora)$

Από τις προτάσεις
$\neg Rightist(x) \vee \neg Likes(x, Socialism)$ **και**
$Rightist(Theodora)$

Με ανάθεση $\{x/Theodora\}$ έχουμε: $\neg Likes(Theodora, Socialism)$

Τέλος, από τις προτάσεις: $\neg Likes(Theodora, Socialism)$
και
$Likes(Theodora, Socialism)$
προκύπτει:
{ } (αντίφαση)

Άρα $KB \wedge \neg f$ είναι μη ικανοποιήσιμη, άρα $KB \models f$.

(c)

Θα τροποποιήσουμε την λύση του προηγούμενου ερωτήματος προσθέτοντας λεκτικό για την εύρεση του δεξιού φιλελεύθερου μέλους ως εξής:
$KB \wedge \neg f \vee Ans(x)$ Από τις προτάσεις:

$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x) \vee Liberal(x)$
και
$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee \neg Liberal(x) \vee Rightist(x) \vee Ans(x)$

προκύπτει ότι
$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x) \vee Ans(x)$.

Όμοια, από τις προτάσεις

$\neg Member(x, TO\ KASELAKI) \vee Rightist(x) \vee Ans(x)$
και
$Member(Theodora, TO\ KASELAKI)$

Με ανάθεση $\{x/Theodora\}$ έχουμε: $Rightist(Theodora) \vee Ans(x)$

Από τις προτάσεις
$\neg Rightist(x) \vee \neg Likes(x, Socialism)$
και
$Rightist(Theodora) \vee Ans(x)$

Με ανάθεση $\{x/Theodora\}$ έχουμε: $\neg Likes(Theodora, Socialism) \vee Ans(x)$

Από τις προτάσεις
$\neg Likes(Theodora, Socialism) \vee Ans(x)$
και
$Likes(Theodora, Socialism)$
Με MGU $\{x/Theodora\}$ προκύπτει:
$Ans(Theodora)$
Άρα η Θεοδώρα είναι ο δεξιός φιλελεύθερος του κόμματος.

9:

Κατασκευάζω τα εξής Horn clauses με βάση της προτάσεις της εκφώνησης (το ποιο Horn clause αντιστοιχεί σε ποια πρόταση είναι ακριβώς με την σειρά που εμφανίζονται στην εκφώνηση):

$$Beautiful(Helen)$$

$$Muscular(Peter)$$

$$Rich(Peter)$$

$$Muscular(Timos)$$

$$Kind(Timos)$$

$$Kind(Timos)$$

$$Man(x) \wedge Beautiful(y) \Rightarrow Likes(x, y)$$

$$Rich(x) \wedge Man(x) \Rightarrow Happy(x)$$

$$Man(x) \wedge Likes(x, y) \wedge Likes(y, x) \Rightarrow Happy(x)$$

$$Woman(y) \wedge Likes(y, x) \wedge Likes(x, y) \Rightarrow Happy(y)$$

$$Man(x) \land Likes(x, Katerina) \Rightarrow Likes(Katerina, x)$$
$$Man(x) \land (Kind(x) \land Rich(x) \lor Muscular(x) \land Handsome(x)) \rightarrow Likes(Helen, x)$$

Στα αρχεία έχει επισυναπτεί ένα αρχείο question9.pl που κάνει display τις απαντήσεις στα ερωτήματα (consult στο SWI-Prolog) με τα κατάλληλα queries.

Παραθέτω τον κώδικα και την αλληλεπίδραση με το σύστημα για τις απαντήσεις.

Κώδικας:

```
man(john).
man(peter).
man(timos).

woman(helen).
woman(katerina).

beautiful(helen).
beautiful(john).
muscular(peter).
muscular(timos).
rich(peter).
rich(john).
kind(timos).

happy(M) :- rich(M).
happy(M) :- man(M), likes(M, W), likes(W, M).
happy(W) :- woman(W), likes(W, M), likes(M, W).
likes(M, W) :- man(M), woman(W), beautiful(W).
likes(katerina, M) :- man(M), likes(M, katerina).
likes(helen, M) :- man(M), (kind(M), rich(M) ; muscular(M), beautiful(M)).
```

Queries:

```
% c:/Users/sakoo/Desktop/stuff/dit/ai/hw4/question9.pl compiled 0.00 sec, 18 clauses
?- likes(X, Y).
X = john,
Y = helen ;
X = peter,
Y = helen ;
X = timos,
Y = helen ;
false.

?- happy(X).
X = john ;
X = peter ;
false.

?-
```

10:

(a)

$$(\forall x)((\exists y)(P(x, y) \Rightarrow (\exists z)(Q(x, z) \Rightarrow (\exists w)R(x, w))))$$

Ας μετατρέψουμε την πρόταση σε CNF.
- Απαλοιφή συνεπαγωγών:

$$(\forall x)((\exists y)(\neg P(x,y) \lor (\exists z)(\neg Q(x,z) \lor (\exists w)R(x,w))))$$

- Αντικατάσταση υπαρξιακών ποσοδεικτών με Skolem functions:

$$(\forall x)(\neg P(x,F_1(x)) \lor (\neg Q(x,F_2(x)) \lor R(x,F_3(x))))$$

- Απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών:

$$\neg P(x,F_1(x)) \lor (\neg Q(x,F_2(x)) \lor R(x,F_3(x)))$$

(b)

Θα ονομάσουμε την πρόταση ϕ_2. Θέλουμε να δείξουμε:

$$\phi \models \phi_2$$

Ή ισοδύναμα ότι η

$$\phi \land \neg\phi_2$$

είναι μη ικανοποιήσημη.

$$\neg\phi_2 = (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(\neg(P(x,y) \Rightarrow (Q(x,z) \Rightarrow R(x,w))))$$

Θα μετατρέψουμε την $\neg\phi_2$ σε CNF:

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(\neg(P(x,y) \Rightarrow (Q(x,z) \Rightarrow R(x,w))))$$

απαλοιφή συνεπαγωγής

$$\downarrow$$

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(P(x,y) \land \neg(Q(x,z) \Rightarrow R(x,w)))$$

απαλοιφή συνεπαγωγής

$$\downarrow$$

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(P(x,y) \land Q(x,z) \land \neg R(x,w))$$

skolemization(σταθερά Skolem A για τον υπαρξιακό ποσοδείκτη του x)

και απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών

$$\downarrow$$

$$P(A,y) \land Q(A,z) \land \neg R(A,w)$$

Τελικά έχουμε τις προτάσεις:

$\neg P(x,F_1(x)) \lor (\neg Q(x,F_2(x)) \lor R(x,F_3(x)))$
$P(A,y)$
$Q(A,z)$
$\neg R(A,w)$

Από την πρόταση
$\neg P(x,F_1(x)) \lor (\neg Q(x,F_2(x)) \lor R(x,F_3(x)))$
και
$P(A,y)$
με MGU $\{x/A, y/F_1(A)\}$ έχουμε:
$\neg Q(A,F_2(A)) \lor R(A,F_3(A))$

Από την πρόταση
$\neg Q(A,F_2(A)) \lor R(A,F_3(A))$

και
$Q(A, z)$
με MGU $\{z/F_2(A)\}$ έχουμε:
$R(A, F_3(A))$

Από την πρόταση
$R(A, F_3(A))$
και
$\neg R(A, w)$
με MGU $\{w/F_3(A)\}$ έχουμε:
$\{\}$ (κενή φράση)

Εφ'όσον φτάσαμε σε αντίφαση, δείξαμε ότι

$$\phi \models \phi_2$$

11:

Στα αρχεία υπάρχει ένα πρόγραμμα question9.in το οποίο χρησιμοποιείται σαν input file στο πρόγραμμα Prover9-Mace4. Παρατίθεται ο κώδικας (χωρίς κάτι extra δηλώσεις του προγράμματος στο αρχείο):

```
formulas(assumptions).

all x (exists y (P(x, y) -> (exists z (Q(x, z) -> (exists w R(x, w)))))).

end_of_list.

formulas(goals).

all x (exists y (exists z (exists w ((P(x, y) -> (Q(x, z) -> R(x, w))))))).

end_of_list.
```

Από το output του Prover9:

```
============================== PROOF =================================

% -------- Comments from original proof --------
% Proof 1 at 0.01 (+ 0.00) seconds.
% Length of proof is 9.
% Level of proof is 4.
% Maximum clause weight is 0.
% Given clauses 0.

1 (all x exists y (P(x,y) -> (exists z (Q(x,z) -> (exists u R(x,u)))))) # label(non_clause).  [assumption].
2 (all x exists y exists z exists u (P(x,y) -> (Q(x,z) -> R(x,u)))) # label(non_clause) # label(goal).  [goa
3 P(c1,x).  [deny(2)].
4 -P(x,f1(x)) | -Q(x,f2(x)) | R(x,f3(x)).  [clausify(1)].
5 -Q(c1,f2(c1)) | R(c1,f3(c1)).  [resolve(3,a,4,a)].
6 Q(c1,x).  [deny(2)].
7 R(c1,f3(c1)).  [resolve(5,a,6,a)].
8 -R(c1,x).  [deny(2)].
9 $F.  [resolve(7,a,8,a)].

============================== end of proof ==========================
```

Παίρνουμε πολύ εύκολα την CNF μορφή της πρότασης ϕ:

```
4 -P(x,f1(x)) | -Q(x,f2(x)) | R(x,f3(x)).  [clausify(1)].
```

Καθώς και την ίδια απόδειξη που κάναμε παραπάνω για το ζητούμενο του (b) ερωτήματος.

12:

Από την σχεσιακή βάση δεδομένων προκύπτει η παρακάτω βάση datalog:

$$teaches(manolis,\ ai).$$

$$teaches(manolis,\ data\_structures).$$

$$teaches(yannis,\ db).$$

$$teaches(mema,\ system\_programming).$$

$$course\_semester(data\_structures,\ 1).$$

$$course\_semester(ai,\ 3).$$

$$course\_semester(db,\ 4).$$

$$course\_semester(system\_programming,\ 6).$$

Για την ερώτηση σε datalog, πρώτα θα φτιάξουμε τον κανόνα:

$$semester\_of\_teaching(T,\ S) :-\ teaches(T,\ C), course\_semester(C,\ S).$$

Και η ερώτηση είναι:

$$?\text{-}\ semester\_of\_teaching(manolis,\ S).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε forward chaining για να την απαντήσουμε.

Από τις προτάσεις $teaches(manolis,\ ai)$ και $course\_semester(ai,\ 3)$ της KB, ο αλγόριθμος $FOL-FC-ASK$ θα τρέξει τον αλγόριθμο $UNIFY$ στις 2 προτάσεις $teaches(manolis,\ ai) \ \wedge\ course\_semester(ai,\ 3)$ και $teaches(T, C) \ \wedge\ course\_semester(C,\ S)$. Αυτό θα μας δώσει την αντικατάσταση:
$\theta = \{T/manolis, C/ai, S/3\}$.

Έτσι παίρνουμε την πρόταση $semester\_of\_teaching(manolis,\ 3)$ και την αποθηκεύουμε.

Όμοια, από τις προτάσεις $teaches(manolis,\ data\_structures)$ και $course\_semester(data\_structures,\ 1)$ με $UNIFY$ στις προτάσεις $teaches(manolis,\ data\_structures) \ \wedge\ course\_semester(data\_structures,\ 1)$ και $teaches(T,\ C) \ \wedge\ course\_semester(C,\ S)$ θα πάρουμε την αντικατάσταση:
$\theta = \{T/manolis, C/data\_structures, S/1\}$.

Έτσι παίρνουμε την πρόταση $semester\_of\_teaching(manolis,\ 1)$ και την αποθηκεύουμε.

Δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε καθώς κανένα άλλο $clause$ δεν περιέχει το $manolis$ που μας ενδιαφέρει.

Τελικά η νέα KB μας περιέχει τις προτάσεις:
$semester\_of\_teaching(manolis,\ 3)$
$semester\_of\_teaching(manolis,\ 1)$

Και η απάντηση στο query είναι:
?- $semester\_of\_teaching(manolis,\ S)$.
$S\ =\ 3$
$S\ =\ 1$