question1

19 Νοεμβρίου 2024

ΕΚΦΩΝΗΣΗ:

Πρόβλημα 1

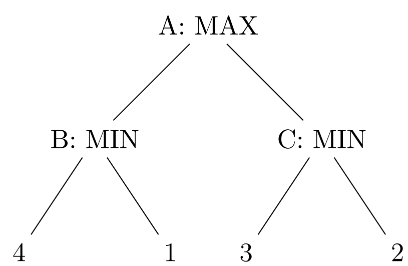
Αποδείξτε τον εξής ισχυρισμό. Για κάθε δένδρο παιχνιδιού, η χρησιμότητα για τον MAX που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αποφάσεις minimax εναντίον ενός μη βέλτιστου (suboptimal) MIN δεν είναι ποτέ μικρότερη από την χρησιμότητα που υπολογίζεται παίζοντας εναντίον ενός βέλτιστου MIN. Μπορείτε να βρείτε ένα δένδρο παιχνιδιού στο οποίο ο MAX μπορεί να τα καταφέρει ακόμα καλύτερα χρησιμοποιώντας μια μη βέλτιστη (suboptimal) στρατηγική εναντίον ενός μη βέλτιστου MIN;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με απαγωγή σε άτοπο. Οι υποθέσεις είναι ότι ο MAX παίζει βέλτιστα, ενώ ο MIN δεν παίζει βέλτιστα, και έστω ότι η χρησιμότητα για τον MAX είναι μικρότερη από αυτήν που θα είχε εναντίον έναν βελτιστο MIN.

Εφ'όσον και στις δύο περιπτώσεις ο MAX παίζει βέλτιστα, οποιαδήποτε διαφοροποίηση στην χρησιμότητα θα προέρχεται από αλλαγή στις κινήσεις του MIN. Με άλλα λόγια, υπονοούμε ότι ο μη βέλτιστος MIN πρέπει να έχει κάνει τουλάχιστον μία επιλογή που οδήγησε σε χαμηλότερη χρησιμότητα για τον MAX από ό,τι θα επέλεγε ο βέλτιστος MIN. Άτοπο, διότι ο βέλτιστος MIN πάντα ελαχιστοποιεί την χρησιμότητα του MAX. Άρα η αρχική μας υπόθεση είναι λάθος, άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Όσο για το δεύτερο ερώτημα, ας εξετάσουμε αυτό το δέντρο:



Σε αυτό το δέντρο:

Χρησιμοποιώντας το βέλτιστο minimax:
Στον κόμβο B, ο MIN ϑα επέλεγε 1
Στον κόμβο C, ο MIN ϑα επέλεγε το 2
Στον κόμβο A, ο MAX ϑα επέλεγε το C, λαμβάνοντας χρησιμότητα 2

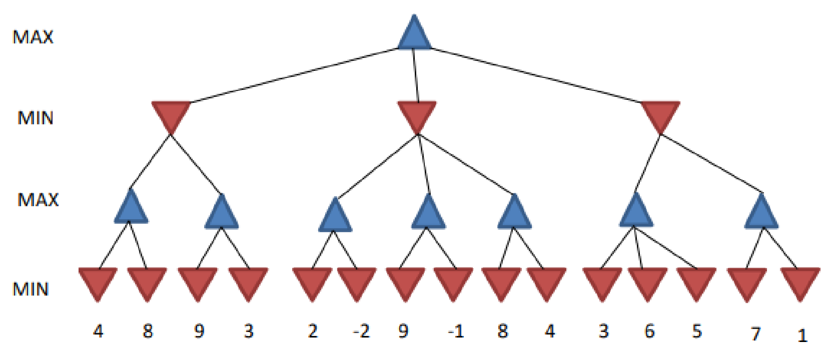
Τώρα ας υποθέσουμε:
O MAX παίζει μη βέλτιστα και επιλέγει B
O MIN παίζει μη βέλτιστα και επιλέγει το 4 στο B
Εδώ, ο MAX παίρνει χρησιμότητα 4 παίζοντας μη βέλτιστα εναντίον ενός μη βέλτιστου MIN, μεγαλύτερη από αυτή που ϑα είχε πάρει αν έπαιζε βέλτιστα.

question2

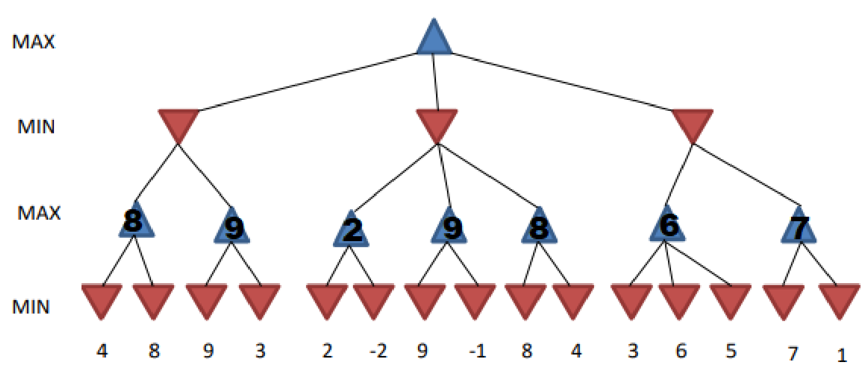
19 Νοεμβρίου 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

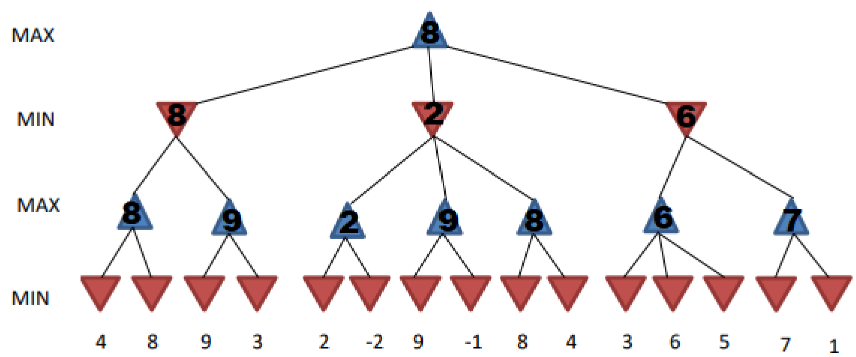
Παρακάτω έχουμε το αρχικό δέντρο:



Τρέχοντας τον αλγόριθμο minimax, οι κόμβοι στο επίπεδο 3, ως κόμβοι MAX, θα λάβουν την μέγιστη τιμή από τα παιδιά τους:



Αντίστοιχα οι MIN κόμβοι του 2ου επιπέδου θα λάβουν την μέγιστη τιμή από τα παιδιά τους. Τέλος, ο κόμβος-ρίζα που είναι MAX θα πάρει την μέγιστη τιμή που θα καθορίσει και την minimax απόφαση στη ρίζα του δέντρου όπως βλέπουμε στην συνέχεια.

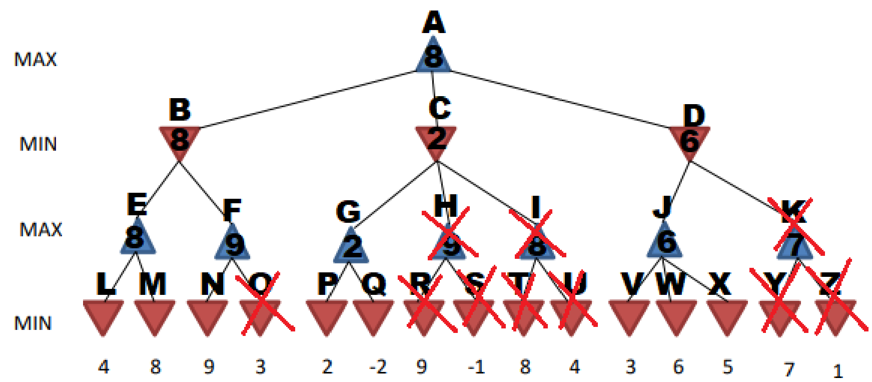


Η minimax απόφαση στη ρίζα είναι η επιλογή του δεξιότερου κόμβου.

Τώρα θα τρέξουμε τον αλγόριθμο ALPHA-BETA-SEARCH για να δούμε ποιοι κόμβοι θα κλαδευτούν. Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η εκτέλεση του αλγορίθμου θεωρητικά. Η στοίχιση των γραμμών είναι πολύ σημαντική καθώς δηλώνει το βάθος και σε ποιο α-β αναφερόμαστε.

```
Επισκεπτόμαστε τον κόμβο A (MAX) [α=-∞, β=∞]
  Επισκεπτόμαστε τον κόμβο B (MIN) [α=-∞, β=∞]
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο E (MAX) [α=-∞, β=∞]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο L (MIN) με τιμή 4
    updated alpha: α=4, β=∞
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο M (MIN) με τιμή 8
    updated alpha: α=8, β=∞
    O κόμβος E παίρνει την τιμή: 8
  updated beta: α=-∞, β=8
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο F (MAX) [α=-∞, β=8]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο N (MIN) με τιμή 9
    updated alpha: α=9, β=8
    Κλαδεύεται το 1 υπολοιπόμενο παιδί του F (κόμβος O) - (alpha>beta)
    O κόμβος F παίρνει την τιμή: 9
  O κόμβος B ως MIN παίρνει την τιμή: 8 ( μιν(E, F) )
updated alpha: α=8, β=∞
  Επισκεπτόμαστε τον κόμβο C (MIN) [α=8, β=∞]
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο G (MAX) [α=8, β=∞]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο P (MIN) με τιμή 2
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο Q (MIN) με τιμή -2
    O κόμβος G παίρνει την τιμή: 2
  updated beta: α=8, β=2
  Κλαδεύονται 2 υπολοιπόμενα παιδία του C (κόμβοι H, I) - (alpha>beta)
  O κόμβος C παίρνει την τιμή: 2
  Επισκεπτόμαστε τον κόμβο D (MIN) [α=8, β=∞]
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο J (MAX) [α=8, β=∞]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο V (MIN) με τιμή 3
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο W (MIN) με τιμή 6
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο X (MIN) με τιμή 5
    O κόμβος J παίρνει την τιμή: 6
  updated beta: α=8, β=6
  Κλαδεύεται το 1 υπολοιπόμενο παιδί του D (κόμβος K) - (alpha>beta)
  O κόμβος D παίρνει την τιμή: 6
O κόμβος A παίρνει την τιμή: 8
```

Όπως βλέπουμε, με την εκτέλεση του αλγορίθμου κλαδεύονται οι εξής κόμβοι:



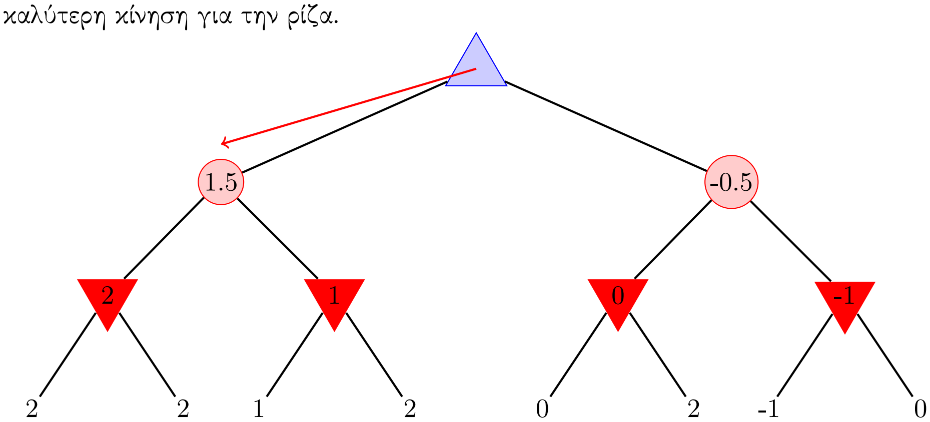
question3

19 Νοεμβρίου 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α):

Θα αντιγράψουμε το δέντρο και θα υπολογίσουμε τις τιμές των εσωτερικών κόμβων. Οι MIN κόμβοι θα πάρουν την ελάχιστη τιμή από τα φύλλα και οι κόμβοι τύχης τις αναμενόμενες τιμές minimax. Τέλος, φαίνεται με ένα βελάκι ποια είναι η καλύτερη κίνηση για την ρίζα.



(β):

Αν μας δώσουν τα πρώτα 6 φύλλα, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις τιμές του έβδομου και του όγδοου κατά την εύρεση της καλύτερης κίνησης για τη ρίζα.

Αυτό διότι αν πχ η τιμή και των δύο φύλλων (7ο και 8ο) ήταν $+\infty$, τότε και το min node θα έπαιρνε value $+\infty$, όμοια και το chance node, άρα στην ρίζα θα ήταν καλύτερη επιλογή ο δεξιός κόμβος max(1.5, $+\infty$)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας δίνουν τα πρώτα 7 φύλλα.
Ο αριστερός κόμβος τύχης δεν αλλάζει, θα έχει τιμή 1,5.
Για τον δεξιό κόμβο τύχης, το αριστερό min node θα έχει τιμή 0 (min(0, 2)).
Για τον δεύτερο min node, έχουμε -1 ως πρώτο φύλλο.

Έχει σημασία το 8ο φύλλο; Όχι, διότι ακόμη και αν είναι $+\infty$, ο min θα επιλέξει το -1 και ρίζα θα επιλέξει max(1.5, -0.5) = 1.5 όπως πριν. Αν πάλι το 8ο φύλλο ήταν $-\infty$, τοτε ο δεξής κόμβος τύχης θα είχε value $-\infty$ και η ρίζα θα επιλέξει $\max(1.5, -\infty) = 1.5$ όπως πριν. Άρα ανεξάρτητα από το 8ο φύλλο το αποτέλεσμα είναι προκαθορισμένο.

(γ):

Μετά τα δύο πρώτα φύλλα (και τα δύο 2), πιθανές τιμές για τον αριστερό κόμβο τύχης:
Ο αριστερός κόμβος min έχει τιμή 2 (min από 2,2).
Ο δεξιός κόμβος min θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο [-2,2] (καθώς αυτές είναι οι πιθανές τιμές των φύλλων, προφανώς και ο μέσος όρος τους παίρνει οποιαδήποτε τιμή από αυτές).
Ο κόμβος τύχης παίρνει το μέσο όρο του 2 και της τιμής του δεξή κόμβου min.
Χειρότερη περίπτωση (και τα 2 φύλλα παίρνουν την ελάχιστη τιμή -2) : Ο αριστερός κόμβος τύχης έχει ελάχιστη τιμή $(2 + -2)/2 = 0$
Καλύτερη περίπτωση (και τα 2 φύλλα παίρνουν την μέγιστη τιμή 2) : Ο αριστερός κόμβος τύχης έχει μέγιστη τιμή $(2 + 2)/2 = 2$

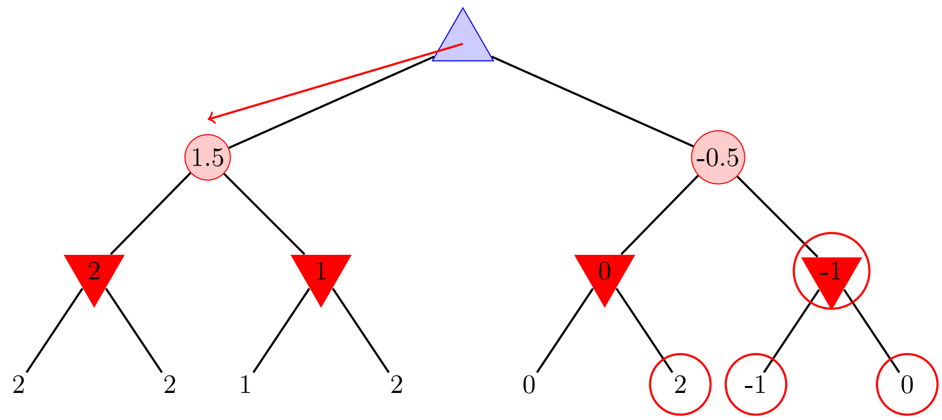
Επομένως, ο αριστερός κόμβος τύχης παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο [0, 2].

(δ)

Δεδομένου του περιορισμού [-2,2] και ενός αλγορίθμου τύπου κλαδέματος άλφα-β:

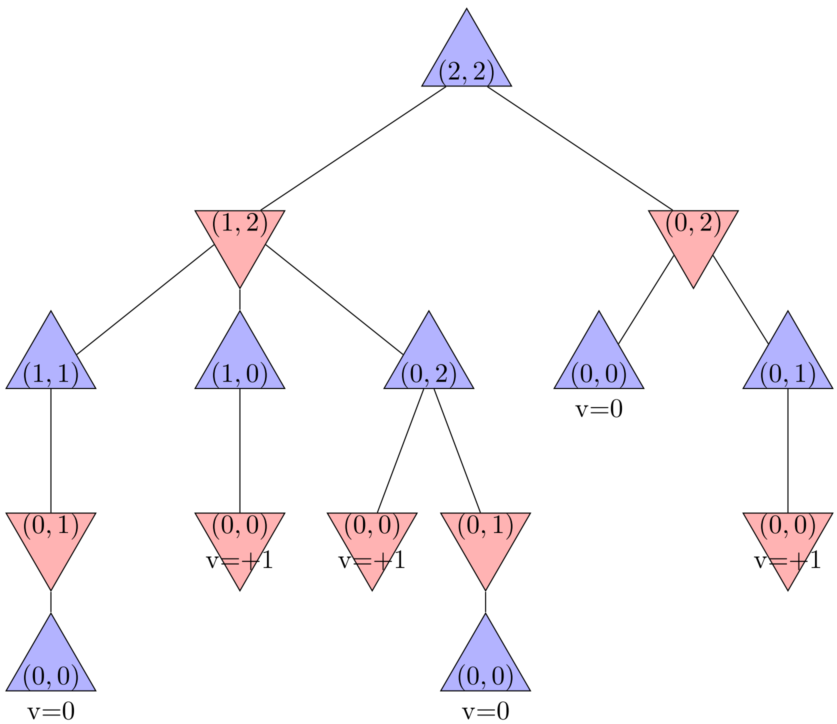
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι θα χρειαστεί να υπολογίσουμε όλο το αριστερό υπόδεντρο, δεν γίνεται κάποιο κλάδεμα εκεί.
Όμως στο δεξί υπόδεντρο: Ο πρώτος κόμβος min δίνει το πολύ 0
Ο δεξιός κόμβος min μπορεί στην καλύτερη περίπτωση να δώσει 2
Άρα ο μέσος όρος που θα δώσει την expectimax τιμή στον δεξιό κόμβο τύχης παίρνει μέγιστη τιμή 1 (0 και οτιδήποτε ≤ 2)
Επομένως, ο δεξιός κόμβος τύχης δεν μπορεί με τίποτα να ¨νικήσει' το 1,5

Επομένως, μπορούμε να κλαδέψουμε το δεξιό κόμβο min και τα παιδιά του, καθώς και το άλλο φύλλο του αριστερού κόμβου min. Παρακάτω φαίνονται κυκλωμένοι οι κλαδευμένοι κόμβοι.


1.5
-0.5
2
1
0
-1
2
2
1
2
0
2
-1
0

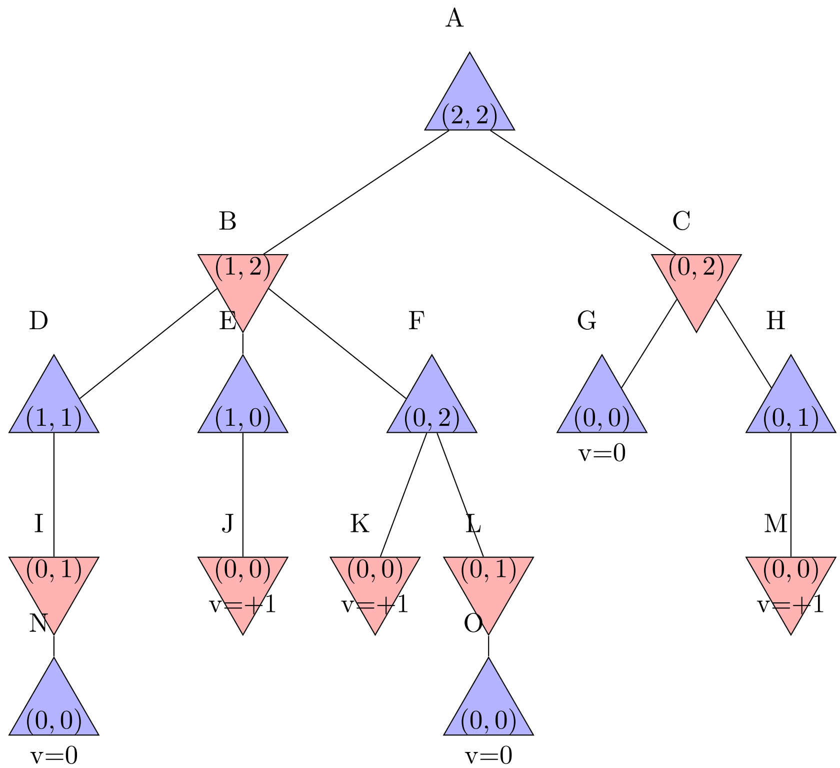
question4

19 Νοεμβρίου 2024



Παραπάνω φαίνεται το δέντρο παιχνιδιού για την έκδοση του Nim game όπως περιγράφεται στην εκφώνηση.

Έπειτα, θα αριθμίσουμε τους κόμβους ώστε να τρέξουμε θεωρητικά τον αλγόριθμο alpha-beta pruning (κλάδεμα άλφα-βητα), παρόμοια όπως στην δεύτερη άσκηση. Όμοια, η στοίχιση των γραμμών είναι πολύ σημαντική καθώς δηλώνει το βάθος και σε ποιο α-β αναφερόμαστε.



```
Επισκεπτόμαστε τον κόμβο A (MAX) [α=-∞, β=∞]
  Επισκεπτόμαστε τον κόμβο B (MIN) [α=-∞, β=∞]
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο D (MAX) [α=-∞, β=∞]
      Επισκεπτόμαστε τον κόμβο I (MIN) [α=-∞, β=∞]
        Επισκεπτόμαστε το φύλλο N (MAX) με τιμή 0
      Updated α=-∞, β=0
      Ο κόμβος I παίρνει την τιμή: 0
    Updated α=0, β=∞
    Ο κόμβος D παίρνει την τιμή: 0
  Updated α=-∞, β=0
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο E (MAX) [α=-∞, β=0]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο J (MIN) με τιμή 1
    Updated α=1, β=0
    Ο κόμβος E παίρνει την τιμή: 1
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο F (MAX) [α=-∞, β=0]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο L (MIN) με τιμή 1
    Updated α=1, β=0
    Κλαδέυονται 1 υπολοιπόμενο/α παιδία του F - Βετα ςυτοφφ, το/τα οποίο/α είναι: K
    Ο κόμβος F παίρνει την τιμή: 1
  Ο κόμβος B παίρνει την τιμή: 0
Updated α=0, β=∞
  Επισκεπτόμαστε τον κόμβο C (MIN) [α=0, β=∞]
    Επισκεπτόμαστε τον κόμβο H (MAX) [α=0, β=∞]
      Επισκεπτόμαστε το φύλλο M (MIN) με τιμή 1
    Updated α=1, β=∞
    Ο κόμβος H παίρνει την τιμή: 1
  Updated α=0, β=1
    Επισκεπτόμαστε το φύλλο G (MAX) με τιμή 0
  Updated α=0, β=0
  Ο κόμβος C παίρνει την τιμή: 0
Ο κόμβος A παίρνει την τιμή: 0
```

Η τιμή minimax στη ρίζα του δέντρου παιχνιδιού είναι 0, που σημαίνει ότι αν και οι δύο παίκτες παίζουν βέλτιστα, το αποτέλεσμα είναι νίκη για τον MIN από άποψη χρησιμότητας (έχουμε ορίσει 0 για τις καταστάσεις που κερδίζει ο MIN, αντίστοιχα 1 για MAX). Μια τιμή minimax 0 με άλλα λόγια υποδηλώνει ότι ο MIN θα κερδίσει, καθώς ο MAX δεν μπορεί να επιβάλει χρησιμότητα +1 ακόμα και αν παίξει βέλτιστα (εφ'όσον και ο MIN παίξει βέλτιστα).