인공지능을 위한 머신러닝 알고리즘

3. 로지스틱 회귀 모델

Tacademy

CONTENTS

학습 목표

- 로짓(logit) 함수를 이해할 수 있다.
- 로지스틱 회귀의 분류 원리에 대해 이해할 수 있다.
- 로지스틱 회귀 모델의 파라미터를 구할 수 있다.

1. 로짓(logit) 함수

Tacademy

오즈 (odds)

- 어떠한 사건의 확률이 **p**일 때, 그 사건의 오즈는 다음과 같이 계산
  - **odds = p / (1–p)**

예시

		비만		
		Yes	No	Total
혈중 콜레스테롤	Normal	402	3614	4016
	High	101	345	446
		503	3959	4462

- 혈중 콜레스테롤이 정상인 그룹에서 비만인 경우의 오즈
  - 비만일 확률 / (1–비만일 확률) = (402/4016) / (1 - (402/4016)) = 0.1001 / 0.8889 = 0.111

Tacademy

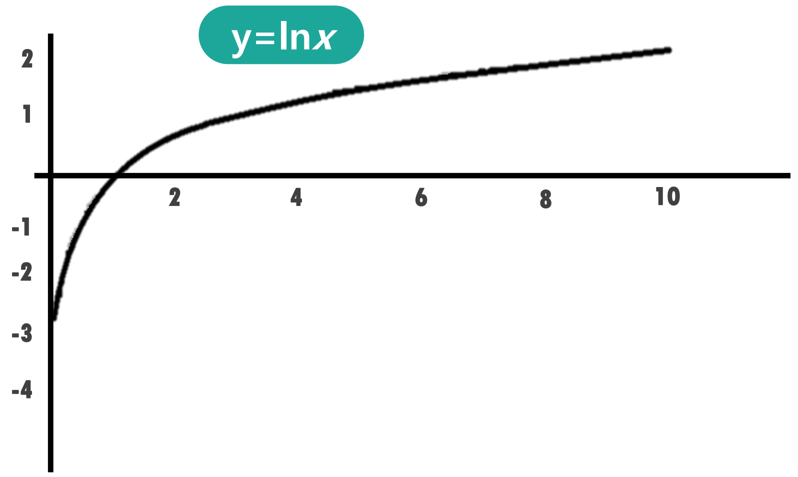
오즈 (odds)

- 혈중 콜레스테롤이 정상인 그룹에서 비만이 아닌 경우의 오즈
  - **0.8999/0.1001 = 8.99**
- 혈중 콜레스테롤이 높은 그룹
  - **odds**(비만) **= 101/345 = 0.293**
  - **odds**(비만이 아님) **= 345/101 = 3.416**
- 혈중 콜레스테롤이 정상에서 높은 수치로 갈 때, 비만인 경우의 오즈는 약 세 배 증가
  - **odds** 비율**: 0.293/0.111 = 2.64**
  - 혈중 콜레스테롤이 높을 때, **2.64** 배 더 비만이 되기 쉬움

Tacademy

로짓 변형

❖ 로짓은 오즈의 자연로그



logit(p) = ln(odds) = ln (p/(1-p))

2. 로지스틱 회귀 모델

Tacademy

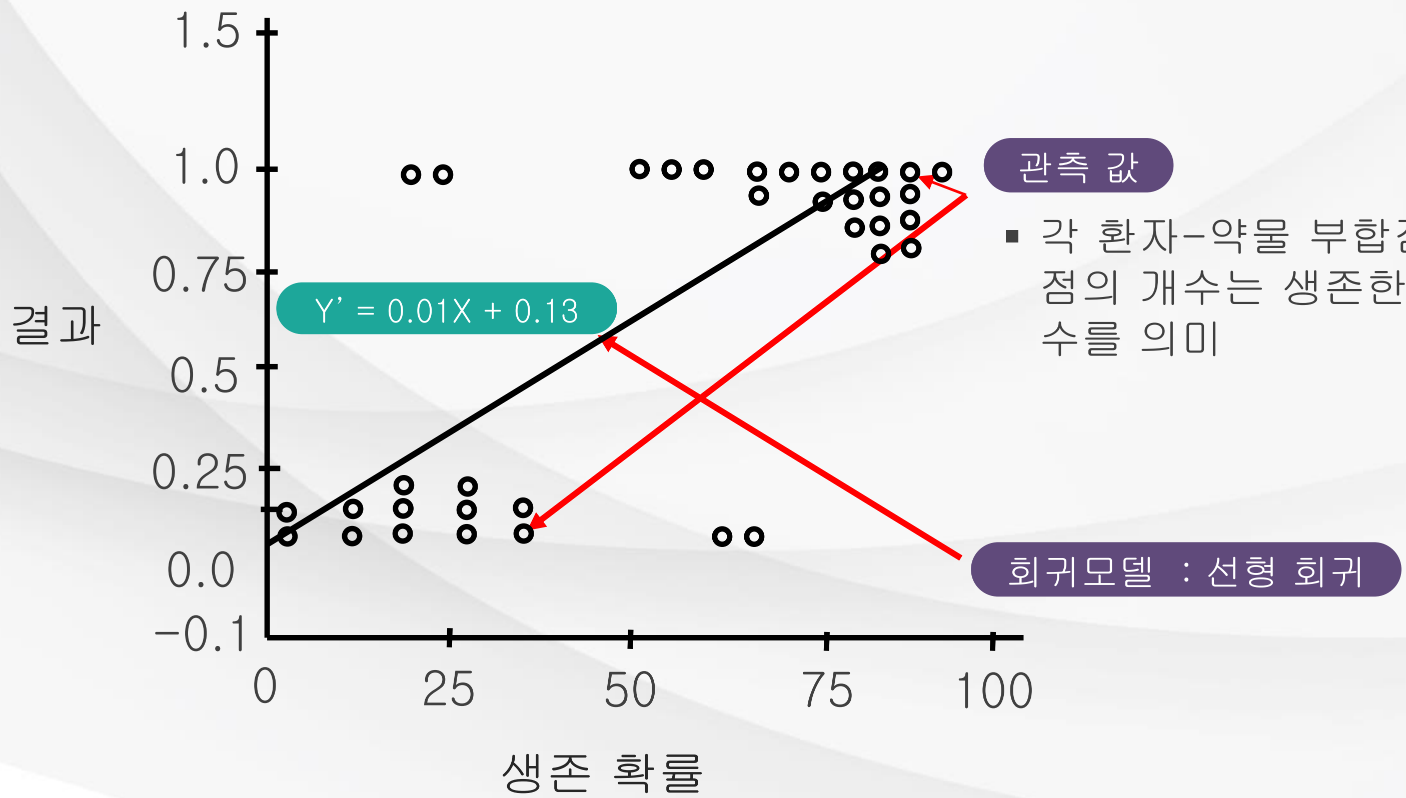
로지스틱 회귀 분석이 사용되는 예

- 종속 변수의 값을 **0**또는 **1**로 (이진 변수로) 표현할 수 있는 경우

예) 약물 치료 후 환자의 반응 예측

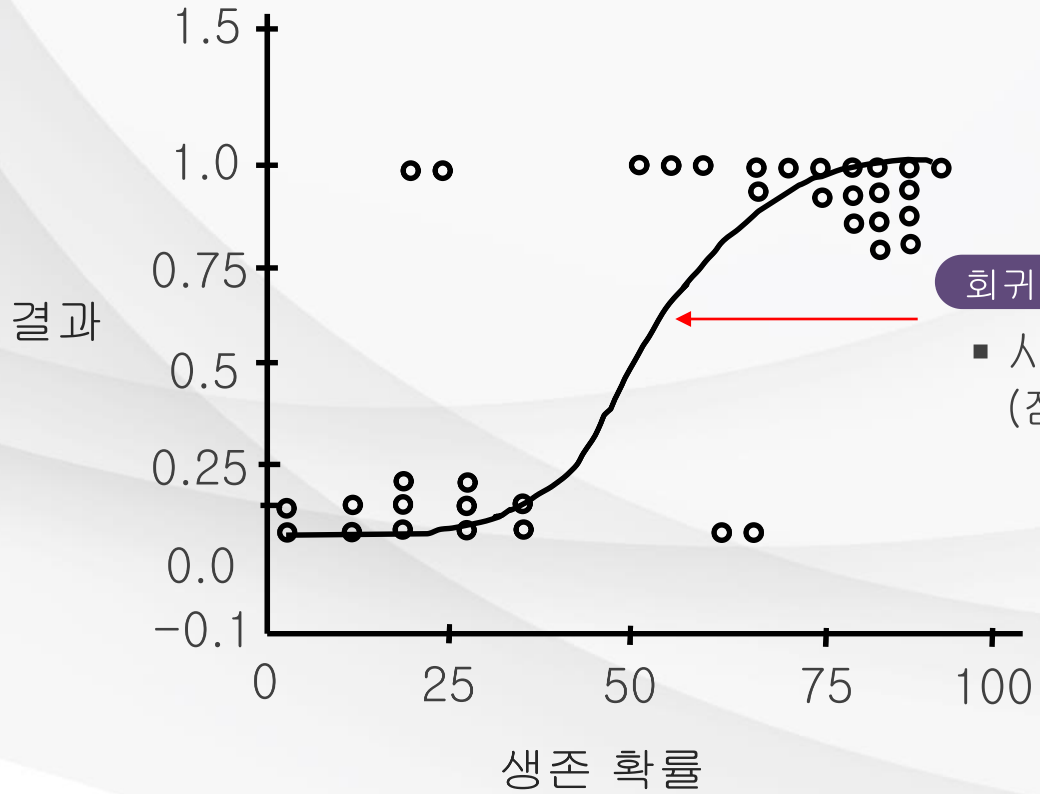
약물 치료에 대한 환자의 반응(종속 변수)을 예측하고자 할 때,
약물 치료 적용 후 환자가 살아남은 경우 **1**로,
살아남지 못한 경우를 **0**으로 표현할 수 있음

선형 회귀 모델을 사용할 경우



- 각 환자-약물 부합점수마다 점의 개수는 생존한 환자의 수를 의미

더 나은 솔루션



회귀 모델의 예측 커브

- 시그모이드 함수
(점근적으로 y=0 과 y=1에 근사)

Tacademy

로지스틱 회귀 모델

- 로지스틱 회귀 모델의 방정식

$$\operatorname{logit}(p) = \beta_0 + \beta_1 X$$

- 오즈의 로그(로짓)은 설명변수 **x**와 선형적인 관계
- 일반적 선형 회귀 문제처럼 접근 가능

2. 로지스틱 회귀 모델

종속 변수 p 값 구하기

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X)}}$$

p는 시그모이드 함수

β_1 값 해석

- **Let**
  - **odds1 = X의 odds (p/(1−p))**
  - **odds2 = X + 1의 odds**
- **Then**

$$\frac{odds2}{odds1} = \frac{e^{b_0 + b_1(X+1)}}{e^{b_0 + b_1 X}}$$

$$= \frac{e^{(b_0 + b_1 X) + b_1}}{e^{b_0 + b_1 X}} = \frac{e^{(b_0 + b_1 X)} e^{b_1}}{e^{b_0 + b_1 X}} = e^{b_1}$$

- **X**가 각 단위 값 마다 증가할 때,
  예측된 **odds**의 비율이 **e**의 기울기(β_1) 제곱만큼 증가함을 의미

Tacademy

Logit 변환의 의미

❖ 선형회귀에 더 적절한 함수를 도출

$$\text{Logit}(P) = \text{log odds} = \ln\left(\frac{P}{1-P}\right)$$

확률	0	---------	$\frac{1}{2}$	---------	1
Odds	0	---------	1	---------	$+\infty$
Logit	$-\infty$	---------	0	---------	$+\infty$


3. 로지스틱 회귀 모델의 파라미터 추정

 Tacademy

최대 우도 추정법이란?

❖동전 던지기 문제

- 앞/뒤가 나올 확률이 공정하지 않은 **(biased)** 동전이 있을 경우, 동전의 앞면이 나올 확률 **head(p)**를 계산하고자 함
- 이 때, **p**는 **unknown** 파라미터
- 동전을 **10**번 던져서 앞면이 **7**번 나왔다고 하자.
  이 때, **p**의 값으로 추정할 수 있는 값 중 가장 최선은 무엇일까?
- 데이터에 기반하여 **0.7**로 예측

Tacademy

최대 우도 추정법이란?

❖ 동전 던지기 문제

- 동전을 **10**번 던졌을 때 앞면이 **10**번 나온 횟수는 **N=10**이고 **p=unknown**인 **binomial** 랜덤 변수

$$\therefore P(7heads) = \binom{10}{7} p^7(1-p)^3 = \frac{10!}{7! * 3!} p^7(1-p)^3$$

- 알지 못하는 파라미터 **p**에 대해서 데이터를 관측할 확률을 제공

3. 로지스틱 회귀 모델의 파라미터 추정

Tacademy

최대 우도 추정법이란?

- 이 때, 데이터의 확률을 가장 높이는 **p**의 값을 찾고자 함 (또는 우도함수를 가장 높이는 **p**)
- 즉, 데이터를 가장 잘 설명할 수 있는 파라미터 **p**를 찾고자 함
- 어떻게 찾을 수 있을까?
  - 함수에 **log**를 씌움 **:** 곱셈을 덧셈으로 바꿈으로써 미분을 쉽게 함
  - **p**에 대해서 미분 계산 **: p**의 변화량에 대한 함수의 변화량 계산
  - 미분 값을 **0**으로 설정하고 **p**를 계산 **:** 함수의 최대 값이 되는 곳은 미분 값이 **0**
- 파라미터 대입해서 확률 계산해보기

$$\textbf{Likelihood} = \binom{10}{7}(.7)^7(.3)^3 = 120(.7)^7(.3)^3 = .267$$

$$\log Likelihood = \log\frac{10}{7!*3!} + 7\log p + 3\log(1-p)$$

$$\frac{d}{dp}\log Likelihood = 0 + \frac{7}{p} - \frac{3}{1-p}$$

$$\frac{7}{p} - \frac{3}{1-p} = 0$$

$$\frac{7(1-p)-3p}{p(1-p)} = 0$$

$$7(1-p) = 3p$$

$$7 - 7p = 3p$$

$$7 = 10p$$

$$p = \frac{7}{10}$$

모수(β_i) 추정 방법

- 최대 우도(**maximum likelihood**) 추정법 이용
  - 우도함수(**likelihood function**)

$$L(x_i;\beta_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\exp(-\eta)}\right)^{y_i}\left(1-\frac{1}{1+\exp(-\eta)}\right)^{1-y_i}$$

$$\eta=\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right)$$

  - 우도함수를 최대화하는 최대 우도 추정법(**MLE**)을 이용하여 $\hat{\beta}_i$을 수치적(**numerical**) 방법으로 산출

$$Max\left[L(x_i;\beta_i)\right]\ \Rightarrow\ \beta_i\ ??$$

로지스틱 회귀 모델 예제

❖ 나이에 따른 동맥 심장 질환 확률 예측하기

데이터

	55세 이상	55세 미만
동맥 심장 질환 유	21	22
동맥 심장 질환 무	6	51

로지스틱 모델

$$\log\left(\frac{P(D)}{1-P(D)}\right) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_1 X_1$$

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{if age} >= 55 \\ 0 & \text{if age} < 55 \end{cases}$$

우도함수 식

$$L(\alpha, \beta_1) = \left(\frac{e^{-\alpha-\beta_1}}{1+e^{-\alpha-\beta_1}}\right)^{6}\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha-\beta_1}}\right)^{21}\left(\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}\right)^{51}\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha}}\right)^{22}$$

3. 로지스틱 회귀 모델의 파라미터 추정

Tacademy

로지스틱 회귀 모델 예제

$$L(\alpha,\beta_1)=\left(\frac{e^{-\alpha-\beta_1}}{1+e^{-\alpha-\beta_1}}\right)^{6}\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha-\beta_1}}\right)^{21}\left(\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}\right)^{51}x\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha}}\right)^{22}$$

로그 우도함수

$$\therefore \log L(\alpha,\beta_1)=$$

$$6(-\alpha-\beta_1)-6\log(1+e^{-\alpha-\beta_1})+0-21\log(1+e^{-\alpha-\beta_1})-$$

$$51\alpha+51\log(1+e^{-\alpha})+0-22\log(1+e^{-\alpha})$$

3. 로지스틱 회귀 모델의 파라미터 추정

Tacademy

로지스틱 회귀 모델 예제

로그 우도함수

$$\therefore \log L(\alpha, \beta_1) =$$

$$6(-\alpha - \beta_1) - 6\log(1 + e^{-\alpha-\beta_1}) + 0 - 21\log(1 + e^{-\alpha-\beta_1}) -$$

$$51\alpha + 51\log(1 + e^{-\alpha}) + 0 - 22\log(1 + e^{-\alpha})$$

미분식

$$\frac{d[\log L(\beta_1)] =}{d\beta_1}$$

$$-6 + \frac{6e^{-\alpha-\beta_1}}{1 + e^{-\alpha-\beta_1}} + \frac{21e^{-\alpha-\beta_1}}{1 + e^{-\alpha-\beta_1}} = 0$$

$$\frac{d[\log L(\alpha)] =}{d\alpha}$$

$$51 - \frac{51e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}} - \frac{22e^{\alpha-}}{1 + e^{-\alpha}} = 0$$

학습정리

학습정리

지금까지 [로지스틱 회귀 모델]에 대해서 살펴보았습니다

로짓(logit) 함수

로짓은 오즈의 자연로그

$$\text{odds} = p / (1-p)$$

$$\text{logit}(p) = \ln(\text{odds}) = \ln(p/(1-p))$$

로지스틱 회귀 모델

로짓과 설명변수 X를 선형적인 관계로 모델링
종속변수 p와 X는 비선형 관계

$$\text{logit}(p) = b_0 + b_1 X$$

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X)}}$$

로지스틱 회귀 모델의 파라미터 추정

우도함수 사용

$$L(x_i;\beta_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\exp(-\eta)} \right)^{y_i} \left(1 - \frac{1}{1+\exp(-\eta)} \right)^{1-y_i}$$