
COMPUTATIONAL INTELLIGENCE UE

Homework 5: Maximum Likelihood Estimation and Bayesian
Classification

Autor: Thomas Ebner, Raphael Hoheneder, Stefan Nöhmer
Datum: Graz, 24. Juni 2011
Version.: alpha 1.1

1 Homework: Maximum Likelihood Estimation and Classification

1.1 Classification using the amplitude only

Eine Klassifikation anhand von x_1 alleine wird nur sehr schlecht funktionieren, da in x_1 auf den ersten Blick relativ wenig information über die Klassenzugehörigkeit steckt. Bei der Kombination aus x_1 und x_2 kann man sich also eine deutlich bessere Klassifikationsperformance erwarten.

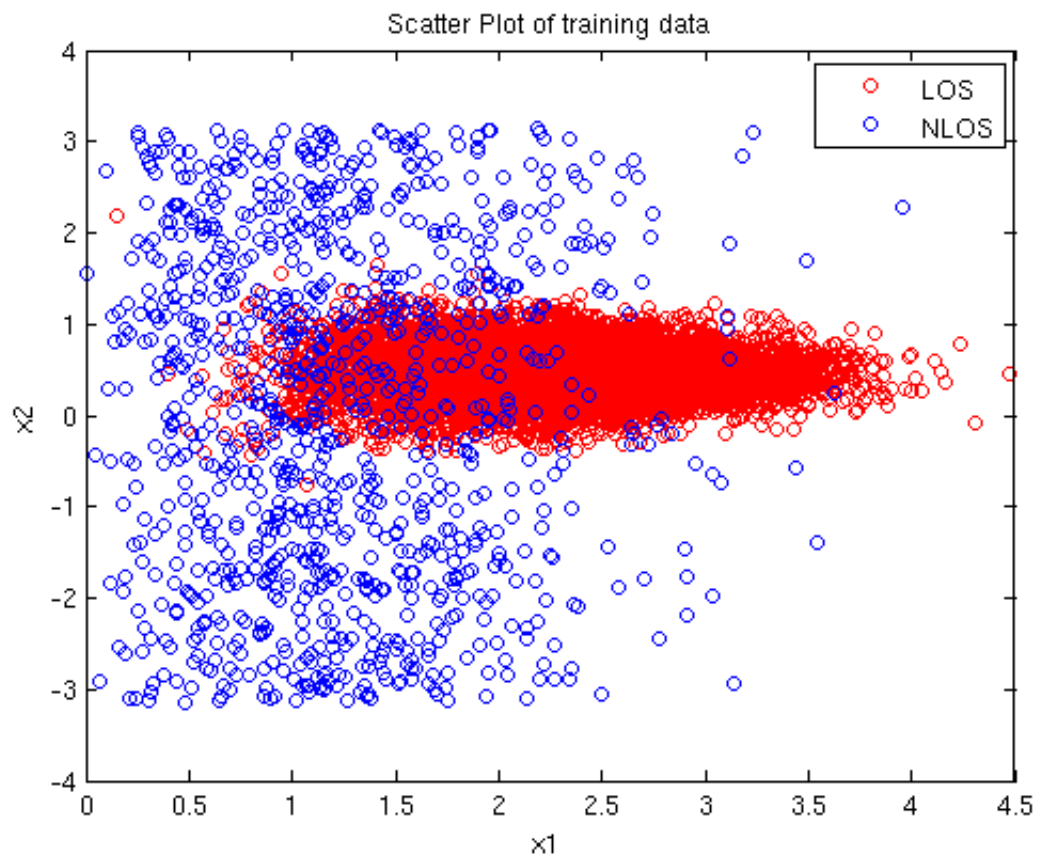


Abbildung 1.1: Trainingsdatensatz

1.

$$p(x_1|t = NLOS) = \frac{x_1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x_1^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.1)$$

$$\log(p(x_1^1, \dots, x_1^N | \sigma)) = \log \prod_{n=1}^N p(x_1^n | NLOS) = \sum_{n=1}^N \log\left(\frac{x_1^n}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x_1^{n2}}{2\sigma^2}\right)\right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{-2N}{\sigma} + \sigma^{-3} \cdot \sum_{n=1}^N (x_1^n)^2 = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x_1^n)^2}{2N}} \quad (1.4)$$

2. -

3. Die Normalisierung erfolgt durch Multiplizieren jedes Balkens des Histogramms mit dem folgenden Normalisierungsfaktor:

$$\frac{\#Balken}{(\sum N) * X(end) - X(1)} \quad (1.5)$$

Wobei N die Balkenhöhe und X der zugehörige Balkenmittelpunkt auf der X-Achse darstellt

4. ML-Klassifikation: Es wurden 85.1455% korrekt klassifiziert
 Bayes-Klassifikation: Es wurden 93.8364% korrekt klassifiziert
 Mittels der Bayes Klassifikation lässt sich aufgrund der Priorwahrscheinlichkeit ein besseres Ergebnis erzielen. Die gute Klassifikationsperformance beruht aber eigentlich nur darauf, dass die meisten Daten LOS sind und nur wenige NLOS sind. Wäre die Priorwahrscheinlichkeit für NLOS und LOS gleich, würde man deutlich schlechtere Ergebnisse erzielen.
5. Bei der Bayes-Klassifikation wandert die Grenze für die Klassifikation weiter nach links. Die Bayes-Klassifikation unterscheidet sich von der ML-Klassifikation nur dadurch, dass die Priorwahrscheinlichkeit noch miteinfließt. Diese Verbesserung vergrößert den Rechenaufwand nahezu gar nicht.

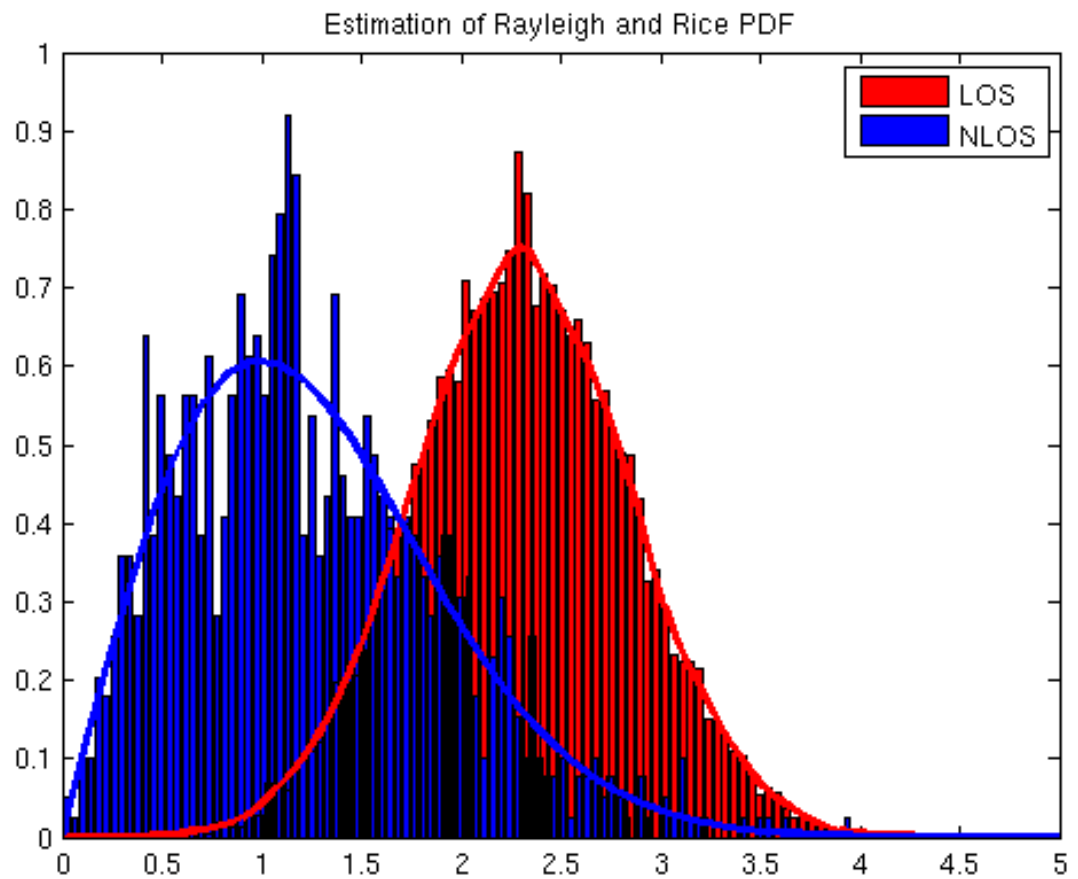


Abbildung 1.2: Estimation of PDF-Parameters

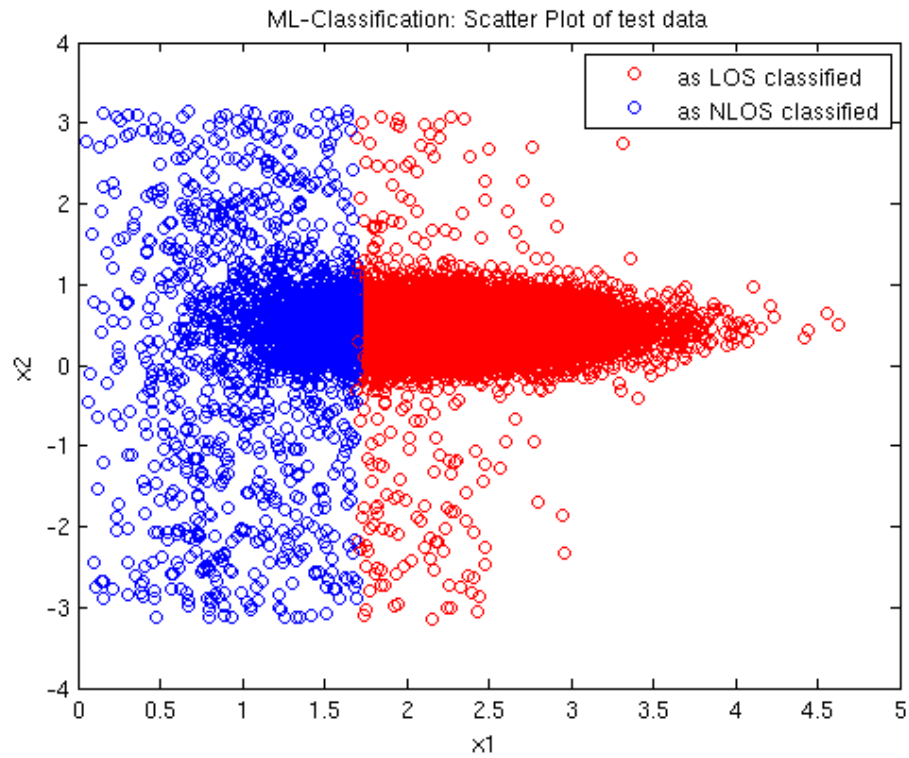


Abbildung 1.3: ML-Klassifikation

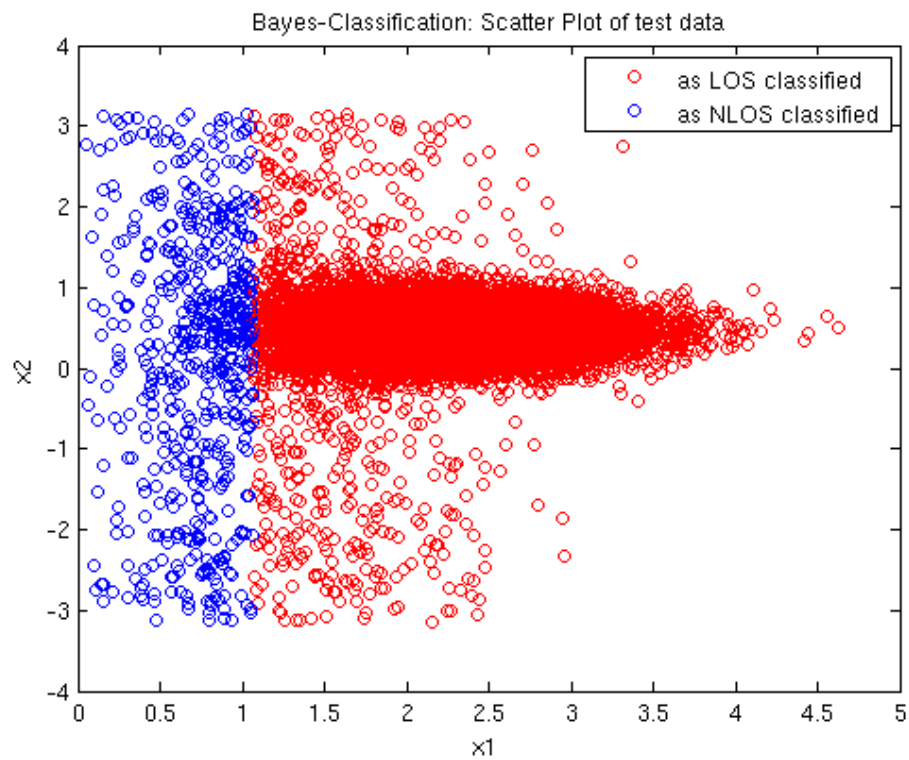


Abbildung 1.4: ML-Klassifikation

1.2 Classification using both amplitude and phase

Durch die Einführung der Phase ist viel mehr Information verfügbar als durch die Amplitude alleine, was die Performance der Klassifikation deutlich verbessern sollte.

1.2.1 Likelihood models

Schätzen der Normalverteilung der LOS-Phase:

$$p(x_2|t = \text{LOS}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{x_2})^2}{\sigma_{x_2}^2}\right)$$

$$\mu_{x_2} = \frac{1}{N_{\text{LOS}}} \sum_{x \in \text{LOS}} x$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{N_{\text{LOS}}} \sum_{x \in \text{LOS}} (x - \mu_{x_2})^2$$

Die Verteilung der NLOS-Phase ist uniform:

$$p(x_2|t = \text{NLOS}) = \frac{1}{2\pi}$$

Abbildung 1.5 zeigt die ermittelten Schätzwerte für die Verteilungen der Phase. Man erkennt, dass die Schätzwerte gut mit den Testdaten übereinstimmen.

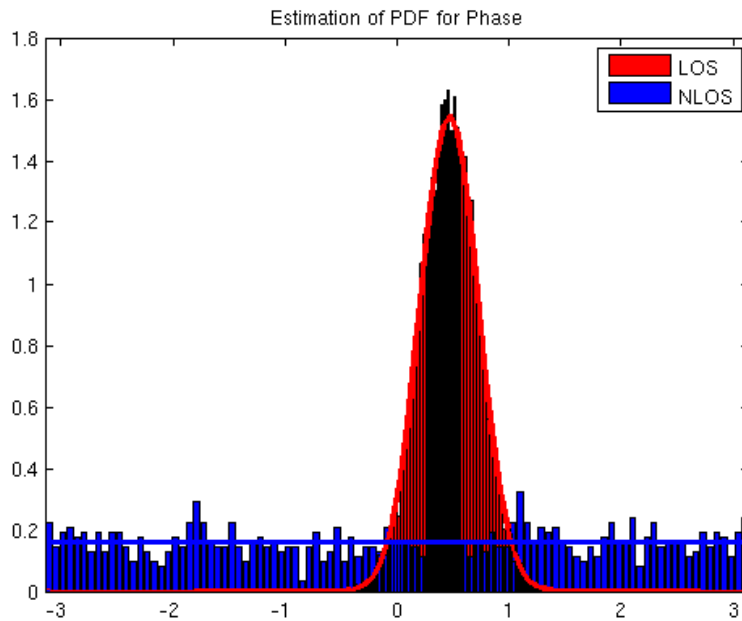


Abbildung 1.5: Normalisierte Histogramme der geschätzten Verteilungen der Phase

1.2.2 ML-Klassifikation

Abbildung 1.6 zeigt die Klassifikation mit ML. Durch die zusätzliche Information der Phase können die beiden Bereiche besser unterschieden werden als nur durch die Amplitude. Die Erkennung funktioniert in diesem Beispiel schon recht gut, ein gewisser Bereich (linker Bereich von LOS) wird jedoch noch falsch klassifiziert.

ML: Es wurden 95.0091% korrekt klassifiziert

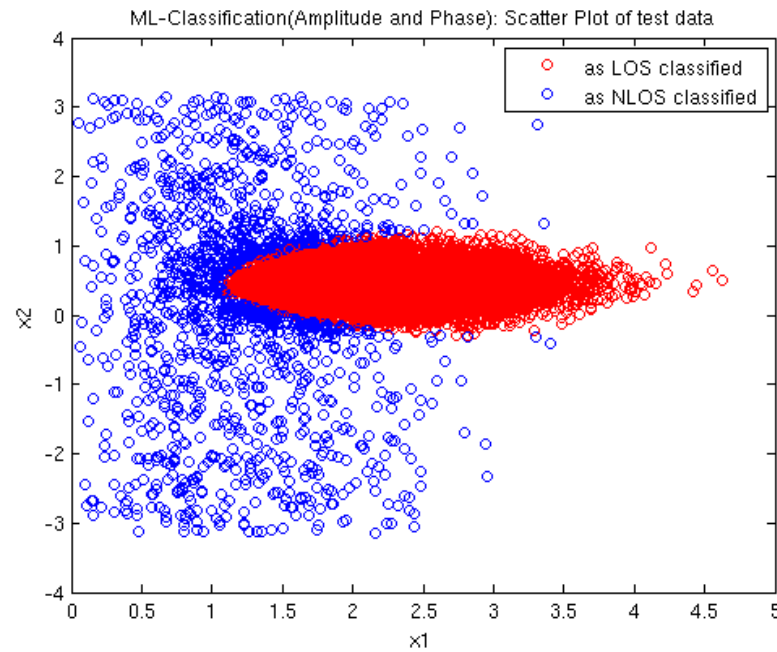


Abbildung 1.6: Klassifikation der Daten durch Most Likelihood Schätzer

1.2.3 Bayes-Klassifikation

Abbildung 1.7 zeigt die Klassifikation mit Bayes. Wie beim ML-Schätzer ist die Klassifikation besser als ohne Phaseninformation. Die Erkennung funktioniert mit Bayes-Klassifikator noch etwas besser als mit ML, da hier auch der vorher falsch klassifizierte Bereich richtig erkannt wird.

Bayes: Es wurden 97.5636% korrekt klassifiziert

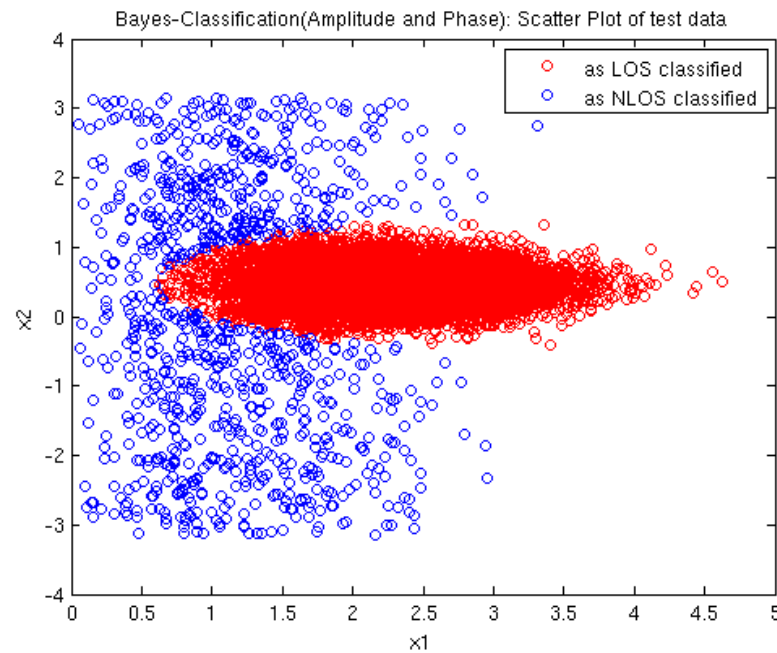


Abbildung 1.7: Klassifikation der Daten durch Bayes Schätzer

2 Listings

2.1 Classification using the amplitude only

```

1  close all;
2  clc;
3
4
5  load('data_5_1.mat');
6
7
8
9  %1.) Scatter Plot:
10 figure;
11 plot(LOS_train(1,:), LOS_train(2,:), 'r o');
12 hold on;
13 plot(NLOS_train(1,:), NLOS_train(2,:), 'b o');
14
15 legend('LOS', 'NLOS');
16 title('Scatter Plot of training data');
17 xlabel('x1');
18 ylabel('x2');
19
20 %%
21
22 % 2.) Max Likelyhood estimation
23 x1NLOS = NLOS_train(1,:);
24 ray_sigma = sqrt(sum(x1NLOS.^2)/(2*length(x1NLOS)));
25
26 x1LOS = LOS_train(1,:);
27 [rice_pdf, x_rice] = ksdensity(x1LOS);
28
29
30 x_ray = linspace(-1, 5, 50);
31 ray_pdf_func = @(x) x ./ (ray_sigma.^2) .* exp(-x.^2/(2*ray_sigma.^2));
32 ray_pdf = x_ray ./ (ray_sigma.^2) .* exp(-x_ray.^2/(2*ray_sigma.^2));
33
34
35 %%
36
37 % 3.)
38
39 [Nrice,Xrice] = hist(LOS_train(1,:), 100);
40 [Nray,Xray] = hist(NLOS_train(1,:), 100);
41
42 Nrice = Nrice ./ (sum(Nrice)*(Xrice(end)-Xrice(1)))*100;
43 Nray = Nray ./ (sum(Nray)*(Xray(end)-Xray(1)))*100;
44
45
46
47 figure;
48 bar(Xrice, Nrice, 'r');
49 hold on;
50 bar(Xray, Nray, 'b');
51
52 plot(x_rice, rice_pdf, 'r- ', 'LineWidth', 3);
53 plot(x_ray, ray_pdf, 'b- ', 'LineWidth', 3);
54
55 xlim([0 5]);
56 ylim([0 1]);
57
58 legend('LOS', 'NLOS');
59 title('Estimation of Rayleigh and Rice PDF');
60
61 %%

```



```

62
63 % 4.)
64
65 LOSPrior = length(LOS_train(1,:)) / (length(LOS_train(1,:)) +
                                         length(NLOS_train(1,:)));
66 NLOSPrior = length(NLOS_train(1,:)) / (length(LOS_train(1,:)) +
                                         length(NLOS_train(1,:)));
67
68 %ML Classification:
69
70 % first we try to classify the LOS_test data
71 pNLOS = ray_pdf_func(LOS_test(1,:));
72 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, LOS_test(1,:));
73
74 figure;
75 plot(LOS_test(1,pLOS>pNLOS), LOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
76 hold on;
77 plot(LOS_test(1,pLOS<=pNLOS), LOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
78
79
80 correct_classified = sum(pLOS>pNLOS);
81
82 %----
83 % now we try to classify the NLOS_test data
84 pNLOS = ray_pdf_func(NLOS_test(1,:));
85 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, NLOS_test(1,:));
86
87 %figure;
88 plot(NLOS_test(1,pLOS>pNLOS), NLOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
89 plot(NLOS_test(1,pLOS<=pNLOS), NLOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
90
91
92 legend('as LOS classified', 'as NLOS classified');
93 title('ML-Classification: Scatter Plot of test data');
94 xlabel('x1');
95 ylabel('x2');
96
97 correct_classified = correct_classified + sum(pLOS<=pNLOS);
98
99 disp(['ML: Es wurden ', num2str(correct_classified/(length(LOS_train(1,:)) +
                                         length(NLOS_train(1,:))*100), '% korrekt
                                         klassifiziert']]);
100
101 %%
102 %Bayes Classification-----
103 % first we try to classify the LOS_test data
104
105 pNLOS = ray_pdf_func(LOS_test(1,:)) * NLOSPrior;
106 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, LOS_test(1,:))*LOSPrior;
107
108 figure;
109 plot(LOS_test(1,pLOS>pNLOS), LOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
110 hold on;
111 plot(LOS_test(1,pLOS<=pNLOS), LOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
112
113 correct_classified = sum(pLOS>pNLOS);
114 %----
115 % now we try to classify the NLOS_test data
116 pNLOS = ray_pdf_func(NLOS_test(1,:)) * NLOSPrior;
117 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, NLOS_test(1,:))*LOSPrior;
118
119 %figure;
120 plot(NLOS_test(1,pLOS>pNLOS), NLOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
121 plot(NLOS_test(1,pLOS<=pNLOS), NLOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
122
123
124 legend('as LOS classified', 'as NLOS classified');
125 title('Bayes-Classification: Scatter Plot of test data');
126 xlabel('x1');
127 ylabel('x2');
128
129 correct_classified = correct_classified + sum(pLOS<=pNLOS);
130 disp(['Bayes: Es wurden ', num2str(correct_classified/(length(LOS_train(1,:)) +
                                         length(NLOS_train(1,:))*100), '% korrekt

```

```
klassifiziert']]);
```

2.2 Classification using both amplitude and phase

```

1  close all;
2  clc;
3
4
5  load('data_5_1.mat');
6
7
8
9  %1.) Scatter Plot:
10 figure;
11 plot(LOS_train(1,:), LOS_train(2,:), 'r o');
12 hold on;
13 plot(NLOS_train(1,:), NLOS_train(2,:), 'b o');
14
15 legend('LOS', 'NLOS');
16 title('Scatter Plot of training data');
17 xlabel('x1');
18 ylabel('x2');
19
20 %%
21
22 % 2.) Max Likelyhood estimation
23 x1NLOS = NLOS_train(1,:);
24 ray_sigma = sqrt(sum(x1NLOS.^2)/(2*length(x1NLOS)));
25
26 x1LOS = LOS_train(1,:);
27 [rice_pdf, x_rice] = ksdensity(x1LOS);
28
29
30 x_ray = linspace(-1, 5, 50);
31 ray_pdf_func = @(x) x ./ (ray_sigma.^2) .* exp(-x.^2/(2*ray_sigma.^2));
32 ray_pdf = x_ray ./ (ray_sigma.^2) .* exp(-x_ray.^2/(2*ray_sigma.^2));
33
34
35 %Estimation of x2:
36 phaseLOSmy = sum(LOS_train(2,:)) / length(LOS_train(2,:));
37 phaseLOSsigmasq = sum((LOS_train(2,:)-phaseLOSmy).^2)/length(LOS_train(2,:));
38
39 phaseLOSfunc = @(x) 1/(sqrt(2*pi*phaseLOSsigmasq)) .*
40                 exp(-(x-phaseLOSmy).^2/(2*phaseLOSsigmasq));
41
42 phaseNLOSfunc = 1/(2*pi);
43
44 %%
45
46 % 3.)
47
48 [Nlos,Xlos] = hist(LOS_train(2,:), 100);
49 [Nnlos,Xnlos] = hist(NLOS_train(2,:), 100);
50
51 Nlos = Nlos ./ (sum(Nlos)*(Xlos(end)-Xlos(1)))*100;
52 Nnlos = Nnlos ./ (sum(Nnlos)*(Xnlos(end)-Xnlos(1)))*100;
53
54
55
56 figure;
57 bar(Xlos, Nlos, 'r');
58 hold on;
59 bar(Xnlos, Nnlos, 'b');
60
61 x_los = linspace(-pi,pi,100);
62 x_nlos = linspace(-pi,pi,100);
63
64 los_pdf = phaseLOSfunc(x_los);
65 nlos_pdf = phaseNLOSfunc*ones(size(x_nlos));

```

```

66
67 plot(x_los, los_pdf, 'r- ', 'LineWidth', 3);
68 plot(x_nlos, nlos_pdf, 'b- ', 'LineWidth', 3);
69
70 xlim([-pi pi]);
71 ylim([0 1.8]);
72
73 legend('LOS', 'NLOS');
74 title('Estimation of PDF for Phase');
75
76 %%
77
78 % 4.)
79
80 LOSPrior = length(LOS_train(1,:)) / (length(LOS_train(1,:)) +
                                         length(NLOS_train(1,:)));
81 NLOSPrior = length(NLOS_train(1,:)) / (length(LOS_train(1,:)) +
                                           length(NLOS_train(1,:)));
82
83 %ML Classification:
84
85 % first we try to classify the LOS_test data
86 pNLOS = ray_pdf_func(LOS_test(1,:)) * phaseNLOSfunc;
87 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, LOS_test(1,:)) .* phaseLOSfunc(LOS_test(2,:));
88
89 figure;
90 plot(LOS_test(1,pLOS>pNLOS), LOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
91 hold on;
92 plot(LOS_test(1,pLOS<=pNLOS), LOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
93
94
95 correct_classified = sum(pLOS>pNLOS);
96
97 %----
98 % now we try to classify the NLOS_test data
99 pNLOS = ray_pdf_func(NLOS_test(1,:)) * phaseNLOSfunc;
100 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, NLOS_test(1,:)) .*
        phaseLOSfunc(NLOS_test(2,:));
101
102 %figure;
103 plot(NLOS_test(1,pLOS>pNLOS), NLOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
104 plot(NLOS_test(1,pLOS<=pNLOS), NLOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
105
106
107 legend('as LOS classified', 'as NLOS classified');
108 title('ML-Classification(Amplitude and Phase): Scatter Plot of test data');
109 xlabel('x1');
110 ylabel('x2');
111
112 correct_classified = correct_classified + sum(pLOS<=pNLOS);
113
114 disp(['ML: Es wurden ', num2str(correct_classified/(length(LOS_train(1,:)) +
        length(NLOS_train(1,:))*100), '% korrekt
        klassifiziert']);
115
116 %%
117 %Bayes Classification-----
118 % first we try to classify the LOS_test data
119
120 pNLOS = ray_pdf_func(LOS_test(1,:)) * NLOSPrior * phaseNLOSfunc;
121 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, LOS_test(1,:))*LOSPrior .*
        phaseLOSfunc(LOS_test(2,:));
122
123 figure;
124 plot(LOS_test(1,pLOS>pNLOS), LOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
125 hold on;
126 plot(LOS_test(1,pLOS<=pNLOS), LOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
127
128 correct_classified = sum(pLOS>pNLOS);
129 %----
130 % now we try to classify the NLOS_test data
131 pNLOS = ray_pdf_func(NLOS_test(1,:)) * NLOSPrior * phaseNLOSfunc;
132 pLOS = interp1(x_rice, rice_pdf, NLOS_test(1,:))*LOSPrior .*
        phaseLOSfunc(NLOS_test(2,:));

```

```
133
134 %figure;
135 plot(NLOS_test(1,pLOS>pNLOS), NLOS_test(2,pLOS>pNLOS), 'r o');
136 plot(NLOS_test(1,pLOS<=pNLOS), NLOS_test(2,pLOS<=pNLOS), 'b o');
137
138
139 legend('as LOS classified', 'as NLOS classified');
140 title('Bayes-Classification(Amplitude and Phase): Scatter Plot of test data');
141 xlabel('x1');
142 ylabel('x2');
143
144 correct_classified = correct_classified + sum(pLOS<=pNLOS);
145 disp(['Bayes: Es wurden ', num2str(correct_classified/(length(LOS_train(1,:)) +
                                     length(NLOS_train(1,:))*100), '% korrekt
                                     klassifiziert']]);
```