1.1 Методом Гаусса решить системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для матрицы СЛАУ вычислить определитель и обратную матрицу.

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 30 \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -90 \\ -8x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$$

В матричной форме эта система выглядит как $A\overline{x} = \overline{b}$, $= \{a_{ij}\}, \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$. Задача имеет единственное решение, если определитель (детерминант) матрицы системы не равен нулю ($\|A\| \neq 0$ или $\det A \neq 0$). Метод Гаусса заключается в исключении из системы тех слагаемых, которые лежат в матрице A ниже главной диагонали ($a_{ij}, i > j$). Исключать слагаемые разрешается только с помощью трёх допустимых преобразований:

1) любую строку (уравнение) можно умножить (разделить) на любое число, кроме нуля;
2) любую строку можно прибавить к другой строке;
3) можно переставить любые две строки.

При каждом применении третьего преобразования определитель будет менять свой знак.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & -3 \\ 3 & 7 & -8 & 3 & 30 \\ 1 & -6 & 2 & 5 & -90 \\ -8 & -4 & -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(\widetilde{A}E) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -8 & 3 & 30 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 2 & 5 & -90 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & -1 & -1 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Операции над строками будем выписывать обозначая номера строк матрицы римскими цифрами:

1) II = II + 3 · I; III = III + I; IV = IV$-8\cdot$ I

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -20 & 3 & 21 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -2 & 5 & -93 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 31 & -1 & 36 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) III = III $-\frac{9}{2}\cdot$ II; IV = IV + 10·I

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -20 & 3 & 21 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 88 & -8.5 & -187.5 & -12.5 & -4.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -169 & 29 & 246 & 22 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) IV = IV + $\frac{169}{88}$·III

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -20 & 3 & 21 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 88 & -8.5 & -187.5 & -12.5 & -4.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.6761 & -114.0852 & -2.0057 & 1.358 & 1.9205 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Образуем единицы на главной диагонали. I = I/−1; II = II/−2; IV = IV/12.6761

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -1.5 & -10.5 & -1.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0966 & -2.1307 & -0.142 & -0.0511 & 0.0114 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -0.1582 & 0.1071 & 0.1515 & 0.0789 \end{pmatrix}$$

5) II = II + 1.5 · IV; III = III + 0.0966·IV; I – без изменений

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & -24 & -1.7373 & -0.3394 & 0.2273 & 0.1184 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3.001 & -0.1573 & -0.0408 & 0.026 & 0.0076 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -0.1582 & 0.1071 & 0.1515 & 0.0789 \end{pmatrix}$$

6) II = II-10· III; I = I -4·III

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 15.004 & -0.3708 & 0.1632 & -0.104 & -0.0304 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6.01 & -0.1643 & 0.0686 & 0.0327 & 0.0424 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3.001 & -0.1573 & -0.0408 & 0.026 & 0.0076 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -0.1582 & 0.1071 & 0.1515 & 0.0789 \end{pmatrix}$$

7) I = I -3·II

$$(\widetilde{A}E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3.026 & 0.1221 & -0.0426 & -0.0059 & -0.1576 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6.01 & -0.1643 & 0.0686 & 0.0327 & 0.0424 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3.001 & -0.1573 & -0.0408 & 0.026 & 0.0076 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -0.1582 & 0.1071 & 0.1515 & 0.0789 \end{pmatrix}$$

Выпишем образованные в пятом столбце корни:

$$\begin{cases} x_1 = -3.026 \approx -3 \\ x_2 = 6.01 \approx 6 \\ x_3 = -3.001 \approx -3 \\ x_4 = -9 \approx -9 \end{cases}$$

Определитель равен произведению коэффициентов 4 шага:

$$\Delta = -1 \cdot -2 \cdot 88 \cdot 12.6761 = 2230.9936 \approx 2231$$

Выпишем образованную из единичной – обратную матрицу системы:

$$A^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0.1221 & -0.0426 & -0.0059 & -0.1576 \\ -0.1643 & 0.0686 & 0.0327 & 0.0424 \\ -0.1573 & -0.0408 & 0.026 & 0.0076 \\ -0.1582 & 0.1071 & 0.1515 & 0.0789 \end{pmatrix}$$

Проверка (результат произведения матрицы системы и её обратной дают единичную):

$$(A \cdot A^{-1}) \sim \begin{pmatrix} 1.005 & 0.0013 & -0.0018 & 0.0003 \\ -0.0018 & 0.9997 & 0.0006 & -0.0001 \\ 0.0001 & -0.0001 & 1 & 0 \\ -0.0002 & -0.0003 & 0.0001 & 0.9999 \end{pmatrix}$$

Ответ: x_1 = -3, x_2 = 6, x_3 = -3, x_4 = -9

1.2 Методом прогонки решить СЛАУ.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4 \\ 7x_1 - 17x_2 - 8x_3 = 132 \\ -9x_2 + 19x_3 + 8x_4 = -59 \\ 7x_3 - 20x_4 + 4x_5 = -193 \\ -4x_4 + 12x_5 = -40 \end{cases}$$

Выпишем 3-х диагональную матрицу $A_{n,n+1}$.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -17 & -8 & 0 & 0 & 132 \\ 0 & -9 & 19 & 8 & 0 & -59 \\ 0 & 0 & 7 & -20 & 4 & -193 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & -40 \end{pmatrix}$$

$a_i = A_{i,i-1}; b_i = A_{i,i}; c_i = A_{i,i+1}; d_i = A_{i,n+1}; a_1 = 0; c_n = 0$

При проведении прямого хода метода прогонки вычисляются прогоночные коэффициенты A_i и B_i:

$A_i = \dfrac{-c_i}{b_i + a_i \cdot A_{i-1}}, B_i = \dfrac{d_i - a_i \cdot B_{i-1}}{b_i + a_i \cdot A_{i-1}}, A_0 = B_0 = 0$

В обратном ходе прогонки вычисляют все неизвестные: x_n, x_{n-1}, ... x_1 .

$x_n = B_n, x_i = A_i \cdot x_{i+1} + B_i$

Прямой ход.

$\underline{k=1} : a_1 = 0; b_1 = -1; c_1 = -1; d_1 = -4;$

$\mathbf{A_1} = \dfrac{-c_1}{b_1} = \dfrac{1}{-1} = -1;\ \mathbf{B_1} = \dfrac{d_1}{b_1} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

$\underline{k=2} : a_2 = 7; b_2 = -17; c_2 = -8; d_2 = 132;$

$\mathbf{A_2} = \dfrac{-c_2}{b_2 + a_2 \cdot A_1} = \dfrac{8}{-17 + 7 \cdot (-1)} = \dfrac{8}{-24} = -\dfrac{1}{3};\ \mathbf{B_2} = \dfrac{d_2 - a_2 \cdot B_1}{b_2 + a_2 \cdot A_1} = \dfrac{132 - 7 \cdot 4}{-17 + 7 \cdot (-1)} = \dfrac{104}{-24} = -\dfrac{13}{3}$

$\underline{k=3} : a_3 = -9; b_3 = 19; c_3 = 8; d_3 = -59;$

$\mathbf{A_3} = \dfrac{-c_3}{b_3 + a_3 \cdot A_2} = \dfrac{-8}{19 + (-9) \cdot (-\frac{1}{3})} = -\dfrac{4}{11};\ \mathbf{B_3} = \dfrac{d_3 - a_3 \cdot B_2}{b_3 + a_3 \cdot A_2} = \dfrac{-59 - (-9) \cdot (-\frac{13}{3})}{19 + (-9) \cdot (-\frac{1}{3})} = -\dfrac{49}{11};$

$\underline{k=4} : a_4 = 7; b_4 = -20; c_4 = 4; d_4 = -193;$

$\mathbf{A_4} = \dfrac{-c_4}{b_4 + a_4 \cdot A_3} = \dfrac{-4}{20 + 7 \cdot (-\frac{4}{11})} = \dfrac{11}{62};\ \mathbf{B_4} = \dfrac{d_4 - a_4 \cdot B_3}{b_4 + a_4 \cdot A_3} = \dfrac{-193 - 7 \cdot (-\frac{49}{11})}{-20 + 7 \cdot (-\frac{4}{11})} = \dfrac{445}{62};$

$\underline{k=5} : a_5 = -4; b_5 = 12; c_5 = 0; d_5 = -40;$

$\mathbf{A_5} = 0;\ \mathbf{B_5} = \dfrac{d_5 - a_5 \cdot B_4}{b_5 + a_5 \cdot A_4} = \dfrac{-40 - (-4) \cdot (-\frac{445}{62})}{12 + (-4) \cdot \frac{11}{62}} = -1;$

$\underline{x_5 = -1}$

Обратный ход.

$x_4 = A_4 \cdot x_5 + B_4 = \dfrac{11}{62} \cdot (-1) + \dfrac{445}{62} = 7\ x_3 = A_3 \cdot x_4 + B_3 = -\dfrac{4}{1} \cdot 7 + (-\dfrac{49}{11}) = -7$

$x_2 = A_2 \cdot x_3 + B_2 = -\dfrac{1}{3} \cdot -7 + (-\dfrac{13}{3}) = -2\ x_1 = A_1 \cdot x_2 + B_1 = -1 \cdot (-2) + 4 = 6$

Ответ: x_1 = 6; x_2 = -2; x_3 = -7; x_4 = 7; x_5 = -1

1.3 Методом простых итераций и методом Зейделя решить СЛАУ с точностью $\varepsilon = 0.01$.

$$\begin{cases} -22x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 96 \\ 3x_1 - 17x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -26 \\ 2x_1 + 6x_2 - 17x_3 + 5x_4 = 35 \\ -x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 23x_4 = -234 \end{cases}$$

Для решения системы $A\overline{x} = \overline{b}$ каким-либо образом преобразуем эту систему к виду (схеме) $\overline{x} = B\overline{x} + \overline{\gamma}$. По этой схеме можно построить итерационный процесс :

$$\overline{x}^{(n+1)} = B\overline{x}^{(n)} + \overline{\gamma}$$

В левой части стоит новый вектор неизвестных $\overline{x}^{(n+1)}$, а в правой части - старый вектор неизвестных $\overline{x}^{(n)}$. После вычисления нового вектора он превращается в старый и вычисляем следующий новый вектор. За начальный вектор $\overline{x}^{(1)}$ можно взять вектор $\overline{\gamma}$. Если хотя бы какая-нибудь норма матрицы B окажется меньше 1, то последовательность векторов $\overline{x}^{(n)}$ из будет сходиться к точному решению. Сходимость будет тем быстрее, чем меньше норма у матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} -22 & -2 & -6 & 6 \\ 3 & -17 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -17 & 5 \\ -1 & -8 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ \overline{\beta} = \begin{pmatrix} 96 \\ -26 \\ 35 \\ -234 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.0909x_2 - 0.2727x_3 + 0.2727x_4 - 4.3636 \\ x_2 = 0.1765x_1 - 0.1765x_3 + 0.4118x_4 + 1.5294 \\ x_3 = 0.1176x_1 + 0.3529x_2 + 0.2941x_4 - 2.0588 \\ x_4 = 0.0435x_1 + 0.3478x_2 - 0.3478x_3 - 10.1739 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.0909 & -0.2727 & 0.2727 \\ 0.1765 & 0 & -0.1765 & 0.4118 \\ 0.1176 & 0.3529 & 0 & 0.2941 \\ 0.0435 & 0.3478 & -0.3478 & 0 \end{pmatrix}; \ \| \overline{B} \|_1 = 0.7648; \ \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.3636 \\ 1.5294 \\ -2.0588 \\ -10.1739 \end{pmatrix};$$

Метод простых итераций: $\overline{x}^{(1)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(0)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -6.7156 \\ -3.067 \\ -5.0244 \\ -9.1157 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_1 = \frac{\|B\|_1}{1-\|B\|_1} \cdot \| \overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)} \|_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2.352 \\ -4.5964 \\ -2.9656 \\ 1.0582 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 4.5964 = 14.9461 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(2)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(1)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -5.2005 \\ -2.5229 \\ -6.6118 \\ -9.7852 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1.5151 \\ 0.5441 \\ -1.5874 \\ -0.6695 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 1.5874 = 5.1617 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(3)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(2)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.9997 \\ -2.2511 \\ -6.4385 \\ -8.978 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.2008 \\ 0.2718 \\ 0.1733 \\ 0.8072 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.8072 = 2.6248 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(4)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(3)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.8515 \\ -1.9138 \\ -6.0816 \\ -8.935 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.1482 \\ 0.3373 \\ 0.3569 \\ 0.043 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.3569 = 1.1605 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(5)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(4)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.9678 \\ -1.9329 \\ -5.9325 \\ -8.9354 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0.1163 \\ -0.0191 \\ 0.1491 \\ -0.0004 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.1491 = 0.4848 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(6)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(5)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -5.0068 \\ -1.9799 \\ -5.953 \\ -8.9989 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0.039 \\ -0.047 \\ -0.0205 \\ -0.0635 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.0635 = 0.2065 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(7)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(6)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -5.0142 \\ -2.0093 \\ -5.9929 \\ -9.0099 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0.0074 \\ -0.0294 \\ -0.0399 \\ -0.011 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.0399 = 0.1297 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(8)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(7)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -5.0037 \\ -2.0081 \\ -6.0074 \\ -9.0065 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.0105 \\ 0.0012 \\ -0.0145 \\ 0.0034 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.0145 = 0.0471 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(9)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(8)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.9989 \\ -2.0023 \\ -6.0047 \\ -9.0006 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.0048 \\ 0.0058 \\ 0.0027 \\ 0.0059 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.0059 = 0.0192 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(10)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(9)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.9986 \\ -1.9995 \\ -6.0004 \\ -8.9993 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.0003 \\ 0.0028 \\ 0.0043 \\ 0.0013 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.0043 = 0.0140 > \varepsilon$$

$$\overline{x}^{(11)} = \overline{B} \cdot \overline{x}^{(10)} + \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} -4.9996 \\ -1.9997 \\ -5.999 \\ -8.9998 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 3.2517 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0.001 \\ -0.0002 \\ 0.0014 \\ -0.0005 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3.2517 \cdot 0.0014 = 0.0046 < \varepsilon$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -4.9996 \approx -5 \\ x_2 = -1.9997 \approx -2 \\ x_3 = -5.999 \approx -6 \\ x_4 = -8.9998 \approx -9 \end{cases}$

Метод Зейделя:

Получим матрицу C из матрицы B обнулением элементов ниже главной диагонали:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.0909 & -0.2727 & 0.2727 \\ 0 & 0 & -0.1765 & 0.4118 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2941 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \| \overline{C} \|_1 = 0.6363.$$

$$x_1^{k+1} = B_{1,1}x_1^k + B_{1,2}x_2^k + \cdots + B_{1,n}x_n^k + \gamma_1$$
$$x_2^{k+1} = B_{2,1}x_1^{k+1} + B_{2,2}x_2^k + \cdots + B_{2,n}x_n^k + \gamma_2$$
$$x_3^{k+1} = B_{3,1}x_1^{k+1} + B_{3,2}x_2^{k+1} + B_{3,3}x_3^k + \cdots + B_{3,n}x_n^k + \gamma_3$$
$$\vdots$$
$$x_n^{k+1} = B_{n,1}x_1^{k+1} + B_{n,2}x_2^{k+1} + \cdots + B_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + B_{n,n}x_n^k + \gamma_n$$

1)

$$x_1^{(1)} = (-0.0909) \cdot 1.5294 - 0.2727 \cdot (-2.0588) + 0.2727 \cdot (-10.1739) - 4.3636 = -6.7156$$
$$x_2^{(1)} = 0.1765 \cdot (-6.7156) - 0.1765 \cdot (-2.0588) + 0.4118 \cdot (-10.1739) + 1.5294 = -3.4821$$
$$x_3^{(1)} = 0.1176 \cdot (-6.7156) + 0.3529 \cdot (-3.4821) + 0.2941 \cdot (-10.1739) - 2.0588 = -7.0695$$
$$x_4^{(1)} = 0.0435 \cdot (-6.7156) + 0.3478 \cdot (-3.4821) - 0.3478 \cdot (-7.0695) - 10.1739 = -9.2183$$
$$\varepsilon_1 = \frac{0.6363}{1 - 0.7648} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2.352 \\ -5.0115 \\ -5.0107 \\ 0.9556 \end{pmatrix} \right\|_1 = \mathbf{13.5579} > \varepsilon$$

2)

$$x_1^{(2)} = (-0.0909) \cdot (-3.4821) - 0.2727 \cdot (-7.0695) + 0.2727 \cdot (-9.2183) - 4.3636 = -4.6331$$
$$x_2^{(2)} = 0.1765 \cdot (-4.6331) - 0.1765 \cdot (-7.0695) + 0.4118 \cdot (-9.2183) + 1.5294 = -1.8367$$
$$x_3^{(2)} = 0.1176 \cdot (-4.6331) + 0.3529 \cdot (-1.8367) + 0.2941 \cdot (-9.2183) - 2.0588 = -5.9629$$
$$x_4^{(2)} = 0.0435 \cdot (-4.6331) + 0.3478 \cdot (-1.8367) - 0.3478 \cdot (-5.9629) - 10.1739 = -8.9403$$
$$\varepsilon_2 = 2.7054 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.0825 \\ 1.6454 \\ 1.1066 \\ 0.278 \end{pmatrix} \right\|_1 = \mathbf{5.6339} > \varepsilon$$

3)

$$x_1^{(3)} = (-0.0909) \cdot (-1.8367) - 0.2727 \cdot (-5.9629) + 0.2727 \cdot (-8.9403) - 4.3636 = -5.0086$$
$$x_2^{(3)} = 0.1765 \cdot (-5.0086) - 0.1765 \cdot (-5.9629) + 0.4118 \cdot (-8.9403) + 1.5294 = -1.9838$$
$$x_3^{(3)} = 0.1176 \cdot (-5.0086) + 0.3529 \cdot (-1.9838) + 0.2941 \cdot (-8.9403) - 2.0588 = -5.9772$$
$$x_4^{(3)} = 0.0435 \cdot (-5.0086) + 0.3478 \cdot (-1.9838) - 0.3478 \cdot (-5.9772) - 10.1739 = -9.0029$$
$$\varepsilon_3 = 2.7054 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0.3755 \\ -0.1471 \\ -0.0143 \\ -0.0626 \end{pmatrix} \right\|_1 = \mathbf{1.0159} > \varepsilon$$

4)

$$x_1^{(4)} = (-0.0909) \cdot (-1.9838) - 0.2727 \cdot (-5.9772) + 0.2727 \cdot (-9.0029) - 4.3636 = -5.0084$$
$$x_2^{(4)} = 0.1765 \cdot (-5.0084) - 0.1765 \cdot (-5.9772) + 0.4118 \cdot (-9.0029) + 1.5294 = -2.007$$
$$x_3^{(4)} = 0.1176 \cdot (-5.0084) + 0.3529 \cdot (-2.007) + 0.2941 \cdot (-9.0029) - 2.0588 = -6.0038$$
$$x_4^{(4)} = 0.0435 \cdot (-5.0084) + 0.3478 \cdot (-2.007) - 0.3478 \cdot (-6.0038) - 10.1739 = -9.0017$$
$$\varepsilon_4 = 2.7054 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.0002 \\ -0.0232 \\ -0.0266 \\ 0.0012 \end{pmatrix} \right\|_1 = \mathbf{0.0720} > \varepsilon$$

5)

$$x_1^{(5)} = (-0.0909) \cdot (-2.007) - 0.2727 \cdot (-6.0038) + 0.2727 \cdot (-9.0017) - 4.3636 = -4.9987$$
$$x_2^{(5)} = 0.1765 \cdot (-4.9987) - 0.1765 \cdot (-6.0038) + 0.4118 \cdot (-9.0017) + 1.5294 = -2.0001$$
$$x_3^{(5)} = 0.1176 \cdot (-4.9987) + 0.3529 \cdot (-2.0001) + 0.2941 \cdot (-9.0017) - 2.0588 = -5.9999$$
$$x_4^{(5)} = 0.0435 \cdot (-4.9987) + 0.3478 \cdot (-2.0001) - 0.3478 \cdot (-5.9999) - 10.1739 = -9.0002$$
$$\varepsilon_5 = 2.7054 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0.0097 \\ 0.0069 \\ 0.0039 \\ 0.0015 \end{pmatrix} \right\|_1 = \mathbf{0.0262} > \varepsilon$$

6)

$x_1^{(6)} = (-0.0909) \cdot (-2.0001) - 0.2727 \cdot (-5.9999) + 0.2727 \cdot (-9.0002) - 4.3636 = -5$

$x_2^{(6)} = 0.1765 \cdot (-5) - 0.1765 \cdot (-5.9999) + 0.4118 \cdot (-9.0002) + 1.5294 = -2.0004$

$x_3^{(6)} = 0.1176 \cdot (-5) + 0.3529 \cdot (-2.0004) + 0.2941 \cdot (-9.0002) - 2.0588 = -5.9997$

$x_4^{(6)} = 0.0435 \cdot (-5) + 0.3478 \cdot (-2.0004) - 0.3478 \cdot (-5.9997) - 10.1739 = -9.0004$

$$\varepsilon_6 = 2.7054 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0.0013 \\ -0.0003 \\ 0.0002 \\ -0.0002 \end{pmatrix} \right\|_1 = \mathbf{0.0035} < \varepsilon$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -2.0004 \approx -2 \\ x_3 = -5.9997 \approx -6 \\ x_4 = -9.0004 \approx -9 \end{cases}$

1.4 Используя метод вращений, найти собственные значения и собственные векторы симметричной матрицы с точностью $\varepsilon = 0.01$.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ -5 & 5 & 2 \\ -9 & 2 & 9 \end{pmatrix} = A_0$$

Рассмотрим задачу нахождения всех собственных чисел и векторов для вещественной симметричной матрицы порядка n. Будем применять к ней преобразование подобия, не изменяющее спектра (собственных чисел). Выберем наибольший по модулю элемент $a_{k,m}$ матрицы, не лежащий на главной диагонали, и преобразуем матрицу так. чтобы он стал нулём. Это преобразование представляет собой поворот двухмерной плоскости, проходящей через k-ю и m-ю оси координат на специально подобранный угол φ. Остальные элементы тоже как-то изменятся. Опять выберем наибольший по модулю элемент матрицы, не лежащий на главной диагонали и опять преобразуем (повернём) матрицу так. чтобы он стал нулём. Там. где до поворота стоял ноль, его может уже и не быть, но максимальные внедиагональные элементы будут быстро уменьшаться. Через некоторое число преобразований (поворотов-вращений) все внедиагональные элементы будут равняться почти нулю, тогда стоящие на главной диагонали числа и будут собственными числами исходной матрицы. Собственные вектора получают, перемножив все матрицы поворотов. Вычисленная таким образом матрица будет иметь своими столбцами собственные вектора.

1)

$\max\limits_{i<j}|a_{i,j}| = a_{1,3} = -9$

$$S_{1,3}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & 0 & -\sin(\varphi_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_1) & 0 & \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$\varphi_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \arctan\left(\dfrac{2 \cdot a_{1,3}}{a_{1,1} - a_{3,3}}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \arctan\left(\dfrac{2 \cdot (-9)}{(-7) - 9}\right) = 0.4221$

$\cos(\varphi_1) = 0.9122, \sin(\varphi_1) = 0.4097$

$\mathbf{A_1} = S_{1,3}^{(1)T} \cdot A_0 \cdot S_{1,3}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9122 & 0 & 0.4097 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.4097 & 0 & 0.9122 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ -5 & 5 & 2 \\ -9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9122 & 0 & -0.4097 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4097 & 0 & 0.9122 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -10.0727 & -3.7416 & -4.5225 \\ -5 & 5 & 2 \\ -5.3419 & 3.8729 & 11.8971 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9122 & 0 & -0.4097 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4097 & 0 & 0.9122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.0412 & -3.7416 & 0.0014 \\ -3.7416 & 5 & 3.8729 \\ 0.0014 & 3.8729 & 13.0411 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_1 = \sqrt{(-3.7416)^2 + 0.0014^2 + 3.8729^2} = \mathbf{5.3851} > \varepsilon$

2)

$\max\limits_{i<j}|a_{i,j}| = a_{2,3} = 3.8729$

$$S_{2,3}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2) & -\sin(\varphi_2) \\ 0 & \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$\varphi_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \arctan\left(\dfrac{2 \cdot a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{3,3}}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \arctan\left(\dfrac{2 \cdot 3.8729}{5 - 13.0411}\right) = -0.3833$

$\cos(\varphi_2) = 0.9274, \sin(\varphi_2) = -0.374$

$\mathbf{A_2} = S_{2,3}^{(2)T} \cdot A_1 \cdot S_{2,3}^{(2)} = \begin{pmatrix} -11.0412 & -3.4705 & -1.3981 \\ -3.4705 & 3.4378 & 0.0002 \\ -1.3981 & 0.0002 & 14.6023 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_2 = \sqrt{(-3.4705)^2 + (-1.3981)^2 + 0.0002^2} = \mathbf{3.7415} > \varepsilon$

3)

$\max\limits_{i<j}|a_{i,j}| = a_{1,2} = -3.4705$

$$S_{1,2}^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) & 0 \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot a_{1,2}}{a_{1,1} - a_{2,2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot (-3.4705)}{(-11.0412) - 3.4378}\right) = 0.2235$

$\cos(\varphi_3) = 0.9751, \sin(\varphi_3) = 0.2216$

$\mathbf{A_3} = S_{1,2}^{(3)T} \cdot A_2 \cdot S_{1,2}^{(3)} = \begin{pmatrix} -11.8292 & -0.0008 & -1.3632 \\ -0.0008 & 4.2264 & 0.31 \\ -1.3632 & 0.31 & 14.6023 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_3 = \sqrt{(-0.0008)^2 + (-1.3632)^2 + 0.31^2} = \mathbf{1.3980} > \varepsilon$

4)

$\max\limits_{i<j}|a_{i,j}| = a_{1,3} = -1.3632$

$$S_{1,3}^{(4)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_4) & 0 & -\sin(\varphi_4) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_4) & 0 & \cos(\varphi_4) \end{pmatrix}$$

$\varphi_4 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot a_{1,3}}{a_{1,1} - a_{3,3}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot (-1.3632)}{(-11.8292) - 14.6023}\right) = 0.0514$

$\cos(\varphi_4) = 0.9987, \sin(\varphi_4) = 0.0514$

$\mathbf{A_4} = S_{1,3}^{(4)T} \cdot A_3 \cdot S_{1,3}^{(4)} = \begin{pmatrix} -11.8999 & 0.0151 & 0.0007 \\ 0.0151 & 4.2264 & 0.3096 \\ 0.0008 & 0.3096 & 14.6731 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_4 = \sqrt{0.0151^2 + 0.0007^2 + 0.3096^2} = \mathbf{0.3100} > \varepsilon$

5)

$\max\limits_{i<j}|a_{i,j}| = a_{2,3} = 0.3096$

$$S_{2,3}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_5) & -\sin(\varphi_5) \\ 0 & \sin(\varphi_5) & \cos(\varphi_5) \end{pmatrix}$$

$\varphi_5 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{3,3}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot 0.3096}{4.2264 - 14.6731}\right) = -0.0296$

$\cos(\varphi_5) = 0.9996, \sin(\varphi_5) = -0.0296$

$\mathbf{A_5} = S_{2,3}^{(5)T} \cdot A_4 \cdot S_{2,3}^{(5)} = \begin{pmatrix} -11.8999 & 0.0151 & 0.0011 \\ 0.0151 & 4.2175 & 0 \\ 0.0012 & 0 & 14.6834 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_5 = \sqrt{0.0151^2 + 0.0011^2 + 0^2} = \mathbf{0.0151} > \varepsilon$

6)

$\max\limits_{i<j}|a_{i,j}| = a_{1,2} = 0.0151$

$$S_{1,2}^{(6)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_6) & -\sin(\varphi_6) & 0 \\ \sin(\varphi_6) & \cos(\varphi_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi_6 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot a_{1,2}}{a_{1,1} - a_{2,2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot 0.0151}{(-11.8999) - 4.2175}\right) = -0.0009$

$\cos(\varphi_6) = 1, \sin(\varphi_6) = -0.0009$

$\mathbf{A_6} = S_{1,2}^{(6)T} \cdot A_5 \cdot S_{1,2}^{(6)} = \begin{pmatrix} -11.8999 & 0.0006 & 0.0011 \\ 0.0006 & 4.2175 & 0 \\ 0.0012 & 0 & 14.6834 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_6 = \sqrt{0.0006^2 + 0.0011^2 + 0^2} = \mathbf{0.0013} < \varepsilon$

$S = S_{1,3}^{(1)} \cdot S_{2,3}^{(2)} \cdot S_{1,2}^{(3)} \cdot S_{1,3}^{(4)} \cdot S_{2,3}^{(5)} \cdot S_{1,2}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.9027 & -0.0393 & -0.4284 \\ 0.2237 & 0.8934 & 0.3896 \\ 0.3674 & -0.4475 & 0.8154 \end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_1 = -11.8999, \lambda_2 = 4.2175, \lambda_3 = 14.6834;$

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9027 \\ 0.2237 \\ 0.3674 \end{pmatrix}, \overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.0393 \\ 0.8934 \\ -0.4475 \end{pmatrix}, \overline{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.4284 \\ 0.3896 \\ 0.8154 \end{pmatrix}.$$

1.5 Используя степенной метод оценить спектральный радиус с точностью $\varepsilon = 0.01$.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ -5 & 5 & 2 \\ -9 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Пусть дана матрица A у которой собственные числа (спектр) удовлетворяют соотношению $\|\lambda_1\| > \|\lambda_2\| \geq \|\lambda_3\| \geq \cdots \geq \|\lambda_n\|$. Построим последовательность векторов:

$$\overline{x}^{(k+1)} = A \cdot \overline{y}^{(k)}, \overline{y}^{(k)} = \frac{\overline{x}^{(k)}}{\| \overline{x}^{(k)} \|_1}$$

За начальный вектор $\overline{y}^{(0)}$ можно взять , например, единичным вектор e = {1;1;...;1}. Под нормой будем понимать первую ному, т.е. чтобы вычислить вектор $\overline{y}$, нужно в векторе $\overline{x}$ найти максимальную по модулю компоненту и разделить все компоненты вектора $\overline{x}$ на неё. Эта компонента станет единицей, а остальные станут по модулю меньше единицы. Такой алгоритм позволяет найти спектральный радиус $\rho = \|\lambda_1\|$ как предел последовательности максимальных по модулю компонент векторов $\overline{x}^{(n)}$. Пределом последовательности векторов $\overline{y}$ будет собственный вектор, соответствующий λ_1.

1)

$$\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \| \overline{x}^{(0)} \| = 1;\ \overline{y}^{(0)} = \frac{\overline{x}^{(0)}}{\| \overline{x}^{(0)} \|_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}^{(1)} = A \cdot \overline{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ -5 & 5 & 2 \\ -9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 = |21 - 1| = 20 > \varepsilon$

2)

$$\| \overline{x}^{(1)} \| = 21;\ \overline{y}^{(1)} = \frac{\overline{x}^{(1)}}{\| \overline{x}^{(1)} \|_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.0952 \\ 0.0952 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}^{(2)} = A \cdot \overline{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ -5 & 5 & 2 \\ -9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0.0952 \\ 0.0952 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.6672 \\ 5.6664 \\ 10.0472 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_2 = |10.0472 - 21| = 10.9528 > \varepsilon$ Продолжим вычисления, результаты выпишем в таблицу:

вектор	$x_1(y_1)$	$x_2(y_2)$	$x_3(y_3)$	$\| x^{(n)} \|_1$
$\overline{x}^{(3)}$	-15.7687	1.9995	5.0511	15.7687
$\overline{y}^{(3)}$	0.5641	0.564	1	
$\overline{x}^{(4)}$	3.4833	6.2746	12.1363	12.1363
$\overline{y}^{(4)}$	-1	0.1268	0.3203	
$\overline{x}^{(5)}$	-13.594	3.15	7.451	13.594
$\overline{y}^{(5)}$	0.287	0.517	1	
$\overline{x}^{(6)}$	0.9086	7.2547	14.3963	14.3963
$\overline{y}^{(6)}$	-1	0.2317	0.5481	

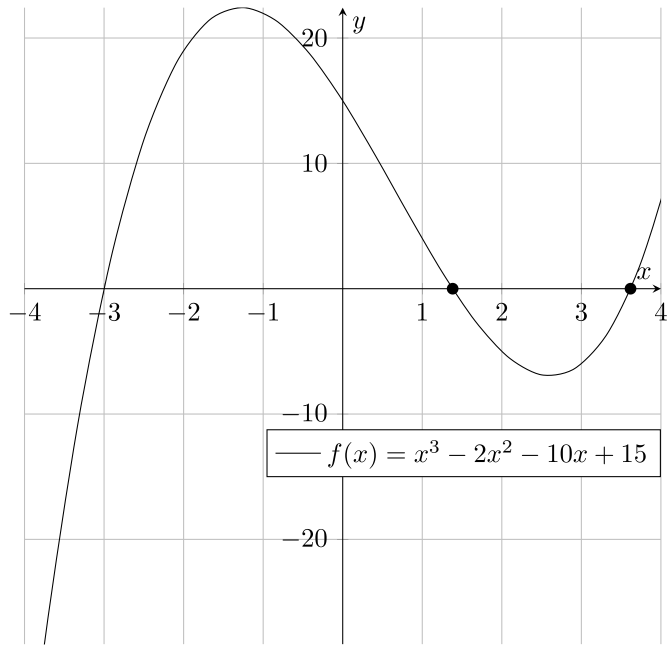
Вектор	$x_1(y_1)$	$x_2(y_2)$	$x_3(y_3)$	$\parallel x^{(n)} \parallel_1$
$\overline{x}^{(7)}$	-11.9612	4.204	9.4399	11.9612
$\overline{y}^{(7)}$	0.0631	0.5039	1	
$\overline{x}^{(8)}$	-1.8603	8.3359	16.8058	16.8058
$\overline{y}^{(8)}$	-1	0.3515	0.7892	
$\overline{x}^{(9)}$	-10.7051	5.0335	10.9883	10.9883
$\overline{y}^{(9)}$	-0.1107	0.496	1	
$\overline{x}^{(10)}$	-4.4711	9.1615	18.684	18.684
$\overline{y}^{(10)}$	-0.9742	0.4581	1	
$\overline{x}^{(11)}$	-9.7764	5.648	12.1343	12.1343
$\overline{y}^{(11)}$	-0.2393	0.4903	1	
$\overline{x}^{(12)}$	-5.6876	8.356	17.1823	17.1823
$\overline{y}^{(12)}$	-0.8057	0.4655	1	
$\overline{x}^{(13)}$	-9.1145	6.0865	12.9516	12.9516
$\overline{y}^{(13)}$	-0.331	0.4863	1	
$\overline{x}^{(14)}$	-6.4236	7.868	16.2731	16.2731
$\overline{y}^{(14)}$	-0.7037	0.4699	1	
$\overline{x}^{(15)}$	-8.6546	6.391	13.5193	13.5193
$\overline{y}^{(15)}$	-0.3947	0.4835	1	
$\overline{x}^{(16)}$	-6.8821	7.5645	15.7072	15.7072
$\overline{y}^{(16)}$	-0.6402	0.4727	1	
$\overline{x}^{(17)}$	-8.3413	6.5985	13.9061	13.9061
$\overline{y}^{(17)}$	-0.4381	0.4816	1	
$\overline{x}^{(18)}$	-7.1739	7.3715	15.3472	15.3472
$\overline{y}^{(18)}$	-0.5998	0.4745	1	
$\overline{x}^{(19)}$	-8.1297	6.7385	14.1672	14.1672
$\overline{y}^{(19)}$	-0.4674	0.4803	1	
$\overline{x}^{(20)}$	-7.3614	7.247	15.1154	15.1154
$\overline{y}^{(20)}$	-0.5738	0.4756	1	
$\overline{x}^{(21)}$	-7.988	6.832	14.3418	14.3418
$\overline{y}^{(21)}$	-0.487	0.4794	1	
$\overline{x}^{(22)}$	-7.483	7.167	14.9658	14.9658
$\overline{y}^{(22)}$	-0.557	0.4764	1	
$\overline{x}^{(23)}$	-7.8945	6.8945	14.4578	14.4578
$\overline{y}^{(23)}$	-0.5	0.4789	1	
$\overline{x}^{(24)}$	-7.5625	7.1145	14.8678	14.8678
$\overline{y}^{(24)}$	-0.546	0.4769	1	
$\overline{x}^{(25)}$	-7.8323	6.9355	14.5344	14.5344
$\overline{y}^{(25)}$	-0.5086	0.4785	1	
$\overline{x}^{(26)}$	-7.6137	7.0805	14.8045	14.8045
$\overline{y}^{(26)}$	-0.5389	0.4772	1	
$\overline{x}^{(27)}$	-7.7914	6.963	14.5853	14.5853
$\overline{y}^{(27)}$	-0.5143	0.4783	1	
$\overline{x}^{(28)}$	-7.6476	7.058	14.7626	14.7626
$\overline{y}^{(28)}$	-0.5342	0.4774	1	
$\overline{x}^{(29)}$	-7.7645	6.9805	14.6182	14.6182
$\overline{y}^{(29)}$	-0.518	0.4781	1	
$\overline{x}^{(30)}$	-7.6691	7.0435	14.7358	14.7358
$\overline{y}^{(30)}$	-0.5312	0.4775	1	
$\overline{x}^{(31)}$	-7.7472	6.992	14.6396	14.6396
$\overline{y}^{(31)}$	-0.5204	0.478	1	

вектор	$x_1(y_1)$	$x_2(y_2)$	$x_3(y_3)$	$\parallel x^{(n)} \parallel_1$
$\overline{x}^{(32)}$	-7.6836	7.034	14.718	14.718
$\overline{y}^{(32)}$	-0.5292	0.4776	1	
$\overline{x}^{(33)}$	-7.7348	7	14.6547	14.6547
$\overline{y}^{(33)}$	-0.5221	0.4779	1	
$\overline{x}^{(34)}$	-7.6939	7.0275	14.7056	14.7056
$\overline{y}^{(34)}$	-0.5278	0.4777	1	
$\overline{x}^{(35)}$	-7.7271	7.0055	14.6646	14.6646
$\overline{y}^{(35)}$	-0.5232	0.4779	1	
$\overline{x}^{(36)}$	-7.7002	7.023	14.6975	14.6975
$\overline{y}^{(36)}$	-0.5269	0.4777	1	
$\overline{x}^{(37)}$	-7.7217	7.0085	14.6707	14.6707
$\overline{y}^{(37)}$	-0.5239	0.4778	1	
$\overline{x}^{(38)}$	-7.7044	7.02	14.6921	14.6921
$\overline{y}^{(38)}$	-0.5263	0.4777	1	
$\overline{x}^{(39)}$	-7.7182	7.011	14.6752	14.6752
$\overline{y}^{(39)}$	-0.5244	0.4778	1	
$\overline{x}^{(40)}$	-7.7072	7.018	14.6885	14.6885
$\overline{y}^{(40)}$	-0.5259	0.4777	1	
$\overline{x}^{(41)}$	-7.7161	7.0125	14.6779	14.6779
$\overline{y}^{(41)}$	-0.5247	0.4778	1	
$\overline{x}^{(42)}$	-7.7091	7.0175	14.6869	14.6869
$\overline{y}^{(42)}$	-0.5257	0.4778	1	

Ответ: $\rho(A) = 14.6869$

2.1 Методом простой итерации и Ньютона найти положительный корень нелинейного уравнения; начальное приближение определить графически .

$$x^3 - 2x^2 - 10x + 15 = 0$$



$f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x + 15$

$f'(x) = 2x^2 - 4x - 10$

$f''(x) = 6x - 4$

Графически определены два положительных корня в областях: 1 < x_1 < 2; 3 < x_2 < 4

Метод Ньютона Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцирована. Пусть в окрестности корня уравнения $f(x) = 0$, в некоторой точке a_0, выполняется соотношение $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$. Из точки $A(a_0 : f(a_0))$ проведём касательную к графику функции $y = f(x)$. Она пересечёт ось OX в точке a_1 : $a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$. Из точки $A_1(a_1; f(a_1))$ проведём касательную к графику функции $y = f(x)$. Она пересечёт ось OX в точке $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$. Таким образом, можно получить бесконечную последовательность точек a_n, которые быстро будут приближаться к корню.

Из условия $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ выберем начальную точку: x_0 .

$f(1) = 4; f''(1) = 2; f(3) = -6; f''(3) = 14;$

$f(2) = -5; f''(2) = 8; f(4) = 7; f''(4) = 20.$

x_0 = 1; $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \dfrac{4}{-11} = 1.3636$

$\varepsilon_1 = |1.3636 - 1| = 0.3636 > 0.01$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3636 - \dfrac{0.1807}{-9.8762} = 1.3819$

$\varepsilon_2 = |1.3819 - 1.3636| = 0.0183 > 0.01$

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.3819 - \dfrac{0.0006}{-9.7987} = 1.382$

$\varepsilon_3 = |1.382 - 1.3819| = 0.0001 < 0.01$

Ответ: $x = x_3 = 1.382$.

Метод простой итерации

Пусть уравнение $f(x)=0$ удалось преобразовать к равносильному уравнению $x=\varphi(x)$, функция $\varphi(x)$ которого обладает свойством: в окрестности корня x: $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ то итерационный процесс $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ будет сходиться к корню x. уравнения $f(x)=0$. Причём, сходимость будет тем быстрее, чем меньше q. Величины $x_n - x$ будут убывать не медленнее бесконечно-убывающей прогрессии со знаменателем q.

Преобразуем $f(x)$ к $x=\varphi(x)$: $x=2+\dfrac{10}{x}-\dfrac{15}{x^2}$; $\varphi'(x)=\dfrac{30}{x^3}-\dfrac{10}{x^2}$

Из условия $\varphi'(x_0)<1$ выберем начальную точку: x_0 .

$\varphi'(1)=20; \varphi'(2)=1.25; \varphi'(4)=-0.1563$. При x_0 = 4 имеется сходимость, $q=|\varphi'(x_0)|=0.1563$.

$$\varepsilon=\frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon=\frac{1-0.1563}{0.1563}\cdot 0.01=0.054$$

$$x_1=\varphi(x_0)=2+\frac{10}{4}-\frac{15}{16}=3.5625$$

$$\varepsilon_1=|3.5625-4|=0.4375>0.054$$

$$x_2=\varphi(x_1)=2+\frac{10}{3.5625}-\frac{15}{12.6914}=3.6251$$

$$\varepsilon_2=|3.6251-3.5625|=0.0626>0.054$$

$$x_3=\varphi(x_2)=2+\frac{10}{3.6251}-\frac{15}{13.1414}=3.6171$$

$$\varepsilon_3=|3.6171-3.6251|=0.008<0.054$$

Ответ: $x=x_3=3.6171$.

2.2. Методом Ньютона решить систему нелинейных уравнений (при наличии нескольких решений найти то из них, в котором значения неизвестных являются положительными), начальное приближение определить графически .

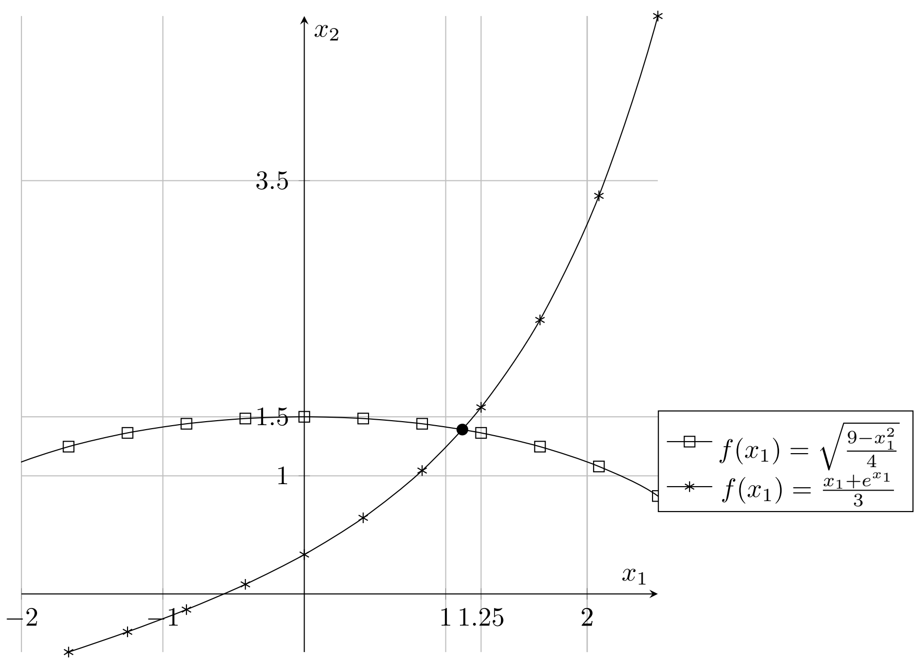
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{9/4} - 1 = 0 \\ 3x_2 - e^{x_1} - x_1 = 0 \end{cases}$$

Метод Ньютона решения систем сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений, полученных путем линеаризации системы нелинейных уравнений. Для k-го приближения неизвестных ищется приближение (k+1) через приращение Δx^k :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{(x_k;y_k)} \cdot \Delta x_{k+1} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_{(x_k;y_k)} \cdot \Delta y_{k+1} + f_1(x_k;y_k) = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_{(x_k;y_k)} \cdot \Delta x_{k+1} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_{(x_k;y_k)} \cdot \Delta y_{k+1} + f_2(x_k;y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + \Delta y_{k+1} \end{cases}$$

Для каждой итерации должно выполняться условие: $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(y_k)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(y_k)}{\partial y} \end{pmatrix}; |J| \neq 0$



$$1 < x_1 < 1.25; 1 < x_2 < 1.5$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{9}; \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{8x_2}{9};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -e^{x_1} - 1; \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 3.$$

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 1.$$

1)

$J = \begin{pmatrix} 0.2222 & 0.8889 \\ -3.7183 & 3 \end{pmatrix}; \Delta J = 3.9718 \neq 0$

$f_1(1;1) = -0.4444; f_2(1;1) = -0.7183$

$F = \begin{pmatrix} -0.4444 \\ -0.7183 \end{pmatrix}; \parallel F \parallel_1 = 0.7183$

$$\begin{cases} 0.2222\Delta x_1 + 0.8889\Delta x_2 + (-0.4444) = 0 \\ -3.7183\Delta x_1 + 3\Delta x_2 + (-0.7183) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x_1^1 = 0.175; \Delta x_2^1 = 0.4562.$$

$$x_1^1 = x_1^0 + \Delta x_1^1 = 0.175 + 1 = 1.175; x_2^1 = x_2^0 + \Delta x_2^1 = 0.4562 + 1 = 1.4562.$$

$$|\Delta x_1| > \varepsilon; |\Delta x_2| > \varepsilon; \parallel F \parallel_1 > \varepsilon;$$

2)

$J = \begin{pmatrix} 0.2611 & 1.2944 \\ -4.2381 & 3 \end{pmatrix}; \Delta J = 6.2691 \neq 0$

$f_1(1.175; 1.4562) = 0.0959; f_2(1.175; 1.4562) = -0.0445$

$F = \begin{pmatrix} 0.0959 \\ -0.0445 \end{pmatrix}; \parallel F \parallel_1 = 0.0959$

$$\begin{cases} 0.2611\Delta x_1 + 1.2944\Delta x_2 + 0.0959 = 0 \\ -4.2381\Delta x_1 + 3\Delta x_2 + (-0.0445) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x_1^2 = -0.055; \Delta x_2^2 = -0.063.$$

$$x_1^2 = x_1^1 + \Delta x_1^2 = -0.055 + 1.175 = 1.12; x_2^2 = x_2^1 + \Delta x_2^2 = -0.063 + 1.4562 = 1.3932.$$

$$|\Delta x_1| < \varepsilon; |\Delta x_2| < \varepsilon; \parallel F \parallel_1 > \varepsilon;$$

3)

$J = \begin{pmatrix} 0.2489 & 1.2384 \\ -4.0649 & 3 \end{pmatrix}; \Delta J = 5.7807 \neq 0$

$f_1(1.12; 1.3932) = 0.002; f_2(1.12; 1.3932) = -0.0053$

$F = \begin{pmatrix} 0.002 \\ -0.0053 \end{pmatrix}; \parallel F \parallel_1 = 0.0053$

$$\begin{cases} 0.2489\Delta x_1 + 1.2384\Delta x_2 + 0.002 = 0 \\ -4.0649\Delta x_1 + 3\Delta x_2 + (-0.0053) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x_1^3 = -0.0021; \Delta x_2^3 = -0.0012.$$

$$x_1^3 = x_1^2 + \Delta x_1^3 = -0.0021 + 1.12 = 1.1179; x_2^3 = x_2^2 + \Delta x_2^3 = -0.0012 + 1.3932 = 1.392.$$

$$|\Delta x_1| < \varepsilon; |\Delta x_2| < \varepsilon; \parallel F \parallel_1 < \varepsilon;$$

Ответ: $x_1 = x_1^3 = 1.1179; x_2 = x_2^3 = 1.392$.

3.1. Используя таблицу значений Y_i функции $y = f(x)$, вычисленных в точках X_i, i = 0,...,3 построить интерполяционные многочлены Лагранжа, проходящие через точки [X_i, Y_i]. Вычислить значение погрешности интерполяции в точке X* .

$$f(x) = y = \tan(x) + x$$
$$X^* = \frac{3\pi}{16}$$

X_i	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$
Y_i	0	0.8069	1.7854	3.5923

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ состоит из линейной комбинации многочленов n-ой степени $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})}; \quad L(x) = \sum_{i=0}^{n} Y_i \cdot L_i(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{8})(x-\frac{2\pi}{8})(x-\frac{3\pi}{8})}{(-\frac{\pi}{8})(-\frac{2\pi}{8})(-\frac{3\pi}{8})} = \frac{(\frac{\pi^2}{32} - \frac{3\pi x}{8} + x^2)(x-\frac{3\pi}{8})}{-\frac{3\pi^3}{256}} = \frac{-\frac{3\pi^3}{256} + \frac{11\pi^2 x}{64} - \frac{3\pi x^2}{4} + x^3}{-\frac{3\pi^3}{256}} = 1 - \frac{44x}{3\pi} + \frac{64x^2}{\pi^2} - \frac{256x^3}{3\pi^3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{2\pi}{8})(x-\frac{3\pi}{8})}{\frac{\pi}{8}(\frac{\pi}{8}-\frac{2\pi}{8})(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8})} = \frac{\frac{3\pi^2 x}{32} - \frac{5\pi x^2}{8} + x^3}{\frac{\pi^3}{256}} = \frac{24x}{\pi} - \frac{160x^2}{\pi^2} + \frac{256x^3}{\pi^3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{8})(x-\frac{3\pi}{8})}{\frac{2\pi}{8}(\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{8})(\frac{2\pi}{8}-\frac{3\pi}{8})} = \frac{\frac{3\pi^2 x}{64} - \frac{\pi x^2}{2} + x^3}{-\frac{\pi^3}{256}} = -\frac{12x}{\pi} + \frac{128x^2}{\pi^2} - \frac{256x^3}{\pi^3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{8})(x-\frac{2\pi}{8})}{\frac{3\pi}{8}(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8})(\frac{3Pi}{8}-\frac{2\pi}{8})} = \frac{\frac{\pi^2 x}{32} - \frac{3\pi x^2}{8} + x^3}{\frac{3\pi^3}{256}} = \frac{8x}{3\pi} - \frac{32x^2}{\pi^2} + \frac{256x^3}{3\pi^3}$$

$$L = 0 + 0.8069(\frac{24x}{\pi} - \frac{160x^2}{\pi^2} + \frac{256x^3}{\pi^3}) + 1.7854(-\frac{12x}{\pi} + \frac{128x^2}{\pi^2} - \frac{256x^3}{\pi^3}) + 3.5923(\frac{8x}{3\pi} - \frac{32x^2}{\pi^2} + \frac{256x^3}{3\pi^3}) = (6.1643x - 13.081x^2 + 6.6621x^3) + (-6.8197x + 23.1551x^2 - 14.741x^3) + (3.0492x - 11.6472x^2 + 9.8865x^3)$$

$$L = 2.3938x - 1.5731x^2 + 1.8076x^3$$

$$f(X^*) = f(\frac{3\pi}{16}) = 1.2572$$

$$L(X^*) = L(\frac{3\pi}{16}) = 1.2337$$

$$\varepsilon(X^*) = f(X^*) - L(X^*) = 1.2572 - 1.2337 = 0.0236.$$

Ответ: $L = \underline{1.8076x^3 - 1.5731x^2 + 2.3938x}$, $\varepsilon(X^*) = \underline{0.0236}$.

3.2. Построить кубический сплайн для функции, заданной в узлах интерполяции, предполагая, что сплайн имеет нулевую кривизну при x = x_0 и x = x_4. Вычислить значение функции в точке x = X* .

i	0	1	2	3	4
X_i	0	0.9	1.8	2.7	3.6
f_i	0	0.72235	1.5609	2.8459	7.7275

X* = 1.5; h = 0.9

Сплайном степени M дефекта r называется M-r раз непрерывна деференцируемая функция, которая на каждом отрезке $[x_{i-1};x_i]$ $i=1,2,\dots 4$ представляет собой многочлен степени M. На каждом промежутке $x\in[x_{i-1};x_i]$ уравнение сплайна имеет вид:

$$S_i(x)=m_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+m_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+(y_i-m_i\frac{h_i^2}{6})\frac{x-x_{i-1}}{h_i}+(y_{i-1}-m_{i-1}\frac{h_i^2}{6})\frac{x_i-x}{h_i}$$

Для нахождения коэффициентов сплайнов:

$$m_i=\frac{h}{6}m_{i-1}+\frac{2}{3}h\cdot m_i+\frac{h}{6}m_{i+1}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h}$$

$$\begin{matrix} i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \end{matrix}\begin{cases} m_0=0 \\ 0+\frac{2}{3}\cdot 0.9m_1+\frac{0.9}{6}m_2=\frac{1.5609\cdot 2\cdot 0.72235+0}{0.9}=0.129 \\ \frac{0.9}{6}m_1+\frac{2}{3}\cdot 0.9m_2+\frac{0.9}{6}m_3=\frac{2.8459-2\cdot 1.5609}{0.9}=-0.3066 \\ 0.15m_2+0.6m_3=\frac{7.7275-2\cdot 2.8459}{0.9}=2.2619 \\ m_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0=0 \\ 0+0.6m_1+0.15m_2=0.129 \\ 0.15m_1+0.6m_2+0.15m_3=-0.3066 \\ 0.15m_2+0.6m_3=2.2619 \\ m_4=0 \end{cases}$$

Решение методом прогонки:

$\underline{k=1}: a_1=0; b_1=0.6; c_1=0.15; d_1=0.129;$

$$\mathbf{A_1}=\frac{-c_1}{b_1}=\frac{-0.15}{0.6}=-0.25;\ \mathbf{B_1}=\frac{d_1}{b_1}=\frac{0.129}{0.6}=0.215$$

$\underline{k=2}: a_2=0.15; b_2=0.6; c_2=0.15; d_2=-0.3066;$

$$\mathbf{A_2}=\frac{-c_2}{b_2+a_2\cdot A_1}=\frac{-0.15}{0.6+0.15\cdot(-0.25)}=-0.2667;\ \mathbf{B_2}=\frac{d_2-a_2\cdot B_1}{b_2+a_2\cdot A_1}=-0.6024$$

$\underline{k=3}: a_3=0.15; b_3=0.6; c_3=0; d_3=2.2619;$

$$\mathbf{A_3}=\frac{-c_3}{b_3+a_3\cdot A_2}=0;\ \mathbf{B_3}=\frac{d_3-a_3\cdot B_2}{b_3+a_3\cdot A_2}=\frac{2.2619-0.15\cdot(-0.6024)}{0.6+0.15\cdot(-0.2667)}=4.2005$$

$$\begin{cases} m_4=0; \\ m_3=B_3=4.2005; \\ m_2=A_2\cdot m_3+B_2=-1.7227; \\ m_1=A_1\cdot m_2+B_1=0.6457; \\ m_0=0. \end{cases}$$

$$S_1(x) = 0.6457 \cdot \frac{(x-0)^3}{6 \cdot 0.9} + 0 \cdot \frac{(0.9-x)^3}{6 \cdot 0.9} + (0.72235 - 0.6457 \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{x-0}{0.9} + (0 - 0 \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{0.9-x}{0.9} =$$
$$(0.1196x^3) + (0) + (0.7058x) + (0) = 0.1196x^3 + 0.7058x$$

для $x \in [0, 0.9]$

$$S_2(x) = (-1.7227) \cdot \frac{(x-0.9)^3}{6 \cdot 0.9} + 0.6457 \cdot \frac{(1.8-x)^3}{6 \cdot 0.9} + (1.5609 - (-1.7227) \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{x-0.9}{0.9} + (0.72235 -$$
$$0.6457 \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{1.8-x}{0.9} = (-0.3190x^3 + 0.8613x^2 - 0.7752x + 0.2326) + (-0.1196x^3 + 0.6457x^2 - 1.162x +$$
$$0.6974) + (1.993x - 1.793) + (1.270 - 0.7058x) = -0.4386x^3 + 1.507x^2 - 0.6505x + 0.4068$$

для $x \in [0.9, 1.8]$

$$S_3(x) = 4.2005 \cdot \frac{(x-1.8)^3}{6 \cdot 0.9} + (-1.7227) \cdot \frac{(2.7-x)^3}{6 \cdot 0.9} + (2.8459 - 4.2005 \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{x-1.8}{0.9} + (1.5609 - (-1.7227) \cdot$$
$$\frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{2.7-x}{0.9} = (0.7779x^3 - 4.200x^2 + 7.561x - 4.537) + (0.3190x^3 - 2.584x^2 + 6.977x - 6.279) + (2.532x -$$
$$4.558) + (5.380 - 1.993x) = 1.097x^3 - 6.785x^2 + 15.08x - 9.993$$

для $x \in [1.8, 2.7]$

$$S_4(x) = 0 \cdot \frac{(x-2.7)^3}{6 \cdot 0.9} + 4.2005 \cdot \frac{(3.6-x)^3}{6 \cdot 0.9} + (7.7275 - 0 \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{x-2.7}{0.9} + (2.8459 - 4.2005 \cdot \frac{0.9^2}{6}) \cdot \frac{3.6-x}{0.9} =$$
$$(0) + (-0.7779x^3 + 8.401x^2 - 30.24x + 36.29) + (8.586x - 23.18) + (9.115 - 2.532x) = -0.7779x^3 + 8.401x^2 -$$
$$24.19x + 22.23$$

для $x \in [2.7, 3.6]$

$S(X^*) = S_2(X^* = 1.5)$

$S_2(1.5) = -0.4386 \cdot 1.5^3 + 1.507 \cdot 1.5^2 - 0.6505 \cdot 1.5 + 0.4068 = 1.3415$

Ответ: $$\begin{cases} S_1 = 0.1196x^3 + 0.7058x \\ S_2 = -0.4386x^3 + 1.507x^2 - 0.6505x + 0.4068 \\ S_3 = 1.097x^3 - 6.785x^2 + 15.08x - 9.993 \\ S_4 = -0.7779x^3 + 8.401x^2 - 24.19x + 22.23 \\ S(X^*) = 1.3415 \end{cases}$$

3.3. Для таблично заданной функции путем решения нормальной системы МНК найти приближающие многочлены а) 1-ой и б) 2-ой степени. Для каждого из приближающих многочленов вычислить сумму квадратов ошибок. Построить графики приближаемой функции и приближающих многочленов.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0.9	0	0.9	1.8	2.7	3.6
y_i	-1.2689	0	1.2689	2.6541	4.4856	9.9138

n = 6

МНК основан на минимизации суммы квадратов отклонений (среднеквадратичной невязке), т.е. если аппроксимирующая функция $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ и

$$S(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2$$

тогда

$$S_{\text{min}} => \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \ldots \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0;$$

Тогда для

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

чтобы

$$S = \sum_{i=0}^{n} (ax^2 + bx + c - y_i)^2 = \min$$

Для нахождения a,b,c получим:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax^2 + bx + c - y_i) \cdot x_i^2 = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax^2 + bx + c - y_i) \cdot x_i = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax^2 + bx + c - y_i) = 0$$

Система многочлена второй степени:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^4 + b \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^3 + c \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^2 = \sum_{i=0}^{5} x_i^2 \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^3 + b \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^2 + c \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i + c \cdot n = \sum_{i=0}^{5} y_i \end{cases}$$

Система многочлена первой степени:

$$\begin{cases} b \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i^2 + c \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} x_i \cdot y_i \\ b \cdot \sum_{i=0}^{5} x_i + c \cdot n = \sum_{i=0}^{5} y_i \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i = -0.9 + 0 + 0.9 + 1.8 + 2.7 + 3.6 = 8.1$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^2 = -0.9^2 + 0^2 + 0.9^2 + 1.8^2 + 2.7^2 + 3.6^2 = 0.81 + 0 + 0.81 + 3.24 + 7.29 + 12.96 = 25.11$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^3 = -0.9^3 + 0^3 + 0.9^3 + 1.8^3 + 2.7^3 + 3.6^3 = -0.729 + 0 + 0.729 + 5.832 + 19.683 + 46.656 = 72.171$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^4 = -0.9^4 + 0^4 + 0.9^4 + 1.8^4 + 2.7^4 + 3.6^4 = 0.6561 + 0 + 0.6561 + 10.4976 + 53.1441 + 167.9616 = 232.9155$$

$$\sum_{i=0}^{5} y_i = -1.2689 + 0 + 1.2689 + 2.6541 + 4.4856 + 9.9138 = 17.0535$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i \cdot y_i = (-0.9) \cdot (-1.2689) + 0 \cdot 0 + 0.9 \cdot 1.2689 + 1.8 \cdot 2.6541 + 2.7 \cdot 4.4856 + 3.6 \cdot 9.9138 = 1.142 + 0 + 1.142 + 4.7774 + 12.1111 + 35.6897 = 54.8622$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^2 \cdot y_i = 0.81 \cdot (-1.2689) + 0 \cdot 0 + 0.81 \cdot 1.2689 + 3.24 \cdot 2.6541 + 7.29 \cdot 4.4856 + 12.96 \cdot 9.9138 = -1.0278 + 0 + 1.0278 + 8.5993 + 32.7 + 128.4828 = 169.7821$$

Система многочлена второй степени:

$$\begin{cases} 232.9155a + 72.171b + 25.11c = 169.7821 \\ 72.171a + 25.11b + 8.1c = 54.8622 \\ 25.11a + 8.1b + 6c = 17.0535 \end{cases}$$

Решение системы многочлена второй степени: $a = 0.5085, b = 0.8725, c = -0.4641$

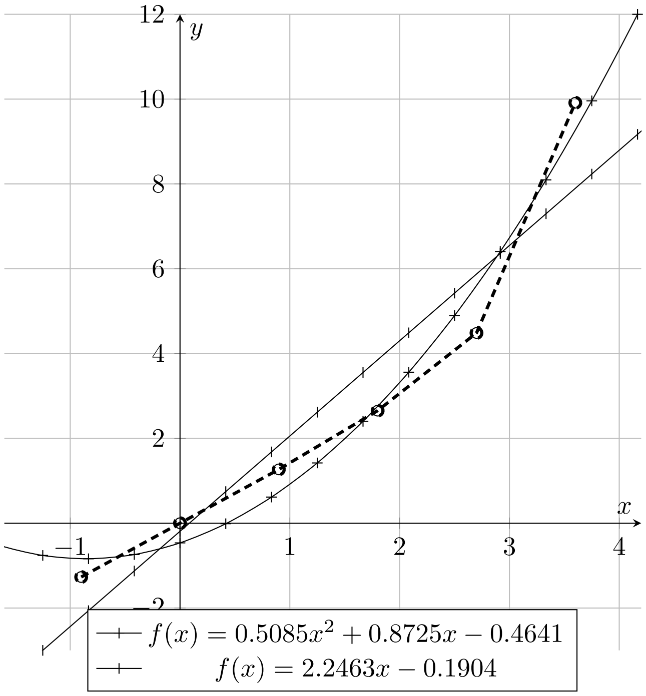
Система многочлена первой степени:

$$\begin{cases} b + 8.1c = 54.8622 \\ b + 6c = 17.0535 \end{cases}$$

Решение системы многочлена первой степени: $b = 2.2463, c = -0.1904$

$P_1(x) = 2.2463x + (-0.1904)$

$P_2(x) = 0.5085x^2 + 0.8725x + (-0.4641)$



$S_1(x) = \sum_{i=0}^{5}(P_1(x_i) - y_i)^2 = ((-2.2121) - (-1.2689))^2 + ((-0.1904) - 0)^2 + (1.8313 - 1.2689)^2 + (3.8529 - 2.6541)^2 + (5.8746 - 4.4856)^2 + (7.8963 - 9.9138)^2 = 0.8896 + 0.0363 + 0.3163 + 1.4371 + 1.9293 + 4.0703 = 8.6789$

$S_2(x) = \sum_{i=0}^{5}(P_2(x_i) - y_i)^2 = ((-0.8375) - (-1.2689))^2 + ((-0.4641) - 0)^2 + (0.733 - 1.2689)^2 + (2.7539 - 2.6541)^2 + (5.5986 - 4.4856)^2 + (9.2671 - 9.9138)^2 = 0.1861 + 0.2154 + 0.2872 + 0.01 + 1.2388 + 0.4182 = 2.3556$

Ответ:
$P_1(x) = 2.2463x + (-0.1904)$
$P_2(x) = 0.5085x^2 + 0.8725x + (-0.4641)$
$S_1(x) = 8.6789$
$S_2(x) = 2.3556$

3.4. Вычислить первую и вторую производную таблично заданной функции $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ в точке x=X* .

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	2.6931	4.0986	5.3863	6.6094

X* = 3, h = 1

Если в некоторой точке требуется вычислить производные первого, второго и т.д. порядков от дискретно заданной функции, в случае совпадения X* с одним из внутренних узлов заданной таблицы используется аппарат разложения функций в ряд Тейлора. С этой целью предполагается, что заданная таблица является сеточной функцией для некоторой функции $y(x)$, имеющей в точке X* производные до четвертого порядка включительно, т.е. что $y_i = y(x_i)$.

X* совпадает с одним из внутренних узлов заданной таблицы ($i = 2$), поэтому: Первые производные первого порядка точности:

Правая:

$$y_i'(X^* = X_2) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{5.3863 - 4.0986}{1} = 1.2877$$

Левая:

$$\bar{y}_i'(X^* = X_2) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \frac{4.0986 - 2.6931}{1} = 1.4055$$

Центральная:

$$\overset{\circ}{y}_i'(X^* = X_2) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{5.3863 - 2.6931}{1} = 1.3466$$

Вторая производная второго порядка точности:

$$y_i''(X^* = X_2) = \frac{y_{i+1} - 2y_{i-1} + y_i}{h^2} = \frac{5.3863 - 2 \cdot 4.0986 + 2.6931}{1} = -0.1178$$

Ответ: $\begin{array}{l} y_i' = 1.2877 \\ \bar{y}_i' = 1.4055 \\ \overset{\circ}{y}_i' = 1.3466 \\ y_i'' = 0.1178 \end{array}$

3.5. Вычислить определенный интеграл $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x$, методами прямоугольников, трапеции, Симпсона с шагами h_1, h_2. Уточнить полученные значения, используя Метод Рунге-Ромберга:

$$y = \frac{1}{x^4 + 16}$$

$x_0 = 0, x_k = 2, h_1 = 0.5, h_2 = 0.25$

Таблица соответствующая шагу h_1:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	0.0625	0.0623	0.0588	0.0475	0.0313

Таблица соответствующая шагу h_2:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
y_i	0.0625	0.0625	0.0623	0.0613	0.0588	0.0542	0.0475	0.0394	0.0313

Представленные методы численного интегрирования используют определение интеграла функции $f(x)$ как площади фигуры образованной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, так метод прямоугольников позволяет вычислить искомую площадь как сумму прямоугольников образованных отрезками высот проходящих с шагом h. Метод Рунге-Ромберга позволяет при наличии нескольких результатов вычислений с одинаковой точностью P получить новый результат с точностью $P + 1$.

Метод прямоугольников:

h_1: $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x \approx h \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} y_i = 0.5 \cdot (0.0625 + 0.0623 + 0.0588 + 0.0475 + 0.0313) = 0.1312$

h_2: $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x \approx h \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} y_i = 0.25 \cdot (0.0625 + 0.0625 + 0.0623 + 0.0613 + 0.0588 + 0.0542 + 0.0475 + 0.0394 + 0.0313) = 0.12$

Метод трапеций:

h_1: $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot (y(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1} y_i + y(x_k)) = \frac{0.5}{2} \cdot (0.0625 + 2 \cdot (0.0623 + 0.0588 + 0.0475) + 0.0313) = 0.25 \cdot (0.0625 + 2 \cdot 0.1686 + 0.0313) = 0.1077$

h_2: $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot (y(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1} y_i + y(x_k)) = \frac{0.25}{2} \cdot (0.0625 + 2 \cdot (0.0625 + 0.0623 + 0.0613 + 0.0588 + 0.0542 + 0.0475 + 0.0394) + 0.0313) = 0.125 \cdot (0.0625 + 2 \cdot 0.386 + 0.0313) = 0.1082$

Метод Симпсона:

h_1: $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} \cdot (y(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=1,3,5...}^{\mathrm{n}-1} y_i + 2 \cdot \sum_{i=2,4,6...}^{\mathrm{n}-1} y_i + y(x_k)) = \frac{0.5}{3} \cdot (0.0625 + 4 \cdot (0.0623 + 0.0475) + 2 \cdot (0.0588) + 0.0313) = 0.16667 \cdot (0.0625 + 4 \cdot 0.1098 + 2 \cdot 0.0588 + 0.0313) = 0.10844$

h_2: $\int_{x_0}^{x_k} y\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} \cdot (y(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=1,3,5...}^{\mathrm{n}-1} y_i + 2 \cdot \sum_{i=2,4,6...}^{\mathrm{n}-1} y_i + y(x_k)) = \frac{0.25}{3} \cdot (0.0625 + 4 \cdot (0.0625 + 0.0613 + 0.0542 + 0.0394) + 2 \cdot (0.0623 + 0.0588 + 0.0475) + 0.0313) = 0.08333 \cdot (0.0625 + 4 \cdot 0.2174 + 2 \cdot 0.1686 + 0.0313) = 0.10838$

Уточнение метода прямоугольников. $Z_{pp} = z_1 + \frac{z_1 - z_2}{(\frac{h_2}{h_1})^p - 1} = 0.1312 + \frac{0.1312 - 0.12}{(\frac{0.25}{0.5})^1 - 1} = 0.1088$

Уточнение метода трапеций. $Z_{pp} = z_1 + \dfrac{z_1 - z_2}{(\frac{h_2}{h_1})^p - 1} = 0.1077 + \dfrac{0.1077 - 0.1082}{(\frac{0.25}{0.5})^2 - 1} = 0.1084$

Уточнение метода Симпсона. $Z_{pp} = z_1 + \dfrac{z_1 - z_2}{(\frac{h_2}{h_1})^p - 1} = 0.10844 + \dfrac{0.10844 - 0.10838}{(\frac{0.25}{0.5})^4 - 1} = 0.10838$

Ответ: $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{1}{x^4 + 16}\right) \mathrm{d}x = 0.10838$

4.1. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка на указанном отрезке с заданным шагом h. Полученное численное решение сравнить с точным. Определить погрешность решения.

$$\begin{cases} y' = -\frac{1y}{2x} + x^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$x \in [1, 2], h = 0.1$

Точное решение: $y = \dfrac{2}{7}x^3 + \dfrac{5}{7\sqrt{x}}$

Выпишем точные значения на заданном промежутке:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	1	1.0613	1.1458	1.2542	1.3877	1.5475	1.735	1.9515	2.1987	2.4779	2.7908

1. Метод Эйлера

Если известно $y_i =$ значение табличной функции при $x = x_i$, то можно вычислить новый узел $x = x_{i+1}$ и соответствующий ему y_{i+1} по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$y_1 = 1 + 0.1 \cdot f(1, 1) = 1 + 0.1 \cdot 0.5 = 1.05$

$y_2 = 1.05 + 0.1 \cdot f(1.1, 1.05) = 1.05 + 0.1 \cdot 0.7327 = 1.1233$

$y_3 = 1.1233 + 0.1 \cdot f(1.2, 1.1233) = 1.1233 + 0.1 \cdot 0.972 = 1.2205$

$y_4 = 1.2205 + 0.1 \cdot f(1.3, 1.2205) = 1.2205 + 0.1 \cdot 1.2206 = 1.3426$

$y_5 = 1.3426 + 0.1 \cdot f(1.4, 1.3426) = 1.3426 + 0.1 \cdot 1.4805 = 1.4907$

$y_6 = 1.4907 + 0.1 \cdot f(1.5, 1.4907) = 1.4907 + 0.1 \cdot 1.7531 = 1.666$

$y_7 = 1.666 + 0.1 \cdot f(1.6, 1.666) = 1.666 + 0.1 \cdot 2.0394 = 1.8699$

$y_8 = 1.8699 + 0.1 \cdot f(1.7, 1.8699) = 1.8699 + 0.1 \cdot 2.34 = 2.1039$

$y_9 = 2.1039 + 0.1 \cdot f(1.8, 2.1039) = 2.1039 + 0.1 \cdot 2.6556 = 2.3695$

$y_{10} = 2.3695 + 0.1 \cdot f(1.9, 2.3695) = 2.3695 + 0.1 \cdot 2.9864 = 2.6681$

2. Метод Эйлера-Коши

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = 1 + 0.1 \cdot f(1, 1) = 1 + 0.1 \cdot 0.5 = 1.05 \\ y_1 = 1 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1, 1) + f(1.1, 1.05)] = 1 + 0.05 \cdot (0.5 + 0.7327) = 1.0616 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_2 = 1.0616 + 0.1 \cdot f(1.1, 1.0616) = 1.0616 + 0.1 \cdot 0.7275 = 1.1344 \\ y_2 = 1.0616 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.1, 1.0616) + f(1.2, 1.1344)] = 1.0616 + 0.05 \cdot (0.7275 + 0.9673) = 1.1463 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_3 = 1.1463 + 0.1 \cdot f(1.2, 1.1463) = 1.1463 + 0.1 \cdot 0.9624 = 1.2425 \\ y_3 = 1.1463 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.2, 1.1463) + f(1.3, 1.2425)] = 1.1463 + 0.05 \cdot (0.9624 + 1.2121) = 1.255 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_4 = 1.255 + 0.1 \cdot f(1.3, 1.255) = 1.255 + 0.1 \cdot 1.2073 = 1.3757 \\ y_4 = 1.255 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.3, 1.255) + f(1.4, 1.3757)] = 1.255 + 0.05 \cdot (1.2073 + 1.4687) = 1.3888 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_5 = 1.3888 + 0.1 \cdot f(1.4, 1.3888) = 1.3888 + 0.1 \cdot 1.464 = 1.5352 \\ y_5 = 1.3888 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.4, 1.3888) + f(1.5, 1.5352)] = 1.3888 + 0.05 \cdot (1.464 + 1.7383) = 1.5489 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_6 = 1.5489 + 0.1 \cdot f(1.5, 1.5489) = 1.5489 + 0.1 \cdot 1.7337 = 1.7223 \\ y_6 = 1.5489 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.5, 1.5489) + f(1.6, 1.7223)] = 1.5489 + 0.05 \cdot (1.7337 + 2.0218) = 1.7367 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_7 = 1.7367 + 0.1 \cdot f(1.6, 1.7367) = 1.7367 + 0.1 \cdot 2.0173 = 1.9384 \\ y_7 = 1.7367 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.6, 1.7367) + f(1.7, 1.9384)] = 1.7367 + 0.05 \cdot (2.0173 + 2.3199) = 1.9536 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_8 = 1.9536 + 0.1 \cdot f(1.7, 1.9536) = 1.9536 + 0.1 \cdot 2.3154 = 2.1851 \\ y_8 = 1.9536 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.7, 1.9536) + f(1.8, 2.1851)] = 1.9536 + 0.05 \cdot (2.3154 + 2.633) = 2.201 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_9 = 2.201 + 0.1 \cdot f(1.8, 2.201) = 2.201 + 0.1 \cdot 2.6286 = 2.4639 \\ y_9 = 2.201 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.8, 2.201) + f(1.9, 2.4639)] = 2.201 + 0.05 \cdot (2.6286 + 2.9616) = 2.4805 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{10} = 2.4805 + 0.1 \cdot f(1.9, 2.4805) = 2.4805 + 0.1 \cdot 2.9572 = 2.7762 \\ y_{10} = 2.4805 + (0.1 \cdot 0.5) \cdot [f(1.9, 2.4805) + f(2, 2.7762)] = 2.4805 + 0.05 \cdot (2.9572 + 3.306) = 2.7937 \end{cases}$$

3. Метод Рунге-Кутта

$$\begin{cases} k_i^1 = hf(x_i, y_i) \\ k_i^2 = hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{k_i^1}{2}) \\ k_i^3 = hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{k_i^2}{2}) \\ k_i^4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_i^3) \\ \Delta y_i = \frac{1}{6}(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^1 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1}{2\times 1} + 1^2) = 0.1 \cdot (-0.5 + 1) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05 \\ x_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0.1/2 = 1.05 \\ k_0^2 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.025}{2\times 1.05} + 1.05^2) = 0.1 \cdot (-0.4881 + 1.1025) = 0.1 \cdot 0.6144 = 0.0614 \\ k_0^3 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.0307}{2\times 1.05} + 1.05^2) = 0.1 \cdot (-0.4908 + 1.1025) = 0.1 \cdot 0.6117 = 0.0612 \\ k_0^4 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.0612}{2\times 1.1} + 1.1^2) = 0.1 \cdot (-0.4824 + 1.21) = 0.1 \cdot 0.7276 = 0.0728 \\ \Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (0.05 + 20.0614 + 20.0612 + 0.0728) = 0.0613 \\ y_1 = 1 + 0.0613 = 1.0613 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1^1 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.0613}{2\times 1.1} + 1.1^2) = 0.1 \cdot (-0.4824 + 1.21) = 0.1 \cdot 0.7276 = 0.0728 \\ x_{1+\frac{1}{2}} = 1.1 + 0.1/2 = 1.15 \\ k_1^2 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.0977}{2\times 1.15} + 1.15^2) = 0.1 \cdot (-0.4773 + 1.3225) = 0.1 \cdot 0.8452 = 0.0845 \\ k_1^3 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.1035}{2\times 1.15} + 1.15^2) = 0.1 \cdot (-0.4798 + 1.3225) = 0.1 \cdot 0.8427 = 0.0843 \\ k_1^4 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.1456}{2\times 1.2} + 1.2^2) = 0.1 \cdot (-0.4773 + 1.44) = 0.1 \cdot 0.9627 = 0.0963 \\ \Delta y_1 = \frac{1}{6} \cdot (0.0728 + 20.0845 + 20.0843 + 0.0963) = 0.0845 \\ y_2 = 1.0613 + 0.0845 = 1.1458 \end{cases}$$

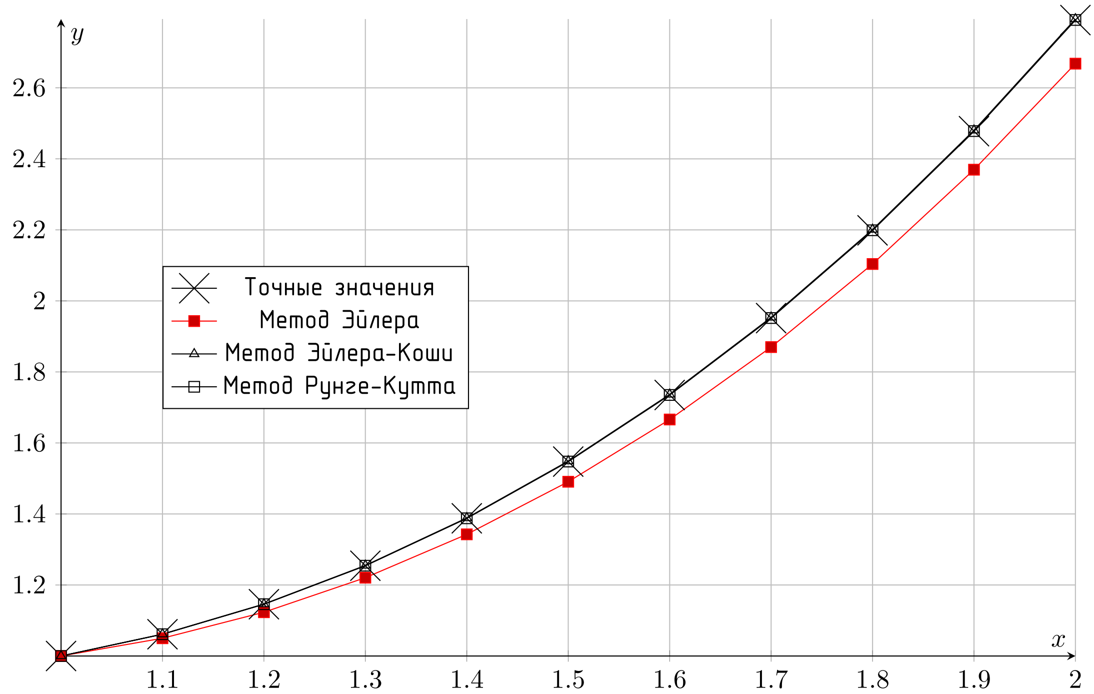
$$\begin{cases} k_2^1 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.1458}{2\times 1.2} + 1.2^2) = 0.1 \cdot (-0.4774 + 1.44) = 0.1 \cdot 0.9626 = 0.0963 \\ x_{2+\frac{1}{2}} = 1.2 + 0.1/2 = 1.25 \\ k_2^2 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.1939}{2\times 1.25} + 1.25^2) = 0.1 \cdot (-0.4776 + 1.5625) = 0.1 \cdot 1.0849 = 0.1085 \\ k_2^3 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.2}{2\times 1.25} + 1.25^2) = 0.1 \cdot (-0.48 + 1.5625) = 0.1 \cdot 1.0825 = 0.1083 \\ k_2^4 = 0.1 \cdot (-1 \cdot \frac{1.2541}{2\times 1.3} + 1.3^2) = 0.1 \cdot (-0.4823 + 1.69) = 0.1 \cdot 1.2077 = 0.1208 \\ \Delta y_2 = \frac{1}{6} \cdot (0.0963 + 20.1085 + 20.1083 + 0.1208) = 0.1085 \\ y_3 = 1.1458 + 0.1085 = 1.2543 \end{cases}$$

$\vdots$

Продолжим вычисления, результаты выпишем в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	1	1.0613	1.1458	1.2543	1.3878	1.5476	1.7351	1.9517	2.1989	2.4782	2.7911
k_{i+1}^1		0.05	0.0728	0.0963	0.1208	0.1464	0.1734	0.2018	0.2316	0.2629	0.2958
k_{i+1}^2		0.0614	0.0845	0.1085	0.1336	0.1599	0.1875	0.2166	0.2472	0.2793	0.3129
k_{i+1}^3		0.0612	0.0843	0.1083	0.1333	0.1596	0.1873	0.2164	0.247	0.279	0.3127
k_{i+1}^4		0.0728	0.0963	0.1208	0.1464	0.1734	0.2018	0.2316	0.2629	0.2958	0.3302
Δy_{i+1}		0.0613	0.0845	0.1085	0.1335	0.1598	0.1875	0.2166	0.2472	0.2793	0.3129

Сравним графически результаты методов:



Определим погрешность:

$$\varepsilon_{\text{Эйлера}} = \| \overline{y} - \overline{y}_{\text{Эйлера}} \|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0613 \\ 1.1458 \\ 1.2542 \\ 1.3877 \\ 1.5475 \\ 1.735 \\ 1.9515 \\ 2.1987 \\ 2.4779 \\ 2.7908 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1.05 \\ 1.1233 \\ 1.2205 \\ 1.3426 \\ 1.4907 \\ 1.666 \\ 1.8699 \\ 2.1039 \\ 2.3695 \\ 2.6681 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0113 \\ 0.0225 \\ 0.0337 \\ 0.0451 \\ 0.0568 \\ 0.069 \\ 0.0816 \\ 0.0948 \\ 0.1084 \\ 0.1227 \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.1227$$

$$\varepsilon_{\text{Эйлера-Коши}} = \| \overline{y} - \overline{y}_{\text{Эйлера-Коши}} \|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0613 \\ 1.1458 \\ 1.2542 \\ 1.3877 \\ 1.5475 \\ 1.735 \\ 1.9515 \\ 2.1987 \\ 2.4779 \\ 2.7908 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0616 \\ 1.1463 \\ 1.255 \\ 1.3888 \\ 1.5489 \\ 1.7367 \\ 1.9536 \\ 2.201 \\ 2.4805 \\ 2.7937 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0003 \\ -0.0005 \\ -0.0008 \\ -0.0011 \\ -0.0014 \\ -0.0017 \\ -0.0021 \\ -0.0023 \\ -0.0026 \\ -0.0029 \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.0029$$

$$\varepsilon_{\text{Рунге-Кутта}} = \| \overline{y} - \overline{y}_{\text{Рунге-Кутта}} \|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0613 \\ 1.1458 \\ 1.2542 \\ 1.3877 \\ 1.5475 \\ 1.735 \\ 1.9515 \\ 2.1987 \\ 2.4779 \\ 2.7908 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0613 \\ 1.1458 \\ 1.2543 \\ 1.3878 \\ 1.5476 \\ 1.7351 \\ 1.9517 \\ 2.1989 \\ 2.4782 \\ 2.7911 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.0002 \\ -0.0002 \\ -0.0003 \\ -0.0003 \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.0003$$

Ответ: $\varepsilon_{\text{Эйлера}} = 0.1227, \varepsilon_{\text{Эйлера-Коши}} = 0.0029, \varepsilon_{\text{Рунге-Кутта}} = 0.0003$