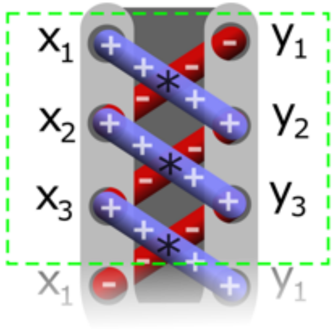


【国际数学竞赛】任意多边形面积计算公式

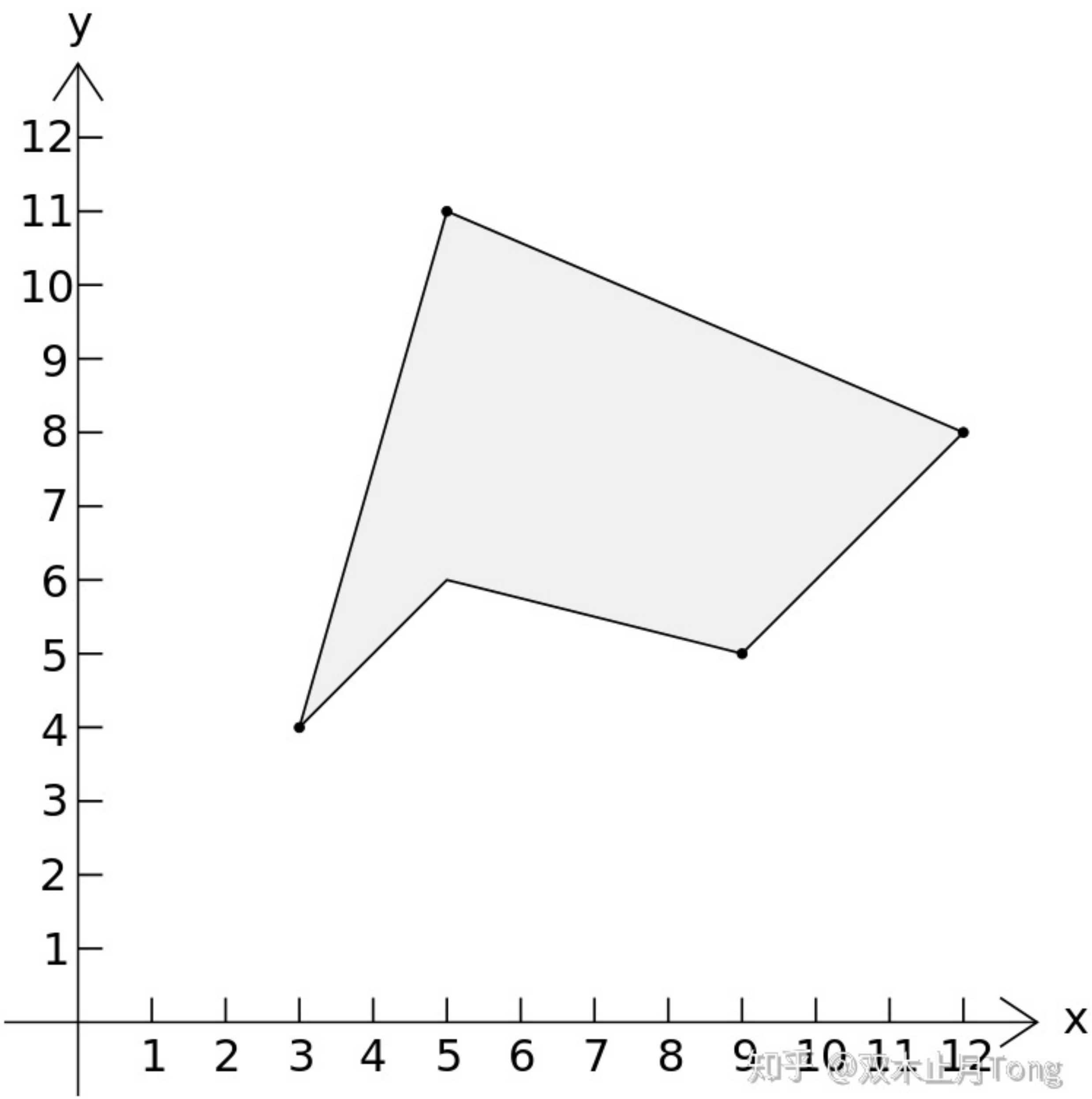
双木止月Tong
上海大学 运筹学与控制论硕士

对于任意一个多边形，如果已知其各个顶点的坐标 $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \ldots, A_n(x_n,y_n)$ **，那么这个多边形的面积为：**

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|,$$

其中 $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$ 。

举个例子(From Wikipedia)，比如下图这样一个奇奇怪怪的五边形，其顶点坐标为


y
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
知乎 @双木止月Tong

$$
\begin{aligned}
S = & \frac{1}{2}|3\times 11+5\times 8+12\times 5+9\times 6+5\times 4 \\
& -4\times 5-11\times 12-8\times 9-5\times 5-6\times 3| \\
= & \frac{60}{2}=30.\square
\end{aligned}
$$

是不是感觉很神奇，也不知道对不对，这个大家也可以把上述面积分解验算一下。

上述公式就是**Shoelace Theorem，鞋带定理？！**

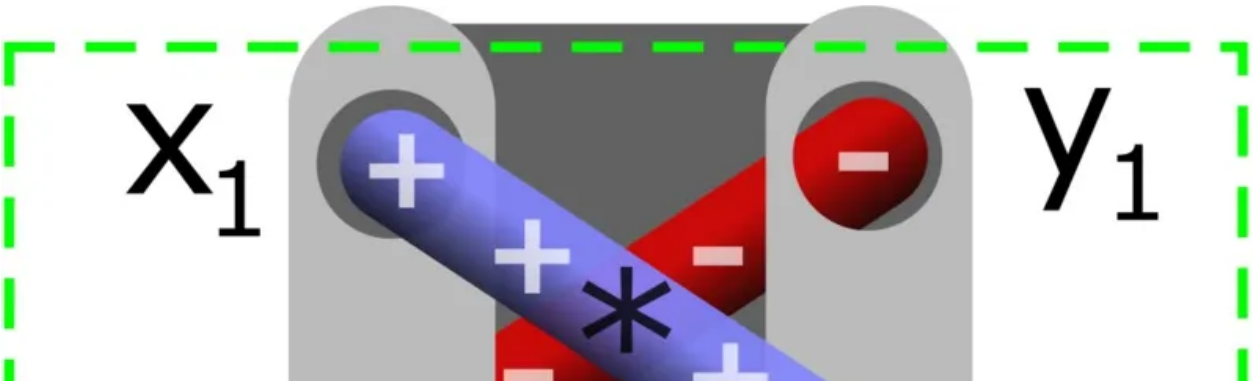
Shoelace Theorem

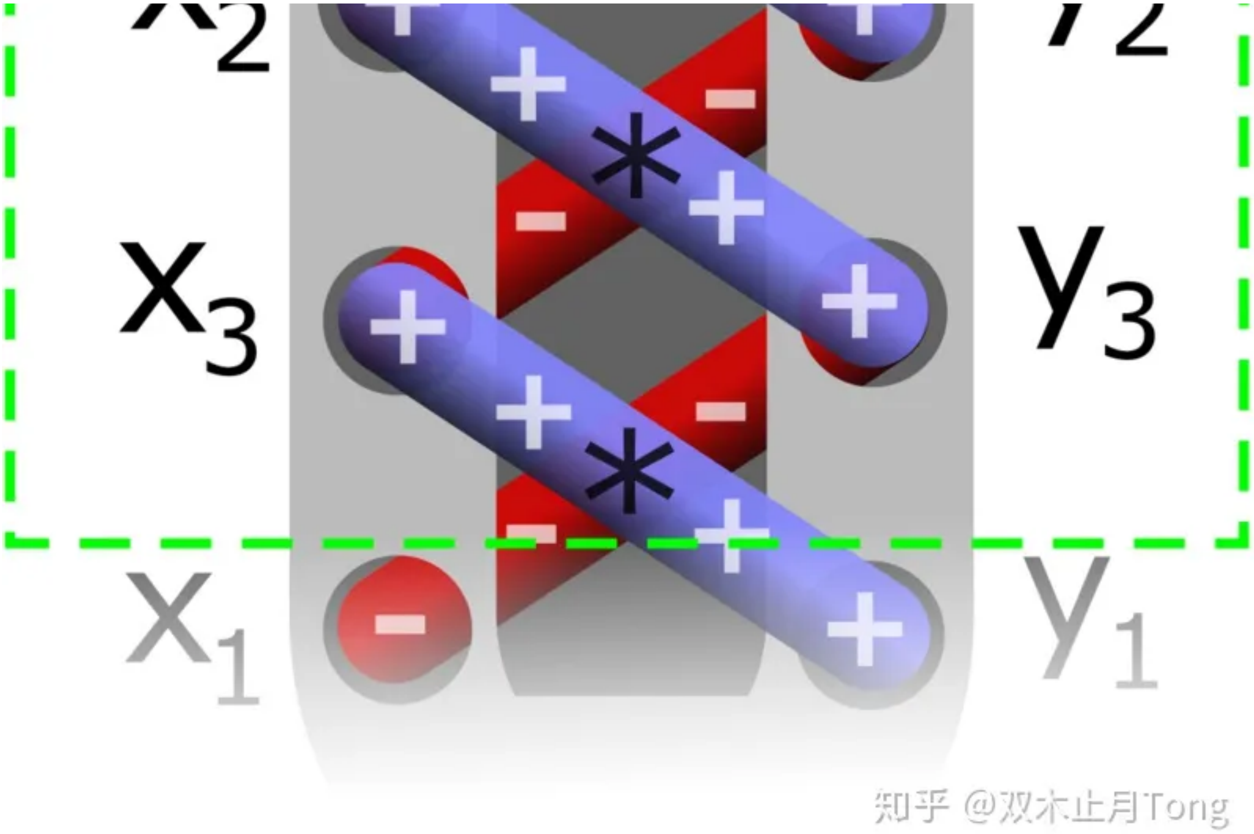
Suppose the polygon has vertices $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$ listed in clockwise order. Then the area of the polygon is

$$\frac{1}{2}|(a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1)-(b_1a_2+b_2a\ldots$$

知乎 @双木止月Tong

为什么叫Shoelace Theorem，因为这个公式的运算很像鞋带，我们来看看三个顶点时的公式计算，$S=\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2|$，就如下图所示：





图：三个顶点时的计算公式，from Wikipedia

对于任意n 边形，我们也可以类型的把坐标依次写下来，然后就可以根据公式算出这个多边形的面积了。不过这里有两点需要**注意**：

（1）对于任意多边形，我们看到的只是各个顶点的坐标，是没有标 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的，所以这里我们只需要**任意指定一个顶点为 A_1 ，然后按照顺时针或者逆时针进行标号**就可以了；

（2）因为我们是任意指定一个点为 A_1 ，且顺时针或者逆时针都可以，所以有时候按照公式计算出来是为负值，但是**面积是一个正值，因此我们公式中是有一个绝对值的：**

接下去我们就证明一下Shoelace Theorem，不过在证明之前，我们铺垫一点向量叉乘(cross product)的知识。(如果清楚可以直接看公式证明过程。)

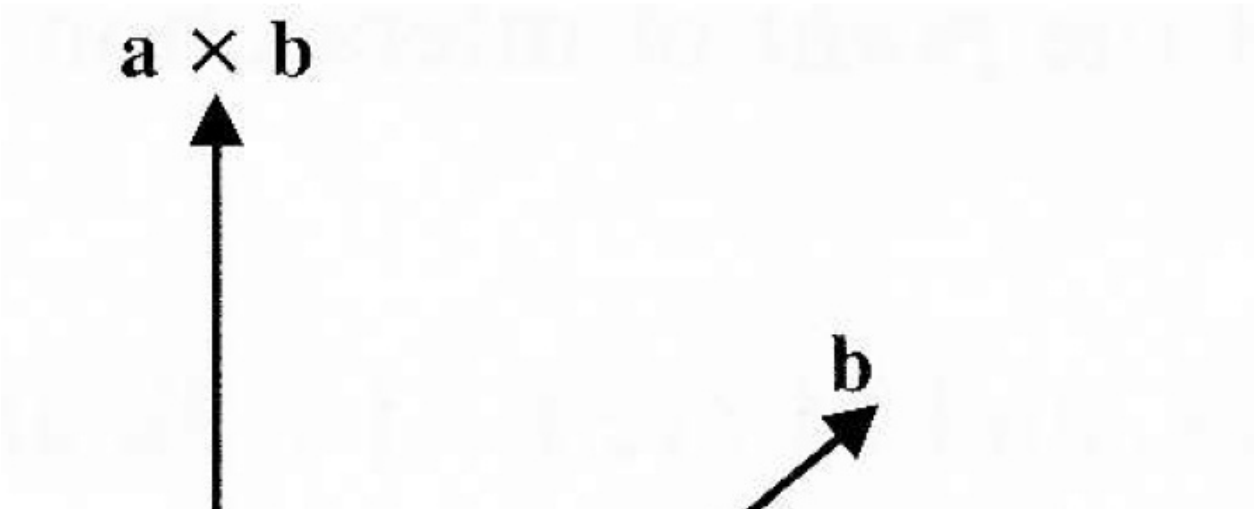
之前我们有介绍过向量点乘(dot product)，$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos < \vec{a}, \vec{b} >$。

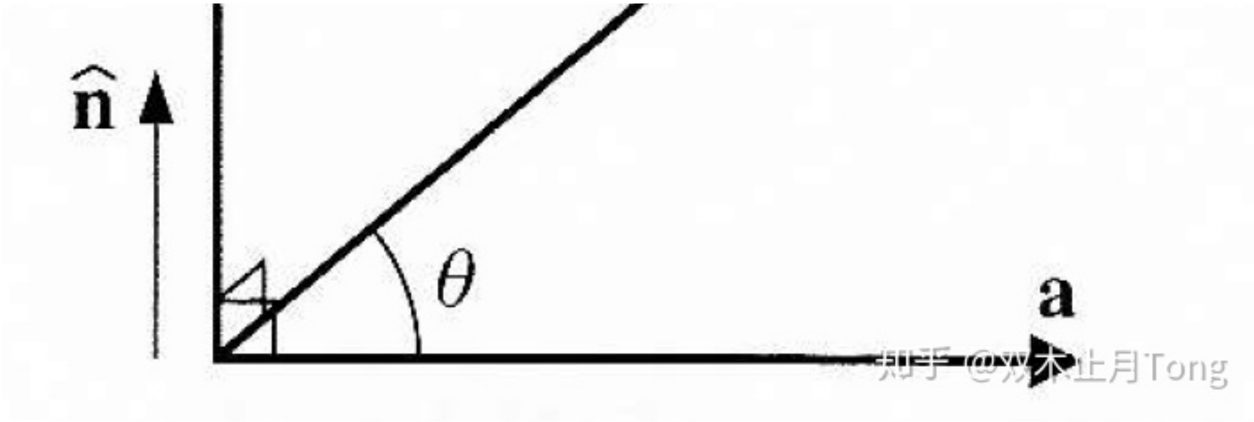
> 注：上式左边是向量的点乘符号，右边是数乘符号。

这里我们在定义一个向量叉乘，$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin < \vec{a}, \vec{b} > \cdot \vec{n}$，

> 注，向量叉乘得到的是一个新的向量。

其中 $\vec{n}$ 是一个单位向量，其方向是垂直 $\vec{a}, \vec{b}$ 向量所成平面的法向量方向。这里我们可以根据**右手来判断，首先用右手四指(除大拇指外)指向 $\vec{a}$ ，然后弯曲转向 $\vec{b}$ ，那么大拇指指向的就是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向**，如下图





图：From Further Pure Mathematics

如果是 $\vec{b} \times \vec{a}$,那么方向就跟 $\vec{a} \times \vec{b}$ 刚好相反。

那么向量叉乘怎么算呢?

这里我们就直接给出计算公式了。

如果 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,

那么，$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - b_1a_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$。

如果学过矩阵行列式，我们可以用行列式表示：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

说了这么多的向量叉乘，那么跟面积有什么关系呢?

$S=\frac{1}{2}ab\sin C$。

比对一下叉乘公式，我们发现 $|\vec{a}\times\vec{b}|=||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin<\vec{a},\vec{b}>|$ 就是以 $\vec{a},\vec{b}$ 两个向量所构成的平行四边形面积。再除以2，就是以 $\vec{a},\vec{b}$ 构成的三角形面积了。

接下去我们要用数学归纳法来证明Shoelace Theorem，首先证明三个顶点时定理成立，然后假设 n 个顶点定理成立，推导 $(n+1)$ 边形时成立。

【1】证明三角形时成立

已知平面坐标系上三个顶点坐标 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，我们可以把这三个顶点放到三维空间中，并把点 A 移动到原点 $A'=(0,0,0)$。那么，$B\left(x_2-x_1,y_2-y_1,0\right)$，$C\left(x_3-x_1,y_3-y_1,0\right)$。

于是，根据向量叉乘的几何意义可知：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\|(0\quad 0\quad x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2)\|$$

$$=\frac{x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2}{2}。\square$$

> 注：

> （2）为了接下去证明的方便，我们这里没有加绝对值，因为如果计算出来是负值，只需要改变一下计算顺序就可以了。

【2】假设 n 边形时成立，推导 $(n+1)$ 边形成立

已知条件n 边形时成立，$S_{A_1A_2\ldots A_n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i\right)$，

其中$x_{n+1}=x_1, y_{n+1}=y_1$。

对于顶点为 $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ 的 $(n+1)$ 边形，可以分为 n 边形与一个三角形之和

$S_{A_1A_2\ldots A_{n+1}}=S_{A_1A_2\ldots A_n}+S_{A_1A_nA_{n+1}}$，

$S_{A_1A_2\ldots A_n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i\right)$，

$S_{A_1A_nA_{n+1}}=\frac{1}{2}(x_1y_n+x_ny_{n+1}+x_{n+1}y_1-x_1y_{n+1}-x_ny_1-x_{n+1}y_n)$，

于是，

$$S_{A_1A_2\ldots A_{n+1}}=\frac{1}{2}((x_1y_2+\cdots+x_ny_1)-(y_1x_2+\cdots+y_nx_1)+ (x_1y_n+x_ny_{n+1}+x_{n+1}y_1)-(y_1x_n+y_nx_{n+1}+y_{n+1}x_1))$$

$$=\frac{1}{2}((x_1y_2+\cdots+x_ny_{n+1}+x_{n+1}y_1)-(y_1x_2+\cdots+y_{n+1}x_1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i\right),$$

其中，$x_{n+2}=x_1, y_{n+2}=y_1$。$\square$

至此，我们就完整的证明了Shoelace Theorem。这个定理在竞赛中还是比较常见的，比如在AMC10/12中，今年2020AMC12A中就有：

Problem 17

The vertices of a quadrilateral lie on the graph of $y = \ln x$, and the x-coordinates of these vertices are consecutive positive integers. The area of the quadrilateral is $\ln \frac{91}{90}$. What is the x-coordinate of the leftmost vertex?

$\textbf{(A)}\ 6 \qquad \textbf{(B)}\ 7 \qquad \textbf{(C)}\ 10 \qquad \textbf{(D)}\ 12 \qquad \textbf{(E)}\ 13$

利用这个定理还是很容易计算的，

Solution 1

Let the coordinates of the quadrilateral be $(n, \ln(n)), (n+1, \ln(n+1)), (n+2, \ln(n+2)), (n+3, \ln(n+3))$. We have by shoelace's theorem, that the area is

$$\frac{\ln(n)(n+1) + \ln(n+1)(n+2) + \ln(n+2)(n+3) + n\ln(n+3)}{2} - \frac{\ln(n+1)\ln(n) + \ln(n+2)\ln(n+1) + \ln(n+3)(n+2) + \ln(n)(n+3)}{2} =$$

$$\frac{\ln\left(\frac{n^{n+1}(n+1)^{n+2}(n+2)^{n+3}(n+3)^n}{(n+1)^n(n+2)^{n+1}(n+3)^{n+2}n^{n+3}}\right)}{2} = \ln\left(\sqrt{\frac{(n+1)^2(n+3)^2}{n^2(n+2)^2}}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{91}{90}\right).$$

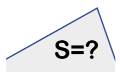
We now that the numerator must have a factor of 13, so given the answer choices, n is either 12 or 11. If $n = 11$, the expression $\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$ does not evaluate to $\frac{91}{90}$, but if $n = 12$, the expression evaluates to $\frac{91}{90}$. Hence, our answer is $\boxed{12}$.

~AopsUser101

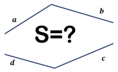
不知道大家对于这个定理有什么想法，欢迎交流讨论~

如果想看三角形与四边形面积计算公式可看下面两篇文章：

双木止月Tong：【国际数学竞赛】三角形面积公式知多少？



双木止月Tong：【国际数学竞赛】四边形面积公式知多少?
599 赞同 · 48 评论 文章



想了解更多关于国际数学竞赛及课程的知识，可参阅：

双木止月Tong：国际数学竞赛及课程
519 赞同 · 40 评论 文章

编辑于 2020-03-01 20:10

平面几何 平面解析几何 几何学

评论千万条，友善第一条

46 条评论 默认 最新

GNAQ
发现了同时很MO和很OI的东西……
2020-03-04 回复 15

郭睿涵
这不就是叉积求面积嘛

赞同 894 46 条评论 分享 喜欢 收藏 申请转载 ···