Univerzita Karlova
Přírodovědecká fakulta

Algoritmy počítačové kartografie

Technická zpráva k první semestrální úloze

Geometrické vyhledávání bodu

David Šklíba a Filip Zadražil
1. N-GKDPZ
Praha 2022

1 Zadání a údaje o bonusových úlohách

Vstup: Souvislá polygonová mapa n polygonů $\{P_1, ..., P_n\}$, *analyzovaný bod* q.

Výstup: P_i, $q \in P_i$.

Nad polygonovou mapou implementujete Winding Number Algorithm pro geometrické vyhledání incidujícího polygonu obsahujícího zadaný bod q.

Nalezený polygon graficky zvýrazněte vhodným způsobem (např. vyplněním, šrafováním, blikáním). Grafické rozhraní vytvořte s využitím frameworku QT.

Pro generování nekonvexních polygonů můžete navrhnout vlastní algoritmus či použít existující geografická data (např. mapa evropských států).

Polygony budou načítány z textového souboru ve Vámi zvoleném formátu. Pro datovou reprezentaci jednotlivých polygonů použijte špagetový model.

Hodnocení:

Krok	**Hodnocení**
Detekce polohy bodu rozlišující stavy uvnitř, vně, na hranici polygonu.	10b
Analýza polohy bodu (uvnitř/vně) metodou Ray Algorithm.	*+5b*
Ošetření singulárního případu u Ray Algorithm: bod leží na hraně polygonu.	*+5b*
Ošetření singulárního případu u obou algoritmů: bod je totožný s vrcholem jednoho či více polygonů.	*+2b*
Zvýraznění všech polygonů pro oba výše uvedené singulární případy.	*+3b*
Max celkem:	**25b**

V rámci vzniklého programu byly řešeny bonusové úlohy

2 Popis a rozbor problému

2.1 Point Location Problem

V rámci známého jednoduchého obecného problému *Point Location Problem* bývá zpravidla hledána poloha bodu ve vztahu k množině bodů, které tvoří m mnohoúhelníků (polygonů). V mnoha vědeckých a technických aplikacích je totiž důležité vědět, zda zadaný bod q leží uvnitř polygonu P či nikoli. *Point Location Problem* je klasickým problémem v počítačové grafice a výpočetní geometrii a je řešen od samotného vzniku těchto vědních disciplín. Jeho užití nalezneme například v GIS, kdy velmi často hledáme polohu bodu vzhledem k ostatním objektům v prostoru. Nalezení příslušného mnohoúhelníku je proto mnohdy velmi důležité.

V rámci tohoto problému bylo vyvinuto již velké množství algoritmů, které byly dokonce úspěšně implementovány v praxi. Hlavním problémem mnohých algoritmů jsou však podmínky singularity, které jsou ne vždy vhodně ošetřeny. Dalším nešvarem některých algoritmů je jejich velká časová náročnost (Kumar, Bangi 2018).

V rámci této úlohy byl vytvořen program v uživatelském rozhraní *Qt*, který hledá polohu bodu vůči polygonům pomocí dvou vybraných hojně užívaných metod - *Winding Number* a *Ray Crossing*. I vzhledem k využitelnosti tohoto programu byl zdrojový kód napsán tak, aby byly obě metody implementovatelné k nekonvexním mnohoúhelníkům, jež se v reálném světě vyskytují mnohem častěji než konvexní.

2.2 Metoda Winding Number

Tato metoda je založena na tom, že z pozorovaného bodu označovaného písmenem q jsou postupně ke všem vrcholům mnohoúhelníku P počítány úhly ω_i, jejichž součet označovaný řeckým písmenem Ω udává polohu bodu vůči mnohoúhelníku.

$$\Omega(q, P) = \begin{cases} 1, & q \in P, \\ 0, & q \notin P. \end{cases}$$

V první fázi algoritmu je nutné pro každou hranu určit směrový vektor $\vec{u}$ mezi krajními body hrany v_i a v_{i+1} a směrový vektor $\vec{v}$ mezi prvním bodem hrany v_i a zkoumaným bodem q pomocí vzorců:

$$\vec{u} = (x_{i+1} - x_i,\ y_{i+1} - y_i),$$
$$\vec{v} = (x_q - x_i,\ y_q - y_i),$$

za předpokladu, že každý z těchto tří bodů, který vstupuje do vzorce, nese informaci o 2D souřadnici ve formátu $[x, y]$. Oba tyto vektory se následně dosadí do matice a vypočítá se jejich determinant D, aby bylo možné určit, zdali je bod q vůči přímce p (která je totožná s $\vec{v}$) v levé (σ_l) nebo pravé (σ_r) polorovině:

$$D = (u_x * v_y) - (v_x * u_y) = \begin{cases} > 0, & q \in \sigma_l, \\ 0, & q \in p, \\ < 0, & q \in \sigma_r. \end{cases}$$

V závislosti na tom, v jaké polorovině se bod nachází pak úhel α (mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$) k Ω buď přičítáme nebo odečítáme. Výsledná hodnota je uváděna v počtech oběhů čili v násobcích 2π. Výsledná hodnota je také závislá na směru pohybu. Pokud procházíme jednotlivé vrcholy ve směru hodinových ručiček, vyjde nám výsledná hodnota Ω záporná. Pokud se však jedná o záporný násobek 2π beze zbytku, je hledaný bod uvnitř polygonu, stejně jako kdyby byla hodnota kladná. I proto využívá sestrojený algoritmus absolutní hodnotu Ω.

Obecně lze winding number definovat také jako obrysový integrál v komplexní rovině (Alciatore, Miranda 1995):

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{1}{z} \quad where \quad z = x + iy$$

Mezi výhody tohoto algoritmu patří lepší ošetření singulárních případů (na rozdíl od Ray Crossing metody), avšak jedná se o metodu pomalejší a problém nastává v případě, že je hledaný bod zároveň jedním z vrcholů mnohoúhelníku. Špatný výsledek lze však dostat i z tzv. chyby ze zaokrouhlení. V odborné literatuře se pak s touto metodou můžeme setkat i pod názvem *Sum of Angles Method* (Huang, Shih 1997).

2.2.1 Pseudokód Winding Number

Algorithm 1 Winding Number

Pro každý polygon:
$\Omega = 0$
    Pro každou hranu:
        Výpočet vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
        Výpočet determinantu D.
        Pokud $D < 0$:
            $q \in \sigma_r$.
        Pokud $D > 0$:
            $q \in \sigma_l$.
        Pokud $D = 0$:
            $q \in p$.
        Výpočet úhlu α mezi vektory.
        Pokud $q \in \sigma_l$:
            $\Omega + \alpha$
        Pokud $q \in \sigma_r$:
            $\Omega - \alpha$.
        Pokud $q \in p$:
            Výpočet $(q - p_1)(q - p_2)$ pro x a y.
            Pokud jsou oba součiny nekladné:
                Bod q leží na hranici polygonu.
        Pokud $|\Omega| = 2\pi$:
            $q \in P$.
        Pokud $|\Omega| < 2\pi$:
            $q \notin P$.

2.3 Metoda Ray Crossing

Princip této metody tkví ve vedení polopřímky r (paprsek, tj. ray) procházející zkoumaným bodem q. Jistou výhodou je invariance vůči směru tohoto paprsku. Metoda funguje stejně, když je paprsek veden pod libovolným úhlem. Nevýhodou této metody však jsou singularity.

Polopřímka r tedy na své délce protíná určitý počet hran v zadaném směru. Tato hodnota je označována písmenem k. O této hodnotě platí, že pokud je dělitelná dvěmi beze zbytku, pak bod leží mimo polygon. V případě, že je zbytek po dělení roven 1, pak se bod q nachází uvnitř polygonu. Tato podmínka je definována vzorcem:

$$k\%2 = \begin{cases} 1, & q \in P, \\ 0, & q \notin P. \end{cases}$$

Jedním z využívaných způsobů, jak ošetřit některé singularity, je varianta metody s redukcí ke q. Při ní dojde k vytvoření lokálního souřadnicového systému *(q, x', y')*. Počátek se tedy promítne do bodu q a zároveň vzniknou dvě nové osy x' a y'. Tato metoda bývá v odoborné literatuře nazývána jako *Axis Crossing Method* (Kumar, Bangi 2018).

Hlavní nevýhodou této varianty je však neschopnost algoritmu detekovat stav, kdy zkoumaný bod leží na hraně polygonu P. K odhalení této skutečnosti využíváme speciální úpravu algoritmu, která pracuje se dvěma paprsky r_1 a r_2, které mají opačnou orientaci - r_1 je levostranný a r_2 pravostranný. Pokud se počet průsečíků u paprsků r_1 a r_2 různí, pak bod q leží na hraně polygonu P.

V případech, kdy paprsek prochází bodem q a zároveň hranou/hranami zkoumaného polygonu, je aplikována upravená varianta metody *Ray Crossing*. V takovém případě dojde k tomu, že paprsek rozdělí rovinu na dvě poloroviny. Poté dochází k inkrementaci počtu průsečíků v závislosti na tom, kde se hrana vůči paprsku nachází. Existují dvě varianty aplikace. Tou první je, když se průsečík r a hrana/y mezi body p_{i-1} a p_i nachází v obou polorovinách nebo jen v té horní. Pak inkrementujeme k o příslušný počet průsečíků. Inkrementujeme však i v případě druhé varianty, která nastane, když je hrana p_{i-1}, p_i v obou vzniklých polorovinách nebo pouze v té dolní. Základním pravidlem zavedení této upravené metody do praxe však je, že se obě zmíněné varianty nesmí kombinovat (Bayer 2022).

2.3.1 Pseudokód Ray Crossing

Algorithm 2 Ray Crossing

Pro každý polygon:
    Pro každou hranu $\overline{p_1 p_2}$:
        $p_1(y) < p_2(y)$.
        Paprsek vysíláme od q doprava.
        Pokud bod q leží nad hranou nebo pod hranou nebo napravo od hrany:
            Paprsek neprochází hranou; $k = k$.
        Pokud bod q leží vlevo od hrany:
            Paprsek prochází hranou; $k = k + 1$.

        Pro další případy:
            Výpočet směrnice hrany od bodu p_1 do bodu q.
            Výpočet směrnice od bodu p_1 do bodu q.
        Pokud se sobě směrnice rovnají:
            Bod q leží na hraně.
        Pokud je směrnice k bodu q větší:
            Paprsek prochází hranou; $k = k + 1$.
        Pokud je směrnice k bodu q menší:
            Paprsek neprochází hranou, $k = k$.

    Pokud $k\%2 = 1$:
        $q \in P$.
    Pokud $k\%2 = 0$:
        $q \notin P$.

3 Problematické situace

Problematická se ukázala být situace u metody Winding Number, při níž bod q leží ve směru hrany polygonu ohraničené body p_1 a p_2. Ošetření této singularity bylo učiněno dle následujícího vzorce, do nějž jsou zvlášť dosazovány hodnoty souřadnic x a y:

$$(q - p_1)(q - p_2) = \begin{cases} > 0, & q \notin P, \\ \leq 0, & q \in P. \end{cases}$$

Slovní popis postupu ošetření v kódu, viz kapitola *Pseudokód Winding Number*, *Algorithm 1*, *řádek 22 - 24*. U metody *Ray Crossing* žádná speciální problematická situace řešena nebyla.

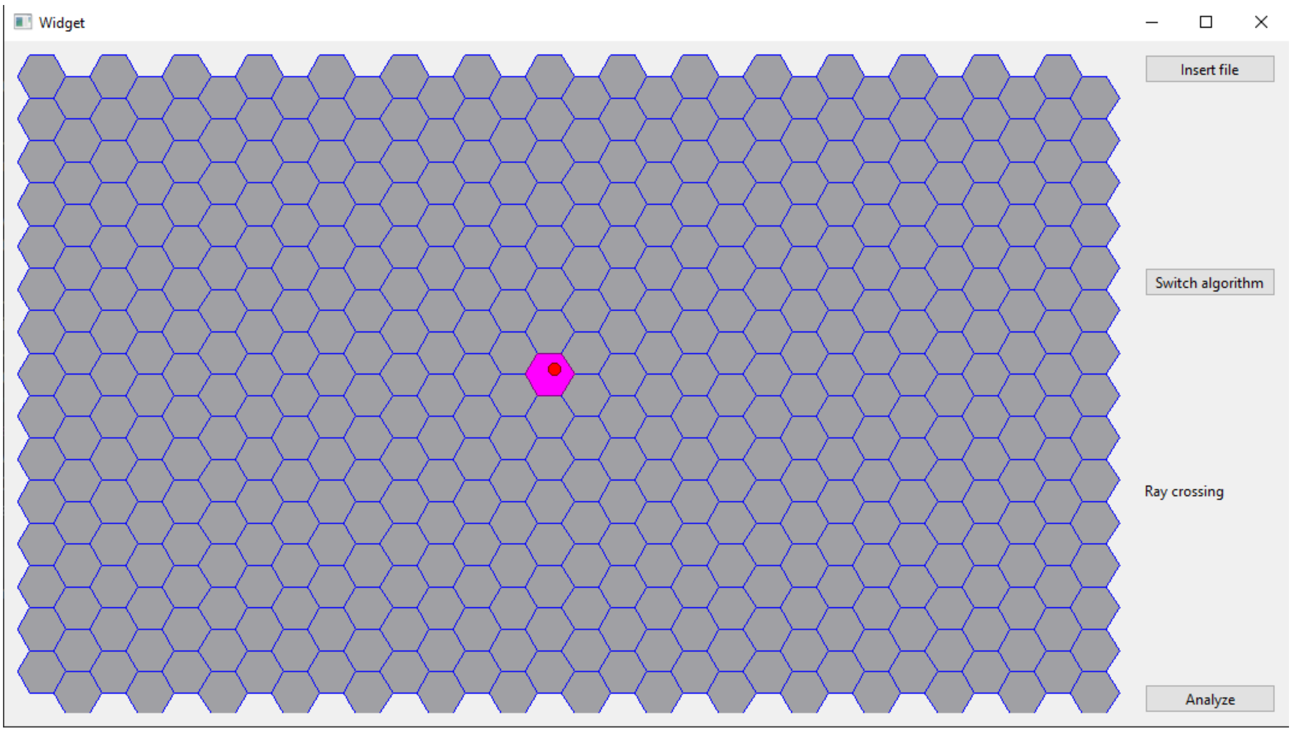
4 Vstupní a výstupní data

Data, která vstupují do programu jsou polygony uložené ve formátu *.shp* (shapefile). Lze analyzovat polygony konvexní i nekonvexní, ale podmínkou je, že musí být v souřadnicovém systému S-JTSK. Pro ukázku je jako příloha k úloze připojen soubor s názvem *honeycomb.shp*, který obsahuje konvexní polygony uspořádané ve tvaru včelí plástve.

Vytvořený program pak nemá žádná výstupní data, která by byla k dispozici jako samostatný soubor. Proto za výstupní data lze označit maximálně grafické znázornění incidujícího polygonu.

5 Ukázka vytvořené aplikace

Na Obrázku 1 lze vidět výsledný *Widget*, neboli grafický výstup vytvořeného kódu. Hlavní část tvoří okno, v němž může uživatel kliknutím stanovit polohu zkoumaného bodu. V pravé části se pak nachází tři tlačítka. Prvním z nich je *Insert File*, pomocí nějž můžeme nahrát soubor s polygony. Prostřední *Switch algorithm* slouží k překliknutí na vybraný algoritmus. V nabídce jsou dva - *Winding Number* a *Ray Crossing*. Tlačítko *Analyze* v pravém dolním rohu pak umožňuje uživateli zahájit proces analýzy, při němž dojde k vypočítání zvoleného algoritmu a následnému určení příslušnosti nakliknutého bodu k některému z polygonů (v případě, že se bod nachází uvnitř některého z nich).



Obrázek 1: Ukázka aplikace vyhledání polohy bodu metodou Ray Crossing

6 Dokumentace

Skript *MainForm.py*, přes který se program spouští, obsahuje třídu uživatelského rozhraní *Ui_MainForm* navrženého pomocí SW *QTCreator*. Pro jednotlivá tlačítka má třída definované metody odkazující na skripty *draw.py* a *algorithms.py*. Skript *draw.py* obsahuje třídu *Draw*, která byla navržena pro vizualizaci objektů ve widgetu uživatelského rozhraní.

Parametry třídy *Draw* jsou:

- objekt *self.q* typu *QPoint* jehož poloha se bude vyšetřovat,
- seznam *self.polygons* objektů typu *QPolygon* vstupních polygonů,
- seznam *self.res_pol* obsahující polygony ke zvýraznění,
- seznam *self.coordinates* obsahující seznamy souřadnic vstupních polygonů,
- seznam *self.extent* obsahující souřadnice rozsahu polygonů,
- seznam *self.canvas_extent* obsahující šířku a výšku widgetu v pixelech.

Metodami třídy *Draw* jsou:

- *insertFile* - načítá vstupní soubor ve formátu *.shp*, ukládá jeho souřadnice do seznamu *self.coordinates* a hledá souřadnicové extrémy, které ukládá do seznamu *self.extent*
- *rescaleData* - škáluje souřadnice polygonů tak, aby se celý soubor vešel do okna widgetu
- *mousePressEvent* - upravuje souřadnice objektu *self.q* kliknutím do prostoru widgetu
- *paintEvent* - vykresluje jednotlivé objekty do okna widgetu
- *getPoint* - vrací objekt *QPoint*
- *getPolygons* - vrací seznam objektů typu *QPolygon* vstupních polygonů
- *setResPol* - přidává polygon do seznamu *self.res_pol*
- *clearResPol* - vyprazdňuje seznam *self.res_pol*

Skript *algorithms.py* obsahuje třídu *Algorithms*, která byla vytvořena pro implementaci Point Location Problem algoritmů.

Parametrem třídy *Algorithms* je:

- Booleovská proměnná *self.winding_num*, která určuje, zdali program momentálně využívá algoritmus Winding Number.

Metodami třídy *Algorithms* jsou:

- *getPointAndLinePosition* – určuje vzájemnou polohu bodu a linie pomocí poloroviny
- *get2LinesAngle* – počítá velikost úhlu svíraného mezi dvěma úsečkami
- *getPositionPointAndPolygon* – určuje vzájemnou polohu bodu a polygonu metodou winding number
- *detectIntersection* – zjišťuje, zdali paprsek vyslaný z bodu doprava prochází úsečkou
- *rayCasting* - určuje vzájemnou polohu bodu a polygonu metodou ray crossing/ray casting
- *isWindingNumber* – vrací hodnotu parametru *self.winding_num*
- *setSource* – provádí negaci parametru *self.winding_num*

7 Závěr

Cílem této úlohy bylo sestavit program pomocí uživatelského rozhraní *Qt*, který by analyzoval polohu vybraného bodu vůči zvoleným polygonům, a to pomocí základních metod *Winding Number* a *Ray Crossing*. Tento program se podařilo úspěšně sestrojit. Ke zdokonalení základního programu vedlo i splnění některých bonusových úloh.

Přesto by však bylo stále možné současný program ještě vylepšit. Chybí zde například ošetření simplexů u metody *Ray Crossing*. Konkrétně jde o ošetření případu, kdy bod leží na hraně polygonu. Výhodou by bylo i zvýraznění všech polygonů, kterých se tato singularita týká.

V celkovém kontextu se však podařilo sestavit funkční program, který poskytuje uživateli relativně uspokojivé výsledky. Zároveň je jednoduchý na používání i pro laickou veřejnost a snadno se v něm orientuje.

8 Seznam literatury

Zdrojový kód programu vznikl z velké části na základě informací z přednášky a cvičení vedených doc. Bayerem (2022). Informace byly čerpány z prezenčních lekcí a zároveň z prezentace dostupné na odkazu https://web.natur.cuni.cz/ bayertom/images/courses/Adk/adk3_new.pdf (cit. 7. 3. 2022)

Alciatore, D., Miranda, R. (1995): A Winding Number and Point-in-Polygon Algorithm. Glaxo Virtual Anatomy Project Research Report.

Huang, C., W., Shih, T., Y. (1997): On the complexity of point-in-polygon algorithms. Computers & Geosciences, 23, 1, 109-118.

Kumar, B. N., Bangi, M. (2018): An Extension to Winding Number and Point-in-Polygon Algorithm. IFAC-PapersOnLine, 51, 1, 548-553.