Задание по теме «Численное интегрирование» (*принимаю до 14 ноября 2024*)

1. Для вычисления интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=0}^{N-1} I_i$ построить составную квадратурную формулу, в которой интегралы

$$I_i = \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f(x)dx, \tag{1}$$

приближённо вычисляются по интерполяционной квадратурной формуле на четырёх узлах равномерной сетки, $\Delta = \frac{b-a}{N}$.

Для простоты выкладок сделать замену $\Delta = 6h$. Получим $\int\limits_{-3h}^{3h} f(x)dx$ и узлы интерполяции в удобной системе координат: $x_0 = -3h, \quad x_1 = -h, \quad x_2 = h, \quad x_3 = 3h$. Использовать интерполяционную формулу Лагранжа.

2. Написать программу для численного нахождения интеграла

$$\int\limits_5^7 e^x \cos x \, dx \tag{2}$$

по составным квадратурным формулам:

1) трапеций

2) парабол (Симпсона)

3) квадратурной формуле из п.1

Входные данные: N — количество элементарных отрезков на отрезке $[a, b]$.

Выходные данные: S — численное значение интеграла (2).

Сравнить результаты численного интегрирования разными методами между собой и с точным значением интеграла.

3. Для каждой из трёх использованных в программе квадратурных формул по правилу Рунге численно определить порядок её точности k.

Правило Рунге для практического определения порядка точности:

Пусть для $[a, b]$ задан шаг равномерной сетки $\Delta_1 = (b - a)/N_1$ и на этой сетке вычислено значение $S_1 \approx I$. Необходимо дополнительно провести ещё два расчёта с шагами $\Delta_2 = \Delta_1/2$ и $\Delta_3 = \Delta_2/2$, получим, соответственно, значения $S_2 \approx I$ и $S_3 \approx I$. Тогда порядок точности метода вычислений определяется по формуле

$$k = \log_2 \left| \frac{S_1 - S_2}{S_2 - S_3} \right|.$$

4. Оценить точность составной квадратурной формулы из п.1 и теоретически обосновать результат из п.3. Листочки с выкладками сдать на проверку.