

Задание по теме «Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений»
(принимая до 12 декабря 2024)

Написать программу для численного решения задачи

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \cos x, \\ y(a) = e^{\sin a} \end{cases} \quad (1)$$

на интервале $[a, b]$ с шагом h по трём разностным схемам:

1. Разностная схема первого порядка (построить по аналогии с п. 3.1 пособия)
2. Симметричная разностная схема второго порядка (построить по аналогии с п. 3.2 пособия)
3. Компактная разностная схема четвёртого порядка (построить по аналогии с п. 4.3 пособия)

В данном случае значение в приграничном узле найти тремя различными способами:

- (a) по схеме первого порядка
- (b) по схеме второго порядка
- (c) по несимметричной компактной схеме третьего порядка

Входные данные: a, b, h .

Результат работы программы: файл с таблицей вида

j	x_j	$y_{ex}(x_j)$	δ_j	p_j
0				
1				
\vdots				

где x_j — узлы основной разностной сетки с шагом h , $y_{ex}(x) = e^{\sin x}$ — точное решение задачи (1),
 $\delta_j = |y_{ex}(x_j) - y_{h_1}(x_j)|$ — численная ошибка на основной разностной сетке,
 p_j — локальный порядок сходимости разностного решения к точному, вычисляемый по правилу Рунге на основе трёх расчётов на сетках с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/3$, $h_3 = h/9$

$$p_j = \log_3 \frac{|y_{h_1}(x_j) - y_{h_2}(x_j)|}{|y_{h_2}(x_j) - y_{h_3}(x_j)|} = \log_{1/3} \frac{|y_{h_2}(x_j) - y_{h_3}(x_j)|}{|y_{h_1}(x_j) - y_{h_2}(x_j)|}.$$

Объяснить (устно) получившиеся результаты.