Notions de corrélation

Fonction de corrélation

L'analyse des variances présentée dans le cours de l'unité probabilité examine la dépendance pouvant exister entre des variables sans tenir compte des éventuels retards pouvant exister entre elles. Les fonctions de corrélation comblent cette lacune en introduisant un paramètre retard.

Les signaux sont considérés ici comme des fonctions réelles. Nous séparons les signaux permanents qui en pratique présentent une puissance finie et les signaux transitoires qui présentent une énergie finie. L'intégration des signaux de la première catégorie doit être rapportée à la durée des calculs pour éviter la saturation de ces derniers. *x(t), y(t)* représentent des signaux analogiques et x_k , y_k des signaux numériques. Les fonctions d'autocorrélation analogique et numérique sont définies, suivant le cas, par les formules suivantes :

Signaux permanents	Signaux transitoires
$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t$	$\widetilde{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t$
$\varphi_x(n) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k x_{k-n}$	$\widetilde{\varphi}_x(n) = \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k x_{k-n}$

Les fonctions d'intercorrélation de signaux analogiques et numériques sont quant à elles définies, suivant le cas, par les formules suivantes :

Signaux permanents	Signaux transitoires
$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t-\tau)\mathrm{d}t$	$\widetilde{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)\mathrm{d}t$
$\varphi_{xy}(n) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k y_{k-n}$	$\widetilde{\varphi}_{xy}(n) = \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k y_{k-n}$

Calcul des fonctions de corrélation

Pour les versions continues, les opérations « multiplication » et « intégration » de signaux analogiques peuvent être réalisées par des circuits électroniques. La principale difficulté est l'obtention de retards τ réglables dans une large proportion. Cette raison a conduit les concepteurs à s'orienter vers des solutions numériques pour réaliser des corrélateurs. En effet les techniques d'échantillonnage, de numérisation et de mémorisation des signaux liées à des processeurs de calculs très rapides, permettent de déterminer les fonctions de corrélation numériques avec beaucoup plus de facilité.

Quelques propriétés

$$\varphi_x(0) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$$

Il s'agit de la puissance moyenne du signal.

$\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau)$; $|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0)$

Théorème de Wiener-Khinchine

Ce théorème stipule que la transformation de Fourier de la fonction d'autocorrélation est la densité spectrale de puissance.

- $\Phi_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\; d\tau$

Avec :

- $\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) e^{\,j2\pi f\tau}\; df$

La puissance moyenne est donnée par :

- $\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)\; df$

Autocorrélation de signaux périodiques

Par définition un signal périodique de période T_0 est classé dans la catégorie des signaux permanents. La fonction d'autocorrélation déterminée sur un intervalle infini est identique à celle déterminée sur une période unique. Soit *x(t)* un signal périodique de période T_0. Celui-ci est décomposable en série de Fourier. Sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k\overline{C_k}\, exp(-jkw_0\tau) = |C_0|^2 + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|C_k|^2 \cos(kw_0\tau)$$

En conclusion, la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est également une fonction périodique de même période. À partir de $\varphi_x(\tau)$, il est possible de retrouver l'amplitude de chaque harmonique de *x(t)* mais toute information concernant leur phase respective est perdue.

Intercorrélation de signaux périodiques de même période

On montre sans difficulté que l'intercorrélation de deux signaux de période identique est également périodique de même période.

Bruit

Tout signal indésirable limitant à un degré ou à un autre les propriétés d'un signal utile peut être considéré comme du bruit. Les sources de bruit son classable en deux grandes catégories : externe et interne.

Bruit externe

La source de bruit est localisée à l'extérieur du système et agit sur celui-ci par influence. On peut distinguer deux origines :

- Les perturbations naturelles (bruits cosmiques, bruits atmosphériques).
- Les perturbations artificielles 'parasites générés par des équipements électriques industriels (poste de soudure à arc électrique, ligne à haute tension, …etc.).

Ces deux types de perturbations peuvent être considérés comme négligeables au-delà d'une fréquence de quelques dizaines de MHz.

Bruit interne

Les causes des perturbations internes peuvent se classer en deux groupes :

Les perturbations impulsionnelle engendrées par des commutations de courant (circuits logiques, interrupteurs, …etc.).

Bruit de fond

C'est un bruit généré dans les câbles et les composants électroniques en raison de la conduction électrique. Il est irréductible (Intraitable) et il résulte du déplacement irrégulier de particules chargées ou sous l'influence de champs appliqués.

Bruit thermique

C'est la tension de bruit qui apparaît sur toute résistance. Il est appelé effet Johnson et il se traduit par une tension moyenne efficace b_{eff}^2 , elle est donnée par :

$$b_{eff}^2 = 4.k.T.R.\Delta f$$

K : La constante de Boltzmann ($1.38\text{x}10^{-23}$) $J.K^{-1}$

T : La température (en °K).

R : La résistance en Ω.

Δf : La bande de fréquence du système à l'entrée duquel on suppose que la résistance est branchée.

Pour une résistance constante la puissance total du bruit thermique est donnée par :

$P_{th} = k.T.\Delta.f$

Bruit blanc

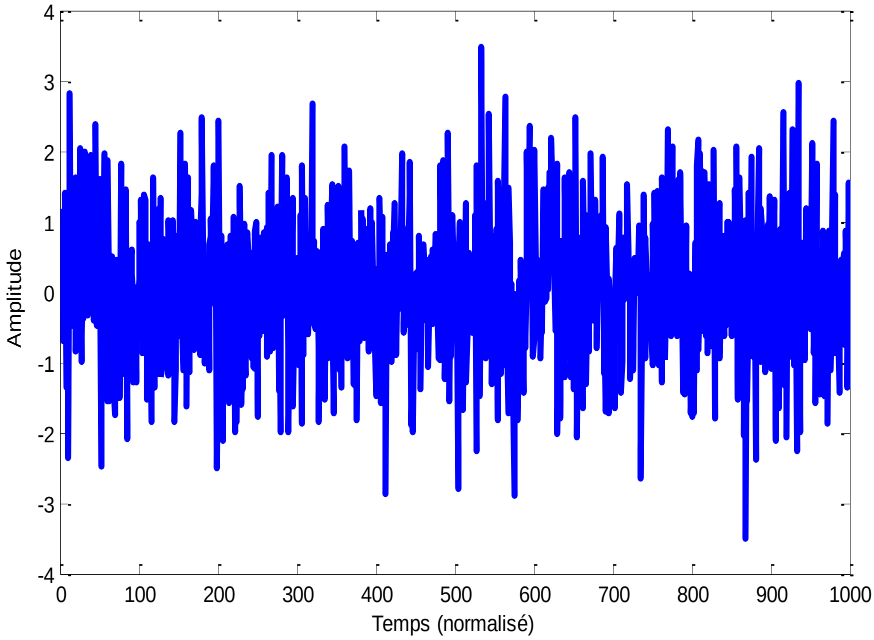


Figure.1. Fonction échantillon d'un bruit blanc gaussien additif (AWGN)

Dans une bande de fréquences considérées, ce bruit a une densité spectrale de puissance (DSP) constante. Il a une densité de probabilité gaussienne. Sa DSP est donnée par :

$N(f) = N_0$ Avec $N_0 = \frac{1}{2}kT$.

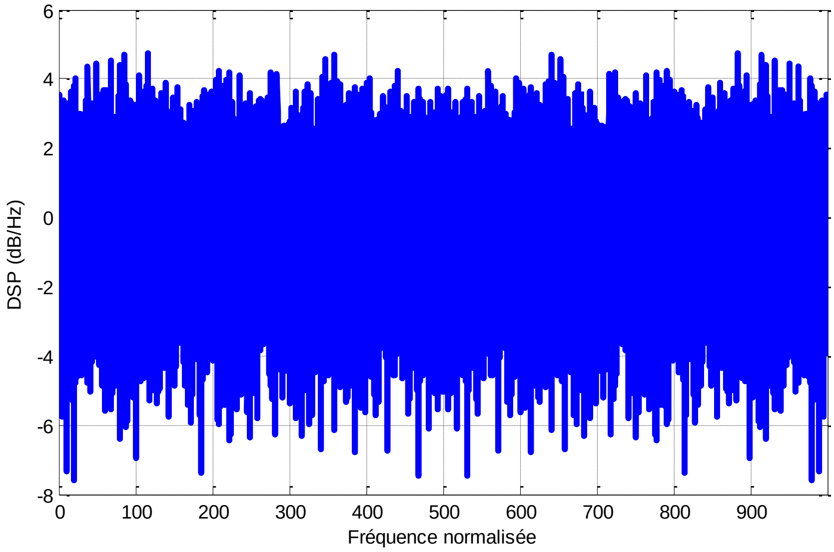


Figure.2. DSP d'un bruit blanc gaussien additif (AWGN)

Ce bruit est appelé bruit blanc par analogie avec la lumière blanche. Sa fonction d'autocorrélation temporelle $R_{bb}(\tau)$ est la transformée de Fourier inverse de la DSP. Elle a une forme d'une impulsion de Dirac ce qui montre que le bruit est un signal aléatoire parfait c'est-à-dire totalement décorrélé. La DDP du bruit est illustré sur la figure suivante :

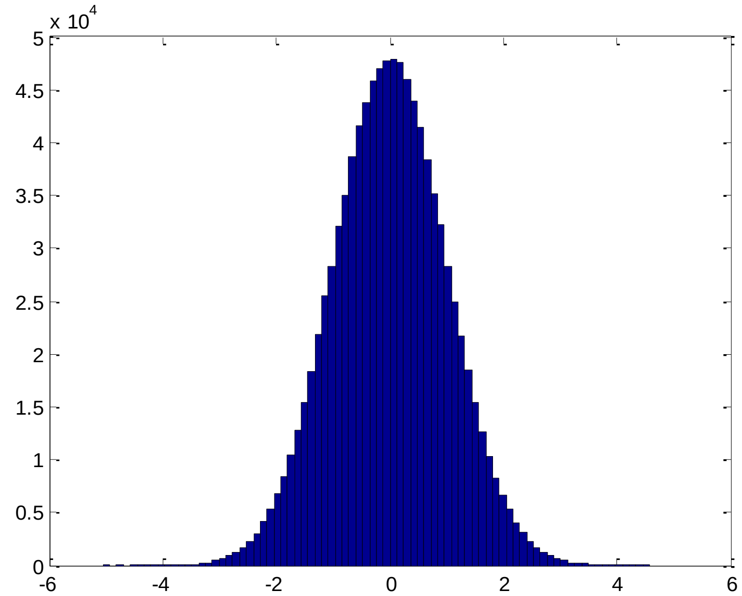


Figure.3. DDP du Bruit blanc Gaussien Additif

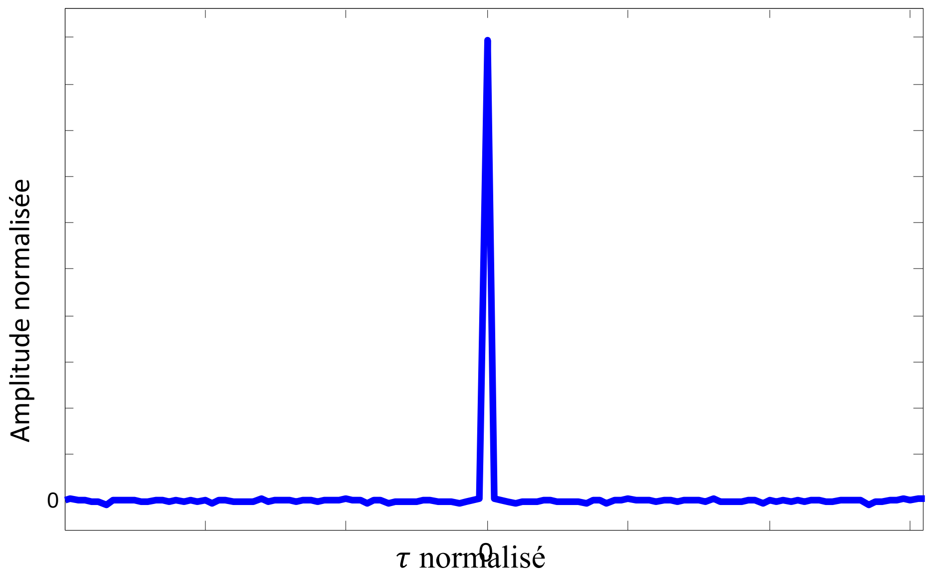


Figure.4. Autocorrélation d’un bruit blanc gaussien additif (AWGN)

Bruit rose

Il s’agit d’une version plus réaliste du bruit (le souffle parasite émis par un amplificateur audio par exemple) pour laquelle on considère une densité spectrale de puissance constante sur une bande de fréquence limitée à l’intervalle $[-B; B]$. Plus la nature d’un signal est aléatoire et plus sa fonction d’autocorrélation se rapproche d’une impulsion à l’origine.

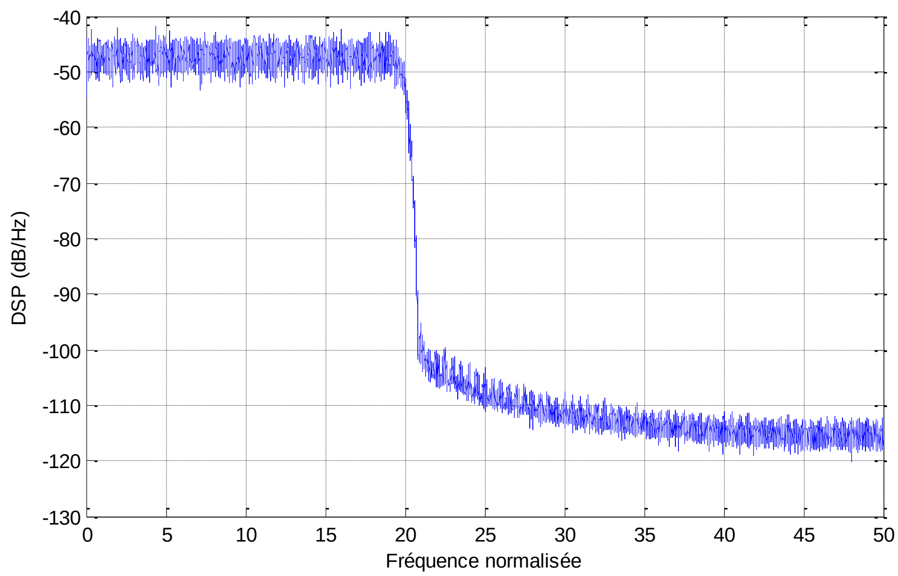


Figure.5. DSP d’un bruit rose

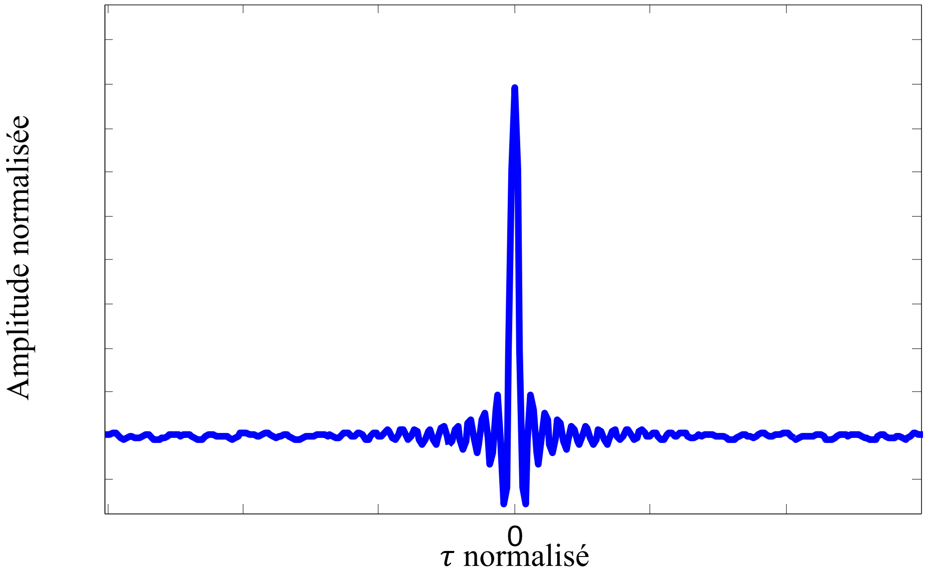


Figure.6. Autocorrélation d'un bruit rose

Identification des systèmes par corrélation

Cette opération est utilisée pour déterminer la réponse impulsionnelle du système à identifier.

Système à l'arrêt

Soit un SLIT de réponse impulsionnelle *h(t)* à déterminer. Un signal *e(t)* appliqué à l'entrée donne en sortie un signal *s(t)*.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Si *e(t)* est un bruit blanc gaussien additif (BBGA) *b(t)* de DSP $S_{bb}(f)$, il en résulte que sa foction d'autocorrélation est une impulsion de Dirac de la forme :

$$R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

La fonction d'intercorrélation entrée sortie est donnée par :

$$R_{es}(\tau) = E[e(t)s(t+\tau)] = E[b(t)[b(t+\tau) * h(t+\tau)]].$$

$$R_{es}(\tau) = \mathrm{h}(\tau) * R_{bb}(\tau).$$

$$R_{es}(\tau) = \mathrm{h}(\tau) * \frac{N_0}{2}\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}\mathrm{h}(\tau).$$

Si le signal test est un BBGA, la fonction d'intercorrélation entrée sortie est donc la réponse impulsionnelle du système.

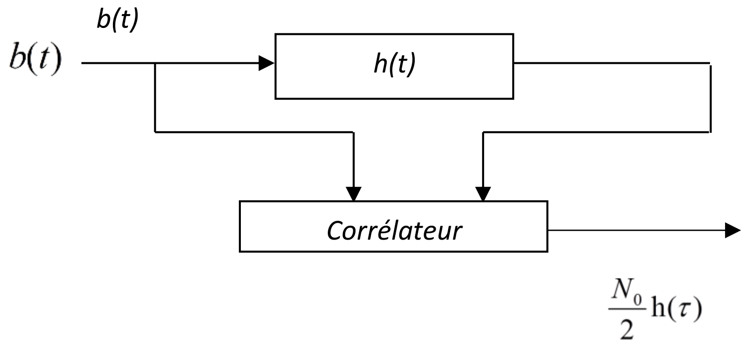


Figure.7. Identification d'un Système à l'arrêt

Système en fonctionnement

Dans ce cas en ajoutant à l'entrée d'un système, en fonctionnement, un bruit comme l'illustre la figure en dessous.

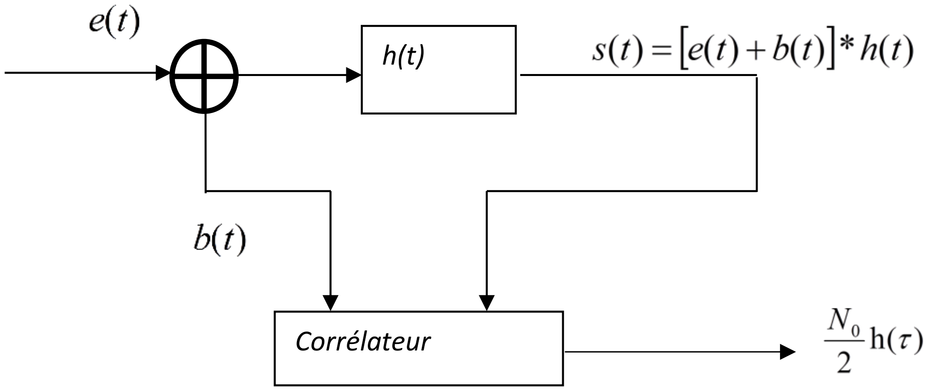


Figure.8. Identification d'un Système en fonctionnement

La fonction d'intercorrélation bruit-sortie est donnée par :

$$R_{bs}(\tau) = E[b(t)s(t+\tau)] = E[b(t)[(e(t+\tau) + b(t+\tau)) * h(t+\tau)]]$$

$$R_{bs}(\tau) = E[b(t)(e(t+\tau) * h(t+\tau))] + E[b(t)(b(t+\tau) * h(t+\tau))].$$

$$R_{bs}(\tau) = \mathrm{h}(\tau) * R_{be}(\tau) + \mathrm{h}(\tau) * R_{bb}(\tau).$$

Puisque le bruit *b(t)* n'est pas corrélé avec le signal *e(t)* alors :

$$R_{be}(\tau) = 0.$$

Ce qui nous donne :

$$R_{be}(\tau) = \mathrm{h}(\tau) * R_{bb}(\tau).$$

$$R_{be}(\tau) = \mathrm{h}(\tau) * \frac{N_0}{2}\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}\mathrm{h}(\tau).$$

Détection de la périodicité d'un signal noyé dans du bruit blanc gaussien additif.

Soient un signal réel périodique $x(t)$ et un bruit $b(t)$, indépendant de $x(t)$. Le signal complet à traiter est donné par la somme de ces deux signaux

$s(t)=x(t)+b(t)$.

La fonction d'autocorrélation $R_{ss}(\tau)$ de ce signal est donnée par :

$$R_{ss}(\tau) = E[s(t)s(t+\tau)] = E[(x(t)+b(t))(x(t+\tau)+b(t+\tau))]$$

Etant donné la propriété de distributivité de l'opérateur de corrélation, il vient :

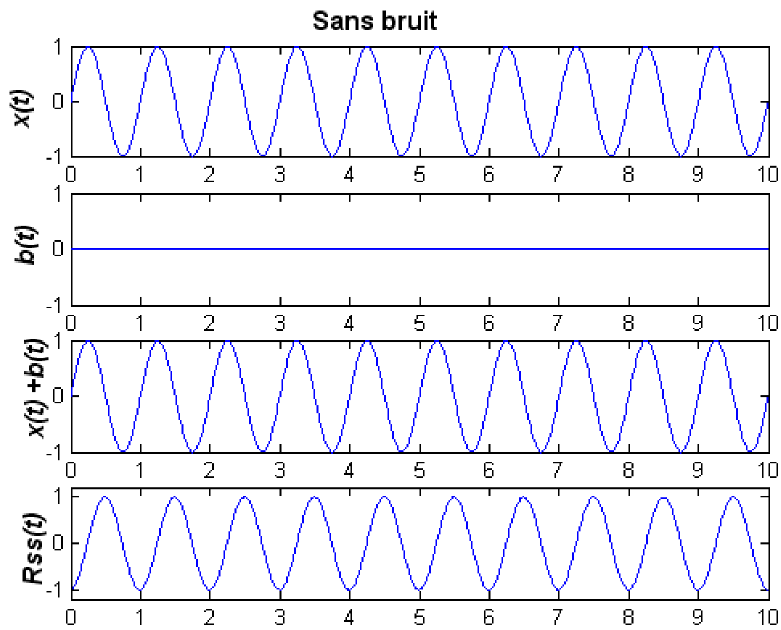
$$R_{ss}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{xb}(\tau) + R_{bx}(\tau) + R_{bb}(\tau).$$

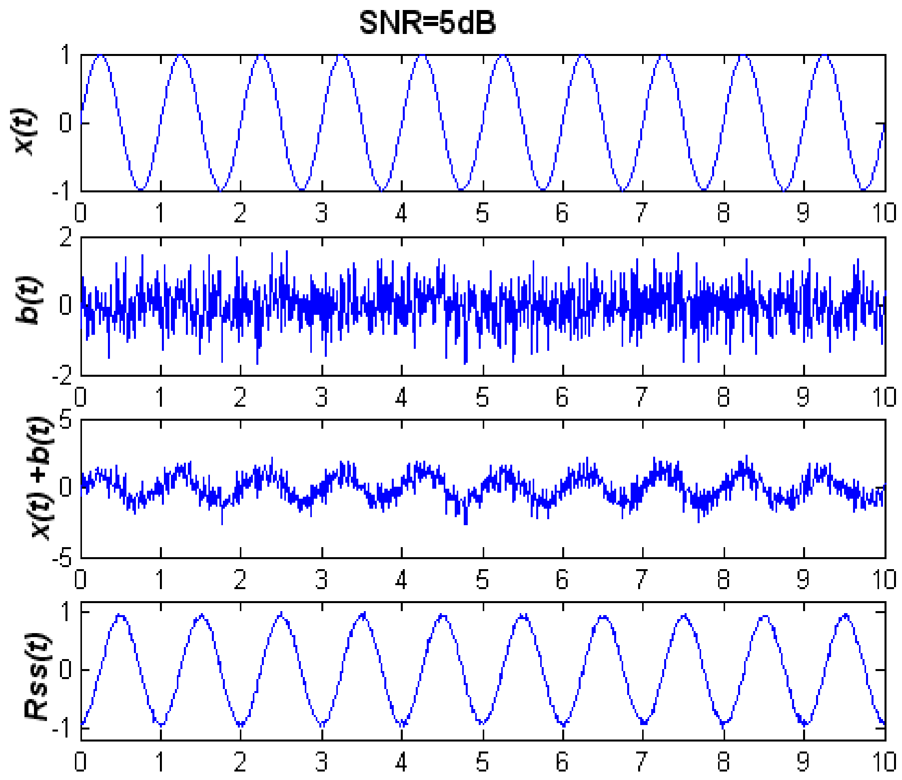
Or les deux fonctions $R_{bx}(\tau)$ et $R_{xb}(\tau)$ sont nulles, car les deux signaux sont non corrélés. Ce résultat sera d'autant plus vrai que la durée d'observation sera grande. Dans le cas où $b(t)$ est un bruit blanc gaussien aditif la fonction $R_{bb}(\tau)$ est nulle en dehors de *« 0 »*. Par conséquent nous avons en sortie du corrélateur la fonction d'autocorrélation du signal informatif.

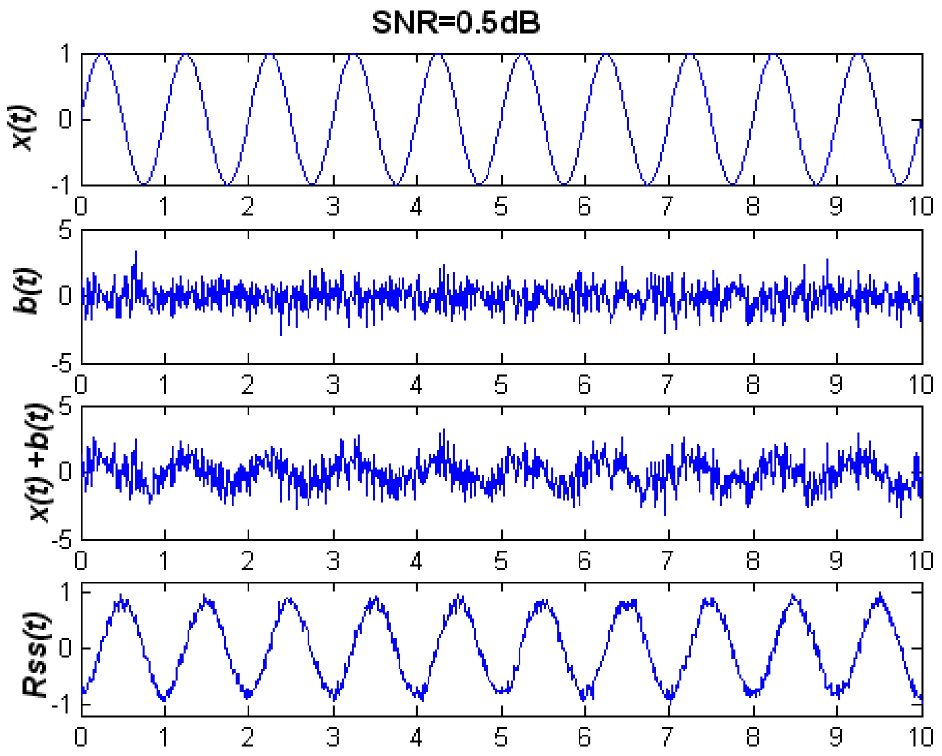
$$R_{ss}(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

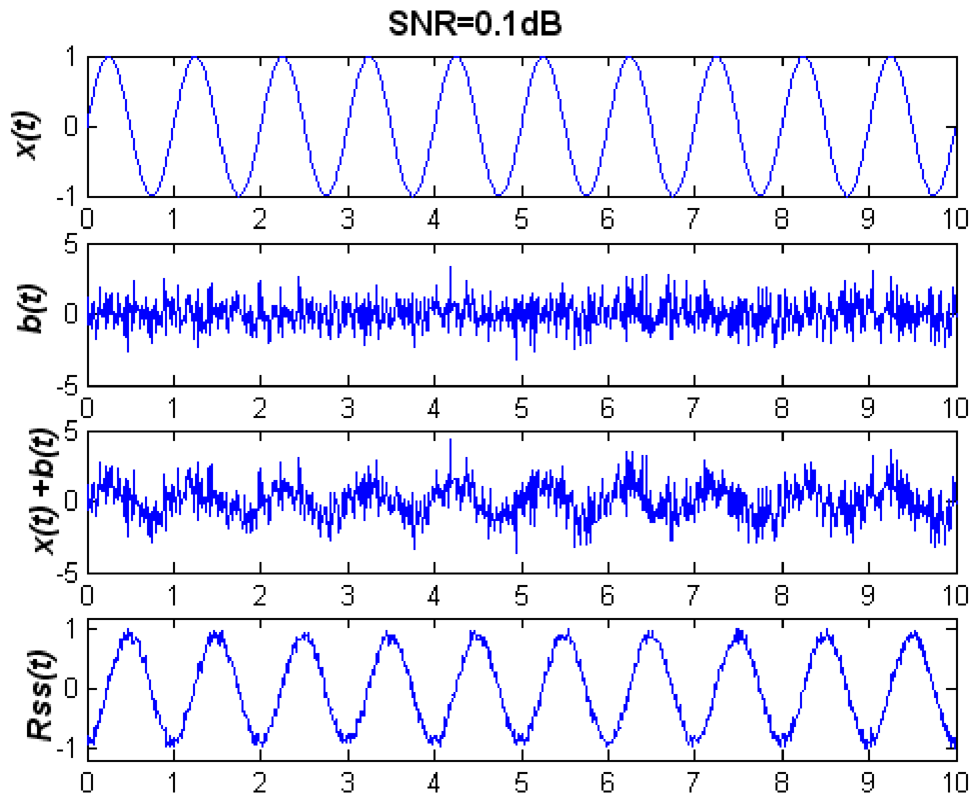
Cas d'un signal sinusoïdal

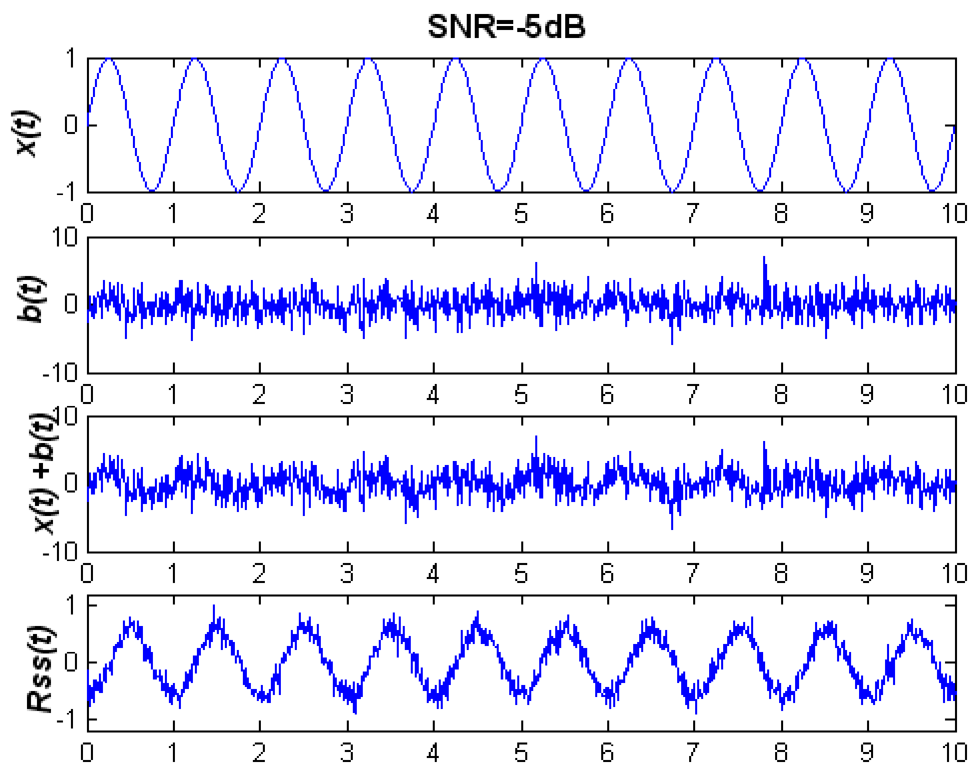
Considérant un signal $x(t)$ bruité. C'est un signal sinusoïdal pur auquel a été ajouté un bruit BBGA pour différente valeur du *SNR*.




SNR=5dB
x(t)
b(t)
x(t)+b(t)
Rss(t)


SNR=0.5dB
x(t)
b(t)
x(t)+b(t)
Rss(t)


SNR=0.1dB
x(t)
b(t)
x(t) +b(t)
Rss(t)


SNR=-5dB
x(t)
b(t)
x(t) +b(t)
Rss(t)

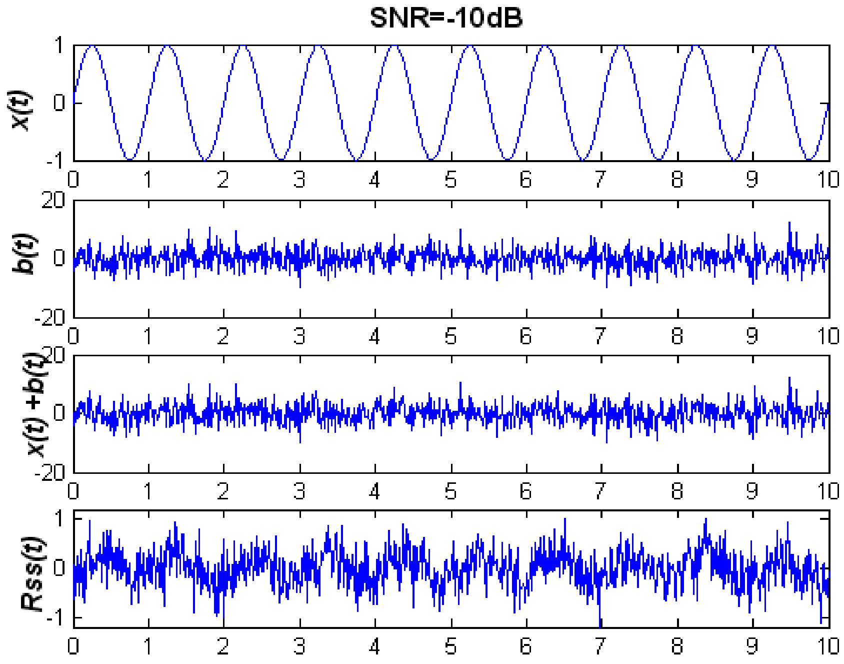
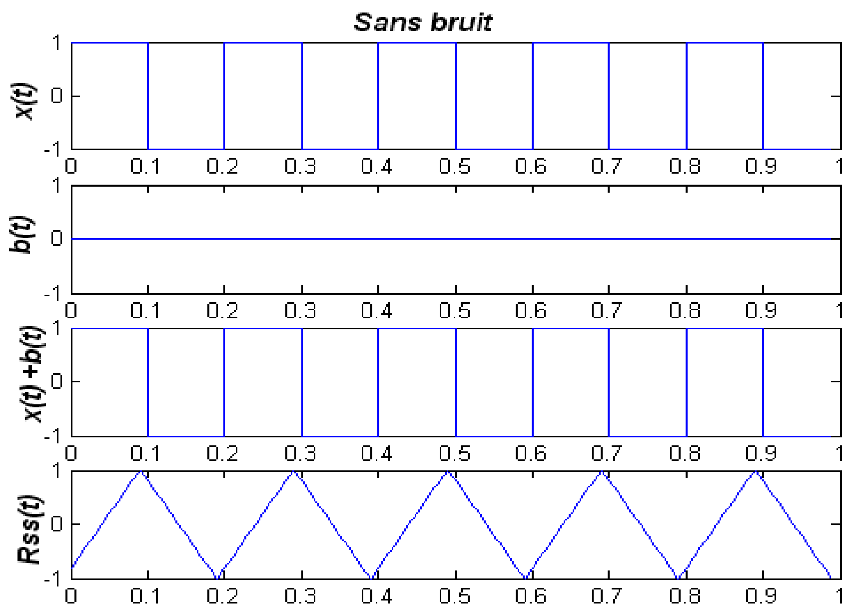
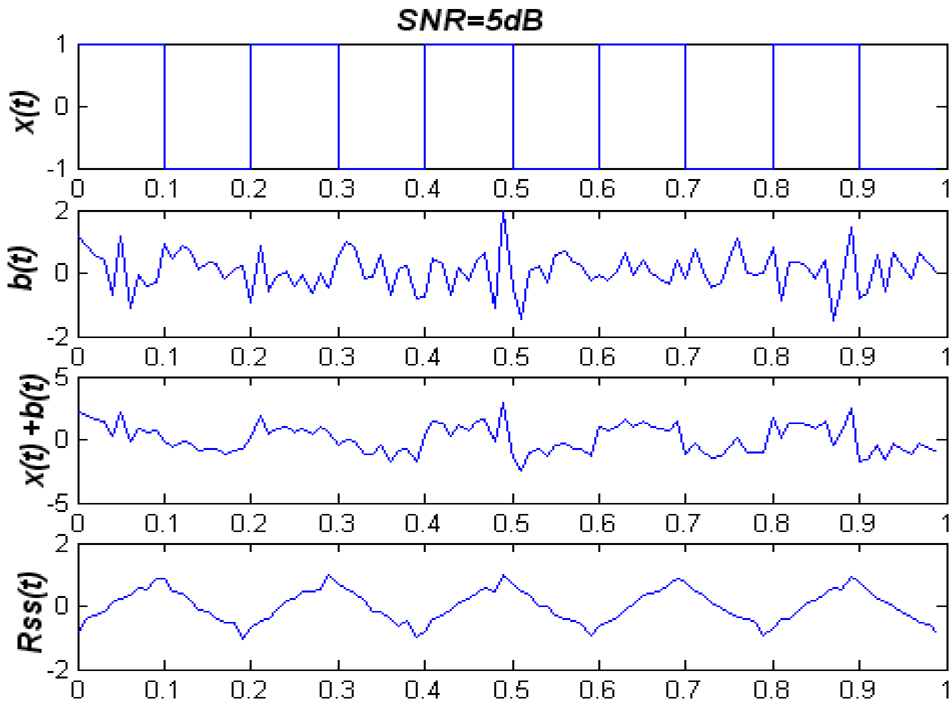


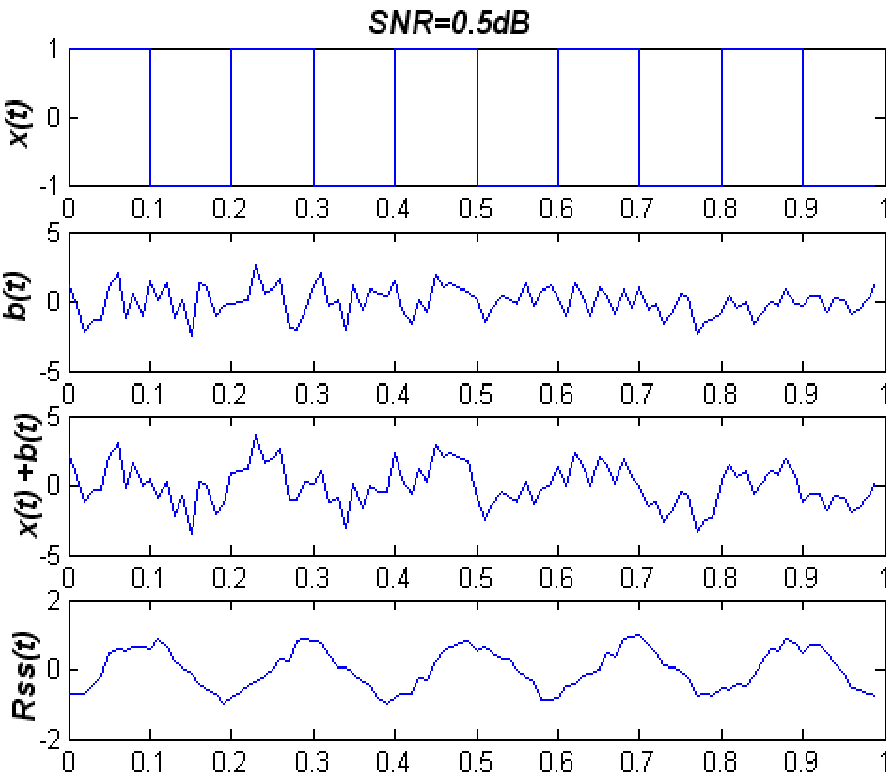
Figure.9. Détection asynchrone par corrélation pour différente valeurs du SNR (Signal sinusoïdal)

Cas d'un signal carré

Considérant un signal *x(t)* bruité. C'est un signal carré auquel a été ajouté un signal de bruit blanc gaussien additif pour différente valeur du *SNR*.




SNR=5dB
x(t)
b(t)
x(t)+b(t)
Rss(t)


SNR=0.5dB
x(t)
b(t)
x(t)+b(t)
Rss(t)

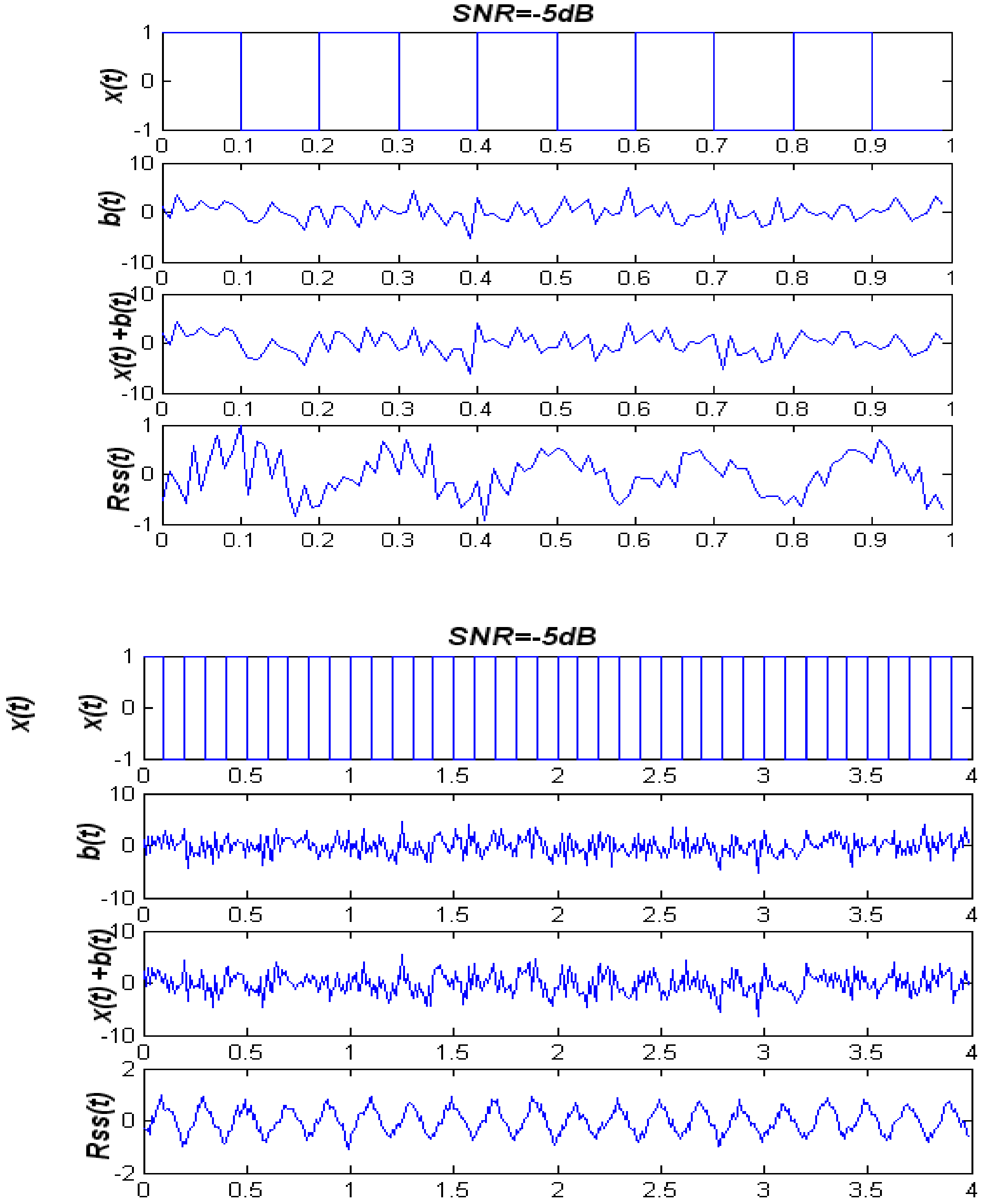


Figure.10. Détection asynchrone par corrélation pour différente valeurs du SNR (Signal carré)

Puisque la fonction de corrélation d’un signal périodique est périodique de même période, alors les deux fonctions de corrélation des deux signaux précédents donnent les périodes des deux signaux.

Détection synchrone d’un signal périodique noyé dans du bruit.

Cette méthode de détection d’un signal noyé dans le bruit peut être encore plus efficace en termes d’extraction d’un signal faible par rapport au bruit en réalisant une détection synchrone. En effet, au lieu de faire l'autocorrélation du signal bruité *s(t)*, le procédé consiste à réaliser la corrélation de ce signal *s(t)* avec un signal sinusoïdal pur$x_p(t)$.

Dans ce cas, nous avons la fonction de corrélation :

$$R_{sxp}(\tau) = R_{xxp}(\tau) + R_{bxp}(\tau)$$

De même que précédemment, la fonction $R_{bxp}(\tau)$ est nulle ou devient nulle, si le temps d'observation est suffisamment grand.

➔ $R_{sxp}(\tau) = R_{xxp}(\tau)$

La détection dans ce cas est plus efficace est autorise des rapports signal sur bruit très faible.

Exemple -3-

Considérant le signal *x(t)* du premier exemple auquel a été ajouté un BBGA pour une valeur très faible du duSNR « SNR=-20dB ».

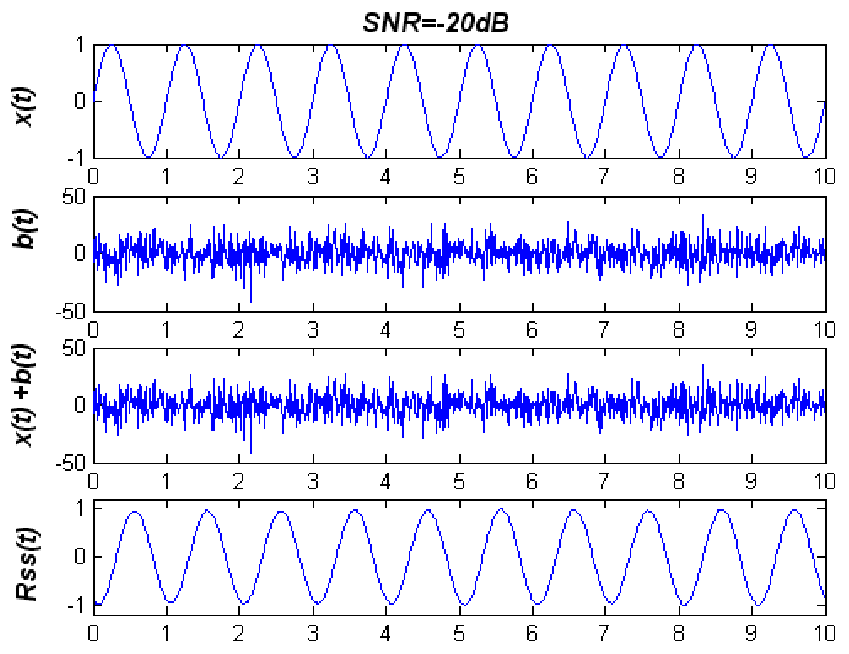


Figure.11. Détection synchrone par corrélation pour différente valeurs du SNR (Signal sinusoïdal)

Cette méthode de détection est très puissante. Elle est très utilisée dans le domaine de la radioastronomie pour déterminer les pulsations radioélectriques d'étoiles lointaines. Cette opération est effectuée par une variation de la fréquence.