Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа бизнеса высоких технологий
(ФБВТ)

для студентов 1 курса
на весенний семестр
2023–2024 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2024

Сборник программ и заданий для студентов 1 курса
на весенний семестр 2023–2024 учебного года. Физтех-школа бизнеса высоких технологий (ФБВТ). – Москва : МФТИ, 2024. – 28 с.

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа бизнеса высоких технологий
(ФБВТ)

для студентов 1 курса
на весенний семестр
2023–2024 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова, Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *В.А. Дружининой*

Подписано в печать 16.01.2024. Формат 60 ×84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 1,75. Тираж 30 экз.
Заказ № 13.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 Тел. (495) 408-58-22,
e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: теплота и молекулы**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
27.03.03 «Системный анализ и управление»
38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **общей физики**
курс: 1
семестр: 2

лекции – 20 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 40 часов

Экзамен – 2 семестр
Диф. зачёт – 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90

Самостоятельная работа:
теор. курс – 55 часов
физ. практикум – 50 часов

Программу и задание составили:
к.ф.-м.н., доц. Г. И. Лапушкин
к.ф.-м.н., доц. И. В. Лилиенберг
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.ф.-м.н., доц. И. С. Юдин

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 12 декабря 2023 г.

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., профессор А. В. Максимычев

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЫ

1. Основные понятия, задачи и методы молекулярной физики. Макроскопические параметры, термодинамическая система, термодинамические параметры, термодинамическое равновесие. Термическое и калорическое уравнения состояния. Идеальный газ. Связь давления идеального газа с кинетической энергией молекул. Уравнение состояния идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа. Идеально-газовое определение температуры. Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Теплоёмкости при постоянном объёме и постоянном давлении, соотношение Майера для идеального газа. Адиабатический и политропический процессы. Адиабата и политропа идеального газа. Скорость звука в газах.
2. Циклические процессы. Тепловые машины. КПД тепловой машины. Цикл Карно. Теоремы Карно. Холодильная машина и тепловой насос. Обратимые и необратимые процессы. Второе начало термодинамики. Эквивалентные формулировки второго начала. Неравенство Клаузиуса. Термодинамическое определение энтропии. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах, закон возрастания энтропии. Энтропия идеального газа. Неравновесное расширение идеального газа в пустоту.
3. Термодинамические функции и их свойства. Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, энергия Гиббса. Преобразования термодинамических функций. Соотношения Максвелла. Применение термодинамических потенциалов. Поверхностные явления. Краевые углы, смачивание и несмачивание. Формула Лапласа. Свободная и внутренняя энергия поверхности.
4. Экстенсивные и интенсивные величины. Химический потенциал. Фаза и агрегатное состояние. Условия равновесия фаз. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кривая фазового равновесия «жидкость–пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры. Фазовые диаграммы. Тройная точка. Диаграмма состояния «лёд–вода–пар». Критическая точка. Метастабильные состояния. Перегретая жидкость и переохлаждённый пар. Зависимость давления пара от кривизны поверхности жидкости. Кипение. Роль зародышей в образовании фазы.
5. Газ Ван-дер-Ваальса как модель реального газа. Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа Ван-дер-Ваальса и их связь с изотермами реальной системы. Правило Максвелла, правило рычага. Критические параметры и приведённое уравнение состояния. Адиабата газа Ван-дер-Ваальса. Неравновесное расширение газа Ван-дер-Ваальса в пустоту. Уравнение Бернулли. Изоэнтропическое течение идеального газа, истечение газа из отверстия
6. Элементы теории вероятностей. Дискретные и непрерывные случайные величины, плотность вероятности. Условие нормировки. Средние

величины и дисперсия. Независимые случайные величины. Нормальный закон распределения. Распределение Максвелла: распределения частиц по компонентам скорости и абсолютным значениям скорости. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости. Распределение Максвелла по энергиям. Элементы молекулярно-кинетической теории. Плотность потока частиц, движущихся в заданном направлении. Среднее число и средняя энергия частиц, вылетающих в вакуум через малое отверстие в сосуде.

7. Распределение Больцмана в поле внешних сил. Барометрическая формула. Распределение Максвелла—Больцмана. Элементы статистической физики классических идеальных систем. Фазовое пространство, макро- и микросостояния, статистический вес макросостояния. Статистическое определение энтропии. Статистическая сумма. Аддитивность энтропии независимых подсистем. Изменение энтропии при смешении газов, парадокс Гиббса.

8. Приложения статистической физики. Классическая теория теплоёмкостей: закон равномерного распределения энергии теплового движения по степеням свободы. Теплоёмкость кристаллов (закон Дюлонга–Пти). Элементы квантовой теории теплоёмкостей. Замораживание степеней свободы, характеристические температуры. Зависимость теплоёмкости C_V газов от температуры. Статистическая температура. Свойства двухуровневой системы, инверсная заселённость.

9. Флуктуации. Связь вероятности флуктуации с изменением энтропии системы. Флуктуации аддитивных величин, зависимость флуктуаций от числа частиц. Флуктуация числа частиц в выделенном объёме. Зависимость дисперсии суммы независимых слагаемых от их числа («закон $\sqrt{N}$»). Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов.

10. Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Распределение молекул по длинам свободного пробега. Явления молекулярного переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Законы Фика, Фурье и Ньютона. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение диффузии и теплопроводности. Броуновское движение макроскопических частиц. Закон Эйнштейна–Смолуховского для смещения броуновской частицы.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Кириченко Н.А.* Термодинамика, статистическая молекулярная физика. – Москва : Физматкнига, 2012.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Физматлит, 2006.
3. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 2. Квантовая и статистическая физика / под ред. Ю. М. Ципенюка. Ч. V. Главы 1–4. – Москва : Физматлит, 2001.
4. *Белонучкин В.Е.* Краткий курс термодинамики. – Москва : МФТИ, 2010.
5. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1 / под ред. А. Д. Гладуна. – Москва : МФТИ, 2012.
6. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / под ред. В. А. Овчинкина (3-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2013.

Дополнительная

1. *Щёголев И.Ф.* Элементы статистической механики, термодинамики и кинетики. – Москва : Янус, 1996. – Москва : Интеллект, 2008.
2. *Базаров И.П.* Термодинамика. – Москва : Высшая школа, 1983.
3. *Рейф Ф.* Статистическая физика (Берклеевский курс физики). Т. 5. – Москва : Наука, 1972.
4. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — Москва : Лаборатория знаний, 2017.
5. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – Москва : Мир, 2009.
6. *Корявов В.П.* Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Высшая школа, 2009.
7. *Прут Э.В., Кленов С.Л., Овсянникова О.Б.* Введение в теорию вероятностей в молекулярной физике. – Москва : МФТИ. 2002. Элементы теории флуктуаций и броуновского движения в молекулярной физике. – Москва : МФТИ, 2002.
8. *Булыгин В.С.* Теоремы Карно. – Москва : МФТИ, 2012; Теплоёмкость и внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса. – Москва : МФТИ, 2012; Некоторые задачи теории теплопроводности. – Москва : МФТИ, 2006; Теплоёмкость идеального газа. – Москва : МФТИ, 2019.
9. *Попов П.В.* Диффузия. – Москва : МФТИ, 2016.

Электронные ресурсы

http://physics.mipt.ru/S_II/method/

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 1-го курса ФБВТ на весенний семестр 2023/2024 учебного года

Дата	№ сем.	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
1–7 февр.	**1**	Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Адиабатический и политропический процессы.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	1.40 1.49 1.50 2.9	1.39 1.54 Т1 2.6
8–14 февр.	**2**	Тепловые машины. Второе начало термодинамики.	$^{0}4$ $^{0}5$ $^{0}6$	3.7 3.24 3.47	3.9 3.27 3.44
8–14 февр.	**3**	Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах.	$^{0}7$ $^{0}8$	Т2 4.75 Т3	4.58 4.40 4.57
15–21 февр.	**4**	Термодинамические потенциалы. Поверхностное натяжение.	1.2 $^{0}9$ $^{0}10$	5.16 5.42 12.8 12.17	5.20 5.41 12.9 12.13
22–28 фев.	**5**	Фазовые превращения. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса. Кипение.	$^{0}11$ $^{0}12$ $^{0}13$	11.13 11.16 12.51	11.10 11.21 12.56
22–28 фев.	**6**	Реальные газы. Истечение газа.	$^{0}14$ $^{0}15$ $^{0}16$	6.22 6.45 2.15	6.24 6.40 2.11
29 фев.– 6 мар.	**7**	Контрольная работа по 1-му заданию (по группам).			
7–13 мар.	**8**	Сдача 1-го задания.			
7–13 мар.	**9**	Основы молекулярно-кинетической теории. Распределение Максвелла.	$^{0}17$ $^{0}18$	7.14 7.21 7.47	7.16 7.24 7.66
14–20 мар.	**10**	Основы молекулярно-кинетической теории. Распределение Больцмана.	$^{0}19$ $^{0}20$ $^{0}21$	8.10 8.24 8.27 8.38	8.11 8.13 8.28 8.30

21–27 мар.	**11**	Элементы статистической физики. Теория теплоёмкостей. Статистический смысл энтропии.	$^{0}22$ $^{0}23$	8.59 8.39 Т3	8.72 8.57 Т4
21–27 мар.	**12**	Флуктуации	$^{0}24$ $^{0}25$ $^{0}26$	9.28 9.23 9.40	9.8 9.22 9.25
28 мар.– –3 апр.	**13**	Столкновения, длина свободного пробега, явления переноса. Броуновское движение. Течение газов. Явления в разреженных газах.	$^{0}27$ $^{0}28$ $^{0}29$ $^{0}30$	10.82 Т5 10.92 10.68/69	10.11 10.31 10.83 10.120
4–10 апр.	**14**	Контрольная работа по 1-му заданию (по группам).			
4–10 апр.	**15**	Сдача 2-го задания.			

Примечание

Номера задач указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 1. Механика, термодинамика и молекулярная физика” / под ред. В. А. Овчинкина (4-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2016.

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

0 — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;

I — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения. Должны быть решены вместе с задачами группы «0» следующего семинара

Задачи 0 группы

1. В комнате объёмом V в течение некоторого времени был включён нагреватель. В результате температура воздуха увеличилась от T_1 до T_2. Давление в комнате не изменилось. Найти изменение внутренней ΔU энергии воздуха, содержащегося в комнате.

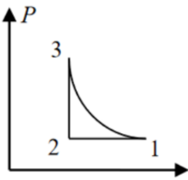
2. Найти работу, которую совершает моль воздуха, расширяясь от объёма V_0 до $V_1 = 2V_0$ в изотермическом процессе при комнатной температуре.

Ответ: 1,7 кДж.

3. Температура воздуха равна $T = 273$ К. Найти изменение скорости звука при изменении температуры на $\Delta T = 1$ К.

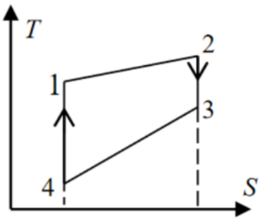
Ответ: $\Delta c_s \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} c_s = 0{,}61$ м/с.

4. Вычислить КПД цикла, состоящего из изобарного сжатия, изохорного нагревания и адиабатического расширения, если отношение максимального и минимального объёмов равно 2. Рабочее тело – двухатомный идеальный газ.



Ответ: 0,15.

Тепловая машина с неизвестным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рисунке в координатах TS. $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{3}{4}T_1$, $T_4 = \frac{1}{20}T_1$. Найти КПД цикла.



Ответ: 0,68.

5. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу (тепловой насос), отбирает от первого резервуара 65 Дж теплоты и передаёт количество теплоты 80 Дж второму резервуару при T = 320 К. Определить температуру первого резервуара.

Ответ: 260 К.

6. Два теплоизолированных сосуда равного объёма соединены трубкой с краном. В одном сосуде содержится 10 г водорода H_2, второй откачан до высокого вакуума. Кран открывают и газ расширяется на весь объём. Считая газ идеальным, найти изменение его энтропии к моменту установления равновесия.

Ответ: $\Delta S = 28{,}8$ Дж/К.

7. Кусок льда массой 90 г, имеющий температур 0°С, положили в пустую алюминиевую кастрюлю массой 330 г, нагретой до 100°С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, найти изменение энтропии системы к моменту установления равновесия. Теплота плавления льда 330 Дж/г, теплоёмкость алюминия 0,9 Дж/(г · К).

Ответ: $\Delta S = 16{,}1$ Дж/К.

8. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы разделить сферическую каплю масла массой $m = 1$ г на капельки диаметром $d = 2\cdot10^{-4}$ см, если процесс дробления изотермический. Поверхностное натяжение масла $\sigma = 26$ дин/см, плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3.

Ответ: $8{,}7\cdot10^5$ эрг.

9. На какую высоту поднимается вода между двумя плоскими параллельными пластинами, расстояние между которыми $h = 0{,}1$ мм, если краевой угол смачивания $\theta = 60°$. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Ответ: 7,5 см.

10. Молярная теплота парообразования воды в точке кипения при $t = 100$ °С равна $\Lambda = 40{,}7$ кДж/моль. Считая водяной пар идеальным газом, найти разность молярных внутренних энергий жидкой воды и водяного пара при данной температуре.

Ответ: $u_{\text{п}} - u_{\text{ж}} = 37{,}6$ кДж/моль.

11. Определить температуру кипения воды на вершине Эвереста, где атмосферное давление составляет 250 мм рт. ст. Теплоту парообразования воды считать не зависящей от температуры и равной $\Lambda = 2{,}28$ кДж/г.

Ответ: $71°$C.

12. Оценить относительный перепад давления $\Delta P/P$ паров воды на высоте подъёма воды в полностью смачиваемом капилляре диаметром $d = 1$ мкм. Поверхностное натяжение $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, температура $t = 20°$C.

Ответ: $\Delta P/P \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

13. Во сколько раз давление газа Ван-дер-Ваальса больше его критического давления, если известно, что его объём в 5 раз, а температура в 5,7 раза больше критических значений этих величин?

Ответ: $\pi = 3{,}14$.

14. Найти изменение энтропии идеального газа, подвергнутого дросселированию через пористую перегородку, если начальное давление равно $P_1 = 4$ атм, конечное $P_2 = 1$ атм.

Ответ: 11,5 Дж/К.

15. Оценить максимально возможную скорость истечения воздуха при нормальных условиях через отверстие, выходящее в вакуум.

Ответ: 740 м/с.

16. Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до v_0. Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

Ответ: $0{,}5v_0$; $v_0/\sqrt{3}$; $v_0/2\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$.

17. Найти наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул азота при T = 300 К. Сравнить полученные значения со скоростью звука.

Ответ: $v_{\text{н.в.}} = 421$ м/с, $v_{\text{ср}} = 476$ м/с, $v_{\text{кв}} = 517$ м/с; $c_{\text{зв}} = 353$ м/с.

18. Определить, на какой высоте в изотермической атмосфере её плотность уменьшится в 5 раз, если на высоте 5,5 км она уменьшается в 2 раза.

Ответ: 12,8 км.

19. Молекула может находиться на двух энергетических уровнях: основном и возбуждённом. Разность энергий между ними составляет $\Delta E = 6{,}0 \cdot 10^{-21}$ Дж. Какова доля молекул, находящихся в возбуждённом состоянии при $t = 250°\text{C}$?

Ответ: 0,3.

20. Определить температуру, при которой средняя поступательная энергия молекулы H_2 будет равна энергии возбуждения её первого вращательного уровня. Расстояние между атомами равно $d = 0{,}74 \cdot 10^{-8}$ см.

Ответ: 116 К.

21. Собственная частота колебаний атомов в молекуле Cl_2 равна 10^{14}с^{-1}. Оценить характеристическую температуру, выше которой колебательную теплоёмкость молекулы можно рассчитывать по классической теории. Какова будет при этом молярная теплоёмкость газа?

Ответ: 760К, $7\,R/2$.

22. Два твёрдых тела с температурами 299 К и 300 К приведены в соприкосновение. Оценить, во сколько раз более вероятна передача порции энергии 10^{-11} эрг от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой, чем в обратном направлении. Теплоёмкости тел достаточно велики, так что изменением их температуры можно пренебречь.

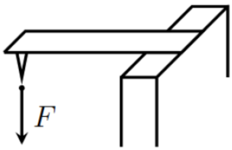
Ответ: 5.

23. Небольшой груз массой 1 г подвешен на лёгкой нити длиной 1 м. Оценить среднеквадратичное отклонение груза от положения равновесия из-за тепловых флуктуаций при комнатной температуре.

Ответ: $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} \approx 0{,}9$ нм.

24. Оценить среднеквадратичную относительную флуктуацию числа молекул воздуха в объёме 1 мкм^3 при нормальных условиях.

Ответ: 0,02%.



25. Кантилевер (чувствительный элемент) атомно-силового микроскопа представляет собой кремниевую пластинку с острой иглой на конце (см. рисунок). Вертикальное смещение конца иглы пропорционально приложенной силе с коэффициентом $\varkappa = 1$ Н/м («силовая константа» кантилевера). Найдите среднеквадратичную флуктуацию положения иглы при комнатной температуре.

Ответ: $0{,}64 \cdot 10^{-10}$м.

26. Вязкость азота при комнатной температуре и атмосферном давлении составляет $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Оценить коэффициенты теплопроводности и самодиффузии азота, а также диаметр молекулы азота.

Ответ: $\kappa \sim 10^{-2}$ Вт/м·К, $D \sim 0{,}15$ см^2/с, $d \sim 4 \cdot 10^{-10}$ м.

27. Оценить количество тепла в расчёте на 1 м^2, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет. Расстояние между стёклами $h = 23$мм. Разность температур между комнатой и улицей составляет $\Delta T = 30°C$. Теплопроводность воздуха $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м·К}}$ считать не зависящей от температуры.

Ответ: $q = 30$ Вт/м^2.

28. (2019) Оценить коэффициент диффузии капель тумана радиусом $R \sim 10$ мкм в воздухе при нормальных условиях. Вязкость воздуха $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

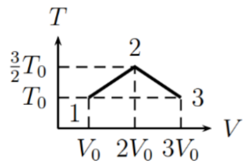
Ответ: 10^{-8} см^2/с.

29. Оценить, за какое время молекула HCN смещается в воздухе при комнатной температуре от исходного положения на расстояние порядка 10 см. Длину свободного пробега принять равной $\lambda \sim 10^{-5}$ см.

Ответ: 10^2 с.

Текстовые задачи

Т-1. (2022) С одним молем идеального газа проводится процесс $1 \to 2 \to 3$, изображённый на рисунке. Найдите изменение теплоёмкости газа при переходе через точку 2.



Ответ: $\Delta C \approx -3R$.

Т-2. В двух одинаковых изолированных сосудах находится по молю воздуха при $T_0 = 300$ К. Сосуды используются в качестве тепловых резервуаров для тепловой машины, работающей по обратному циклу. Найти минимальную работу, которую должна затратить машина, чтобы охладить газ в одном из сосудов до $T_1 = 200$ К. Какова будет конечная температура газа во втором сосуде? Теплоёмкостью сосудов и зависимостью теплоёмкости воздуха от температуры пренебречь.

Ответ: $A \approx 1$ кДж, $T_2 = 450$ К.

Т-3. (2017) Ионы солей иттербия имеют спин $s = 7/2$. Во внешнем магнитном поле B энергия иона зависит от ориентации спина и может принимать значения $E_m = m\mu B$, где μ — известная константа, и $m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$. Найти изменение энтропии ΔS и количество теплоты Q, поглощаемое 1 молем соли при её квазистатическом изотермическом размагничивании от очень большого ($B_0 \gg kT/\mu$) до нулевого поля ($B_1 = 0$) при температуре $T = 1$ К. Взаимодействием ионов между собой пренебречь.

Ответ: $\Delta S = 17{,}3$ Дж/К, $Q = 17{,}3$ Дж.

Т-4. Найти молярную энтропию кристаллического ^{6}Li при низких температурах, пренебрегая взаимодействием ядер между собой. Момент импульса (спин) ядра ^{6}Li равен $s = 1$ (в единицах постоянной Планка $\hbar$). Согласно квантовой механике, число возможных ориентаций вектора момента импульса равно $2s + 1$.

Ответ: $S = 9{,}1$ Дж/(моль·К).

Т-5. «Пьяный матрос» совершает случайные блуждания по площади, смещаясь каждые $\tau = 4$ с на расстояние $\lambda = 0{,}5$ м в случайном направлении. Найти среднеквадратичное смещение матроса от исходного положения $\sqrt{\overline{\Delta r^2}}$ за $t = 1$ час и определить коэффициент диффузии D толпы пьяных матросов, не взаимодействующих между собой.

Ответ: $\sqrt{\overline{\Delta r^2}} = 15$м, $D \approx 56{,}3$ м^2/ч.

Т-6. (2018) Вертикально расположенная пробирка высотой $h = 5$ см заполнена водой, в которой диспергированы в небольшом количестве сферические наночастицы плотностью $\rho = 4$ г/см^3 каждая. Система исходно находится в равновесии при температуре $T_0 = 300$ К, а отношение максимальной и минимальной концентраций наночастиц равно $n_{\max}/n_{\min} = 1{,}1$. На дне сосуда размещают адсорбент, поглощающий все попадающие на него наночастицы. Оценить время, требуемое для очистки воды от примеси. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Ответ: ~ 9 мес.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент Н. Г. Павлова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Точечное n–мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.

3. Непрерывность функции нескольких переменных. Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

6. Мера Жордана в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

7. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференци-

руемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

8. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
14. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2012. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–28 февраля)

I. Неопределённый интеграл

С2, §1: 2(7, 17); <u>10(7)</u>; 11(5); 12(8)*; 13(7); <u>15(6)</u>; 20(7); 21(3); <u>24(4)</u>.

С2, §2: 3(1); 4(1); <u>4(3)</u>; 6(5)*; 8(1).

С2, §3: <u>2(7)</u>; 4(3); 5(3); 16(2); <u>18(5)</u>; 19(1).

С2, §4: <u>4(3)</u>; 15(5); 17(1)*; 18(3); 21(2).

С2, §5: 131; 139; 144; <u>182</u>; 188.

Т.1. Вычислите интеграл: $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,dx.$

II. Функции многих переменных

А) Множества в конечномерных евклидовых пространствах.

С3, §1: $\underline{14}$; 18; 24; 36.

С3, §2: $\underline{9(2,6)}$ (а, б, г); 12(6); 14(3); 20(4).

Т.2. Для множества $A = [1,2] \cup \{3\} \cup \big([4,5] \cap \mathbb{Q}\big) \subset \mathbb{R}$ найдите все: **а)** граничные точки; **б)** предельные точки; **в)** внутренние точки; **г)** точки прикосновения.

Т.3. Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$, имеющее лишь конечное число предельных точек, не более чем счетно.

$\underline{\text{Т.4}}$. Является ли множество

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 < x_4^2\}$$

в $\mathbb{R}^4$: **а)** открытым; **б)** замкнутым; **в)** областью?

Б) Предел и непрерывность.

С3, §2: $\underline{37(8)}$; 45; $\underline{48(5,7)}$; $\underline{54}$; 62(5); 77(3).

В) Частные производные, дифференциал.

С3, §3: 2(4); 12; 19($\underline{1}$, 4); 20(3, $\underline{5}$); 21(2*, 10); 40(4).

С3, §4: 1(3); 4; $\underline{7(2)}$; 14(2); 39(6).

Г) Формула Тейлора.

С3, §4: 70(2);$\underline{71(2)}$; 74(5).

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §1:** 2(7, 17); $\underline{10(7)}$; 11(5); 12(8)*; 13(7); $\underline{15(6)}$; 20(7); 21(3); $\underline{24(4)}$. **С2, §2:** 3(1); 4(1); 4(3); 6(5)*; $\underline{8(1)}$. **С2, §3:** $\underline{2(7)}$; 4(3); 5(3); 16(2) $\underline{18(5)}$; 19(1).
2 неделя	**С2, §4:** $\underline{4(3)}$; 15(5); 17(1)*; 18(3); 21(2). **С2, §5:** 131; 139; 144; $\underline{182}$; 188; Т.1 (а, б). **С3, §1:** $\underline{14}$; 18; 24; 36; 38.
3 неделя	**С3, §2:** 9(2, 6); 12(6); 14(3); 20(4); Т.2; Т.3*; Т.4. **С3, §2:** 37($\underline{8}$); 45; $\underline{48(5,7)}$; $\underline{54}$; 62(5); 77(3). **С3, §3:** 2(4); 12; 19(1, 4); $\underline{20(3,5)}$; 21(2*, 10); 40(4).
4 неделя	**С3, §4:** 1(3); 4; $\underline{7(2)}$ 14(2); 39(6). **С3, §4:** 70(2); $\underline{71(2)}$; 74(5).

$\boxed{58 + 5^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–20 марта)

I. Мера Жордана

С3, §7: 16; <u>22</u>; 24; 40(3).

Т.1. Доказать, что мера Жордана графика непрерывной на отрезке функции равна нулю.

Т.2. Измеримо ли множество нулей функции

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

в круге $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$ радиуса $R > 0$?

II. Определенный интеграл

А) Свойства определенного интеграла и его вычисление.

С2, §6: 7; 11; <u>24</u>; 30; 54(4); 96; 106; 118; 155.

С2, §10: 49(3).

<u>Т.3</u>. Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

<u>Т.4</u>. Пусть функция f ограничена на полуинтервале $(a,\, b]$ и при любом $\varepsilon \in (0,\, b-a)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a+\varepsilon,\, b]$. Доказать, что при любом доопределении функции f в точке $x = a$, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,\, b]$ и справедливо следующее равенство: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

<u>Т.5</u>. а) Функция f имеет первообразную F на отрезке $[a,\, b]$. Верно ли, что f интегрируема на отрезке $[a,\, b]$?

б) Функция f интегрируема на отрезке $[a,\, b]$. Верно ли, что f имеет первообразную на отрезке $[a,\, b]$?

в) Пусть функция f интегрируема на $[a,\, b]$ и имеет первообразную F на отрезке $[a,\, b]$. Доказать, что верно равенство $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Т.6*. Докажите, что разрывная функция $f(x) = \mathrm{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Т.7*. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $y = f(g(x))$ также интегрируема?

Б) Геометрические приложения определенного интеграла.

С2, §7: 5(6); 26; 33(6); 69(5); 72(1).

С2, §8: 12(1); 13(2); 82(4,5).

III. Криволинейный интеграл

С3, §10: 10(1); 17; 21(2) 27(2); 43.

IV. Несобственный интеграл

С2, §11: 70; 76; 85; 94; 98.

С2, §12: 89; 91; 100; 104; 118; 120; 121; 136; 137; 141; 182; 230.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С3, §7:** 16; 22; 24; 40(3); Т.1; Т.2. **С2, §6:** 7; 11; 24; 30; 54(4); 96; 106; 118; 155.
2 неделя	**С2, §10:** 49(3); Т.3; Т.4; Т.5 (а, б, в); Т6*; Т7*. **С2, §7:** 5(6); 26; 33(6); 69(5); 72(1). **С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(4,5).
3 неделя	**С3, §10:** 10(1); 17; 21(2); 27(2); 43. **С2, §11:** 70; 76; 85; 94; 98.
4 неделя	**С2, §12:** 89; 91; 100; 104; 118; 120; 121; 136; 137; 141; 182; 230.

$\boxed{49 + 2^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–10 апреля)

I. Числовые ряды

А) Ряды с неотрицательными членами.

С2, §13: 2(2); 10(1); 11(6); 13(2); 14(3); 20.

С2, §14: 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); 18(5); 19(10); 21(12); 27(7)*; 25(8).

Т.1. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если при $p = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

Б) Знакопеременные ряды.

С2, §15: 3(2); 3(4); 4(5); 8(4); 9(2).

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

Т.2. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что сходятся ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Т.3. Верно ли, что если ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum b_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится?

II. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 5(4); <u>7(4)</u>; 8(5); 9(4); 11(6); <u>12(5)</u>; 16(10).
С2, §18: 20(3); 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>.
С2, §19: 4; 6; 14; 18; <u>22</u>.

Т.4. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

Т.5. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $A = (0, 1)$ и $B = (1, +\infty)$ функциональные последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если:

$$\textbf{а)}\ f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}; \qquad \textbf{б)}\ f_n(x) = n\Big(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\Big).$$

III. Степенные ряды

С2, §20: 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*.
С2, §21: 6(4); 11(6); 19(3); <u>27(1)</u>; 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>.

Т.6. Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^n}$.

Рекомендации по решению
третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §13:** 2(2); <u>10(1)</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3); 20. **С2, §14:** 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); <u>19(10)</u>; <u>21(12)</u>; 27(7)*; Т.1.
2 неделя	**С2, §15:** 3(2); <u>3(4)</u>; <u>4(5)</u>; 8(4); <u>9(2)</u>; Т.2(а, б). **С2, §17:** 5(4); <u>7(4)</u>; 8(5); 9(4); 11(6); <u>12(5)</u>; 16(10).
3 неделя	**С2, §18:** 20(3); 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>. **С2, §19:** 4; 6; 14; 18; <u>22</u>; Т.3; Т.4 (а, б).
4 неделя	**С2, §20:** 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*. **С2, §21:** 6(4); 11(6); 19(3); <u>27(1)</u>; 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>; Т.5.

$\boxed{50 + 3^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент И. В. Каржеманов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра и геометрия**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент О. Г. Подлипская

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.
2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.
4. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.
5. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.
6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).
7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.
10. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис.
11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями.

13. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

14. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.

15. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.

16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.

17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы.

18. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

Литература

Основная

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В.,Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 февраля – 6 марта)

I. Матрицы

1. Обратная матрица.
   С: 15.45(1, 2, 7); 15.48(1, 3, 6); 15.54(3); 15.55*; 15.65(4, 5).
2. Ранг матрицы.
   С: 16.18(22, 28); 16.19(3); 16.24*; 16.33*; 16.34(6)*.

Т.1. Для матрицы из задачи 16.18(22) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

II. Системы линейных уравнений

С: 17.1(3); 18.1(2, 10); 19.6(4, 21, 23); 19.7(2); 19.10; 18.17(2); 18.20*.

III. Линейные пространства

1. Подпространства, линейная оболочка, базис.
   С: 20.3; 20.6(4, 6); 20.7(7, 8, 10); 20.8(1, 4*); 20.14(6); 20.18; 20.22(4); 20.23(4); 20.29.

2. Сумма и пересечение подпространств; прямая сумма.
   С: 21.1; 21.3(1); 21.6(4); 21.7(7); 21.9; 21.12(2).

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения; ядро и образ.
   С: 23.6(3); 23.9(3); 23.15; 23.28(3); 23.29(3); 23.35; 23.40(1а, 1в); 23.57(1, 3); 23.66(2)*; 23.70(1, 3).

Т.2*. Пусть φ – линейное преобразование линейного пространства L. Докажите, что $L = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi^2 = \operatorname{Ker} \varphi$.

2. Действия с линейными отображениями.
   С: 23.83(3).

3. Линейные функции.

С: 31.19(2); 31.35(1); 31.43^*.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 15.45(1, <u>2</u>, 7); 15.54(3); 15.48(1, 3, 6); 15.55^*; 15.65(4, <u>5</u>). **С:** 16.18(22, 28); <u>16.19(3)</u>; 16.24^*; 16.33^*; $16.34(6)^*$; Т.1. **С:** <u>17.1(3)</u>; 18.1(2, 10); 19.6(4, <u>21</u>, 23); 19.7(2); <u>19.10</u>; 18.17(2); 18.20^*.
2 неделя	**С:** <u>20.3</u>; 20.6(4, 6); 20.7(7, 8, 10); 20.8(1, 4^*); 20.14(6); <u>20.18</u>; 20.22(4); 20.23(4); <u>20.29</u>.
3 неделя	**С:** <u>21.1</u>; 21.3(1); 21.6(4); <u>21.7(7)</u>; 21.9; 21.12(2). **С:** 23.6(3); 23.9(3); <u>23.15</u>; 23.28(3); 23.29(3).
4 неделя	**С:** 23.35; 23.40(<u>1а</u>, 1в); 23.57(<u>1</u>, 3); $23.66(2)^*$; 23.70(1, 3); Т.2*. **С:** 31.19(2); 31.35(1); 31.43^*.

$\boxed{55 + 9^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–10 апреля)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализируемость.
   С: 24.20(3); 24.23^*; <u>24.26(2, 3)</u>; 24.28; 24.29^*; 24.30(<u>3</u>, 22, 34); <u>24.42(1)</u>; 24.55(1).
2. Инвариантные подпространства.
   С: <u>24.70</u>; 24.75^*; 24.78^*.

Т.1. Найти инвариантные подпространства линейного преобразования, которое действует как поворот трёхмерного геометрического векторного пространства на угол 90° вокруг вектора $\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — правый ортонормированный базис.

II. Билинейные и квадратичные функции

С: 32.2(3); $32.4(2)^*$; 32.7(2); <u>15.34</u>; 32.8(11, <u>12</u>); 32.9(11, 12); <u>32.15</u>; 32.18(4); $32.20(2)^*$.

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация.
   С: 25.2(1); <u>25.7</u>; 25.17; 25.23; 25.25(2); 25.26(6); 25.32^*; 25.37.
   С: <u>26.13(3)</u>; 26.14(3); 26.15(4); 26.16(1); 26.27(4, <u>5</u>); 26.42(<u>5</u>, 6); 26.44(2).

Т.2*. Используя скалярное произведение из задачи 25.7, примените процесс ортогонализации к системе многочленов 1, t, t^2, t^3.

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования.

С: 28.5(3); 29.5*; $\underline{29.14(1,4)}$; 29.17*; 29.19($\underline{7}$, 10); 29.45; 29.47(1); 29.53(2)*.

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах.

С: 32.27(13, $\underline{14}$); 9.4($\underline{4}$, 8, 11*); 32.36($\underline{2}$, 5); 11.22(4, 21*).

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 24.20(3); 24.23*; $\underline{24.26(2,3)}$; 24.28; 24.29*; 24.30($\underline{3}$, 22, 34); $\underline{24.42(1)}$; 24.55(1). **С:** $\underline{24.70}$; 24.75*; 24.78*; Т.1.
2 неделя	**С:** 32.2(3); 32.4(2)*; 32.7(2); $\underline{15.34}$; 32.8(11, $\underline{12}$); 32.9(11, 12); $\underline{32.15}$; 32.18(4); 32.20(2)*.
3 неделя	**С:** 25.2(1); $\underline{25.7}$; 25.17; 25.23; 25.25(2); 25.26(6); 25.32*; 25.37. **С:** $\underline{26.13(3)}$; 26.14(3); 26.15(4); 26.16(1); 26.27(4, $\underline{5}$); 26.42($\underline{5}$, 6); 26.44(2); Т.2*.
4 неделя	**С:** 28.5(3); 29.5*; $\underline{29.14(1,4)}$; 29.17*; 29.19($\underline{7}$, 10); 29.45; 29.47(1); 29.53(2)*. **С:** 32.27(13, $\underline{14}$); 9.4($\underline{4}$, 8, 11*); 32.36($\underline{2}$, 5); 11.22(4, 21*).

$\boxed{50 + 13^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Д. А. Степанов