Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа бизнеса высоких технологий (ФБВТ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2023–2024 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2024

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса
на весенний семестр 2023–2024 учебного года. Физтех-школа бизнеса высоких технологий (ФБВТ). – Москва : МФТИ, 2024. – 48 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: волны и кванты**
по направлениям подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
27.03.03 «Системный анализ и управление»
38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 20 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 40 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90

Экзамен – 4 семестр
Диф. зачёт – 4 семестр

Самостоятельная работа:
теор. курс – 55 часов
физ. практикум – 50 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. Лапушкин Г. И.
к.ф.-м.н., доц. Попов П.В.
к.ф.-м.н., доц. Юдин И.С.

Программа принята на заседании кафедры общей физики 12 декабря 2023г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
А. В. Максимычев

Волны и кванты

1. **Волновое уравнение**. Монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны. Показатель преломления, фазовая скорость распространения.
2. **Распространение электромагнитных волн в среде**. Поток энергии в электромагнитной волне. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая.
3. **Электромагнитные волны на границе раздела двух диэлектриков**. Формулы Френеля. Явление Брюстера. Явление полного внутреннего отражения.
4. **Классическая теория дисперсии электромагнитных волн.** групповая скорость, движение волнового пакета. Формула Рэлея.
5. **Поглощение электромагнитной волны в среде.** комплексный показатель преломления. Затухающие волны, закон Бугера. Нормальная и аномальная дисперсии.
6. **Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы.** Проникновение электромагнитных волн в плазму. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь.
7. **Общее понятие о спектральном разложении.** Спектр одиночного прямоугольного импульса. Соотношение неопределённостей.
8. **Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн**. Видность полос, ширина полосы. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Способы наблюдения интерференции. Формула Брэгга-Вульфа.
9. **Временная когерентность**. Функция временной когерентности, видность интерференции. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределённостей.
10. **Интерференция при использовании протяжённых источников**. Пространственная когерентность, радиус когерентности. Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах. Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.
11. **Дифракция волн**. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля. Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок

для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона.

12. **Основы геометрической оптики**. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических аберрациях. Современные применения геометрической оптики в пределе коротких длин волн (проекционная рентгеновская литография).
13. **Дифракция Фраунгофера**. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, фокальное пятно.
14. **Спектральные приборы**: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии. Интерференция в тонких плёнках. Просветление оптики.
15. **Основные релятивистские формулы**. Релятивистская полная энергия, кинетическая энергия, импульс, релятивистский инвариант. Релятивистский эффект Доплера, сравнение с классическим эффектом Доплера. Отличия классического, релятивистского и ультрарелятивистского случаев. Все формулы – без вывода.
16. **Корпускулярные свойства электромагнитных волн**. Энергия и импульс кванта света. Эффект Комптона, комптоновская длина волны. Фотоэффект.
17. **Волновые свойства частиц**. Гипотеза де Бройля о волновых свойствах материальных частиц – корпускулярно-волновой дуализм. Длина волны де Бройля нерелятивистской частицы. Опыты Де-виссона–Джермера и Томсона по дифракции электронов. Соотношения неопределенностей (координата-импульс; энергия-время). Волновая функция свободной частицы (волна де Бройля).
18. **Законы излучения АЧТ**. Объемная плотность и спектральная плотность энергии излучения. Формула Планка. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина.
19. **Формализм квантовой механики**. Понятие об операторах физических величин. Операторы координаты, импульса, потенциальной и кинетической энергии системы, гамильтониан. Собственные функции и собственные значения. Стационарное уравнение Шредингера. Свойства волновой функции стационарных задач: непрерывность, конечность, однозначность, непрерывность производной. Принцип суперпозиции квантовых состояний. Формула для среднего значения физической величины в заданном состоянии. Вектор плотности потока вероятности. Процесс квантового измерения физической величины — возможность получения только собственных значений.

20. **Потенциальные барьеры**. Потенциальные ямы. Осциллятор. Рассеяние частиц на потенциальной ступеньке конечной высоты, прохождение частицы над ямами и барьерами конечной ширины, эффект Рамзауэра. Прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины (туннельный эффект), формула для прозрачности барьера произвольной формы. Бесконечно глубокая потенциальная яма. Связанные состояния частицы в одномерной симметричной потенциальной яме конечной глубины. Уровни энергии одномерного гармонического осциллятора (без вывода).
21. **Водородоподобные атомы**. Магнитный момент. Спин. Закономерности оптических спектров атомов. Спектр атома водорода и водородоподобных атомов, главное квантовое число, кратность вырождения. Тонкая и сверхтонкая структура спектра атома водорода. Изотопический сдвиг, мезоатомы. Магнитный орбитальный момент электронов, гиромагнитное отношение, магнетон Бора. Опыт Эйнштейна–де Гааза. Опыт Штерна–Герлаха. Оператор полного момента импульса, g-фактор Ланде.

Литература

Основная литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. — М.: Физматлит, 2003.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 4. Оптика. — М.: Физматлит, 2003.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 5 Атомная и ядерная физика. — М.: Физматлит, 2020.
4. *Ципенюк Ю.М.* Квантовая микро- и макрофизика. – М. Физматкнига, 2019.
5. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики: учебное пособие. – М. : МФТИ, 2016
6. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Начальные главы квантовой механики – М.: МФТИ, 2016
7. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001.
8. Лабораторный практикум по общей физике. Квантовая физика / под ред. Проф. Ю.М.Ципенюка. — М.: МФТИ, 2012.
9. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 4. Оптика / под ред. А.Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2012.
10. Сборник задач по общему курсу физики. Ч.2, Ч.3 / под ред. В.А. Овчинкина. — М.: Физматкнига

Дополнительная литература

1. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — М.: Лаборатория знаний, 2017.
2. *Ландсберг Г.С*. Оптика._– М.: Физматлит, 2003.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — Москва : Наука, 1997.
4. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — Москва : Наука, 1983.
5. *Фейнман Р.П.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуски 5, 6, 7. — Москва : Мир, 1977.
6. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — Москва : Физматлит, 2006.
7. *Козел С.М., Локшин Г.Р.* Модулированные колебания, спектральный анализ, линейная фильтрация. — Москва : МФТИ, 2009.

Электронные ресурсы: http://physics.mipt.ru/S_I/

<u>ЗАДАНИЕ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ</u>

<u>для студентов 2-го курса ФБВТ</u>
<u>на весенний семестр 2023/24 учебного года</u>

Дата	нед	Темы семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
1 – 7 февр.	**1**	Электромагнитные волны. Формулы Френеля. Поляризация. Полное внутреннее отражение, угол Брюстера. Поток энергии и давление света.	2.3^{О} 1.7^{О} ^{0}1	2.8^{О} 2.33^{О} 2.31^{О} 2.32^{О} 11.12^{О}	2.20^{О} 2.44^{О} 11.11^{О} 11.16^{О}
1 – 7 февр.	**2**	Дисперсия волн. Фазовая и групповая скорости.	^{0}2 10.2^{О} 10.5^{О}	10.21^{О} 10.44^{О} 10.67^{О} 12.96^{Э}	10.30^{О} 10.35^{О} 12.95^{Э}.
8 – 14 февр.	**3**	Интерференция монохроматических волн, схема Юнга	^{0}3 ^{0}4 3.3^{О}	3.18^{О} 3.32^{О} 3.16^{О} 11.9^{О}	3.14^{О} 3.20^{О} 3.4^{О} 3.28^{О}
15 – 21 февр.	**4**	Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность	^{0}5 4.2 5.2 ^{0}6	4.10^{О} 4.11^{О} 5.14^{О} 5.18^{О}	4.12^{О} 4.9^{О} 5.23^{О} 5.30^{О}
15 – 21 февр.	**5**	Дифракция Френеля. Зонные пластинки	^{0}7 ^{0}8 6.1/2^{О}	6.15^{О} 6.20^{О} 6.59^{О} 6.43^{О}	6.16^{О} 6.31^{О} 6.21^{О} *6.64*^{О}
22 – 28 мар.	**6**	Геометрическая оптика. Оптические инструменты	^{0}9 ^{0}10 1.4^{О}	T1 1.15^{О} 1.7^{О} 1.22^{О}	1.16^{О} 1.25^{О} 1.41^{О} 1.32^{О}
29 фев. – 6 мар.	**7**	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов.	^{0}11 ^{0}12 ^{0}13 ^{0}14	7.16^{О} 7.48^{О} 7.54^{О} 8.2^{О}	7.5^{О} 7.10^{О} 7.53^{О} *8.80*^{О}

		Спектральные приборы		8.78^{O}	
29 фев. – 6 мар.	**8**	Базовые релятивистские формулы. Фотоэффект. Эффект Комптона	$^{0}15$ $^{0}16$ $^{0}17$	$1.3^{Я}$ $1.18^{Я}$ $1.23^{Я}$ $1.32^{Я}$	$1.1^{Я}$ $1.8^{Я}$ $1.30^{Я}$ $1.44^{Я}$
7 – 13 мар.	**9**	Контрольная работы			
14 – 20 мар.	**10**	Разбор контрольной работы, сдача 1-го задания			
14 – 20 мар.	**11**	Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей	$^{0}18$ $^{0}19$ $^{0}20$	$2.26^{Я}$ $2.30^{Я}$ $2.32^{Я}$ $2.51^{Я}$	$2.46^{Я}$ $2.16^{Я}$ $2.21^{Я}$ $2.22^{Я}$
21 – 27 мар.	**12**	Законы излучения АЧТ	$^{0}21$ $^{0}22$ $^{0}23$	1.22^{C} 1.25^{C} 1.38^{C} 1.57^{C}	1.26^{C} 1.30^{C} Т2
28 мар. – 3 апр.	**13**	Уравнения Шредингера. Потенциальные барьеры. Туннельный эффект. Потенциальные ямы.	$^{0}24$ $^{0}25$ $^{0}26$	$3.25^{Я}$ $3.33^{Я}$ $3.27^{Я}$ $3.14^{Я}$	$3.40^{Я}$ $3.45^{Я}$ $3.49^{Я}$ Т3
28 мар. – 3 апр.	**14**	Магнитный момент. Спин. Колебательные и вращательные уровни. Водородоподобные атомы	$^{0}27$ $^{0}28$ $6.69^{Я}$	$4.38^{Я}$ $4.45^{Я}$ $5.13^{Я}$ $5.25^{Я}$	$4.19^{Я}$ $4.14^{Я}$ $5.16^{Я}$ $5.31^{Я}$
4 – 10 апр.	**15**	Сдача 2-го задания (8-15 недели)			

Примечания

Номера задач со значком “О” указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Оптика” / под ред. В.А. Овчинкина (**4-е изд.**). — М.: Физматкнига, 2016.

Номера задач со значком “Э” указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм” / под ред. В.А. Овчинкина (**4-е изд.**). — М.: Физматкнига, 2016.

Номера задач со значком “Я” указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 3. “Атомная и ядерная физика” / под ред. В.А. Овчинкина— М.: Физматкнига, 2016

Номера задач со знаком “С” указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 3. “ Строение вещества” / под ред. В.А. Овчинкина— М.: Физматкнига, 2016

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

0 — задачи, которые студент должен решать заранее для подготовки к семинару;

I — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

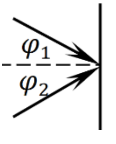
II — задачи для самостоятельного решения.

Задачи 0 группы

⁰1. Вычислить коэффициент отражения и пропускания света по амплитуде и по мощности при нормальном падении, используя граничные условия для векторов магнитного и электрического поля.

⁰2. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ см$^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

⁰3. На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2}$ = ±0,01 рад. Длина волны λ = 500 нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости. Определите ширину интерференционных полос.



⁰4. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{мин}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

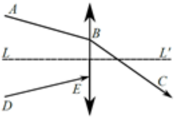
⁰5. В двухлучевом интерференционном опыте используется источник света с длиной волны λ = 500 нм и шириной спектра $\Delta\lambda$ = 10 нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей Δ_{max} и максимальное число интерференционных полос m_{max}, которые можно наблюдать в этом опыте.

[0]**6.** Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n, если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

[0]**7.** Щель шириной b = 1 мм освещается параллельным пучком света с длиной волны λ = 500нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

[0]**8.** На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ. Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

[0]**9.** На рисунке показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC. Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.



[0]**10.** Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

[0]**11.** Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

[0]**12.** Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной b = 10λ, где λ – длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

[0]**13.** На дифракционную решетку, имеющую период d = 10 мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия (λ_1 = 5890 Å, λ_2 = 5896 Å). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке (m=2).

[0]**14.** Дифракционная решётка с периодом d имеет размер D = $10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

^{0}**15**. В опытах П. Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, падающий световой поток составлял 6 Вт/см^2. Вычислить давление, которое испытывали зачернённые и зеркальные лепестки его измерительной установки.

^{0}**16**. Монохроматическое гамма-излучение рассеивается на покоящихся электронах. Найти частоту излучения, рассеиваемого назад, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона.

^{0}**17**. Показать, используя законы сохранения, что фотоэффект на свободном электроне невозможен

^{0}**18**. Определить кинетическую энергию электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.

^{0}**19.** Какова должна быть кинетическая энергия электрона в электронном микроскопе, чтобы рассматривать объекты в 1Å ?

^{0}**20.** Оценить потенциал ионизации атома водорода из соотношения неопределенностей.

^{0}**21.** Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?

^{0}**22.** Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна $1{,}3\cdot\ 10^7$ К.

^{0}**23.** Оценить среднюю температуру планеты Земля, если орбитальная постоянная равна 1.34 кВт/м^2.

^{0}**24.** Найти минимальную кинетическую энергию электрона, при которой он без отражения пройдёт над одномерной прямоугольной потенциальной ямой глубиной U = 2,5 эВ и размером a = 2$r_Б$, где $r_Б$ – боровский радиус.

^{0}**25.** Электрон с энергией 3 эВ проходит через прямоугольный потенциальный барьер высотой 5 эВ и шириной 3 Å. Во сколько раз должна возрасти высота барьера, чтобы вероятность прохождения через барьер упала в 10 раз?

^{0}**26.** Частица массой m заключена в одномерном потенциальном ящике шириной l с непроницаемыми стенками. Найти работу, которую надо затратить на квазистатическое сжатие ящика вдвое, если частица находится в основном состоянии.

^{0}27. При какой температуре средняя энергия поступательного движения молекулы O_2 равна энергии, необходимой для возбуждения ее на первый вращательный уровень? Межъядерное расстояние в молекуле равно 1,2 Å.

^{0}28. Электрон с энергией 12,5 эВ сталкивается с неподвижным атомом водорода, находящимся в основном состоянии. Найдите минимально возможную энергию рассеянного электрона. Энергию отдачи атома не учитывать.

Текстовые задачи

Т1. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для L_d = 0,5 м.

б) У некоторого дальнозоркого человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» L_0 = 25 см. Провести расчет для L_b = 1 м.

Т2. Средняя температура поверхности Земли составляет 15°С. В результате природных процессов или влияния промышленных выбросов прозрачность атмосферы может измениться. Оценить, как изменится равновесная температура земной поверхности, если прозрачность атмосферы уменьшится на 5% для излучения: а) с длиной волны меньше λ_0 = 20000 Å; б) с длиной волны более λ_0 = 20000 Å. Под прозрачностью понимается доля излучения, преодолевающая расстояние от верхних слоёв атмосферы до поверхности. Считать для оценки, что прозрачность атмосферы постоянна для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$.

Ответ: а) «ядерная осень», температура понизится на 4°С; б) «глобальное потепление», температура повысится на 4°С.

Т-3. Частица массой m заключена в одномерном потенциальном ящике с непроницаемыми стенками. Какова масса частицы, если при ширине ящика 3 Å расстояние между первым и третьим уровнями частицы в яме составляет 5 эВ?

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**
по направлениям подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»,
38.03.01 «Экономика»
физтех-школы: **для всех, кроме ФПМИ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
к. ф.-м. н., ст.преп. А. А. Скубачевский
к. ф.-м. н., доцент М. О. Сизых

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.

2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.

4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортономированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.

6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению несобственных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера – гамма- и бета- функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: равномерная непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу Ч. 2 — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2003.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2003.
6. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–20 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 1(2); 9; 10; 12; 27; 30; 32; 41; 45. В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 23*; 64; 65; 67; 72; 110; 111(4, 3).

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = \operatorname{sh} x,\ x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, а также порядок убывания остатка ряда для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^7; б) x^{12}; в) $(x^2 - \pi^2)\sin x$; г) $(x^2 - \pi^2)|x|$.

С.2. §22: 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

С.2. §16: 47*(2); 48(1, 3).

II. Функциональные пространства

3. Докажите, что если f – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке приведите контрпример):

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится}\\ \text{равномерно к } f\end{array}} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится по}\\ \text{норме } L_2 \text{ к } f\end{array}} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится по}\\ \text{норме } L_1 \text{ к } f\end{array}} \\
\not\uparrow\ \downarrow & & \not\uparrow\ \not\downarrow & & \not\uparrow\ \not\downarrow \\
\end{array}$$
$$\boxed{\{f_n\} \text{ сходится поточечно к } f}$$

С.3. §18: 97; 98.

4. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_1[a, b]$, $CL_2[a, b]$.

С.3. §19: <u>116</u>; 121(2)*.

5. Полна ли система функций $\left\{x^{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве

а) $C[1;2]$; б) $C[-3;0]$?

6. Полна ли система функций $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве

а) $C[0;\pi/4]$; б) $C[\pi/4;\pi/2]$; в) $C[-\pi/8;\pi/8]$?

$\boxed{38+3^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–15 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(3); <u>4</u>; 14(2); 17; 18(<u>2</u>, 3*).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(<u>3</u>) — исследуйте также при $\alpha \in (1;+\infty)$.
1(2) — исследуйте также при $\alpha \in (0;1)$.

С.3. §14: 6(2, 6); 7(3, 4, <u>6</u>); 8(5).

С.3. §15: 3(1); 4(1); 5*(2); 6(<u>2</u>, 3, 5); 13(5); 15(5).

1. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx, \qquad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$$

С.3. §16: 1(4); 7(3); <u>13(6)</u>; 14(5); 10(3)*.

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 249; <u>255</u>.

С.3. §17: 1(3); 2(3); 3(1); 5(<u>1</u>); 6(2).

2. Найдите преобразование Фурье:

<u>а)</u> $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$; <u>б)</u> $f(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$, $\alpha > 0$; в) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

С.3. §17: 8(2, 6); 13; 14(1,3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: <u>58</u>; 60.

3. Докажите, что в D' справедливы равенства:

а) $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$; б) $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

С.З. §21: 72; 73; 75*; 77*; 84.

4. Найдите в D'

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}.$$

5. Упростите в D' выражения:

а) $\left(e^{\sin(x)} + 3x\cos^2 x\right)\delta(x)$;

б) $(\sin\sin x + 3\,\mathrm{arctg}\, e^x)\,\delta'(x)$;

в) $xe^x\delta''(x)$.

$\boxed{54 + 6^*}$

Составитель задания ассистент И. В. Воронин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Оптимизация**
по направлению подготовки: 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 24 часа
практические (семинарские) занятия — 24 часа
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 48

Самостоятельная работа:
теор. курс — 42 часа

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент Н. Г. Павлова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Введение. Основные понятия теории оптимизации**
   Исторические примеры экстремальных задач: задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о рационе, транспортная задача и др. Простейшие примеры формализации экстремальных задач. Основные классы экстремальных задач.
2. **Элементы выпуклого анализа**
   Выпуклые множества. Выпуклые функции. Отделимость выпуклых множеств. Субградиент. Субдифференциал.
3. **Выпуклое программирование**
   Постановка задачи. Правило множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера.
4. **Линейное программирование**
   Постановка задачи. Геометрическая интерпретация. Симплекс-метод. Теоремы двойственности.
5. **Вариационное исчисление**
   Постановка задачи. Уравнение Эйлера. Задача Больца. Необходимые условия экстремума в задаче Больца. Условия трансверсальности.
6. **Оптимальное управление**
   Постановка задачи. Принцип максимума Понтрягина.
7. **Динамическое программирование**
   Постановка задачи. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана. Проблема синтеза для дискретных систем.
8. **Теория игр**
   Матричные игры. Игры с Природой. Кооперативные игры. Оптимальность по Парето. Равновесие Нэша. Динамические игры. Игры с неполной и несовершенной информацией. Равновесие Байеса-Нэша.

Литература

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — Москва : Физматлит, 2018.
2. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — Москва : Физматлит, 2004.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. — Москва : МЦНМО, 2011.
4. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Теория. Примеры. Задачи. — Москва : УРСС, 2000.
5. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — Санкт-Петербург : Лань, 2022.
6. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учебное пособие. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2005.
7. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации: учебное пособие. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2005.
8. *Челноков А.Ю.* Теория игр: учебник и практикум для вузов. — Москва : Юрайт, 2023.
9. *Захаров А.В.* Теория игр в общественных науках: учебник для вузов. — 2-е изд. — Москва : ИД ВШЭ, 2019.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учебное пособие. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2005. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 февраля–6 марта)

I. Введение. Основные понятия теории оптимизации

Т.1. Привести примеры задач без ограничений об экстремуме бесконечно дифференцируемых функций одной или двух переменных, в которых выполняется одно из следующих требований.

а) Глобальные максимум и минимум достигаются в бесконечном числе точек.

б) Функционал ограничен, глобальный максимум достигается, минимум — нет.

в) Функционал ограничен, имеет критические точки, глобальные минимум и максимум не достигаются.

г) Имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума.

Т.2. Формализовать следующие задачи.

а) Найти на плоскости точку, сумма расстояний от которой до трёх заданных точек минимальна.

б) Некоторая ассоциация трёх фондов содействия научным исследованиям планирует финансирование четырёх научных проектов. Любой проект может получать одновременно финансирование из всех трёх фондов. Однако для различных источников финансирования в силу ряда причин (налоги, пошлины, льготы) дополнительные транзакционные расходы различны: при финансировании j-го проекта из i-го фонда они составляют $a_{ij} \in [0; 1]$ долю от объёма финансирования. i-ый фонд намерен предоставить b_i усл.ден.ед. Потребность j-го проекта в финансировании составляет c_j усл.ден.ед. Требуется составить план финансирования, при котором суммарные дополнительные расходы ассоциации будут минимальны.

II. Элементы выпуклого анализа

С: 3.2(а,б*); 3.3(а,г); 3.5(а,в); 3.7(а,б); 3.8(а,б,в).

III. Выпуклое программирование

С: 4.1; 4.2; 4.9*.

Т.3. Решить следующие задачи.

а) $\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} f = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 1)^2 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_2 - x_1 + 2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Т.4. В пунктах A, B и C размещены горнодобывающие предприятия. Расстояние между пунктами A и B равно 60 км, между A и C – 80 км, между B и C — 100 км. Нужно выбрать место для постройки перерабатывающего комбината так, чтобы расходы на строительство подъездных путей к нему от пунктов A, B и C были минимальны. Стоимость строительства дороги пропорциональна её длине. Формализовать задачу и доказать существование её решения.

Т.5. Инвестор решает вложить имеющиеся средства, купив акции трёх компаний. Задача инвестора состоит в том, чтобы минимизировать риск вложений, сохранив при этом постоянную доходность в 2 усл.ед. Имея капитал в размере 1 усл.ед., инвестор должен распределить его между тремя ценными бумагами, купив x_1, x_2, x_3 долей акций каждого вида. Ожидаемая доходность всего портфеля ценных бумаг в этом случае будет равна $E = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3$, где m_i — ожидаемая доходность акций i-й компании. Мерой риска является дисперсия портфеля, равная

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i x_j \sigma_{ij},$$

где σ_{ij} – ковариация между доходностями ценных бумаг i и j. Найти оптимальное распределение капитала инвестора, если вектор ожидаемых доходностей активов за месяц и ковариационная матрица равны

$$M = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 2,0 \end{pmatrix}; \ \Sigma = \begin{pmatrix} 1,2 & 2,0 & 0,0 \\ 2,0 & 6,0 & 1,0 \\ 0,0 & 1,0 & 3,0 \end{pmatrix}.$$

IV. Линейное программирование

Т.6. Построить и решить двойственную задачу.

а) $\begin{cases} f = x_1 + 3x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_2 - x_1 \le -4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} f = 4x_1 + 18x_2 + 30x_3 + 5x_4 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$

Т.7. Решить задачу линейного программирования. Как изменится оптимальное значение целевой функции, если константу в правой части первого ограничения увеличить на единицу?

а) $\begin{cases} f = 24x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 5 \to \min, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 22, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 18, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} f = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$

Т.8. Клиент поручает инвестиционной фирме управление своим портфелем в размере 3 млн.руб. Клиент хочет ограничиться покупкой акций трёх компаний, характеристики которых представлены в таблице.

Акции компании	Цена акции, руб.	Ожидаемый годовой доход на акцию, руб.	Макс. возможные инвестиции, тыс.руб.
Компания 1	1800	210	1800
Компания 2	750	90	750
Компания 3	600	90	900

Сколько акций каждой компании должна приобрести инвестиционная фирма, чтобы оптимизировать ожидаемый годовой доход клиента?

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–10 апреля)

I. Вариационное исчисление

С: 5.1; 5.5; 5.23; 5.92.

II. Оптимальное управление

С: 10.3; 10.4; 10.19; 10.20.

Т.1*. Формализовать и решить (положив $a = c = X = 1$, $b = 2$) задачу оптимизации рекламной деятельности компании.

Без рекламы интенсивность потока $\dot{x}$ (руб/год) компании падает со скоростью, прямо пропорциональной текущей интенсивности продаж с коэффициентом a (1/год). Но благодаря рекламе скорость изменения потока продаж увеличивается на величину, прямо пропорциональную интенсивности рекламы u (руб/год) с коэффициентом её эффективности $(1 - (x/x))b$, линейно уменьшающимся по мере насыщения сегмента X (руб/год) рынка компании. Интенсивность рекламы ограничена сверху постоянными возможностями c (руб/год) доступных средств массовой информации. Компания хочет так спланировать свою рекламную деятельность, чтобы на фиксированном отрезке времени $[0, T]$ получить максимальную выручку от продажи товаров за вычетом расходов на рекламу.

III. Динамическое программирование

<u>Т.2</u>. Построить программу $u^*(t)$ распределения доходов, обеспечивающую максимум суммарного потребления $y^*(T)$ при незаданной (оптимально выбираемой) конечной величине капитала $x(T)$ для $k = 0,6$, $T = 4$.

$$x(t+1) = x(t) + (1 - u(t))kx(t),\ x(0) = 1,\ x(T) \geq 1,$$

$$y(t+1) = y(t) + u(t)kx(t),\ y(0) = 0,$$

$$J = y(T) \to \max,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1,\ t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Здесь x, y – фазовые координаты: $x(t)$ – капитал к началу интервала $(t, t+1)$, $y(t)$ – нарастающий итог потребления к началу того же интервала; $u(t)$ – управление: доля объёма прибыли $kx(t)$, направляемая на потребление за время $(t, t+1)$; фиксированные параметры: $k \in (0,5; 1)$ – процент на капитал, $T \geq 3$ – горизонт планирования.

IV. Теория игр

Т.3. Задана платёжная матрица матричной игры с нулевой суммой. Найти верхнюю и нижнюю чистые цены игры. Произвести всевозможные упрощения платёжной матрицы. Свести матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования. Решить матричную игру.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 6 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \text{б) } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Т.4. Две конкурирующие фирмы A и B планируют построить в одном из четырёх небольших городов N_1 (население 30 тыс.чел.), N_2 (население 50 тыс.чел.), N_3 (население 40 тыс.чел.) и N_4 (население 30 тыс.чел.), расположенных вдоль автомагистрали на равном расстоянии друг от друга, по одному супермаркету. Распределение оборота, получаемого каждой фирмой, определяется численностью населения городов и удалённостью супермаркетов от места жительства покупателей. Объёмы облротов фирм пропорциональны (например, с коэффициентом единица) числу покупателей. Статистическое исследование показало, что торговый оборот в супермаркетах распределится следующим образом: если супермаркет фирмы A расположен к городу ближе, чем супермаркет фирмы B — 75% и 25%, супермаркеты обеих фирм расположены на одинаковом расстоянии от города — 60% и 40%, если супермаркет фирмы B расположен к городу ближе, чем супермаркет фирмы A — 45% и 55%. Дать рекомендации, где рациональнее всего построить супермаркеты.

Т.5. Инженеру компании нужно принять решение о том, следует ли монтировать новую производственную линию, используя новые технологии. Если новая линия будет работать безотказно, то компания получит 200 млн.руб. прибыли. Если она откажет, то компания потеряет 150 млн.руб. По оценке инженера, имеется 60%-ая вероятность того, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а после этого решать, монтировать или нет производственную линию. Эксперимент будет стоить 10 млн.руб. Также инженер полагает, что существует 50%-ая вероятность, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то имеется 90%-ая вероятность того, что производственная линия, когда её смонтируют, будет работать. Стоит ли проводить эксперимент? Какова ожидаемая стоимостная ценность наилучшего решения?

Т.6. Биматричная игра задана матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 12 & 12 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти равновесные ситуации или доказать их отсутствие.

Т.7. В городе работают три фирмы. Работая индивидуально, фирма A_1 получает прибыль в размере 400 тыс.руб., а фирмы A_2 и A_3 – 380 и 500 тыс.руб. соответственно. При объединении фирм A_1 и A_2 прибыль на двоих составит 800 тыс.руб., компаний A_1 и A_3 – 1 млн.руб., A_2 и A_3 – 900 тыс.руб. Если объединятся все три фирмы, прибыль составит 1,5 млн.руб. Записать кооперативную игру в форме характеристической функции. Проверить, является ли игра существенной. Записать игру в 0-1 редуцированной форме. Найти С-ядро кооперативной игры. Проверить игру на присутствие "болванов". Найти вектор Шепли и объяснить получившийся результат.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Н. Г. Павлова

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Случайные процессы и математическая статистика**
по направлениям подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 105 часов

Программу составили:
к. ф.-м. н., доцент А. В. Булинский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Случайные процессы (А. В. Булинский)

1. Понятие случайного процесса. Траектории процесса и его числовые характеристики (математическое ожидание, ковариационная функция). Примеры. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях (формулировка). Условное математическое ожидание и его свойства.
2. Модели случайных блужданий. Процессы восстановления. Процессы с независимыми приращениями.
3. Пуассоновский процесс и его свойства. Модель страхования Крамера–Лундберга и ее обобщения.
4. Цепи Маркова. Стохастические модели, описываемые с помощью цепной зависимости. Переходные вероятности и их свойства. Однородные цепи Маркова. Некоторые задачи управления для марковских цепей, связанные с оптимизацией дохода фирмы.
5. Компьютерное моделирование цепей Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний. Стационарное распределение. Предельное поведение переходных вероятностей.
6. Метод Монте-Карло по марковским цепям (алгоритм Метрополиса–Хастингса). Метод замораживания в стохастической оптимизации.
7. Цепи Маркова с непрерывным временем. Процессы рождения и гибели. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнений Колмогорова.
8. Приложения марковских цепей в теории массового обслуживания (теории очередей). Формулы Эрланга.
9. Скрытые марковские процессы и их применение.
10. Гауссовские процессы и их экстремумы. Формула Райса. Фильтрация случайных процессов. Фильтр Кальмана–Бьюси.
11. Случайные процессы в теории запасов.
12. Стационарные процессы (в узком и широком смыслах). Процессы авторегрессии и скользящего среднего ARMA и ARIMA, ARCH и GARCH процессы. Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса и ее статистические оценки.
13. Задачи регрессии и оптимального прогноза случайных процессов. Введение в теорию риска.
14. Метод стохастического градиентного спуска в теории оптимизации.
15. Мартингалы. Марковские моменты. Теорема Дуба об остановке. Задача о разорении игрока.
16. Винеровский процесс (броуновское движение) и его свойства. Теорема Башелье.

17. Элементы стохастического анализа. Построение интеграла Ито. Формула Ито. Примеры применения. Интеграл Стратоновича.
18. Стохастические дифференциальные уравнения. Модели волатильности рынка.

Математическая статистика (В. Ю. Дубинская)

1. Основные понятия выборочного метода: выборка, вариационный ряд, выборочная функция распределения, гистограмма, выборочные моменты.
2. Точечное оценивание параметров. Состоятельность и несмещенность оценок. Примеры несмещенных и состоятельных оценок; смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных.
3. Среднеквадратический подход к сравнению оценок, понятие эффективности оценки. Единственность эффективной оценки. Информация Фишера, неравенство Рао–Крамера.
4. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Свойства ОМП – состоятельность, асимптотическая нормальность, эффективность.
5. Понятие достаточной статистики. Критерий факторизации Неймана–Фишера.
6. Интервальные оценки параметров.
7. Проверка гипотез. Ошибки первого и второго рода. Критерий отношения правдоподобия. Лемма Неймана–Пирсона.
8. Критерии согласия. Проверка гипотезы независимости.
9. Проверка гипотез для нормальных распределений.
10. Линейная регрессия.

Литература

1. *Булинский А. В.* Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. — Москва : Изд-во МФТИ, 2010.
2. *Гасников А. В., Горбунов Э. А., Гуз С. А., Черноусова Е. О., Широбоков М. Г., Шульгин Е. В.* Лекции по случайным процессам. — Москва : Изд-во МФТИ, 2019.
3. *Hassler U.* Stochastic Processes and Calculus. An Elementary Introduction with Applications. — Springer, 2016.
4. *Prevault N.* Introduction to Stochastic Finance with Market Examples — 2nd Edition, Chapman & Hall, 2023.
5. *Ross S.M.* Introduction to Probability Models. — Academic Press, 2019.
6. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — Москва : Наука, 1989.
7. *Чернова Н. И.* Математическая статистика — Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2009.
8. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Введение в математическую статистику. — Москва : Издательство ЛКИ, 2010.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 февраля – 6 марта)

Случайные процессы

1. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса $X(t) = Y\cos(t+Z)$, где $t \in \mathbb{R}$, случайные величины Y и Z независимы, причем Y имеет нормальное распределение $N(0,1)$, а Z равномерно распределена на отрезке $[-\pi, \pi]$.

2. Пусть X и Y – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие (для простоты) значения в конечном множестве. Найти $\mathsf{E}(X|X+Y)$.

3. Пусть случайное блуждание частицы по $\mathbb{Z}$ начинается в точке 0 в момент времени 0. С вероятностью $p \in (0,1)$ за один шаг она смещается вправо на единицу, а с вероятностью $q = 1-p$ смещается на единицу влево. Показать, что за n шагов частица окажется в точке $x \in \mathbb{Z}$ с вероятностью

$$p_{0,x}(n) = C_n^{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)},$$

если n и x одновременно четны или нечетны (в остальных случаях $p_{0,x}(n) = 0$). Здесь C_n^j обозначает число сочетаний из n элементов по j, где $j = 0, \ldots, n$, т. е. $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ($C_n^j = 0$ для $j \in \mathbb{Z}$ таких, что $j < 0$ и $j > n$).

4. Пусть частица совершает симметричное случайное блуждание по $\mathbb{Z}$. Фиксируем $a, b, i \in \mathbb{Z}$ такие, что $a \le i \le b$. Введем случайную величину τ как момент первого выхода случайного блуждания на границу a или границу b. Доказать, что

$$\mathsf{P}(S_\tau = b | S_0 = i) = \frac{i-a}{b-a},$$

где S_0 – начальное положение частицы, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, а независимые одинаково распределенные величины $X_1, X_2, \ldots$ таковы, что

$$\mathsf{P}(X_1 = -1) = \mathsf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

5. Построить пример однородной марковской цепи $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ с конечным числом состояний $S = \{1, \ldots, k\}$ и такого множества $B \subset S$, что для некоторых $i, j \in S$

$$\mathsf{P}(X_2 = j | X_1 \in B, X_0 = i) \ne \mathsf{P}(X_2 = j | X_1 \in B).$$

Этот пример показывает, что в определении марковской цепи существенно рассматривать именно фиксацию состояний в “прошлом”, а не любую информацию, связанную с “предысторией” процесса.

6. Последовательность $(X_n)_{n\geq 1}$ состоит из независимых одинаково распределенных дискретных случайных величин, частичные суммы $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ и $M_n = \max\{S_1, \ldots, S_n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Образуют ли величины $M_1, M_2, \ldots$ цепь Маркова?

7. Пусть процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ имеет независимые приращения и $\{h(t), t \geq 0\}$ – детерминированная функция. Верно ли, что процессы $\{X(t) + h(t), t \geq 0\}$ и $\{h(t)X(t), t \geq 0\}$ имеют независимые приращения?

8. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Найти вероятность события $\{N(s) = 1, N(t) = 2\}$, где $0 < s < t$.

9. Найти ковариационную функцию пуассоновского процесса интенсивности $\lambda > 0$. Нарисовать, как выглядят типичные траектории пуассоновского процесса.

10. Найти для пуассоновского процесса $\{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$ матрицу переходных вероятностей, убедившись, что он является однородной цепью Маркова с непрерывным временем.

11. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ и $0 < s < t$. Найти условные ожидания $\mathsf{E}(N(t)|N(s))$ и $\mathsf{E}(N(s)|N(t))$.

12. Предположим, что каждый день от 12 до 24 часов в гостиницу прибывает случайное число семей. Их количество представляет собой случайную величину, распределенную по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Каждая семья, живущая в отеле (независимо от дней, уже проведенных ею в отеле, а также независимо от других семей), может уехать на следующий день в промежуток времени от 0 до 12 часов с вероятностью $p \in (0, 1)$ или остаться еще на день с вероятностью $1 - p$. Обозначим X_n, где $n = 0, 1, \ldots$, число семей, которые зарегистрированы в гостинице к 24 часам. Объяснить, почему $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ является цепью Маркова и найти переходные вероятности. Вычислить $\mathsf{E}(X_n|X_0 = i)$, где $i = 0, 1, \ldots$, $n \in \mathbb{N}$. Имеет ли цепь стационарное распределение (если да, то какое?).

13. Склад, содержащий n одинаковых упаковок некоторого продукта, каждый день i принимает заказы, общее количество которых составляет случайное количество X_i, где $\mathsf{P}(X_i = k) = p_k$, $k = 0, \ldots, N$, $N > n$,

$i = 0, 1, \ldots$. В конце рабочего дня склад полностью пополняется. За каждую выданную упаковку склад берет плату в размере a. Если же $X_i > n$, то упаковка доставляется с резервного склада и отпускается по той же цене a, но склад при этом за каждую упаковку, превышающую объем n, платит $a + b$ $(b < a)$ резервному складу. Найти, как ведет себя средний доход поставщика (владельца склада) за m дней при $m \to \infty$, если:

а) X_i, $i = 0, 1, \ldots$, – независимые величины;

б) $X_0, X_1, \ldots$ образуют однородную цепь Маркова с матрицей P переходных вероятностей за один шаг и начальным распределением $\mathsf{P}(X_0 = 0) = 1$.

14. Показать, что если интенсивности рождения и гибели в стохастическом процессе рождения и гибели совпадают, то среднее время до вырождения популяции бесконечно при ее любом (неслучайном) начальном размере n_0.

15. Два игрока играют в шахматы. Один из них выигрывает с вероятностью p, проигрывает с вероятностью q и получает ничью с вероятностью r $(p+q+r = 1)$. Игра продолжается до тех пор, пока кто-либо из игроков не выиграет две партии подряд. Найти среднее время продолжительности игры.

16. Найти стационарное распределение марковской цепи с состояниями $\{1, \ldots, n\}$, если интенсивности переходов из состояния i в состояние j следующие:

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i, & j \neq i, \\ -(n-1)\lambda_i, & j = i. \end{cases}$$

17. Пусть функционирование некоторой системы, производящей и продающей продукцию, описывается однородной дискретной цепью Маркова с состояниями $\{1, \ldots, N\}$. В начальный момент $t = 0$ система находится в состоянии i. При переходе за один шаг из состояния k в состояние j фирма получает доход $r_{k,j}$ (возможно, отрицательный). Обозначим $v_i(n)$ средний доход, который получает фирма за n шагов (за промежуток времени длительности n), если начальное состояние было i. Пользуясь общим рекуррентным уравнением для $v_i(n)$, найти предельное поведение $v_1(n)$, $v_2(n)$ и $v_1(n) - v_2(n)$ в случае, когда $N = 2$, $p_{1,1} = 0,5$, $p_{1,2} = 0,5$, $p_{2,1} = 0,4$, $p_{2,2} = 0,6$, а

$$r_{1,1} = 9, \quad r_{1,2} = 3, \quad r_{2,1} = 3, \quad r_{2,2} = -7.$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–10 апреля)

Случайные процессы

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 соответственно с вероятностями p и $q = 1 - p$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Введем $Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Проверить, что $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Совпадают ли естественные фильтрации процессов $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$?

2. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные величины такие, что $\mathsf{P}(X_1 = \frac{1}{2}) = p$ и $\mathsf{P}(X_1 = 2) = 1 - p$, где $p \in (0, 1)$. При каком $p \in (0, 1)$ величины $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, образуют мартингал относительно своей естественной фильтрации?

3. Привести пример процесса, стационарного в широком смысле, но не стационарного в узком смысле. Привести пример процесса, стационарного в узком смысле, но не стационарного в широком.

4. Объяснить, почему для гауссовских процессов оба понятия стационарности совпадают.

5. Для 14 стран имеются следующие данные об индексе x розничных цен на продукты питания и индексе y промышленного производства соответственно вида (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 14$, т.е.

$$(100, 70), (105, 79), (108, 85), (113, 84), (118, 85), (118, 85), (110, 96),$$

$$(115, 99), (119, 100), (118, 98), (120, 99), (124, 102), (129.105), (132, 112).$$

Построить уравнение регрессии, описывающей y в виде линейной функции от x.

6. Пусть $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – "белый шум", т.е. $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$ и $\mathsf{E}X_n X_m = \delta_{n,m}$ для $n, m \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера (для $n, m \in \mathbb{Z}$ имеем $\delta_{n,n} = 1$ и $\delta_{n,m} = 0$ при $n \neq m$). Найти спектральную плотность процесса $X_n = \frac{1}{2}\varepsilon_n + \frac{1}{4}\varepsilon_{n-4}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

7. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ – винеровский процесс и $0 < s < t$. Найти распределение случайной величины $W(s) + W(t)$.

8. Вычислить вероятность события $\{W(s) > 0, W(t) > 0\}$ для винеровского процесса W при $s, t \geq 0$.

9. Найти условные ожидания $\mathsf{E}(W(t)|W(s))$ и $\mathsf{E}(W(s)|W(t))$, где W – винеровский процесс и $0 < s < t$.

10. Показать, что процесс $\{W(t)^2 - t, t \geq 0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W.

11. При каких $a, b \in \mathbb{R}$ процесс $\{X(t) = e^{(aW(t)+bt)}, t \geq 0\}$ окажется мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W?

12. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ – винеровский процесс. Для константы $a > 0$ положим $\tau = \inf\{t \geq 0 : |W(t)| = a\}$. Иначе говоря, рассматривается момент первого выхода винеровского процесса на границу $y = a$ или границу $y = -a$. Убедиться, что τ – марковский момент (относительно естественной фильтрации винеровского процесса) такой, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$ и найти $\mathsf{E}\tau$.

13. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}), t \in \mathbb{R}\}$, где W – винеровский процесс. Показать, что X - стационарный гауссовский процесс и найти его спектральную плотность.

14. Рассмотрим разбиения $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < ... < t_{n,n} = T$ отрезка $[0, T]$ на промежутки длины $\delta_{n,k} = t_{n,k} - t_{n,k-1}, k = 1, ..., n$, такие, что $\max_{1\leq k\leq n} \delta_{n,k} \to 0$ при $n \to \infty$, и выберем точки $s_{n,k} = pt_{n,k} + +(1-p)t_{n,k-1}, k = 1, ..., n,$, где константа $p \in [0,1]$. Обозначим $\Delta_{n,k}W = = W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})$ приращение винеровского процесса на k-м промежутке n-го разбиения. Доказать, что суммы $\sum_{k=1}^{n} W(s_{n,k})\Delta_{n,k}W$ сходятся в среднем квадратическом при $n \to \infty$ к случайной величине $\frac{W(T)^2}{2} + (p - \frac{1}{2})T$.

15. Найти следующий интеграл Ито:

$$\int_0^T W(t)dW(t).$$

16. В усовершенствованной модели Башелье эволюция цены $S(t)$ биржевого актива при $t > 0$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ с постоянным начальным условием $S(0) > 0$. Константы $\mu > 0$ и σ именуют соответственно *сносом* (или дрейфом) и *волатильностью* актива. Найти с помощью формулы Ито решение этого уравнения (такой процесс обычно называют геометрическим, но иногда экономическим, броуновским движением). Показать, что $\mathsf{E}S(t)$ совпадает с решением детерминированного дифференциального уравнения, получаемого при $\sigma = 0$.

17. С помощью формулы Ито проверить, что сильное решение уравнения Ланжевена $dV(t) = aV(t)dt + \sigma dW(t)$, где $t \geq 0$, а константы $a < 0$ и $\sigma > 0$, записывается в виде

$$V(t) = V(0)e^{at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW(s), \quad t \geq 0.$$

Найти $\mathsf{E}V(t)$, $\mathsf{var}V(t)$.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–28 февраля)

Математическая статистика

1. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из $Bin(m; p)$ с известным параметром m и неизвестным p. Какие из перечисленных ниже функций являются статистиками: а)$\overline{X}$; б)$m^2 + p$; в)$X_{(n)}$; г)$X_1 + X_2 + 2$; д)$\sqrt{m} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$; е) $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k^p$; ж) 2024?

2. По выборке из распределения с плотностью $f(x)$ найдите плотность распределения а) $X_{(n)}$; б) $X_{(1)}$; в) $X_{(k)}$ $(1 < k < n)$.

3. Пусть $(3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1)$ — наблюдавшиеся значения выборки. Постройте эмпирическую функцию распределения и найти $F_8^*(1)$, $F_8^*(3)$, $F_8^*(5)$.

4. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из $Geom(p)$. Является ли $\overline{X}$ достаточной статистикой для p?

5. Для выборки из равномерного распределения на отрезке $[0; \theta]$ $(U[0; \theta])$ докажите, что $X_{(n)}$ даёт асимптотически несмещенную оценку параметра θ.

6. Для выборки $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ из $N(a; \sigma^2)$ найдите значение α, при котором статистика $T(X) = \dfrac{\alpha}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} |X_k - a|$ будет несмещенной и сильно состоятельной оценкой параметра σ.

7. При описании процесса распада ядра урана в результате его нейтронной бомбардировки используется т.н. «двойное» распределение Пуассона:

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2} \right),$$

где $k \in Z_+$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

а) Найдите оценку векторного параметра $(\lambda_1; \lambda_2)$, используя метод моментов.

б) Вычислите значения оценок из п.а) Задачи 7 для следующих данных, полученных при $n = 327$ наблюдениях над случайной величиной X (через n_k обозначено число наблюдений, в которых $X = k$):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_k	28	47	81	67	53	24	13	8	3	2	1

8. По выборкам из $Geom(p)$ и $E(\alpha)$ постройте оценки максимального (наибольшего) правдоподобия параметров этих распределений.

9. По выборке из распределения Парето с параметрами $\beta > 0$ и $\theta > 0\,(P(\beta;\theta))$ постройте оценки максимального правдоподобия для

а) параметра β, если значение θ известно;

б) параметра θ, если значение β известно;

в) векторного параметра (β, θ).

10. Докажите, что $\overline{X}$ является эффективной оценкой математического ожидания в классе линейных несмещенных оценок.

11. Докажите, что частота события является эффективной несмещенной оценкой вероятности этого события.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 28 марта–3 апреля)

Математическая статистика

1. По выборке большого объёма из $Pois(\lambda)$ постройте для параметра распределения асимптотический доверительный интервал надёжности $1 - 2\alpha$.

2. По реализации выборки из $N(a; \sigma^2)$: (1,23; -1,384; -0,959; 0,731; 0,717; -1,805; -1,186; 0,658; -0,439) постройте доверительные интервалы надёжности 0,95 для: а) a при $\sigma^2 = 1$; б) a при неизвестном σ^2; в) σ^2 при $a = 0$; г) σ^2 при неизвестном a.

3. По результатам опроса населения большого города, в котором участвовало 900 человек, 400 из них выбрасывают рекламные листовки, раздаваемые на улицах, не читая. Найдите 90%-ный доверительный интервал, в котором находится вероятность того, что случайно выбранный житель города выбрасывает рекламные листовки, не читая.

4. Среди работников фирмы возрастом не старше 30 лет 20 человек имеют среднее образование, 13 – среднее профессиональное, и 18 – высшее. А среди работников старше 30 лет среднее образование есть у 23 человек, среднее профессиональное – у 20, и высшее – у 26. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу, что возраст и уровень образования независимы.

5. При переписи населения Англии и Уэльса в 1901 г. было зарегистрировано (с точностью до тысячи) 15 729 000 мужчин и 16 799 000 женщин; 3 497 мужчин и 3 072 женщины были зарегистрированы как глухонемые от рождения. Проверьте гипотезу о том, что врожденная глухонемота не связана с полом.

6. В течение месяца контролировался процент выполнения нормы выработки у 25 рабочих предприятия. Средний процент выработки составил 102,3%, а среднеквадратическое отклонение наблюдений оказалось равно $4(\%)^2$. Считая, что исследуемый признак распределен по нормальному закону, выясните, каким должен быть минимальный объём выборки, чтобы с 95%-ной надёжностью и точностью 0,5% оценить средний процент выработки на предприятии в целом.

7. Торговая фирма решает вопрос об открытии в новом районе города своего филиала. Известно, что фирма будет работать с прибылью, если еженедельный средний доход жителей района превышает 400 условных денежных единиц. Известно также, что дисперсия доходов жителей района равна 400 $(\text{у.д.е.})^2$.

а) Сформулируйте правило принятия решения, с помощью которого по выборке объёма 100 с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ можно установить, что филиал будет работать с прибылью;

б) Вычислите вероятность того, что при использовании этого правила филиал не будет открыт при том, что средний доход за неделю достигает 406 у.д.е.;

в) Считая значение генерального среднего дохода равным 430 у.д.е., найдите объём выборки, при котором риск ошибки первого рода не превысит 0,025, а риск ошибки второго рода – 0,05.

8. Владелец мастерской по ремонту обуви утверждает, что получает в среднем заказы не менее, чем от 30% предполагаемых клиентов. Можно ли при 5%-ном уровне значимости считать это утверждение верным, если известно, что мастерская получила заказы от 20 из 100 случайно отобранных потенциальных клиентов?

9. По результатам $n = 20$ замеров установлено, что среднее время варки кофе в тестируемом автомате равно 37с. Считая, что время приготовления напитка представляет собой нормально распределённую случайную величину с дисперсией $\sigma^2 = 4c^2$, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ решите:

а) можно ли принять 39с в качестве нормативного времени варки кофе автоматом?

б) можно ли принять за норматив 38с?

10. Учащиеся школы с 5 по 11 класс выполняли контрольные работы по математике, состоявшие из 10 заданий. Затем в классах «А» отобрали 10 работ, а в классах «Б» – 12. Среднее число верно выполненных заданий контрольной работы в отобранных работах оказалось равным 8 в классах «А», и 6 – в классах «Б». Считая, что генеральные дисперсии количества верно решенных заданий в контрольной работе в классах «А» и в классах «Б» равны, а их исправленные выборочные оценки равны, соответственно, 4 и 3, на 95%-ном уровне достоверности проверьте гипотезу «Классы «А» и классы «Б» написали контрольную одинаково» против направленной альтернативы «Классы «А» написали работу лучше».

11. В результате опроса группы курящих людей (7 мужчин и 6 женщин) получены данные о среднем количестве выкуриваемых в день сигарет: (5;10;4;15;10;3;2) у мужчин и (3;6;1;4;11;5) у женщин. На уровне доверия 95% проверьте гипотезу о равенстве среднего количества выкуриваемых в день сигарет у мужчин и у женщин.

12. Маркетологов компании, продающей спортивный инвентарь, интересует влияние вида стеллажа, где размещены товары, на объём продаж. Случайную выборку из 26 магазинов случайным же образом разделили на две равные по объёму группы: контрольную и экспериментальную. В 13 магазинах первой группы определённый товар, производимый компанией, размещали на обычном торговом оборудовании среди других спортивных товаров, а в 13 магазинах второй группы – на специализированных стеллажах с рекламой и промо-материалами. Спустя некоторе время были зафиксированы следующие коммерческие показатели продаж (в сопоставимых единицах): в контрольной группе среднее количество продаж равнялось 48 усл.ед. при дисперсии 450 $(\text{усл.ед.})^2$, а в экспериментальной – 65 усл.ед. при дисперсии 120 $(\text{усл.ед.})^2$. На уровне доверительной вероятности 95% определите, существуют ли статистически значимые различия в объёмах продаж магазинов двух групп.

13. По двум магазинам фирменной сети, расположенным в двух разных городах, имеется динамика данных за несколько полугодий о доле лояльных покупателей. По магазину №1: (0,40; 0,35; 0,38; 0,42; 0,38; 0,45; 0,52), по магазину №2: (0,32; 0,28; 0,20; 0,25; 0,38; 0,40; 0,47). Можно ли утверждать, что доля лояльных покупателей магазина №1 более стабильна по сравнению с аналогичным показателем магазина №2? Проверку гипотезы провести на уровне доверительной вероятности 0,95.

14. По результатам 576 измерений случайной величины, принимающей целые неотрицательные значения, были получены следующие результаты:

x_k	0	1	2	3	4	5 и больше
n_k	229	211	93	35	7	1

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу о пуассоновском распределении случайной величины.

15. С 8 до 18 часов бензоколонке регистрировали время прибытия автомобилей для заправки

Время	[8;9)	[9;10)	[10;11)	[11;12)	[12;13)
n_k	22	30	22	16	28
Время	[13;14)	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)
n_k	13	17	20	17	15

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу о том, что прибытие машины на заправку равновозможно с 8 до 18 часов.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент А. В. Булинский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

П Р О Г Р А М М А

по дисциплине: **<u>Вычислительная математика</u>**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
27.03.03 «Системный анализ и уравнения»
38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **<u>вычислительной физики</u>**
курс: 2
семестр: 4

<u>лекции – 30 часов</u> <u>Экзамен – нет</u>
<u>практические (семинарские)</u>
<u>занятия – нет</u> <u>Диф. зачет – 4 семестр</u>
<u>лабораторные занятия – 30 часов</u>
<u>Самостоятельная работа – 75 часов</u>

<u>ВСЕГО ЧАСОВ – 60</u>

Программу и задание составил
член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. И. Б. Петров

Программа принята на заседании
кафедры вычислительной физики
25 мая 2023 года.

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н., доцент С. С. Симаков

В программу данного курса включены основные разделы вычислительной математики: теория погрешностей, теория аппроксимации функций, введение в методы машинного обучения, численные методы решения линейных и нелинейных систем уравнений, численное интегрирование, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

В ходе изучения курса студент будет иметь следующие компетенции:

- знания основных вычислительных методов, применяемых для аппроксимации функций, решения линейных и нелинейных систем уравнений, дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), численного интегрирования;
- умение применять численные методы для решения конкретных вычислительных задач;
- умение исследовать вычислительные методы на сходимость, аппроксимацию, устойчивость;
- умение строить вычислительные алгоритмы для решения конкретных задач с помощью компьютера;
- умение решать корректно поставленные задачи с помощью компьютера;
- умение анализировать полученные численные решения;
- умение работать с онлайн-, интернет- и учебными ресурсами.

Все указанные компетенции реализуются и проверяются в ходе учебного процесса с использованием лекций, семинаров, лабораторных работ, заданий, контрольных работ, зачетов, онлайн-ресурсов.

Погрешности вычислений. Абсолютные и относительные погрешности. Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности. Оптимальный шаг численного дифференцирования.

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Нормы в конечномерных пространствах. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения: метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида. Оценка погрешности численных методов решения алгебраических систем. Задачи электростатики.

Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций. Необходимое, достаточное условие сходимости метода простых итераций. Метод Зейделя. Метод верхней релаксации.

Вариационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Численные методы оптимизации.

Метод верхней релаксации. Методы решения, основанные на минимизации функционалов. Метод сопряженных градиентов. Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Метод наименьших квадратов. Аппроксимация данных, полученных в физических экспериментах.

Аппроксимация функций в функциональных пространствах.

Метод наименьших квадратов, как задача машинного обучения. Аппроксимация функций, полученных в физическом эксперименте. Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона. Остаточный член интерполяции. Аппроксимация функций, полученных в физическом эксперименте, с помощью интерполяционных полиномов. Устойчивость интерполяционного процесса. Постоянная Лебега. Теорема Бернштейна. Схема Эйткена. Интерполяция функций двух переменных.

Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье.

Интерполяция по чебышёвским узлам. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками. Интерполяция функций многих переменных.

Кусочно-многочленная интерполяция. Интерполяционные полиномы с кратными узлами. Полиномы Эрмита. Интерполяция сплайнами. Задачи геодезии, визуализация результатов численного решения физических задач. В-сплайны.

Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Чебышева, Гаусса.

Методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений. Локализация корней. Принцип сжимающих отображений. Метод простых итераций. Условие сходимости метода простых итераций. Метод Ньютона. Порядок сходимости и условия достижения заданной точности итерационных методов. Теорема о квадратичной сходимости метода Ньютона. Численное решение уравнений состояний физических сред (газ, плазма, твердые деформируемые тела). Введение в численные методы оптимизации.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости. Простейшие численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Методы Рунге – Кутты решения систем ОДУ. Устойчивость методов Рунге – Кутты. Таблицы Бутчера, барьеры Бутчера.

Правило Рунге оценки погрешности. Управление длиной шага при численном интегрировании систем ОДУ.

Лабораторные работы по всем темам.

Литература

Основная

1. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. — 3-е изд. — Москва : Физматкнига, 2013. — 240 с.
2. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. — Москва : Интернет-университет информационных технологий, 2006. — 522 с.
3. *Аристова Е.Н, Завьялова Н.А., Лобанов А.И.* Практические занятия по вычислительной математике. Часть I. — Москва : Изд-во МФТИ, 2014. — 242 с.

Дополнительная

1. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». — 2-е изд, исправленное и дополненное / *В.Д. Иванов, В.И. Косарев, А.И. Лобанов, И.Б. Петров, В.Б. Пирогов, В.С. Рябенький, Т.К. Старожилова, А.Г. Тормасов., С.В. Утюжников, А.С. Холодов* . — Москва : МЗ-пресс, 2003. — 196 с.
2. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — Москва : Мир, 1990. — 512 с.
3. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. — Москва : Мир, 1998. — 575 с.

ЗАДАНИЕ 1

(срок сдачи 15–25 марта)

Задачи в задании даны по [6] основного списка литературы:
Глава I: 6.5, 8.15, 8.16, 8.20, 8.23, 8.33;
Глава II: 7.4, 7.5, 7.25, 7.30 б,в), 9.1 г), 9.2 в), 9.5, 9.16, 9.28, 9.32*;
Глава III: 4.1, 4.2, 4.3, 4.6*;
Глава IV: 9.6, 11.4, 11.13а), 11.17, 11.23.
*Практические задачи из разделов I.9, II.10, III.5, IV.12 по согласованию с преподавателем.
*Лабораторные работы по темам:

1. Погрешности вычислений.
2. Системы линейных уравнений.
3. Переопределенные системы линейных уравнений.
4.
5. Решение нелинейных уравнений.

ЗАДАНИЕ 2

(срок сдачи 10–15 мая)

Задачи в задании даны по [6] основного списка литературы:
Глава VI: 8.1, 8.10, 8.13, 8.16, 9.21, 9.22, 9.24;
Глава VII: 6.4, 8.6, 8. 14а), 8.19, 8.25 в);
Глава VIII: 7.7, 9.7, 9.11, 10. 2а), 10.3а, б).

*Практические задачи из разделов VI.9, VII.10, VIII.10 по согласованию с преподавателем.
*Лабораторные работы по темам:
1. Интерполяция функций.
2. Численное интегрирование.
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задача Коши).

Примеры задач для контрольной работы

1. Дайте определение интерполяционного кубического сплайна дефекта и получите расчетные формулы для аппроксимации функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с его помощью. Какова погрешность такой интерполяции?
2. Методом наименьших квадратов *(МНК*) решить переопределенную систему уравнений $Ax = f$; $A(n*m)$, $n > m$ *Указание:* использовать результат теоремы о МНК.
3. Для нахождения положительного корня нелинейного уравнения

$$\exp(-x) - \sin(x) = 0$$

предложите несколько вариантов метода простой итерации. Исследовать эти методы и сделать выводы о целесообразности использования каждого из них.
4. Для системы нелинейных уравнений

$$F(x) = 0$$

описать метод Ньютона для нахождения решения, оценить количество необходимых итераций для достижения заданной точности.

5. Оцените минимальное число узлов, необходимых для вычисления интеграла с точностью ε по методам трапеций и Симпсона. Вычислите интеграл с заданной точностью любым из этих методов.

6. Показать, что операция построения формулы экстраполяции Ричардсона действительно является экстраполяцией, т.е. при $I_p(h/2) \neq I_p(h)$ величина I_{p+1} всегда лежит вне отрезка с концами $I_p(h/2)$ и $I_p(h)$.

1-я контрольная работа (аудиторная) – вторая декада марта.
2-я контрольная работа (потоковая) — первая декада мая.

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа бизнеса высоких технологий (ФБВТ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2023–2024 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова, Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *В.А. Дружининой*

Подписано в печать 16.01.2024. Формат 60 ×84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,0. Тираж 35 экз.
Заказ № 31.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 Тел. (495) 408-58-22,
e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок