Аналитическая геометрия

Лекция 10

Миноры произвольного порядка

Определение

A_{mn} – данная матрица $m \times n$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \qquad\qquad\qquad j_1, \dots, j_s \\
\begin{array}{r} \\ \\ i_1, \dots, i_s \\ \\ A_{mn} = \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_s} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} & \cdots & a_{i_1 n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_s 1} & \cdots & a_{i_s j_1} & \cdots & a_{i_s j_s} & \cdots & a_{i_s n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_s} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$(i_1 < i_2 < \cdots < i_s,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_s)$.

Миноры произвольного порядка

Минором порядка s матрицы A_{mn} называется детерминант матрицы порядка s, образованный элементами, расположенными на пересечении выбранных строк и столбцов.

Обозначение: $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$.

$$L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_s j_1} & \cdots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}$$

Миноры произвольного порядка

Определение

A_{mn} – данная матрица $m \times n$. Выберем какие-нибудь s номеров строк $i_1, \dots, i_s$ и s номеров столбцов $j_1, \dots, j_s$ в порядке возрастания номеров $(i_1 < i_2 < \dots < i_s,\ j_1 < j_2 < \dots < j_s)$.

Минором порядка s матрицы A_{mn} называется детерминант матрицы порядка s, образованный элементами, расположенными на пересечении выбранных строк и столбцов.

Обозначение: $L^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_s}$.

Миноры произвольного порядка

Определение

Пусть $m = n$. Детерминант матрицы, полученной из A_n вычеркиванием строк с номерами $i_1, \dots, i_s$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_s$, называется **дополнительным минором** к минору $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$.

Обозначение: $M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$.

Определение

Алгебраическим дополнением минора называется его дополнительный минор, умноженный на $(-1)^{i_1 + \dots + i_s + j_1 + \dots + j_s}$.

Элементарные преобразования матрицы

1. Умножение строки на число $\lambda \neq 0$.

2. Сложение двух строк.

3. Перестановка двух строк.

4. Те же преобразования столбцов, что и в 1.—3.

Ранг матрицы

Определение

Минор порядка r матрицы A_{mn} называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ нулевые или их вовсе нет.

Замечание

У матрицы может быть несколько базисных миноров, но все они одного порядка.

Ранг матрицы

Определение

Строки и столбцы, на пересечении которых расположен базисный минор, называются базисными.

Определение

Рангом матрицы называется порядок базисного минора (если матрица нулевая, то ее ранг считают равным нулю).

Обозначение: $rank\ A$.

Ранг матрицы

Утверждение 15.1

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Доказательство

1. При умножении строки на число $\lambda \neq 0$ базисный минор либо не изменится, либо умножится на λ. Ни один нулевой минор не станет отличным от нуля.

Ранг матрицы

Доказательство

2. Если все миноры порядка $r+1$ (r – порядок базисного минора) равны нулю, то сложение двух строк не сделает ни один из них отличным от нуля.

Ранг матрицы

Доказательство

а) к строке, входящей в минор, прибавим строку в него не входящую; тогда минор порядка $r+1$ в новой матрице равен алгебраической сумме двух миноров порядка $r+1$ исходной матрицы;

Ранг матрицы

Доказательство

б) к строке, входящей в базисный минор, прибавим строку этого же минора; тогда минор новой матрицы равен сумме минора порядка $r+1$ и детерминанта матрицы с двумя одинаковыми строками;

Ранг матрицы

Доказательство

в) если обе строки не входят в минор, то он не изменится. Итак, $rank\ A$ не может повыситься, но он не может и понизиться, так как при обратном преобразовании — вычитании строк — он бы повысился.

Ранг матрицы

Доказательство

3. При перестановке двух строк минор может изменить знак (если обе строки в него входят), может замениться на минор, не более чем знаком отличающийся от другого минора той же матрицы (если только одна из строк в него входит), либо не изменится. Порядок базисного минора тогда не меняется.

4. Для столбцов рассуждения аналогичны.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Определение

Если матрица имеет следующий вид: некоторые r столбцов – первые r столбцов E_m, а при $r < m$ последние $m - r$ строк нулевые, то такой вид называется **упрощенным видом матрицы** (а сама матрица – **упрощенной**).

Приведение матрицы к упрощенному виду

Утверждение 15.2

Каждую матрицу A_{mn} можно элементарными преобразованиями строк привести к упрощенной.

Доказательство

Несколько первых столбцов A_{mn} могут оказаться нулевыми (если они все нулевые, то $r = 0$, делать ничего не нужно). Пусть j_1 – номер первого ненулевого столбца, а $a_{i_1 j_1}$ – его ненулевой элемент.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Переставим $i_1^{\text{ю}}$ строку на первое место и разделим ее на $a_{i_1 j_1}$.Обозначив элементы новой матрицы через a_{ij}^1, получаем $a_{1j_1}^1 = 1.$ Для этого из каждой строки с новым номером $k \neq 1$ вычтем первую строку, умноженную на $a_{kj_1}^1$. Матрица примет вид:

$$A_{mn}^1 = \left(\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}\middle| \; B^1 \right)$$

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

$$A^1_{mn} = \left(\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}\right| \left. B^1 \right)\text{, где}$$

B^1 – матрица $m \times (n - j_1)$. Если в B^1 последние $m - 1$ строк нулевые, то больше ничего не делаем.

В противном случае пусть j_2 – номер самого левого столбца, содержащего ненулевой элемент в одной из последних $m - 1$ строк.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Переставим строку с этим элементом на второе место, затем разделим ее на этот элемент. Обозначим элементы полученной матрицы через $a^2_{2j_2}$. Тогда $a^2_{2j_2} = 1$.

Затем из каждой строки с номером $k \neq 2$ вычтем вторую, умноженную на $a^2_{kj_2}$. При этом обратятся в нули все остальные элементы столбца j_2, а первые j_1 столбцов A^1_{mn} не изменятся.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Получится матрица

$$A_{mn}^2 = \left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{}} & 0 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & B^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 &
\end{array}\right),$$

где B^2 – матрица $m \times (n - j_1 - j_2)$, а в $\boxed{}$ стоят элементы, про которые мы ничего не знаем.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Если в последних $m-2$ строках есть ненулевые элементы, то проделываем аналогичные преобразования, превращая столбец j_3 в столбец с 1 на третьем месте и с 0 на всех остальных местах.

Левее этого столбца в последних $m-2$ строках стоят только нули, поэтому ранее преобразованные столбцы не изменятся.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Будем продолжать такие преобразования, пока последние $m - r$ строк матрицы A_{mn}^r не станут нулевыми или строки закончатся.

Замечание

В упрощенной матрице минор, расположенный в первых r строках и столбцах $j_1, \dots, j_r$, равен 1. Ненулевых миноров большего порядка нет. Поэтому $rank\ A_{mn}^r = r \Rightarrow rank\ A_{mn} = r$.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Следствие

Пусть A – квадратная матрица: $\det A \neq 0$. Тогда ее упрощенная матрица единичная. (Так как все столбцы базисные.)

Метод преобразования матрицы к упрощенному виду, который был применен при доказательстве утверждения 15.2, называется **методом Гаусса**.

Приведение матрицы к упрощенному виду

1. Если в A_{mn} все столбцы нулевые, то не делаем ничего. $rank\ A_{mn} = 0$.
2. Если самый левый из ненулевых столбцов имеет номер j, то выберем его самый верхний элемент $a_{ij} \neq 0$ (ведущий элемент $1^{\underline{\text{го}}}$ шага).
3. Переставим $i^{\underline{\text{ю}}}$ строку на $1^{\underline{\text{е}}}$ место.
4. Поделим эту строку на a_{ij} (получится ведущая строка $1^{\underline{\text{го}}}$ шага).

Приведение матрицы к упрощенному виду

5. Ко всем остальным строкам, кроме ведущей, прибавим ведущую, умноженную на λ, подобранное так, чтобы обратить в ноль все элементы $j^{\underline{\text{го}}}$ столбца, кроме ведущего.

Приведение матрицы к упрощенному виду

6. Если упрощенный вид не получен, то находим следующий ненулевой столбец, у которого есть ненулевые элементы ниже первой строки. Первый из них назначим ведущим элементом второго шага и повторим действия, описанные в пунктах 3,4 и 5.

7. Повторяем действия из пункта 6, пока не получим упрощенную матрицу.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Можно поступить и по-другому. Сначала обнулить все элементы, расположенные ниже ведущего (прямой ход метода Гаусса). Получится ступенчатая матрица. Очевидно, что ее ранг равен r.

Для вычисления $rank\ A$ этого достаточно, но если нужна упрощенная матрица, то обнуляем все элементы, расположенные выше ведущих (обратный ход метода Гаусса).

Приведение матрицы к упрощенному виду

Утверждение 15.3

$\forall$ базисного минора матрицы A_{mn} элементарными преобразованиями строк можно превратить базисные столбцы в столбцы единичной матрицы. Если $rank\ A_{mn} = r < m$, то последние $m - r$ строк станут нулевыми.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Пусть базисный минор расположен в строках $i_1, \dots, i_r$ и столбцах $j_1, \dots, j_r$.

Переставим базисные столбцы на первые r мест и будем действовать методом Гаусса с той лишь разницей , что ведущий элемент в очередном столбце берется не произвольно, а из строк с номерами $i_1, \dots, i_r$.

Приведение матрицы к упрощенному виду

Доказательство

Такой элемент ∃, иначе базисный минор нулевой.

Наконец, вернем столбцы на их первоначальные места.

Теорема о базисном миноре

Теорема 15.1 (о базисном миноре)

В матрице A_{mn} с $rank\ A_{mn} \neq 0$ любой столбец есть линейная комбинация базисных столбцов, а любая строка — линейная комбинация базисных строк.

Теорема о базисном миноре

Доказательство

Второе утверждение следует из того, что, приводя A_{mn} к упрощенному виду, мы заменяем базисные строки на их линейные комбинации, а к небазисным строкам прибавили линейные комбинации базисных (док-во предыдущего утверждения).

Теорема о базисном миноре

Доказательство

В упрощенной матрице все небазисные строки нулевые.То есть, мы прибавили к каждой небазисной строке исходной матрицы такую линейную комбинацию её базисных строк, что получилась нулевая строка.

Первое утверждение следует из второго, если мы предварительно заметим, что после транспонирования матрицы базисный минор останется базисным.

Критерий вырожденности матрицы

Утверждение 15.4

Если A_n- квадратная матрица: $\det A_n = 0$, то хотя бы один из столбцов A - линейная комбинация остальных столбцов.

Аналогичное утверждение справедливо и для строк A.

Критерий вырожденности матрицы

Доказательство

$\det A_n = 0 \Longrightarrow rank\ A_n \leq n - 1 \ \Longrightarrow$ Хотя бы один из столбцов (хотя бы одна из строк) не пересекает базисный минор. Они линейно выражаются через базисные по теореме о базисном миноре $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ и через все остальные.

Критерий вырожденности матрицы

Определение

Квадратная матрица A_n называется **вырожденной**, если $\det A = 0$.

Квадратная матрица A_n называется **невырожденной**, если $\det A \neq 0$.

Критерий вырожденности матрицы

Теорема 15.2 (Критерий вырожденности матрицы)

Квадратная матрица A – вырожденная $\Leftrightarrow$ $\exists$ строка и столбец, являющиеся линейными комбинациями остальных строк (столбцов).

Теорема о ранге матрицы

Определение

Число линейно независимых столбцов матрицы A_{mn} называется её **столбцовым рангом**.

Число линейно независимых строк матрицы A_{mn} называется её **строчным рангом**.

Теорема о ранге матрицы

Определение

Число линейно независимых столбцов матрицы A_{mn} называется её **столбцовым рангом**.

Число линейно независимых строк матрицы A_{mn} называется её **строчным рангом**.

Обозначения

$colrank\ A_{mn}$ - столбцовый ранг.

$strrank\ A_{mn}$ - строчный ранг.

Теорема о ранге матрицы

Теорема 15.3. (О ранге матрицы)

$$\boxed{rank\ A = colrank\ A = strrank\ A}$$

Доказательство

Если все столбцы нулевые, то

$rank\ A = colrank\ A = 0$, и обратно.

Если $rank\ A = r > 0$, то в $A\ \exists\ r$ линейно независимых столбцов.

Теорема о ранге матрицы

Доказательство

Пусть A' - матрица, составленная из элементов A, такая, что $\det A'$ - базисный минор. Столбцы A' - части столбцов A. Если бы базисные столбцы A были линейно зависимы, то были бы линейно зависимы столбцы $A' \Longrightarrow \det A' = 0$, а это невозможно.

Теорема о ранге матрицы

Доказательство

Докажем, что $\forall p$ столбцов A линейно зависимы при $p > r$.

Составим матрицу B из этих столбцов.

$rank\ B \leq r$, так как $\forall$ минор B есть минор A.

$rank\ B < p \Longrightarrow \exists$ столбец B, не входящий в её базисный минор $\Longrightarrow$ он линейно выражается через остальные $\Longrightarrow rank\ A = colrank\ A$.

Аналогично $rank\ A = strrank\ A$.

Оценка ранга произведения матриц

Утверждение 15.5

Если $\exists\ AB$, то $rank\ AB \leq min\{rank\ A, rank\ B\}$.

Доказательство

Пусть $D = (A|AB)$

Очевидно, что $rank\ AB \leq rank\ D$.

Из определения $AB \implies$ столбцы AB – линейные комбинации столбцов $A \implies rank\ D = rank\ A \implies$
$\implies rank\ AB \leq rank\ A$.

Аналогично $rank\ AB \leq rank\ B$.

Нужно взять $D_1 = \left(\frac{B}{AB}\right)$.