УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра и геометрия**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 19.03.01 «Биотехнология», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент А. И. Днестрян

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатах.
2. Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат. Матрица перехода и ее основное свойство. Изменение координат вектора при замене базиса. Изменение координат точки при переходе к новой системе координат. Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.
3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.
4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Биортогональный (взаимный) базис.
5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.
6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.
7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии.
9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе.

10. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус второго порядка, их основные свойства. Прямолинейные образующие.

11. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости. Координатное представление линейных преобразований плоскости.

12. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий.

13. Алгебраические операции с матрицами. Обратная матрица.

14. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Правило Крамера. Критерий обратимости. Формула для элементов обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018.
2. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Москва : МФТИ, 2011, `http://www.umnov.ru`.
3. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (Цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 октября – 04 ноября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

С: $14.4(\underline{2},7)$; $14.7(\underline{3},5,11)$; $15.2(\underline{1},6)$; $15.5(\underline{3},\underline{1},2,12,13)$; $15.12(6)$; $15.22(\underline{1})$.

Т.1. Описать все квадратные матрицы второго порятка перестановочные с любой другой квадратной матрицей второго порядка.

С: $17.1(\underline{3},4)$; $17.2(5)$.

II. Векторы

С: $\underline{1.6}$; 1.8; 1.10; $1.11(2)$; $\underline{1.14}$; 1.20; $1.30(1,2)$; 1.37; 1.35^*; 1.51^*.

III. Замена базиса и системы координат

С: 4.6; $\underline{4.7}$; 4.20; 4.25; 4.28^*.

IV. Скалярное, векторное и смешанное произведение

С: $\underline{2.7(2)}$; $2.10(1,2,3)$; 2.11; $\underline{2.20}$; $2.27(\underline{1},2)$; 2.30; 2.35; 2.43^*; $3.1(1,2,3)$; 3.6; $3.8(1,2)$; 3.12; $3.13(\underline{1},2,3)$; $3.19(\underline{1},2)$; $3.20(1,2)$; 3.25^*; $3.26(1,3)$; 3.32.

Т.2. При каком λ вектора

$$\boldsymbol{a} = (1,1,1),\ \boldsymbol{b} = (2,0,1),\ \boldsymbol{c} = (3,1,\lambda),$$

образуют базис.

Т.3. Решить уравнение $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$, считая вектор $\boldsymbol{a}$ известным.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** $14.4(2,7)$; $14.7(3,5,11)$; $15.2(1,6)$; $15.5(3,1,2,12,13)$; $15.12(6)$; $15.22(1)$; Т.1; $17.1(3,4)$; $17.2(5)$.
2 неделя	**С:** 1.6; 1.8; 1.10; $1.11(2)$; 1.14; 1.20; $1.30(1,2)$; 1.37; 1.35^*; 1.51^*.
3 неделя	**С:** 4.6; 4.7; 4.20; 4.25; 4.28^*; $2.7(2)$; $2.10(1,2,3)$; 2.11; 2.20; $2.27(1,2)$; 2.30; 2.35; 2.43^*.
4 неделя	**С:** $3.1(1,2,3)$; 3.6; $3.8(1,2)$; 3.12; $3.13(1,2,3)$; $3.19(1,2)$; $3.20(1,2)$; 3.25^*; $3.26(1,3)$; 3.32; Т.2; Т.3.

$\boxed{44+1^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–25 ноября)

I. Прямая на плоскости

С: 5.1(1, 2, 3); 5.2(<u>1</u>, 2); 5.8(1,<u>2</u>, 3); 5.9(1); <u>5.17</u>; 5.18; 5.34(<u>1</u>, 2); 5.36*; <u>5.54</u>; 5.56;.

II. Плоскость и прямая в пространстве

С: 6.1(<u>1</u>, 3, 5); 6.2(1, 2, 3); 6.3(2); 6.4(1); 6.10(<u>1</u>, 3); 6.11(2, 4, <u>9</u>); 6.15; 6.17(1); 6.20(<u>1</u>); 6.27(2); 6.31; 6.72(2); 6.74(1, 2, 3, 4, 5).

III. Линии второго порядка

С: 7.25(<u>1</u>, 4); 7.28; 7.33(1, 2); 7.38(<u>2</u>, 6); 7.41(<u>1</u>, 2); 7.49(1); <u>7.54(1, 2, 3)</u>; 7.55; 7.62(1, 4); 8.1(<u>1</u>, 3, 6); 8.7(3); 8.9(task!1, 3, 5); 8.13; <u>8.24(2)</u>; 8.25(2); 8.26(2); 8.28(<u>1</u>, 3, 6); <u>9.1(2)</u>; 9.4(<u>1</u>, 4, 5); 9.19(3).

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 5.1(1, 2, 3); 5.2(1, 2); 5.8(1, 2, 3); 5.9(1); 5.17; 5.18; 5.34(1, 2); 5.36*; 5.54; 5.56; 6.1(1, 3, 5); 6.2(1, 2, 3); 6.3(2); 6.4(1); 6.10(1, 3).
2 неделя	**С:** 6.11(2, 4, 9); 6.15; 6.17(1); 6.20(1); 6.27(2); 6.31; 6.72(2); 6.74(1, 2, 3, 4, 5).
3 неделя	**С:** 7.25(1, 4); 7.28; 7.33(1, 2); 7.38(2, 6); 7.41(1, 2); 7.49(1); 7.54(1, 2, 3); 7.55; 7.62(1, 4); 8.1(1, 3, 6); 8.7(3); 8.9(1, 3, 5).
4 неделя	**С:** 8.13; 8.24(2); 8.25(2); 8.26(2); 8.28(1, 3, 6); 9.1(2); 9.4(1, 4, 5); 9.19(3).

$\boxed{42 + 4^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 11–16 декабря)

I. Поверхности второго порядка

С: 10.3(<u>2</u>, 5, 9); 10.9(1, 3, 5); 10.14(1, <u>3</u>); <u>10.15</u>; <u>10.32</u>; 10.38; 10.41; 10.65(1, <u>2</u>); 10.81; 10.83.

Т.1*. Какая кривая может получиться при пересечении кривой второго порядка и плоскости? Привести примеры всех возможных случаев.

II. Аффинные преобразования плоскости

С: 12.28(1, 2*, 3); <u>12.31</u>; 12.38(1, 2); 12.39(1, 2); 12.40(<u>1</u>, 2); 12.42(<u>1</u>, 2); 12.43(<u>5</u>, 6; 12.53(1, <u>2</u>, 3, 5); 12.69(1, 4); 12.82 (для преобразования 12.81(<u>7</u>, 8, 10)).

III. Определители n-го порядка

С: 14.12(1,2); 14.21(<u>12</u>, 7, 13); 14.22(4); 14.23(3, 7, <u>8</u>, 9, 11); 14.24(<u>1</u>, 3, 5); 14.33*.

T.2. Найдите наибольшее значение определителя 4-го порядка, у которого все элементы равны 1 или –1.

IV. Операции с матрицами. Обратная матрица

С: $15.11(2,4)$; $15.18(2)$; $15.22(\underline{3},\ 4)$; $15.23(1)$; $15.24(\underline{1},2,3,4)$; $15.45(1,\underline{2},7)$; $15.54(7)$; 15.55; 15.56^*; $15.65(\underline{4},5)$.

T.3*. Пусть А – квадратная матрица второго порядка и k – целое число, большее двух. Доказать, что $A^k = 0$ тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** $10.3(2,5,9)$; $10.9(1,3,5)$; $10.14(1,3)$; 10.15; 10.32; 10.38; 10.41; $10.65(1,2)$; 10.81; 10.83; Т.1*.
2 неделя	**С:** $12.28(1,2^*,3)$; 12.31; $12.38(1,2)$; $12.39(1,2)$; $12.40(1,2)$; $12.42(1,2)$; $12.43(5,6)$; $12.53(1,2,3,\ 5)$; $12.69(1,4)$; 12.82 (для преобразования $12.81(7,8,10)$).
3 неделя	**С:** $14.12(1,2)$; $14.21(12,7,13)$; $14.22(4)$; $14.23(3,7,8,9,11)$; $14.24(1,3,5)$; 14.33; Т.2.
4 неделя	**С:** $15.11(2,4)$; $15.18(2)$; $15.22(3,4)$; $15.23(1)$; $15.24(1,2,3,4$ $15.45(1,2,7)$; $15.54(7)$; 15.55; 15.56^*; $15.65(4,5)$; Т.3*.

$\boxed{42 + 4^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент А. И. Днестрян