Алгебра и геометрия

Лекция 9

Детерминанты

Определение

1. **Детерминантом** матрицы порядка 1 называется ее единственный элемент.

2. Детерминантом матрицы $A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=\overrightarrow{1,n}}$ при $n > 1$ называется число

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1},$$

где M_k^1 – детерминант матрицы, полученной из A вычеркиванием $1^{\underline{\text{й}}}$ строки и $k^{\underline{\text{го}}}$столбца.

Детерминанты

Синоним: определитель матрицы

Обозначения

$$\det A\,, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение

Детерминант матрицы, полученной в результате вычеркивания $i^{\underline{\text{й}}}$ строки и $j^{\underline{\text{го}}}$ столбца, называется дополнительным минором элемента a_{ij} исходной матрицы.

Обозначение: M_j^i.

Свойства детерминанта

1. (Разложение по первому столбцу)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i \ ,$$

Доказательство (по индукции)

База: $n = 2$ (проверяется непосредственно).

Предположение: формула верна для матриц порядка $(n - 1)$.

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

Переход: докажем, что формула справедлива для матриц порядка n.

По определению

$$\det A = a_{11} M_1^1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1 . \qquad (*)$$

$\forall k \geq 2$ в матрицу A_k^1 входит (без первого элемента) первый столбец A.

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

По предположению разложим M_k^1 по этому столбцу:

$$M_k^1 = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_{i1} M_{k1}^{1i}$$, где M_{k1}^{1i} – детерминант матрицы, полученной из A_k^1 вычеркиванием $(i-1)^{\underline{\text{й}}}$ строки и $1^{\underline{\text{го}}}$ столбца, то есть вычеркиванием из A $1^{\underline{\text{й}}}$ и $i^{\underline{\text{й}}}$ строк и $k^{\underline{\text{го}}}$ и $1^{\underline{\text{го}}}$ столбцов (учитывается, что $i^{\underline{\text{я}}}$ строка A входит в A_k^1 с номером $(i-1)$).

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

Подставим в $(*)$:

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}\left((-1)^{k+1}a_{1k}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}\,M_{k1}^{1i}\right) =$$

$$= a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{k+i+1}\,a_{1k}a_{i1}M_{k1}^{1i} = a_{11}M_1^1 +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{k1}^{1i} \quad = a_{11}M_1^1 +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i$$

Свойства детерминанта

2. $\boxed{\det A^T = \det A}$

Доказательство (по индукции)

База: $n = 1$; утверждение очевидно.

Предположение: пусть доказываемое верно для $\forall\, A_{n-1}$.

Переход: докажем для $\forall\, A_n$.

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

Пусть A_j^1 получена из A, B_1^j получена из A^T. Ясно, что $B_1^j = (A_j^1)^T$. По предположению $\det B_1^j = \det A_j^1$, причем $a_{1j} = b_{j1} \Rightarrow$ разложение по первой строке $\det A$ совпадает с разложением по первому столбцу $\det A^T$.

Свойства детерминанта

Замечание

Из доказанного $\Rightarrow$ равноправность строк и столбцов, то есть, если для $\det$ доказано утверждение, касающееся строк, то оно верно и для столбцов, и обратно. Поэтому все остальные свойства достаточно доказывать только для строк или только для столбцов.

Свойства детерминанта

3. (Антисимметричность по строке и по столбцу)

Если в матрице поменять местами две строки (два столбца), то её детерминант изменит знак.

Доказательство (по индукции)

3.1 Докажем сначала для двух соседних строк.

База: для $n = 2$ утверждение проверяется непосредственно.

Предположение: утверждение верно для $\forall\, A_{n-1}$.

Переход: докажем для $\forall\, A_n$.

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

Разложим $\det A$ по первому столбцу:

$$\det A_n = (-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} M_1^{k+1} + \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i \qquad (1)$$

Поменяем местами $k^{\underline{ю}}$ и $(k+1)^{\underline{ю}}$ строки в A_n – получим B_n .

$$\det B_n = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} N_1^k + (-1)^{k+2} a_{k1} N_1^{k+1} + \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} N_1^i \qquad (2)$$

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

В M_1^i и N_1^i при $i \neq k, k+1$ входят $k^{\underline{я}}$ и $(k+1)^{\underline{я}}$ строки, но в разном порядке, а остальные строки одинаковы. По предположению $N_1^i = -M_1^i$; $i \neq k, k+1$. Матрицы с детерминантами M_1^k и N_1^{k+1} совпадают $\Rightarrow$ $M_1^k = N_1^{k+1}$

Аналогично $M_1^{k+1} = N_1^k$.

Подставляя все полученные значения в (1) и (2), видим, что $\det B_n = -\det A_n$

Свойства детерминанта

Доказательство (по индукции)

3.2 Пусть теперь переставлены строки с номерами $i < j$. Между ними $j - i - 1$ строк.

Рассматриваемую перестановку можно сделать, переставляя соседние строки $2(j - i) - 1$ раз.

$$(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$$

Это число нечётное.

При каждой перестановке $\det$ меняет знак, поэтому после нечётного числа перестановок знак изменится.

Свойства детерминанта

4. (Разложение детерминанта по ∀ строке и по ∀ столбцу).

$$\forall i: 1 \le i \le n \quad \boxed{\det A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_k^i}$$

$$\forall j: 1 \le j \le n \quad \boxed{\det A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_j^k}$$

Свойства детерминанта

Доказательство (для строк)

При $i = 1$ получаем определение $\det A_n$.

При $i \geq 2$. Переставим $i^{\underline{\text{ю}}}$ строку на 1 место, не нарушая порядка остальных строк. Для этого последовательно переставим $i^{\underline{\text{ю}}}$ строку со всеми строками выше неё.

Если B_n – матрица, полученная после такой перестановки, то

$$\det A_n = (-1)^{i-1} \det B_n$$

Свойства детерминанта

Доказательство (для строк)

Разложим $\det B_n$ по первой строке (i-ой строке матрицы A_n) и подставим в предыдущее равенство:

$$\det A_n = (-1)^{i-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{ik}N_k^1, \text{ но } N_k^1 = M_k^i.$$

Тогда $\det A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}M_k^i$.

Свойства детерминанта

5. (Линейность детерминанта по столбцу и строке).

   Если $i^{\underline{й}}$ столбец (строка) матрицы A есть линейная комбинация столбцов (строк) p и q (т.е. $\alpha p + \beta q$), то

$$\boxed{\det A = \alpha \det A_p + \beta \det A_q},$$ где

   матрицы A_p и A_q получаются из A заменой $i^{\underline{го}}$ столбца (строки) на p и q соответственно.

Свойства детерминанта

Доказательство

$\forall k: 1 \leq k \leq n \quad a_{ki} = \alpha p^k + \beta q^k$, где p^k и q^k – элементы столбцов p и q.

Подставим в разложение $\det A$ по $i^{\underline{\text{му}}}$ столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} M_i^k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} p^k \, M_i^k + \beta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} q^k \, M_i^k =$$

$$= \alpha \det A_p + \beta \det A_q$$

Свойства детерминанта

6. Если в матрице A столбцы (строки) линейно зависимы, то $\det A = 0$.

Доказательство

6.1 Если в A есть нулевой столбец, то $\det A = 0$.

6.2 Если в A нет нулевых столбцов, но есть два одинаковых столбца, то, переставив эти столбцы, получим $\det A = 0$ в силу свойства 3.

Свойства детерминанта

Доказательство

6.3 Пусть $j^{\underline{\text{й}}}$ столбец матрицы A есть линейная комбинация остальных столбцов (⇔ линейной зависимости всех столбцов):

$$a_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k a_k$$, причем некоторые α_k могут быть нулевыми.

Свойства детерминанта

Доказательство

Из линейности детерминанта по столбцу ⇒

$$\det A = \sum_{k \neq j} \alpha_k \det A_k\,, \quad \text{где } A_k - \text{матрица,}$$

полученная из A заменой $j^{\underline{\text{го}}}$ столбца на $k^{\underline{\text{й}}}$ столбец.

В A_k столбец a_k повторяется дважды ⇒ $\det A_k = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

Свойства детерминанта

7. Детерминант матрицы не изменится, если к какой-нибудь его строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Доказательство (для строк)

Утверждение сразу следует из линейности детерминанта по строке и того, что детерминант с линейно зависимыми строками равен нулю.

Формула полного развертывания детерминанта

Определение

Перестановкой чисел $1,2 \ldots, n$ называются эти числа, записанные в определенном порядке.

Пример

Из чисел 1 и 2 можно получить две перестановки: $1,2$ и $2,1$.

Обозначение $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Формула полного развертывания детерминанта

Определение

Число i_k нарушает порядок в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, если оно стоит левее меньшего числа.

Общее число нарушений порядка в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ обозначим $inv(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Формула полного развертывания детерминанта

Справедлива формула, которая в наш курс входит без доказательства:

$$\boxed{\det A_n = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} (-1)^{inv(i_1,\dots,i_n)}\, a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}}$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Общий случай.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

СЛАУ из m уравнений с n неизвестными $x_1, \dots, x_n$.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы;

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных;

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

$A^* = (A|b)$ – расширенная матрица системы.

Матричная запись СЛАУ: $\boxed{Ax = b}$

Столбцовая запись СЛАУ:

$\boxed{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b}$, где

$a_1, a_2, \dots, a_n$ – столбцы матрицы A.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Определение

Совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется **решением** системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

если каждое её уравнение обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вместо $x_1, \ldots, x_n$.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Специальный случай: $n = m$

Мы рассматриваем СЛАУ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2)$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Теорема 14.1. (Правило Крамера)

Если $\det A$, где A – матрица СЛАУ (2), отличен от нуля, то указанная СЛАУ имеет единственное решение, причем

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \forall i = \overrightarrow{1, n}$$, где

$\Delta = \det A$,

Δ_i – детерминант матрицы, полученной из A заменой её $i^{\underline{\text{го}}}$ столбца столбцом свободных членов.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

1. ∃ решения.

К расширенной матрице A^* припишем сверху её строку с номером j. Получим матрицу $\overline{A}$, две строки которой одинаковы $\Longrightarrow \det \overline{A} = 0$.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

По определению

$$\det \overline{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ji} M_i + (-1)^{n+1+1} (\det A) b_j = 0$$

(M_i - детерминант матрицы, полученной из A^* вычёркиванием $i^{\underline{\text{го}}}$ столбца)

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

Учитывая, что $\det A = \Delta \neq 0$, получаем

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(-1)^{i+1}M_i = b_j \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\underbrace{\frac{(-1)^{n+i}M_i}{\Delta}}_{x_i} = b_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

Набор чисел $x_i = \frac{(-1)^{n+i} M_i}{\Delta}, i = \overrightarrow{1, n}$

удовлетворяет $j\underline{^{\text{му}}}$ уравнению СЛАУ (2).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2)$$

Так как j можно взять любым, а x_i не зависит от j, набор x_i удовлетворяет $\forall$ уравнению СЛАУ (2).

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

2. Приведение x_i к виду $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$.

Подставим в $\overline{A}$ последний столбец b на $i^{\underline{e}}$ место, поменяв его последовательно местами со столбцами с номерами $n, n-1, \dots, i+1$.

Нужно $(n-i)$ перестановок $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad x_i = \frac{(-1)^{n+i}(-1)^{n-i}\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad \forall i = \overrightarrow{1,n}$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

3. Единственность решения.

Пусть нашлись два различных решения (2):

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ и } \beta_1, \dots, \beta_n$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в специальном случае

Доказательство

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (2)$$

$\Leftrightarrow x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b;\ \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = b$

и $\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n = b \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1) a_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) a_n = 0 \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a_1, \dots, a_n$ линейно зависимы $\Longrightarrow \det A = 0.$

Противоречие