Алгебра и геометрия

Лекция 7

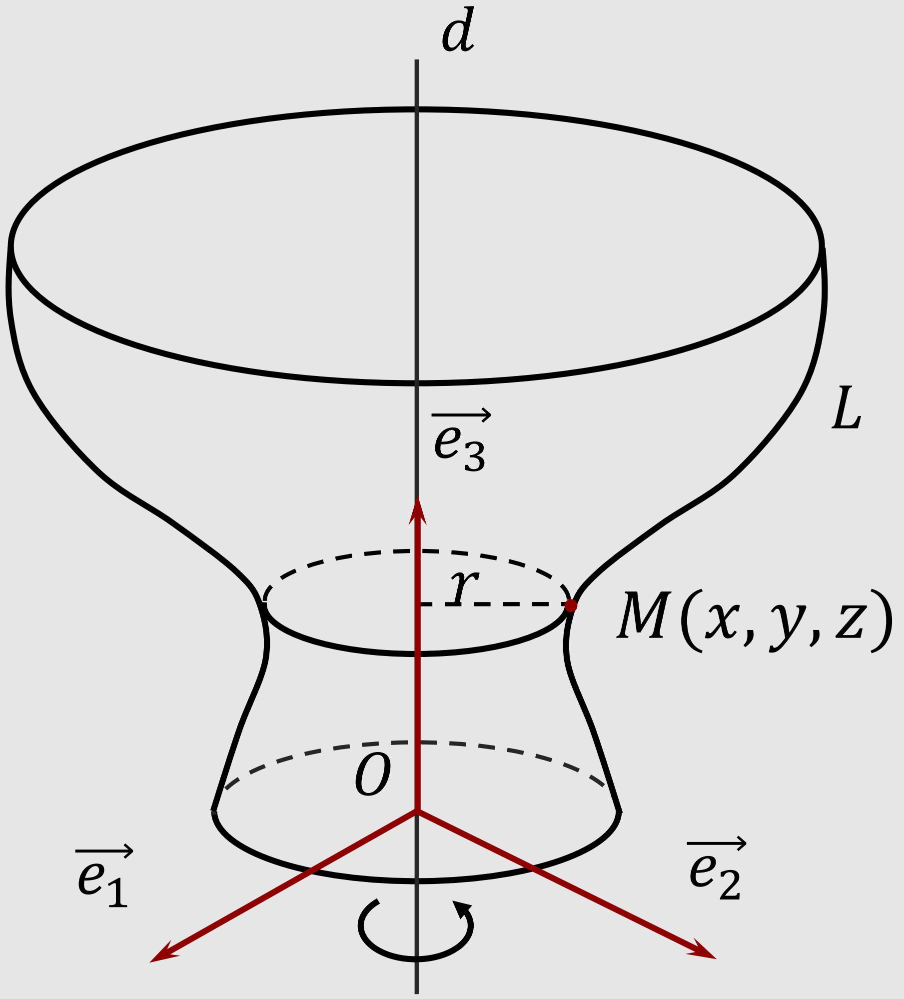
Поверхность вращения

Определение

Поверхность S называется поверхностью вращения с осью d, если она составлена из окружностей, которые имеют центры на прямой d и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой.

По сути это означает, что мы вращаем плоскую линию L вокруг прямой d. Каждая точка L опишет окружность, а вся линия — поверхность вращения.

Поверхность вращения



Поверхность вращения

Выберем начало ПДСК $(O, \vec{e})$ на прямой d, $\overrightarrow{e_3}$ направим вдоль d.

Пусть в $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$ $L: f(x, z) = 0$.

M лежит на окружности с

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.\ M \in S \Leftrightarrow$$

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \cdot f\left(-\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0$$

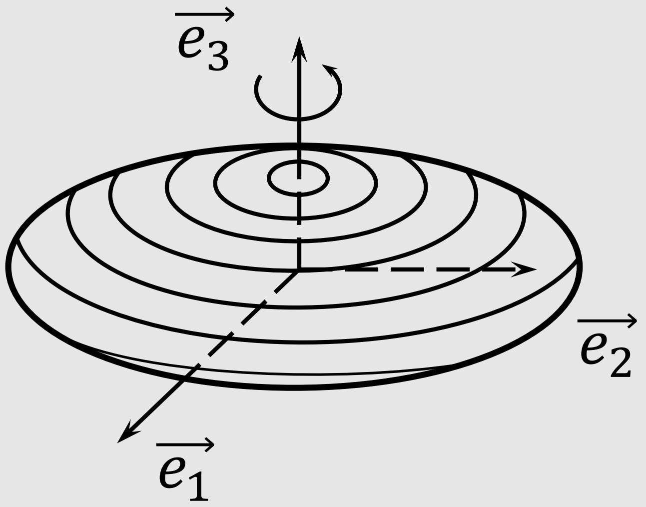
Это уравнения поверхности вращения в разных формах.

Эллипсоид

Возьмем Э в КСК. Направим $\overrightarrow{e_3}$ сначала вдоль малой оси, а затем вдоль большой оси (которую обозначим не b, как ранее, а c). Тогда

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \xrightarrow[\text{вокруг } d]{\text{вращаем}} \dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, a>c$

"Сжатый" эллипсоид вращения

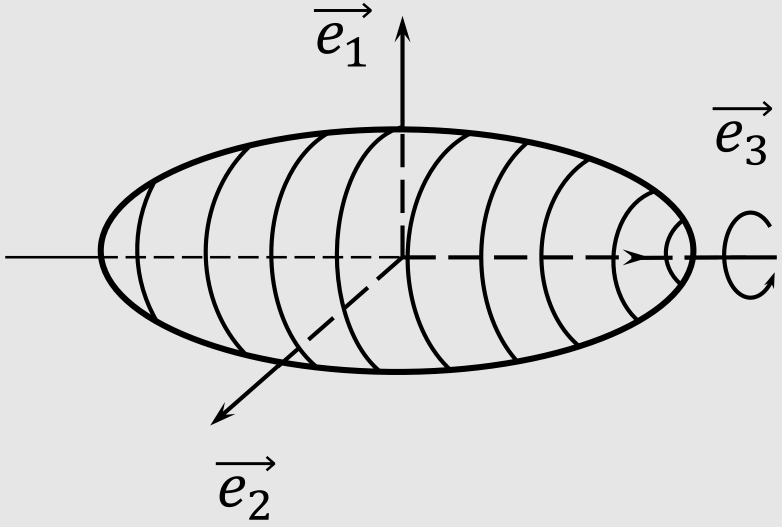


Эллипсоид

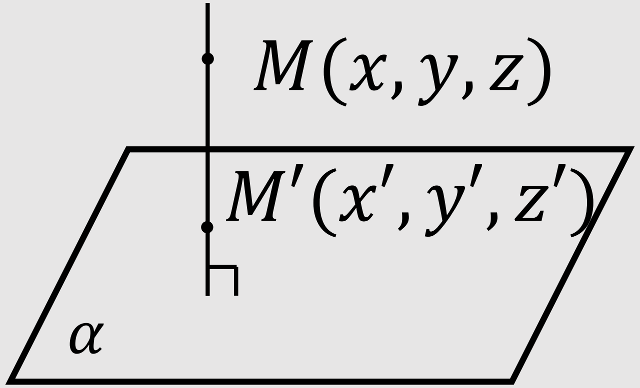
Возьмем Э в КСК. Направим $\overrightarrow{e_3}$ сначала вдоль малой оси, а затем вдоль большой оси (которую обозначим не b, как ранее, а c). Тогда

б) $$\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{c^2}=1 \xrightarrow[\text{вокруг } d]{\text{вращаем}} \frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2}{c^2}=1, a>c$$

"Вытянутый" эллипсоид вращения



Сжатие



$\alpha: y = 0$

$$M \to M': \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \lambda y, \\ z' &= z, \\ \lambda &> 0. \end{aligned}$$

Для “сжатого” эллипсоида вращения выполним сжатие к $y = 0$ с $\lambda = \dfrac{b}{a}$.

Получим поверхность с уравнением

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

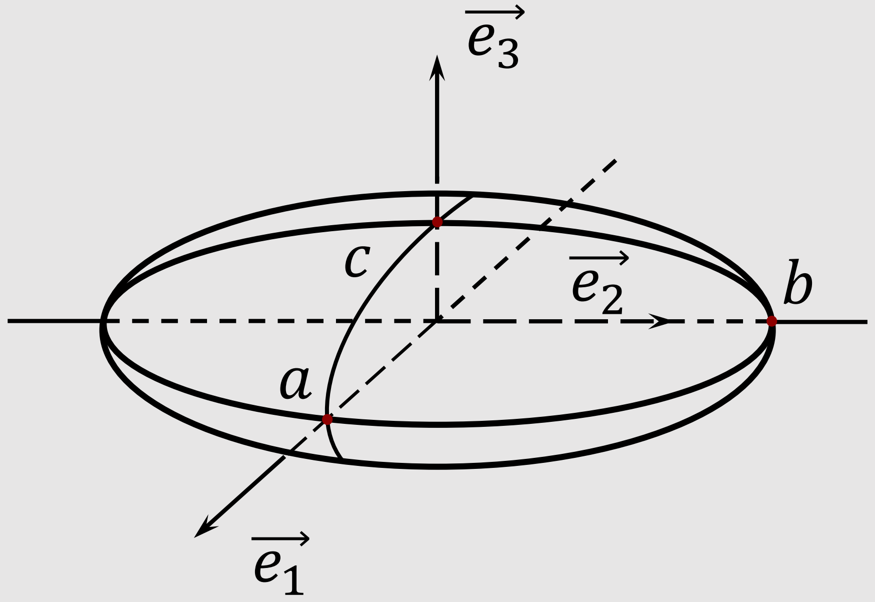
Эллипсоид

Определение

Поверхность, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\ (a>b\geq c),$$

называется **эллипсоидом**.



Конус второго порядка

$$a^2x^2 - c^2z^2 = 0 \to$$

(вращаем вокруг Oz) $a^2(x^2 + y^2) - c^2z^2 = 0 \to$

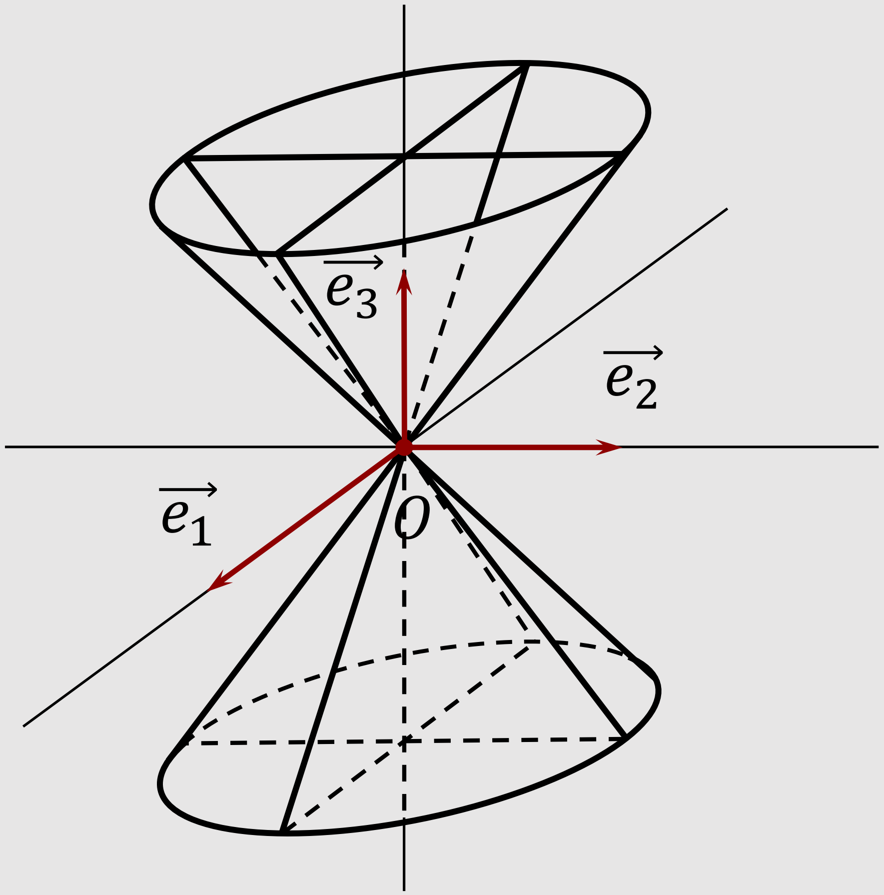
(сжимаем к $y = 0$) $a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^2z'^2 = 0;$

$$a, b, c > 0.$$

Определение

Поверхность, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение $\boxed{a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0}$, называется конусом второго порядка.

Конус второго порядка



Однополостный гиперболоид

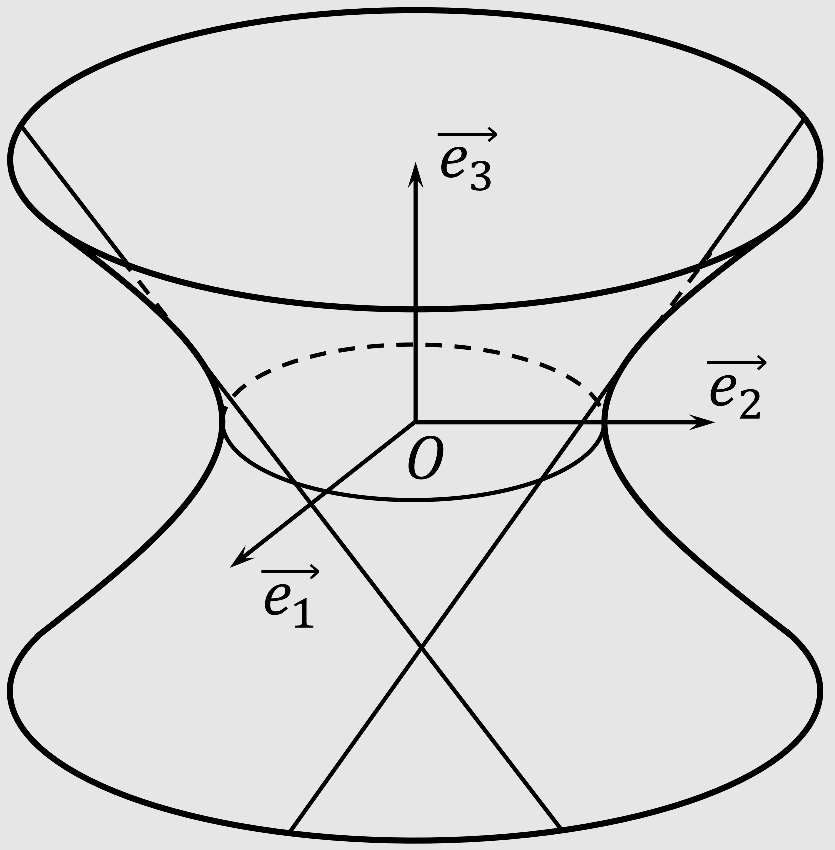
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$$

(вращаем вокруг Oz)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$$

(сжимаем к $y = 0$)

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

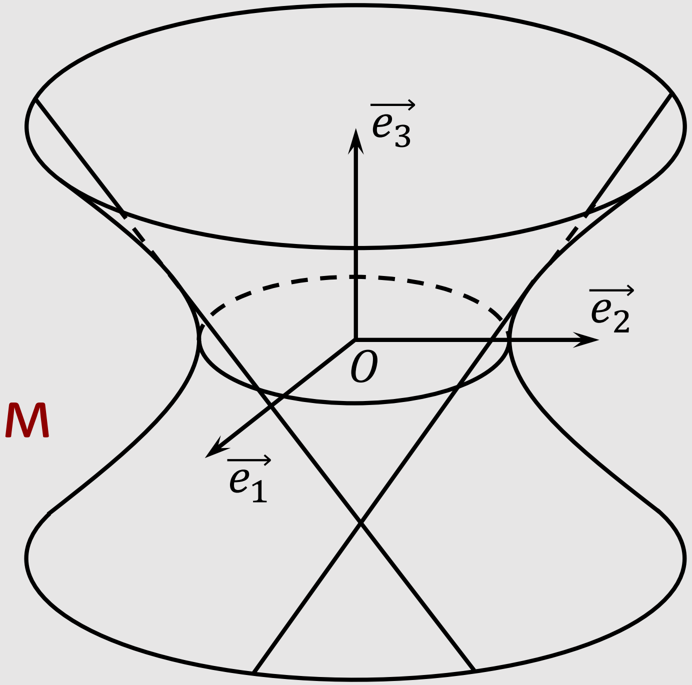


Однополостный гиперболоид

Определение

Поверхность, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1},$$



называется однополостным гиперболоидом.

Определение

Прямая, целиком лежащая на поверхности, называется ее прямолинейной образующей.

Однополостный гиперболоид

Теорема 12.1

Однополостный гиперболоид имеет хотя бы два семейства прямолинейных образующих.

Однополостный гиперболоид

Доказательство

Рассмотрим однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad \text{и}$$

прямую $\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \lambda^2+\mu^2\neq 0.$

Однополостный гиперболоид

Доказательство (продолжение)

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases}, \qquad \lambda^2+\mu^2\neq 0.$$

Координаты каждой точки прямой удовлетворяют обоим уравнениям $\Rightarrow$ и уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

получающимся их перемножением.

Поэтому $\forall \mu, \lambda\colon\ \lambda^2+\mu^2\neq 0$ указанная прямая лежит на однополостном гиперболоиде.

Однополостный гиперболоид

Доказательство (продолжение)

Аналогично доказывается существование второго семейства прямолинейных образующих:

$$\begin{cases} \mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda_1\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \lambda_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu_1\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}, \qquad {\lambda_1}^2+{\mu_1}^2\neq 0.$$

Однополостный гиперболоид

Теорема 12.2

Через любую точку однополостного гиперболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.

Доказательство

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ мы уже провели две прямолинейные образующие. Покажем, что других нет.

Однополостный гиперболоид

Доказательство (продолжение)

Пусть уравнение прямолинейной образующей для

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (*)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau_1 at, \\ y = y_0 + \tau_2 bt, \\ z = z_0 + \tau_3 ct, \end{cases} \ {\tau_1}^2 + {\tau_2}^2 + {\tau_3}^2 \neq 0.$$

Однополостный гиперболоид

Доказательство (продолжение)

Подставим в $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$:

$$\frac{(x_0+\tau_1 at)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\tau_2 bt)^2}{b^2}-\frac{(z_0+\tau_3 ct)^2}{c^2}\equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$({\tau_1}^2+{\tau_2}^2-{\tau_3}^2)t^2+2\left(\frac{x_0}{a}\tau_1+\frac{y_0}{b}\tau_2-\frac{z_0}{c}\tau_3\right)t\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {\tau_1}^2+{\tau_2}^2={\tau_3}^2, \\ \dfrac{x_0}{a}\tau_1+\dfrac{y_0}{b}\tau_2=\dfrac{z_0}{c}\tau_3. \end{cases}$$

Решений с $\tau_3=0$ нет.

Однополостный гиперболоид

Доказательство (продолжение)

Пусть $\sigma_1 = \dfrac{\tau_1}{\tau_3}, \sigma_2 = \dfrac{\tau_2}{\tau_3}$

Тогда $\begin{cases} {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 = 1, \\ \dfrac{x_0}{a}\sigma_1 + \dfrac{y_0}{b}\sigma_2 = \dfrac{z_0}{c}. \end{cases} (**) \Rightarrow$

направляющих векторов прямолинейных образующих ≤ 2: $(\sigma_1 a, \sigma_1 b, c)$, где σ_1, σ_2 – решения $(**)$, которых не больше двух пар.

Двуполостный гиперболоид

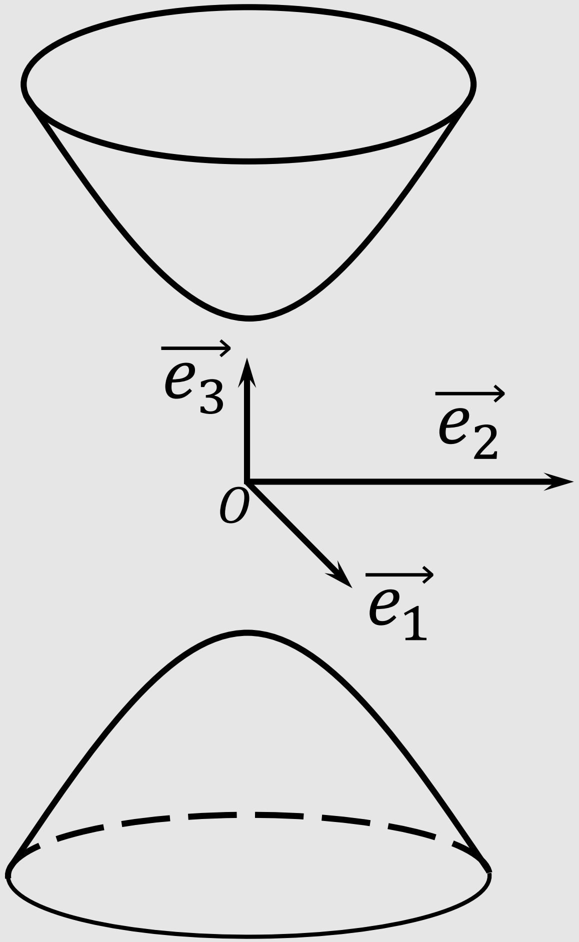
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow$$

(вращаем вокруг Oz)

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1 \rightarrow$$

(сжимаем к $y = 0$)

$$\frac{z'^2}{c^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$



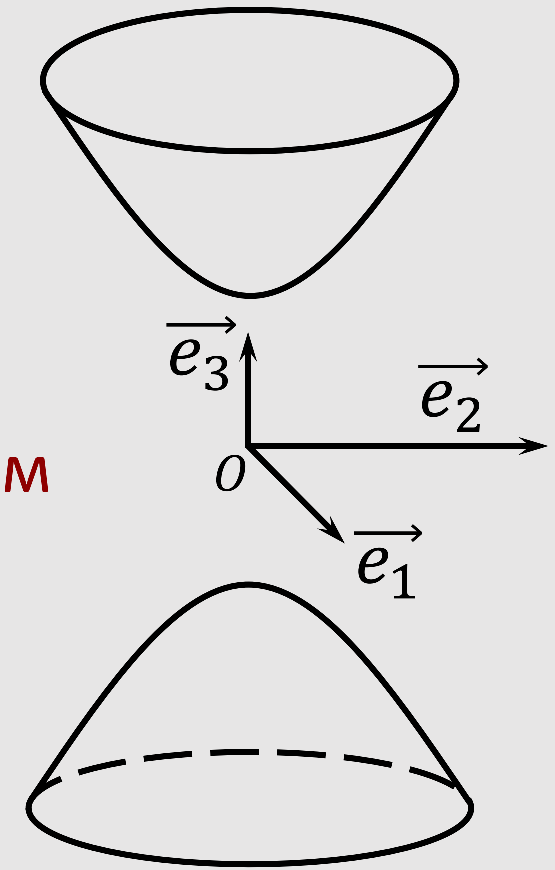
Двуполостный гиперболоид

Определение

Поверхность, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

называется двуполостным гиперболоидом.



Эллиптический параболоид

$x^2 = 2pz, p > 0 \rightarrow$

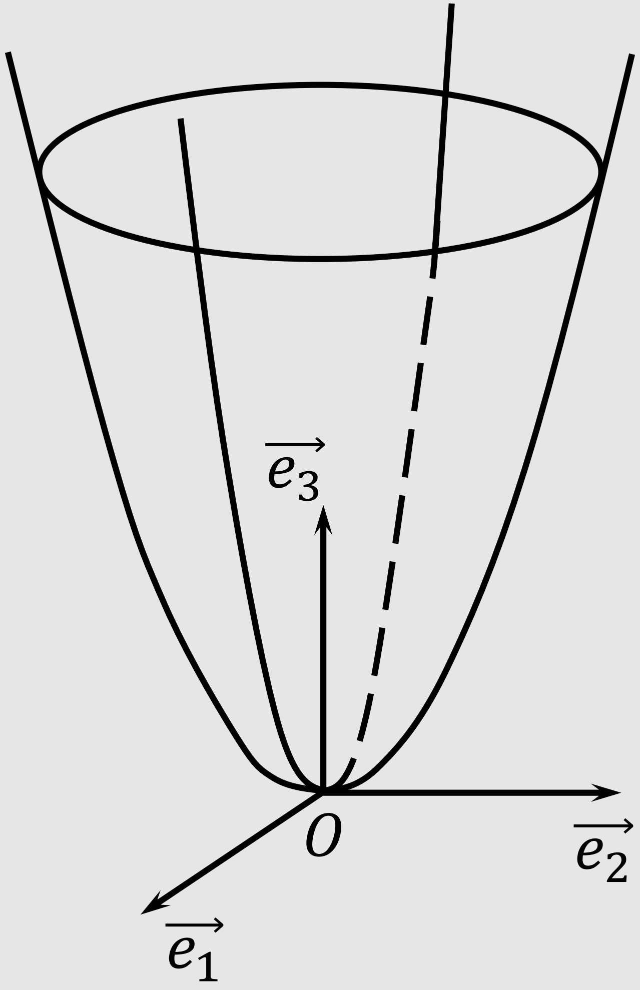
(вращаем вокруг Oz)

$x^2 + y^2 = 2pz \rightarrow$

(сжимаем к $y = 0$)

Получаем уравнение, приводящееся к виду

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{{y'}^2}{b^2} = 2z'.$$



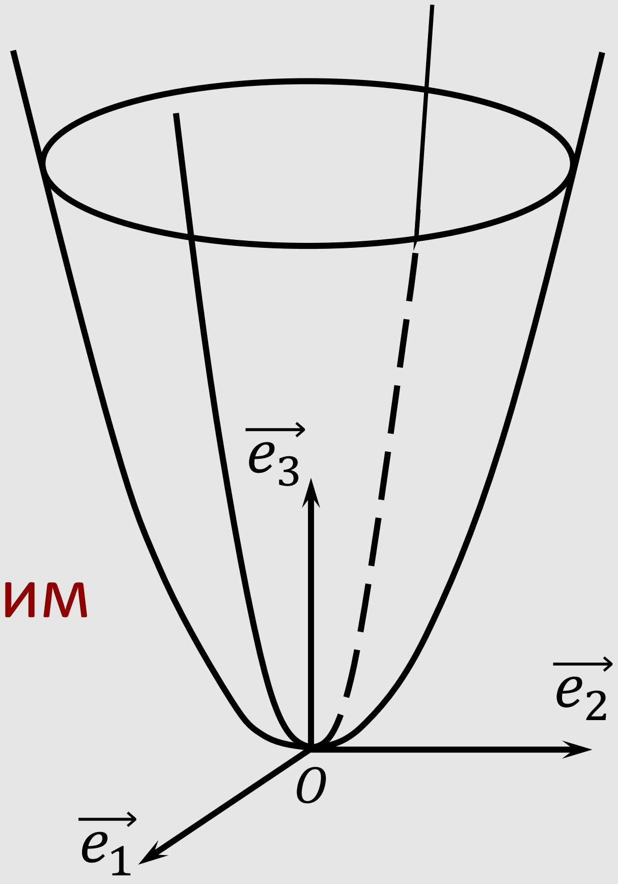
Эллиптический параболоид

Определение

Поверхность, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z},$$

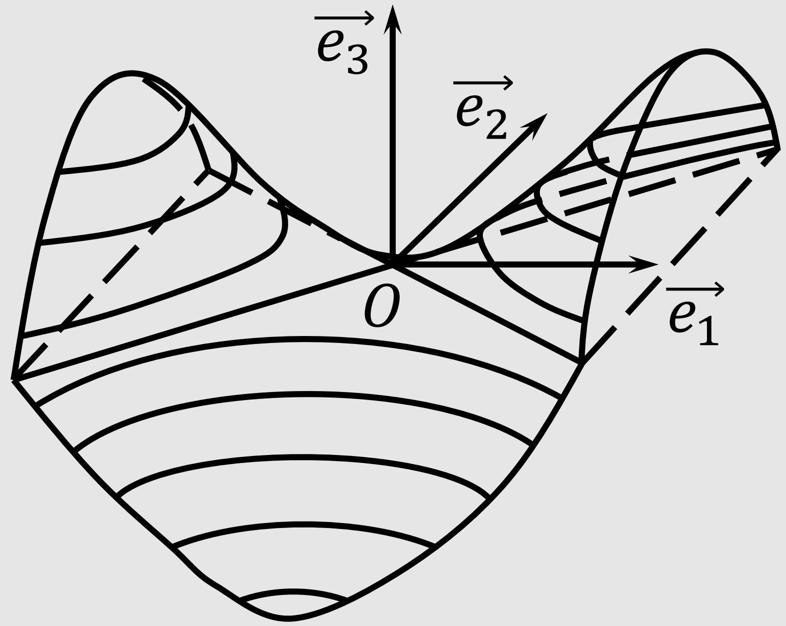
называется эллиптическим параболоидом.



Гиперболический параболоид

Аналогично предыдущему пункту, мы можем получить уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z}. \quad (1)$$



Определение

Поверхность, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение (1), называется гиперболическим параболоидом.

Гиперболический параболоид

Для гиперболического параболоида справедливы аналоги теорем 12.1 и 12.2, которые доказываются аналогично.

Уравнения двух семейств прямолинейных образующих гиперболического параболоида имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\mu, \\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\lambda z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu_1, \\ \mu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\lambda_1 z. \end{cases}$$

Поверхности второго порядка

Замечание

Общая классификация поверхностей второго порядка не входит в нашу программу. Отметим без доказательства, что всего таких поверхностей 17 штук.