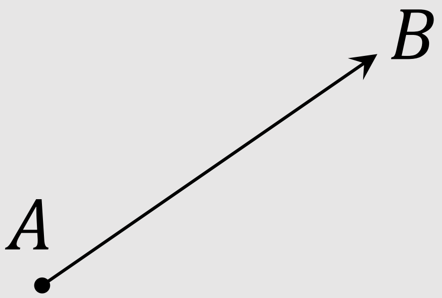
Алгебра и геометрия

Лекция 2

Направленный отрезок

Направленным отрезком (НО) $\overrightarrow{AB}$ называется упорядоченная пара точек (A, B)

A – начало $\overrightarrow{AB}$, B – конец $\overrightarrow{AB}$



Пара (A, A) называется нулевым НО $(\vec{0})$

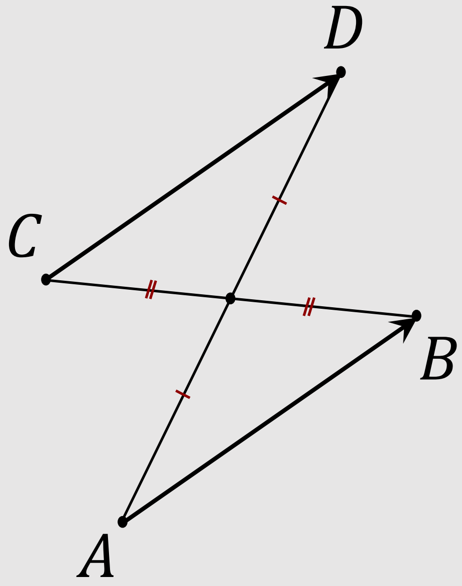
Длиной $\overrightarrow{AB}$ называется $|AB|$

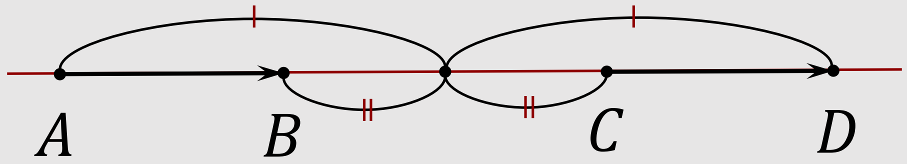
Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Равенство направленных отрезков

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если середины $[AD]$ и $[BC]$ совпадают

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}, \ \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$;
все нулевые НО равны по определению





Свойства отношения равенства НО

1. $\forall \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ (рефлексивность)

2. $\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}: \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

   (симметричность)

3. $\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}: \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow$

   $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ (транзитивность)

Свойства отношения равенства НО

4. Пусть $C\left(\overrightarrow{AB}\right)$ – множество всех НО, равных $\overrightarrow{AB}$

$C\left(\overrightarrow{CD}\right)$ – множество всех НО, равных $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD} \Rightarrow C\left(\overrightarrow{AB}\right) \cap C(\overrightarrow{CD}) = \emptyset$$

Доказательство:

Пусть $\exists \vec{x} \in C\left(\overrightarrow{AB}\right), \vec{y} \in C\left(\overrightarrow{CD}\right): \ \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \vec{x} = \overrightarrow{AB}, \vec{y} = \overrightarrow{CD} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ $\boxed{\text{Противоречие}}$

Определение вектора

Вектором называется множество всех НО, равных данному

Запись $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ означает, что

НО $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор $\vec{a}$

вектор

НО

Писать $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ не принято

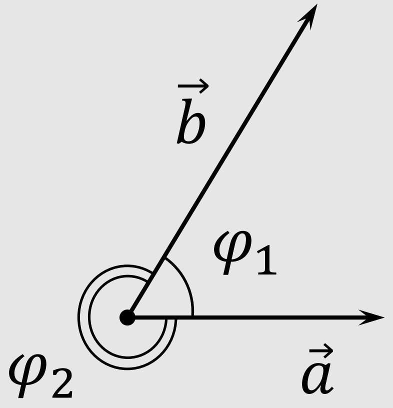
Предполагаются известными из курса геометрии средней школы

1. Операции сложения и вычитания векторов, свойства этих операций
2. Операция умножения вектора на число (скаляр) и свойства этой операции
3. Понятия коллинеарности и компланарности векторов. Признаки компланарности и коллинеарности
4. Некоторые другие утверждения, которые будут специально выделены ниже

Угол между векторами

Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

Отложим ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки



$$\boxed{\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = min\{\varphi_1, \varphi_2\}}$$

Угол между $\vec{0}$ и любым другим вектором не определен!

Если $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными $\left(\vec{a} \perp \vec{b}\right)$

Будем считать, что нулевой вектор ортогонален всем остальным

Нормировка вектора

Операция замены $\vec{a} \neq \vec{0}$ вектором $\vec{b} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ называется нормировкой $\vec{a}$

При этом $\left|\vec{b}\right| = 1$

Линейная комбинация векторов

Пусть даны векторы $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ называется выражение

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{a_i} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k}$$

Обозначения: ЛК; $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$

Если $\vec{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k}$, то говорят, что $\vec{b}$ разложен по $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ (или линейно выражается через $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$)

Линейная комбинация векторов

ЛК называется тривиальной, если $\forall i = \overline{1, k}\ \ \lambda_i = 0$

$$(\Leftrightarrow \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 = 0)$$

ЛК называется нетривиальной, если $\exists j\colon\ \ \lambda_j \neq 0$

Замечание

ЛК удобно записывать в “матричной” форме: $\vec{a}\lambda$, где
$\vec{a}$ – строка из $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$
λ – столбец из $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ называется линейно зависимой, если $\exists$ их нетривиальная ЛК, равная $\vec{0}$, и линейно независимой в противном случае

Утверждение 1.1

$\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ среди $\overrightarrow{a_i}$ $\exists$ $\overrightarrow{a_j}$, линейно выражающийся через остальные

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Доказательство утверждения 1.1

$(\Rightarrow)$ Достаточность

$$\exists\, \lambda_j \neq 0\colon\ \vec{a}\lambda = \vec{0} \Rightarrow$$

$(\Leftarrow)$ Необходимость

$$\overrightarrow{a_j} = \mu_1\overrightarrow{a_1} + \dots + \mu_{j-1}\overrightarrow{a_{j-1}} + \mu_{j+1}\overrightarrow{a_{j+1}} + \dots + \mu_k\overrightarrow{a_k}$$

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Утверждение 1.2

1) Если в системе $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ есть линейно зависимая подсистема, то исходная система линейно зависима

2) Подсистема линейно независимой системы линейно независима

Упражнение: докажите эти утверждения

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Утверждение 1.3

Пусть $\vec{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} \quad (1)$

Тогда λ_i определены однозначно $\Leftrightarrow \overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейно независимы

Доказательство $(\Rightarrow)$

Пусть $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейно зависимы. Прибавим к правой части равенства (1) любую нетривиальную ЛК $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$, равную $\vec{0}$. Получим другое линейное выражение для $\vec{b}$, отличное от (1).

Противоречие

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Утверждение 1.3

Пусть $\vec{b} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k}$ (1)

Тогда λ_i определены однозначно $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейно независимы

Доказательство ($\Leftarrow$)

Пусть $\vec{b} = \mu_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + \mu_k\overrightarrow{a_k}$ (2)

Вычтем (2) из (1): $(\lambda_1 - \mu_1)\overrightarrow{a_1} + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)\overrightarrow{a_k} = \vec{0}$

$\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейно независимы $\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \ \forall i = \overline{1, k}$

Критерий линейной зависимости

Теорема

1. Система из одного вектора $\overrightarrow{a_1}$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} = \vec{0}$

2. Система из двух векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2}$

3. Система из трех векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ компланарны

4. В пространстве система из любых четырех векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ линейно зависима

Критерий линейной зависимости

Доказательство

1. Очевидно

2. (⇒) Из Утв. 1.1 ⇒ один из векторов линейно выражается через другой ⇒ они коллинеарны

(⇐)

а) $\overrightarrow{a_1} = \vec{0}$. Система из $\overrightarrow{a_1}$ линейно зависима ⇒ ⇒ (Утв. 1.2) система $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ линейно зависима

б) $\overrightarrow{a_1} \neq \vec{0}$. Из $\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2} \Rightarrow \overrightarrow{a_2}$ линейно выражается через $\overrightarrow{a_1}$ ⇒ (Утв. 1.1) система $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ линейно зависима.

Критерий линейной зависимости

Доказательство (продолжение)

3. (⇒) Из Утв. 1.1 ⇒ НУО $\overrightarrow{a_3} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ компланарны

(⇐) $\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2} \Rightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ – линейно зависима ⇒
⇒ (Утв. 1.2) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ тоже линейно зависимы

Критерий линейной зависимости

Доказательство (продолжение)

4. а) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ компланарны $\Rightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависима $\Rightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ тоже линейно зависима

   б) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ некомпланарны $\Rightarrow \overrightarrow{a_4}$ линейно выражается через них $\Rightarrow$ (Утв. 1.1) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ линейно зависима

Базис

Пусть V_1 – множество всех векторов на прямой, V_2 – на плоскости, V_3 – в пространстве

Упорядоченная система векторов

$$e = (\overrightarrow{e_1} \cdots \overrightarrow{e_n}) \quad (n = 1,2,3)$$

называется базисом в V_n, если она линейно независима и $\forall$ вектор из V_n раскладывается по $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$

Базис

Ясно, что $\forall \vec{e} \neq \vec{0}$ — базис в V_1

$\forall$ упорядоченная пара $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$: $\overrightarrow{e_1} \nparallel \overrightarrow{e_2}$ — базис в V_2

$\forall$ упорядоченная тройка $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ некомпланарных векторов — базис в V_3

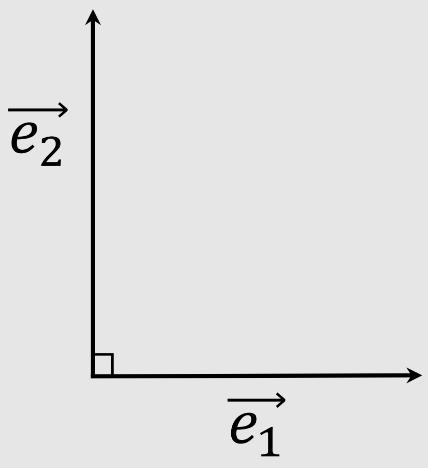
Упражнение

Докажите эти утверждения

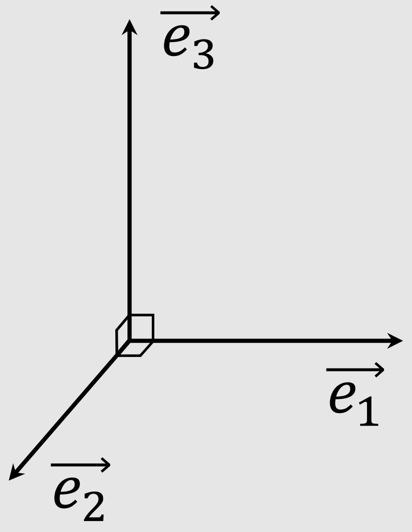
Ортогональный базис

Ортогональный базис — базис, векторы которого попарно ортогональны

V_2



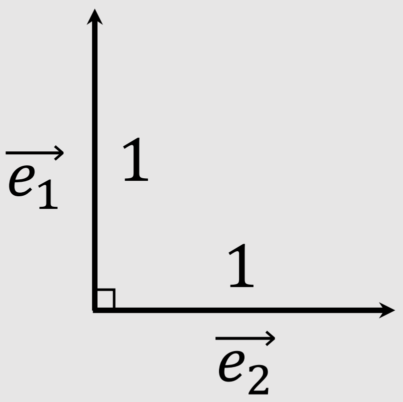
V_3



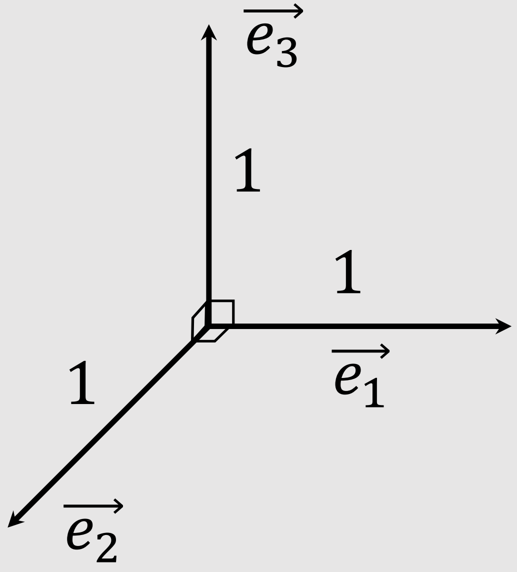
Ортонормированный базис

Ортонормированный базис — ортогональный базис, все векторы которого имеют длину 1

V_2



V_3



Координаты вектора в базисе

Из определения базиса

$$\Rightarrow \forall \vec{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$$

Числа λ_i называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе e

$$\boxed{\vec{a} = e\lambda} \qquad e = (\overrightarrow{e_1} \cdots \overrightarrow{e_n}) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Координаты вектора в базисе

Теорема (Линейность сопоставления координат)

Пусть в V_n зафиксирован базис. При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число — умножаются на это число

Доказательство

$$\vec{a} = e\alpha, \vec{b} = e\beta \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} =$$

$$= (\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}) + (\beta_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \beta_n\overrightarrow{e_n}) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\overrightarrow{e_n}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}) = (\lambda\alpha_1)\overrightarrow{e_1} + \cdots + (\lambda\alpha_n)\overrightarrow{e_n}$$

Замена базиса

$e = (\overrightarrow{e_1} \cdots \overrightarrow{e_n})$ – “старый” базис

$e' = \left(\overrightarrow{e'_1} \cdots \overrightarrow{e'_n}\right)$ – “новый” базис

Матрица S, j-ый столбец которой есть координатный столбец вектора $\overrightarrow{e'_j}$ в базисе e, называется матрицей перехода от старого базиса к новому

То есть $\boxed{e' = eS}$

Теорема

$$\vec{a} = e\alpha = e'\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$$

Доказательство

$$\vec{a} = e'\alpha'$$

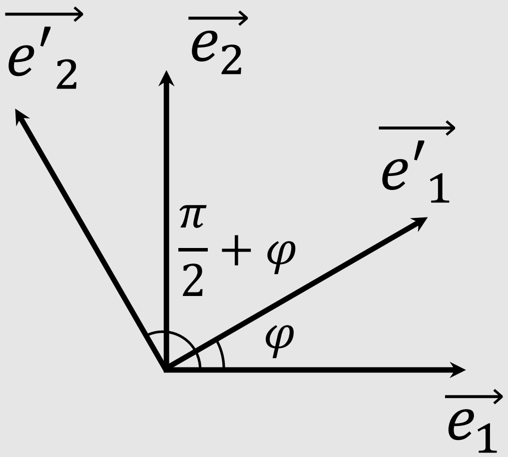
$$\Rightarrow \ \alpha = S\alpha'$$

Некоторые замечания о замене базиса

1) $e = e' \Rightarrow S = E_n$

2) $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ – ОНБ на плоскости, $e' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\right)$ получен из e поворотом на угол φ в направлении от $\overrightarrow{e_1}$ к $\overrightarrow{e_2}$ $\Rightarrow$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{e'_1} = \cos\varphi\,\overrightarrow{e_1} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e'_2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\overrightarrow{e_2} =$$

$$= -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_1} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_2}$$

Некоторые замечания о замене базиса

3) e, e', e'' – три базиса в V

S – матрица перехода от e к e'
R – матрица перехода от e' к e''

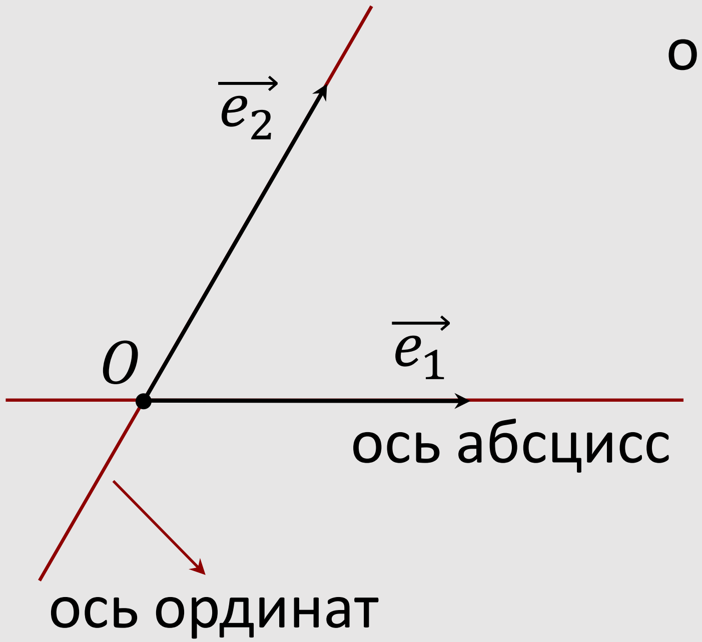
Тогда матрица перехода от e к e'' равна SR

Доказательство

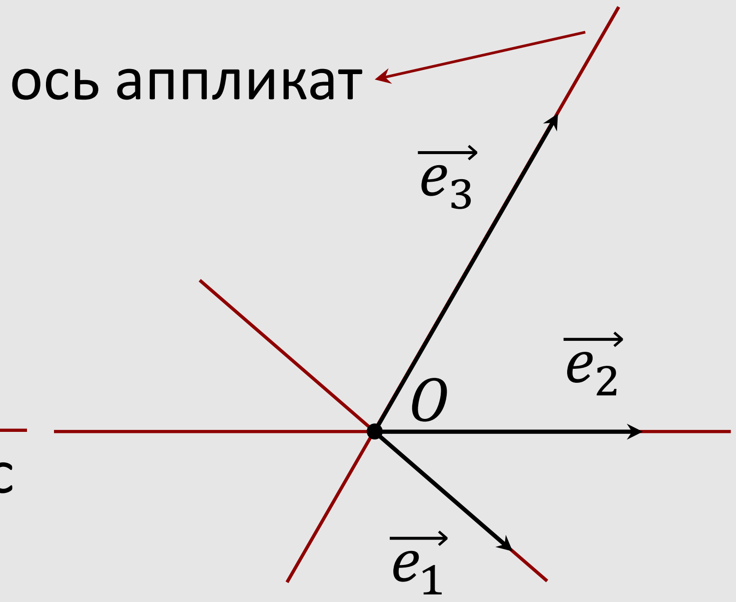
$$e'' = e'R = (eS)R = e(SR)$$

Декартова система координат

Общей декартовой системой координат (ОДСК) называется совокупность точки и базиса: (O, e)



ОДСК на плоскости



ОДСК в пространстве

Декартова система координат

ОДСК называют прямоугольной (ПДСК), если ее базис ортонормированный

Координатами точки M в ОДСК (O, e) называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе e

Мы будем записывать это так: если

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ то } M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = ex)$$

Декартова система координат

Утв. 2.1 Пусть в (O, e) $M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, N \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Тогда $\overrightarrow{MN} = e \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$

Доказательство

Утверждение вытекает из равенства $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ и определения координат

Декартова система координат

Теорема (о делении отрезка в данном отношении)

Пусть (O, e) – ОДСК, $M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $N \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MN}$.

$$\text{Тогда } P \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ (1-\lambda)x_n + \lambda y_n \end{pmatrix}$$

Доказательство

Утверждение следует из цепочки равенств $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{MN} = (1-\lambda)\overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{ON}$ и линейности сопоставления координат

Замена ОДСК

Теорема

Пусть $(O, e), (O', e')$ – две ОДСК, причем $O' \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \gamma$, S – матрица перехода от e к e',

$$M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} x, \qquad M \underset{(O',e')}{\leftrightarrow} x'$$

Тогда $x = Sx' + \gamma$

Доказательство

$$\overrightarrow{OO'} = e\gamma \qquad \overrightarrow{OM} = ex \qquad \overrightarrow{O'M} = e'x'$$

Из теоремы о замене базиса $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = e(Sx')$, а из равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{OO'} \Rightarrow x = Sx' + \gamma$ с учетом линейности сопоставления координат