Алгебра и геометрия

Лекция 5

Алгебраические линии и поверхности

Определение

Алгебраической линией называется ГМТ P_2, которое в некоторой ОДСК может быть задано уравнением

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \cdots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \ (*)$$

где все показатели степеней $\in \mathbb{Z}^+, A_i = \text{const}$.

Определение

$p = max\{k_1 + l_1, \dots, k_s + l_s\}$ называется порядком алгебраической линии
(а также степенью уравнения $(*)$).

Алгебраические линии в пространстве

Определение

Алгебраической поверхностью называется ГМТ P_3, которое в некоторой ОДСК может быть задано уравнением

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \cdots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0, \ (**)$$

где все показатели степеней – целые положительные числа, а все $A_i = \mathrm{const}$.

Определение

$p = max\{k_1 + l_1 + m_1, \dots, k_s + l_s + m_s\}$ называется порядком алгебраической поверхности (а также степенью уравнения $(**)$) .

Алгебраические линии в пространстве

Теорема 10.1

1. Алгебраическая линия порядка p на плоскости в $\forall$ ОДСК может быть задана уравнением $(*)$.

2. Алгебраическая поверхность порядка p в пространстве в $\forall$ ОДСК может быть задана уравнением $(**)$.

Алгебраические линии в пространстве

Доказательство

1. Перейдем от ОДСК $(O, \vec{e})$ к ОДСК $(O', \vec{e}\,')$:

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1, \qquad y = a_2 x' + b_2 y' + c_2$$

Подставим в $(*)$
(его удобно записать в виде $F(x, y) = 0$).

$(a_1 x' + b_1 y' + c_1)^{\,k}$ – многочлен степени k,

$(a_2 x' + b_2 y' + c_2)^{\,l}$ – многочлен степени l.

Степень суммы многочленов не выше max степеней слагаемых. Поэтому в “новой” ОДСК алгебраическая линия задается уравнением $G(x', y') = 0$ вида $(*)$, причем степень $G \le$ степени F.

Алгебраические линии в пространстве

Доказательство (продолжение)

Итак, при замене ОДСК порядок алгебраической линии не повышается. Но он и не понижается, потому что при переходе от $(O', \vec{e}')$ к $(O, \vec{e})$ $G(x', y') = 0$ перейдет в $F(x, y) = 0$ и при этом степень $F \leq$ степени G.

Следовательно, порядок линии не изменился.

Алгебраические линии в пространстве

Замечание 1

Величина, которая не изменяется при некотором преобразовании, называется инвариантом этого преобразования. Мы доказали, что порядок алгебраической линии – инвариант при замене ОДСК.

Замечание 2

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Линии второго порядка на плоскости

Пусть в P_2 в некоторой ОДСК задана линия второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

1. НУО ОДСК есть ПДСК (если это не так, то перейдем в какую-то ПДСК, что не изменит порядок линии и общий вид (1)).

Линии второго порядка на плоскости

2. Сделаем поворот ПДСК на угол φ:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$

$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

Тогда $A(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2B(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi) \times$

$$\times\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + C(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + \cdots = 0,$$

$$B' = -A \sin\varphi \cos\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C \sin\varphi \cos\varphi$$

Линии второго порядка на плоскости

3. Если $B = 0$, то поворачивать не будем.

4. Если $B \neq 0$, то выберем φ так, чтобы $B' = 0$:

при $A = C$ $$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

при $A \neq C$ $$2B\cos 2\varphi = (A - C)\sin 2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A - C} \qquad (2)$$

Тогда $A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$ (3)

Линии второго порядка на плоскости

Утверждение 10.1

Если в (3) входит x' или y', то параллельным переносом начала координат можно обратить в ноль слагаемые с первой степенью этой координаты.

Доказательство

Пусть $A' \neq 0$. Тогда

$$A'\left(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x' + \left(\frac{D'}{A'}\right)^2\right) + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \frac{D'^2}{A'} = 0$$

Перенос $x'' = x' + \frac{D'}{A'}, y'' = y'$ приводит (2) к виду

$$A'x''^2 + C'y''^2 + 2E'y'' + F'' = 0$$

Если $C' \neq 0$, то действуем аналогично.

Линии второго порядка на плоскости

Продолжим преобразования

I. $A'C' \neq 0$. Из утверждения 10.1 $\Rightarrow$ $(2) \rightarrow (2')$ вида

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F'' = 0 \qquad (2')$$

1) $A'C' > 0$.

а) Знак F'' противоположен знаку A' и C'. Тогда $(2')$ имеет вид

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ где } a^2 = -\frac{F''}{A'}, \quad b^2 = -\frac{F''}{C'}$$

НУО $a > 0, b > 0$ и $a \geq b$ (иначе сделаем замену $x'' = -y^*, y'' = x^*$). Тогда

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

Линии второго порядка на плоскости

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geq b > 0,}$$

называется эллипсом (заданным каноническим уравнением в канонической ПДСК).

Замечание

Если $a = b$, то эллипс вырождается в окружность

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Линии второго порядка на плоскости

б) Знак F'' совпадает со знаками A' и C'. Действуя аналогично а), приведем уравнение к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$$

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1},$$

называется мнимым эллипсом (очевидно, что это $\emptyset$).

Линии второго порядка на плоскости

в) $F'' = 0$. Тогда $a^2 x''^2 + c^2 y''^2 = 0$.

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{a^2x^2 + c^2y^2 = 0},$$

называется **парой мнимых пересекающихся прямых** (очевидно, что ему удовлетворяет одна точка: (0,0)).

Линии второго порядка на плоскости

2) $A'C' < 0$

а) $F'' \neq 0$. НУО знак F'' противоположен знаку A' (иначе сделаем замену $x'' = -y^*, y'' = x^*$).

Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ где } a^2 = -\frac{F''}{A'}, \; b^2 = \frac{F''}{C'}.$$

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

называется **гиперболой**.

Линии второго порядка на плоскости

б) $F'' = 0$. Уравнение имеет вид $a^2 x''^2 - c^2 y''^2 = 0$.

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{a^2 x^2 - c^2 y^2 = 0},$$

называется парой пересекающихся прямых.

Линии второго порядка на плоскости

$\mathrm{II}.\ A'C' = 0$

НУО $A' = 0$ (иначе та же замена).

$C' \neq 0$, иначе уравнение не второго порядка.

Из утверждения 10.1 $\Rightarrow C'y''^2 + 2D'x'' + F'' = 0$.

1) $D' \neq 0$. Тогда $C'y''^2 + 2D'\left(x'' + \frac{F''}{2D'}\right) = 0$.

Перенос $x^* = x'' + \frac{F''}{2D'}, y^* = y''$ приводит уравнение к виду $C'y^{*2} + 2D'x^* = 0 \Leftrightarrow$ $y^{*2} = 2px^*$, где $p = -\frac{D'}{C'}$.

НУО $p > 0$ (иначе замена, меняющая направление оси абсцисс).

Линии второго порядка на плоскости

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{y^2 = 2px, p > 0},$$

называется параболой.

2) $D' = 0$. Тогда $C'y''^2 + F'' = 0$.

а) $C'F'' < 0 \Rightarrow y''^2 - a^2 = 0$.

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{y^2 - a^2 = 0},$$

называется парой параллельных прямых.

Линии второго порядка на плоскости

б) $C'F'' > 0$. Тогда ${y''}^2 + a^2 = 0$.

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{y^2 + a^2 = 0},$$

называется парой мнимых параллельных прямых (очевидно, что это $\emptyset$).

в) $F'' = 0$. Тогда ${y''}^2 = 0$.

Определение

Линия, которая в некоторой ПДСК имеет уравнение

$$\boxed{y^2 = 0},$$

называется парой совпавших прямых.

Линии второго порядка на плоскости

Мы получили следующие результаты:

Теорема 10.2

Пусть в ОДСК задано уравнение второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Тогда ∃ ПДСК, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

Линии второго порядка на плоскости

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

3. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$

6. $y^2 = 2px$

7. $y^2 - a^2 = 0$

8. $y^2 + a^2 = 0$

9. $y^2 = 0$

Линии второго порядка на плоскости

Приведем некоторые теоремы, которые входят в наш курс без доказательства.

Теорема 10.3

Числа $A + C,\ \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$

являются инвариантами уравнения (1) относительно замены ОДСК.

Определение

Линия второго порядка, имеющая единственный центр симметрии, называется центральной, а ее центр симметрии – центром линии.

Линии второго порядка на плоскости

Теорема 10.4

Если линия второго порядка задана уравнением (1), то координаты центра (x_0, y_0) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

Теорема 10.5

Линия второго порядка центральна $\Leftrightarrow \delta \neq 0.$

Линии второго порядка на плоскости

Определение

При $\delta > 0$ линия второго порядка называется линией эллиптического типа; при $\delta < 0$ – гиперболического типа; при $\delta = 0$ – параболического типа.

Следствие

Линии эллиптического и гиперболического типа центральны.

Замечание

Если линия центральна, то перенос начала координат в центр линии “уничтожает” члены (1), содержащие x и y в первой степени.