Алгебра и геометрия

Лекция 1

Матрицы. Основные определения

Матрицей размеров $m \times n$ называется прямоугольная таблица

$$\begin{array}{cc} m \text{ строк} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \hdotsfor{4} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ & n \text{ столбцов} \end{array}$$

Матрицы. Основные определения

Числа, образующие матрицу, называются ее **элементами**

Мы будем обозначать матрицы заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы. Основные определения

Элемент матрицы A

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} & & j\text{-ый столбец} & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-ая} \\ \text{строка} \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Представления матриц

Развернутое представление матрицы	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Неразвернутое представление матрицы	(a_{ij}) или A Если важно указать размеры: $(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ или A_{mn}

Квадратная матрица

Если $n = m$, то матрица называется квадратной порядка n. Все остальные матрицы называются прямоугольными.

Обозначения: $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ или A_n

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \dots\dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Столбцы и строки

Столбцом высоты m называется матрица $m \times 1$

Строкой длины n называется матрица $1 \times n$

$$\begin{array}{cc} & 1 \\ m & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & n \\ 1 & \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots\cdots\cdots & b_n \end{bmatrix} \end{array}$$

Нулевая матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой

Обозначения: O или O_{mn} (если важны размеры)

$$O_{mn} = \begin{array}{c} \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\updownarrow m \text{ строк} \\ \overleftrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \\ n \text{ столбцов} \end{array}$$

Единичная матрица

Квадратная матрица вида

$$E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow n$$

называется единичной матрицей порядка n

Обозначения: E_n (или E, если порядок не важен)

Единичная матрица

Это определение можно переписать поэлементно:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = \overline{1, n}$$

$$E_n = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n}\right\} n$$

Равенство матриц

Говорят, что $A = B$, если их размеры одинаковы и их соответствующие элементы равны

$$\boxed{a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = \overline{1, m}; \ \forall j = \ \overline{1, n}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Операции с матрицами

Матрица $C = (c_{ij})$ называется суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, если их размеры одинаковы и

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = \overline{1, m}; \ \ \forall j = \ \overline{1, n}}$$

Матрица $C = (c_{ij})$ называется произведением числа λ на матрицу $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$,

если для всех i и j $\boxed{c_{ij} = \lambda a_{ij}}$

Операции с матрицами

Утверждение: $\forall$ матриц A, B, C одинаковых размеров и $\forall$ чисел α, β:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
6. $A + O = A$

Доказательство: очевидно

Операции с матрицами

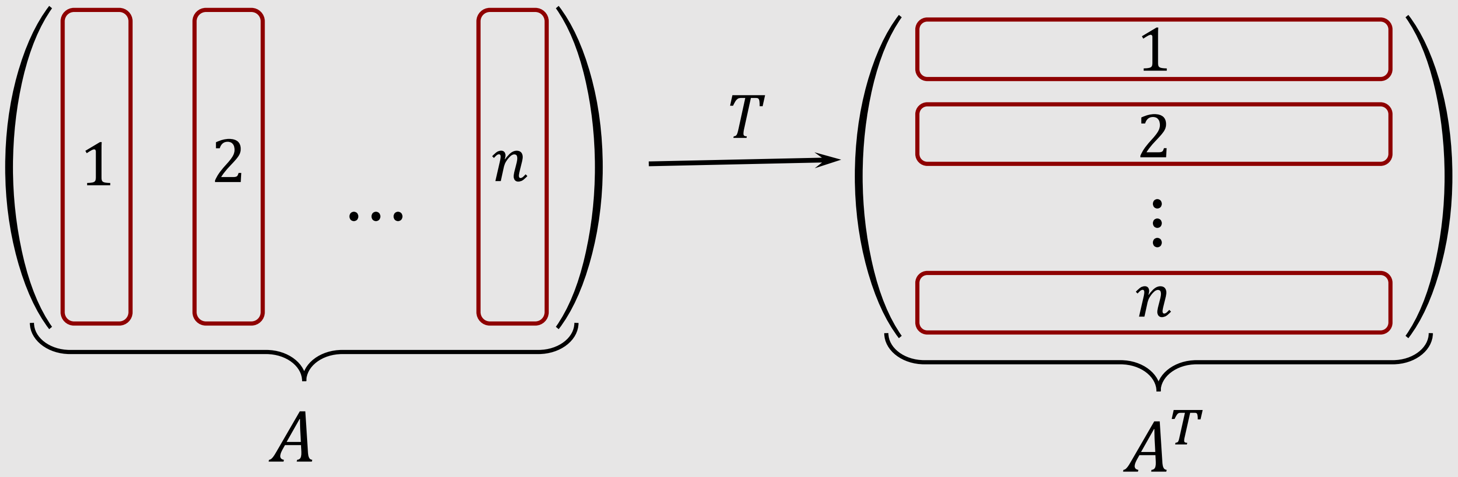
Матрица $(-1)A$ называется противоположной матрице A и обозначается $-A$

$$B - A \text{ есть } B + (-A)$$

Операция транспонирования

Транспонированием матрицы называется операция, в результате которой получается матрица, в которой строками являются столбцы исходной матрицы, записанные с сохранением порядка их следования

Обозначение: A^T, где A – исходная матрица $(m \times n)$



$$\boxed{a_{ij}^T = a_{ji} \quad \forall i = \overline{1, m};\ \forall j = \overline{1, n}}$$

Произведение матриц

Матрица C_{mn} называется **произведением** матрицы A_{ml} на матрицу B_{ln}, если

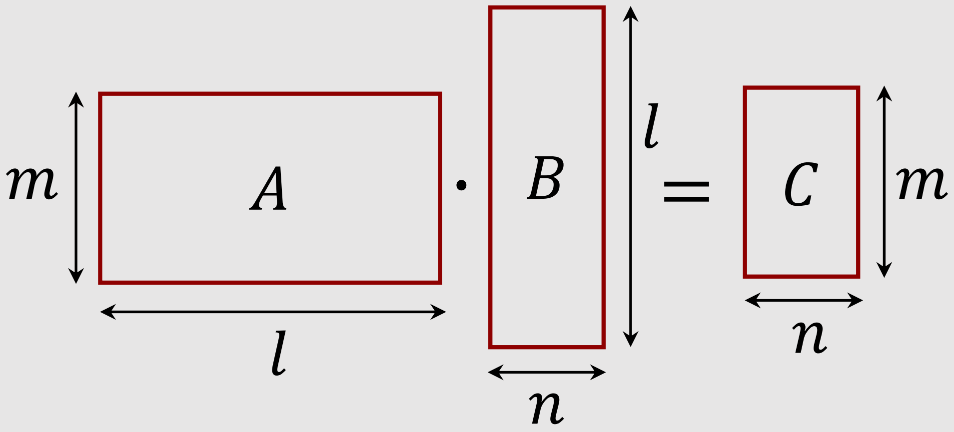
$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

Обозначение: $C = AB$

$$C_{mn} = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$$A_{ml} = (a_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,l}}}$$

$$B_{ln} = (b_{kj})_{\substack{k=\overline{1,l} \\ j=\overline{1,n}}}$$



Произведение матриц

Пример 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{l1} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1l} \cdot b_{l1}$$

Произведение матриц

Пример 2

$$m\left\updownarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n} \right. \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{1} \Big\updownarrow n =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{1} \Big\updownarrow m$$

Свойства произведения матриц

Свойство 1

Если определены AB и BA, то они не обязательно равны

Упражнение

Докажите, что если определены и равны друг другу AB и BA, то A и B – квадратные матрицы одного порядка

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $AB = BA$, то говорят, что A и B коммутируют

Свойства произведения матриц

Свойство 2

Ассоциативность. Если определены AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, причем $(AB)C = A(BC)$

Доказательство

$$A - m_A \times n_A \qquad B - m_B \times n_B \qquad C - m_C \times n_C$$

$$\exists AB \Rightarrow n_A = m_B, \exists (AB)C \Rightarrow n_B = m_C \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Элементы $(AB)C$:

$$\sum_{l=1}^{n_B} \left(\sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} b_{kl} \right) c_{ls} \quad (i = \overline{1, m_A}; s = \overline{1, n_C})$$

Свойства произведения матриц

Доказательство (продолжение)

$$n_B = m_C \Rightarrow \exists BC \qquad n_A = m_B \Rightarrow \exists A(BC)$$

Элементы $A(BC)$:

$$\sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n_B} b_{kl} c_{ls} \right)$$

Элементы $(AB)C$:

$$\sum_{l=1}^{n_B} \left(\sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} b_{kl} \right) c_{ls}$$

Осталось переставить знаки сумм

Свойства произведения матриц

Свойство 3

Дистрибутивность по отношению к сложению

Если определено $(A+B)C$, то $(A+B)C = AC + BC$

Если определено $A(B+C)$, то $A(B+C) = AB + AC$

Свойство 4

Если определено AB, то $\forall\alpha$: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Свойство 5

Если определено AB, то определено и $B^T A^T$, причем $(AB)^T = B^T A^T$

Свойства произведения матриц

Доказательство свойства 5

$$A_{mn}, B_{np} \qquad \exists AB \Rightarrow \text{в ней}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,p})$$

j-ая строка B^T: $(b_{1j}, \dots, b_{nj})$ $\qquad$ i-ый столбец A^T: $\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \exists B^T A^T \text{ и в нем}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} \; (j = \overline{1,p}; i = \overline{1,m})$$

Определитель второго порядка

Определителем (или детерминантом) матрицы

$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Обозначение: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\det A_2$

Определитель третьего порядка

Определителем матрицы $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Обозначение: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\det A_3$

Упражнение: Докажите, что при $n = 2$ и $n = 3$

$$\det A^T = \det A$$

Правило Крамера

Рассмотрим СЛАУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (*)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

главный определитель $(*)$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

первый вспомогательный определитель $(*)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

второй вспомогательный определитель $(*)$

Правило Крамера

Теорема (Правило Крамера для $n = 2$)

Для того, чтобы система $(*)$ имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \neq 0$.

При этом $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

(формулы Крамера при $n = 2$)

Правило Крамера

Доказательство

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Умножим первое уравнение системы $(*)$ на a_{22}, а второе на $(-a_{12})$.

Сложим полученные уравнения:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}\,,$$

то есть $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$

Аналогично, $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$

Правило Крамера

Доказательство

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Эти формулы доказывают единственность решения, если оно существует.

Правило Крамера

Доказательство

В самом деле, система

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{\,1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{\,2} \end{cases} \qquad (**)$$

является следствием системы $(*)$, поэтому всякое решение системы $(*)$ (если оно $\exists$) должно быть решением системы $(**)$, а оно одно.

Правило Крамера

Доказательство

Существование решения при $\Delta \neq 0$ следует из простой подстановки $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ в исходную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Каждое уравнение обратится в тождество.

Правило Крамера

Доказательство

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (*)$$

Пусть система $(*)$ имеет единственное решение.

Докажем, что $\Delta \neq 0$

Правило Крамера

Доказательство

Предположим, что $\Delta = 0$.

Возможны два случая.

1. Хотя бы одно из чисел Δ_1, Δ_2 отлично от нуля.

В этом случае система $(**)$ не имеет решений.

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases} \qquad (**)$$

Не имеет решений и система $(*)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Противоречие.

Правило Крамера

Доказательство

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{\ 1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{\ 2} \end{cases} \quad (**) \qquad\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (*)$$

2. $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0.$

В этом случае второе уравнение системы $(*)$ является следствием первого её уравнения, поэтому его можно отбросить .

Но уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ при $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 0$ имеет бесконечно много решений. Противоречие.

Правило Крамера

Замечание

Аналогичная теорема справедлива для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Мы докажем это позже лишь в случае $\Delta \neq 0$