Контрольная работа к 1 заданию по линейной алгебре (МФТИ, 2033). ФБВТ.

1. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbf{R}^4$, где $V_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $a_1 = (-1,3,-3,3)^t$, $a_2 = (-5,4,-2,3)^t$, $a_3 = (-7,10,-8,9)^t$, а V_2 – подпространство решений системы $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$.

2. Линейное преобразование φ в $\mathbf{R}^2$ отображает векторы $a_1 = (3,2)^T, a_2 = (4,3)^T$ соответственно в векторы $b_1 = (3,-1)^T, b_2 = (2,5)^T$. Записать матрицу этого преобразования в базисе, в котором даны координаты всех векторов. Найти собственные числа и векторы этого преобразования.

3. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейное преобразование φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $e_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Найти собственные числа и векторы этого преобразования.

4. Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\varphi : R^4 \to R^4$, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -\alpha & 3 \\ 2 & \alpha & -4 & 6 \end{pmatrix}$, при всевозможных значениях параметра α.