Алгебра и геометрия

Лекция 3

Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \text{если } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, \text{если хотя бы один из } \vec{a} \text{ или } \vec{b} \text{ нулевой} \end{cases}$$

Утверждение 3.1

1. $\forall \vec{a}\ (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$
2. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$

Доказательство

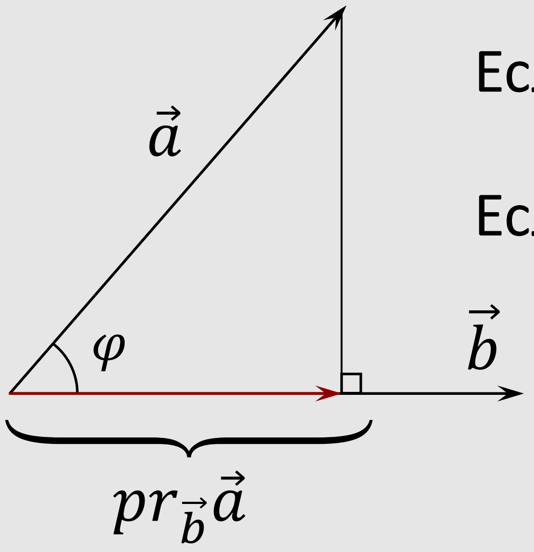
Обе части следуют непосредственно из определения $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Проекция вектора на ненулевой вектор

Утверждение 3.2

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V$, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда $\boxed{pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$

Доказательство Отложим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки.



Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение очевидно.

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $pr_{\vec{b}}\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\varphi)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} =$

$$= \left(|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi\right)\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}$$

Число $\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2}$ называется алгебраической проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Свойства скалярного произведения векторов

Теорема 3.1 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, \forall \lambda$

1. $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$, причем $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

2. $\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

3. $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

4. $\left(\lambda\vec{a}, \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Доказательство

1 и 2 следуют из определения $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Свойства скалярного произведения векторов

Доказательство (продолжение)

3. При $\vec{c} = \vec{0}$ равенство очевидно.

   При $\vec{c} \neq \vec{0}$ пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC},\ A', B', C'$ – проекции A, B, C на прямую с базисом $\vec{c}$. Тогда

$$pr_{\vec{c}}\vec{a} = \overrightarrow{A'B'}, pr_{\vec{c}}\vec{b} = \overrightarrow{B'C'},\ pr_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{A'C'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pr_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = pr_{\vec{c}}\vec{a} + pr_{\vec{c}}\vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c} = \frac{(\vec{a},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c} + \frac{(\vec{b},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c} \Leftrightarrow \frac{(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c} = \frac{((\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}))}{|\vec{c}|^2}\vec{c} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

Свойства скалярного произведения векторов

Доказательство (продолжение)

4. $pr_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_{\vec{b}}\vec{a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b} = \lambda\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b} \Rightarrow \left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Замечание

Свойства 3 и 4 можно объединить в одно

$$\left(\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2},\vec{b}\right) = \lambda_1\left(\overrightarrow{a_1},\vec{b}\right) + \lambda_2\left(\overrightarrow{a_2},\vec{b}\right),$$

которое называют линейностью скалярного произведения по первому сомножителю; применяя свойство 2, получаем, что справедлива и линейность по второму сомножителю.

Свойства скалярного произведения векторов

Теорема 3.2

Пусть $\vec{e}$ – ОНБ в V; $\vec{a} = \vec{e}\alpha, \vec{b} = \vec{e}\beta$

Тогда $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha^T\beta$

Доказательство

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = (\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}, \beta_1\overrightarrow{e_1} + \dots + \beta_n\overrightarrow{e_n})$$

Раскрывая скобки, пользуясь линейностью и, учитывая, что для ОНБ $(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_i}) = 1, \left(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}\right) = 0\ (i \neq j)$, получаем

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n = \alpha^T\beta$$

Свойства скалярного произведения векторов

Замечание

Аналогично, в **любом** базисе $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha^T \Gamma \beta$, где

$\Gamma = (\gamma_{ij})_{\,i,j=\overline{1,n}}$ $\quad \gamma_{ij} = \left(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}\right)$ $\quad i,j = \overline{1,n}$

Матрица Γ называется матрицей Грама базиса $\vec{e}$.
Очевидно, что для ОНБ $\Gamma = E$.
Формула доказывается прямым раскрытием скобок.

Свойства скалярного произведения векторов

Замечание

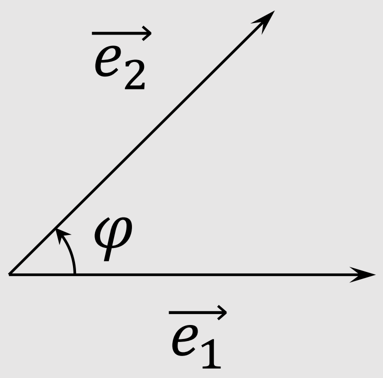
Теорема 3.2 дает возможность находить длины векторов и углы между ними в ОНБ

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{\alpha^T \alpha}$$

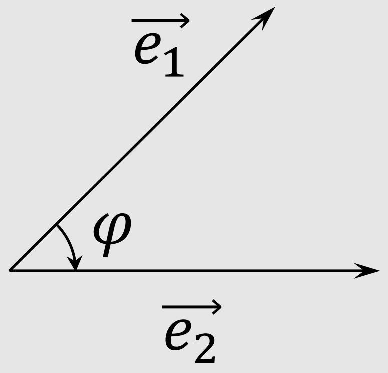
$$\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\sqrt{\beta^T \beta}}$$

Ориентация базисов

V_2

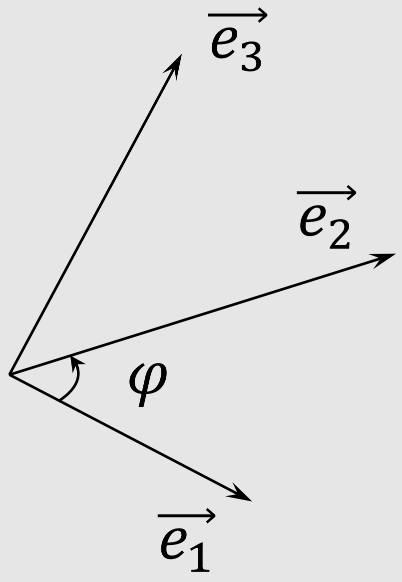


"правый"

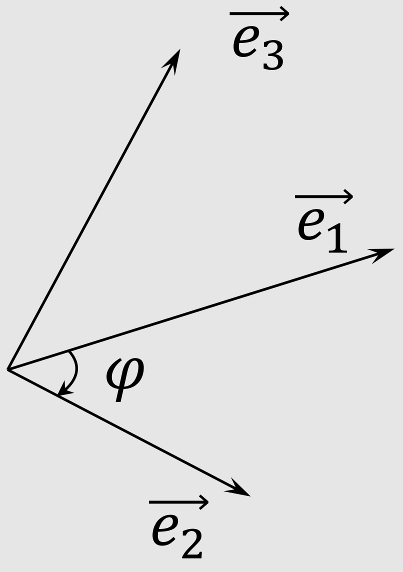


"левый"

V_3



"правый"

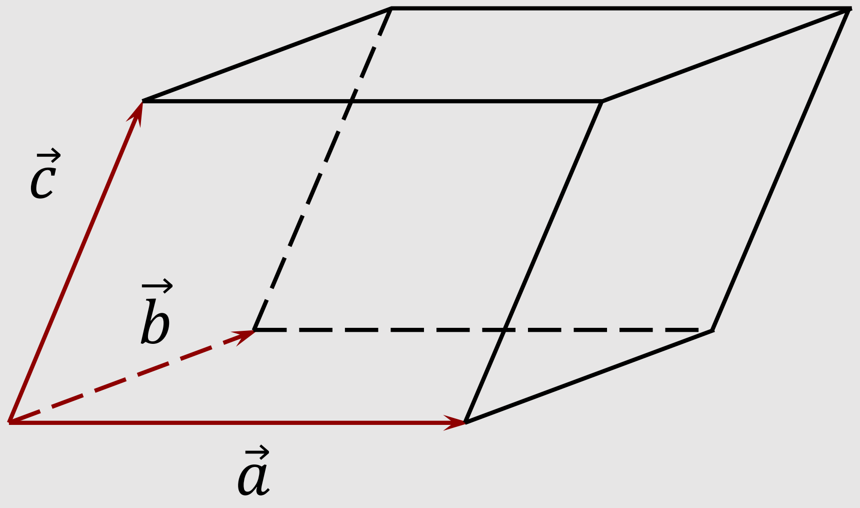


"левый"

Ориентированные объемы и площади

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – упорядоченная тройка векторов (возможно, компланарных).

Построим на них, как на ребрах, выходящих из одной вершины, параллелепипед $P(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ объема V (возможно, вырожденный)



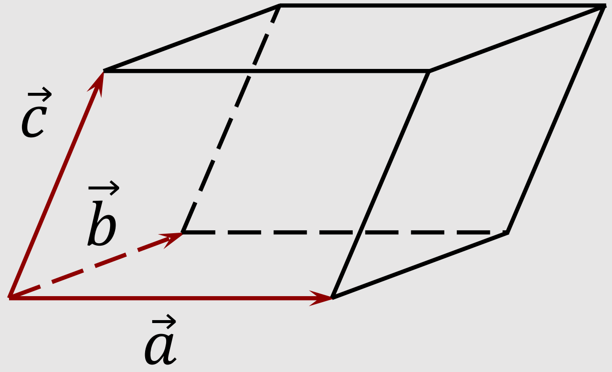
Ориентированные объемы и площади

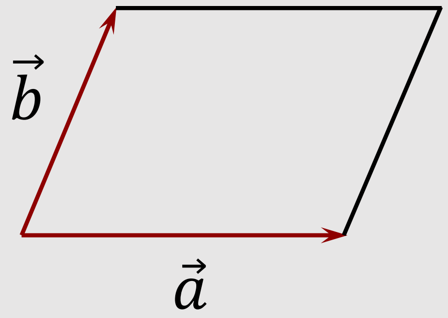
Ориентированным объемом параллелепипеда $P(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ называется число

$$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{cases}0, \text{ если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ компланарны,}\\ V, \text{ если тройка } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ правая,}\\ -V, \text{ если тройка } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ левая.}\end{cases}$$

Аналогично определяется ориентированная площадь $S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})$ параллелограмма в V_2.

V_3





V_2

Смешанное произведение векторов

Определение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = V_{\pm}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Утверждение 4.1

Пусть $\vec{e}$ – ОНБ в $V_i, i = 2{,}3$. Тогда

$$S_{\pm}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \pm 1 \ (i = 2)$$

$$V_{\pm}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \pm 1 \ (i = 3)$$

Доказательство

$P(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ и $P(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ – единичные квадрат и куб соответственно. Далее всё следует из определений $S_{\pm}$ и $V_{\pm}$.

Смешанное произведение векторов

Утверждение 4.2

1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$
2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$

Доказательство: обе части утверждения следуют из определений $V_{\pm}$ и $S_{\pm}$.

Теорема 4.1 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V_3, \forall \lambda$

1. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) =$
$-\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right) = \quad = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right)$
2. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{\lambda c}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$
3. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)$

Смешанное произведение векторов

Доказательство

1. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то равенства очевидны. В противном случае заметим, что циклическая перестановка не меняет ориентацию тройки векторов, а нециклическая меняет ее ориентацию на противоположную.

Смешанное произведение векторов

Доказательство

2 и 3. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то равенства очевидны. В противном случае рассмотрим $\vec{e}$: $|\vec{e}| = 1, \vec{e} \perp \vec{a}, \vec{e} \perp \vec{b}$, причем тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ правая.

Тогда $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| \cdot (\pm h)$, где h – высота $P\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, опущенная на плоскость, определяемую $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Множитель $\pm h$ – алгебраическая проекция $\vec{c}$ на $\vec{e} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| \cdot (\vec{c}, \vec{e})$. Теперь всё следует из линейности скалярного произведения по первому сомножителю.

Смешанное произведение векторов

Следствие

Из 1 следует линейность $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ по первому и второму сомножителям.

Теорема 4.2 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_2, \forall \lambda$

1. $S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -S_{\pm}\left(\vec{b}, \vec{a}\right)$

2. $S_{\pm}\left(\vec{a}, \overrightarrow{\lambda b}\right) = \lambda S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

3. $S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + S_{\pm}(\vec{a}, \vec{c}\,)$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.

Смешанное произведение векторов

Теорема 4.3

Пусть $\vec{e}$ – $\forall$ базис в V_3, $\vec{a} = \vec{e}\alpha, \vec{b} = \vec{e}\beta, \vec{c} = \vec{e}\gamma$. Тогда

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}_{\Delta} \cdot \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$$

Смешанное произведение векторов

Доказательство

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = (\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3},\ \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3},$$
$$\gamma_1\overrightarrow{e_1} + \gamma_2\overrightarrow{e_2} + \gamma_3\overrightarrow{e_3})$$

Раскроем скобки, пользуясь линейностью и тем, что $\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j},\overrightarrow{e_k}\right) = 0$, если хотя бы два из чисел i, j, k равны:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \alpha_1\beta_2\gamma_3(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}) + \alpha_1\beta_3\gamma_2(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}) +$$
$$+ \alpha_2\beta_1\gamma_3(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}) + \alpha_2\beta_3\gamma_1(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}) +$$
$$+ \alpha_3\beta_2\gamma_1(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}) + \alpha_3\beta_1\gamma_2(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) =$$
$$= (\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 +$$
$$+ \alpha_3\beta_1\gamma_2)(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}) = \Delta(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2})$$

Мы также использовали часть 1 теоремы 4.1 и определение детерминанта 3 порядка.

Смешанное произведение векторов

Следствие 1

Если $\vec{e}$ – правый ОНБ, то $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \Delta$

Следствие 2

$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ компланарны $\Leftrightarrow \Delta = 0$

Теорема 4.4

Пусть $\vec{e}$ – $\forall$ базис в V_2, $\vec{a} = \vec{e}\alpha, \vec{b} = \vec{e}\beta$. Тогда

$$S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}}_{\delta} \cdot S_{\pm}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3.

Следствие $\quad \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \delta = 0$

Векторное произведение векторов

Определение

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$. Их векторным произведением $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ называется $\vec{c} \in V_3$ такой, что

1. $|\vec{c}| = \left|S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
3. При $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка

Векторное произведение векторов

Утверждение 5.1

$\vec{e}$ – правый ОНБ в $V_3 \Rightarrow [\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = \overrightarrow{e_3}$, $[\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] = \overrightarrow{e_1}$, $[\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] = \overrightarrow{e_2}$.

Доказательство

Сразу следует из определения $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Достаточно рассмотреть единичный куб.

Векторное произведение векторов

Утверждение 5.2

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$ следующие условия равносильны:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b}$
2. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ компланарны

Доказательство

Из определения $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \Rightarrow$ при $\vec{a} \parallel \vec{b}$ условия 2 и 3 выполнены, а при $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ оба условия нарушаются.

Теорема 5.1 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$

1. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$
2. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$

Векторное произведение векторов

Доказательство

1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то обе части равенства равны 0.
   Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то из определения $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ следует, что вектор $\vec{e}$, который использовался в доказательстве теоремы 4.1, равен $\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$, где $\vec{d} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Тогда

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|S_{\pm}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| (\vec{e}, \vec{c}) = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| \left(\frac{\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}, \vec{c}\right) =$$

$$= \left|\vec{d}\right| \frac{\left(\vec{d}, \vec{c}\right)}{\left|\vec{d}\right|} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$$

2. $\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = \left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{a}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$

Векторное произведение векторов

Теорема 5.2 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3, \forall \lambda$

1. $\left[\vec{b}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$
2. $\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$
3. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = [\vec{a}, \vec{c}] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$

Доказательство

1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то обе части равенства равны $\vec{0}$.

   Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то тройка $\vec{b}, \vec{a}, -\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ правая.

Векторное произведение векторов

Доказательство (продолжение)

2 и 3. Проверим равенства покоординатно.

Пусть $\vec{e}$ – ОНБ в V_3. Тогда $\forall i = 1,2,3$

$$\left(\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right],\overrightarrow{e_i}\right) = \left(\lambda\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{e_i}\right) = \lambda\left(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{e_i}\right) = \left(\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right],\overrightarrow{e_i}\right)$$

и

$$\left(\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right],\overrightarrow{e_i}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\overrightarrow{e_i}\right) = (\vec{a},\vec{c},\overrightarrow{e_i}) + \left(\vec{b},\vec{c},\overrightarrow{e_i}\right) =$$
$$= \left(\left([\vec{a},\vec{c}] + \left[\vec{b},\vec{c}\right]\right),\overrightarrow{e_i}\right)$$

Векторное произведение векторов

Теорема 5.3

$\vec{e}$ —правый ОНБ в V_3, $\vec{a} = \vec{e}\alpha, \vec{b} = \vec{e}\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение векторов

Доказательство

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = [\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}, \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}\,] =$$

$$= \alpha_1\beta_2[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] + \alpha_2\beta_1[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}] + \alpha_1\beta_3[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}] +$$

$$+ \alpha_3\beta_1[\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}] + \alpha_2\beta_3[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}] + \alpha_3\beta_2[\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}] =$$

$$= (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\underbrace{[\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}]}_{\overrightarrow{e_2}} + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\underbrace{[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]}_{\overrightarrow{e_1}} +$$

$$+ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\underbrace{[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}]}_{\overrightarrow{e_3}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение векторов

Замечание

Аналогично в $\forall$ базисе доказывается формула

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} [\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] & [\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] & [\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Двойное векторное произведение

Утверждение 5.3

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)\ \ \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$$

Доказательство

Выберем правый ОНБ $\vec{e}$ так: $\overrightarrow{e_1}\parallel\vec{c}, \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ компланарны с $\vec{b}$, $\overrightarrow{e_3}=[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}]$. Тогда

$$\vec{a}=\vec{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\qquad\vec{b}=\vec{e}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ 0\end{pmatrix}\qquad\vec{c}=\vec{e}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Двойное векторное произведение

Доказательство (продолжение)

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ \beta_1 & \beta_2 & 0\\ \gamma_1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\vec{e}\begin{pmatrix}0\\0\\-\beta_2\gamma_1\end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & 0 & -\beta_2\gamma_1\end{vmatrix}=\vec{e}\begin{pmatrix}-\alpha_2\beta_2\gamma_1\\ \alpha_1\beta_2\gamma_1\\ 0\end{pmatrix}\quad(1)$$

Двойное векторное произведение

Доказательство (продолжение)

$$(\vec{a},\vec{c}) = \alpha_1\gamma_1 \qquad \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

$$\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right) =$$

$$= \vec{e}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\gamma_1\\ \alpha_1\beta_2\gamma_1\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\gamma_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \vec{e}\begin{pmatrix}-\alpha_2\beta_2\gamma_1\\ \alpha_1\beta_2\gamma_1\\ 0\end{pmatrix} \ (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем доказываемое равенство.

Взаимный базис

Утверждение 5.4

$\forall$ базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ векторы $[\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]$, $[\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}]$, $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}]$ линейно независимы.

Доказательство

Пусть $\lambda[\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] + \mu[\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] + \nu[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = \vec{0}$ и НУО $\lambda \neq 0$.

Умножим это равенство слева скалярно на $\overrightarrow{e_1}$:

$$\lambda(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + \mu(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) + \nu(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) =$$

$$= \lambda(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 0,$$

что противоречит некомпланарности векторов базиса.

Взаимный базис

Определение

Базис
$$\overrightarrow{e_1}^* = \frac{[\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$$

$$\overrightarrow{e_2}^* = \frac{[\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}]}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$$

$$\overrightarrow{e_3}^* = \frac{[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}]}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$$

называется взаимным (или биортогональным) к базису $\vec{e}$ в V_3.

(Корректность определения следует из утверждения 5.4)

Взаимный базис

Следствие 1

$\forall$ ОНБ совпадает со своим взаимным.

Следствие 2

$$\left(\overrightarrow{e_i}^*, \overrightarrow{e_j}\right) = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases} \text{— символ Кронекера}$$

Взаимный базис

Утверждение 5.5

$$\vec{e}^* \text{ – базис, взаимный к } \vec{e} \Rightarrow \forall \vec{a} \in V_3$$

$$\vec{a} = (\vec{a}, \overrightarrow{e_1}^*)\overrightarrow{e_1} + (\vec{a}, \overrightarrow{e_2}^*)\overrightarrow{e_2} + (\vec{a}, \overrightarrow{e_3}^*)\overrightarrow{e_3} \quad (1)$$

Доказательство

Равенство $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$ умножим скалярно справа на $\overrightarrow{e_i}^*, i = 1,2,3.$

(Например, для $i = 1$

$$(\vec{a}, \overrightarrow{e_1}^*) = \alpha_1\underbrace{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}^*)}_{1} + \alpha_2\underbrace{(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}^*)}_{0} + \alpha_3\underbrace{(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}^*)}_{0} = \alpha_1)$$

Тогда $\alpha_1 = (\vec{a}, \overrightarrow{e_1}^*) \quad \alpha_2 = (\vec{a}, \overrightarrow{e_2}^*) \quad \alpha_3 = (\vec{a}, \overrightarrow{e_3}^*).$

Взаимный базис

Утверждение 5.6

Взаимным для базиса $\vec{e}^*$ будет базис $\vec{e}$.

Доказательство

В (1) оба базиса входят симметрично.

Следствие

$$\forall \vec{a} \in V_3 \; \vec{a} = (\vec{a}, \overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}^* + (\vec{a}, \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}^* + (\vec{a}, \overrightarrow{e_3})\overrightarrow{e_3}^* \qquad (2)$$

Взаимный базис

Определение

Пусть дан базис $\vec{e}$ в V_3. Числа $\alpha_i^* = (\vec{a}, \overrightarrow{e_i})$ $(i = 1,2,3)$ называются ковариантными координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}$
(они однозначно определяют $\vec{a}$ из равенства (2)).

Обычные координаты $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}$ называют контрвариантными координатами.

Упражнение

Докажите, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} \in V_3$ равно сумме произведений координат $\vec{a}$ на ковариантные координаты $\vec{b}$.