Алгебра и геометрия

Лекция 4

Плоскость в пространстве

Определение

$\vec{a} \neq \vec{0}: \vec{a} \parallel \alpha$ называется направляющим вектором плоскости α.

Пусть в P_3 даны плоскость α и два ее направляющих вектора $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ (всюду далее мы будем предполагать, что условие $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ выполнено и откладывать $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки плоскости α).

Известно, что плоскость однозначно задается точкой и двумя направляющими векторами.

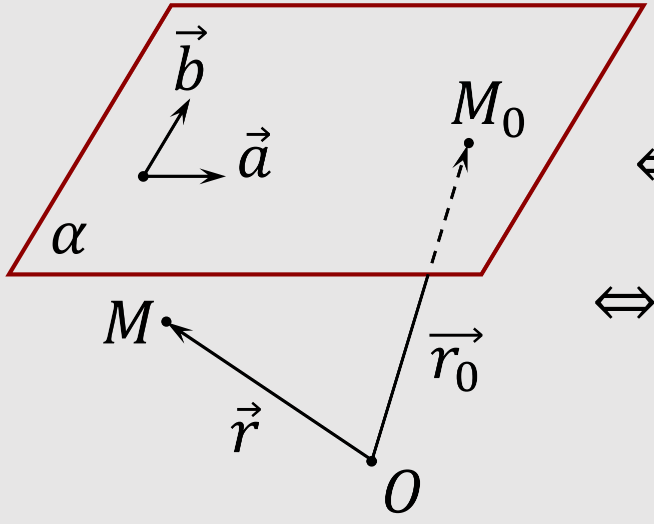
Радиус-вектор точки

Определение

Пусть в P_3 зафиксирована некоторая точка O. $\forall M \in P_3$ вектор $\overrightarrow{OM}$ будем называть радиусом-вектором точки M относительно O.

Обозначение: $M(\vec{r})$

Различные формы записи уравнения плоскости



$$M(\vec{r}) \in \alpha \Leftrightarrow (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \parallel \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{a}, \vec{b} \text{ компланарны } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Leftrightarrow$$

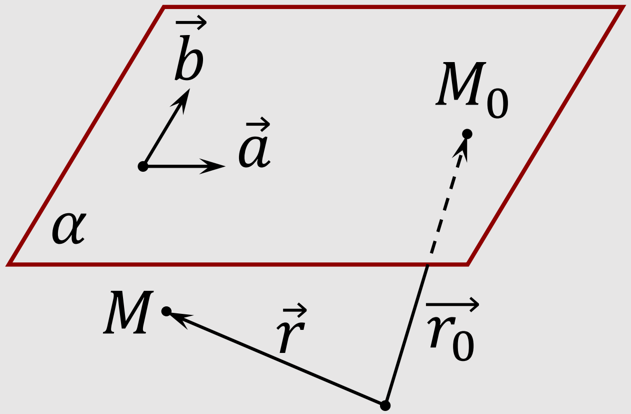
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}}$$

Мы получили векторное параметрическое уравнение плоскости (ВПУ);

λ, μ — параметры (они зависят от $M_0, \vec{a}$ и $\vec{b}$).

Различные формы записи уравнения плоскости

Воспользоваться компланарностью $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{a}$ и $\vec{b}$ можно и по-другому:



$$M(\vec{r}) \in \alpha \Leftrightarrow \boxed{\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0}$$

Это уравнение плоскости, записанное через смешанное произведение.

Упражнение

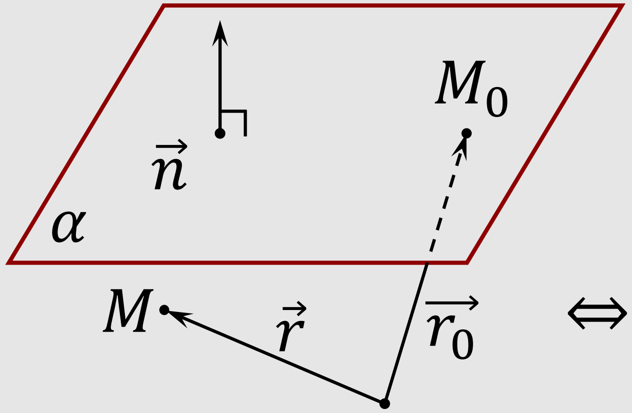
Докажите, что уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(\overrightarrow{r_0}), B(\overrightarrow{r_1}), C(\overrightarrow{r_2})$, не лежащие на одной прямой, имеет вид

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_0}) = 0$$

Различные формы записи уравнения плоскости

Определение

$\forall \vec{n} \neq \vec{0}$: $\vec{n} \perp \alpha$ называется **нормальным вектором** (или **нормалью**) для плоскости α.



Известно, что α однозначно задается $\vec{n}$ и $M_0(\overrightarrow{r_0}) \in \alpha$.

$$M \in \alpha \Leftrightarrow (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \perp \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}, \vec{n}) = \underbrace{(\overrightarrow{r_0}, \vec{n})}_{D}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\vec{r}, \vec{n}) = D}$$

Нормальное уравнение плоскости (НУ)

Упражнение

Докажите, что НУ задает плоскость с нормалью $\vec{n}$, проходящую через точку $M_0(\overrightarrow{r_0})$, где $\overrightarrow{r_0} = \frac{D}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$.

Различные формы записи уравнения плоскости

Пусть теперь в P_3 задана ОДСК $(O, \vec{e})$;

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Тогда в координатной форме ВПУ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

– параметрические уравнения плоскости (ПУ)

Уравнение плоскости, записанное через смешанное произведение, легко записать в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Различные формы записи уравнения плоскости

Упражнение

Докажите, что в ОДСК уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Общее уравнение плоскости

Теорема 6.1

Всякая плоскость в P_3 может быть задана в ОДСК уравнением $\underbrace{Ax + By + Cz + D}_{L(x,y,z)} = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$

Обратно, уравнение $L(x, y, z) = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ задает плоскость в P_3.

Общее уравнение плоскости

Доказательство $\Rightarrow$

Раскроем определитель в левой части уравнения $(*)$:

$$(x-x_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{A} - (y-y_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}_{-B} +$$

$$+(z-z_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{C} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz - \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{-D} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

$A^2+B^2+C^2 \neq 0$, иначе уравнение задает все пространство или пустое множество.

Общее уравнение плоскости

Доказательство $\Leftarrow$

Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, в котором НУО $A \neq 0$. Пусть

$$M_0\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$$ (почему $\vec{a} \nparallel \vec{b}$?)

$M(x, y, z)$ лежит в плоскости с направляющими векторами $\vec{a}, \vec{b}$, проходящей через M_0 $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow A^2\left(x + \frac{D}{A}\right) + ABy + ACz = 0 \overset{A \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \; Ax + By + Cz + D = 0$$

Общее уравнение плоскости

Утверждение 6.1

Ненулевой $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ является направляющим вектором плоскости α, заданной ОУ, $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

Доказательство

Пусть $M_0 \in \alpha, M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{a} = \overrightarrow{M_0M}$. Тогда $\vec{a} \parallel \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow M(x_0 + a_1, y_0 + a_2, z_0 + a_3) \in \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x_0 + a_1) + B(y_0 + a_2) + C(z_0 + a_3) + D = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}_{=0} + (Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

Общее уравнение плоскости

Замечание

Свяжем с ОУ плоскости вектор $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ и назовем его псевдонормалью к α. Вообще говоря, $\vec{n}^* \not\perp \alpha$ в произвольной ОДСК. Но далее мы покажем, что в ПДСК $\vec{n}^* \perp \alpha$, т.е. является нормалью.

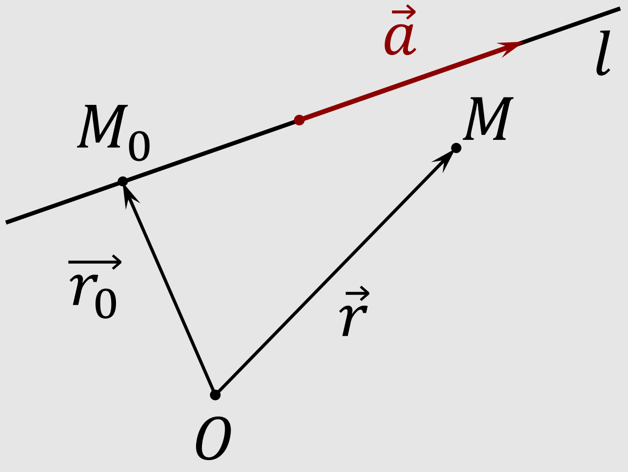
Все остальные утверждения о плоскости в пространстве, специфические для ПДСК, мы обсудим позже.

Прямая на плоскости

Определение

$\forall \vec{a} \neq \vec{0}: \vec{a} \parallel l$ называется направляющим вектором прямой l.

Пусть на плоскости P_2 дана прямая l с направляющим $\vec{a}$, проходящая через $M_0(\overrightarrow{r_0})$. Такая прямая одна.



$$M(\vec{r}) \in l \Leftrightarrow (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \parallel \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \vec{a}t \Leftrightarrow$$

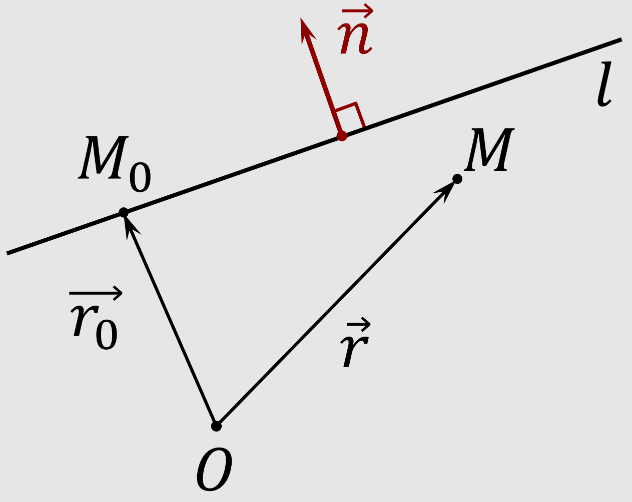
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{a}t}$$

Векторное параметрическое уравнение прямой (ВПУ)

Прямая на плоскости

Определение

$\vec{n} \neq \vec{0}: \vec{n} \perp l$ называется нормальным вектором (или нормалью) для прямой l.



$$M(\vec{r}) \in l \Leftrightarrow (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \perp \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{r}, \vec{n}) = \underbrace{(\overrightarrow{r_0}, \vec{n})}_{D} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\vec{r}, \vec{n}) = D}$$

Нормальное уравнение прямой (НУ)

Прямая на плоскости

Упражнение

Докажите, что прямая AB: $A(\overrightarrow{r_0}), B(\overrightarrow{r_1})$ имеет уравнение

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0})t.$$

Аналогично случаю плоскости в P_3 ВПУ прямой в P_2 можно записать в ОДСК:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}} \quad \text{(ПУ)},$$

где $M(x, y), M_0(x_0, y_0), \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Прямая на плоскости

Если $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, то, исключая параметр t из ПУ, получаем

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}}$$ – каноническое уравнение прямой (КУ)

Заметив, что при $a_1 = 0$ уравнение прямой имеет вид $x = x_0$, а при $a_2 = 0$ – вид $y = y_0$, будем записывать КУ даже в этих случаях, приняв следующее

Соглашение

Если в КУ знаменатель какой-либо дроби равен нулю, то будем считать равным нулю и ее числитель.

Прямая на плоскости

Упражнение

Докажите, что уравнение прямой в P_2, проходящей через две точки $A(x_1, y_1\ )$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

(с учетом соглашения относительно равенства нулю знаменателей).

Теорема 7.1

Всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ (ОУ).

Обратно, всякое такое уравнение задает на плоскости прямую.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1, только проще.

Прямая на плоскости

Утверждение 7.1

Ненулевой $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ является направляющим вектором прямой l, заданной НУ $\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 = 0$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 6.1, только проще.

Следствие

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ – направляющий для прямой, заданной НУ.

Определение

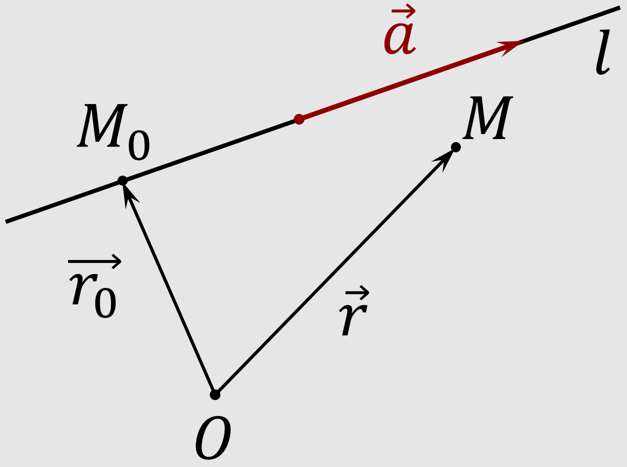
$\vec{n}^* = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ – псевдонормаль для прямой l.

В произвольной ОДСК $\vec{n}^* \not\perp l$, но в ПДСК это верно.

Утверждения, специфические для прямой в ПДСК, мы обсудим позже.

Прямая в пространстве

Заметим, что при выводе ВПУ мы нигде не пользовались тем, что прямая лежит в плоскости, поэтому в пространстве оно имеет тот же вид:



$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{a}t} \quad \text{(ВПУ)}$$

Кроме того, условие $(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \parallel \vec{a}$ можно переписать в виде

$$\boxed{[\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{a}] = \vec{0}} \text{ или}$$

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{b}, \text{ где } \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$$

Прямая в пространстве

В ОДСК, сохраняя введенные ранее обозначения,

$$\text{ВПУ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad \text{(ПУ)},$$

которое с учетом соглашения о равенстве нулю знаменателей можно записать так:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}} \quad \text{(КУ)}$$

Также прямую в пространстве можно задать и как линию пересечения двух плоскостей.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Теорема 8.1

Пусть плоскости α_1, α_2 заданы ОУ:

$$L_1(x, y, z) = 0 \text{ и } L_2(x, y, z) = 0.$$

Тогда:

1. $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}^* \parallel \overrightarrow{n_2}^*$, причем $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow L_1$ и L_2 пропорциональны.

2. $\alpha_1 \nparallel \alpha_2 \Rightarrow l = \alpha_1 \cap \alpha_2$ имеет направляющий вектор

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Доказательство

1. $\overrightarrow{n_1}^* \parallel \overrightarrow{n_2}^* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ пропорциональны $\Leftrightarrow$

$$\alpha_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2\colon\ \lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$$

При $D_2 = \lambda D_1$ уравнения пропорциональны $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

В противном случае система из этих двух уравнений не имеет решений $\Leftrightarrow \alpha_1 \parallel \alpha_2$.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Доказательство (продолжение)

2. $\overrightarrow{n_1}^* \nparallel \overrightarrow{n_2}^* \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$. Легко проверить, что его координаты

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad \delta_2 = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad \delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

таковы, что $A_i\delta_1 + B_i\delta_2 + C_i\delta_3 = 0 \ (i = 1{,}2)$.

В силу утверждения 6.1 $\vec{a} \parallel \alpha_i, i = 1{,}2$.

Упражнение

Докажите, что три плоскости, заданные ОУ, пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}^*, \overrightarrow{n_2}^*, \overrightarrow{n_3}^*$ некомпланарные.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Теорема 8.2

Пусть две прямые l_1 и l_2 на плоскости заданы ОУ: $L_1(x, y) = 0$ и $L_2(x, y) = 0$.

Тогда $l_1 \parallel l_2$ или $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}^* \parallel \overrightarrow{n_2}^*$, причем $l_1 = l_2 \Leftrightarrow$ L_1 и L_2 пропорциональны.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.1.

Прямая и плоскость в ПДСК

Утверждение 9.1

Пусть $\alpha: L(x, y, z) = 0$ в ПДСК.

Тогда $\vec{n}^* \perp \alpha$.

Доказательство

Возьмем $\forall$ направляющий вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ плоскости α.

Тогда (Утв. 6.1) $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \Leftrightarrow (\vec{n}^*, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{n}^* \perp \vec{a}$. В силу произвольности $\vec{a}$: $\vec{n}^* \perp \alpha$.

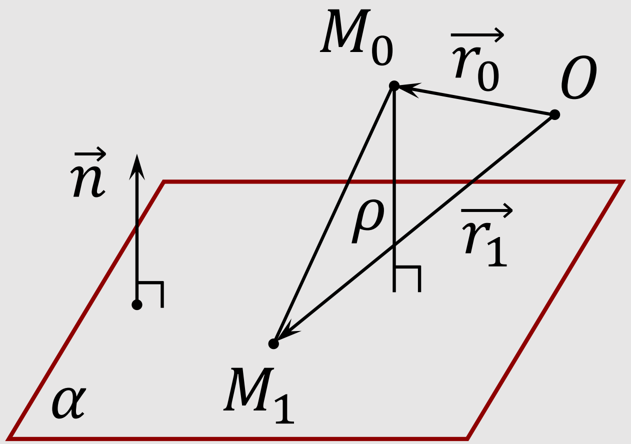
Утверждение 9.2

Пусть $l: L(x, y) = 0$ в ПДСК на плоскости. Тогда $\vec{n}^* \perp l$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 9.1, только проще.

Некоторые метрические задачи в ПДСК

1. $\rho(M_0, \alpha)$



$$\alpha: (\vec{r}, \vec{n}) + D = 0$$

$$M_1(\vec{r_1}) \in \alpha$$

$$\rho(M_0, \alpha) = \left|pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right| =$$

$$= \left|pr_{\vec{n}}(\vec{r_0} - \vec{r_1})\right| = \left|\frac{(\vec{r_0} - \vec{r_1}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right| =$$

$$= \frac{|(\vec{r_0}, \vec{n}) - (\vec{r_1}, \vec{n})|}{|\vec{n}|^2}|\vec{n}| = \frac{|(\vec{r_0}, \vec{n}) + D|}{|\vec{n}|}$$

Некоторые метрические задачи в ПДСК

1. $\rho(M_0, \alpha) = \dfrac{|(\vec{r_0}, \vec{n}) + D|}{|\vec{n}|}$

Если в ПДСК $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\boxed{\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

2. $\rho(M_0, \alpha)$ на плоскости.

Аналогично, $\rho(M_0, \alpha) = \dfrac{|(\vec{r_0}, \vec{n}) + C|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Некоторые метрические задачи в ПДСК

3. $\angle(\alpha_1, \alpha_2)$.

$$\varphi = \angle(\alpha_1, \alpha_2) = |\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| \Rightarrow \cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

В ПДСК эту формулу легко переписать в координатах.

4. $\angle(l_1, l_2)$ на плоскости.

$$\varphi = \angle(l_1, l_2) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$ аналогично 3.

Некоторые метрические задачи в ПДСК

5. $\rho(l_1, l_2)$ для $l_1 \dot{-} l_2$.

$l_1\colon \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{a_1}t$

$l_2\colon \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{a_2}t$

$\overrightarrow{a_1} \nparallel \overrightarrow{a_2}$

Построим на векторах $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ параллелепипед. Он имеет грань площади $\left|S_{\pm}(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})\right|$, а высота к этой грани равна $\rho(l_1, l_2)$. Тогда

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|V_{\pm}(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})\right|}{\left|S_{\pm}(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})\right|} = \frac{|(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|}$$

Упражнение

Запишите все полученные векторные формулы в координатах в ПДСК.