Алгебра и геометрия

Лекция 6

Эллипс

Определение эллипса было дано на предыдущей лекции. Напомним его.

Определение

Эллипсом называется линия, которая в некоторой ПДСК (канонической) имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geq b > 0}.$$

(каноническое уравнение эллипса.)

Далее мы будем считать, что эллипс не является окружностью, т.е. $a \neq b$.

Эллипс

Определение

Числа a и b называются **большой** и **малой полуосями** эллипса.

Определение

Точки $(\pm a, 0); (0, \pm b)$ в КСК называются **вершинами** эллипса.

Утверждение 11.1

Оси КСК – оси симметрии эллипса, а начало КСК – центр симметрии эллипса.

Доказательство

Если $(x, y) \in Э$, то из уравнения следует, что $(-x, y), (x, -y)$ и $(-x, -y) \in Э$.

Эллипс

Определение

Точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, где $c^2 = a^2 - b^2, c > 0$, называются **фокусами** эллипса (правым и левым соответственно).

Определение

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса.

Следствие $0 < \varepsilon < 1.$

Эллипс

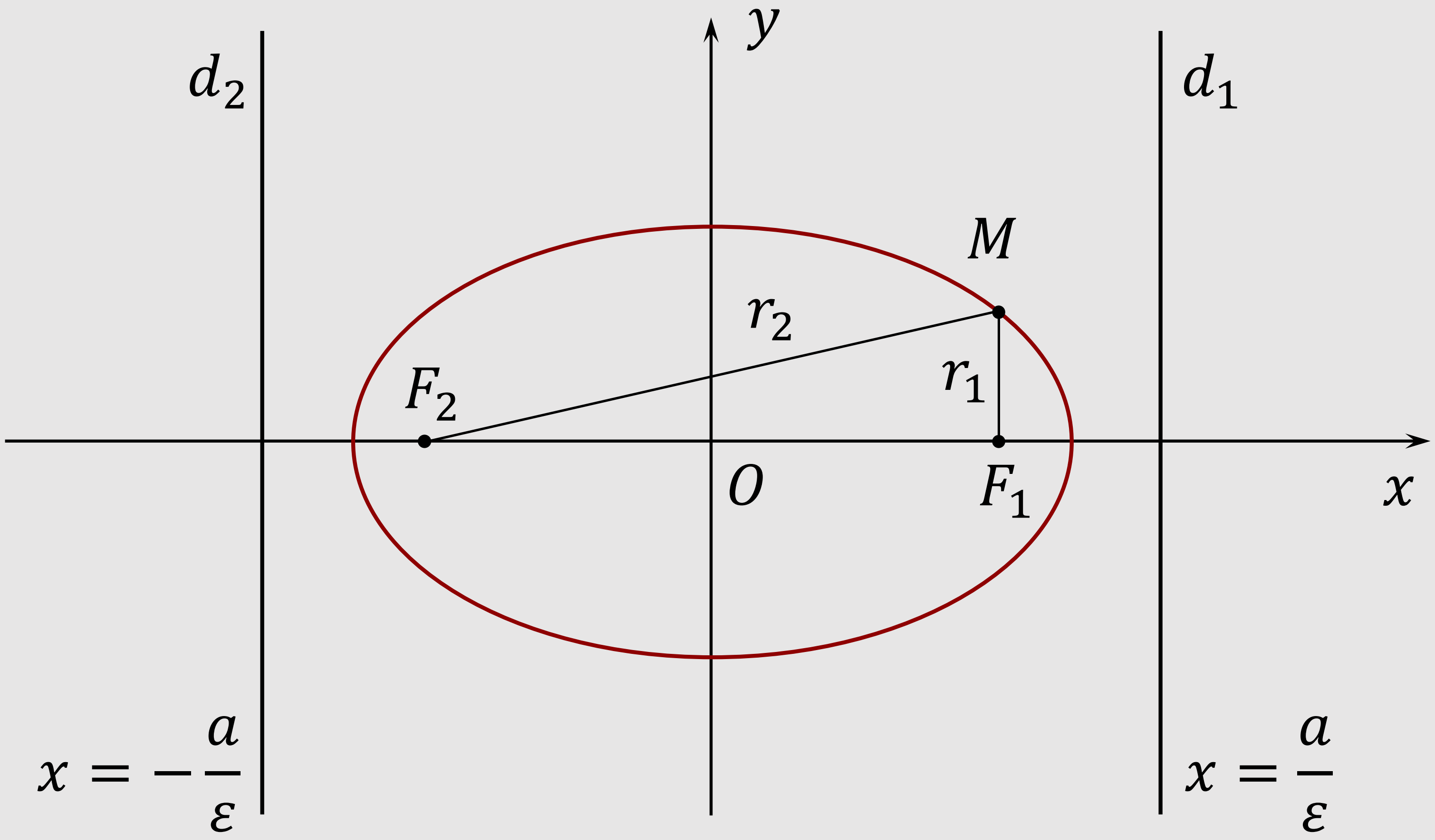
Определение

Для точки $M \in$ эллипсу $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ называются **фокальными радиусами** этой точки.

Определение

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами** эллипса. Обозначим их d_1, d_2.

Эллипс



$F_1(c, 0)$

$F_2(-c, 0)$

Эллипс

Утверждение 11.2

$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x$

Доказательство

$$r_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + \frac{a^2 - x^2}{a^2} b^2 =$$

$$= x^2 - 2cx + \underbrace{c^2 + b^2}_{a^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2} =$$

$$= a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} = (a - \varepsilon x)^2$$

Так как $0 < \varepsilon < 1$ и $|x| \le a$, то $a - \varepsilon x > 0 \Rightarrow r_1 = a - \varepsilon x$.

Второе равенство доказывается аналогично.

Эллипс

Теорема 11.1

$M(x, y) \in Э \Leftrightarrow r_1 + r_2 = 2a.$

Доказательство

$\Rightarrow$ $\quad r_1 + r_2 = (a - \varepsilon x) + (a + \varepsilon x) = 2a.$

$\Leftarrow$ $\quad r_1 + r_2 = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} =$

$$= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Возводя в квадрат и приводя подобные, получаем

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Снова возводя в квадрат и, приводя подобные, получаем (с учетом $c^2 = a^2 - b^2$) уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс

Теорема 11.2

$$M(x, y) \in Э \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\rho(M, F_i)}{\rho(M, d_i)}, \ \ i = 1{,}2.$$

Доказательство

Докажем для $i = 2$ (для $i = 1$ аналогично).

$$\Rightarrow \quad \rho(M, d_2) = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x + a) = \frac{1}{\varepsilon} r_2 = \frac{1}{\varepsilon}\rho(M, F_2).$$

$$\Leftarrow \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \varepsilon\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \varepsilon x + a = \frac{c}{a} x + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = xc + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение касательной к эллипсу

Теорема 11.3

Уравнение касательной к эллипсу в $M_0(x_0, y_0)$ есть

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}.$$

Доказательство

$M(x_0, y_0) \in Э, y_0 \neq 0$. При $y_0 = 0$ $x = \pm a$ – касаются эллипса. Через y_0 проходит график функции $y = f(x)$.

Из уравнения Э $\Rightarrow \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2ff'}{b^2} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow y - y_0 = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ и так как $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$,

то уравнение приводится к виду $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1.$

Гипербола

Определение

Кривая, которая в некоторой ПДСК (канонической), имеет уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, ab \neq 0},$$

называется гиперболой.

a – действительная полуось, b – мнимая полуось;

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы;

$F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2, c > 0$ называются фокусами гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Гипербола

Утверждение 11.3

$$r_1 = |a - \varepsilon x|$$

$$r_2 = |a + \varepsilon x|$$

(для правой ветви гиперболы $r_1 = \varepsilon x - a, r_2 = a + \varepsilon x$,

где $r_{1,2}$ – фокальные радиусы, определяемые аналогично случаю эллипса).

Доказательство аналогично доказательству для эллипса.

Гипербола

Утверждение 11.4

Пусть h_1 и h_2 – расстояния от точки $M(x,y)$ гиперболы до асимптот. Тогда

$$\boxed{h_1 h_2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}}$$

Доказательство

ОУ асимптот: $ay - bx = 0$ и $ay + bx = 0$.

Тогда $h_1 = \dfrac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $h_2 = \dfrac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h_1 h_2 = \frac{|b^2 x^2 - a^2 y^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Гипербола

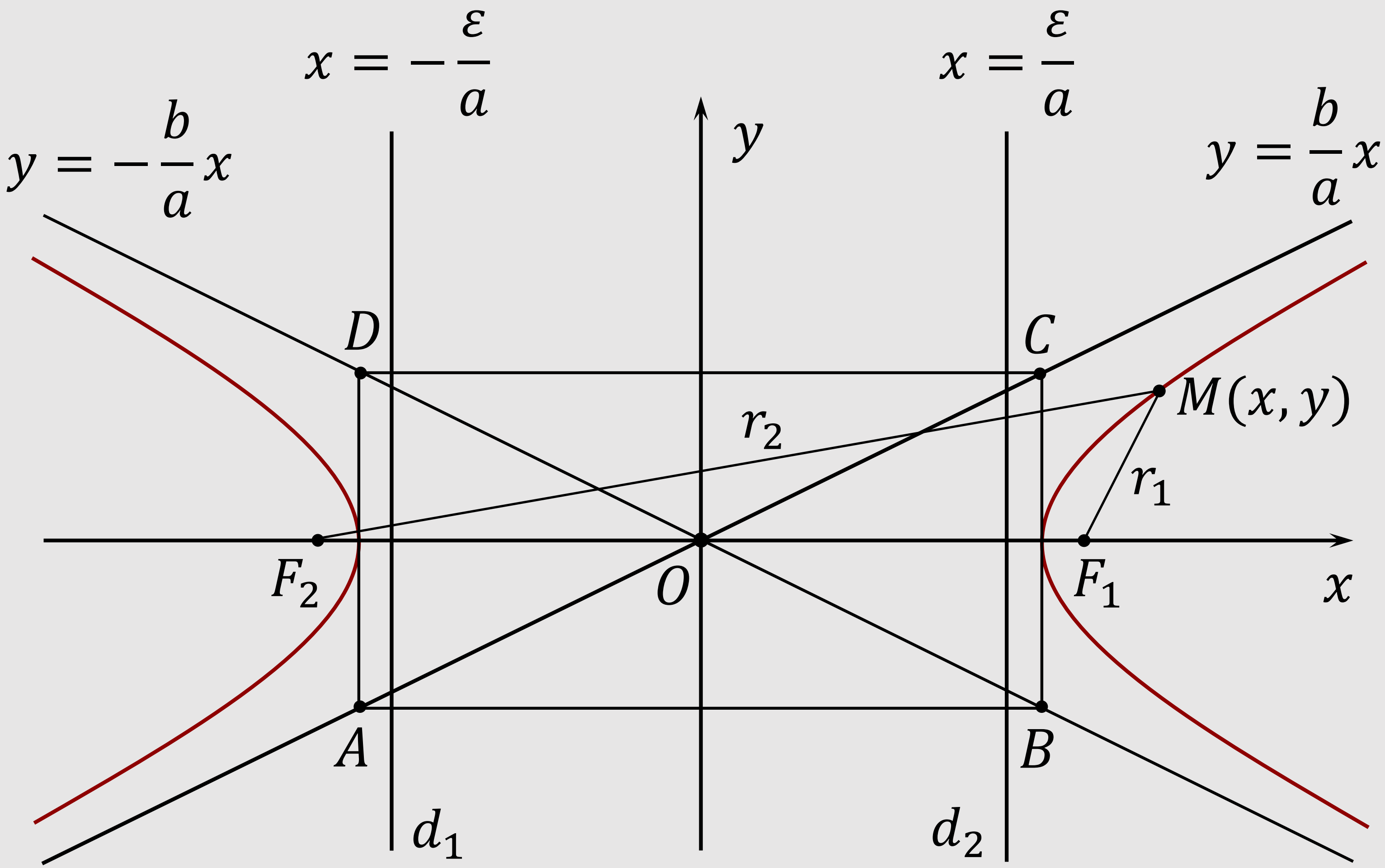
Замечание

Из утверждения 11.4 следует, что асимптоты гиперболы являются ее асимптотами в том смысле, который придается понятию асимптоты в курсе математического анализа.

Определение

Директрисами гиперболы называются прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Гипербола



$ABCD$ – “характеристический прямоугольник”

Гипербола

Определение

Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней.

Теорема 11.4

$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow |r_1 - r_2| = 2a = \text{const} > 0.$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.1 для эллипса.

Теорема 11.5

$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{\rho(M, F_i)}{\rho(M, d_i)} = \varepsilon.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.3 для эллипса.

Уравнение касательной к гиперболе

Теорема 11.6

Уравнение касательной к гиперболе в $M_0(x_0, y_0)$ есть

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.3 для эллипса.

Парабола

Определение

Кривая, которая в некоторой ПДСК (канонической), имеет уравнение

$$\boxed{y^2 = 2px, p > 0},$$

называется параболой.

p – параметр параболы.

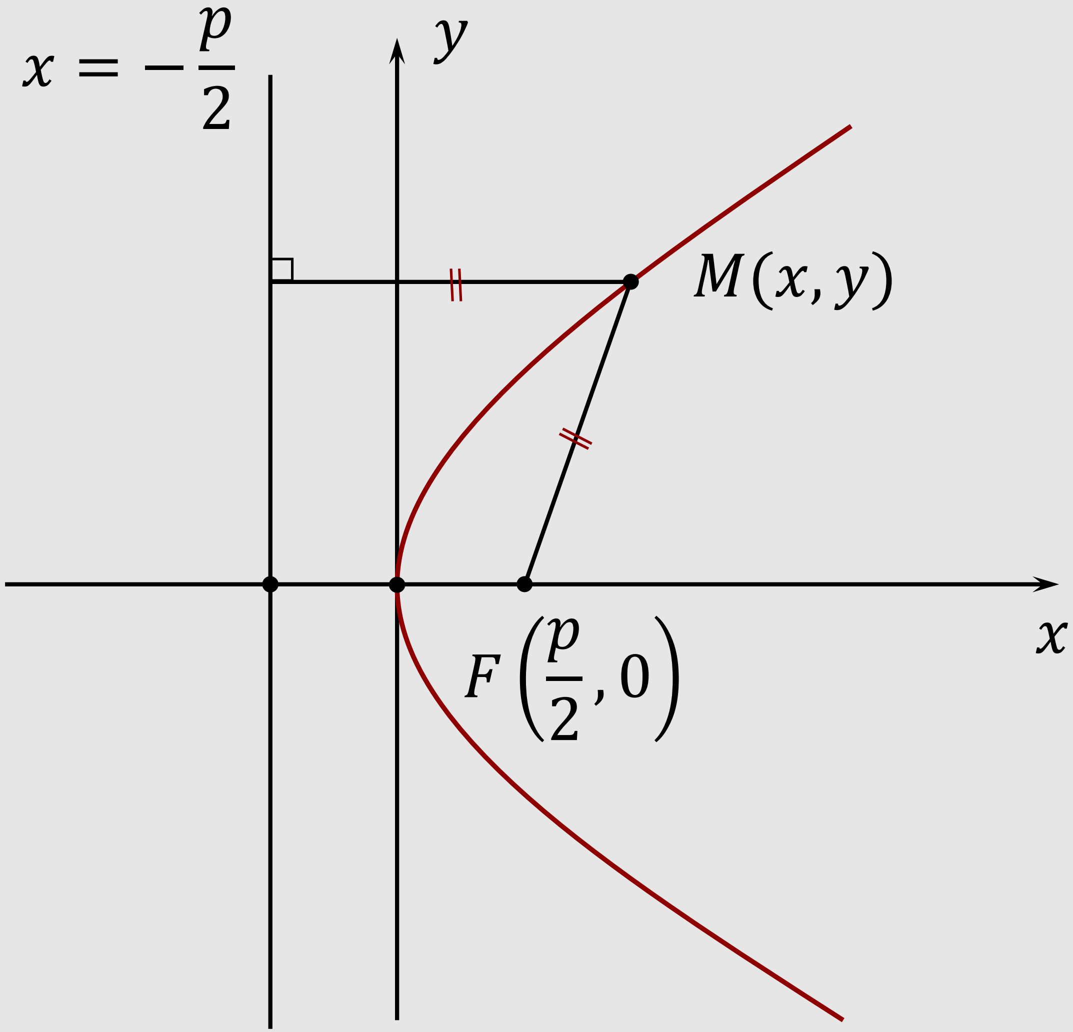
Определение

Для параболы $\varepsilon = 1$.

Определение

Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется фокусом параболы, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ – ее директрисой.

Парабола



Парабола

Теорема 11.7

$$M(x_0, y_0) \in \Pi \Leftrightarrow \rho(M, F) = \rho(M, d) \Rightarrow \varepsilon = 1.$$

Доказательство $\Rightarrow$

$$M \in \Pi \Rightarrow r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px =$$

$$= x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = x + \frac{p}{2}, \text{так как } x > 0 \text{ и } p > 0.$$

$$\rho(M, d) = x + \frac{p}{2} = \rho(M, F).$$

Парабола

Доказательство $\Leftarrow$

$$\rho(M,F)=\rho(M,d)\Leftrightarrow\rho^2(M,F)=\rho^2(M,d)\Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\Leftrightarrow y^2=2px.$$

Уравнение касательной к параболе

Теорема 11.8

Уравнение касательной к параболе в $M_0(x_0, y_0)$ есть

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}.$$

Доказательство

Для вершины $O(0,0)$ $x = 0$ – касательная.

Для $M \neq 0$ $f_1(x) = \sqrt{2px}$, $f_2(x) = -\sqrt{2px}$.

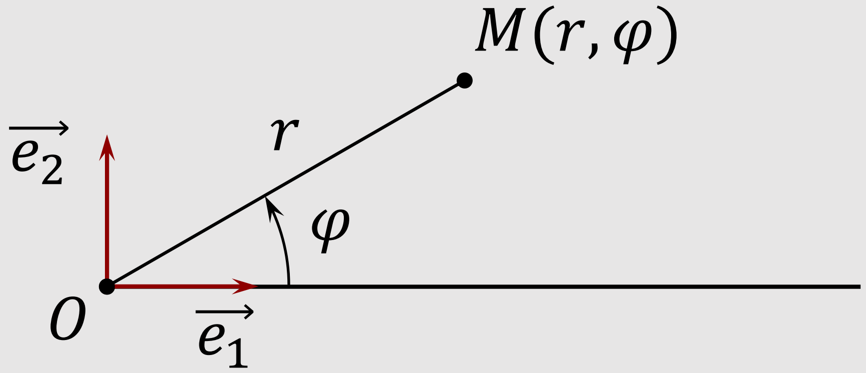
$y^2 = 2px, (f(x))^2 = 2px, 2ff' = 2p \Rightarrow ff' = p.$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) = \frac{p}{f(x_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yy_0 - \underbrace{y_0^2}_{2px_0} = p(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Эллипс, гипербола и парабола в полярной системе координат (ПСК)

ПСК:

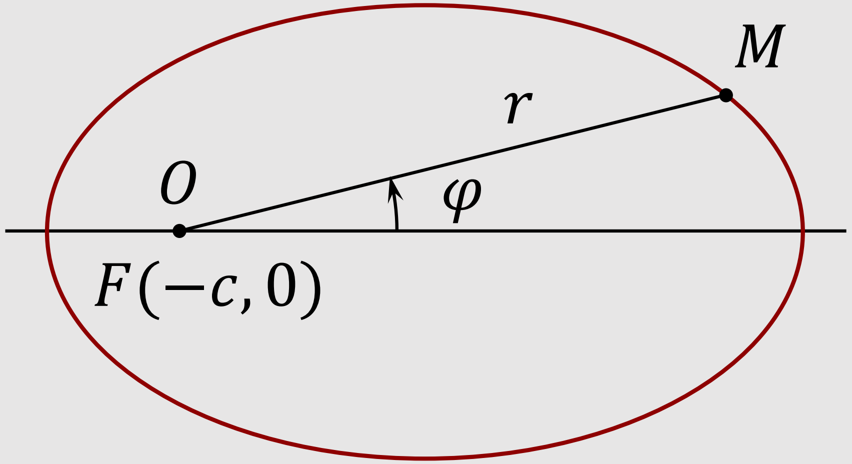


Связь между полярными и декартовыми координатами точки M:

$$\boxed{x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi}\,.$$

Эллипс, парабола и гипербола в полярной системе координат (ПСК)

1. Эллипс



$$\begin{cases} r = a + \varepsilon x \\ x = r\cos\varphi - c \end{cases} \Leftrightarrow r = a + \varepsilon r\cos\varphi - \varepsilon c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = \underbrace{a - \varepsilon c}_{p} = r\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}}.$$

Эллипс, парабола и гипербола в полярной системе координат (ПСК)

2. Гипербола

Для правой ветви поместим O в правый фокус $F_1(c, 0)$.

$$\begin{cases} r = \varepsilon x - a \\ x = r\cos\varphi + c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}}, p = r\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично, для левой ветви $\boxed{r = -\frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}}$.

Эллипс, парабола и гипербола в полярной системе координат (ПСК)

3. Парабола

Поместим O в $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

$$\begin{cases} r = \frac{p}{2} + x \\ x = r\cos\varphi + \frac{p}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}}$$

Замечание

Не рассматривая левую ветвь гиперболы, мы получили для всех трёх кривых уравнение

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}}.$$