

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 января 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра и геометрия**
по направлению: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
подготовки: 27.03.03 «Системный анализ и управление»,
38.03.01 «Экономика»

физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составили:

к. ф.-м. н., доцент А. И. Днестрян
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 ноября 2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре и ранге матрицы.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений. Общее решение однородной и неоднородной системы.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.
4. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.
5. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).
6. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
7. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
8. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли.
9. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
10. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями.
11. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

12. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.
13. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
14. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.
15. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования.
16. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение.
17. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.
18. Задача линейного программирования и методы её решения (графический, симплекс-метод)

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Челов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 01–07 марта)

I. Структура линейного преобразования

- Собственные векторы и собственные значения. Диагонализируемость.
С: 24.16; 24.23; 24.26(1, 2)*; 24.28; 24.30(16, 23, 30); 24.44(2); 24.51*;
24.57(1, 26)*; 24.63(2).
- Инвариантные подпространства.
С: 24.70; 24.75; 24.81(2); 24.85(1).

II. Линейные пространства

С: 20.3; 20.7(2, 5, 10); 20.14(6); 20.21; 20.22(5); 20.23(6); 20.26; 20.28;
20.29; 21.5(3); 21.6(4); 21.7(7); 21.9; 21.11.

III. Линейные отображения

- Матрица линейного отображения и её свойства.
С: 23.5; 23.6(5); 23.8(3, 5); 23.9(2); 23.16; 23.19; 23.24; 23.29(5); 23.30(2);
23.34; 23.40; 23.62(5); 23.67(1); 23.69; 23.82(1, 2); 23.84.
- Линейные функции
С: 31.5; 31.8; 31.14(3, 4); 31.19(2); 31.23; 31.29; 31.31(3).

$54+5^*$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 05–11 апреля)

I. Элементы линейного программирования

С: 32.2(2, 3); 32.4*; 32.5; 32.7(3); 15.34; 32.8(10, 15); 32.9(10, 15); 32.12(3);
32.15; 32.18(3); 32.19; 32.20.

II. Геометрия евклидова пространства

С: 25.1(2, 3); 25.2(1, 2); 25.3*; 25.13; 25.17; 25.25(2); 25.26(5); 25.32*;
25.35(2, 3, 4); 26.13(4); 26.14(4); 26.15(2); 26.16(3); 26.17(2); 26.27(5);
26.42(2, 5); 26.44(4).

III. Линейные преобразования евклидовых пространств

С: 28.5(4); 28.21(1); 29.14(1, 4); 29.17; 29.19(4, 8); 29.40; 29.42; 29.45;
29.47(1, 3); 29.53(3)*.

IV. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

С: 32.27(1, 14); 11.22(19); 32.36(2, 6).

V. Задачи

- Решите задачу линейного программирования графически:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0; \\ F = x_1 + x_2 \rightarrow \max. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0; \\ F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0; \\ F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max. \end{cases}$$

2. Решите задачу линейного программирования:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0; \\ F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \max; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \\ x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0; \\ F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3. Пользуясь данными, предоставленными в таблице, определите сколько изделий каждого вида должна выпускать текстильная фабрика для получения максимальной прибыли.

Вид ткани	Расход ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани (м)
	1	2	3	4	
I	1	—	2	1	180
II	—	1	3	2	210
III	4	2	—	4	800
Цена одного изделия (руб)	4500	3000	2000	3500	

4*. На трёх хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 тонн муки соответственно. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны 80, 60, 170, 80 тонн. Тарифы перевозок 1 тонны муки с комбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Составьте такой план перевозки муки, при котором общая стоимость перевозок минимальна.

56+5*

Задания составили:

к. ф.-м. н., доцент А. И. Днестрян
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий