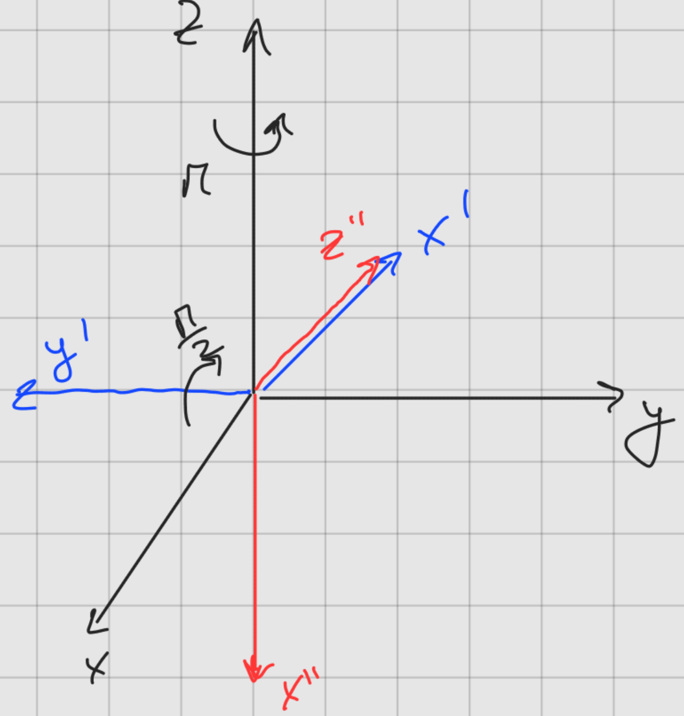
T1.

Дано:

1) $Oz : \alpha = \pi$

2) $Oy : \beta = \frac{\pi}{2}$



Решение:

Будем решать пассивным подходом

1) $A_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Следующее вращение вокруг Oy против часовой или вокруг Oy' по часовой: $A_{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\bar{r} = \underbrace{A_z A_{y'}}_{A} \bar{r}'$

$A = A_z A_{y'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Ось: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{u} = 0$

$$\Rightarrow \bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{trA - 1}{2} = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$$

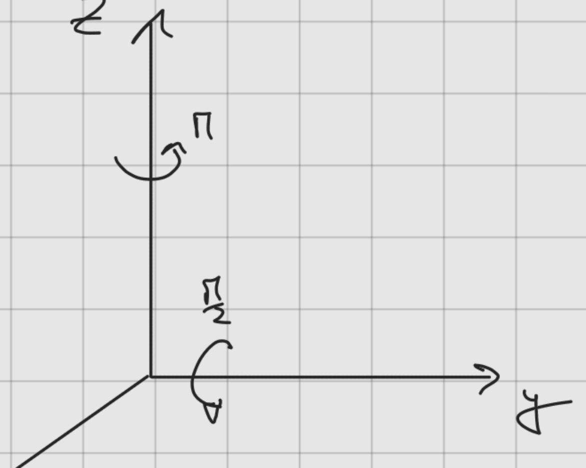
Ответ: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ось поворота; $\varphi_\pi = \pi$

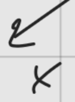
T2

Дано:
1) $Oz: \alpha = \pi$
2) $Oy: \beta = \frac{\pi}{2}$

Найти: ось и угол

Решение:





Решение:

В активном подходе

1) $A_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

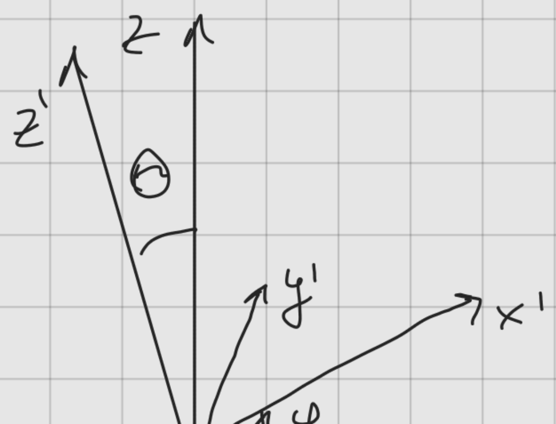
$$A_y A_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \; ; \; \bar{r}' = A\bar{r}$$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ось поворота: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi = \pi$

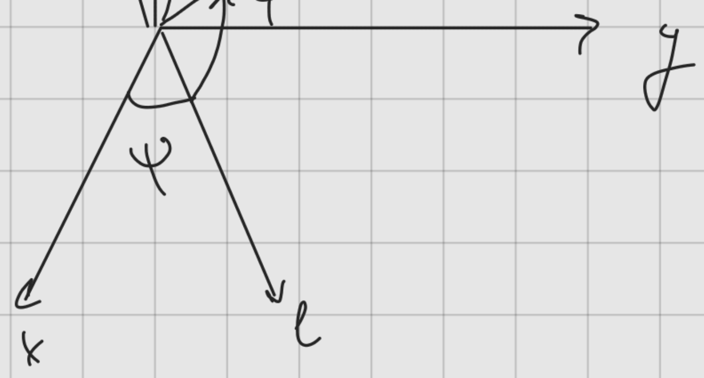
T3.



ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собств



$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\psi A_\theta A_\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\theta\cos\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \hline \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \hline \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sin\psi \sin\Theta = 1 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\Theta \sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\boxed{\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}} \rightarrow T_2$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\psi \sin\Theta = -1 \\ \sin\Theta \sin\varphi = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi = \psi = -\frac{\pi}{2} \\ \Theta = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Ответ: $\boxed{\psi = -\frac{\pi}{2} = \varphi, \quad \Theta = \frac{\pi}{2}}$