1) $\frac{d\bar{y}}{dt} = A(t)\bar{y} + \bar{f}(t)$ (1)

$t \in [\alpha, \beta]$, $A(t)$ и $\bar{f}(t)$ – непр. на $[\alpha, \beta]$

$\frac{d\bar{z}}{dt} = A(t)\bar{z}$ (2)

---

2. Th 1. Пусть $y^*(t)$ – решение (1). Пусть $y(t) = y(t) + z(t)$. Тогда $y(t)$ – решение (1) $\Leftrightarrow z(t)$ – решение (2)

$y(t) = C_1\bar{z}_1(t) + \ldots + C_n\bar{z}_n(t) + \bar{y}_*(t)$, где $\bar{z}_1(t), \ldots, \bar{z}_n(t)$ – ФСР (2); $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

---

3. Метод Лагранжа вариации постоянных.

Th 2. Пусть известна какая-либо ФСР ур-я (2). Тогда решение (1) может быть получено в квадратурах.

Док-во:

1) $Z(t) = [\bar{z}_1(t) \dots \bar{z}_n(t)]$ — ФМР (2)

Ищем решение (1) в виде

$\bar{y}(t) = Z(t)\,\bar{x}(t)$, где $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ — новая искомая ф-ия (нет потери корней, $\det Z \neq 0$)

2) $$\frac{d(Z\bar{x})}{dt} = AZ\bar{x} + \bar{f}$$

$$\frac{dZ}{dt}\bar{x} + Z\frac{d\bar{x}}{dt} = AZ\bar{x} + \bar{f}$$

$$A\cancel{Z}\bar{x} + Z\frac{d\bar{x}}{dt} = A\cancel{Z}\bar{x} + \bar{f}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = Z^{-1}\bar{f}$$

какая либо первообр.

$$\bar{x}(t) = \int Z^{-1}(t) f(t)\,dt + \bar{C}$$

3) $$\bar{y}(t) = \underbrace{Z(t)\bar{C}}_{\text{общее реш-е (2)}} + \underbrace{Z(t)\int Z^{-1}(t) f(t)\,dt}_{\text{частное решение (1)}}$$

Получили в квадратурах. ∎

$$
4.\ \begin{cases} \dfrac{d\bar{y}}{dt} = A(t)\bar{y} + \bar{f}(t) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0, \quad t_0 \in [\alpha, \beta] \end{cases} \quad (4)
$$

, правая часть не зависит от $\bar{y} \Rightarrow \bar{y}_0$ - любое

$$
y(t) = Z(t)\bar{C} + Z(t)\int_{t_0}^{t} Z^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)\,d\tau
$$

$$
\bar{y}_0 = \bar{y}(t_0) = Z(t_0)\bar{C} + Z(t_0)\cdot 0 \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow C = Z^{-1}(t_0)\bar{y}_0
$$

$$
\Rightarrow \bar{y}(t) = Z(t)Z^{-1}(t_0)\bar{y}_0 + Z(t)\int_{t_0}^{t} Z^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)\,d\tau
$$

Решение задачи Коши (4)