УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 52 часа
практические (семинарские) занятия — 52 часа
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 104

Самостоятельная работа:
теор. курс — 46 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент И. В. Козицин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений.

2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теорема о продолжении решения. Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.

3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений.

4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
   Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для ли-

нейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем.

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2022, 2016, http://www.umnov.ru.

<u>*Дополнительная*</u>

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.

10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–20 ноября)

I. Простейшие типы уравнений 1–го порядка

С. 1: 5.

С. 2: <u>4</u>; 10; 17; 36; <u>46</u> .

Ф. <u>62</u>.

С. 2: 59; 73.

Ф. 128*.

С. 3: 25; <u>35</u>; 59; <u>64</u>; <u>94</u>.

Ф. <u>150</u>; 181*.

С. 4: 10; 20; <u>59</u>.

Ф. 149.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 1; 5; <u>28</u>; 46; 59; 65(б).

1. Решить задачу Коши

$$x^4y'' - xy'y + 2(y - x^2)y = 0, y(1) = 6, y'(1) = 12.$$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 229; 230; <u>231</u>; <u>234</u>.

2. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти непродолжаемое решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y' = -y^2, \quad y(1) = -1;$

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(-4) = -1, \quad y(2) = 1.$

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

3*. Доказать, что решение задачи Коши $y' = x - y^2, \ \ y(1) = 0$ можно продолжить на интервал $(1, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278; 287 (в этих задачах решить уравнение, исследовать особые решения, построить интегральные кривые); 288.

С. 6: 7; 45; 55.

4. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1-y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

V. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 3; 7; 12; 22; 31; 36; 47; 56; 165; 193.

Ф. 593, 614; 618; 618 610*.

5. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение;

б) имеет ровно одно периодическое решение?

VI. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 1; 5; 12; 17; 27; 46; 68; 79; 88; 152; 158; 183.

Ф. 824*.

VII. Матричная экспонента

С. 11: 119; 123; 128; 95*. (также для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 1$).

6. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A в базисе $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \overline{h_4}, \overline{h_5}$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

7*. Доказать формулу: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–18 декабря)

I. Элементы вариационного исчисления

С. §19: 5; 19; 36; <u>102</u>.
С. §20.1: 3; 9.
С. §20.2: 4.
С. §20.3: 4.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: <u>667</u>; 668; 679.
С. §9: 10; 24; 52; 74 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

<u>1</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu = \mathrm{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 971; 972; 973; 974; 975; 978*.
С. §13: 39; 44; 57.
Ф. §25: 166.

IV. Устойчивость по Ляпунову

Ф.: 897; 915; 889*.

V. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 1; <u>12</u>.
Ф.: <u>1164</u>.

<u>2</u>. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2+2y+3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2+y+z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

3. Найти первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, в пунктах а), б) и в) исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$;

б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$;

в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

г)* $\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dot{y} = v, & \dot{v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \dot{z} = w, & \dot{w} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$

где $\varphi(x, y, z)$ — всюду дифференцируемая функция.

С. §16: 5; 26.

4*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1,1)/T(2,2)$.

VI. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; <u>14</u>; 24; 42; 91.

<u>5</u>. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

6*. Для всех $t \geq 0$ и $y \geq 0$ найти решение следующей задачи:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

при условии, что

$$f(0, x, y, u, v) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^{-b(u^2+v^2)}$$

и для $v \geq 0$,

$$f(t, x, 0, u, v) = \frac{1 + 0.5 \sin \Omega t}{x^2} e^{-b(u^2+v^2)}.$$

$\boxed{105+11^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент И. В. Козицин