§2. О приближенных решениях

$\bar z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, n - фикс.   Всё вещественно.

$$\frac{d\bar y}{dt} = \bar f(t, \bar y) \qquad (1)$$

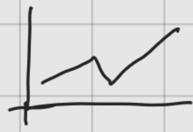
f - опр-на в замкнутой области $\bar G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,\bar y}$

$\bar y$ - вещественна

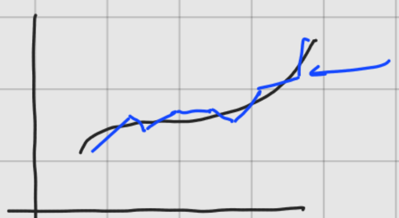
Опр 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Ф-ия $\bar\varphi(t)$ называется ε-приближённым решением ур-я, если:

1) $\bar\varphi(t)$ опр-на на нек-м пром-ке $[\alpha, \beta]$

2) $\bar\varphi(t)$ - непр. на $[\alpha, \beta]$

3) $\bar\varphi'(t)$ - кусочно-непр. на $[\alpha, \beta]$ 

4) на $[\alpha, \beta]$ в точках непр-ти $\bar\varphi'(t)$ имеет место $\left|\frac{d\bar\varphi}{dt} - \bar f(t, \bar\varphi(t))\right| < \varepsilon$



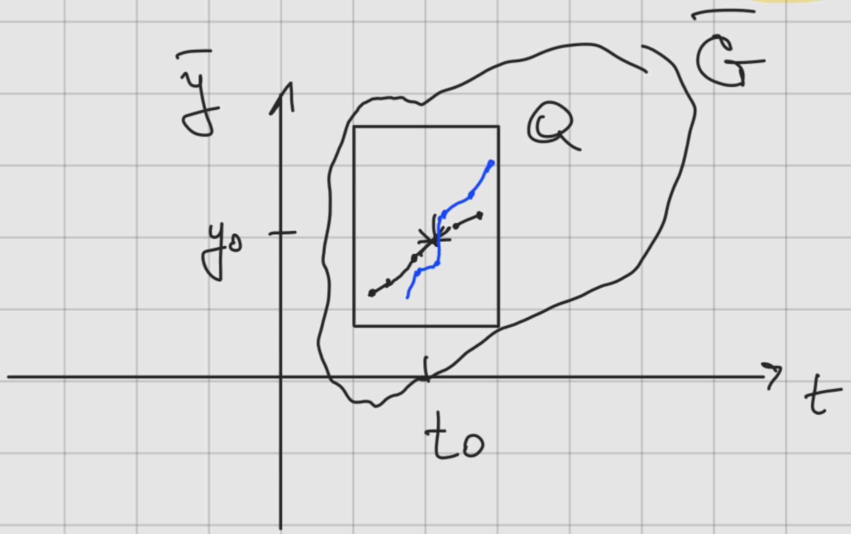
использовать

Th 1. Пусть $\bar{\varphi}_1(t)$ и $\bar{\varphi}_2(t)$ – ε-приближенные решения (1). Пусть графики $\bar{\varphi}_1(t)$ и $\bar{\varphi}_2(t)$ не выходят за пределы цилиндра $Q = \{|t-t_0| \le \alpha, \ |\bar{y}-\bar{y}_0| \le \beta\} \subseteq \bar{G}$. Пусть $\bar{\varphi}_1(t)$ и $\bar{\varphi}_2(t)$ удовлетворяют $\bar{\varphi}_1(t_0) = \bar{\varphi}_2(t_0) = \bar{y}_0$

Пусть $\bar{f}$ и $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}}$ – непр. в $\bar{G}$. Обозначим

$K = \max\limits_{Q} \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right\|$. Тогда имеет место

$$|\bar{\varphi}_1(t) - \bar{\varphi}_2(t)| \le 2\alpha\varepsilon e^{K\alpha}$$ – Тем ближе эти решения



Док-во: 1) $\frac{d\bar{\varphi}_1}{dt} = f(t, \bar{\varphi}_1(t)) + \bar{\delta}_1(t)$ – ε-прибл.

$|\bar{\delta}_1(t)| < \varepsilon$

$$\overline{\varphi}_1(t) = \underbrace{\overline{\varphi}_1(t_0)}_{y_0} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{\varphi}_1(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} \overline{\delta}_1(\tau)d\tau$$

$$\overline{\varphi}_2(t) = \underbrace{\overline{\varphi}_2(t_0)}_{\overline{y_0}} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{\varphi}_2(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} \overline{\delta}_2(\tau)d\tau$$

$$2)\ |\overline{\varphi}_1(t) - \overline{\varphi}_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \overline{\varphi}_1(\tau)) - f(\tau, \overline{\varphi}_2(\tau))|\,d\tau +$$

$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t} |\overline{\delta}_1(\tau) - \overline{\delta}_2(\tau)|\,d\tau}_{\leq 2\varepsilon(t-t_0) \leq 2\varepsilon\alpha}$$

$$|\overline{f}(\tau, \overline{\varphi}_1(\tau)) - \overline{f}(\tau, \overline{\varphi}_2(\tau))| \overset{*\,Th(\S 1, n4)}{\leq} \underset{\substack{\uparrow \\ t\text{-одно и} \\ \text{то же}}}{K} \cdot \underbrace{|\overline{\varphi}_1(t) - \overline{\varphi}_2(t)|}_{z(t)}$$

Б.О.О. $, t \geq t_0: \quad z(t) \leq 2\varepsilon\alpha + K\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в силу леммы Гронуолла:

$$z(t) \leq 2\varepsilon\alpha e^{K(t-t_0)} \leq 2\varepsilon\alpha e^{K\alpha}$$