

# Лабораторная работа 1.2.5

## Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Автор: Касьянов Семен

5 декабря 2022 г.

**Цель работы:** исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

**В работе используются:** гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

### Теоретические сведения

Уравнения движения тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Если сила  $\vec{F}$  не зависит от угловой скорости, а момент  $\vec{M}$  - от скорости поступательного движения, то уравнения (1) и (2) можно рассматривать независимо друг от друга. Уравнение (2) соответствует задаче рассмотрения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, которая рассматривается в данной работе.

Момент импульса твердого тела в его главных осях  $x, y, z$  равен

$$\vec{L} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z \quad (3)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  - главные моменты инерции,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - компоненты вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M} dt \quad (4)$$

Если сила действует в течение короткого периода времени, то изменение  $L$  мало.

Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости маховика (рис.1). Будем считать  $\omega_z = \omega_0, \omega_x = 0, \omega_y = 0$

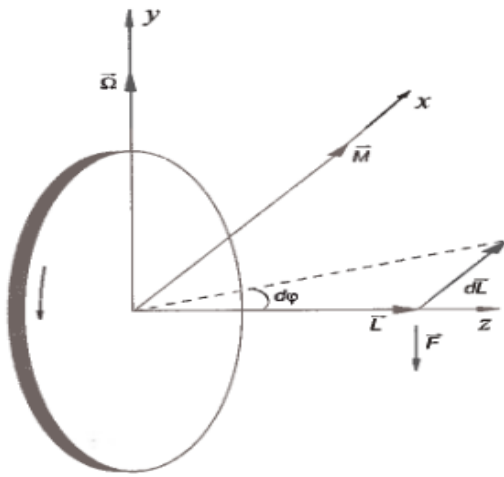


Рис. 1. Маховик

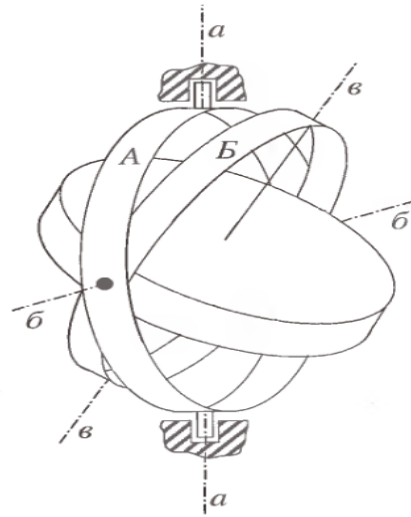


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Пусть ось вращения повернулась в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  на бесконечно малый угол  $d\phi$ , то есть

$$d\phi = \Omega dt$$

где  $\Omega$  - угловая скорость такого вращения. По нашему предположению  $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$  (5), это значит, что момент импульса маховика, равный  $I_z \omega_0$  только повернётся в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  не изменяя величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = L d\phi = L \Omega dt.$$

Вектор  $d\vec{L}$  можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (6)$$

Вектор  $\vec{L}$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\vec{\Omega}$  и не меняется по модулю. Таким образом, имеем:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (7)$$

Под действием момента внешних сил ось гироскопа медленно вращается вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Такое движение называется прецессией гироскопа. Для гироскопа массой  $m_{\Gamma}$ , у которого ось собственного вращения наклонена на угол  $\alpha$  от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\text{ц}} \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0} \quad (8)$$

где  $l_{\text{ц}}$  - расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т.е. скорость прецессии не зависит от угла  $\alpha$ . Для изучения регулярной прецессии гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создаёт момент сил тяжести, вызывающий прецессию, которая находится по формуле (8).

### Установка

Уравновешенный гироскоп, закреплённый в кольцах корданова подвеса, показан на рис. 2. Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трёх осей  $aa$ ,  $бб$ ,  $вв$ . Эксперименталь-

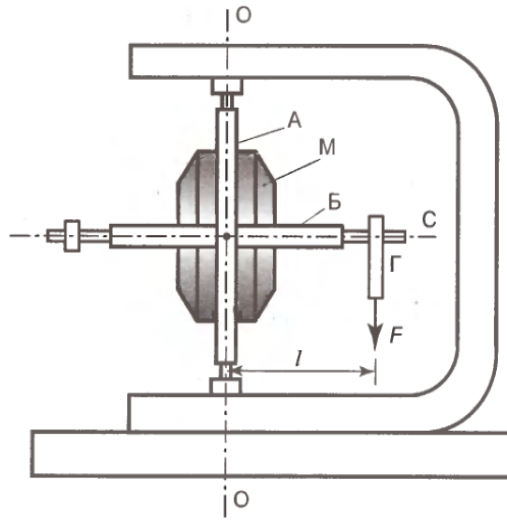


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

ная установка показана на рис.3. Ротором гироскопа является ротор электромотора М. Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А. На рычаг С, направленный по оси симметрии ротора, подвешивают грузы Г, меняя момент силы F.

Момент инерции  $I_0$  можно определить по крутильным колебаниям точной копии, подвешиваемой вдоль оси симметрии к жесткой проволоке с модулем кручения f:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}} \quad (9)$$

Чтобы исключить f подвешивают цилиндр правильной формы с моментом инерции  $I_{\text{ц}}$ , таким образом имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (10)$$

Также скорость вращения ротора можно определить при использовании фигур Лиссажу.

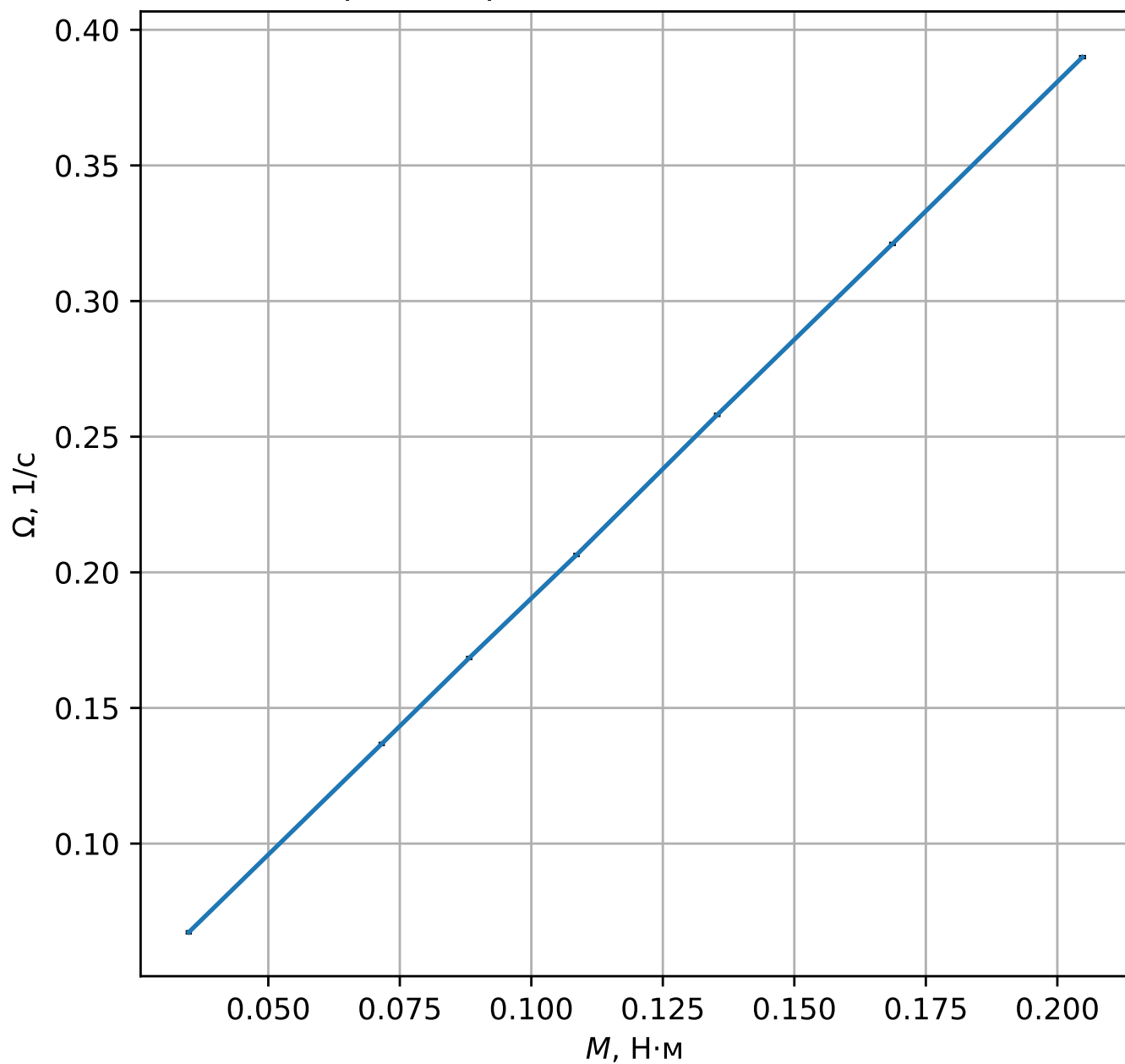
## Ход работы

В представленной таблице m - масса груза (кг), N - количество оборотов гироскопа вокруг вертикальной оси за время t (с), a1 и a2 или  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - начальный и конечный углы отклонения от горизонтали, M (Н·м) - момент силы тяжести груза,  $\sigma M$  или  $\sigma_M$  (Н·м) - погрешность измерений M, T (с) - период вращения,  $\Omega$  или  $\omega$  ( $\text{с}^{-1}$ ) - скорость регулярной прецессии гироскопа,  $\omega_l$  или  $\omega_l$  ( $\text{с}^{-1}$ ) - скорость опускания рычага,  $\sigma \Omega$  или  $\sigma_{\Omega}$  ( $\text{с}^{-1}$ ).

Период обращения вокруг вертикальной оси гироскопа найдём по формуле  $T = \frac{t}{N}$ , скорость регулярной прецессии находится следующим образом  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $M = mgl$ ,  $\omega_l = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\pi}{180 \cdot T}$ .  $l = 121$  мм.

	m	N	t	a1	a2	M	sigmaM	T	bigomega	lever	Mtr	sigmaMtr	sigmabigomega
0	0.0567	1	180.13	6	-3	0.067303	0.000596	180.130000	0.034881	0.000872	0.001656	0.000497	0.000002
1	0.0567	1	180.00	6	-3	0.067303	0.000596	180.000000	0.034907	0.000873	0.001657	0.000497	0.000002
2	0.0567	1	180.25	6	-3	0.067303	0.000596	180.250000	0.034858	0.000871	0.001655	0.000497	0.000002
3	0.1152	2	175.53	6	-3	0.136744	0.000604	87.765000	0.071591	0.000895	0.001700	0.000510	0.000004
4	0.1152	2	175.62	6	-3	0.136744	0.000604	87.810000	0.071554	0.000894	0.001699	0.000510	0.000004
5	0.1152	2	175.72	6	-3	0.136744	0.000604	87.860000	0.071514	0.000894	0.001698	0.000509	0.000004
6	0.1419	2	142.56	6	-3	0.168437	0.000610	71.280000	0.088148	0.001102	0.002093	0.000628	0.000006
7	0.1419	2	142.49	6	-3	0.168437	0.000610	71.245000	0.088191	0.001102	0.002094	0.000628	0.000006
8	0.1419	2	142.40	6	-3	0.168437	0.000610	71.200000	0.088247	0.001103	0.002095	0.000628	0.000006
9	0.1739	2	115.97	6	0	0.206421	0.000618	57.985000	0.108359	0.000903	0.001715	0.000514	0.000009
10	0.1739	2	115.38	6	0	0.206421	0.000618	57.690000	0.108913	0.000908	0.001724	0.000517	0.000009
11	0.1739	2	115.80	6	0	0.206421	0.000618	57.900000	0.108518	0.000904	0.001717	0.000515	0.000009
12	0.2174	2	92.87	6	0	0.258056	0.000631	46.435000	0.135311	0.001128	0.002141	0.000642	0.000015
13	0.2174	2	92.82	6	0	0.258056	0.000631	46.410000	0.135384	0.001128	0.002143	0.000643	0.000015
14	0.2174	2	92.86	6	0	0.258056	0.000631	46.430000	0.135326	0.001128	0.002142	0.000643	0.000015
15	0.2705	2	74.46	6	3	0.321086	0.000650	37.230000	0.168767	0.000703	0.001335	0.000401	0.000023
16	0.2705	2	74.66	6	3	0.321086	0.000650	37.330000	0.168315	0.000701	0.001332	0.000400	0.000023
17	0.2705	2	74.40	6	3	0.321086	0.000650	37.200000	0.168903	0.000704	0.001337	0.000401	0.000023
18	0.3285	2	61.37	6	3	0.389933	0.000675	30.685000	0.204764	0.000853	0.001620	0.000486	0.000033
19	0.3285	2	61.41	6	3	0.389933	0.000675	30.705000	0.204631	0.000853	0.001619	0.000486	0.000033
20	0.3285	3	91.97	6	0	0.389933	0.000675	30.656667	0.204953	0.001139	0.002162	0.000649	0.000022
21	0.3285	4	122.50	6	-3	0.389933	0.000675	30.625000	0.205165	0.001282	0.002435	0.000731	0.000017

Зависимость скорости прецессии  $\Omega$  от момента силы тяжести  $M$



$m, \text{ г}$	$T, \text{ с}$	$\Omega, 10^{-3} \text{ с}^{-1}$
56,7	180,13	$34,88 \pm 0,02$
115,2	87,81	$71,55 \pm 0,02$
141,9	71,24	$88,19 \pm 0,03$
173,9	57,85	$108,5 \pm 0,1$
217,4	46,42	$135,34 \pm 0,03$
270,5	37,25	$168,7 \pm 0,2$
0,3285	30,68	$204,7 \pm 0,2$

$t_0, \text{ с}$	$t_{\text{ц}}, \text{ с}$	$T_0, \text{ с}$	$T_{\text{ц}}, \text{ с}$
64,06	80,8	3,20	4,04
64,13	80,66	3,21	4,03
64,00	80,90	3,20	4,05

Построим график зависимости  $\Omega$  от  $M$ . Определим с помощью МНК угловой коэффициент  $k$ .  $k = 0,5249 \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}$ ,  $\sigma_k = 0,0004 \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}$ . Из формулы (8) можно сделать вывод, что  $k = \frac{1}{I_{\text{ц}} \omega_0}$ , следовательно  $\omega_0 = \frac{1}{I_{\text{ц}} k}$ . Чтобы найти  $I_0$ , найдём периоды  $T_0$  и  $T_{\text{ц}}$ :  $T_0 = (3,203 \pm 0,002) \text{ с}$ ,  $T_{\text{ц}} = (4,039 \pm 0,004) \text{ с}$ .

Параметры цилиндра для расчёта момента инерции гироскопа:  $D = (78,2 \pm 0,1) \text{ мм}$ ,  $m = (1616,8 \pm 0,1) \text{ г}$ .  $I_{\text{ц}} = \frac{mD^2}{8} = (1,23 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $I_0 = (7,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; Получаем, что  $f_0 = 391 \pm 6 \text{ с}^{-1}$ . Данное значение совпадает с величиной, полученной благодаря работе с фигурами Лиссажу, которая составляет  $\approx 385 \text{ с}^{-1}$ . Для определения момента силы трения, возникающей при вращении гироскопа, воспользуемся формулой  $M = L\omega_l$ , где  $L = I_0\omega_0$ .

$L = 0,30 \pm 0,01 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$ . Полученные значения момента силы трения и их погрешность представлены в таблице.

$m, \text{ г}$	$M_{\text{тр}}, 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$
56,7	$2,6 \pm 0,2$
115,2	$2,7 \pm 0,2$
141,9	$3,3 \pm 0,3$
217,4	$3,4 \pm 0,3$

Построим график зависимости момента силы трения, возникающей в вертикальной оси при вращении гироскопа, от скорости прецессии.

### Вывод

Нам удалось исследовать вынужденную прецессию гироскопа и установить её зависимость величины момента сил, действующих на ось гироскопа. Также была определена скорость вращения ротора гироскопа

Зависимость момента трения  $M_{тр}$  от скорости прецессии  $\Omega$

