Лабораторная работа 1.2.2
Экспериментальная проверка закона вращательного движения на крестообразном маятнике

Злобина Вера

13 апреля 2023 г.

Основное уравнение вращательного движения тела вокруг закреплённой оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \tag{1}$$

где $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$ – угловое ускорение (ω – угловая скорость), I – полный момент инерции тела относительно оси вращения, M – суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

Цель работы: экспериментально проверить уравнение (1), получив зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил, а также проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения.

Экспериментальная установка: для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе используется крестообразный «маятник» , устройство которого изображено на рис. 1. Маятник состоит из четырёх тонких стержней радиуса a, укреплённых на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радуисов (r_1 и r_2) насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции I маятника можно изменять, передвигая грузы $m_i (i = 1, \dots, 4)$ вдоль стержней и меняя R_i. На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней лёгкая платформа известной массы $m_\text{п}$ служит для размещения перегрузков $m_\text{г}$.

Установка оснащена датчиком, позволяющим фиксировать моменты времени прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения зависимостей угла поворота $\varphi(t)$, угловой скорости $\omega \equiv \dot{\varphi}$ и углового ускорения маятника $\beta \equiv \ddot{\varphi}$ от времени, а также углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$.

Вывод уравнения движения маятника: рассмотрим силы, действующие на маятник. Основной вращающий момент поздаётся подвешенным на нити перегрузком. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити: $M_\text{н} = rT$, где r – радиус шкива (r_1 или r_2). Силу T выразим из уравнения движения платформы $m_\text{н}\ddot{y} = m_\text{н}g - T$, где $m_\text{н} = m_\text{п} + m_\text{г}$ – масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника условием нерастяжимости нити $\ddot{y} = \beta r$. Отсюда момент силы натяжения нити

$$M_\text{н} = m_\text{н} r(g - \beta r). \tag{2}$$

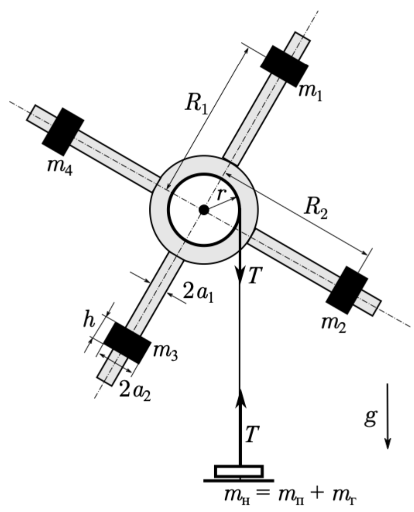

Рис. 1: Схема установки

Вращению маятника препятствует момент силы трения в оси $M_{тр}$. Таким образом, с учётом (2) уравнение (1) может быть записано как

$$(I + m_{н}r^2)\beta = m_{н}gr - M_{тр}. \tag{3}$$

Заметим, что в наших опытах, как правило, $m_{н}r^2 \ll I$, и соответственно $M_{н} \approx m_{н}gr$, то маятник будет раскручиваться с постоянным угловым ускорением $\beta_0 \approx m_{н}gr/I$.

Поскольку зависимость момента силы трения от нагрузки на маятник и скорости его вращения не известна (её исследование – отдельная экспериментальная задача), методика измерения должна быть построена так, чтобы минимизировать или вовсе исключить влияние $M_{тр}$. Можно высказать следующие качественные соображения о природе и величине $M_{тр}$. Она может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси N (сухое трение в подшипниках), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости ω вращения маятника (вязкое трение в подшипниках и сопротивления воздуха). Учитывая, что сила реакции уравновешенного маятника равна $N = m_{м}g + T \approx (m_{м} + m_{н})g \approx m_{м}g$, где $m_{м}$ – масса маятника (как правило, $m_{м} \gg m_{н}$), можно записать

$$M_{тр} \simeq \left(1 + \frac{m_{н}}{m_{м}}\right) M_0 + \eta\omega \approx M_0 + \eta\omega, \tag{4}$$

где M_0 – момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса (минимальное значение силы трения), η – некоторый коэффициент, отвечающий за вязкое трение.

Результаты измерений и обработка данных

Оценим момент сил трения в подшипниках. Граничное значение складывается из массы перегрузка и массы платформы и равно $m_{\text{гр}} = 4.80(\text{г}) + 6.17(\text{г}) = 10.97(\text{г})$.

Измерения проводились на большом шкифе, радиус которого $r_1 = 1.78(\text{см})$.

Тогда момент сил трения $M_0 = m_{\text{гр}} g r_1 \approx 1.95 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$.

Проведём измерение коэффициентов прямой $\beta(\omega)$ k и β_0, чтобы оценить случайную погрешность β_0.

k, 1/с	β_0, рад/c^2	$(\beta_{0\text{сред}}$ -$\beta_{0i})^2$, рад^2/c^4
-0.0078 ± 0.0058	$0.5126 \pm 0{,}0012$	0.0015
-0.0072 ± 0.0021	0.4513 ± 0.0008	0.005
-0.0079 ± 0.0045	0.4388 ± 0.0018	0.0012
-0.0090 ± 0.0017	0.4666 ± 0.0085	0.0001
-0.0085 ± 0.0070	0.4737 ± 0.0016	0.0001
-0.0084 ± 0.0015	0.4999 ± 0.0014	0.0007
$-0{,}0088 \pm 0.0049$	0.4749 ± 0.0039	0.0001

$\beta_{0\text{сред}} \approx 0.4740(\text{рад/с}^2)$

$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\beta_{0\text{сред}} - \beta_{0n})^2}{n(n-1)}} \approx 0.01(\text{рад/с}^2)$

Проведём измерения коэффициентов прямой $\beta(\omega)$ k и β_0 при разных массах перегрузка.

$m_0 = 6.17(\text{г})$ – масса платформы

$r_1 = 1.78(\text{см})$ – радиус большего шкива

$r_2 = 0.90(\text{см})$ – радиус меньшего шкива

$m_\text{г}$, г	$k, 1/c$	β_0, рад/c^2	радиус шкива $r_{1,2}$, см	M_T, Н $\cdot$ м
68.17	-0.0113 ± 0.0021	0.669 ± 0.002	1.78	$1.21 \cdot 10^{-2}$
106.17	-0.0123 ± 0.0022	1.067 ± 0.007	1.78	$1.89 \cdot 10^{-2}$
146.17	-0.0172 ± 0.0029	1.658 ± 0.001	1.78	$2.6 \cdot 10^{-2}$
176.17	-0.0221 ± 0.0019	1.907 ± 0.003	1.78	$3.1 \cdot 10^{-2}$
206.17	-0.0253 ± 0.0041	2.300 ± 0.008	1.78	$3.7 \cdot 10^{-2}$
50.37	-0.0124 ± 0.0024	0.2275 ± 0.0090	0.90	$0.45 \cdot 10^{-2}$
106.17	-0.0200 ± 0.0076	0.6034 ± 0.0048	0.90	$0.96 \cdot 10^{-2}$
146.17	-0.0167 ± 0.0024	0.8333 ± 0.0032	0.90	$1.3 \cdot 10^{-2}$
168.17	-0.0187 ± 0.0031	0.9543 ± 0.0021	0.90	$1.5 \cdot 10^{-2}$
68.17	-0.0161 ± 0.0053	0.3482 ± 0.0019	0.90	$0.61 \cdot 10^{-2}$

где $M_{\text{Т}} = m_{\text{г}} g r_{1,2}$ – момент силы натяжения нити

Постороим график $\beta_0(M_{\text{т}})$ зависимости начального ускорения от момента силы натяжения. Полученная зависимость является прямой пропорциональностью, то есть $\beta_0 = a + bM_{\text{Т}}$.

Коэффициенты a и b вычислим по МНК.

$a \approx -0.0396(\text{рад}/\text{с}^2)$

$b \approx 63.316(1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$

Пересечение с осью абсцисс при $\beta_0 = 0 \Rightarrow M_0 = -a/b \approx 0.63 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$ – момент сил трения. (Найденный ранее – $1.95 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$).

Вычислим $I = 1/b \approx 0.0158(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$.

Оценим погрешность I. Из формулы выше следует, что $\varepsilon_I = \varepsilon_b$.

$\sigma_b = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{\langle \beta_0^2 \rangle - \langle \beta_0 \rangle^2}{\langle\ M_{\text{Т}}^2 \rangle - \langle \text{M}_{\text{Т}} \rangle^2} - b^2} \approx 1.74(1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$

$\varepsilon_b = \sigma_b/b \approx 0.028$

Тогда $\sigma_I = \varepsilon_I I = \varepsilon_b I \approx 0.005(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$

В итоге имеем:

$$\boxed{I = (0.0158 \pm 0.0005)\text{кг} \cdot \text{м}^2}$$

Проведём измерения зависимости углового ускорения от момента инерции ситемы.

$m_{\text{г}} = 106.17(\text{г})$ – масса груза $r = 1.78(\text{см})$ – радиус шкива

По формуле (3) имеем:

$$(I + m_{\text{н}} r^2)\beta = m_{\text{н}} g r - M_{\text{тр}}$$

$I \gg m_{\text{н}} r^2 \Rightarrow I_i \approx \dfrac{m_{\text{н}} g r - M_{\text{тр}}}{\beta_i}$.

Полученные значения I_i занесём в таблицу и построим по ним график $I(R^2)$.

R, см	$k, 1/c$	β, рад/с^2	I, кг $\cdot$ м^2
17	-0.0177 ± 0.0062	1.004 ± 0.0015	0.0182
15	-0.1540 ± 0.0030	1.1491 ± 0.0011	0.159
13	-0.0136 ± 0.0015	1.3941 ± 0.0011	0.0131
18	-0.0163 ± 0.0017	0.9090 ± 0.0023	0.2201

Полученные по МНК коэффициенты прямой $I = a + bR^2$ равны:

$a \approx 0.00564(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$

$b \approx 0.448(\text{кг})$

Вычислим I по формуле:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^{4} (I_i + m_i R_i^2)$$

где I_0 – момент инерции системы без грузов, а $I_i = \dfrac{1}{12} m_i h^2 + \dfrac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2)$. Поскольку массы грузов и расстояния до центра масс почти не отличаются $\sum\limits_{i=1}^{4} (I_i + m_i R_i^2) \approx 4I_1$. Вычислим эту величину и получим, что $4I_1 \approx 7.98 \cdot 10^{-5}$(кг · м^2) $\ll a \Rightarrow I_0 \approx a$.

Тогда $\sigma_I = \sigma_a = \sqrt{\dfrac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 - b^2 \left(\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2 \right)}{n}} \approx 0.00002$(кг · м^2)

Имеем

$$\boxed{I_0 = (0.00564 \pm 0.00002)(\text{кг} \cdot \text{м}^2)}$$

Найдём I_0 другим способм. Измерим k и β_0 при перегрузке массой $m_\text{п} = 106.17$(г) без грузов на маятнике.Полученные данные занесём в таблицу.

$k, 1/c$	β_0, (рад/с^2)
-0.0452 ± 0.0031	3.238 ± 0.006
-0.0407 ± 0.0056	3.189 ± 0.009
-0.0839 ± 0.001	3.776 ± 0.002

$\langle \beta_0 \rangle = 3.401$(рад/с^2)

$I_0 \approx \dfrac{m_\text{п} g r - M_0}{\beta_0} \approx 0.00537$(кг · м^2)

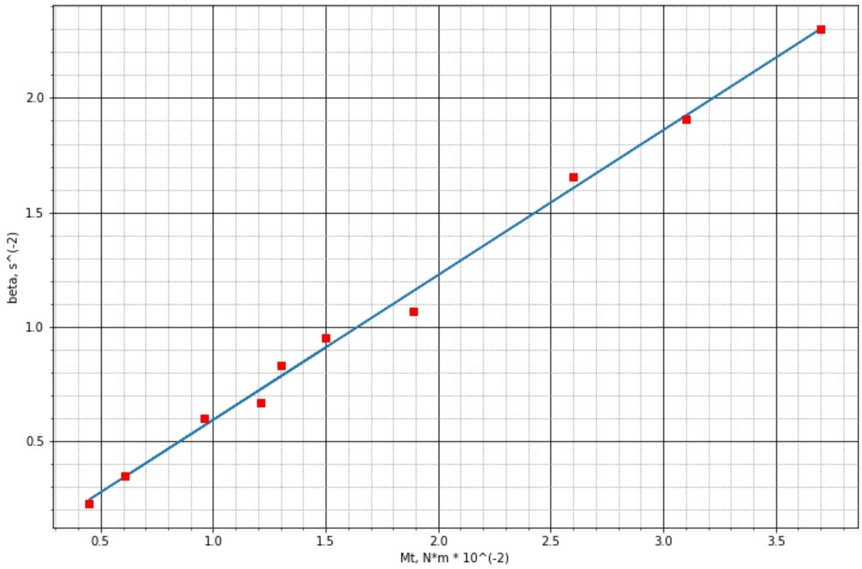

График зависимости $\beta_0 = a + bM_т$

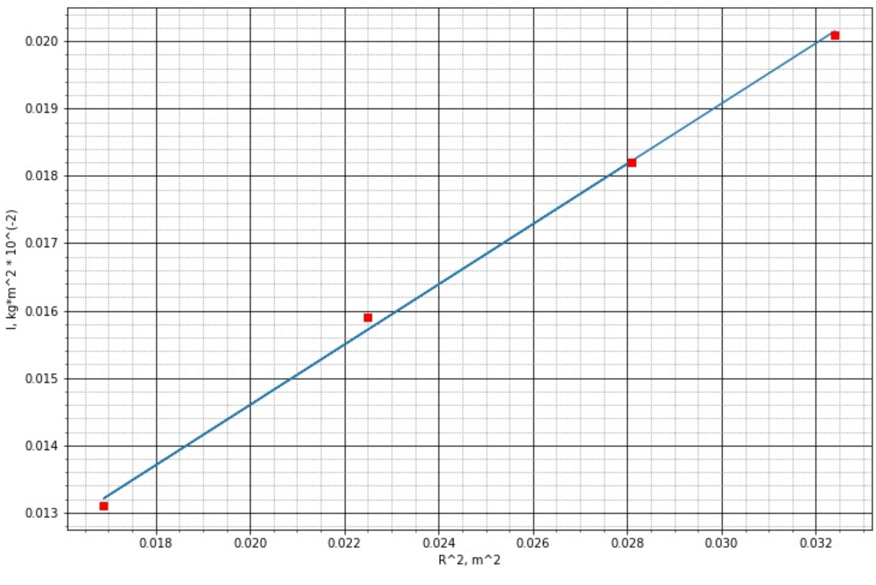

График зависимости $I = a + bR^2$

Вывод

Мы убедились, что угловое ускорение маятника обратно пропорционально моменту инерции тела и прямо пропорционально моменту прикладываемых сил. Помимо этого было выяснено, какой вклад в общий момент сил вносит момент силы трения в оси вращения.