Опр Множество отрезков

$\{ [a_1, b_1], [a_2, b_2] \}$, $-\infty < a_n < b_n < +\infty \ \forall n \in N$

называется системой вложенных отрезков,

если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \ \forall n \in N$

$[0, \frac{1}{n}] \to$ Замечание $\{[0, \frac{1}{n}]\}$ - имеет единственную общ. точку

Th (непрерывность действительных чисел по Кантору)

Всякая система вложенных отрезков имеет общую точку (точку, принадлежащую всем отрезкам)

Замечание: $\{[0, \frac{1}{n}]\}$ - имеет 1 общ. точку

Предп., $a \neq 0$ - общ. т.

$\exists n_1 \in N \quad \frac{1}{n_1} < a \Rightarrow a \notin [0, \frac{1}{n_1}] \Rightarrow a$ - не общ. точка

Док-во: Рассмотрим $A = \{a_n\}$; $B = \{b_m\}$

$\forall m, n \in N \hookrightarrow a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_n$

В силу аксиомы непрерывности $\exists c$:

$a_n \le c \le b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

в частности $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

между мн-вом левых концов и правых концов $\exists$ точка c по принципу Дедекинда
Это и есть общая точка

Опр Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется стягивающейся, если

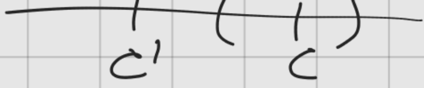
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$ $\to$ длина может быть сколь угодно малой

О единстве общей точке стяг системы отрезков

Th Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну общую т. $\in$ всем отрезкам (единств.)

Док-во:

· По крайней мере одна общая точка есть: c
· Предположим, c' – тоже общая точка всех отрезков
Пусть $c' < c$

• Обозначим $\varepsilon = c - c'$ (1) 

• По определению стягивающейся системы

$\exists n \in N: b_n - a_n < \varepsilon$

По предп. $a_n \le c' < c \le b_n \Rightarrow c - c' \le b_n - a_n < \varepsilon$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$ $\Rightarrow$ общая точка только одна