§ 2.4.

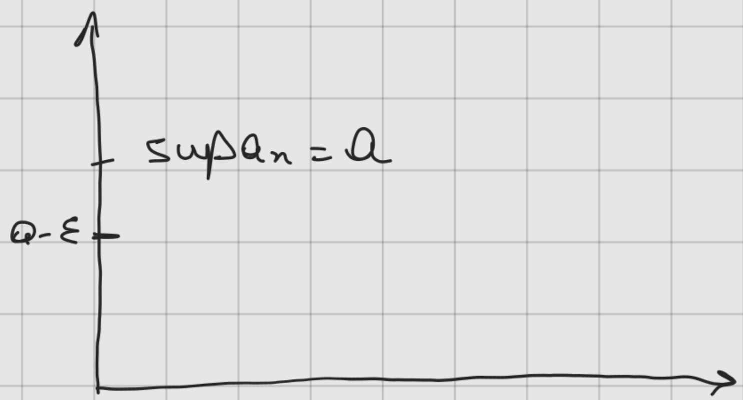
Опр. Посл-ть $\{a_n\}$ называется возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto a_{n+1} \geq a_n$

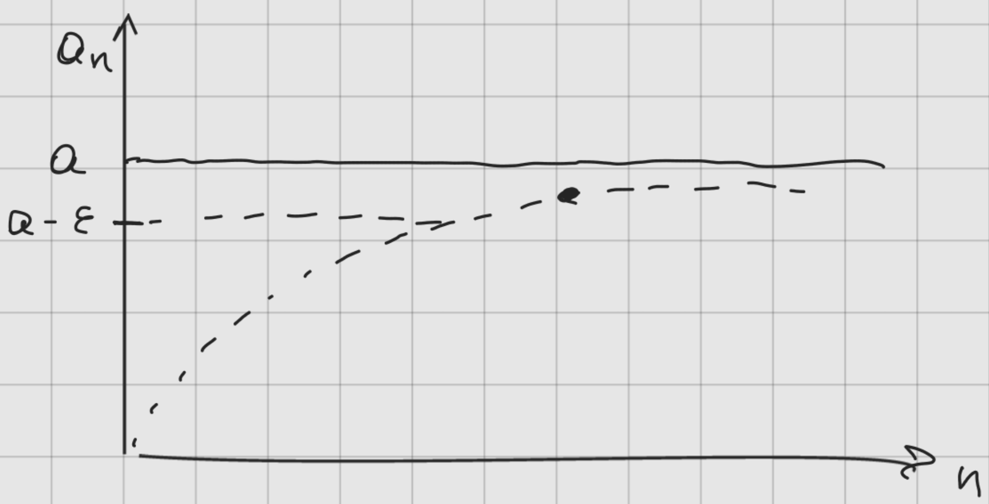
строго возр.: $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto a_{n+1} > a_n$

Опр. $a = \sup a_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \leq a \\ \forall b < a : \exists n \in \mathbb{N} \mapsto a_n > b \end{cases}$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in U_\varepsilon(a)$





№71

Th. Вейерштрасса !

Пусть $\{a_n\}$ – возрастает и ограничена **сверху**

$\Rightarrow \exists \lim a_n = \sup a_n$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$

Док-во: 1) a_n - огр. сверху $\Rightarrow$ по теореме о $\exists$ТВГ

у неё $\exists \sup a_n \in \mathbb{R}$. Обозначим $\sup a_n = a$

2) По определению sup:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: a_N \in U_\varepsilon(a)$

3) $\{a_n\}$ - возрастает $\Rightarrow$ $\forall n \geq N \mapsto a_n \geq \overset{> a-\varepsilon}{a_N} \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$

Т.О. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \mapsto a_n \in U_\varepsilon(a)$

Т.О. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
