

**Экзаменационная программа**  
**по курсу «Введение в математический анализ»,**  
**осенний семестр 2022–2023 учебного года**  
**(для всех потоков, кроме потока В.В. Редкозубова)**

1. Действительные числа. Теорема о существовании и единственности (точной) верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. *Число  $\varepsilon$*  (для всех, кроме потоков Г.Е. Иванова, Е.Ю. Редкозубовой и А.А. Скубачевского). Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности. *Теорема о верхнем и нижнем пределах* (для потока Е.Ю. Редкозубовой).
4. Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Предел сложной функции. Существование односторонних пределов у монотонных функций.
5. Непрерывность функции в точке. *Свойства функций, непрерывных в точке* (для всех, кроме потока Я.М. Дымарского). Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.
7. (Весь раздел для потоков Я.М. Дымарского, Л.Н. Знаменской, Н.Г. Павловой, Е.Ю. Редкозубовой и А.А. Скубачевского без доказательств) *Определение и свойства экспоненты, показательной функции, логарифмической и степенной функций. Непрерывность элементарных функций. Второй замечательный предел и его следствия.*
8. Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Эквивалентность существования конечной производной и дифференцируемости функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.
9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для  $n$ -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

**10.** Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ . *Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{\infty}{\infty}$*  (для потоков Я.М. Дымарского, Н.Г. Павловой, Е.Ю. Редкозубовой и А.А. Скубачевского — без доказательства). *Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной* (для потока Я.М. Дымарского, Н.Г. Павловой и Е.Ю. Редкозубовой).

**11.** Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. Асимптоты.

**12.** *Линейные пространства. Евклидовы пространства. Нормированные пространства. Арифметическое  $n$ -мерное пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, их свойства, связанные с операциями пересечения, объединения и дополнения.* (Для потоков М.О. Голубева и Г.Е. Иванова)

*Компакты, критерий компактности* (для потока М.О. Голубева).

**13.** (Весь раздел для потока Г.Е. Иванова) *Теорема Больцано-Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^n$ . Критерий компактности множества в  $\mathbb{R}^n$ . Лемма Гейне-Бореля. Критерий компактности Гейне-Бореля. Метрические пространства и свойства непрерывных функций в метрических пространствах. Предел по совокупности, предел по направлению и повторный предел для функции нескольких переменных.*

**14.** *Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке* (для всех потоков, кроме потоков Я.М. Дымарского и Г.Е. Иванова).

*Равномерная непрерывность функции, непрерывной на компакте в  $\mathbb{R}^n$*  (для потока Г.Е. Иванова).

*Равномерная непрерывность функции на промежутке. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке* (для потока Я.М. Дымарского).

**15.** Кривые на плоскости и в пространстве. *Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции* (для всех, кроме потока Н.А. Гусева). Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. *Соприкасающаяся окружность* (для потока Г.Е. Иванова). Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.