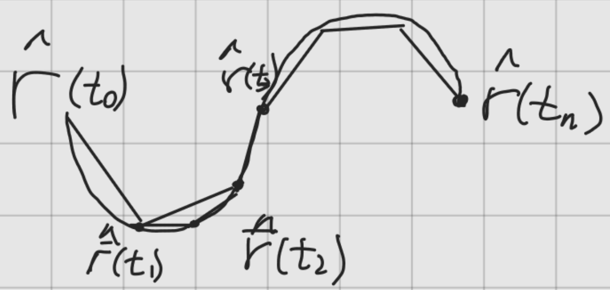
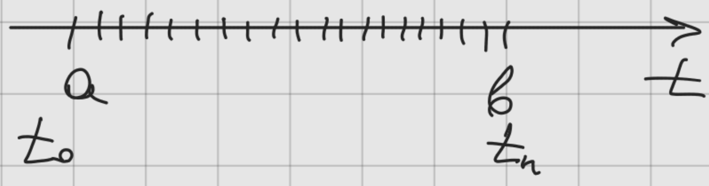




$\Gamma = \{\bar{r}(t),\ t \in [a, b]\}$, τ — разбиение (сов-ть точек на отрезке)

Ломаная Λ_τ

Длина ломаной — $S_{\Lambda_\tau} = \sum\limits_{i=1}^{n} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|$

Опр. Длина кривой $S_\Gamma = \sup\limits_{\tau} S_{\Lambda_\tau} = \lim\limits_{|\tau| \to 0} S_{\Lambda_\tau}$

т.е. по всем разбиениям

Мелкость разбиения $|\tau| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|$

Опр. Натуральный параметр S — это длина кривой, отсчитываемая от её начала до некоторой точки.

Опр. Спрямляемая кривая — имеющая конечную длину

Lem. Пусть $\Gamma = \{\bar{r}(t),\ a \le t \le b\}$ - непрерывно дифф. Тогда она спрямляема и

$$|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)| \le S_r \le \max_{a \le t \le b} |\bar{r}'(t)| (b-a)$$

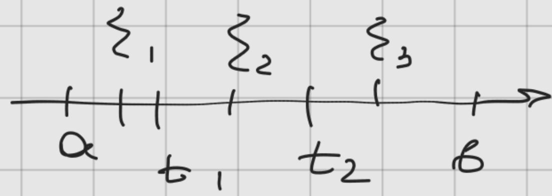
Док-во:

Лагранж: $|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)| \le |\bar{r}'(\xi)| (b-a)$

$$|\bar{r}(a) - \bar{r}(b)| \le S_{\lambda_t} = \sum_{i=1}^{n} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| \le$$

Th. Лагранж для вектор-ф

$$\le \sum_{i=1}^{n} |\bar{r}'(\xi_i)| (t_i - t_{i-1}) \le$$



$$\le \sum_{i=1}^{n} \max_{t \in [a,b]} |\bar{r}'(t)| (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \max_{t \in [a,b]} |r'(t)| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \max_{t \in [a,b]} |r'(t)| (b-a)$$

Возьмём $\lim\limits_{|t| \to 0}$ от обеих частей

$$|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)| \le \lim_{|t| \to 0} S_{\lambda_t} = S_r \le \max_{t \in [a,b]} |\bar{r}'(t)| (b-a)$$

Th. (о производной натурального параметра)

Пусть кривая $\Gamma = \{\bar{r}(t);\ a \le t \le b\}$ – непр. дифф.

Тогда переменная длина дуги $S(t)$ является возрастающей и непр. дифф-ма, причём $\frac{dS}{dt} = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$ $S' = |r'|$

$\left(|\bar{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)$

Док-во:

Рассмотрим $\Gamma_{t_0} = \{\bar{r}(t),\ t \in [t_0, t_0 + \Delta t]\}$ $\subset [a, b]$

Применим лемму

$$|\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)| \le \underset{\Delta S}{\underset{||}{S_{\Gamma_{t_0}}}} \le \max_{t \in [t_0, t_0+\Delta t]} |\bar{r}'(t)| (\cancel{t_0} + \Delta t - \cancel{t_0})$$

$$\frac{|\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)|}{\Delta t} \le \frac{\Delta S}{\Delta t} \le \max_{t \in [t_0, t_0+\Delta t]} |\bar{r}'(t)|$$

Перейдём к $\lim\limits_{\Delta t \to 0+0}$

$$|\bar{r}'(t_0)| \le S'_+(t_0) \le |\bar{r}'(t_0)|$$

$$S'(t_0)_+ = |\bar{r}'(t_0)|$$

Аналогично $S'_{-}(t_0) = |r'(t_0)| \Rightarrow$

$$\Rightarrow S'(t_0) = |r'(t_0)|$$