Семинар 3. Предел последовательности.

Скубачевский Антон

7 октября 2022 г.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$ и записывается $a = \underset{n\to\infty}{lim} a_n$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |a - a_n| < \varepsilon$$

Множество всех $x : |x - a| < \varepsilon$ называется ε-окрестностью числа a и обозначается $U_\varepsilon(a)$. Эпсилон-окрестность числа a это интервал с центром в точке a радиуса ε: $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$

N_ε или $N(\varepsilon)$ значит, что число N зависит от ε.

Символы : и $\hookrightarrow$ ставим по фэншую: они как знаки препинания, без них можно спокойно жить, и если вы их не поставите, никто вас не побьет. Просто с ними кванторное утверждение читается проще. : значит такой что. $\hookrightarrow$ значит выполняется. Вместо $\hookrightarrow$ можно поставить $\Rightarrow$, в принципе.

Определение означает, что сколь бы малой ε-окрестность числа a (предела) ни являлась, всегда найдется номер, начиная с которого ВСЕ члены последовательности лежат в этой окрестности.

На рис.1 проиллюстрировано определение. По оси OY значение члена последовательности (a_n, ну или x_n обзовем, какая разница), а по OX - номер члена последовательности. Все линии горизонтальные; наклонными кажутся, потому что у меня руки кривые. Заметим, что для ε номер n_ε равен не $N_\varepsilon^{(1)}$, а $N_\varepsilon^{(2)}$, то есть выбираем не тот номер, который первым попал в окрестность, а тот, начиная с которого все члены лежат в окрестности. Для меньшей окрестности (напомню, что ε в определении может быть любым) номер, начиная с которого все члены в окрестности, равен N_{ε_1} и расположен, разумеется, дальше, чем $N_\varepsilon^{(2)}$: чем меньше ε, тем больше номер, начиная с которого все члены лежат в окрестности.

Пример 1.

Покажем, как доказать существование предела, на примере простейшей последовательности $\{a_n\} = 1/n$. Для этого нам нужно указать конкретную зависимость $N(\varepsilon)$. Чтобы это сделать, нужно просто-напросто из неравенства $|a - a_n| < \varepsilon$ выразить n через ε.

Предел последовательности $1/n$ похоже равен $a = 0$. Это мы и будем доказывать, найдя явную зависимость $n(\varepsilon)$. Итак, нам надо решить неравенство:

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

$a = 0$, $a_n = 1/n \Rightarrow$ наше неравенство будет:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Неравенство решили, нашли $n = \frac{1}{\varepsilon}$, начиная с которого все члены последовательности будут лежать в ε - трубке. Задача почти решена. Но ведь $n \in \mathbb{N}$, а $\frac{1}{\varepsilon}$ - не всегда натуральное. Поэтому округлим его вверх до ближайшего целого: $N_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. Это скобочки полуквадратные как раз и значат округлить вверх до ближайшего целого. От того, что n станет больше, ничего страшного не случится: если наше неравенство $n > \frac{1}{\varepsilon}$ выполняется начиная с некоторого n, то начиная с большего n оно тем более будет выполняться. То есть такое $N(\varepsilon)$ нам уже более-менее подходит. Для полной строгости заметим, что при $N = \frac{1}{\varepsilon}$ неравенство $n > \frac{1}{\varepsilon}$ не выполнится, потому что знак $>$, а не $\geqslant$. Поэтому давайте еще немного подправим $N(\varepsilon)$, добавив к нему единицу. В итоге получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1 : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |0 - a_n| = |a_n| < \varepsilon.$$

Значит, 0 в самом деле предел последовательности $1/n$ по определению, ч.т.д. В дальнейшем просто запомните, что после того, как вы из неравенства $|a - a_n| < \varepsilon$ нашли $N(\varepsilon)$, его нужно округлить до ближайшего целого и увеличить на 1 на всякий пожарный, зачем это делается, не нужно каждый раз подробно расписывать.

Определение. Последовательность называется **сходящейся**, если у нее существует конечный предел. В противном случае (то есть когда предела нет или он равен ∞) она называется **расходящейся**.

Будем далее учиться пользоваться определением.

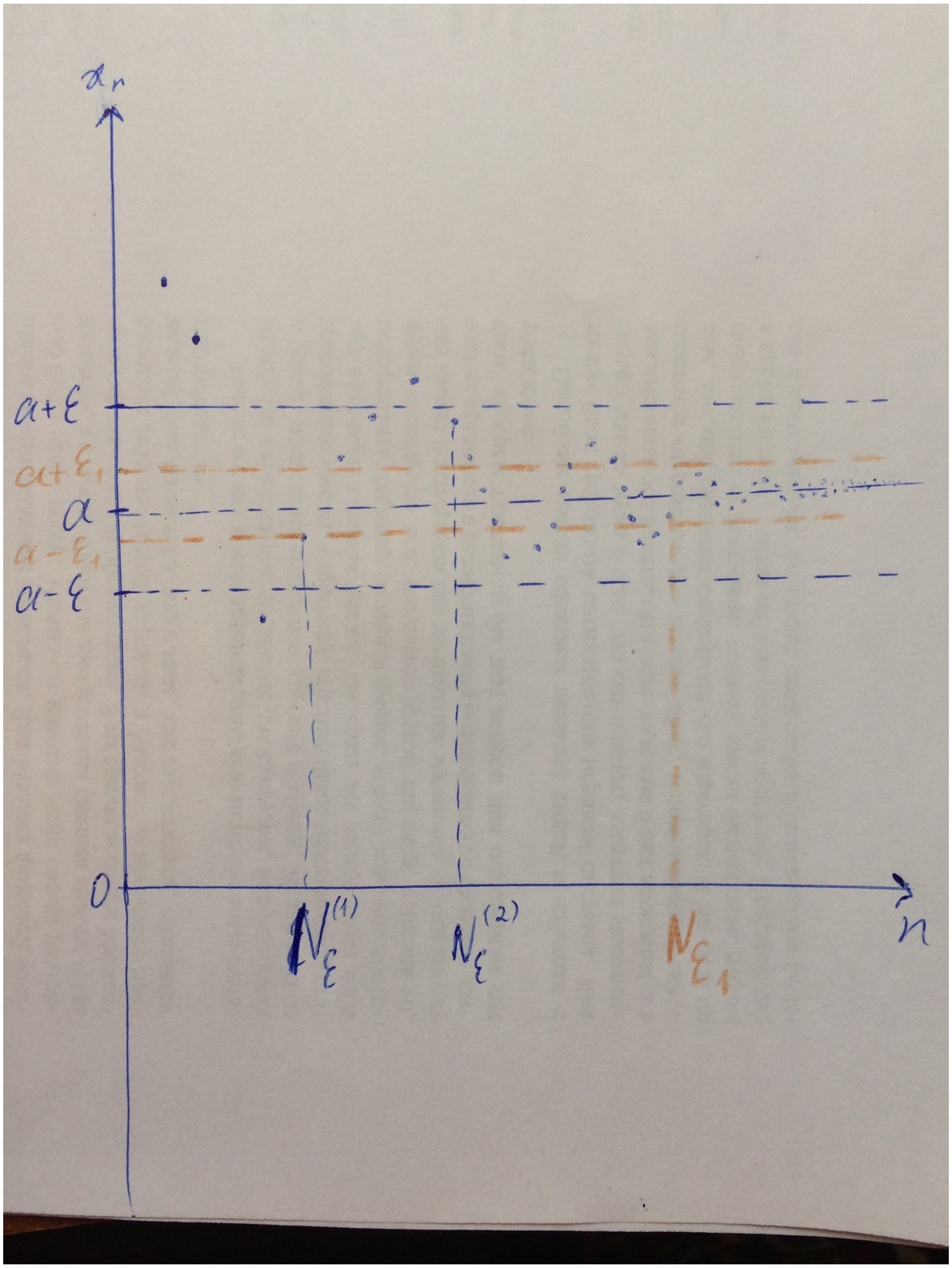

Рис. 1: Предел последовательности

Пример 2. Доказать по определению, что 1 - предел последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}$.

Доказательство:

Опять же будем искать $N(\varepsilon)$, решая неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$, где a = 1 уже теперь.

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

значит, в первом приближении,

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Теперь проведем нашу процедуру округления вверх до ближайшего целого и прибавления 1: $N(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil - 1 + 1 = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. Нашли. Получается, выполняется определение предела последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |1 - x_n| < \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

Пример 3. Доказать по определению, что последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

Доказательство:

Расходится-значит предела либо нет, либо он бесконечен. Мы видим, что члены последовательности либо равны 1(члены с четными номерами), либо -1 (с нечетными номерами), то есть нет такого, что начиная с некоторого номера весь хвост последовательности лежит в окрестности некоторого числа: вплоть до бесконечности половина членов = 1, а половина -1, и они нигде не группируются. Значит, судя по всему, предела нет. Покажем это.

Напомним определение того, что a - предел последовательности a_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |a - a_n| < \varepsilon$$

Напишем теперь утверждение, что a - не предел последовательности a_n. Это будет отрицанием того, что a - предел. То есть надо построить отрицание кванторного утверждения. Для этого все кванторы $\forall$ надо заменить на $\exists$, а все $\exists$ на $\forall$. Также неравенства надо заменить на противоположные. Кроме неравенства в $\forall n \geqslant N_\varepsilon$, потому что оно так сказать монолитно прилеплено к квантору. То есть в таких монолитных кусках меняем квантор, а неравенство остается. В итоге получаем утверждение, что a - не предел a_n:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geqslant N : |a - a_n| \geqslant \varepsilon$$

Подчеркну, что N не зависит от ε в отрицании.

Теперь запишем, что никакое число не является пределом (то, что нам нужно доказать):

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geqslant N : |a - a_n| \geqslant \varepsilon$$

Докажем это утверждение. Возьмем для начало любое $a < 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда в ε-окрестность числа a, то есть в интервал $(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2})$ точно не влезут все члены с четными номерами (они все равны 1). Значит, $\forall N \exists n$-четное $\geqslant N : |a - a_n| \geqslant \varepsilon$. Аналогично для $a \geqslant 0$ возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда в ε-окрестность числа a, то есть в интервал $(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2})$ точно не влезут все члены с нечетными номерами (они все равны -1). Значит, $\forall N \exists n$-нечетное $\geqslant N : |a - a_n| \geqslant \varepsilon$. Значит, выполняется:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geqslant N : |a - a_n| \geqslant \varepsilon$$

Значит, никакое число a не может быть пределом последовательности $a_n = (-1)^n$. Значит, эта последовательность расходится. Чтд.

Теорема (единственности). Числовая последовательность не может иметь более одного предела.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство:

Последовательность a_n сходится, значит у нее есть предел. Пусть этот предел равен а: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$. То есть для любого ε выполняется это условие. Значит, для $\varepsilon = 1$ тоже выполняется, т.е. $for \quad \varepsilon = 1 \exists N(1) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(1) \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$. Следовательно, $a - 1 < a_n < a + 1 \; \forall n \geqslant N(1)$

Пусть $b_1 = max\{a + 1, a_1, a_2, ..., a_{N(1)-1}\}$. Мы можем так лихо найти максимум из этих элементов, потому что их конечное число(n_1 штук). Очевидно, что a_n ограничена b_1 сверху. То, что она ограничена снизу, доказывается аналогично. Последовательность ограничена, если она ограничена сверху и снизу. Ч.т.д.

Обратное утверждение неверно: не всякая ограниченная последовательность сходится. Это можно показать на примере последовательности $a_n = (-1)^n$. Она ограничена, очевидно, но не сходится (см. пример 3).

Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, тогда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;
3. Если $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Замечание. $a \in \mathbb{R}$ значит, что a-действительное число, а значит, не может быть равно бесконечности, что важно. То есть пределы последовательностей a_n и b_n должны существовать и быть конечными, чтобы выполнялись свойства, связанные с арифметическими операциями!!!

Пример 4. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n+4}{5n^3+6n^2+7n+9}$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n+4}{5n^3+6n^2+7n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(3+5/n+4/n^3)}{n^3(5+6/n+7/n^2+9/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+5/n+4/n^3}{5+6/n+7/n^2+9/n^3} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3) + \lim\limits_{n\to\infty}(5/n) + \lim\limits_{n\to\infty}(4/n^3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(5) + \lim\limits_{n\to\infty}(6/n) + \lim\limits_{n\to\infty}(7/n^2) + \lim\limits_{n\to\infty}(9/n^3)} = 3/5$$

Заметьте, что каждый из переходов, связанных с арифметическими операциями, имеет место: пределы итоговых последовательностей всех существуют. Вообще говоря, в дальнейшем, если не просят подробно считать, то можно считать устно пределы такого типа: если старшая степень в знаменателе выше, чем в числителе, то предел равен нулю, если ниже то бесконечности, а если равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях в числителе и знаменателе (как было в этом примере).

Пример 5. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$

Решение:

В номерах такого типа помогает домножение на сопряженные.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(\sqrt{1+1/n}+1)} = \frac{1}{2}$$

Замечание. Посчитать этот пример, помахав руками, сказав как все очевидно и равно нулю (как кажется на первый взгляд) нельзя: пределы считаются, как видно из примера 4, с помощью свойств пределов, связанных с арифметическими операциями. В этих свойствах есть важное условие: например, предел суммы равен сумме пределов только если эти 2 предела существуют и конечны. В этом же примеры пределы n и $\sqrt{n^2 - n}$ бесконечны.

Замечание. Часто в номерах встречается не квадратных, а кубический корень. В этом случае надо домножать на "кубические сопряженные": по формулам $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ и $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Таким трюком нужно пользоваться не только в номерах на нахождение предела, так что будьте бдительны и имейте его на вооружении.

Замечание. В этом примере мы лихо занесли предел под знак корня, хотя у нас нет теоремы, что так можно делать. Давайте докажем, что это законно, т.е. что если $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = a$, то $\underset{n\to\infty}{lim} \sqrt{a_n} = \sqrt{\underset{n\to\infty}{lim} a_n} = \sqrt{a}$ ($a \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$):

1). при $a \neq 0$.

Поскольку $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = a$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \hookrightarrow |a - a_n| < \varepsilon$$

Мы хотим доказать, что $|\sqrt{a} - \sqrt{a_n}| < \varepsilon$. Домножим в выражении ниже числитель и знаменатель на сопряженные: $\sqrt{a} + \sqrt{a_n}$. Имеем:

$$|\sqrt{a} - \sqrt{a_n}| = \frac{|a - a_n|}{\sqrt{a} + \sqrt{a_n}} \leqslant \frac{|a - a_n|}{\sqrt{a}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$$

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \hookrightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{a_n}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$$

В общем-то, ч.т.д.: нету разницы, $< \varepsilon$ или $< \varepsilon$ разделить на какую-то константу, все равно ε сколь угодно мало. Все равно, потому что для каждого эпсилон мы можем подобрать нужный нам $N(\varepsilon)$. К примеру, если нам прям хочется, чтобы было $< \varepsilon$, а не $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$, подправим зависимость $N(\varepsilon)$: возьмем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{N}(\varepsilon) = N(\sqrt{a}\varepsilon) : \forall n \geqslant \bar{N} \hookrightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{a_n}| < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

2). при $a = 0$: дано $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$
Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \hookrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

Вместо $N(\varepsilon)$ возьмем $N(\varepsilon^2)$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon^2) : \forall n \geqslant N \hookrightarrow |a_n| < \varepsilon^2$$

В неравенстве $|a_n| < \varepsilon^2$ возьмем корень из обеих частей. Имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon^2) : \forall n \geqslant N \hookrightarrow \sqrt{|a_n|} < \varepsilon$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$, ч.т.д.

Свойства пределов, связанные с неравенствами. Лемма о двух милиционерах:

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,\ \underset{n\to\infty}{lim} a_n = \underset{n\to\infty}{lim} c_n = a \Rightarrow \exists \underset{n\to\infty}{lim} b_n = a$$

Также она называется теоремой о зажатой последовательности. Она также выполняется, если последовательность зажата между другими двумя не для всех членов, а только начиная с некоторого номера.

Пример 6.0 Доказать, что $\underset{n\to\infty}{lim}(\frac{1}{2})^n = 0$

Доказательство:

$$0 \leqslant |(\frac{1}{2})^n| < \frac{1}{n}$$

$$\underset{n\to\infty}{lim} 0 = \underset{n\to\infty}{lim}(1/n) = 0 \Rightarrow \exists \underset{n\to\infty}{lim}(\frac{1}{2})^n = 0 \text{ по лемме о 2 ментах, ч.т.д.}$$

Пример 6.1 Доказать: $\underset{n\to\infty}{lim} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 1$

Доказательство:

Для начала напомним неравенство Бернулли, которое понадобится для решения этой задачи: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ (неравенство справедливо $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant -1$.)

Введем новую последовательность $\{\alpha_n\} = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Из введенных обозначений следует, что $a = (\alpha_n + 1)^n \geqslant n\alpha_n$. Последняя оценка получена с помощью неравенства Бернулли. Из нее следует, что $0 \leftarrow 0 < \alpha_n \leqslant \frac{a}{n} \to 0$. Следовательно, по теореме о двух милиционерах $\underset{n\to\infty}{lim} \alpha_n = 0$. Следовательно, по свойству пределов, связанному с арифметическими операциями, $\underset{n\to\infty}{lim} \sqrt[n]{a} = 1 + \underset{n\to\infty}{lim} \alpha_n = 1$, ч.т.д.

Пример 6.2 Доказать: $\underset{n\to\infty}{lim} q^n = 0$, при $|q| < 1$

По определению нужно показать, что

$$|q|^n < \varepsilon$$

Или что

$$(\frac{1}{|q|})^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Обозначим $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, $\alpha \geqslant 0$. Тогда, воспользовавшись в одном переходе неравенством Бернулли, имеем:

$$(\frac{1}{|q|})^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$$

То есть при $n > \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$ выполняется неравенство $1 + \alpha n > \frac{1}{\varepsilon}$, а значит, и неравенство $(\frac{1}{|q|})^n > \frac{1}{\varepsilon}$ тем более.

Значит, выполняется определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)\rceil + 1 : \forall n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |0 - a_n| = |a_n| < \varepsilon.$$

Значит, предел такой последовательности $= 0$, ч.т.д.

Для решения следующего примера вспомним Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Запишем его для (1+x), причем x>0:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Заметим, что, т.к. в этом выражении все члены >0, то если мы уберем все и оставим только 1, выражение только уменьшится:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \geqslant C_n^2 x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Имеем таким образом неравенство:

$$(1+x)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Данное неравенство выполняется при $n \geqslant 2$.

Пример 6.3 Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Доказательство:

Как и в предыдущей задаче, пусть $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогда $n = (1+\alpha_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ при $n \geqslant 2$. (следует из Бинома Ньютона).

Заметим, что $n-1 \geqslant \frac{n}{2}$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, $n = (1+\alpha_n)^n \geqslant \frac{n^2\alpha_n^2}{4}$. Из этого неравенства: $\alpha_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$. При этом $\alpha_n \geqslant 0$. Следовательно, опять же по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1$, ч.т.д.

Пример 6.4. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ (a>1)

Доказательство:

$a^n = (1+a-1)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geqslant \frac{n^2}{4}(a-1)^2$, $n \geqslant 2$

Следовательно, $0 \leqslant \frac{n}{a^n} \leqslant \frac{4}{n(a-1)^2} \to 0, n \to \infty$, следовательно, по теореме о двух милиционерах, ч.т.д.

Пример 6.5. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$

Доказательство:

Докажем, сведя этот пример к примеру 6.4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{(a^{1/k})^n})^k = [\text{пусть } b = a^{1/k}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{b^n})^k = [\text{т.к. k конечное число и в силу примера 3}] = 0$$

Пример 6.6. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

Доказательство:

Заметим, что при $k \geqslant 4$ $\frac{2}{k} \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, при $n \geqslant 4$:

$$0 \leqslant \frac{2^n}{n!} = \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot \dots \cdot 2}{4\cdot \dots \cdot n} \leqslant \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^{n-3} = \frac{32}{3}(\frac{1}{2})^n \to 0, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание. Эти пределы (и мб еще парочку, которые встретятся потом, например, так называемый "замечательный предел") нужно уметь доказывать как считать, а также уметь пользоваться ими.

Посчитаем теперь пределы попроще и менее теоретические. Начнем с предела дроби типа "многочлен на многочлен".

Пример 6.7. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+n^2 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$

Решение:

В целом, алгоритм тот же, вынести в числителе и знаменателе за скобку то, что больше всего остального.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+n^2 2^n-1}{n^4+(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^2(1+n^2/2^n-1/4^n)}{(n!)^2(n^4/(n!)^2+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^2/2^n - 1/4^n}{1 + (n^2/n!)^2} = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

В предпоследнем неравенстве были использованы следующие факты:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$
- $0 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1)} \frac{1}{(n-2)!} \leqslant 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$ по теореме о двух милиционерах.

Пример 6.8. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n2^n}$.

Когда видим пример такого типа, стараемся вынести из-под корня самый большой член. Таковым является 3^n, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(3/2)^n} = 0$ (см. пример 6.4). Тогда получаем, вынеся из-под корня самого толстого:

$$3 \leqslant x_n = 3\sqrt[n]{1 + n(\frac{2}{3})^n} \leqslant 3(1 + n(\frac{2}{3})^n) \to 3(1 + 0) = 3$$

По теореме о 2 милиционерах опять же получаем, что предел $= 3$.

Пример 6.8.1. То же самое, почти =)Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n}$.

$$3 \leftarrow 3(1 - n(\frac{2}{3})^n) \leqslant x_n = 3\sqrt[n]{1 - n(\frac{2}{3})^n} \leqslant 3$$

Пример 7. Доказать, что если последовательность z_n сходится, то и последовательность средних арифметических ее членов $w_n = (z_1 + z_2 + ... + z_n)/n$ также сходится, и притом к тому же пределу, что и сама последовательность z_n.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Для любых натуральных чисел n_0 и $n > n_0$ выполняется:

$$w_n - z_0 = \frac{z_1 + z_2 + ... + z_n}{n} - z_0 = \frac{z_1 + \cdots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} + \frac{(z_{n_0+1} - z_0 + \cdots + (z_n - z_0))}{n}$$

По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 |z_n - z_0| < \varepsilon/2$.

Поскольку $z_1 + \dots + z_{n_0} - n_0 z_0$ - фиксированное число, а $\underset{n\to\infty}{lim} 1/n = 0$, то существует такой номер m_0, что для всех $n > m_0$ выполняется $\frac{z_1+\dots+z_{n_0}-n_0 z_0}{n} < \varepsilon/2$.

Положим $n_\varepsilon = max\{n_0, m_0\}$ и $n > n_\varepsilon$, тогда:

$$|w_n - z_0| \leqslant |\frac{z_1 + \dots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n}| + |\frac{(z_{n_0+1} - z_0 + \dots + (z_n - z_0))}{n}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n} < \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема(Вейерштрасса) о существовании предела монотонной ограниченной последовательности: Монотонная, ограниченная последовательность имеет предел, равный ее точной верхней грани, если она возрастает, и нижней, если она убывает. В бесове это теорема 1 из параграфа 2.4.

С помощью данной теоремы можно доказать, к примеру, существование предела последовательности $\{1/n\}$, а также существование пределов более сложно заданных последовательностей. 2 примера ниже иллюстрируют применение этой теоремы. Обратите на них внимание: они могут быть в письменной кр и экзамене!

Пример 8. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

Доказать: данная последовательность сходится и найти ее предел

Доказательство:

0) Этот шаг нужно делать на черновичке, чтобы понять, чему равен предел и что нужно доказывать.

Если мы докажем, что последовательность сходится, то $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = \underset{n\to\infty}{lim} x_{n+1} = A$, где А-предел последовательности. (если последовательность сходится, то члены на бесконечности "почти не отличаются").

Из этого условия:

$$\underset{n\to\infty}{lim} x_{n+1} = A = \sqrt{2 + \underset{n\to\infty}{lim} x_n}$$

$$A = \sqrt{2 + A}$$

$$A^2 - A - 2 = 0$$

$A = 2$ (отрицательный корень не подходит, т.к. все члены больше нуля)

1) Чтобы воспользоваться теоремой Вейерштрасса, нужно доказать, что последовательность монотонна и ограничена. Исследуем на монотонность:

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\sqrt{2 + x_n} > x_n$$

$$2 + x_n > x_n^2 \text{ (переход равносильный, т.к. все члены положительны)}$$

$$x_n \in (0, 2) \text{ (т.е. от 0 до 2 последовательность возрастает)}$$

2) Покажем, что все члены последовательности <2, т.е. ограниченность сверху.

$$x_{n+1} < 2$$

$$\sqrt{2 + x_n} < 2$$

$$2 + x_n < 4$$

$$x_n < 2$$

Т.е. если предыдущий член последовательности <2, то и следующий <2. $x_1 = \sqrt{2} < 2$, следовательно, все $x_n < 2$.

3) Т.о., последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, она имеет предел.

4) (Настала пора переписать с черновичка пункт 0)).

В силу сходимости:

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = A = \sqrt{2 + \lim_{n \to \infty} x_n}$$

$$A = \sqrt{2 + A}$$

$$A^2 - A - 2 = 0$$

$A = 2$ (отрицательный корень не подходит, т.к. все члены больше нуля)

Ответ: 2.

Замечание. Если просят найти точную верхнюю грань, а не предел, то по той же теореме Вейерштрасса она равна пределу. Если просят найти еще и нижнюю грань, то, т.к. последовательность возрастает, она просто-напросто равна x_1.

Пример 9. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_1 > 0$; $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, a>0.

Доказать: данная последовательность сходится и найти ее предел.

Решение:

0). Аналогично на черновичке находим предварительно предел.

$$A = \frac{1}{2}(A + \frac{a}{A})$$

$$A = \sqrt{a}$$

1). Исследуем на монотонность.

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\frac{a}{2x_n} > \frac{x_n}{2}$$

$$x_n^2 < a$$

$$x_n < \sqrt{a} \text{ при таких условиях возрастает}$$

2). Для начала вспомним о паре полезных неравенств, которые я бы посоветовал запомнить:

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \tag{1}$$

$$x + \frac{a}{x} \geqslant 2\sqrt{a} \tag{2}$$

Доказываются они элементарно переносом всего в левую часть и выделением полного квадрата.

Исследуем теперь на ограниченность. Посмотрим, когда $x_{n+1} < \sqrt{a}$

$$x_{n+1} < \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) < \sqrt{a}, \text{ что противоречит неравенству (2)}$$

Получается, x_{n+1} всегда $> \sqrt{a}$.

3). Т.о., последовательность ограничена снизу и при таких значениях x_n убывает. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, у нее есть предел.

4).

$$\underset{n\to\infty}{lim} x_{n+1} = A = \sqrt{2 + \underset{n\to\infty}{lim} x_n}$$

$$A = \frac{1}{2}(A + \frac{a}{A})$$

$$A = \sqrt{a}$$

Ответ: $\sqrt{a}$

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Для начала дадим определение ε-окрестности $+\infty$ и $-\infty$: Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty)$, $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon;)$. Тогда дадим определение: что значит, что предел равен $+\infty$ или $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow a_n > \varepsilon$$

Это определение логичное: оно как и для конечного предела: для сколь угодно малой эпсилон-окрестности предела существует номер, начиная с которого весь хвост последовательности лежит в этой эпсилон-окрестности.

Пример последовательности, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: $a_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow a_n < -\varepsilon$$

Пример последовательности, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: $a_n = -n$

Определение. Расширенное множество действительных чисел $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Определение. Последовательность называется сходящейся в расширенном числовом множестве, если у нее существует $\lim_{n\to\infty} a_n \in \bar{\mathbb{R}}$.

То есть последовательность $a_n = n$ расходится. Под расходится без уточнений где понимается расходится в $\mathbb{R}$. Если вас спросят, сходится ли или расходится последовательность, то имеют в виду в $\mathbb{R}$, то есть если ее предел бесконечность, то ответ: расходится, т.к. предел не конечен. Но если уточнить, что речь идет про $\bar{\mathbb{R}}$, то в нем $a_n = n$ сходится.

Определение. Числовая последовательность называется бесконечно большой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$$

В этом случае говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Последовательности n и $-n$ являются бесконечно большими, очевидно. Рассмотрим последовательность $n(-1)^n$. Она тоже будет бесконечно большой, хотя ее предел не $+\infty$ и не $-\infty$. У нее предел просто ∞, без знака.

Наряду с $\bar{\mathbb{R}}$ рассматривается множество $\hat{\mathbb{R}} = \bar{\mathbb{R}} \cup \infty$.

Утверждение. Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Но не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Доказательство:

Пусть последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая. Докажем, что она неограничена. Последовательность бесконечно большая $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$$

Заметим, что определение неограниченности (отрицание того, что $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| < \varepsilon$):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_{N(\varepsilon)}| > \varepsilon$$

следует из этого утверждения. Ч.т.д.

Теперь докажем, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Последовательность $x_n = nsin(\pi n/2)$ не имеет предела даже в расширенном множестве действительных чисел(т.к.

у нее есть подпоследовательность, равная нулю, то есть бесконечно членов вокруг нуля, и подпоследовательность, стремящаяся к бесконечности, а обе эти бесконечных множества членов, расстояние между которыми бесконечность, мы не сможем впихнуть в малую ε-трубку), значит, не бесконечно большая (для этого нужно было бы существование предела и равенство его бесконечности), но при этом эта последовательность является неограниченной. Ч.т.д.

Определение. Числовая последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен 0, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : |a_n| < \varepsilon$$

Давайте подумаем, что станет с этим определением, если убрать из него модуль:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : a_n < \varepsilon$$

В таком случае последовательность $-1 - (-1)^n$, которая расходится, будет удовлетворять этому определению, но не будет при этом бесконечно малой.