Семинар 1. Числовые множества. Комплексные числа.

Скубачевский Антон

10 сентября 2022 г.

1 Числовые множества

Вам должны быть известны следующие числовые множества: натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых $\mathbb{Z}$, рациональных $\mathbb{Q}$, действительных $\mathbb{R}$, комплексных $\mathbb{C}$.

Следует отметить, что 0 не входит в множество натуральных чисел.

Множество рациональных чисел вводится как числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, причем данная дробь должна быть несократима. q берем натуральным, а не целым, чтобы ноль в знаменателе исключить. Для иллюстрации определения давайте решим задачу:

Пример 0. Доказать, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Доказательство:

Будем доказывать от противного. Предположим, $\sqrt{2}$ рационально. Тогда оно представимо в виде:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \text{дробь несократима.}$$

Тогда $p = q\sqrt{2} \ \Rightarrow\ p^2 = 2q^2 \ \Rightarrow p$ делится на 2. То есть представимо в виде $p = 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Подставим это в равенство $p^2 = 2q^2$. Получим $4k^2 = 2q^2 \ \Rightarrow\ q^2 = 2k^2 \ \Rightarrow q$ делится на 2, т.е. представимо в виде $q = 2m$, $k \in \mathbb{N}$. Подставим $p = 2k$ и $q = 2m$ в представление $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Получим $\sqrt{2} = \frac{2k}{2m}$. То есть дробь совратима. А по предположению несократима. Противоречие. Следовательно, $\sqrt{2}$ не является рациональным, ч.т.д.

Множество действительных чисел вводится при помощи около 15 аксиом. Это очевидные факты, типа того, что $x+y = y+x$, называемого одной из четырех аксиом сложения. Все эти аксиомы, кроме последней, называемой аксиомой непрерывности, и отличающей действительные числа, выполнены и для рациональных. Аксиома непрерывности говорит нам о том, что действительные числа очень плотно напиханы на числовую ось: между любыми двумя действительными числами полно как рациональных, так и иррациональных, и нельзя ввести понятие "соседнего" числа поэтому. Все, что можем сказать, это что иррациональных чисел гораздо больше, чем рациональных. Но вот между любыми двумя сколь угодно близкими числами сколько угодно рациональных, и сколько угодно иррациональных.

Приведем эту самую важную аксиому непрерывности:

Аксиома непрерывности (принцип Дедекинда). Пусть A, B – непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$.

Прокрутите эту штуку в голове, и поймите, что это очевидный факт. Он значит, что между любыми двумя действительными множествами можно впихнуть действительное число.

Значки $\forall$ и $\exists$ называются кванторами. $\forall$ значит "для любого". Это перевернутая английская буква А, первая буква слова All, что значит как раз все. $\exists$ значит существует. Это перевернутая английская буква E, первая буква слова Exists, что значит существует. Также в кванторных утверждениях можно встретить “, “ (не поверите, запятая); “ : “(такое, что); “ $\hookrightarrow$ “(выполняется). Это своеобразные знаки препинания, их ставим на свой вкус.

Давайте покажем, что принцип Дедекинда не выполняется для рациональных чисел. То есть между двумя рациональными множествами не всегда можно впихнуть рациональное число. Для этого рассмотрим

$$A = \{a : a \in \mathbb{Q},\ a > 0\ a^2 < 2\},$$

$$B = \{b : b \in \mathbb{Q},\ b > 0\ a^2 > 2\}.$$

Эти два множества разделяем $\sqrt{2}$. Но он не является рациональным числом, вот незадача. А любое другое число не подойдет: если возьмем любое число, меньшее $\sqrt{2}$, то между ним и корнем из двух найдется еще дофига рациональных чисел. Если возьмем число, большее $\sqrt{2}$, получим опять же между ними еще дофига рациональных чисел. Получается, принцип Дедекинда не выполняется для рациональных чисел, контрпример успешно приведен.

Множества могут быть счетными и несчетными. Счетное множество – множество, такое, что между ним и множеством натуральных чисел можно установить взаимнооднозначное соответствие. Отмечу важный факт: конечное множество НЕ является счетным! Оно является конечным. Также хотелось бы отметить, что объединение любого счетного числа счетных множеств счетно. Множество целых чисел, очевидно, счетно. Множество рациональных чисел также счетно. Доказательство этого факта можно найти в Бесове, 1.5 (занумероваать их с помощью таблицы, в строках которой стоит числитель рационального числа, а столбцах - знаменатель). Несчетное множество – бесконечное множество, не являющееся счетным. Множество действительных (и иррациональных и комплексных) чисел – несчетно.

Для доказательства этого приведем для начала теорему о вложенных отрезках.

Опр. Множество отрезков $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ...\}, -\infty < a_n < b_n < +\infty$ называется системой вложенных отрезков, если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n \in \mathbb{N}$, т.е. каждый отрезок содержит следующий за ним.

Теорема о вложенных отрезках. Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Данная теорема также называется Теоремой Кантора или принципом непрерывности Кантора. То есть ее можно постулировать в качестве аксиомы непрерывности вместо принципа Дедекинда (правда, прилепив к ней еще принцип Архимеда, но не суть), и уже из нее доказывать принцип Дедекинда. Но в нашей системе аксиом это теорема, а принцип непрерывности Дедекинда – аксиома, не будем от этого отходить. Ну и еще эта теорема, разумеется, не работает для множества рациональных чисел, только для действительных. Ну и она не работает для вложенных интервалов. Советую подумать над контрпримерами, они очевидные, и их на экзамене спрашивают.

Также есть теорема о стягивающейся системе вложенных отрезков.

Опр. Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется стягивающейся, если $\forall \varepsilon \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема. Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.

Множество действительных чисел несчетно. Даже множество чисел отрезка [0,1] несчетно (т.е. на нем действительных чисел больше, чем рациональных на всех числовой оси). Ну и, как следствие, все множество действительных чисел несчетно. Доказывается это утверждение с помощью:

Теорема (Кантор) Множество чисел отрезка [0,1] несчетно.

Доказательство:

Предположим противное, т.е. что множество точек отрезка [0,1] счетно. Тогда занумеруем их некоторым образом: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Покажем, что в этом случае мы придем к противоречию.

Сделаем это с помощью следующего алгоритма, состоящего из счетного числа шагов (равного количеству занумерованных точек):

1. Поделим отрезок [0,1] на 3 равные части. Оставим лишь одну из трех частей, ту, в которой не содержится точки x_1 а остальные 2 части выкинем. Концы оставшегося отрезка (который мы НЕ выкинули) обозначим a_1 и b_1.

То, как мы делим отрезок на каждом шаге, наглядно показано на рис.1.

2. Полученный отрезок $[a_1, b_1]$ аналогично поделим на 3 части и оставим лишь ту, в которой не содержится точки x_2. Полученный отрезок обозначим $[a_2, b_2]$.

Как можно видеть на рис.1, очередная точка может лежать и вне оставшегося отрезка (но, разумеется, на отрезке [0,1]). На рисунке это видно на шаге 3. В этом случае мы можем оставлять любой из 3 отрезков.

...

n. На n шаге в отрезке $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ оставим лишь ту треть, которая свободна от точки x_n. Получившийся отрезок обозначим $[a_n, b_n]$.

...

Напомню, что все отрезки по построению лежат в [0,1].

Число шагов = числу точек. В итоге, когда все шаги завершены, получили систему вложенных отрезков, причем ни одна из занумерованных точек (т.е. по предположению ни одна из точек отрезка [0,1]) не принадлежит этой системе. По теореме о вложенных отрезках система имеет хотя бы одну общую точку. Эта точка принадлежит отрезку [0,1]. Но при этом она по построению не принадлежит множеству занумерованных точек, т.е. при этом она одновременно НЕ принадлежит отрезку (ведь мы предположили, что в нем лишь счетное число точек, т.е. их можно перечислить, и этому множеству точек она не принадлежит, а значит не принадлежит отрезку). Получили, что эта общая точка системы вложенных отрезков, существующая по теореме о вложенных отрезках, одновременно принадлежит и не принадлежит отрезку $[0, 1]$. Противоречие. Следовательно, предположение неверно, и множество действительных чисел, лежащих на отрезке [0,1], не может быть счетно. Значит оно несчетно. **Ч.Т.Д.**

Пояснение: отрезок делим на 3 части каждый раз, а не на 2, т.к. может оказаться, что очередная точка лежит на границе 2 отрезков, т.е. принадлежит обоим отрезкам одновременно. Например, если точка $x_1 = 2/3$, то мы можем смело выкинуть отрезки $[1/3, 2/3]$ и $[2/3, 1]$. А вот если бы мы делили на 2 части и, к примеру, x_1 был бы равен $1/2$, то он бы принадлежал бы обоим отрезкам, т.е. всему отрезку [0,1], и было бы непонятно, что выкидывать.

Замечание: теорем у тов. Кантора много, как и у Коши, например. Это не должно смущать.

Пример (Канторово множество): Данный весьма интересный пример показывает, что "мера"или, иначе говоря, длина множества, содержащего несчетное число точек, может быть равной нулю. Кстати, "мера"любого конечного или счетного множества точек равна нулю всегда.

Канторово множество строится следующим образом.

Шаг 1. Берем отрезок [0,1]. Делим на 3 равные части. Выкидываем середину.

Шаг 2. С каждым из 2 оставшихся отрезков ([0, 1/3] и [2/3, 1]) проводим те же операции: выкидываем середины. В нашем множестве останется 4 отрезка: [0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1].

С каждым из них проделываем аналогичную операцию, и так до бесконечности.

Посчитаем суммарную длину того, что мы выкинули. На n-м шаге мы выкидываем отрезки суммарной длиной $b_n = 2^{n-1}/3^n$. В самом деле, при шаге n = 1 мы выкинули $1/3$; на шаге n = 2 выкинули 2 отрезка по $1/9$, т.е. $2/9$, и т.д. Суммарные длины выкинутых отрезков образовывают геометрическую прогрессию с q = 2/3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-2/3} = 1$. Т.о., из отрезка [0, 1] (длины 1) мы выкинули множество суммарной длины 1. 1-1=0. Т.о., суммарная длина оставшегося множества = 0.

Убедимся теперь, что при этом в нашем множестве осталось несчет-

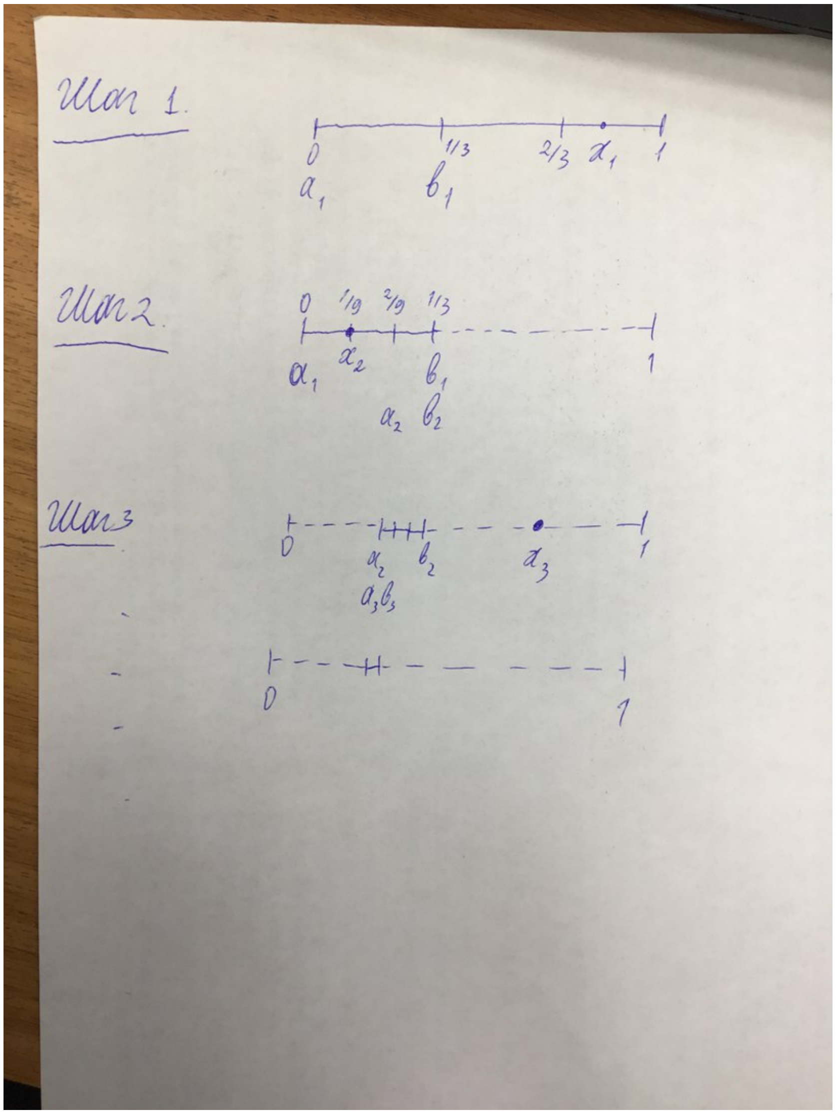

Рис. 1: Теорема Кантора

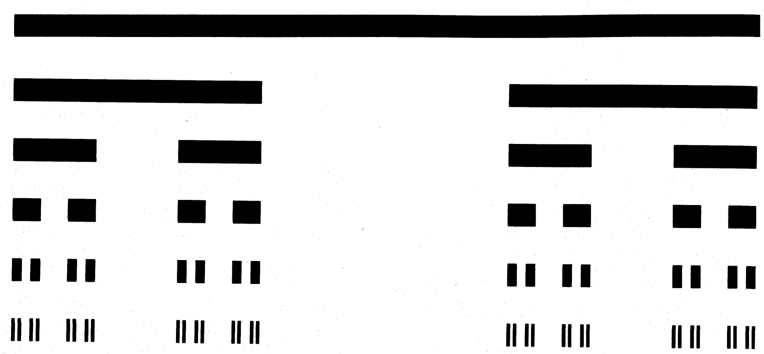

Рис. 2: Канторово множество

ное число точек. Будем задавать положение точки на нашем отрезке с помощью дробного числа в троичной системе: 0,... На шаге 1 если точка лежит на [0, 1/3], ставим 0 в разряд числа сразу после запятой. Если [1/3, 2/3], то 1. Else 2. Единица, впрочем, никогда появляться не будет, т.к. серединный отрезок не лежит в нашем множестве. На шаге 2, если точка лежит в "левом отрезке ставим 0 в следующий разряд, в правом - ставим 2. Например, если точка лежит на отрезке [2/3, 7/9] наше число в троичной системе 0,20. Если [8/9, 1], то 0,22=0,2. И т.д. Получили число в троичной записи. Заменим все 2 на 1, все равно 1 не встречаются. Получили множество всех чисел отрезка [0,1] в двоичной записи. Оно эквивалентно, как известно, множеству всех чисел отрезка [0,1] в десятичной записи, то есть множеству действительных чисел, которое несчетно, ч.т.д.

Иллюстрация построения канторова множества приведена на рис. 2.

2 Комплексные числа

Опр. Комплексное число - выражение вида $z = a + ib$, где i - "комплексная единица": $i^2 = -1$, а a и b - действительные числа. a называется действительной частью комплексного числа, а b - мнимой, и пишется $a = Re(z)$, $b = Im(z)$. Такая форма записи комплексного числа называется алгебраической. Подчеркну, что при этом определение $i = \sqrt{-1}$ неверно.

Таким образом, комплексное число характеризуется действительной и мнимой частями, так же, как и точка на плоскости характеризуется своими координатами по осям x и y. Поэтому вполне логична геометрическая форма представления комплексного числа: комплексное число - точка на плоскости с координатами (a, b).

Также комплексное число может быть представлено в тригонометрической форме: $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа, а φ - его аргумент. Вообще говоря, z это попросту расстояние от соответствующей точки на комплексной плоскости до 0 (начала координат), а φ - угол, отсчитываемый от оси икс против часовой стрелки (аналогично углам на привычном вам тригонометрическом круге). $|z| \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Будем также обозначать $|z|$ как r.

Для комплексного числа справедлива формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi.$$

То есть при $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ $e^{i\varphi} = 1, i, -1, -i$ соответственно.

Также справедлива формула Муавра:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(cos(n\varphi) + isin(n\varphi))$$

.

Операции сложения и вычитания для комплексных чисел: действительная часть суммы(разности) комплексных чисел равна сумме(разности) действительных частей, а мнимая - сумме(разности) мнимых. То есть если $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$, то $z = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Произведение комплексных чисел: $z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$[раскрываем скобки влоб и учитываем, что $i^2 = -1$] $= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2)$

Число, комплексно сопряженное для $z = a + ib$ вводится как: $\bar{z} = a - ib$

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Теперь можем ввести частное двух комплексных чисел: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ (домножили на сопряженные).

Кстати, модуль разности двух комплексных чисел равен $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, что в точности совпадает с формулой для расстояния между двумя точками на плоскости.

Пример 1. $z_1 = \sqrt{5} - i$; $z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

Найти сумму, разность, произведение и частное этих чисел, а также их модули и числа, комплексно сопряженные к z_1 и z_2.

Решение:

$z_1 + z_2 = 2\sqrt{5} - 3i$

$z_1 - z_2 = i$

$z_1 z_2 = (\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} - 2i) = 3 - 3i\sqrt{5}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}-2i)}{9} = \frac{7+i\sqrt{5}}{9}$

Пример 2. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих:

а) $|z - i| = 1$

Это множество всех точек комплексной плоскости (всех z), расстояние от которых до точки с координатами (0,i) равно 1. Это по определению окружность радиуса 1 с центром в точке i.

б) $1 < |z + 3 + i| < 3$

Это, очевидно, пересечение двух областей. Первая: $|z - (-3 - i)| > 1$. Аналогично пункту а, это множество точек плоскости, удаленных от точки $(-3, -i)$ более, чем на 1, т.е. все, что лежит вне окружности радиуса 1 с центром в этом точке. Вторая область: $|z - (-3 - i)| < 3$. Это все, что лежит внутри окружности радиуса 3 с центром в точке $(-3, -i)$. Пересечение этих двух областей дает кольцо.

в) $|z - 2 + i| \geqslant |z + 3 - 4i|$

$|z - (2 - i)| \geqslant |z - (-3 + 4i)|$, т.е. расстояние от z до $(-3, 4i)$ меньше расстояния от z до $(2, -i)$. По определению множество точек плоскости, таких, что расстояние от любой из них до точек A и B равны, это просто прямая. Следовательно, множество точек, которые ближе к A, чем к B, - полуплоскость, лежащая по одну сторону от прямой, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку A $(-3, 4i)$ B $(2, -i)$.

г) $|z|^2 - 6z - 6\bar{z} = 0$

Распишем $z = x + iy$

Тогда $x^2 + y^2 - 6(x + iy) - 6(x - iy) = 0$

$x^2 + y^2 - 12x = 0$

$(x - 6)^2 + y^2 = 36.$

Это окружность с центром в точке (6, 0) радиуса 6.

д) $|z - 1| = 2|z + 2|$

$|x - 1 + iy| = 2|x + 2 + iy|$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

$x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0$

$(x + 3)^2 + y^2 = 4.$

Это окружность с центром в точке (-3,0) радиуса 2.

На рис.3 приведены рисунки к п.а), б), в).

Пример окончен.

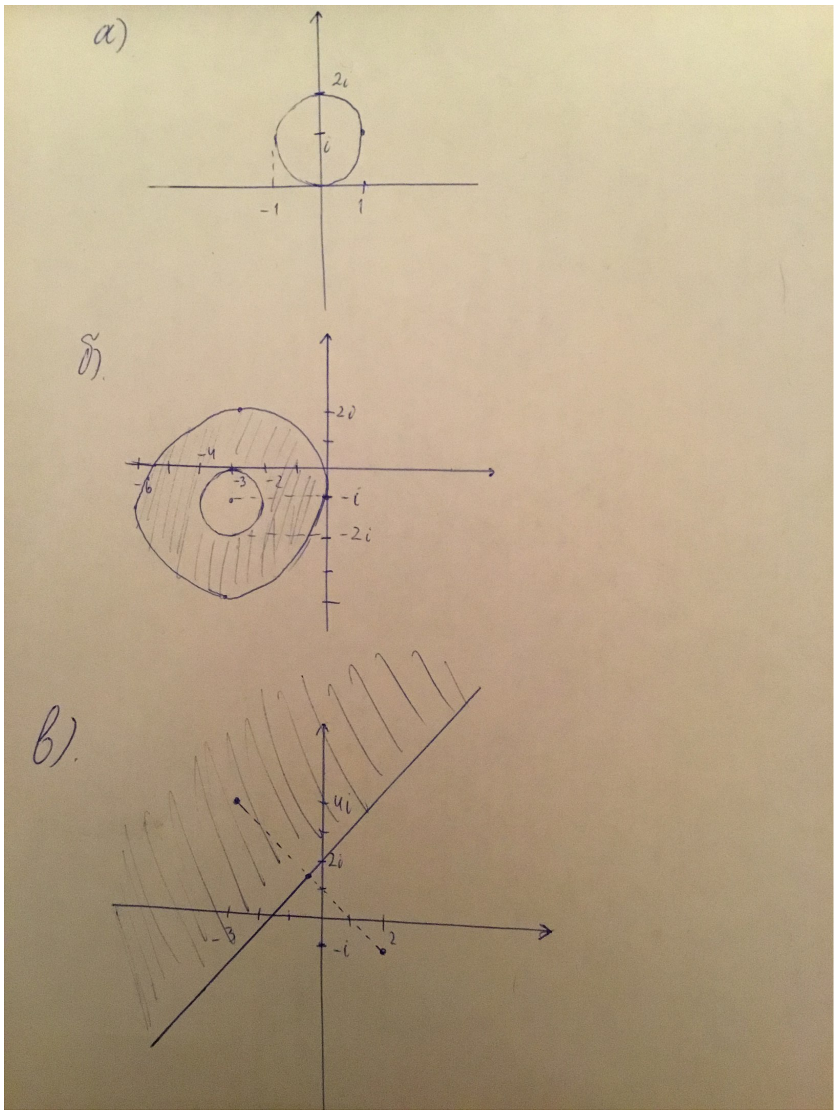

Рис. 3: рисунки к примеру 2

Вернемся к тригонометрической форме записи комплексного числа: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где $r = |z|$

С ее помощью решим уравнение $z^n = a$.

$r^n e^{in\varphi} = |a|e^{i\alpha}$, где α - аргумент a.

Чтобы решить данное уравнение, нужно приравнять модуль и аргумент комплексного числа. Напомню, как поступать с аргументом:

$e^{i\varphi} = e^{i\alpha} \leftrightarrow i\varphi = i\alpha + 2i\pi k$

Из условия равенства модуля и аргумента комплексных чисел, стоящих в левой и правой частях выражения, получаем:

$$\begin{cases} r^n = a \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Обращу внимание на то, что аргумент определен с точностью до $2\pi k$

Из системы имеем:

$$r = \sqrt[n]{|a|}$$

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

Корень n-й степени из $|a|$ уже не должен вызывать проблем, ведь это просто корень из действительного числа, то есть вполне известная нам функция.

Таким образом, данное уравнение, как и **всякое уравнение n-й степени, имеет ровно n комплексных корней**:

$$\{\sqrt[n]{a}\} = \{\sqrt[n]{|a|}(cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + isin(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n})); k \in 0, .., (n-1)\}$$

То, что всякое уравнение имеет РОВНО n комплексных корней, называется основной теоремой алгебры. Не путайте слова "комплексный"и "мнимый": комплексное число вполне может быть действительным, если его мнимая часть равна нулю. То есть уравнение n-й степени может иметь n действительных корней (если очень повезет). Например, обычное квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ является уравнением 2-й степени, поэтому имеет ровно 2 комплексных корня, являющихся действительными числами 2 и 3.

Пример 3. Решить уравнение $z^3 = -1$.

По формуле, приведенной выше, где $|a| = 1; \alpha = \pi$

$$z = \{\sqrt[3]{-1}\} = \{\sqrt[3]{|-1|}(cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}) + isin(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})); k \in 0, 1, 2\}$$

Таким образом,

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = -1$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Замечание. Уравнение $x^3 = -1$ имеет всего 1 корень в действительных числах: $x = -1$. С помощью деления в столбик или схемы Горнера получим, что исходное уравнение эквивалентно $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$, где многочлен во второй скобке не имеет действительных корней.

Покажем, как перейти от алгебраической к тригонометрической форме записи комплексного числа.

$$z = a + ib = |z|e^{i\varphi} = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$$

Мы знаем, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Осталось найти φ.

Из уравнения на 2 строчки выше имеем:

$$a + ib = |z|cos\varphi + i|z|sin\varphi$$

Следовательно,

$$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Пример 4. Найти аргументы комплексного числа

а) $z = 1 + i\sqrt{3} \to cos\varphi = \frac{1}{2} \to \varphi = \frac{pi}{3} + 2\pi k$ б) $z = -1 - i \to cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

В данном случае следует учесть четверть, чтобы, зная синус или косинус, верно найти угол. Чтобы понять, в какой четверти лежит точка, достаточно отметить точку на комплексной плоскости.

Пример 5. Записать в тригонометрической форме:

а) $z = -3i \to z = 3(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2})$ б) $z = \sqrt{3} - i \to z = 2(cos\frac{11\pi}{6} + isin\frac{11\pi}{6})$

Пример 6. Вычислить: $\frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4}$

Такие примеры просто решаются с помощью тригонометрической формы записи.

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4} = \frac{2^6 e^{2i\pi}}{4e^{-i\pi}} = -16$$