Опр. $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху,

$\exists M>0 : \forall n\in\mathbb{N} \mapsto a_n \le M$

Опр. $\{a_n\}$ - ограниченная, если она ограничена сверху и снизу:

Опр

$\{a_n\}$ - огранич. $\exists M>0 : \forall n\in\mathbb{N} \mapsto |a_n| \le M$

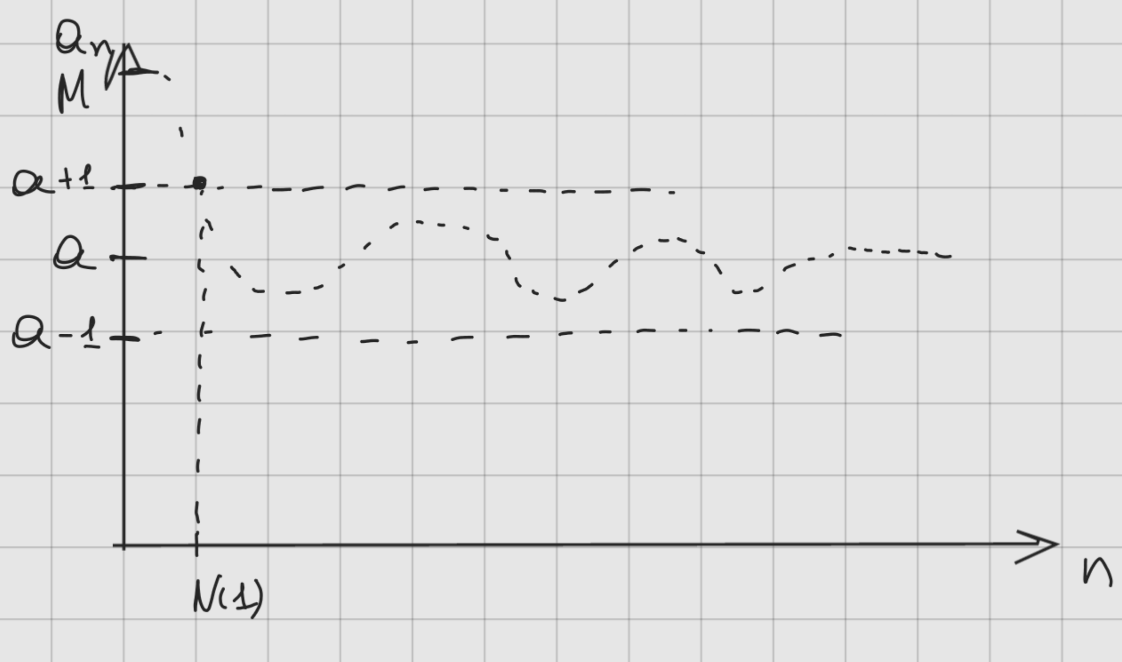
Опр. $M = \sup a_n \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N} \mapsto a_n \le M \\ \forall b<M : \exists n\in\mathbb{N} \mapsto a_n > b \end{cases}$

Th. Всякая сходящаяся (в мн-ве R) посл-ть ограничена

Док-во:

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

Покажем, что $\{a_n\}$ - огр. сверху



$\lim a_n = a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N \mapsto |a-a_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$n \to \infty$

$\Rightarrow$ при $\varepsilon = 1$ $\exists N(1): \forall n \geq N \hookrightarrow a_n < a+1$

Возьмём $M = \max\{a+1;\ a_1, a_2 \dots, a_{N(1)-1}\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| \leq M \Rightarrow a_n$ – огр. сверху $\Rightarrow$ ЧТД

Свойства пределов, связанные с нер-ми:

Th 1 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, где A и $B \in \overline{\mathbb{R}}$,

$A < B$. Тогда $\exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow a_n < b_n$

Th 2 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$; $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ и

$\exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq b_n$. Тогда $A \leq B$

Теорема говорит о том, что можно в неравенствах ставить lim

Th 3 (О зажатой посл-ти) Пусть $\exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow$

$a_n \leq b_n \leq c_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}$. **Тогда**

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A$$

Док-во:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(A)$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A: \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2 \mapsto c_n \in U_\varepsilon(A)$

$$A-\varepsilon \underset{N_1}{<} \underbrace{a_n \leq b_n \leq c_n}_{\text{начиная с } N} \overset{\text{с } N_2}{<} A+\varepsilon$$ — выполняется при $\forall n \geq \max\{N, N_1, N_2\}$

т.о. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{N}(\varepsilon): \forall n \geq \bar{N} \mapsto b_n \in U_\varepsilon(A)$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$