Вариант 11

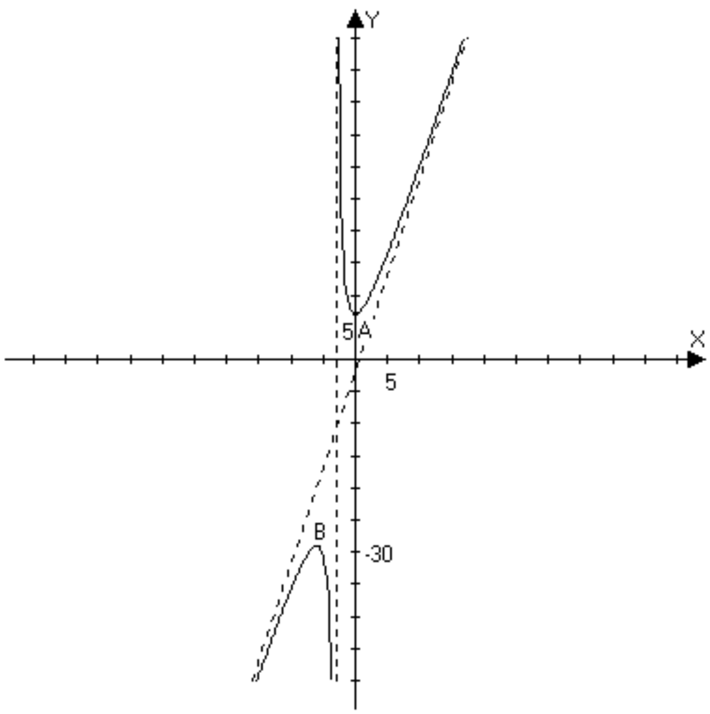
1. ④ $r(1) = (e\ 2\ 1)^T$, $r'(1) = (e\ 3\ 1)^T$, $r''(1) = (e\ 6\ 0)^T$, $[r',\ r'']|_{t=1} = (-6\ e\ 3e)^T$.

Ответ: $\dfrac{x-e}{-6} = \dfrac{y-2}{e} = \dfrac{z-1}{3e}$.

2. ④ Асимптоты: $y = 3x - 2$ при $x \to \infty$; $\qquad x = -3$.

$y' = 3 \cdot \dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$; $\quad y'' = \dfrac{54}{(x+3)^3}$.

$A(0,\ 7)$ — точка локального минимума; $B(-6,\ -29)$ — точка локального максимума.



3. ③

$$y^{(n)} = 1 \cdot (3x^2 - x - 7) \cdot \frac{1}{2}\left[e^{3+4x} - (-1)^n e^{-3-4x}\right] 4^n +$$

$$+ n \cdot (6x-1) \cdot \frac{1}{2}\left[e^{3+4x} - (-1)^{n-1} e^{-3-4x}\right] 4^{n-1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}\left[e^{3+4x} - (-1)^{n-2} e^{-3-4x}\right] 4^{n-2}.$$

4. ④ $f(x) = 2x + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (-3)^{k-1} \left[-6C_{1/4}^{k} - C_{1/4}^{k-1}\right] x^{5k+1} + o\left(x^{5n}\right)$, $x \to 0$.

5. ⑤ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{\frac{7x^3}{2} + o\left(x^3\right)} = \dfrac{2}{21}$.

6. ⑦ $\lim\limits_{x\to0} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)} - \dfrac{1}{1 - x^5 + o\left(x^5\right)}\right)\right)^{\frac{1}{x^2+o\left(x^2\right)}} =$

$= \lim\limits_{x\to0} \left(1 + \dfrac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2+o\left(x^2\right)}} = e^{1/3}$

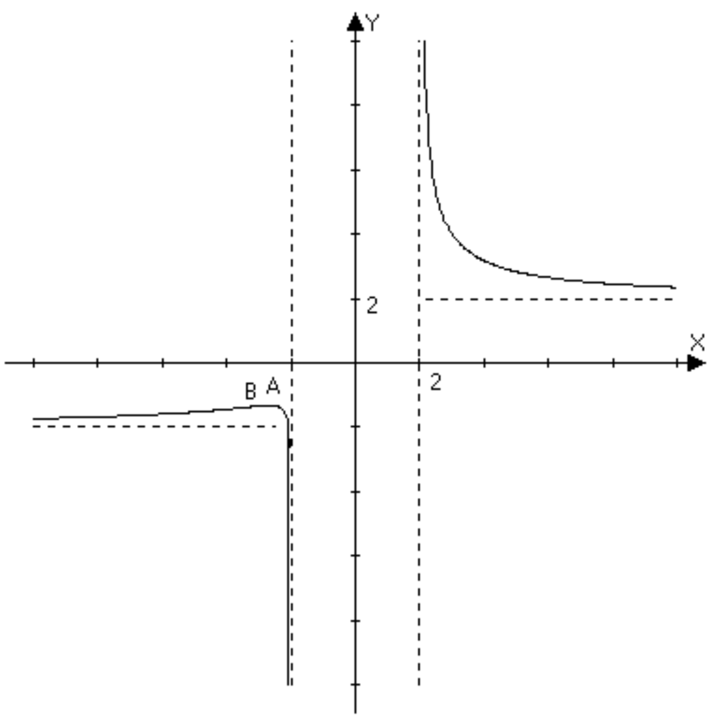
Вариант 11

7. ⑥ $D_y = \mathbb{R} \setminus [-2,\ 2]$.

Асимптоты: $y = 2$ при $x \to +\infty$; $y = -2$ при $x \to -\infty$; $x = 2$ при $x \to 2 + 0$; $x = -2$ при $x \to -2 - 0$.

$y' = -\dfrac{3x+8}{(x^2-4)^{3/2}}$; $y'' = 6 \cdot \dfrac{x^2+4x+2}{(x^2-4)^{5/2}}$.

$A\left(-\frac{8}{3},\ -\frac{7}{\sqrt{28}}\right)$ — точка локального максимума,
$B\left(-2-\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ — точка перегиба,



8. ③ **Ответ:** Это часть окружности радиуса 3/2 и кривизны 2/3.

9. ③ **Ответ:** Дифференцированием сводится к неравенству

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 1 - x^2 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{th}^2 x > 1 - x^2 \Leftarrow 0 < \operatorname{th} x < x$$

для $x > 0$.

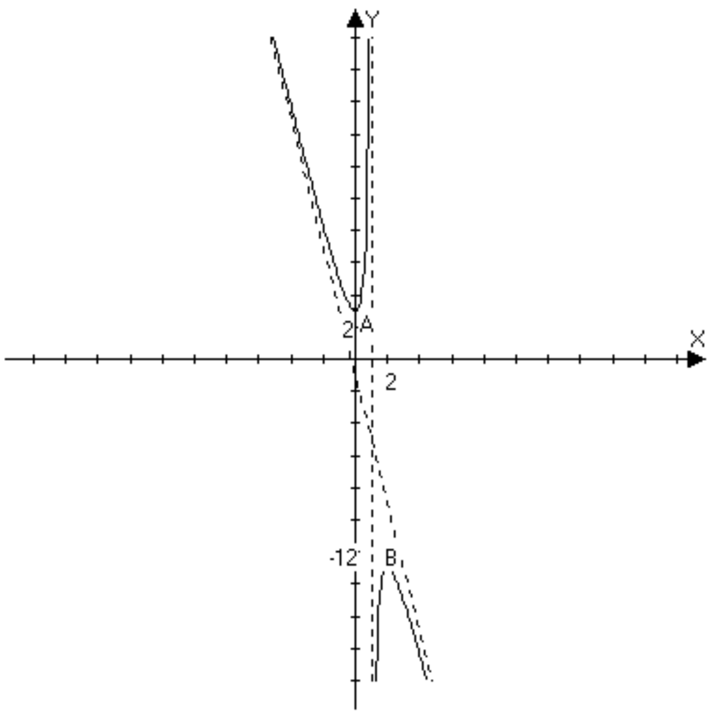
10. ④ **Ответ:** Заметим, что $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$. Из свойств квадратного трёхчлена следует, что f достигает минимума $f(x) = -3/2$ при $\cos x = -1/2 \Leftrightarrow x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. А максимума $f(x) = 3$ достигает при $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Также есть локальный максимум при $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. ④ **Ответ:** Да, как сумма равномерно непрерывных функций.

Вариант 12

1. ④ $r(0) = (1\ \ -3\ \ 0)^T$, $r'(0) = (0\ \ 0\ \ 1)^T$, $r''(0) = (-1\ \ 0\ \ -1)^T$, $[r',\ r'']|_{t=0} = (0\ \ -1\ \ 0)^T$.
Ответ: $x - 1 = 0$.

2. ④ Асимптоты: $y = -4x - 1$ при $x \to \infty$; $\qquad x = 1$.
$y' = -4 \cdot \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $\quad y'' = -\dfrac{8}{(x-1)^3}$.
$A(0,\ 3)$ — точка локального минимума; $B(2,\ -13)$ — точка локального максимума.



3. ③

$$y^{(n)} = -1 \cdot (2x^2 - 3x - 11) \cdot \left[\frac{(-1)^{n-1} n!}{(4+5x)^n} - \frac{(-1)^{n-1} n!}{(3+5x)^n}\right] 5^n -$$
$$-n \cdot (4x-3) \cdot \left[\frac{(-1)^{n-2}(n-1)!}{(4+5x)^{n-1}} - \frac{(-1)^{n-2}(n-1)!}{(3+5x)^{n-1}}\right] 5^{n-1} -$$
$$-\frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 \cdot \left[\frac{(-1)^{n-3}(n-2)!}{(4+5x)^{n-2}} - \frac{(-1)^{n-3}(n-2)!}{(3+5x)^{n-2}}\right] 5^{n-2}.$$

4. ④ $f(x) = 3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \left[9C_{1/5}^{k} + 2C_{1/5}^{k-1}\right] x^{4k} + o\left(x^{4n-1}\right),\ x \to 0.$

5. ⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = 2.$

6. ⑦ $$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)} - \frac{1}{1 - x^5 + o\left(x^5\right)}\right)\right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} = e^{-1/3}$$

Вариант 12

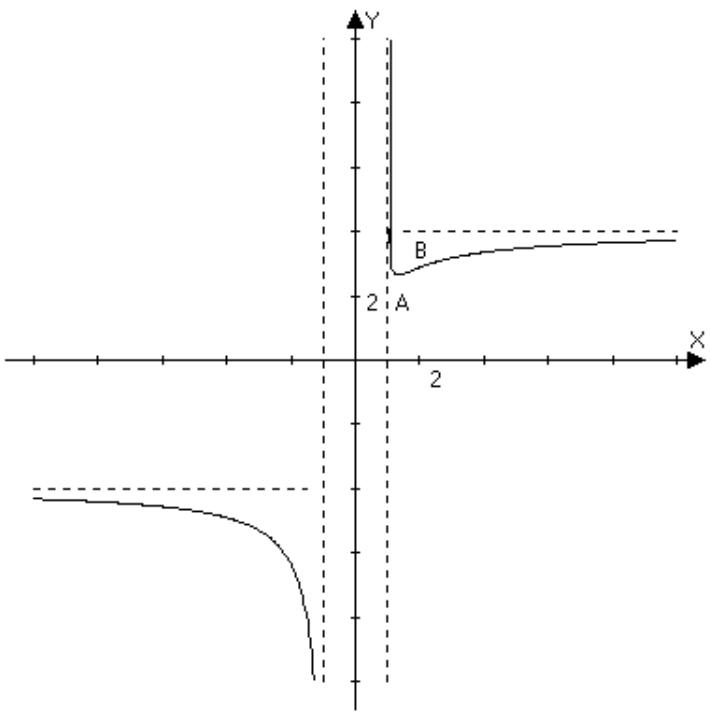
7. ⑥ $D_y = \mathbb{R} \setminus [-1,\ 1]$.

Асимптоты: $y = 4$ при $x \to +\infty$; $y = -4$ при $x \to -\infty$; $x = 1$ при $x \to 1 + 0$; $x = -1$ при $x \to -1 - 0$.

$y' = \dfrac{3x - 4}{(x^2 - 1)^{3/2}}$; $y'' = -3 \cdot \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{(x^2 - 1)^{5/2}}$.

$A\left(\dfrac{4}{3},\ \sqrt{7}\right)$ — точка локального минимума,

$B\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}\right)$ — точка перегиба,



8. ③ **Ответ:** Это часть окружности радиуса 2 и кривизны 1/2.

9. ③ **Ответ:** Дифференцированием сводится к неравенству

$$\frac{1}{\cos^2 x} > 1 + x^2 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x > 1 + x^2 \Leftarrow \operatorname{tg} x < x < 0$$

для $x < 0$.

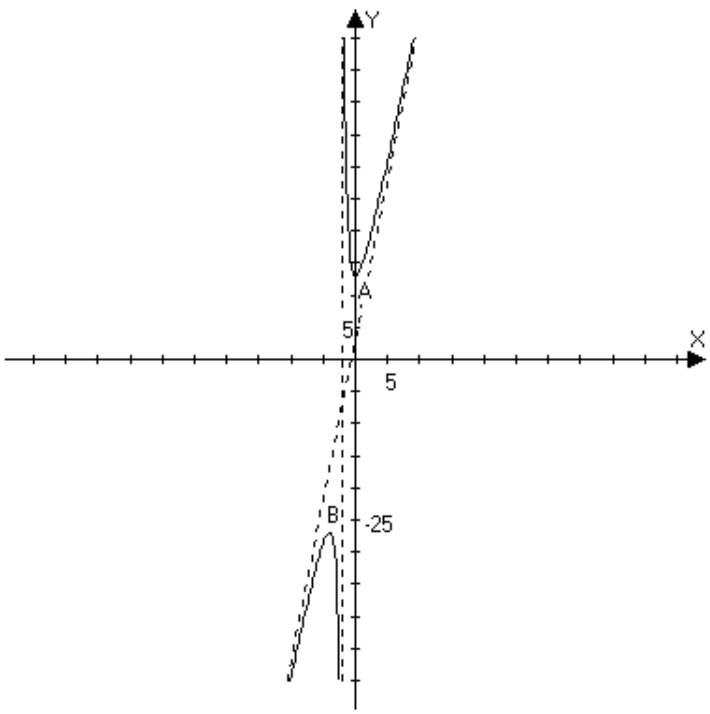
10. ④ **Ответ:** Заметим, что $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$. Из свойств квадратного трёхчлена следует, что f достигает минимума $f(x) = -3/2$ при $\sin x = -1/2 \Leftrightarrow x = -\pi/6 + 2\pi k$, $x = -5\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. А максимума $f(x) = 3$ достигает при $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Также есть локальный максимум при $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. ④ **Ответ:** Нет, как сумма равномерно непрерывной и не равномерно непрерывной.

Вариант 13

1. ④ $r(1) = (4\ \ -3\ \ 1)^T$, $r'(1) = (0\ \ 2\ \ 1)^T$, $r''(1) = (4\ \ 0\ \ 1)^T$, $[r',\ r'']|_{t=1} = (2\ \ 4\ \ -8)^T$.
Ответ: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$.

2. ④ Асимптоты: $y = 5x + 3$ при $x \to \infty$; $\qquad x = -2$.
$y' = 5 \cdot \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$; $\quad y'' = \dfrac{40}{(x+2)^3}$.
$A(0,\ 13)$ — точка локального минимума; $B(-4,\ -27)$ — точка локального максимума.



3. ③

$$y^{(n)} = 1 \cdot (x^2 + 2x - 5) \cdot \frac{1}{2}\left[e^{2x-5} + (-1)^n e^{5-2x}\right] 2^n +$$

$$+ n \cdot (2x+2) \cdot \frac{1}{2}\left[e^{2x-5} - (-1)^{n-1} e^{5-2x}\right] 2^{n-1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\left[e^{2x-5} - (-1)^{n-2} e^{5-2x}\right] 2^{n-2}.$$

4. ④ $f(x) = x + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \left[C^k_{-1/3} + C^{k-1}_{-1/3}\right] x^{4k+1} + o\left(x^{4n}\right),\ x \to 0.$

5. ⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{-\frac{17x^3}{3} + o\left(x^3\right)} = -\frac{2}{17}.$

6. ⑦ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)} - \frac{1}{1-x^5+o\left(x^5\right)}\right)\right)^{\frac{1}{x^2+o(x^2)}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2+o(x^2)}} = e^{-1/6}$$

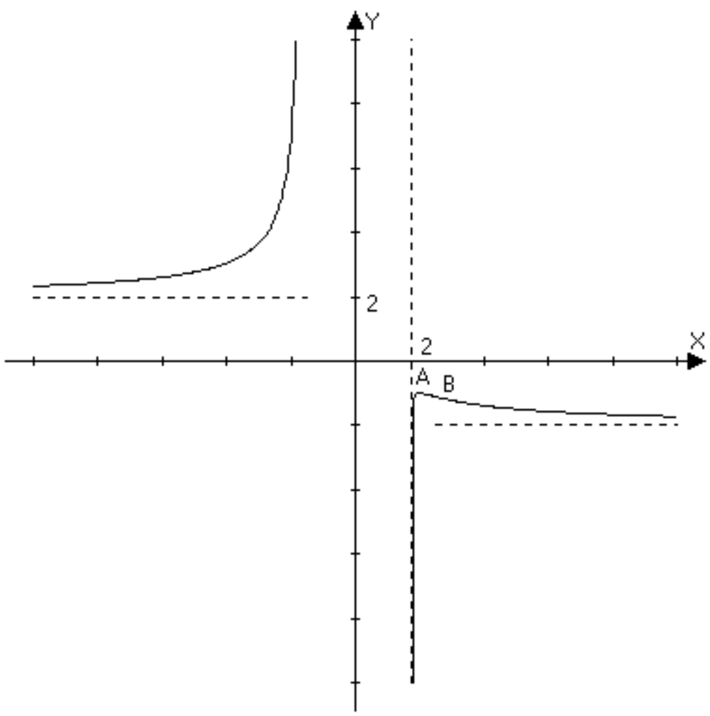
Вариант 13

7. ⑥ $D_y = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$.

Асимптоты: $y = -2$ при $x \to +\infty$; $y = 2$ при $x \to -\infty$; $x = \sqrt{3}$ при $x \to \sqrt{3} + 0$; $x = -\sqrt{3}$ при $x \to -\sqrt{3} - 0$.

$y' = -\dfrac{3x-6}{(x^2-3)^{3/2}}$; $y'' = 3 \cdot \dfrac{2x^2-6x+3}{(x^2-3)^{5/2}}$.

$A(2,\ -1)$ — точка локального максимума; $B\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\right)$ — точка перегиба,



8. ③ **Ответ:** Это часть окружности радиуса 3/2 и кривизны 2/3.

9. ③ **Ответ:** Дифференцированием сводится к неравенству

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 1 - x^2 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{th}^2 x > 1 - x^2 \Leftarrow 0 > \operatorname{th} x > x$$

для $x < 0$.

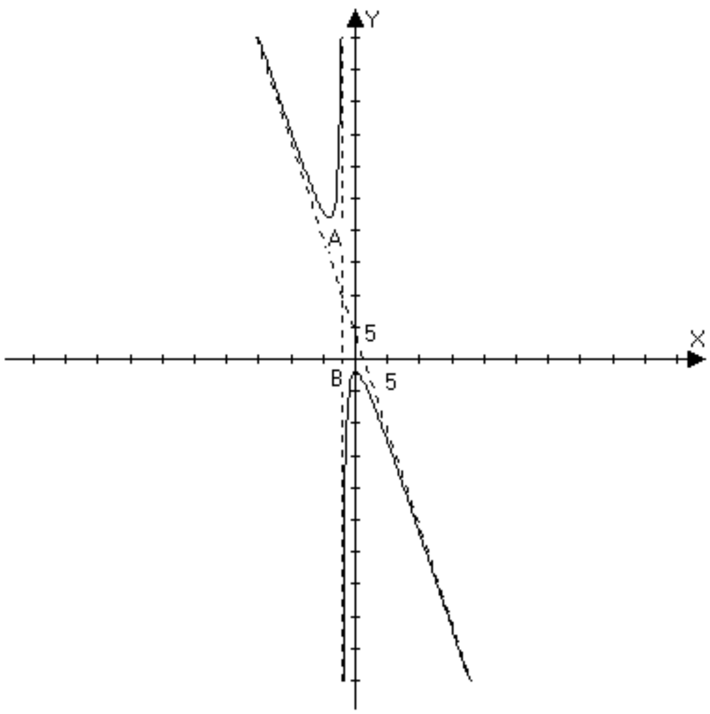
10. ④ **Ответ:** Заметим, что $f(x) = 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$. Из свойств квадратного трёхчлена следует, что f достигает минимума $f(x) = -3/2$ при $\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. А максимума $f(x) = 3$ достигает при $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Также есть локальный максимум при $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

11. ④ **Ответ:** Нет, как сумма не равномерно непрерывной и равномерно непрерывной.

Вариант 14

1. ④ $r(1) = (0\ \ 0\ \ 1)^T$, $r'(1) = (0\ \ 1\ \ 0)^T$, $r''(1) = (2\ \ 0\ \ 2)^T$, $[r',\ r'']|_{t=1} = (2\ \ 0\ \ -2)^T$.
Ответ: $x + z - 4 = 0$.

2. ④ Асимптоты: $y = -3x + 4$ при $x \to \infty$; $x = -2$.
$y' = -3 \cdot \dfrac{x^2 + 4x}{(x+3)^2}$; $y'' = -\dfrac{24}{(x+3)^3}$.
$A(0,\ -2)$ — точка локального максимума ; $B(-4,\ 22)$ — точка локального минимума.



3. ③

$$y^{(n)} = 1 \cdot (5x^2 - x - 1) \cdot \left[\frac{(-1)^{n-1} n!}{x^n} + \frac{(-1)^{n-1} n!}{(3x-4)^n} \cdot 3^n\right] -$$
$$-n \cdot (10x - 1) \cdot \left[\frac{(-1)^{n-2}(n-1)!}{x^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}(n-1)!}{(3x-4)^{n-1}} \cdot 3^{n-1}\right]$$
$$-\frac{n(n-1)}{2} \cdot 10 \cdot \left[\frac{(-1)^{n-3}(n-2)!}{x^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-3}(n-2)!}{(3x-4)^{n-2}} \cdot 3^{n-2}\right].$$

4. ④ $f(x) = 3 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (-4)^{k-1} \left[-12C^k_{-1/7} + 5C^{k-1}_{-1/7}\right] x^{3k} + o\left(x^{3n-1}\right),\ x \to 0.$

5. ⑤ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{5x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{7x^3}{6} + o(x^3)} = -\dfrac{5}{7}.$

6. ⑦ $$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)} - \frac{1}{1 - x^6 + o(x^6)}\right)\right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} = e^{1/6}$$

Вариант 14

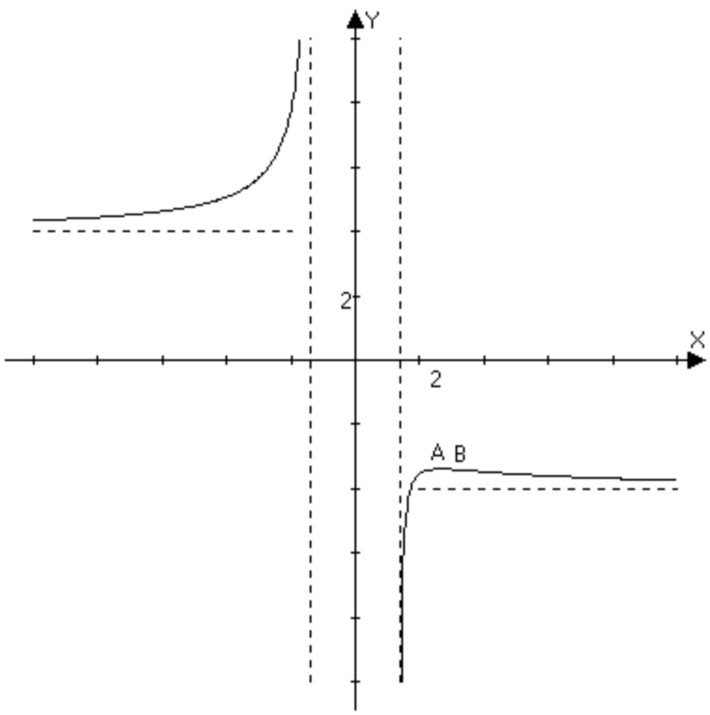
7. ⑥ $D_y = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

Асимптоты: $y = -4$ при $x \to +\infty$; $y = 4$ при $x \to -\infty$; $x = \sqrt{2}$ при $x \to \sqrt{2} + 0$; $x = -\sqrt{2}$ при $x \to -\sqrt{2} - 0$.

$y' = -\dfrac{3x-8}{(x^2-2)^{3/2}}$; $y'' = 6 \cdot \dfrac{x^2-4x+1}{(x^2-2)^{5/2}}$.

$A(\frac{8}{3},\ -\frac{23}{\sqrt{46}})$ — точка локального максимума,

$B\left(2+\sqrt{3},\ -\sqrt{5+4\sqrt{3}}\right)$ — точка перегиба,



8. ③ **Ответ:** Это часть окружности радиуса 2 и кривизны 1/2.

9. ③ **Ответ:** Дифференцированием сводится к неравенству

$$\frac{1}{\cos^2 x} > 1 + x^2 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x > 1 + x^2 \Leftarrow \operatorname{tg} x > x > 0$$

для $x > 0$.

10. ④ **Ответ:** Заметим, что $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$. Из свойств квадратного трёхчлена следует, что f достигает максимума $f(x) = 3/2$ при $\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6 + 2\pi k$, $x = 5\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. А минимума $f(x) = -3$ достигает при $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Также есть локальный максимум при $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. ④ **Ответ:** Да, как композиция равномерно непрерывных функций.