Th. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.

Тогда: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ (при $b_n \neq 0$, $b \neq 0$)

Док-во: докажем 3-е.

$\alpha_n = a - a_n$; $\beta_n = b - b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ (по св-ву 1)

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{ab_n - a_n b}{bb_n}\right| = \left|\frac{a\cdot(\cancel{b} - \beta_n) - b(\cancel{a} - \alpha_n)}{b\cdot b_n}\right|$$

$$= \left|\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{bb_n}\right| \overset{\text{нер-во }\triangle}{\leq} \frac{|b\alpha_n|}{|bb_n|} + \frac{|a\beta_n|}{|bb_n|} \;<$$

$N = \max(N_1, N_2, N_3)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \mapsto |\alpha_n| < \varepsilon$ (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$)

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \mapsto |\beta_n| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_3 : \forall n \geq N_3 \mapsto |b_n| = |b - \beta_n| > \frac{|b|}{2}$

с некоторого номера

$$< \frac{\varepsilon}{|b|/2} + \frac{|a|}{|b|}\cdot\frac{\varepsilon}{|b|/2} = \varepsilon M, \text{ где } M > 0 \to$$

Т. ④ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{N} = \max\{N_1, N_2, N_3\} : \forall n \geq \bar{N} \mapsto \left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon M$

Опр.

$\{a_n\}$ — бесконечно малая, если

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \geq N \mapsto |a_n| < \varepsilon$

$a_n \cancel{<} \varepsilon \to a_n = -n$

Св-ва:

1) Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ — БМП. Тогда

$\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ — БМП

$\left.\begin{array}{l} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \to |a_n + b_n| < |a_n| + |b_n| < \varepsilon$

Док-во: $\lim\limits_{n \to \infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0 + 0 = 0$

2) Если $\{a_n\}$ - огр., $\{b_n\}$ - БМП $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n b_n\}$ - БМП.

Док-во: $\{a_n\}$ - огр. $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |a_n| \leq M$

БМП - $\{b_n\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N \mapsto |b_n| < \varepsilon$

$|a_n b_n| < \varepsilon M \to$ Доказали

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{N}(\varepsilon) = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) : \forall n \geq \bar{N} \hookrightarrow |a_n b_n| < \varepsilon$

Подставляем $\frac{\varepsilon}{M} \to \frac{\varepsilon M}{M} \to$ сокращается