Опр. f – равн. непр. на E, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Утв. f – равн. непр. на $E \Rightarrow f$ – непр. на E

Th. (Кантора) f – непр. на $[a,b] \Rightarrow f$ – р. непр. на $[a,b]$

Док-во: Предположим противное:

1) $\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ (1)

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in [a,b] : \underbrace{0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n}}_{\Downarrow};\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

$\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - y_n| = 0$

2) $x_n \in [a,b] \Rightarrow \exists x_{n_k} : \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$ – по Th Б-В $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_{n_k} - x_0| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0| \leq |\underbrace{y_{n_k} - x_{n_k}}_{\to 0}| + |\underbrace{x_{n_k} - x_0}_{\to 0}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = x_0$

по Гейне, т.к. $x_{n_k} \to x_0$, $y_{n_k} \to x_0$

3) В силу непрерывности $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k \to \infty} f(y_{n_k})$

4) $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0) - f(y_{n_k})| =$

$= |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$

в частности для ε_0 $\exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$

$\rightarrow$ противоречит (1) $\Rightarrow$ ЧТД

Опр. Пусть f - определена на $E \subset R^n$. Её модуль непрерывности на E: $\omega(\delta, f, E) = \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in E, |x - y| < \delta\}$

Th. f - равн. непр. на $E \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(\delta, f, E) = 0$