Семинар 5. Предел функции.

Скубачевский Антон

7 апреля 2022 г.

Определение. Пусть каждому $x \in X$ будет поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Тогда будем говорить, что на множестве X задана функция со значениями в Y.

В таком случае, кстати, говорят, что "функция f действует из множества X в множество Y или $f : X \to Y$. X - область определения функции, Y - множество значений.

Напомним теперь определения окрестности и выколотой окрестности точки.

Определение. Рассмотрим множество X. $\varepsilon-$окрестностью точки a называется $U_\varepsilon(a) = \{x \in X : |x - a| < \varepsilon\}$

Определение. Рассмотрим множество X. Выколотой $\varepsilon-$окрестностью точки a называется $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = \{x \in X : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$, т.е. все то же множество, но $x \neq a$ ($|x - a| > 0$ как раз при всех иксах, кроме $x = a$).

Замечание. Вместо ε в качестве "радиуса"окрестности можно брать любую другую буковку. Например, часто используют δ.

Существует два основных определения предела функции: по Коши и по Гейне.

Определение по Коши проиллюстрировано на рис.1.

Определение1. Предел функции. ПО КОШИ. Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f при $x \to x_0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Запись $\delta = \delta(\varepsilon)$ означает просто, что дельта зависит от эпсилон. Подразумевается, что $\delta(\varepsilon) < \delta_0$: мы не можем брать иксы не из области определения. δ_0, разумеется, некоторое фиксированное действительное число.

Обратите также внимание на то, что предел из расширенного множества действительных чисел.

Кому-то легче воспринимать это определение в терминах окрестностей. Да и для лучшего понимания обозначений приведу еще пару определений (эквивалентных этому, тоже по Коши, учить можно любое из них, все необязательно).

Определение1'. Предел функции. ПО КОШИ. Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \bar{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f при $x \to x_0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(A)$$

Определение1". Предел функции. ПО КОШИ. Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \bar{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f при $x \to x_0$, если:

$$\forall U(A) \exists U(x_0) : f(\overset{\circ}{U}(x_0)) \subset U(A)$$

Здесь $U(A)$ - окрестность A произвольного радиуса.

Рассмотрим несколько примеров.

Очевидно, что предел непрерывной функции в точке просто равен ее значению. Собственно, на рис.1 проиллюстрировано определение предела именно для непрерывной функции. Но зачем нам предел для непрерывных функций, если мы итак знаем их значение в каждой точке, которое равно пределу? Рассмотрим варианты посложнее.

Пример 1. К примеру, функцию, равную 1 везде, кроме точки x = 0. В нуле пусть она будет равна нулю. Она непрерывна везде, кроме нуля, поэтому во всех точках кроме нуля предел равен ее значению (единице). А что же делать в нуле? Действовать по определению. Заметим, что в определении окрестность точки по оси икс берется выколотая. Поэтому нам глубоко наплевать на то, чему равна функция в точке, в которой мы смотрим предел. Пусть хоть даже неопределена, это ничего не изменит. А вот в любой окрестности этой точки она равна 1, поэтому и предел 1. Для разминки распишите это дело по определению 1.

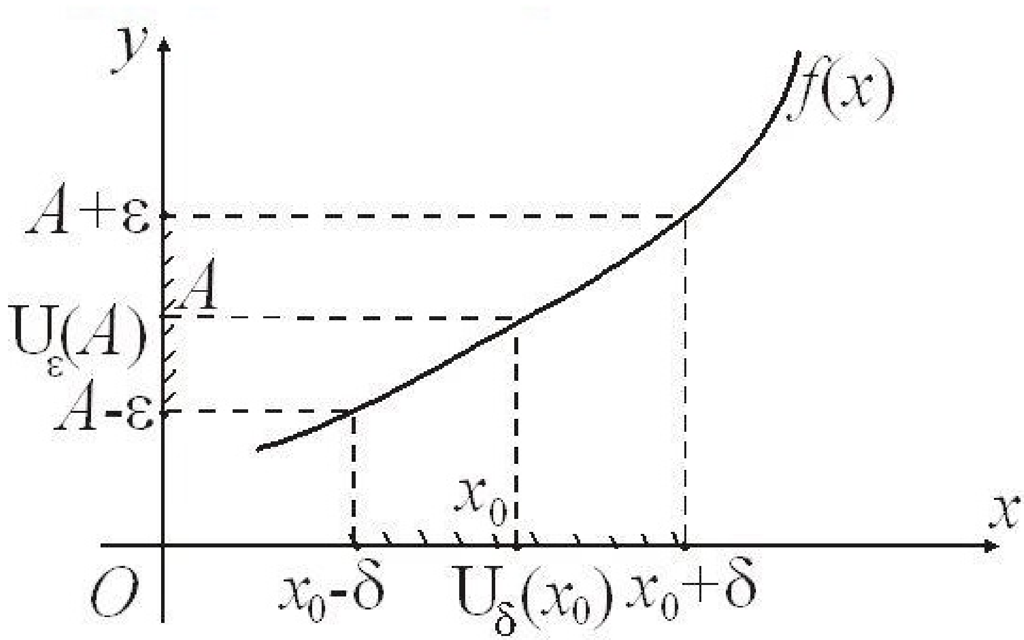

Рис. 1: Определение предела функции по Коши

Пример 2. Доказать, что функция f(x) = signx (равная -1 при x<0, 0 в нуле и равная 1 при x>0) не имеет предела в нуле.

Доказательство:

Кандидаты на предел: 1 и -1. Докажем, что 1 - не предел, с -1 аналогично.

Возьмем $\varepsilon = 0.25$ окрестность 1 по оси OY. Тогда для любой δ - окрестности нуля по оси OX найдется x_0 (какой-то $x_0 < 0$, любой, лежащий в δ-окрестности), такой, что $f(x_0) = signx_0 = -1$ (т.к. sign = -1 при x<0). Но $-1 \notin (1 - 0.25; 1 + 0.25)$. Значит, выполняется отрицание определения 1. Значит 1 не предел.

Предел может быть равен бесконечности при иксе стремящемся к какому-то числу или к бесконечности. Например, на асимптоте. Но вот тангенс с одной стороны асимптоты уходит на -бесконечность, а с другой - на +бесконечность. Чтобы это формально записать, наряду с пределом функции вводится определения односторонних пределов функции. Единственное различие - в них рассматривается не вся δ-окрестность точки x_0, а ее левая или правая полуокрестность, и односторонние пределы соответственно называются предел слева и справа.

Определение. Предел функции слева. ПО КОШИ. Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0-0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f слева при $x \to x_0 - 0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x_0 - x < \delta \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

В этом случае пишут $\underset{x \to x_0 - 0}{lim} f(x) = A$.

Заметим, что все, что мы сделали - убрали модуль (чтобы иксы не по обе стороны x_0 были, а лишь по одну), а также вместо x_0 писали в окрестностях $x_0 - 0$. Это нормально, это такая формальная запись.

Определение. Предел функции справа. ПО КОШИ. Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f справа при $x \to x_0 + 0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

В этом случае пишут $\underset{x \to x_0 + 0}{lim} f(x) = A$.

Теорема. У функции существует предел в точке $x_0 \Leftrightarrow$ у нее существуют пределы слева и справа и они равны. (в этом случае они, разумеется, равны пределу функции в точке.) Например, у функции из примера 1 оба односторонних предела равны 1, как и сам предел.

Пример 3. Сформулировать в квантерах:

$$a).\underset{x \to 3}{lim} f(x) = 47$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - 3| < \delta \hookrightarrow |f(x) - 47| < \varepsilon$$

$$b).\underset{x \to -0}{lim} f(x) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < -x < \delta \hookrightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$c).\underset{x \to \infty}{lim} f(x) = 4$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : |x| > \delta \hookrightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

$$d).\lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < x - 1 < \delta \hookrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$e).\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : x < -\delta \hookrightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$a').\lim_{x\to 3} f(x) \neq 47$$

$$\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 : \exists x : 0 < |x - 3| < \delta : |f(x) - 47| \geqslant \varepsilon$$

$$e').\lim_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty$$

$$\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 : \exists x : x < -\delta : |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Теперь дадим определение предела функции по Гейне. Оно эквивалентно определению по Коши. Но при этом оно вводится совершенно по другому.

Определение2. Предел функции. ПО ГЕЙНЕ. Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \bar{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f при $x \to x_0$, если:

$$\forall\{x_n\} : [(\forall n : x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0);\ \ x_n \neq x_0);\ \ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

В данном определении δ фиксировано.

Такие последовательности x_n (лежащие в окрестности нужной точки, сходящиеся к ней и не равные ей) называются последовательностями Гейне.

Это определение означает: если для любой последовательности из дельта-окрестности x_0 (лежащей на оси OX), такой, что никакой из ее членов не равен x_0, и, кроме того, сходящейся к x_0, значения функции от этой последовательности ($f(x_n)$) сходятся (уже по оси OY) к ОДНОМУ

И ТОМУ ЖЕ (важно, чтобы именно к одному и тому же) числу А, то это А - предел функции. Заметим, что $f(x_n)$ - тоже последовательность, а не функция! То есть мы даем определение предела функции, уже зная определение предела последовательности. С помощью определения по Гейне удобно делать 2 вещи: доказывать теоремы, верные для последовательностей (например про милиционеров), а также доказывать, что у функции нет предела (взять 2 последовательности, очень близкие к точке, в которой смотрим предел, и показать, что значение $f(x_n)$ для двух разным последовательностей сходится к 2 разным числам (а не к одному и тому же, что необходимо для существования предела)).

С помощью же определения по Коши обычно наоборот, удобнее доказывать существование, а не отсутствие предела.

Поэтому оба определения необходимо знать, а также ими хорошо владеть.

Покажем 2 применения определения по Гейне. Первое применение-переносить теоремы, справедливые для последовательностей, на функции.

Теорема о двух милиционерах для функции. Пусть функции f, g, h определены на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, f \leqslant g \leqslant h, f(x) \to A, h(x) \to A$ при $x \to x_0, A \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $g(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Заметьте, что для четкости формулировки нужно оговориться, где именно функции одна больше другой (на некоторой окрестности точки, а не абы где).

Доказательство:

Если для произвольного икса из окрестности x_0 выполняются неравенства для функций, то и для произвольной(важно, что для любой!) последовательности из окрестности точки x_0, сходящейся к x_0, члены которой не равны x_0 (то есть так называемой "последовательности Гейне") по условию имеем:

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$$

По условию $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме о 2 милиционерах для последовательности имеем: $g(x_n) \to A$. И так для любой выбранной x_n: $g(x_n)$ сходится к одному числу. Следовательно, $g(x) \to A$ при $x \to x_0$ по определению Гейне, ч.т.д.

Теорема. Возрастающая на (a,b) функция f имеет предел, равный ее верхней грани:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x)$$

Пример 4. Доказать, что у функции f(x) = sign(sin(1/x)) не существует предела при $x \to 0$, где

$$sign x = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

Доказательство:

Будем доказывать по Гейне, то есть найдем 2 последовательности, стремящиеся к 0, таких, что значения функции в них сходятся к разным числам.

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$$

$$x_n^{(2)} = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}$$

Обе последовательности сходятся к 0 и не равны 0, то есть это действительно последовательности Гейне.

$$f(x_n^{(1)}) = sign(1) = 1 \to 1, n \to \infty$$

$$f(x_n^{(2)}) = sign(-1) = -1 \to -1, n \to \infty$$

Значения функции в них сходятся к разным числам, значит по определению Гейне предела в 0 нет.

Пример 4'. Доказать, что у функции $f(x) = sin(\frac{\pi}{x})$ не существует предела при $x \to 0$

Доказательство:

Возьмем 2 последовательности:

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$x'_n = \frac{2}{4n+1}$$

Это последовательности Гейне, т.к. их члены не равны 0 и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(x'_n) = 0$$

(где 0 - точка, в которой исследуем существование предела)
Тогда:

$$f(x_n) = sin(\pi n) = 0$$
$$f(x'_n) = 1$$

То есть

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$$

Следовательно, по определению Гейне предела в 0 нет.

Будем далее считать различные пределы. Для пределов функции, как и для пределов последовательности, выполняются свойства, связанные с арифметическими операциями. Доказывается с помощью определения предела функции по Гейне.

Пример 5. Посчитать предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} =$$

= [по теореме о пределе частного, так как предел знаменателя не равен нулю все норм] =

$$= \frac{1^2-4}{1^2-1-2} = 1,5$$

В случае же, когда в знаменателе 0, нужно делать замену (чтоб было проще) и как-то избавляться от этого нуля (например, сократить).

Пример 6. Посчитать предел $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{4}{3}$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$–?

Решение:

Решим с помощью замены и домножения на сопряженные.

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=[y=x-6]=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y+4}-2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y+4-4}{y(\sqrt{y+4}+2)}=\frac{1}{4}$$

Замену делать, в общем-то, необязательно, но с ней решается попроще. В следующем примере мы опять же используем замену, а также покажем, что можно домножать еще и на кубические производные, причем зачастую это делается даже 2 раза за пример=)

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt[3]{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$

Решение:

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt[3]{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{y+1}+y-1}{\sqrt[3]{2y-1}+1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(\sqrt[3]{y+1}+y-1)(\sqrt[3]{(2y-1)^2}-\sqrt[3]{2y-1}+1)}{2y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(y+1+y^3-3y^2+3y-1)(\sqrt[3]{(2y-1)^2}-\sqrt[3]{2y-1}+1)}{2y(\sqrt[3]{(y+1)^2}-\sqrt[3]{y+1}(y-1)+(y-1)^2)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(y^2-3y+4)(\sqrt[3]{(2y-1)^2}-\sqrt[3]{2y-1}+1)}{2(\sqrt[3]{(y+1)^2}-\sqrt[3]{y+1}(y-1)+(y-1)^2)}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 3}=2$$

Замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

Пример 9. Посчитать предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos3x-cos7x}{x^2}$

Решение:

Решим с помощью замечательного предела

Для начала заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x}\cdot 5=5$$

Теперь само решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos3x-cos7x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin5xsin2x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{x}=2\cdot 5\cdot 2=20$$

Пример 10. Посчитать предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}$
Решение:
В решении воспользуемся заменой: $y=arctgx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{tgy}=\lim_{y\to 0}\frac{cosy}{siny/y}=\frac{1}{1}=1$$

Пример 11. Посчитать предел $\lim\limits_{x\to\infty}xsin\frac{\pi}{x}$
Решение:
Воспользуемся заменой $y=1/x$

$$\lim_{x\to\infty}xsin\frac{\pi}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{sin\pi y}{\pi y}\cdot\pi=\pi$$

Замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^x$
Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(\frac{x+1}{x})^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x}=\frac{1}{e}$$

Решим теперь довольно показательную теоретическую задачу.

Пример 13. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$; $\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))=a$?
Решение:
Нет, не следует. (Чтобы следовало нужно, чтобы дополнительно f была непрерывной в точке x_0).

Приведем контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$g(t) = 0$$

Возьмем $t_0 = 0$, $x_0 = 0$

Причем $\lim\limits_{t \to t_0 = 0} g(t) = 0 = x_0$, т.е. условие выполняется.

Кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} f(x) = 1$

Но $\lim\limits_{t \to t_0 = 0} f(g(t)) = \lim\limits_{t \to t_0 = 0} f(0) = f(0) = 0 \neq 1$

Пример 14. Пусть функции f(x),g(x) не имеют предела в x_0. Следует ли отсюда, что f(x)+g(x) и f(x)g(x) не имеют предела?

Решение:

Рассмотрим f(x) = signx, g(x) = -signx. Они не имеют предела в точке $x_0 = 0$. Но им сумма это тождественный ноль, он имеет везде предел, в т.ч. при x=0, а произведение - функция, похожая на функцию из примера-1, она также в нуле предел имеет. Значит, f+g и fg могут иметь предел, даже если f и g по отдельности не имеют.

Теорема (Критерий Коши). Пусть функция f определена на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Для существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Критерий Коши для функций будет очень нужен в дальнейших курсах математики. В первом семестре он особо в задачках не применяется. Тем не менее, его нужно знать вместе в доказательством: на экзамене очень любят спрашивать.

Определение. Функция g называется бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to a$ (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$), если $g(x) = \varepsilon(x) f(x)$, $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, причем $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Т.е., грубо говоря, $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Грубо говоря, потому что f может быть равно нулю, и тогда определять через предел частного некорректно.

Определение. Пусть существует постоянная C>0: $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда пишут $f = O(g)$ при $x \to a$.

Определение. Функции f и g называются функциями одного порядка при $x \to a$, если $f = O(g)$, $g = O(f)$ при $x \to a$. При этом пишут $f(x) = \Omega(g(x))$, $x \to a$, или $f(x) \asymp g(x)$

Определение. Функции f и g называются эквивалентными при $x \to a$, если $f(x) = \lambda(x)g(x), x \in \overset{\circ}{U}(a)$, причем $\underset{x \to a}{lim} \lambda(x) = 1$. (ну или $\underset{x \to a}{lim} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$).

Пример 15.

- $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$
- $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$