Семинар 10. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора и правила Лопиталя.

Скубачевский Антон

12 октября 2021 г.

1 Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Чтобы понять, о чем идет речь, разберем простенький пример.

Пример 1.

Посчитать предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Заметим, что предел числителя 0, и предел знаменателя 0. Поэтому нужно что-то придумать. Сделаем следующее: разложим $\ln(1+x)$ по формуле Тейлора так, чтобы x из разложения сократился с $(-x)$ из числителя, а потом, разделив числитель и знаменатель (младшие степени которых одинаковы и равны x^2) на x^2, получим ответ.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{2}+o(1)) = -0,5$$

Предпоследнее равенство справедливо в силу свойства o(): можем степень вносить и выносить из-под него:

$$x^k o(x^n) = o(x^{n+k})$$

Как видите, в таких примерах часто бывает нужно понять, до какой степени раскладывать функции. Ну, во-первых, все до одной. Во-вторых, чаще всего в подобных задачах в экзаменационной работе до $o(x^3)$. Ну и, наконец, существуют различные "сигналы помогающие нам понять, до куда раскладывать. В данном примере таких сигнала целых 2: первый - что вычитается х в числителе. Это значит, что составитель хочет, чтобы х сократился в числителе, значит, нужно раскладывать, по крайней мере, до x^2. Следующий сигнал - x^2 в знаменателе. Это нам явно говорит о том, что в числителе, по всей видимости, должны посокращаться все степени младше x^2.

Теперь давайте определим, как понять, что вы недоразложили или переразложили или где-то накосячили. Если у вас в числителе или знаменателе все, что осталось, это $o(x^3)$, например, значит, вы явно недоразложили, нужно разложить попробовать до x^4 или x^5. Если же вы получите $x^3 + x^4 + o(x^4)$, тоесть несколько степеней помимо $o()$, значит переразложили. Ничего страшного в этом нет, ведь $x^4 = o(x^3)$, и вы можете просто написать $x^3 + x^4 + o(x^4) = x^3 + o(x^3)$, то есть выкинуть ненужные степени и понизить степень икса внутри o().

Как видите, чтобы решать подобные задачи, нужно знать наизусть (или аккуратно зашпорить) множество разложений. Часть из них была на прошлом занятии. Добавим к ним те, которых не было.

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$arcsinx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

$$arccosx = \frac{\pi}{2} - arcsinx$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$arcctgx = \frac{\pi}{2} - arctgx$$

Предостерегу вас от очень распространенной ошибки. Часто, переписывая условие, вместо arcctg многие случайно пишут arctg, так что переписывайте условие внимательно!

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}-?$$

Тут мы сталкиваемся с еще одной небольшой проблемой: $(1+x)^{1/x}$ не является ни показательной, ни степенной функцией. Но это легко исправить с помощью свойств экспоненты:

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}-e}{x} =$$

$= [e^{(1-x)}$ мы не можем раскладывать т.к. аргумент не стремится к $0] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e(e^{-\frac{x}{2}+o(x)}-1)}{x} =$$

$=$ [Подставляем в разложение экспоненты вместо икса $-x/2+o(x)$

причем если у нас идет разложение от аргумента, в котором уже есть о малое, мы про

о малое забываем и просто приписываем в нужной степени в конце] $=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e(1-x/2+o(x)-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(-\frac{e}{2}+o(1)) = -\frac{e}{2}$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+x^2}-\operatorname{ch}(\sqrt{3}x)-\operatorname{tg}x}{\sin x-\ln(1+\arcsin x)-x^2/2}-?$$

Тут у нас есть сигнал в знаменателе: $x^2/2$. Поэтому раскладывать все будем до $o(x^3)$.

$$\ln(1+\arcsin x) = \ln(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = (x+\frac{x^3}{6})-(x+\frac{x^3}{6})^2/2+(x+\frac{x^3}{6})^3/3+o(x^3) =$$

$=$ [при раскрытии квадрата и куба вылезут степени, старшие, чем x^3, выкинем их, т.к. они входят в $o(x^3)] =$

$$= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Таким образом, знаменатель равен:

$$x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Получили нечто похожее на правду. Такой вывод из того, что получили степень + o(от этой степени), и ничего лишнего. И не просто голое о малое. Возрадовались. Начинаем считать числитель.

$$e^{x+x^2} = 1+(x+x^2)+\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{6}+o(x^3) = 1+(x+x^2)+(\frac{x^2}{2}+x^3)+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\operatorname{ch}(\sqrt{3}x) = 1 + \frac{3x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Тогда, если подставить все это счастье в числитель, получим:

$$e^{x+x^2} - \operatorname{ch}(\sqrt{3}x) - \operatorname{tg} x = \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$$

Получаем тогда в итоге, разделив числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{5x^3/6 + o(x^3)}{-2x^3/3 + o(x^3)} = -\frac{5}{4}$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\arcsin 3x) - \arcsin 3x}{\ln(\operatorname{ch} 2x) - \operatorname{ch}(\ln(1-2x)) + 1} - ?$$

Видим $+1$ в знаменателе. Значит, знаменатель надо раскладывать до $o(x^2)$. Но т.к. $\operatorname{ch} x$ раскладывается по четным степеням, мы можем вместо $o(x^2)$ написать $o(x^3)$, т.к. после x^2 следующий член x^4, и он мал как по сравнению с x^2, так и по сравнению с x^3. Раскладываем до x^3, а не до x^2 на всякий пожарный: это пример с экзамена, а на экзамене разложений до x^2 почти не бывает.

Числитель:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\arcsin 3x = 3x + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x + \frac{9x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\operatorname{arctg}(\arcsin 3x) = 3x + \frac{(3x)^3}{6} - \frac{(3x + \frac{(3x)^3}{6})^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^3}{2} + o(x^3)$$

Тогда числитель $=$

$$= 3x - \frac{9x^3}{2} - 3x - \frac{9x^3}{2} + o(x^3) = -9x^3 + o(x^3)$$

Знаменатель:

$$\operatorname{ch}(2x) = 1 + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)$$

$$\ln(\operatorname{ch} 2x) = \ln(1 + 2x^2 + o(x^3)) = 2x^2 + o(x^3)$$

То есть в разложении логарифма только первый член взяли.

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = -2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\operatorname{ch}(\ln(1-2x)) = 1 + \frac{1}{2}(2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3)^2 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}(4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 2x^2) + o(x^3) = 1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$$

Таким образом, знаменатель $=$

$$= 2x^2 - 1 - 2x^2 - 4x^3 + 1 + o(x^3) = -4x^3 + o(x^3)$$

Получаем в итоге, разделив числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-9x^3+o(x^3)}{-4x^3+o(x^3)} = \frac{9}{4}$$

Пример 5.

В примере ниже сходу, как и в примере 2, воспользуемся свойством $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)ln(f(x))}$. Запись $exp()$ это $e^{()}$.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{1+x}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}})^{(1/(\sin x - x))} = \lim_{x\to 0} exp(\frac{\ln(\frac{\cos x}{1+x}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}})}{\sin x - x})$$

С тем, до какой степени раскладывать, в этом примере все понятно из знаменателя показателя экспоненты: нем сигнал - x, который должен сократиться. Значит, раскладываем (впрочем, как и почти во всех таких примерах на экзамене) до $o(x^3)$.

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Для разложений ниже напомню, что $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Никаких C_α^k в номерах на исследование предела писать не нужно, все равно придется их расписывать.

$$\frac{\cos}{1+x} = \cos x \cdot (1+x)^{-1} = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) =$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}} = \operatorname{arctg} x \cdot (1+x)^{-1/2} =$$

$=$ [степень только до x^2 разложили, т.к. в арктангенсе, умноженном на нее, минимальный множитель x. Он, внесясь под o(), даст x^3] $=$

$$= (x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

$$\frac{\cos}{1+x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{11x^3}{24} + o(x^3)$$

$$\ln(\frac{\cos}{1+x}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}})=-\frac{11x^3}{24}+o(x^3)$$

Итого получаем:

$$\lim_{x\to 0} exp(\frac{\ln(\frac{\cos x}{1+x}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}})}{\sin x - x})=\lim_{x\to 0} exp(\frac{-\frac{11x^3}{24}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)})=e^{11/4}$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+x}-x)+\cos x\cdot\ln x}{\ln(1+\operatorname{ch} x)}$$

Проблема: x стремится к $+\infty$, а не к 0. А у нас все табличные формулы в окрестности нуля. Но все же мы кое-что сможем разложить, вынеся x^2 за корень, ведь $1/x\to 0$, если $x\to\infty$.

$$x(\sqrt{x^2+x}-x)=x(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x)=x(x(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x)=$$

$$=x(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+o(\frac{1}{x})-x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}+o(1)$$

Больше разложить ничего не можем. Но можем заметить, что в числителе будет $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}+o(1)+\cos x\cdot\ln x$. $\frac{1}{8}$, $o(1)$ и $\cos x\cdot\ln x$ бесконечно малы по сравнению с $x/2$ при $x\to+\infty$ (ну то есть предел их отношения равен нулю). Поэтому можем забить в числителе на все, кроме $x/2$.

В знаменателе: по определению чосинуса:$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Тогда, рассуждая как и в числителе, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\operatorname{ch} x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^x/2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x/2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(e^x)-\ln 2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x$

Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+x}-x)+\cos x\cdot\ln x}{\ln(1+\operatorname{ch} x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}$$

2 Правило Лопиталя

Оно (как и формулы Тейлора) нужно чтобы считать пределы типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Правило простое: если не можешь найти предел $\underset{x\to x_0}{lim}\frac{f(x)}{g(x)}$ (если это предел типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$), то ищи предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, и оказывается, эти пределы будут равны:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример 7. Посчитать предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}$

Это предел типа $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

Мы лихо сформулировали правило Лопиталя, не оговаривая, какие же нужны условия для его выполнения, ведь если эти условия не выполняются, то правило Лопиталя может не сработать.

Теорема(правило Лопиталя). Пусть f, g:

1. Дифференцируемы при $x>c>0$
2. $g'\neq 0$ на $(c,+\infty)$
3. $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Давайте приведем пример, когда нельзя пользоваться правилом Лопиталя, поскольку не выполняется одно из этих условий.

Пример 8. Показать, что $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+sinx}{x}$, найти его и показать, что его нельзя считать по правилу Лопиталя.

Для начала найдем этот предел.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sinx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{sinx}{x}=1+0=1$$

Теперь покажем, что его нельзя считать по правилу Лопиталя, то есть что не выполняется одно из условий теоремы.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+sinx)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+cosx}{1}$$

Этого предела не существует, то есть пункт 3 теоремы не выполняется, то есть нельзя считать по правилу Лопиталя. Чтд.