Семинар 8. Вычисление n-й производной и теоремы о среднем.

Скубачевский Антон

14 октября 2021 г.

1 Теоремы о среднем

Первая теорема известна вам еще из школы. Она помогает исследовать функции на экстремум.

Теорема Ферма. Пусть функция f определена на некоторой окрестности точки x_0 $U(x_0)$ и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение среди ее значений на $U(x_0)$. Пусть $\exists f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть функция f:

1. Непрерывна на $[a, b]$
2. Дифференцируема на (a, b)
3. f(a) = f(b)

Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Иначе говоря, если функция ведет себя на отрезке достаточно прилично и ее значения в концах равны, то найдется точка, в которой касательная в функции параллельна оси OX (см. рис. 1). Утверждение, в общем-то, довольно очевидное.

Давайте проверим, все ли 3 условия данной теоремы существенны. То есть будет ли она выполняться, если одно из них не работает.

Пусть для начала выполняются 1 и 2 условия, а 3 нет. Тогда мы можем на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ привести функцию $f(x) = x$, непрерывную и дифференцируемую на нем, но $f(0) \neq f(1)$. Очевидно, что у данной функции во всех точках производная $(x)' = 1$, и никак не может быть

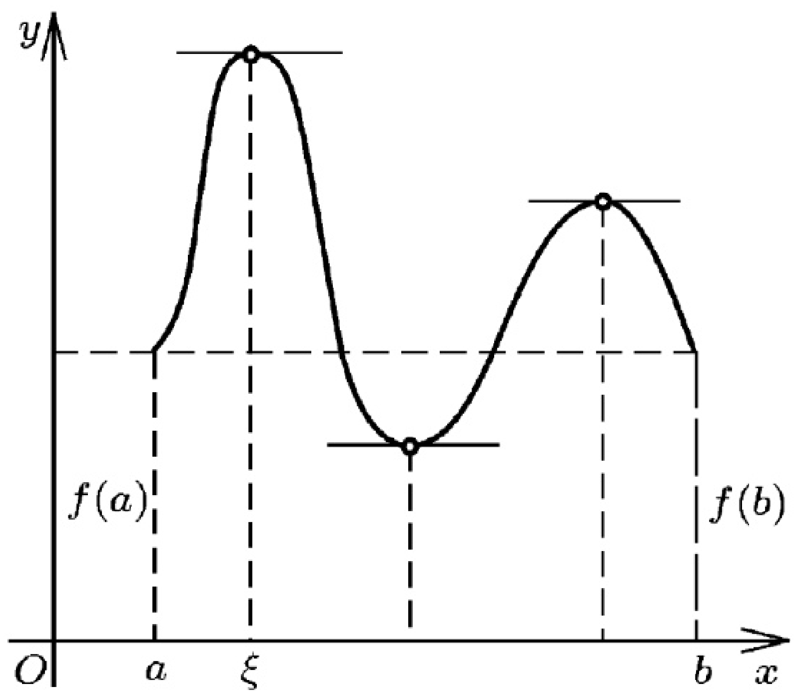

Рис. 1: Теорема Ролля

равна 0. Значит, если 3е условие теоремы не выполняется, теорема не работает.

Пусть теперь работают 1 и 3 условия, а дифференцируемости нет. Первая не дифференцируемая функция, которая приходит в голову, $f(x) = |x|$. Рассмотрим ее на $[-1;1]$. Условия непрерывности и равенства на концах для нее очевидно выполняются на данном отрезке, а условие дифференцируемости - нет. При этом производная во всех $x < 0$ равна -1, а $x > 0$ равна 1. В нуле ее не существует. То есть теорема не работает без 2го условия.

Пусть теперь работают условия 2 и 3, но не работает 1. Тут вы можете насторожиться: ведь из дифференцируемости должна следовать непрерывность. А нам нужно привести пример функции дифференцируемой, но не непрерывной. Дело в том, что условие непрерывности в теореме Ролля на отрезке, а дифференцируемости - на интервале. То есть чтобы не выполнялось условие 1 при выполнении условия 2 нужно взять функцию, дифференцируемую на (a,b) (и, следовательно, непрерывную на (a,b)), но имеющую разрывы на концах отрезка. Например, $f(x) = x$ при $x \in (-1,1)$ и $f(x) = 0$ при $x = 1$ или $x = -1$. Для нее условия 2 и 3 выполняются: $f(-1) = f(1) = 0$; f-дифференцируема на (-1,1). Но на концах отрезка неустранимый разрыв, то есть 1 не выполняется. Производная $(x)' = 1 \neq 0$ при $x \in (-1,1)$. То есть условие теоремы не выполняется.

Пример 1. Пусть f дифференцируема n раз на $[a,b]$, обращается у нуль в (n+1) точке этого отрезка. Доказать, что тогда $\exists \xi \in (a,b) : f^{(n)}(\xi) = 0$. Под данным значком понимается n-я производная.

Доказательство:

Пусть $a_1, ..., a_{n+1}$ - точки $\in (a,b)$, в которых $f = 0$. Рассмотрим отрезок $[a_1; a_2]$. На его краях значения функции равны (нулю) и функция на нем непрерывна и дифференцируема (т.к. по условию n раз дифференцируема). Значит, по Теореме Ролля $\exists \xi_1^{(1)} \in (a_1; a_2) : f'(\xi_1^{(1)}) = 0$. Аналогично найдем на остальных отрезках еще (n-1) точку: $\exists \xi_i^{(1)} \in (a_i; a_{i+1}) : f'(\xi_i^{(1)}) = 0$, $i = 2...n$. Получили n точек на отрезке $[a,b]$, в которых производная ноль. Эти точки образовывают n-1 отрезок. На каждом из них функция $g(x) = f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит найдется аналогично предыдущему шагу (n-1) точка, в которых уже $f'' = 0$. И так далее, за n шагов, что существует 1 точка, в которой $f^{(n)} = 0$, ч.т.д.

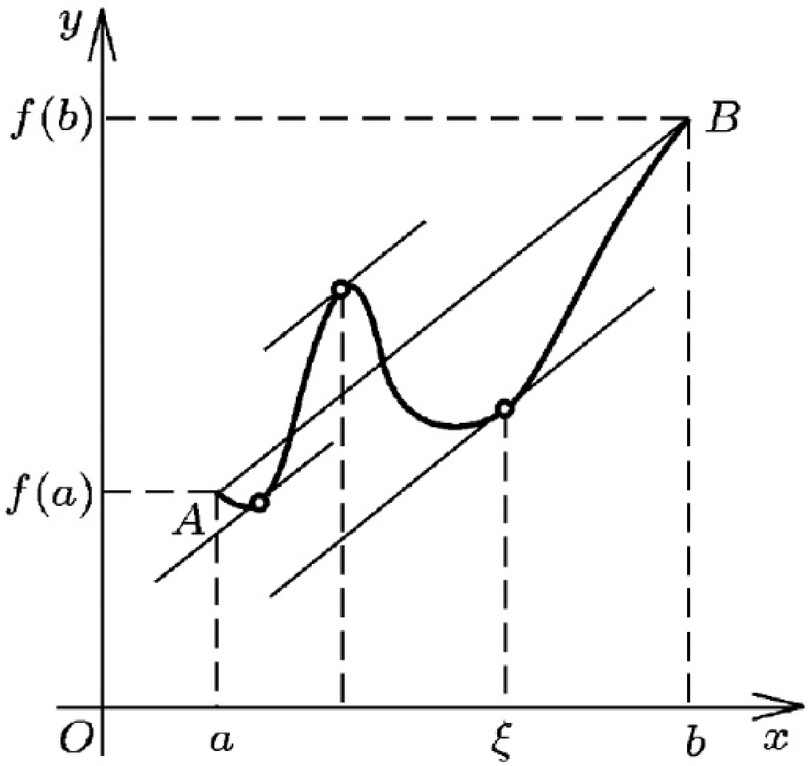

Рис. 2: Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа. Пусть функция f:

1. непрерывна на $[a, b]$
2. дифференцируема на (a, b)

Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа изображен на рис.2: при выполнении условий теоремы найдется точка, в которой касательная в графику параллельна отрезку, соединяющему его начало и конец.

Пример 2. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенство:

$$\frac{b-a}{b} < ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \text{ при } 0 < a \leq b$$

Рассмотрим функцию $f(x) = lnx$. По теореме Лагранжа для нее: $\frac{lnb-lna}{b-a} = \frac{1}{\xi}$ для некоторого $\xi \in (a,b)$. Т.к. $\xi \in (a,b)$, $\frac{1}{\xi} \in (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$. Тогда имеем:

$$\frac{1}{b} < \frac{lnb - lna}{b-a} < \frac{1}{a}.$$

Отсюда следует неравенство, которое нужно было доказать.

Пример 3. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенство:

$$e^x > 1 + x, \ x \in \mathbb{R}$$

На этот раз в неравенстве присутствует x. Но это никак не меняет ход решения. Это только говорит нам о том, что вместо b на конце интервала нужно поставить x. Преобразуем исходное неравенство, чтобы оно немного смахивало на то, что мы хотим получить с помощью Теоремы Лагранжа:

$$e^x - 1 > x$$

$$\frac{e^x - 1}{x - 0} > 1$$

Теперь уже стало очевидно, к чему применять Теорему Лагранжа. $f(x) = e^x$; $(a,b) = (0,x)$. По теореме Лагранжа имеем:

$$\frac{e^x - 1}{x - 0} = e^{\xi}, \ \xi \in (0,x)$$

Но т.к. $\xi > 0$, $e^{\xi} > e$. Отсюда получаем:

$$\frac{e^x - 1}{x - 0} > 1$$

Это и есть исходное неравенство, ч.т.д.

Пример 4. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенство:

$$e^x > ex, \text{ при } x > 1$$

Как и в предыдущей задаче, преобразуем неравенство:

$$e^x - e > ex - e$$

$$\frac{e^x - e}{x - 1} > e$$

Применив теорему Лагранжа к функции $f(x) = e^x$ на интервале $(1, x)$, получим ч.т.д.

Теорема Коши. Пусть функции f,g:

1. непрерывны на $[a, b]$
2. дифференцируемы на (a, b)
3. $g' \neq 0$ на (a, b).

Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Теорема Лагранжа - частный случай теоремы Коши (при g(x) = x). Теорема Коши может пригодиться, например, в §16№30.

§16**№**30

Доказать, что если f - дифференцируема на $[1, 2]$, то $\exists \xi \in (1, 2) : f(2) - f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi)$

Видим в правой части ξ. Вывод: нам нужна либо теорема Лагранжа, либо теорема Коши. Кроме того, видим, что ξ входит как в функцию f, так и в множитель перед ней. Значит, нам нужна теорема Коши, причем, судя по всему, исходя из теоремы Коши, мы должны получить что-то вроде:

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi^2}$$

То есть чтобы производная $g'(\xi)$ была равна чему-то вроде $1/\xi^2$. Нам подходит функция $g(x) = \frac{1}{x}$. В самом деле, по теореме Коши, примененной к $f(x)$, $g(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1, 2]$, получаем то, что и нужно доказать:

$$\frac{f(2) - f(1)}{-1/2} = \frac{f'(\xi)}{-1/\xi^2}$$

Равенство доказано, ч.т.д.

2 Вычисление n-й производной

Данная тема, как и пара последующих, крайне проста и требует лишь знания правил и "набитой руки".

Приведем правила взятия производной n-го порядка и "табличные"производные n-го порядка (и те, и другие выводятся очень просто по индукции из правил взятия производной первого порядка, например, см. задачник Кудрявцева (зелененький) теорию перед параграфом соответствующим или учебник Бесова доказательство формулы Лейбница, которая будет приведена ниже). Производная n-го порядка обозначается $(f(x))^{(n)}$.

$$\textbf{1. } (\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$$

(Приведенное выше правило - аналогично правилу для производных 1-го порядка: что производная суммы это сумма производных и что константу можно выносить за знак производной.)

$$\textbf{2. } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \textbf{ -формула Лейбница}$$

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Считается, что $0! = 1$. $1! = 1$ также.

И далее "табличные производные":

- $(a^x)^{(n)} = a^x ln^n a$
- $(e^x)^{(n)} = e^x$
- $(sin\alpha x)^{(n)} = \alpha^n sin(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$
- $(cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n cos(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$
- $((ax+b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$
- $(log_a|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n lna}$
- $(ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Пример 1. $f(x) = 2^{3x}$; $f^{(n)}$-?

Решение:

Данный пример будем решать по индукции, в отличие от большинства последующих.

Решаются по индукции такие примеры следующим образом:

Шаг 1: Догадываемся, чему равна n-я производная.

Шаг 2: Доказываем по индукции, что догадка верна.

Шаг 1. Итак, попробуем догадаться, какой вид имеет n-я производная.

$$f'(x) = 2^{3x} \cdot 3 \cdot ln2$$

$$f''(x) = 2^{3x} \cdot 3^2 \cdot ln^2 2$$

$$f'''(x) = 2^{3x} \cdot 3^3 \cdot ln^3 2$$

Логично предположить, что n-я производная имеет вид:

$$f^{(n)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^n ln^n 2$$

Шаг 2. Докажем это по индукции:

При n=1 утверждение верно (первую производную посчитали уже).

Предположим, что утверждение верно при n = k: $f^{(k)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^k ln^k 2$

Докажем, что утверждение верно тогда при n = k+1 (шаг индукции), взяв производную от $f^{(k)}(x)$, чтобы получить$f^{(k+1)}(x)$:

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = 2^{3x} \cdot 3^{k+1} ln^{k+1} 2, \text{ ч.т.д.}$$

Задача решена.

Будем далее решать задачи, пользуясь имеющимися правилами взятия производной и табличными производными. По индукции решать не советую.

Пример 2. $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$; $f^{(n)}(x)-?$

Разобьем нашу дробь на 2 элементарных:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2})$$

Теперь мы уже можем взять производные от элементарных дробей как от $(x-2)^{-1}$, сложить эти производные, разделить на 4(в силу правила 1 взятия n-й производной) и получить ответ. Мы знаем табличную производную от линейной функции в любой степени: $((ax+b)^{\alpha})^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$. По этой формуле для $(ax+b)^{\alpha} = (x\pm 2)^{-1}$, т.е. $a = 1$, $b = \pm 2$, $\alpha = -1$, имеем:

$((x\pm 2)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-1-n+1)(x\pm 2)^{-1-n} = (-1)^n n! \frac{1}{(x\pm 2)^{n+1}}$:

$$f^{(n)}(x) = (\frac{1}{x^2-4})^{(n)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-2})^{(n)} - \frac{1}{4}(\frac{1}{x+2})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}})$$

Пример 3. $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}$; $f^{(n)}(x)-?$

Решение:

$$(\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)})^{(n)} = (-\frac{5}{x-1} + \frac{7}{x-2})^{(n)} = (-5(x-1)^{-1} + 7(x-2)^{-1})^{(n)} =$$

$$= 5(-1)^{n+1} n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + 7(-1)^n n! \frac{1}{(x-2)^{n+1}}$$

Здесь к $(x-1)^{-1}$ и $(x-2)^{-1}$ была применена формула взятия n-й производной $((ax+b)^{\alpha})^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$:

$$((x-1)^{-1})^{(n)} = 1^n(-1)(-1-1)\dots(-1-n+1)(x-1)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{1+n}}$$

$$((x-2)^{-1})^{(n)} = 1^n(-1)(-1-1)\dots(-1-n+1)(x-2)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{1+n}}$$

Пример 4. $f(x) = x^2 cos2x$. $f^{(n)}(x)-?$

Решение:

Пример очень типичный, такие часто бывают на письменном экзамене: пример типа многочлен умножить на синус/косинус/экспоненту/другую функцию.

Воспользуемся формулой Лейбница, приведенной выше. Здесь u и v из этой формулы: $u = cos2x$, $v = x^2$. Также учтем, что все производные, начиная с третьей и выше, от x^2 равны нулю. Значит, в формуле Лейбница будет всего 3 члена: в которых участвуют нулевая, первая и вторая производная от u. Учтем, что $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$. Будем применять формулу n-й производной: $(cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n cos(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$.

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 x^2 (cos2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)'(cos2x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)''(cos2x)^{(n-2)} =$$

$$= 1 \cdot x^2 \cdot 2^n \cdot cos(2x + \frac{\pi n}{2}) + n \cdot 2x \cdot 2^{n-1} cos(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 2^{n-2} cos(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}) =$$

$$= 2^n x^2 cos(2x + \frac{\pi n}{2}) + nx \cdot 2^n sin(2x + \frac{\pi n}{2}) - \frac{n(n-1)}{4} 2^n cos(2x + \frac{\pi n}{2}) =$$

$$= 2^n (x^2 - \frac{n(n-1)}{4}) cos(2x + \frac{\pi n}{2}) + 2^n nx sin(2x + \frac{\pi n}{2})$$

Пример 5. $f(x) = (x^2 + x)4^{5x}3^{2x}$. $f^{(n)}(x)-?$

Для начала перепишем условие: $f(x) = (x^2+x)(4^5 3^2)^x$. Пусть $4^5 3^2 = a$. Тогда по формуле Лейбница:

$$(f(x))^{(n)} = C_n^0(x^2+x)(a^x)^{(n)} + C_n^1(2x+1)(a^x)^{(n-1)} + C_n^2 \cdot 2(a^x)^{(n-2)} =$$

$$= (x^2+x)a^x ln^n a + n(2x+1)a^x ln^{n-1} a + n(n-1)a^x ln^{n-2} a,$$

где $a = 4^5 3^2$

Пример 6. $f(x) = (2x+3)^2 log_3\sqrt{(3-2x)^3}$. $f^{(n)}(x)-?$

Этот пример нужно, как и предыдущие, решать с помощью формулы Лейбница. Но проблема в том, что $log_3\sqrt{(3-2x)^3}$ - не табличная функция. Поэтому придется начинать от логарифма брать производную вручную:

$$(log_3\sqrt{(3-2x)^3})' = \frac{\sqrt{(3-2x)} \cdot \frac{3}{2} \cdot (-2)}{\sqrt{(3-2x)^3} ln3} = -\frac{3}{ln3} \cdot (3-2x)^{-1}$$

От этой функции n-я производная уже является табличной. Обозначим $g(x) = (log_3\sqrt{(3-2x)^3})' = -\frac{3}{ln3} \cdot (3-2x)^{-1}$. Исходя из этих обозначений, $(log_3\sqrt{(3-2x)^3})^{(n)} = g^{(n-1)}(x)$, т.к., очевидно, $y^{(n)}(x) = (y'(x))^{(n-1)}$, где $y(x)$ - произвольная функция.

По формуле Лейбница

$$f^{(n)}(x) = ((2x+3)^2 log_3\sqrt{(3-2x)^3})^{(n)} =$$

$$= C_n^0(2x+3)^2(log_3\sqrt{(3-2x)^3})^{(n)} + C_n^1 \cdot 4 \cdot (2x+3)(log_3\sqrt{(3-2x)^3})^{(n-1)} + C_n^2 \cdot 8(log_3\sqrt{(3-2x)^3})^{(n-2)} =$$

$$= (2x+3)^2(g(x))^{(n-1)} + 4n(2x+3)(g(x))^{(n-2)} + 4n(n-1)(g(x))^{(n-3)}$$

Посчитаем отдельно производные функции g(x).

$$g(x)^{(n-1)} = -\frac{3}{ln3}(-2)^{n-1}(-1)(-1-1)\dots(-1-(n-1)+1)(3-2x)^{-1-(n-1)} =$$

$$= -\frac{3}{ln3}(-1)^{n-1}2^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!(3-2x)^{-n} = -\frac{3}{ln3}2^{n-1}(n-1)!(3-2x)^{-n}$$

$$g(x)^{(n-2)} = -\frac{3}{ln3}2^{n-2}(n-2)!(3-2x)^{-n+1}$$

$$g(x)^{(n-3)} = -\frac{3}{ln3}2^{n-3}(n-3)!(3-2x)^{-n+2}$$

Таким образом,

$$f^{(n)}(x) = (2x+3)^2(g(x))^{(n-1)} + 4n(2x+3)(g(x))^{(n-2)} + 4n(n-1)(g(x))^{(n-3)} =$$

$$= -\frac{3}{ln3}(2x+3)^2 2^{n-1}(n-1)!(3-2x)^{-n} - \frac{3}{ln3}4n(2x+3)2^{n-2}(n-2)!(3-2x)^{-n+1} -$$

$$-\frac{3}{ln3}4n(n-1)2^{n-3}(n-3)!(3-2x)^{-n+2} =$$

$$= -\frac{3 \cdot 2^{n-1}(n-3)!}{(3-2x)^n ln3}((2x+3)^2(n-1)(n-2) + 2n(2x+3)(3-2x)(n-2) + n(n-1)(3-2x)^2)$$

Пример 7. Для $f(x) = arctgx$ найти $f^{(n)}(0)$.

$f' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = 1$. Возьмем $(n-1)$ю производную от обеих частей этого уравнения. Имеем:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

При $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

Выразили производную рекурсивно через предыдущие. Но нужно найти в явном виде. Для n четного и нечетного получим разные ответы.

Для $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, то есть четных:

$$f^{(2k)}(0) = -(2k-1)(2k-2)f^{(2k-2)}(0) = (2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)f^{(2k-4)}(0) = ... =$$

$$= (2k-1)!(-1)^k f^{(0)}(0) = (2k-1)!(-1)^k f(0) = (2k-1)!(-1)^k arctg(0) = 0$$

Для $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, то есть нечетных:

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = (2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)f^{(2k-3)}(0) = ... =$$

$$= (2k)!(-1)^k f'(0) = (2k)!(-1)^k(\frac{1}{1+x^2})(0) = (2k)!(-1)^k$$