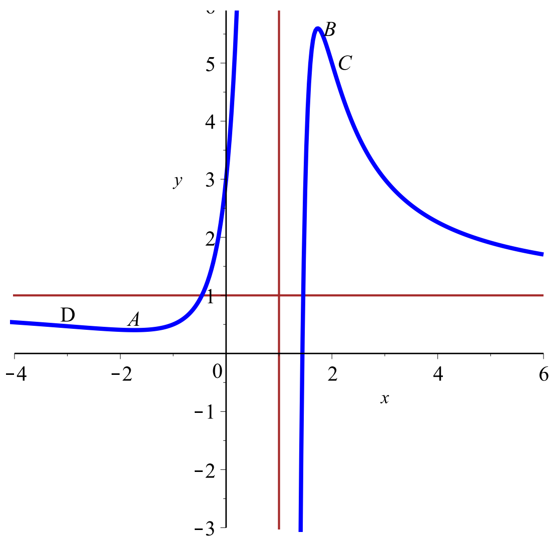
Вариант 1

1. ④ $y(x) = \frac{1}{2}\,(x^2+3x+4) - \frac{1}{2}(x^2+3x+4)\cos(2+6x)$;

$$y^{(n)}(x) = -\frac{1}{2}(x^2+3x+4)\cdot 6^n \cdot \cos\left(2+6x+\frac{\pi}{2}\,n\right) - n\cdot\frac{2x+3}{2}\cdot 6^{n-1}\cdot\cos\left(2+6x+\frac{\pi}{2}\,(n-1)\right) - \\ -\frac{n(n-1)}{2}\cdot 6^{n-2}\cdot\cos\left(2+6x+\frac{\pi}{2}\,(n-2)\right)$$

2. ⑥ $t = x-1$, $y(t) = \frac{1}{3}\,t^2\ln(1+t^2) - \frac{5}{3}\ln(1+t^2)$;

$$y(t) = -\frac{5}{3}\,t^2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{3}\,\left[\frac{1}{k-1}+\frac{5}{k}\right]\,t^{2k} + o(t^{2n}), \qquad t = x-1$$



3. ⑧ $x=1$ — вертикальная асимптота, $\lim\limits_{x\to1\pm0} y(x) = \mp\infty$;
$y=1$ — горизонтальная асимптота, $x\to\pm\infty$;
$y'(x) = -\frac{3(x^2-3)}{(x-1)^4}$, $x=\sqrt{3}$; $y(\sqrt{3})\approx 5.6$ — точка локального максимума,
$x=-\sqrt{3}$, $y(-\sqrt{3})\approx 0.4$ — точка локального минимума;
$y''(x) = \frac{6(x-2)(x+3)}{(x-1)^5} = \frac{6(x^2+x-6)}{(x-1)^5}$; $x=2$, $y(2)=5$; $x=-3$, $y(-3)=\frac{15}{32}\approx 0.5$ — точки перегиба

4. ⑧ Числитель: $\frac{41}{3}\,x^3+o(x^3)$; знаменатель: $-6x^3+o(x^3)$. Ответ: $-\frac{41}{18}$

5. ⑦ $E = E_1\cup E_1$, $E_1=[0,\,2]$, $E_2=[1,\,+\infty)$;
на E_1 функция непрерывна, по теореме Кантора — равномерно непрерывна на E_1;
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$: $\forall x',\,x''\in E_1$: $|x'-x''|<\delta_1 \mapsto |f(x')-f(x''|<\varepsilon$;
на E_2 ограничена производная функции $y'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4\sqrt{x})}$, поэтому функция $y=y(x)$ равномерно непрерывна на E_2;
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$: $\forall x',\,x''\in E_2$: $|x'-x''|<\delta_2 \mapsto |f(x')-f(x''|<\varepsilon$;
выбирая $\delta=\min\{\delta_1,\,\delta_2,\,1\}$, получаем равномерную непрерывность функции на всем E.
Доказательство может быть для множеств, пересекающихся в одной точке, но тогда надо рассмотреть 3 случая расположения точек x' и x'' на множествах

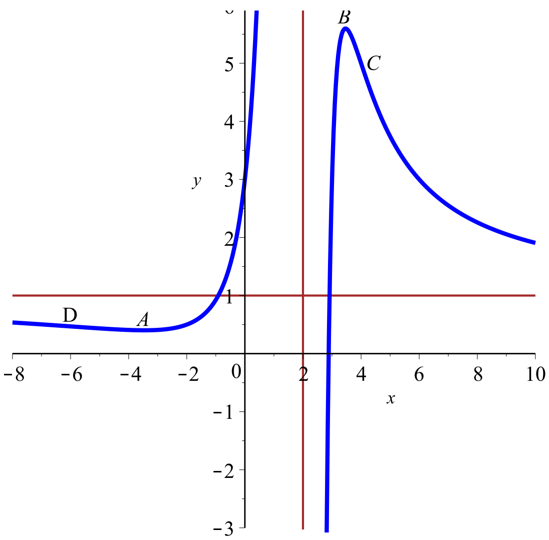
Вариант 2

$\boxed{\textbf{1.}}$ ④ $y(x) = -\dfrac{1}{2}\,(x^2 - x + 1) - \dfrac{1}{2}(x^2 - x + 1)\cos(2 - 2x);$

$$y^{(n)}(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x + 1)\cdot(-2)^n\cdot\cos\left(2 - 2x + \frac{\pi}{2}\,n\right) - n\cdot\frac{2x-1}{2}\cdot(-2)^{n-1}\cdot\cos\left(2 - 2x + \frac{\pi}{2}\,(n-1)\right) - \\ - \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)^{n-2}\cdot\cos\left(2 - 2x + \frac{\pi}{2}\,(n-2)\right)$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ ⑥ $t = x + 2,\ y(t) = \dfrac{1}{5}\,t^2\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2);$

$$y(t) = -t^2 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\,\left[\frac{1}{5(k-1)} + \frac{1}{k}\right]\,t^{2k} + o(t^{2n}), \qquad t = x + 2$$



$\boxed{\textbf{3.}}$ ⑧ $x = 2$ — вертикальная асимптота, $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} y(x) = \mp\infty$;
$y = 1$ — горизонтальная асимптота, $x \to \pm\infty$;
$y'(x) = -\dfrac{6(x^2-12)}{(x-2)^4}$, $x = 2\sqrt{3}$; $y(2\sqrt{3}) \approx 5.6$ — точка локального максимума,
$x = -2\sqrt{3}$, $y(-2\sqrt{3}) \approx 0.4$ — точка локального минимума;
$y''(x) = \dfrac{12(x-4)(x+6)}{(x-2)^5} = \dfrac{12(x^2+2x-24)}{(x-2)^5}$; $x = 4$, $y(4) = 5$; $x = -6$, $y(-6) = \dfrac{15}{32} \approx 0.5$ — точки перегиба

$\boxed{\textbf{4.}}$ ⑧ Числитель: $\dfrac{9}{2}\,x^3 + o(x^3)$; знаменатель: $\dfrac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)$. Ответ: $\dfrac{27}{4}$

$\boxed{\textbf{5.}}$ ⑦ $E = E_1 \cup E_1$, $E_1 = [0,\,2]$, $E_2 = [1,\,+\infty)$;
на E_1 функция непрерывна, по теореме Кантора — равномерно непрерывна на E_1;
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$: $\forall x',\,x'' \in E_1$: $|x' - x''| < \delta_1 \mapsto |f(x') - f(x''| < \varepsilon$;
на E_2 ограничена производная функции $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+3\sqrt[3]{x})}$, поэтому функция $y = y(x)$ равномерно непрерывна на E_2;
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall x',\,x'' \in E_2$: $|x' - x''| < \delta_2 \mapsto |f(x') - f(x''| < \varepsilon$;
выбирая $\delta = \min\{\delta_1,\,\delta_2,\,1\}$, получаем равномерную непрерывность функции на всем E.
Доказательство может быть для множеств, пересекающихся в одной точке, но тогда надо рассмотреть 3 случая расположения точек x' и x'' на множествах

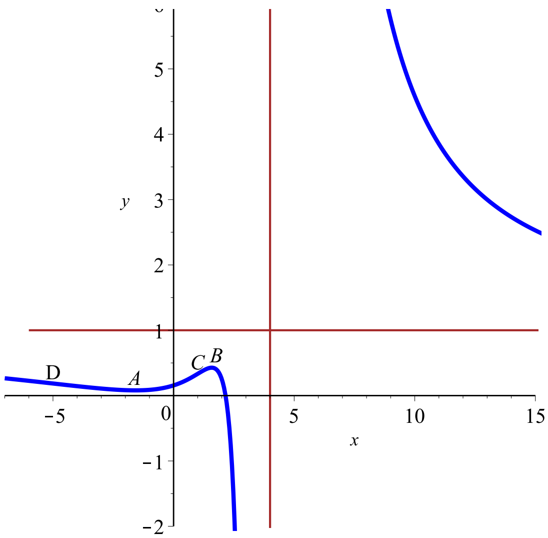
Вариант 3

1. ④ $y(x) = (x^2+3x)(2x-1)^{1/3}$;

$$y^{(n)}(x) = (x^2+3x)\cdot C_{1/3}^{n}\cdot n!\cdot 2^n\cdot(2x-1)^{1/3-n} + n\cdot(2x+3)\cdot C_{1/3}^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot 2^{n-1}\cdot(2x-1)^{1/3-(n-1)} + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot C_{1/3}^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot 2^{n-2}\cdot(2x-1)^{1/3-(n-2)}$$

2. ⑥ $t = x - 1/2$, $y(t) = 2t^2 + \dfrac{1}{2} - \left(2t^2 + \dfrac{1}{2}\right)\cos 4t$;

$$y(t) = 4t^2 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{2^{4k-3}}{(2k-2)!}\left[1 - \frac{4}{2k(2k-1)}\right]t^{2k} + o(t^{2n}), \qquad t = x - 1/2$$



3. ⑧ $x = 4$ — вертикальная асимптота, $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} y(x) = \pm\infty$;
$y = 1$ — горизонтальная асимптота, $x \to \pm\infty$;
$y'(x) = -\dfrac{6(2x^2-5)}{(x-4)^4}$, $x = \sqrt{5/2}$; $y(\sqrt{5/2}) \approx 0.4$ — точка локального максимума,
$x = -\sqrt{5/2}$, $y(-\sqrt{5/2}) \approx 0.1$ — точка локального минимума;
$y''(x) = \dfrac{24(x-1)(x+5)}{(x-4)^5} = \dfrac{12(x^2+4x-5)}{(x-4)^5}$; $x = 1$, $y(1) = 1/3$; $x = -5$, $y(-5) = \dfrac{5}{27} \approx 0.2$ — точки перегиба

4. ⑧ Числитель: $-\dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$; знаменатель: $-\dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$. Ответ: $\dfrac{32}{3}$

5. ⑦ $E = E_1 \cup E_1$, $E_1 = [1,\,3]$, $E_2 = [2,\,+\infty)$;
на E_1 функция непрерывна, по теореме Кантора — равномерно непрерывна на E_1;
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$: $\forall x',\, x'' \in E_1$: $|x' - x''| < \delta_1 \mapsto |f(x') - f(x''| < \varepsilon$;
на E_2 ограничена производная функции $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}(1+2\sqrt{x-1})}$, поэтому функция $y = y(x)$ равномерно непрерывна на E_2;
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall x',\, x'' \in E_2$: $|x' - x''| < \delta_2 \mapsto |f(x') - f(x''| < \varepsilon$;
выбирая $\delta = \min\{\delta_1,\, \delta_2,\, 1\}$, получаем равномерную непрерывность функции на всем E.
Доказательство может быть для множеств, пересекающихся в одной точке, но тогда надо рассмотреть 3 случая расположения точек x' и x'' на множествах

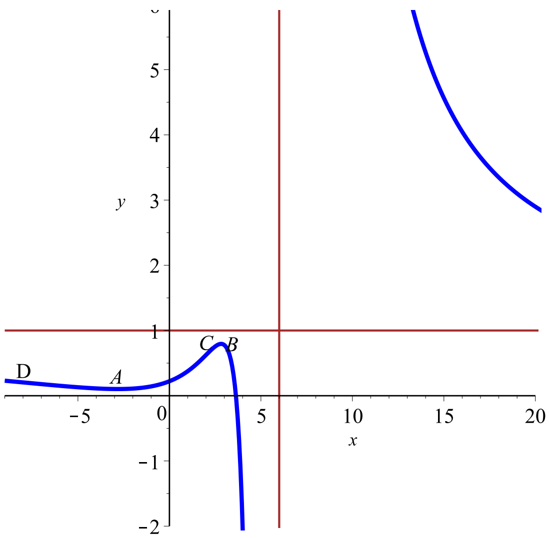
Вариант 4

$\boxed{\textbf{1.}}$ ④ $y(x) = (x^2 - 4x)(3x-1)^{1/3}$;

$$y^{(n)}(x) = (x^2-4x)\cdot C_{1/3}^{n}\cdot n!\cdot 3^n\cdot(3x-1)^{1/3-n} + n\cdot(2x-4)\cdot C_{1/3}^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot 3^{n-1}\cdot(3x-1)^{1/3-(n-1)} + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot C_{1/3}^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot 3^{n-2}\cdot(3x-1)^{1/3-(n-2)}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ ⑥ $t = x - 1/3$, $y(t) = \frac{9}{2}t^2 - 1 + \left(\frac{9}{2}t^2 - 1\right)\cos 6t$;

$$y(t) = -2 + 27t^2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{9\cdot(-1)^{k-1}}{2}\,\frac{6^{2k-2}}{(2k-2)!}\left[1 + \frac{4}{k(2k-1)}\right] t^{2k} + o(t^{2n}), \qquad t = x - 1/3$$



$\boxed{\textbf{3.}}$ ⑧ $x = 6$ — вертикальная асимптота, $\lim\limits_{x\to 6\pm 0} y(x) = \pm\infty$;
$y = 1$ — горизонтальная асимптота, $x \to \pm\infty$;
$y'(x) = -\dfrac{18(x^2-8)}{(x-6)^4}$, $x = \sqrt{8}$; $y(\sqrt{8}) \approx 0.8$ — точка локального максимума,
$x = -\sqrt{8}$, $y(-\sqrt{8}) \approx 0.1$ — точка локального минимума;
$y''(x) = \dfrac{36(x-2)(x+8)}{(x-6)^5} = \dfrac{36(x^2+6x-16)}{(x-6)^5}$; $x = 2$, $y(2) = 5/8 = 0.625$;
$x = -8$, $y(-8) = \dfrac{10}{49} \approx 0.2$ — точки перегиба

$\boxed{\textbf{4.}}$ ⑧ Числитель: $-\dfrac{41}{48}x^3 + o(x^3)$; знаменатель: $\dfrac{3}{2}x^3 + o(x^3)$. Ответ: $-\dfrac{41}{72}$

$\boxed{\textbf{5.}}$ ⑦ $E = E_1 \cup E_1$, $E_1 = [1, 3]$, $E_2 = [2, +\infty)$;
на E_1 функция непрерывна, по теореме Кантора — равномерно непрерывна на E_1;
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in E_1$: $|x' - x''| < \delta_1 \mapsto |f(x') - f(x''| < \varepsilon$;
на E_2 ограничена производная функции $y'(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{(x-1)^2}(1 + 9\sqrt[3]{x-1})}$, поэтому функция $y = y(x)$ равномерно непрерывна на E_2;
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in E_2$: $|x' - x''| < \delta_2 \mapsto |f(x') - f(x''| < \varepsilon$;
выбирая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$, получаем равномерную непрерывность функции на всем E.

Доказательство может быть для множеств, пересекающихся в одной точке, но тогда надо рассмотреть 3 случая расположения точек x' и x'' на множествах