$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ → ряд → матерное слово

Формула Тейлора

Опр. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда в $U(x_0)$ можно написать $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{r_n(f,x)}$ =

$= P_n(f,x) + r_n(f,x)$ — формула Тейлора,

$P_n(f,x)$ — многочлен Тейлора, $r_n(f,x)$ — остаточный член.

$$r_n(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

производная

Лемма: Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f'$ в $\mathring{U}(x_0)$. Тогда в $\mathring{U}(x_0)$ ↳ $(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x)$

$$r_{n-1}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$r_{n-1}(f',x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Док-во:

$$(r_n(f,x))' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}\right)' =$$

$$= f'(x) - \sum_{\substack{k=0\\k=-1}}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)\,\cancel{k}\,(x-x_0)^{k-1}}{\cancel{k!}\;(k-1)!}\right)$$

$$= \Bigg(f(x) - \underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{\underbrace{0!}_{1}}\cdot\overbrace{(x-x_0)^0}^{1}}_{const} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}\Bigg)' =$$

$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} \to \text{ЧТД} =$$

$$= r_{n-1}(f', x)$$