Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О.В. Бесов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 2

Москва, 2005

Составитель О.В.Бесов

УДК 517.

Методические указания по математическому анализу. Ч. 2. Курс лекций по математическому анализу (для студентов 2-го курса). Ч. 2.
МФТИ. М., 2005. 216 с.

Учебное пособие соответствует программе 2-го курса МФТИ и содержит теорию кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, тригонометрических рядов Фурье, нормированных и гильбертовых пространств, преобразований Фурье и элементы теории обобщенных функций.

Оно написано на основе лекций, читаемых в течение многих лет в МФТИ автором (профессором МФТИ, чл.-корреспондентом РАН, зав. отделом теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН).

Предназначено для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике.

Оглавление

Глава 18
МЕРА МНОЖЕСТВ В $\boldsymbol{n}$-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как и в § 10.1, символом $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) будем обозначать n-мерное евклидово пространство, т. е. множество всевозможных упорядоченных наборов действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, называемых точками (с координатами $x_1, \ldots, x_n$), в котором введено понятие расстояния:

$$\operatorname{dist}(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

при $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Уже отмечалось, что в $\mathbb{R}^n$ можно ввести сложение,

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

и умножение на действительное число λ,

$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Операции сложения и умножения на действительное число обладают теми же свойствами, что и операции сложения и умножения в $\mathbb{R}$. В частности, нулевым элементом в $\mathbb{R}^n$ является $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$, определена разность (как операция, обратная сложению), имеющая вид

$$x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \quad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

и т. д. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ превращается в линейное (векторное) пространство. Элементы (точки) $\mathbb{R}^n$ будем называть также векторами.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести понятие скалярного произведения двух векторов:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Оно согласовано с уже имеющимся понятием расстояния в $\mathbb{R}^n$ в том смысле, что

$$\operatorname{dist}(x, y) = |x - y| \quad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

где $|x| := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x,x)}$ — длина вектора x. Два вектора x, y называют *ортогональными* друг другу (пишут $x \perp y$), если $(x,y)=0$. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ называют единичным вектором, если $|x| = 1$.

Единичными, например, являются векторы

$$e_i = (0,\ \ldots,\ 0, 1, 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

(единица стоит на i-м месте).

Набор векторов $e_1,\ e_2,\ \ \ldots,\ e_n$ называют ортогональным базисом единичных векторов. Он обладает двумя свойствами:

1°. $e_i \perp e_j$ при $i \neq j$,

2°. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Последнее равенство называют разложением вектора x по базису $\{e_i\}_1^n$.

Ортогональный базис $\{e_i\}_1^n$ определяет в $\mathbb{R}^n$ ортогональную систему координат. Точка $\vec{0}$ называется началом координат, прямые

$$\{x : x = te_i, \quad -\infty < t < +\infty\}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n,$$

— координатными осями, числа $x_1,\ \ \ldots,\ x_n$ — координатами вектора $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

§ 18.1. Определение меры по Жордану

Введем и изучим понятие меры в $\mathbb{R}^n$, обобщающее понятие длины ($n = 1$), площади ($n = 2$), объема ($n = 3$). Будет изложена теория меры множеств, предложенная Жорданом.

Из всех подмножеств $\mathbb{R}^n$ будет выделена совокупность измеримых множеств, каждому из которых будет приписана мера. При этом будут выполнены свойства, сформулированные в теоремах 18.2.2, 18.2.3.

Определение 1. Множество

$$P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times\ \ldots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, будем называть *полуоткрытым прямоугольником*, или сокращенно — п-*прямоугольником*.

В случае $n = 1$ P представляет собой полуинтервал или пустое множество. В случае $n = 2$ P — прямоугольник без левой и нижней сторон или пустое множество. В случае $n = 3$ P — прямоугольный параллелепипед без трех граней или пустое множество.

Меру *пустого множества* положим равной нулю.

Для каждого из п-прямоугольников (1) определим его меру равенством

$$\mu P := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{2}$$

Таким образом, каждому п-прямоугольнику P вида (1) поставлено в соответствие число — его мера μP; при этом выполнены следующие условия:

1°. $\mu P \geqslant 0$;

2°. мера μP аддитивна, т. е. если $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ (P, P_i — п-прямоугольники) и $P_i \cap P_k = \varnothing$ при $i \neq k$, то

$$\mu P = \sum_{i=1}^{m} \mu P_k.$$

Определение 2. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем *элементарным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся п-прямоугольников.

Лемма 1. *Совокупность элементарных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е. объединение, пересечение и разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами.*

Доказательство. Ясно, что пересечение двух п-прямоугольников есть п-прямоугольник. Поэтому пересечение двух элементарных множеств является элементарным множеством.

Разность двух п-прямоугольников является, как легко проверить, элементарным множеством. Отсюда следует, что разность двух элементарных множеств также является элементарным множеством.

Если A, B — элементарные множества, то их объединение можно представить в виде

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

т. е. в виде объединения двух попарно непересекающихся элементарных множеств. Отсюда следует, что $A \cup B$ — элементарное множество.

Определим теперь меру μA для элементарного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad P_i \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq k,$$

(где P_k — п-прямоугольники) равенством

$$\mu A := \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. что μA не зависит от способа представления A в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся п-прямоугольников. Пусть

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j, \quad P_i \cap P_k = \varnothing, \quad Q_i \cap Q_k = \varnothing \text{ при } i \neq k,$$

где P_k и Q_j — п-прямоугольники. Так как пересечение двух п-прямоугольников есть п-прямоугольник, то в силу аддитивности меры для п-прямоугольников

$$\sum_k \mu P_k = \sum_{k,j} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_j \mu Q_j.$$

В частности, если п-прямоугольник P (1) представить в виде $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$, то мера его как элементарного множества совпадет с (2).

Лемма 2. *Пусть A, B — элементарные множества. Тогда*

1°. *(Монотонность меры)*

$$0 \leqslant \mu A \leqslant \mu B, \quad \text{если } A \subset B. \tag{3}$$

2°. *(Полуаддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B. \tag{4}$$

3°. *(Аддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B, \quad \text{если} \quad A \cap B = \varnothing. \tag{5}$$

$$\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B, \quad \text{при} \quad B \subset A. \tag{6}$$

Доказательство. (3) очевидно. Установим (5). Множество $A \cup B$ элементарно в силу леммы 1. Если

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad B = \bigcup_{j=1}^{r} Q_j, \quad P_k,\ Q_j \text{ — п-прямоугольники,}$$

$$P_i \cap P_k = \varnothing \text{ при } i \neq k, \quad Q_i \cap Q_k = \varnothing \text{ при } i \neq k,$$

то

$$A \cup B = \left(\bigcup_{k=1}^{m} P_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r} Q_j\right),$$

причем $P_k \cap Q_j = \varnothing\ \forall\, k, j$.

Тогда по определению меры элементарного множества

$$\mu(A \cup B) = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k + \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j,$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k, \quad \mu B = \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j,$$

откуда следует (5). Из (5) и (3) следует (4):

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu B \leqslant \mu A + \mu B.$$

Из (5) следует (6).

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество. Числа

$$\mu_* E = \sup_{A \subset E} \mu A, \quad \mu^* E = \inf_{B \supset E} \mu B,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем элементарным множествам A, B ($A \subset E$, $B \supset E$), называются соответственно *нижней* (или *внутренней*) и *верхней* (или *внешней*) *мерой Жордана* множества E.

Лемма 3. *Нижняя и верхняя меры ограниченных множеств обладают следующими свойствами:*

1° $0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E < +\infty$;

2° *(монотонность нижней и верхней мер). Если* $E \subset F$, *то* $0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu_* F$, $0 \leqslant \mu^* E \leqslant \mu^* F$.

3° *(полуаддитивность верхней меры).* $\mu^*(E \cup F) \leqslant \mu^* E + \mu^* F$.

Доказательство. Свойство 1° очевидно, свойства 2°, 3° следуют соответственно из (3), (4).

Определение 4. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\mu_* E = \mu^* E$, т. е. если его нижняя и верхняя меры совпадают. Общее значение этих мер называется *мерой Жордана* множества E и обозначается μE.

Таким образом, для измеримого по Жордану множества E

$$\mu_* E = \mu^* E = \mu E.$$

Замечание 1. Множество, измеримое по Жордану, в случае $n = 2$ называют также *квадрируемым*, а в случае $n = 3$ — *кубируемым*.

Очевидно, любое элементарное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с его мерой как элементарного множества.

Замечание 2. В дальнейшем вместо «измеримость по Жордану», «мера Жордана» будем говорить «измеримость», «мера», поскольку другие понятия измеримости и меры в данном курсе не изучаются.

Упражнение 1. Пусть E — измеримое множество. Показать, что $\mu E > 0$ тогда и только тогда, когда E имеет внутренние точки.

Пример 1. Пусть при a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$,

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset P \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i].$$

Тогда прямоугольник P (замкнутый, или без части границы, или открытый) измерим и $\mu P = \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

В частности, внутренность $\operatorname{int} P = \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ и замыкание $\overline{P} = \prod\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ измеримы и

$$\mu(\operatorname{int} P) = \mu\overline{P} = \mu P.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть п-прямоугольники P_m, Q_m:

$$P_m = \prod_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{m}, b_i - \frac{1}{m}\right] \subset P \subset \prod_{i=1}^{n}\left(a_i - \frac{1}{m}, b_i + \frac{1}{m}\right] = Q_m$$

и учесть, что $\lim\limits_{m\to\infty}\mu P_m = \lim\limits_{m\to\infty}\mu Q_m = \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Упражнение 2. Пусть A — элементарное множество. Доказать, используя предыдущий пример, что $\operatorname{int} A$ и $\overline{A}$ являются измеримыми множествами и

$$\mu(\operatorname{int} A) = \mu\overline{A} = \mu A.$$

Пример 2. Множество в $\mathbb{R}$, состоящее из конечного числа точек, измеримо, и мера его равна нулю.

Пример 3. Множество $E \subset \mathbb{R}$ рациональных точек отрезка $[0, 1]$ неизмеримо, т. к. $\mu_* E = 0$, $\mu^* E = 1$.

Пример 4. Множество точек $E \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, где E то же, что в примере 3, измеримо, и двумерная мера его равна нулю.

Пример 5. Всякое подмножество множества меры нуль измеримо и также имеет меру, равную нулю.

Пример 6 (ограниченной неизмеримой области). Пусть $\{r_j\}_1^\infty$ — каким-либо образом занумерованная последовательность рациональных точек интервала $(0,1)$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$,

$$D=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(r_j-\frac{\varepsilon}{2^j}\,,r_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\subset\mathbb{R}^1,$$

$$G=(D\times[0,1))\cup(0,1)\times(-1,0)\subset\mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что G является областью. Покажем, что G не измерима по Жордану. Достаточно установить неизмеримость $G^+=D\times(0,1)$. Она следует из того, что

$$\mu^*G^+=1,\quad \mu_*G^+=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^j}=2\varepsilon<1.$$

Упражнение 3. Доказать, что для измеримости множества $E\subset\mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>$ >0 существовали такие два измеримых множества F_ε, G_ε, что $F_\varepsilon\subset E\subset G_\varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$.

§ 18.2. Свойства измеримых по Жордану множеств

Упражнение 1. Доказать, что если множества $E,F\subset\mathbb{R}^n$ измеримы, то:

1° Измеримы множества $E\cup F$, $E\cap F$ и

$$\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F)=\mu E+\mu F.$$

2° Измеримо множество $E\setminus F$ и

$$\mu(E\setminus F)=\mu E-\mu F,\quad \text{если}\quad F\subset E.$$

У к а з а н и е. Получить сначала эти равенства для элементарных множеств. Затем оценить снизу нижние и сверху верхние меры множеств из левых частей равенств.

Лемма 1. *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, $x^{(0)}\in E$, $y^{(0)}\notin E$. Тогда на отрезке, соединяющем точки $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, найдется точка $z^{(0)}\in$ $\in\partial E$.*

Доказательство будем проводить путем последовательного деления пополам отрезка с концами в точках $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, отбирая на каждом шаге тот отрезок, для которого один конец принадлежит E, а другой — не принадлежит E. Пусть $z^{(0)}$ — общая точка для всех отрезков построенной стягивающейся системы вложенных отрезков. Тогда всякая окрестность $U(z^{(0)})$ содержит как точки из E, так и точки не из E. Следовательно, $z^{(0)} \in \partial E$.

Лемма 2. *Пусть ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$, D — элементарное множество, $\partial E \subset D$. Тогда $B := E \cup D$ — элементарное множество.*

Доказательство. Пусть п-прямоугольник $Q \supset E \cup D$. Тогда элементарное множество

$$Q \setminus D = \left(\bigcup_{k=1}^{l} P_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=l+1}^{m} P_k \right),$$

где P_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ — попарно непересекающиеся п-прямоугольники,

$$E \cap P_k \neq \varnothing \quad (1 \leqslant k \leqslant l), \quad E \cap P_k = \varnothing \quad (l+1 \leqslant k \leqslant m).$$

На самом деле $P_k \subset E$ при $1 \leqslant k \leqslant l$ в силу леммы 1.

Из $\bigcup\limits_{k=1}^{l} P_k \subset E$, $\left(\bigcup\limits_{k=l+1}^{m} P_k \right) \cap E = \varnothing$ следует, что

$$B = E \cup D = \left(\bigcup_{k=1}^{l} P_k \right) \cup D,$$

а значит, и утверждение леммы.

Теорема 1 (критерий измеримости). *Для измеримости ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы мера его границы $\mu \partial E = 0$.*

Доказательство. 1°. Пусть множество E измеримо. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ существуют элементарные множества A_ε, B_ε такие, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon - \mu A_\varepsilon < \varepsilon.$$

Тогда $\partial E \subset \overline{B_\varepsilon} \setminus \operatorname{int} A_\varepsilon$. Сужая п-прямоугольники, составляющие A_ε, и расширяя п-прямоугольники, составляющие B_ε (как это делалось в примере 18.1.1), без ограничения общности можем считать, что $\partial E \subset B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon$. В силу монотонности верхней меры, леммы 18.1.1 и (18.1.6)

$$\mu^* \partial E \leqslant \mu^*(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) = \mu B_\varepsilon - \mu A_\varepsilon < \varepsilon.$$

Поэтому $\mu^* \partial E = 0$. Следовательно, ∂E измеримо и $\mu \partial E = 0$.

2°. Пусть множество E ограничено и $\mu \partial E = 0$. Пусть $\varepsilon > > 0$. Тогда существует элементарное множество D_ε такое, что $\partial E \subset D_\varepsilon$, $\mu D_\varepsilon < \varepsilon$. Построим множества

$$B_\varepsilon = E \cup D_\varepsilon, \quad A_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus D_\varepsilon.$$

Множества B_ε, A_ε элементарны в силу лемм 2 и 18.1.1. Кроме того,

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \ \ \mu A_\varepsilon \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E \leqslant \mu B_\varepsilon = \mu A_\varepsilon + \mu D_\varepsilon < \mu A_\varepsilon + \varepsilon.$$

Отсюда

$$0 \leqslant \mu^* E - \mu_* E < \varepsilon.$$

Следовательно, $\mu_* E = \mu^* E$, т. е. множество E измеримо.

Теорема 2. *Совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е., если множества E, F измеримы, то измеримы и $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F, \ \partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F, \ \partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F.$$

Сделаем это лишь в первом случае. Пусть $x^{(0)} \in \partial(E \cup F)$. Тогда в каждой окрестности $U(x^{(0)})$ находятся как точки из $E \cup F$, так и не из $E \cup F$. Следовательно, либо в каждой окрестности $U(x^{(0)})$ находятся точки из E (и тогда $x^{(0)} \in \partial E$), либо в каждой окрестности находятся точки из F (и тогда $x^{(0)} \in \partial F$). Поэтому $x^{(0)} \in \partial E \cup \partial F$, а значит, $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$.

В силу критерия измеримости (теорема 1) $\mu \partial E = 0$, $\mu \partial F = = 0$. Используя монотонность и полуаддитивность верхней меры, имеем

$$\mu^* \partial(E \cup F) \leqslant \mu^*(\partial E \cup \partial F) \leqslant \mu^* \partial E + \mu^* \partial F = \mu \partial E + \mu \partial F = 0.$$

Следовательно, $\mu\partial(E \cup F) = 0$ и в силу критерия измеримости объединение $E \cup F$ измеримо.

Аналогично устанавливается измеримость $E \cap F$ и $E \setminus F$.

Теорема 3. *Пусть множества $E, F \subset \mathbb{R}^n$ измеримы. Тогда:*

1° *(Монотонность меры)*

$$0 \leqslant \mu E \leqslant \mu F, \text{ если } E \subset F. \tag{1}$$

2° *(Полуаддитивность меры)*

$$\mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F. \tag{2}$$

3° *(Аддитивность меры)*

$$\mu(E \cup F) = \mu E + \mu F, \text{ если } E \cap F = \varnothing. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Измеримость $E \cup F$ установлена в теореме 2, (1) и (2) следуют соответственно из монотонности и полуаддитивности верхней меры (лемма 18.1.3).

Установим (3). Пусть A_1, A_2 — элементарные множества,

$$A_1 \subset E, \quad A_2 \subset F.$$

Тогда

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1 \cup A_2 \subset E \cup F.$$

В силу (18.1.5), (1), (2)

$$\mu A_1 + \mu A_2 = \mu(A_1 \cup A_2) \leqslant \mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F.$$

Переходя к верхним граням по $A_1 \subset E$, $A_2 \subset F$, получаем отсюда, что

$$\mu E + \mu F \leqslant \mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F,$$

откуда и следует (3).

Теорема 4. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Тогда измеримы его замыкание $\overline{E}$ и его внутренность $\operatorname{int} E$ и $\mu\overline{E} = \mu(\operatorname{int} E) = \mu E$.*

Доказательство. Из измеримости E следует в силу критерия измеримости, что $\mu\partial E = 0$. Но

$$\overline{E} = E \cup \partial E, \quad \operatorname{int} E = E \setminus \partial E.$$

Остается воспользоваться теоремами 2, 3.

Для ряда важных применений критерия измеримости установим, что некоторые множества простого вида имеют меру нуль.

Теорема 5. *График непрерывной на компакте функции имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $f\colon\ F \to \mathbb{R}$, где $F \subset \mathbb{R}^n$ — компакт.

$$E = \{(x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \ :\ x \in F,\\ x_{n+1} = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

— график функции f. Покажем, что $(n+1)$-мерная мера множества E $\mu_{n+1}E$ равна нулю. Функция f, как непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем. Следовательно, для

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0 :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \text{ при } x, y \in E,\ |x - y| < \delta.$$

Пусть п-прямоугольник $\tilde{P} \supset F$, $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^n$. Разобьем его на попарно непересекающиеся п-прямоугольники, диаметры которых меньше δ, и обозначим через $P_1, \ \ldots, P_m$ те из них, которые пересекаются с F. В каждом P_j возьмем какую-либо точку $x^{(j)} \in P_j$ и построим п-прямоугольник

$$Q_j := P_j \times (f(x^{(j)}) - \varepsilon, f(x^{(j)}) + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Очевидно, график сужения функции f на $F \cap P_j$ содержится в Q_j. Следовательно, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ и в силу монотонности верхней меры

$$\mu^*_{n+1} E \leqslant \sum_{j=1}^{m} 2\varepsilon\mu P_j \leqslant 2\varepsilon\mu\tilde{P}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $\mu^*_{n+1}E = 0$, так что $\mu_{n+1}E = 0$.

Теорема 6. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$, $\mu F = 0$. Тогда прямой цилиндр $E = F \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ измерим и $\mu_{n+1} E = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и B_ε — такое элементарное множество в $\mathbb{R}^n$, что

$$F \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon < \varepsilon.$$

Тогда $B_\varepsilon \times (a-1, b]$ — элементарное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$E \subset B_\varepsilon \times (a-1, b],$$

$$\mu^*_{n+1} E \leqslant \mu_{n+1}(B_\varepsilon \times (a-1, b]) < \varepsilon(b - a + 1).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\mu^*_{n+1} E = 0$, так что $\mu_{n+1} E = 0$.

Пример 1. Криволинейная трапеция

$$F = \{(x, y) \,:\, a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

где f — непрерывная на $[a, b]$ функция, $f \geqslant 0$, является измеримым (квадрируемым) множеством в силу теоремы 5.

Лемма 3. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu E = 0$ и*

$$U_\delta(E) := \{x \,:\, \inf_{y \in E} |x - y| < \delta\}$$

— δ-окрестность множества E ($\delta > 0$).

Тогда $\mu^* U_\delta(E) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. Пусть $\mu E = 0$, $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ — такое элементарное множество, что

$$E \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon < \varepsilon.$$

Для каждого п-прямоугольника P_k обозначим через $\tilde{P}_k$ п-прямоугольник, получающийся из P_k преобразованием подобия с центром в центре P_k и коэффициентом подобия, равным двум. Тогда $\mu \tilde{P}_k = 2^n \mu P_k$ и для $\tilde{B}_\varepsilon := \bigcup\limits_{k=1}^{m} \tilde{P}_k < \mu \tilde{B}_\varepsilon < 2^n \varepsilon$. Ясно, что

$$\exists\, \delta(B_\varepsilon) > 0 \,:\, U_\delta(E) \subset \tilde{B}_\varepsilon \quad \forall\, \delta \,:\, 0 < \delta \leqslant \delta(B_\varepsilon),$$

так что $\mu^* U_\delta(E) \leqslant \mu \tilde{B}_\varepsilon < 2^n \varepsilon$, откуда и следует утверждение леммы.

Глава 19
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 19.1. Определение кратного интеграла и критерий интегрируемости

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (по Жордану) множество. Конечная система $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ непустых измеримых (по Жордану) множеств E_i называется *разбиением множества* E, если

1°. $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ при $i \neq j$;

2°. $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$.

Число $|\tau| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \operatorname{diam}(E_i)$ называется мелкостью разбиения τ.

Для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i.$$

В самом деле, $\mu E \leqslant \sum\limits_{i=1}^{i_k} \mu E_i$, а с другой стороны,

$$\mu E \geqslant \mu U(\operatorname{int} E_i) = \sum \mu(\operatorname{int} E_i) = \sum \mu E_i.$$

Определение 2. Пусть τ и τ' — два разбиения множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что τ' *следует* за τ или является *измельчением* разбиения τ и писать $\tau' \succ \tau$, если для любого $E'_j \in \tau'$ существует $E_i \in \tau$: $E'_j \subset E_i$.

Разбиения данного множества E обладают следующими свойствами:

1°. Если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$.

2°. Для любых τ_1, τ_2 $\exists\, \tau$: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве разбиения τ взять множество всевозможных непустых пересечений $E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}$, где $E^{(1)} \in \tau_1$, $E_j^{(2)} \in \tau_2$.

Определение 3. Пусть на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ определена (числовая) функция f и $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение E. Отметим в каждом E_i какую-либо точку $\xi^{(i)} \in E_i$. Тогда сумма

$$S_\tau(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_\tau)}) := \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i$$

называется *интегральной суммой Римана* функции f.

Определение 4. Число I называется *интегралом Римана* функции f по измеримому множеству $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i - I \right| < \varepsilon$$

при любом разбиении τ множества E с мелкостью $|\tau| < \delta$ и при любом выборе отмеченных точек.

При этом функцию f называют *интегрируемой по Риману* на множестве E.

Интеграл от функции f по множеству E обозначается символами

$$\int_E f(x)\, dx \quad \text{или} \quad \iint\limits_E \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Кратко можно записать

$$\int_E f(x)\, dx := \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau(f; \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_\tau)}),$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в ε, δ-терминах в определении 4.

Напомним, что в случае $n = 1$ необходимым условием интегрируемости функции на отрезке $[a, b]$ является ограниченность этой функции на $[a, b]$. Следующий пример показывает, что при $n \geqslant 2$ условие ограниченности не является необходимым для интегрируемости этой функции.

Пример 1. При $n = 2$ рассмотрим множество E, имеющее вид «шарика на нитке»:

$$E = U_1((0,3)) \cup (\{0\} \times (0, 2])$$

и функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Ясно, что f неограничена на E, но $\exists \int_E f(x)\,dx = 0$.

Однако если функция интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она заведомо ограничена на внутренности E ($\operatorname{int} E$) (в частности, интегрируемая на открытом множестве функция ограничена на нем). Это утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть для множества E существует такая последовательность разбиений $\{\tau_k\}_1^\infty$ с $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$, для которой все элементы всех разбиений имеют положительную меру.*

Пусть функция f интегрируема на E. Тогда она ограничена на E.

Доказательство по существу такое же, как в одномерном случае для $E = [a,b]$.

Упражнение 1. Пусть измеримое множество $E \subset \overline{\operatorname{int} E}$. Доказать, что всякая интегрируемая на E функция ограничена на E.

Напомним, что колебанием функции f на множестве $D \subset \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\omega(f; D) = \sup_{x,y \in D} |f(x) - f(y)| = \sup_D f - \inf_D f.$$

Теорема 2 (критерий интегрируемости). *Для интегрируемости функции f на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы для*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f) \mu E_i \quad \forall\, \tau \;:\; |\tau| < \delta, \qquad (1)$$

где $\omega_i(f) := \omega(f; E_i)$.

Доказательство то же, что для случая $E = [a, b]$.

Критерий интегрируемости кратко можно записать так:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_\tau \\ \mu E_i>0}} \omega_i(f)\mu E_i = 0, \tag{2}$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в ε, δ-терминах в (1).

Определение 5. Пусть функция f ограничена на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение E. Пусть

$$M_i := \sup_{E_i} f, \quad m_i := \inf_{E_i} f.$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) := \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i, \quad \overline{S_\tau}(f) := \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции f, соответствующими разбиению τ.

Ясно, что для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$ ограниченной функции f

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f).$$

Легко видеть, что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\mu E_i.$$

С помощью последнего равенства и критерия интегрируемости (19.2.1) можно сформулировать критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу:

Теорема 3. *Для интегрируемости ограниченной функции f на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\, \tau \,:\, |\tau| < \delta.$$

Следствие 1. *Пусть ограниченная функция f интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \overline{S_\tau}(f), \text{ причём}$$
$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\,\tau\ :\ |\tau| < \delta.$$

Покажем, что *функция, интегрируемая на отрезке* $[a, b]$ *в смысле определения* 14.1.2, *интегрируема на этом отрезке и в смысле определения* 4 ($n = 1$, $E = [a, b]$), так что эти два различных определения интегрируемости на отрезке эквивалентны.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле определения 14.1.2. Тогда она ограничена (по теореме 14.1.1) и в силу критерия интегрируемости 14.2.1 для заданного $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{[x_{j-1}, x_j]\}_1^k$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{k} \omega(f, [x_{j-1}, x_j])\Delta x_j < \varepsilon.$$

Пусть $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. τ_0 — совокупность тех множеств $E_i \in \tau$, которые имеют непустое пересечение больше, чем с одним отрезком $[x_{j-1}, x_j]$. Если $E_i \in \tau_0$, то по лемме 18.2.1 $E_i \subset U_{2|\tau|}(E_0)$, где $E_0 = \{x_i\}_0^k$, $\mu E_0 = 0$. Теперь имеем, считая, что $|f| \leqslant M$ на $[a, b]$,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f, E_i)\mu E_i = \sum_{i:E_i \in \tau\setminus\tau_0} \omega(f, E_i)\mu E_i + \sum_{i:E_i \in \tau_0} \omega(f, E_i)\mu E_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \omega(f, [x_{j-1}, x_j])\Delta x_j + 2M\mu^* U_{2|\tau|}(E_0) < \varepsilon + 2M\epsilon,$$

причем последняя оценка имеет место для всех τ с достаточно малой мелкостью $|\tau|$ в силу леммы 18.2.3. В силу критерия интегрируемости (теорема 2) функция f интегрируема на $[a, b]$ в смысле определения 4.

Установим интегрируемость непрерывных функций.

Теорема 4. *Пусть функция f непрерывна на измеримом компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f интегрируема на E.*

Доказательство. Функция f в силу теорем Вейерштрасса и Кантора ограничена и равномерно непрерывна на E. Тогда ее модуль непрерывности на E $\omega(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\mu E_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(|\tau|, f)\mu E_i = \omega(|\tau|, f)\mu E \to 0 \text{ при } |\tau| \to 0.$$

В силу критерия интегрируемости f интегрируема на E.

Упражнение 2. Обобщить теорему 3 на случай ограниченных на измеримом компакте функций и непрерывных почти в каждой точке компакта (т. е. в каждой точке компакта, за исключением, быть может, точек множества меры нуль).

Указание. Воспользоваться леммой 18.2.3.

Упражнение 3. Показать, что функция, непрерывная и ограниченная на открытом измеримом множестве, интегрируема на нем.

§ 19.2. Свойства кратного интеграла

1°. Пусть E — измеримое множество. Тогда

$$\int_E dx := \int_E 1\, dx = \mu E.$$

2°. Пусть E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$, и функция f интегрируема на E. Тогда она интегрируема и на E^*.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{E_i\}_1^{i_{\tau^*}}$ — разбиение множества E мелкости $|\tau^*|$. Дополним его до разбиения $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ множества E мелкости $|\tau| = |\tau^*|$. Это можно сделать, присоединив к $\{E_i\}_1^{i_{\tau^*}}$ все элементы разбиения множества $E \setminus E^*$ не превосходящей $|\tau^*|$ мелкости. Тогда

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_{\tau^*} \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f)\mu E_i \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f)\mu E_i.$$

В силу интегрируемости f на E и критерия интегрируемости правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Следовательно, и левая часть стремится к нулю при $|\tau^*| \to 0$. В силу критерия интегрируемости f интегрируема на E^*.

3°. (Аддитивность интеграла по множествам). Пусть измеримые множества $F, G \subset \mathbb{R}^n$, $F \cap G = \varnothing$, $E = F \cup G$. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема на F и на G. Тогда f интегрируема на E и

$$\int_E f(x)\,dx = \int_F f(x)\,dx + \int_G f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{E_i\}$, τ_0 — множество тех $E_i \in \tau$, для которых $E_i \cap F \neq \varnothing$, $E_i \cap G \neq \varnothing$,

$$\tau(F) = \{E_i \cap F \,:\, E_i \in \tau,\ E_i \cap F \neq \varnothing\},$$
$$\tau(G) = \{E_i \cap G \,:\, E_i \in \tau,\ E_i \cap G \neq \varnothing\}.$$

Пусть $S_\tau(f) = \sum f(x^{(i)})\mu E_i$ — произвольная интегральная сумма Римана для функции f и разбиения τ множества E с отмеченными точками $x^{(i)}$, $i = 1, \ \ldots, i_\tau$. Пусть $S_{\tau(F)}(f)$, $S_{\tau(G)}(f)$ — интегральные суммы для сужений функции f соответственно на множества F и G, построенные по разбиениям $\tau(F)$ и $\tau(G)$ и (по возможности) по тем же отмеченным точкам, что и $S_\tau(f)$. Тогда, считая, что $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in E$, имеем

$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau(F)}(f) - S_{\tau(G)}(f)\right| \leqslant 2M \sum_{E_i \in \tau_0} \mu E_i = 2M_\mu \bigcup_{E_i \in \tau_0} E_i. \qquad (1)$$

Заметим, что если $E_i \in \tau_0$, то

$$E_i \subset U_{2|\tau|}(\partial F). \qquad (2)$$

В самом деле, пусть $x \in E_i \cap F$, $y \in E_i \cap G$. Тогда на отрезке, соединяющем точки x и y, по лемме 18.2.1 найдется точка $z \in \partial F$. Тогда $|x - z| \leqslant |x - y| \leqslant |\tau|$.

Поскольку $\mu\partial F = 0$ в силу критерия измеримости, из (2) и леммы 18.2.3 следует, что правая часть (1) стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Тогда и левая часть (1) стремится к нулю. Поскольку в ней

$$S_{\tau(F)}(f) \to \int_F f(x)\,dx, \quad S_{\tau(G)}(f) \to \int_G f(x)\,dx,$$

заключаем, что $S_\tau(f) \to \int_F f(x)\,dx + \int_G f(x)\,dx$, откуда и следует утверждение 3°.

Упражнение 1. Показать, что требование ограниченности функции f на E в формулировке свойства 3° нельзя отбросить.

4°. Пусть функция f интегрируема и ограничена на множестве E. При изменении ее значений на подмножестве $E_0 \subset E$ меры нуль (с сохранением ограниченности) она остается интегрируемой и величина интеграла не изменяется.

Доказательство.

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E \setminus E_0} f(x)\,dx + \int_{E_0} f(x)\,dx = \int_{E \setminus E_0} f(x)\,dx.$$

Следовательно, интегрируемость f и величина интеграла $\int_E f(x)\,dx$ не зависит от значений f на E_0.

Следствие 1. *Пусть функция f определена и ограничена на замыкании $\overline{E}$ измеримого множества E. Тогда интегралы*

$$\int_E f(x)\,dx, \quad \int_{\overline{E}} f(x)\,dx, \quad \int_{\operatorname{int} E} f(x)\,dx$$

существуют или не существуют одновременно и равны в случае их существования.

5°. (Линейность интеграла). Пусть функции f, g интегрируемы на множестве E, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда существует интеграл

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx.$$

6°. Пусть функции f, g интегрируемы и ограничены на E. Тогда их произведение fg, а если $\inf\limits_E |g| > 0$, то и частное $\dfrac{f}{g}$ интегрируемы на E.

7°. Пусть функция f интегрируема на E. Тогда и функция $|f|$ — интегрируема на E и при этом

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx.$$

8°. (Интегрирование неравенств). Если функции f, g интегрируемы на E и $f \leqslant g$ на E, то

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E g(x)\,dx.$$

9°. (Полная (счетная) аддитивность интеграла по множествам). Пусть функция f интегрируема и ограничена на множестве E, а $\{E_k\}_1^\infty$ — последовательность измеримых множеств $E_k \subset E$ со свойством

$$\lim_{k\to\infty} \mu E_k = \mu E.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из оценки

$$\left|\int_E f(x)\,dx - \int_{E_k} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{E\setminus E_k} f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_E |f|\mu(E \setminus E_k).$$

10°. Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на открытом множестве $G \ni x^{(0)}$. Пусть f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$. Тогда $\int_G f(x)\,dx > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности f в точке $x^{(0)}$ существует окрестность $U_\delta(x^{(0)}) \subset G$ такая, что

$$f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2} \quad \forall\, x \in U(x^{(0)}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_{G\setminus U(x^{(0)})} f(x)\,dx + \int\limits_{U(x^{(0)})} f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2}\,\mu U_\delta(x^{(0)}) > 0.$$

11°. (Теорема о среднем). Пусть функции f, g интегрируемы и ограничены на множестве E. Если функция g не меняет

знака на E и $m \leqslant f \leqslant M$ на E, то существует такое число λ, что
$$\int_E f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_E g(x)\,dx.$$
Если при этом E — область или замкнутая область, а функция f непрерывна на E, то
$$\exists\, c \in E\ :\ \int_E f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_E g(x)\,dx.$$
В частности, при $g \equiv 1$
$$\int_E f(x)\,dx = f(c)\mu E.$$

Доказательство основано на использовании свойства 8°, теоремы Коши 10.5.4 о промежуточных значениях и следствия из нее.

§ 19.3. Сведение кратного интеграла к повторному

Теорема 1. *Пусть функция f интегрируема по прямоугольнику $P = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ и интеграл $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ существует для каждого $y \in [c,d]$.*

Тогда F интегрируема по отрезку $[c,d]$ и справедливо равенство
$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) называется *повторным интегралом.*

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$, $\tau_1 = \{[x_{i-1}, x_i]\}_1^k$, $\tau_2 = \{[y_{j-1}, y_j]\}_1^m$ — разбиения отрезков соответственно $[a,b]$ и $[c,d]$ на отрезки. Тогда $\tau = \{[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ — разбиение P на прямоугольники.

Введем обозначения
$$m_i(y) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x,y), \quad M_i(y) = \sup_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y),$$
$$m_{ij} = \inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f, \quad M_{ij} = \sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f.$$

Тогда при $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$

$$\sum_{j=1}^{m} F(\eta_j)\Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} \int_a^b f(x,\eta_j)\,dx\Delta y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\eta_j)\,dx\Delta y_j,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(y)\Delta x_i \leqslant \int_a^b f(x,y)\,dx = F(y) \leqslant \sum_{i=1}^{k} M_i(y)\Delta x_i.$$

Положив в последнем двустороннем неравенстве $y = \eta_j$, домножив все его части на Δy_j и просуммировав по j, получаем

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} F(\eta_j)\Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j. \quad (2)$$

Левая и правая части неравенства (2) представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю интегральные суммы Дарбу функции f (т. е. $\underline{S_\tau}(f)$ и $\overline{S_\tau}(f)$). При $|\tau| \to 0$ каждая из них стремится к $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$ (см. следствие из теоремы 19.1.3). Следовательно, средняя часть неравенства (2), представляющая собой интегральную сумму Римана $S_{\tau_2}(F)$, имеет предел при $|\tau_2| \to 0$, являющийся по определению интегралом $\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$. Предельным переходом в неравенстве (2) получаем (1).

З а м е ч а н и е. Простой заменой обозначения переменных в теореме 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть функция f интегрируема по прямоугольнику $P = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ и интеграл $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ существует для каждого $x \in [a,b]$.*

Тогда F интегрируема по отрезку $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx. \quad (3)$$

Если выполнены условия как теоремы 1, так и теоремы 1′, то

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Последняя формула справедлива, в частности, если функция f непрерывна на P.

Распространим результаты теорем 1, $1'$, полученные для прямоугольника P на области, которые назовем элементарными.

Определение 1. Множество

$$\Omega = \{(x, y) \,:\, a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

где функции φ, ψ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi \leqslant \psi$ на $[a, b]$, назовем *элементарным относительно оси Oy множеством.* Заметим, что Ω — измеримое замкнутое множество.

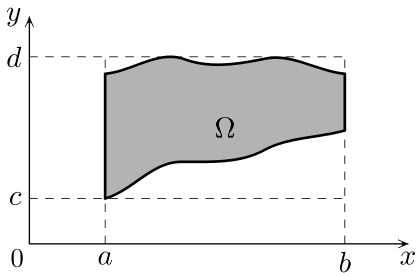


Рис. 19.1

Теорема 2. *Пусть Ω — элементарное относительно оси Oy множество, функция f интегрируема на Ω и при каждом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{5}$$

Доказательство. Положим

$$c = \min_{[a,b]} \varphi, \quad d = \max_{[a,b]} \psi.$$

Тогда $\Omega \subset P = [a, b] \times [c, d]$.

Введем функцию $\tilde{f}\colon P \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{при } (x, y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Так как функция f интегрируема и ограничена на Ω, то функция $\tilde{f}$, интегрируемая на Ω и на $P \setminus \Omega$, интегрируема на P.

Аналогично обосновывается существование для каждого $x \in [a, b]$ интеграла $\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$.

По теореме $1'$

$$\int_P \tilde f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d \tilde f(x,y)\,dy\,dx.$$

Подставляя в это равенство выражение $\tilde f$ через f, получаем (5).

Следствие 1. *Пусть функция f непрерывна на элементарном относительно оси Oy множестве Ω (4). Тогда справедливо равенство* (5).

З а м е ч а н и е. Пусть Ω (4) является элементарным не только относительно оси Oy, но и относительно оси Ox, т. е. наряду с описанием (4) имеет место еще и описание

$$\Omega = \{(x,y)\,:\, c \leqslant y \leqslant d, \quad \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}.$$

Тогда для непрерывной на Ω функции f справедливо равенство

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{6}$$

выражающее собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

Теорема 2 и следствие из нее могут быть распространены на n-кратные интегралы.

Определение 2. Множество

$$\Omega = \{x = (x_1,\,\ldots,\,x_n) = (x', x_n)\,:\, x' \in E,\\ \varphi(x') \leqslant x_n \leqslant \psi(x')\},$$

где $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — измеримое замкнутое множество, а функции φ, ψ непрерывны на E, называется *элементарным относительно оси Ox_n множеством.*

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на элементарном относительно оси Ox_n множестве Ω. Тогда*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_E \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} f(x', x_n)\,dx_n\,dx'.$$

§ 19.4. Геометрический смысл модуля якобиана отображения

В этом параграфе изучается отображение

$$\mathcal{F} \;:\; \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

открытого множества G двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое множество G^* евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{uv} \supset \underset{\text{откр.}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр.}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{xy}$$

со свойствами:

1° $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает G на G^*,

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на G,

3° $J(u,v) := \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на G.

Лемма 1.[1] *Пусть E — отрезок с концами в точках (u_1,v_1), (u_2,v_2), $E \in G$,*

$$\max_E \max\left\{|x'_u|,\ |x'_v|,\ |y'_u|,\ |y'_v|\right\} \leqslant \varkappa.$$

Тогда

$$|\mathcal{F}(u_2,v_2) - \mathcal{F}(u_1,v_1)| \leqslant 2\varkappa|(u_2,v_2)-(u_1,v_1)| = \\ = 2\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $(x_i,y_i) = \mathcal{F}(u_i,v_i)$, $i = 1,2$. Тогда в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$|x_2-x_1| = |x\,[u_1+t(u_2-u_1), \quad v_1+t(v_2-v_1)]|_{t=0}^{1}\,| = \\ = \left|x'_u(\tilde u,\tilde v)(u_2-u_1) + x'_v(\tilde u,\tilde v)(v_2-v_1)\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}.$$

Аналогично

$$|y_2-y_1| \leqslant \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}.$$

Из двух последних оценок следует (2).

---

[1] Используется лишь при доказательстве необязательной теоремы 19.5.2.

Лемма 2. *Пусть ограниченное множество* $E \subset \overline{E} \subset G$,

$$Q := \{(u, v) : u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + h, \quad v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + h\} \subset G.$$

Тогда:

1° $\partial\mathcal{F}\,(E) = \mathcal{F}\,(\partial E)$,

2° $\mathcal{F}\,(Q)$ *— замкнутое измеримое множество,*

3° *если* $\mu E = 0$, *то* $\mu\mathcal{F}\,(E) = 0$,

4° *если* E *— измеримо, то* $\mathcal{F}\,(E)$ *измеримо.*

Доказательство. В силу теоремы о локальном взаимно однозначном соответствии для точек $(\bar{u}, \bar{v}) \in G$ и $(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{F}\,(\bar{u}, \bar{v})$ существуют их окрестности, находящиеся во взаимно однозначном соответствии, причем эти окрестности можно брать сколь угодно малыми по диаметру. Следовательно, точки $(\bar{u}, \bar{v})$ и $(\bar{x}, \bar{y})$ лишь одновременно могут являться внутренними, или граничными, или предельными точками соответственно для E и $\mathcal{F}\,(E)$. Отсюда следует утверждение 1° леммы и замкнутость множества $\mathcal{F}(Q)$. Ограниченность $\mathcal{F}(Q)$ следует из теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции, примененной к $x(u, v)$, $y(u, v)$. Заметим, что $\partial\mathcal{F}(Q) = \mathcal{F}(\partial Q)$ состоит из четырех гладких кривых. Поэтому $\mu\partial\mathcal{F}\,(Q) = 0$. В силу критерия измеримости $\mathcal{F}\,(Q)$ измеримо и свойство 2° установлено.

Свойства 3° и 4° будут использованы лишь при доказательстве теоремы 19.5.2.

Установим свойство 3°. Покажем, что $\mu\mathcal{F}\,(E) = 0$.

Пусть $\rho > 0$ такое число, что $\overline{U_\rho(E)} \subset G$. В качестве ρ можно взять $\rho = 1$, если $G = \mathbb{R}^2$, и $\rho = \frac{1}{2}\operatorname{dist}\{\overline{E},\ \mathbb{R}^2 \setminus G\}$, если $G \neq \mathbb{R}^2$. В последнем случае $\rho > 0$ в силу положительности расстояния между двумя замкнутыми непересекающимися множествами $\overline{E}$ и $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \sum\limits_1^m P_k$ — элементарное множество, $B_\varepsilon \supset \supset E$, $\mu B_\varepsilon < \varepsilon$. П-прямоугольник $(a, b] \times (c, d]$ будем называть *регулярным*, если

$$\frac{1}{2}\,(b - a) \leqslant d - c \leqslant 2(b - a).$$

Можно считать, что в представлении $B_\varepsilon = \sum\limits_1^m P_k$ все прямоугольники P_k регулярны и $\operatorname{diam} P_k \leqslant \rho$ (если это не так с самого начала, то каждый из P_k можно разбить на регулярные п-прямоугольники с диаметром, не превосходящим ρ, и отбросить те из них, которые не пересекаются с E). Тогда

$$B_\varepsilon \subset \overline{U_\rho(E)} \subset G.$$

Пусть $\varkappa = \max\limits_{\overline{U_\rho(E)}} \max\{|x'_u|,\ |x'_v|,\ |y'_u|,\ |y'_v|\}$.

В силу (2) образ каждого из п-прямоугольников P_k с длиной меньшей стороны h_k содержится в квадрате с длиной стороны $2\sqrt{5}\varkappa h_k$, так что

$$\mu^* \mathcal{F}\, P_k \leqslant 20\varkappa^2 \mu P_k,$$

откуда в силу монотонности и полуаддитивности верхней меры

$$\mu^* \mathcal{F}\, E \leqslant \mu^* \mathcal{F}\, B_\varepsilon \leqslant 20\varkappa^2 \mu B_\varepsilon \leqslant 20\varkappa^2 \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\mu \mathcal{F}\, E = \mu^* \mathcal{F}\, E = 0.$$

Свойство 4° следует из ограниченности $\mathcal{F}\,(E) \subset \mathcal{F}\,(\overline{E})$, вытекающей из теоремы Вейерштрасса, свойств 1°, 3° и критерия измеримости.

Теорема 1 (геометрический смысл модуля якобиана отображения). *Пусть* $(u_0, v_0) \in G$, $h_0 > 0$,

$$G \supset Q_h :=$$
$$:= \{(u,v) : u_h \leqslant u \leqslant u_h + h,\ v_h \leqslant v \leqslant v_h + h\} \ni (u_0, v_0)$$

при всех h, $0 < h \leqslant h_0$.

Тогда

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{\mu\mathcal{F}\,(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(u_0, v_0)|. \tag{3}$$

Доказательство будет дано ниже в виде следствия из теоремы 19.5.1 о замене переменных в интеграле. В конце § 19.5 будет приведено обобщение теоремы 1 на n-мерный случай. Частичное выяснение геометрического смысла модуля якобиана отображения (оценку сверху левой части (3))доставляет

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *при* $h \to 0$

$$\mu\mathcal{F}\,(Q_h) \leqslant |J(u_0, v_0)|\mu Q_h + o(h^2). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подчеркнем, что точка (u_0, v_0) необязательно является центром Q_h. Отображение $\mathcal{F}$ дифференцируемо, поэтому

$$\mathcal{F}\ :\begin{cases} x = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0)+ \\ \qquad\qquad + \varepsilon_1(u-u_0,\ v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}, \\ y = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0)+ \\ \qquad\qquad + \varepsilon_2(u-u_0,\ v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}, \end{cases}$$

где $a_{11} = x'_u(u_0, v_0)$, $a_{12} = x'_v(u_0, v_0)$, $a_{21} = y'_u(u_0, v_0)$, $a_{22} = y'_v(u_0, v_0)$, $\varepsilon_i(u-u_0, v-v_0) \to 0$ при $(u, v) \to (u_0, v_0)$.

Сравним $\mathcal{F}$ с линейным отображением

$$\hat{\mathcal{F}}\ :\begin{cases} x = \hat{x}(u,v) = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0), \\ y = \hat{y}(u,v) = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0). \end{cases}$$

Из аналитической геометрии известно, что

$$\frac{\mu\hat{\mathcal{F}}\,(Q_h)}{\mu Q_h} = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\| = |J(u_0, v_0)|.$$

Сравним параллелограмм $\hat{\mathcal{F}}\,(Q_h)$ и криволинейный параллелограмм $\mathcal{F}\,(Q_h)$. Положим

$$\varepsilon(h) := \sup_{\substack{|u-u_0|\leqslant h \\ |v-v_0|\leqslant h}} \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}, \quad \varepsilon(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Тогда для $(u, v) \in Q_h$

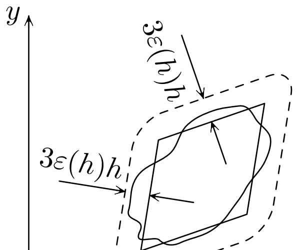
$$|x(u,v) - \hat{x}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}h, \quad |y(u,v) - \hat{y}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}h.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\mathcal{F}\,(Q_h) \subset U_{3\varepsilon(h)h}\left(\hat{\mathcal{F}}\,(Q_h)\right). \tag{5}$$

Поэтому

$$\mu\mathcal{F}\,(Q_h) \leqslant \mu^* U_{3\varepsilon(h)h}\left(\hat{\mathcal{F}}\,(Q_h)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mu\hat{\mathcal{F}}\,(Q_h) + o(h^2) =$$



$$= |J(u_0, v_0)|h^2 + o(h^2),$$

и (4) установлено (рис. 19.2).

З а м е ч а н и е. Оценка (4) и ее доказательство сохраняются и при $J(u_0, v_0) = 0$, если в левой части (4) вместо $\mu\mathcal{F}(Q_h)$ написать $\mu^*\mathcal{F}(Q_h)$.

§ 19.5. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 1. *Пусть*

$$\mathcal{F} \;:\; \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

— отображение открытого измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое измеримое множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \supset \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{x,y},$$

со свойствами:

1° $\mathcal{F}$ *взаимно однозначно отображает G на G^*,*
2° $\mathcal{F}$ *непрерывно дифференцируемо на G,*
3° $J(u, v) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ *на G,*
4° $\mathcal{F}$, J *непрерывно продолжимы на $\overline{G}$,*
5° *функция f непрерывна на G^* и непрерывно продолжима на $\overline{G}^*$.*

Тогда

$$\iint\limits_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G} f[x(u, v),\ y(u, v)] \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обе части (1) существуют в силу непрерывности подынтегральных выражений на замыканиях измеримых множеств интегрирования.

Будем считать до конца доказательства, что $f > 0$ на G^*. Это ограничение не снижает общности. В самом деле, если

$$M > \sup_{G^*} |f|, \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где
$$f_1(x) = f(x) + M > 0, \quad f_2(x) = M > 0,$$
и если (1) установлено для f_1 и f_2, то оно оказывается верным и для $f = f_1 - f_2$.

1-й шаг. Покажем, что
$$\iint\limits_{\mathcal{F}\,(Q)} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{Q} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv, \qquad (2)$$
где $Q = \{(u,v)\colon\ u_1 \leqslant u \leqslant u_1 + h,\ v_1 \leqslant v \leqslant v_1 + h\} \subset G$. Рассуждая от противного, предположим, что равенство (2) нарушено, т. е. при некотором $\varepsilon_0 > 0$
$$\iint\limits_{\mathcal{F}\,(Q)} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant (1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,du\,dv. \quad (3)$$
Разобьем Q на 4 равных замкнутых квадрата. Обозначим через $Q^{(1)}$ тот из них, для которого (при $k = 1$)
$$\iint\limits_{\mathcal{F}\,(Q^{(k)})} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \\ \geqslant (1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q^{(k)}} \mathcal{F}\,[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,du\,dv. \quad (4)$$
Такой квадрат $Q^{(1)}$ существует: предположив противное и сложив 4 неравенства, противоположных неравенству типа (4) при $k = 1$, входим в противоречие с (3). Разобьем $Q^{(1)}$ на 4 равных замкнутых квадрата и обозначим через $Q^{(2)}$ тот из них, для которого выполняется (с $k = 2$) неравенство (4). Продолжая деление, получим систему вложенных прямоугольников $\{Q^{(k)}\}_1^\infty$ со свойством (4). В силу принципа вложенных отрезков (таковыми являются проекции $Q^{(k)}$) существует точка $(u_0, v_0) \in Q^{(k)}$ при всех k. Из (4) в силу теоремы о среднем для интеграла имеем
$$f(\tilde{x}_k,\tilde{y}_k)\mu\mathcal{F}(Q^{(k)}) \geqslant (1+\varepsilon_0)f[x(\bar{u}_k,\bar{v}_k),y(\bar{u}_k,\bar{v}_k)]|J(\bar{u}_k,\bar{v}_k)|\mu Q^{(k)}$$
при некоторых $(\tilde{x}_k,\tilde{y}_k) \in \mathcal{F}\,(Q^{(k)})$, $(\bar{u}_k,\bar{v}_k) \in Q^{(k)}$.

Оценивая $\mu\mathcal{F}\,(Q^{(k)})$ с помощью леммы 19.4.3, при $k \to \infty$ имеем

$$[f(x_0,y_0)+o(1)]\,[|J(u_0,v_0)|+o(1)] \geqslant \\ \geqslant (1+\varepsilon_0)[f(x_0,y_0)+o(1)][|J(u_0,v_0)|+o(1)],$$

что неверно при $f>0$, $|J|>0$. Таким образом, неравенство (2) установлено.

<u>2-й шаг.</u> Пусть A — элементарное множество (составленное из попарно не пересекающихся полуоткрытых квадратов, см. определение 18.1.2), $\overline{A} \subset G$. В силу аддитивности интеграла по множествам интегрирования почленным сложением нескольких неравенств вида (2) получаем, что

$$\iint\limits_{\mathcal{F}\,(A)} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{A} f[x(u,v),\ y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{G} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv. \quad (5)$$

<u>3-й шаг.</u> Пусть A^* — элементарное множество, причем $A^* \subset \overline{A^*} \subset G^*$. Покажем, что

$$\iint\limits_{A^*} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{G} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv. \quad (6)$$

В силу (5) достаточно установить, что найдется такое элементарное множество $A \subset \overline{A} \subset G$, что

$$\mathcal{F}^{\,-1}(\overline{A^*}) \subset A \subset G. \quad (7)$$

Покажем это. Множество $\mathcal{F}^{\,-1}(\overline{A^*})$ замкнуто по лемме 19.4.2. Следовательно,

$$\operatorname{dist}(\mathcal{F}^{\,-1}(\overline{A^*}),\ \mathbb{R}^2 \setminus G) = \rho > 0.$$

Построим множество A следующим образом. Разобьем $\mathbb{R}^2$ с помощью координатной сетки на полуоткрытые квадраты (п-квадраты) с диагональю, не превосходящей $\frac{\rho}{2}$ и в качестве A возьмем объединение всех п-квадратов, имеющих непустое пересечение с $\mathcal{F}^{\,-1}(\overline{A^*})$.

4-й ш а г. Установим неравенство

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{G} f[x(u,v),\ y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv. \tag{8}$$

При $\forall\, k \in \mathbb{N}$ легко можно построить элементарное множество A_k^* со свойствами

$$A_k^* \subset \overline{A_k^*} \subset G, \quad \mu(G^* \setminus A_k^*) < \frac{1}{k}\,.$$

Поскольку $0 < f(x,y) \leqslant M$,

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{A_k^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^*\setminus A_k^*} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant M\,\frac{1}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{9}$$

Подставив в (6) A_k^* вместо A^* и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем в силу (9) оценку (8).

5-й ш а г. Установим равенство (1). Пусть элементарное множество $A_k \subset \overline{A}_k \subset G$, $\mu(G \setminus A_k) < \frac{1}{k}$. Применим доказанное неравенство (8) к обратному отображению $\mathcal{F}^{\,-1}$ (якобиан которого $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{J(u,v)}$ ограничен на $\mathcal{F}\,(A_k)$) и к функции $g(u,v) := f[x(u,v),\ y(u,v)]|J(u,v)|$. Получим

$$\iint\limits_{A_k} f[x(u,v),\ y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \leqslant \iint\limits_{\mathcal{F}\,(A_k)} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{10}$$

Из (10) предельным переходом при $k \to \infty$, как и на третьем шаге, получаем неравенство, противоположное неравенству (8). Из него и из (8) следует (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 справедлива и при более общих условиях: вместо условия 4° достаточно предположить, что произведение $f[x(u,v),\,y(u,v)]|J(u,v)|$ непрерывно продолжимо на $\overline{G}$. Для обоснования в равенстве (1), написанном для A_k и $\mathcal{F}\,(A_k)$ вместо соответственно G и G^*, следует перейти к пределу при $k \to \infty$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 19.4.1

$$\mu G^* = \iint\limits_{G^*} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{G} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1. Применим (11) к $\operatorname{int} Q_h$. По теореме о среднем для интеграла имеем

$$\mu\mathcal{F}\,(Q_h) = |J(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)|\,\mu Q_h,$$
$$G_h \ni (\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) \to (u_0, v_0) \text{ при } h \to 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3° *теоремы* 1 *и, кроме того,* f *ограничена на* G^**, а произведение*

$$f[x(u,v),\, y(u,v)]J(u,v) \text{ ограничено на } G.$$

Тогда, если существует один из интегралов в (1)*, то существует и другой, и справедливо равенство* (1).

Доказательство. Рассмотрим для определенности лишь случай, когда существует интеграл из правой части (1).

Будем считать, что $f \geqslant 0$, так как общий случай функции f произвольного знака немедленно сводится к этому с помощью представления $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = \frac{1}{2}\,(|f| + f) \geqslant 0$ и $f_- = \frac{1}{2}\,(|f| - f) \geqslant 0$. Покажем, что существует интеграл из левой части (2) и справедливо неравенство (2). Из ограниченности $|J|^{-1}$ на P и существования интеграла в правой части (2) следует существование интеграла $\iint_P \tilde{f}(u,v)\,du\,dv$, где

$$\tilde{f}(u,v) := f[x(u,v),\, y(u,v)] = \tilde{f}|J| \cdot \frac{1}{|J|}\,.$$

Пусть $P^* = \mathcal{F}\,(P)$,

$$\tau = \tau(P) = \{E_i\}_1^{i_\tau}\,, \quad \tau^* = \tau^*(P^*) = \{E_i^*\}_1^{i_\tau} = \{\mathcal{F}\,(E_i)\}_{i=1}^{i_\tau} \tag{12}$$

— разбиения соответственно P и P^*. В силу леммы 19.4.1, примененной к отображению $\mathcal{F}^{\,-1}$, $\operatorname{diam} E_i \leqslant K \operatorname{diam} E_i^*$ при некоторой постоянной K, откуда

$$|\tau| \leqslant K|\tau^*|. \tag{13}$$

Пусть, далее, $\omega(\tilde{f}, E_i)$, $\omega(f, E_i^*)$ — колебания функций $\tilde{f}$, f соответственно на E_i, E_i^*. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f, E_i^*)\mu E_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\tilde{f}, E_i) \iint\limits_{E_i} |J(u,v)|\, du\, dv \leqslant$$
$$\leqslant \max_P |J| \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\tilde{f}, E_i)\mu E_i \to 0 \quad \text{при} \quad |\tau^*| \to 0,$$

поскольку при этом в силу (13) и $|\tau| \to 0$.

В силу критерия интегрируемости существует интеграл в левой части (2). Установим теперь само неравенство (2). Воспользуемся разбиениями (12), в которых будем считать замкнутыми множества $E_i = \overline{E}_i$. Пусть в точке (u_i, v_i) достигается

$$\max_{E_i} |J| = |J(u_i, v_i)|, \quad x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i, y_i)\mu E_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i, y_i) \iint\limits_{E_i} |J(u,v)|\, du\, dv \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]|J(u_i, v_i)|\mu E_i.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве для сумм Римана при $|\tau| \to 0$ (а значит, и $|\tau^*| \to 0$), приходим к неравенству (2).

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1, если использовать свойство полной аддитивности интеграла по множествам в более общей форме. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть G, G_i — измеримые множества n-мерного евклидова пространства, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$, $\mu(G \setminus G_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть функция f ограничена на G и интегрируема на любом G_i.*

Тогда f интегрируема на G и

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{G_i} f\, dx = \int\limits_G f\, dx.$$

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Приведем обобщения теорем 1, 2 на n-мерный случай.

Через $\mathcal{F}:\ (x = x(t))$ обозначим отображение

$$\mathbb{R}^n_t \supset \underset{\text{откр.}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр.}}{G^*} \subset \mathbb{R}^n_x$$

открытого множества G евклидова пространства $\mathbb{R}^n_t$ на открытое множество $G^* \subset \mathbb{R}^n_x$ со свойствами:

1.° $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает G на G^*;

2.° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на G;

3.° $J(t) = \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} \not\equiv 0$ на G.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, $t^{(0)} \in G$, $G \supset Q_h = \{t : t_i^{(h)} \leqslant t_i \leqslant t_i^h + h, \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \ni t^{(0)}$, $0 < < h \leqslant h_0$.

Тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu\mathcal{F}\,(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(t^{(0)})|.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, G, G^* *— открытые измеримые множества, функция* f *ограничена на* G^*, *произведение* $f(x(t))J(t)$ *ограничено на* G.

Тогда

$$\int_{G^*} f(x)\,dx = \int_G f[x(t)]|J(t)|\,dt,$$

если хотя бы один из этих интегралов существует.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, G, G^* *— открытые измеримые множества, якобиан* J *ограничен на* G. *Тогда*

$$\mu G^* = \int_{G^*} dx = \int_G |J(t)|\,dt.$$

Доказательства теорем и следствия аналогичны приведенным выше для случая $n = 2$.

Глава 20
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 20.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана гладкая кривая

$$\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}, \qquad (1)$$

т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (последнее условие означает, что $|r'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ на $[a, b]$).

Определение 1. Пусть числовая функция $F\colon\ \Gamma \to \mathbb{R}$ задана на множестве Γ. Тогда

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds := \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\, dt \qquad (2)$$

называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции F по кривой Γ.

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно найти массу материальной кривой по её линейной плотности, координаты центра тяжести кривой, моменты инерции.

Установим некоторые свойства криволинейного интеграла (2).

1°. *Для существования интеграла $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x(t), y(t), z(t))$ (как функция переменной t) была интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В частности, если F непрерывна на Γ (см. определение 10.5.2), то $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ существует.*

2°. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации гладкой кривой Γ.*

Пусть $t = t(\tau)$ — допустимая замена параметра на Γ (см. § 8.2) $t\colon\ [\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b]$ ($t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$ при $t' > 0$; $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$ при $t' < 0$), $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))$. Тогда

$$\Gamma = \{\vec{\rho}(\tau),\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Совершив замену переменной в интеграле, получаем

$$\int_\alpha^\beta F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))|\vec{\rho}\,'(\tau)|\,d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\,(t(\tau))\right| |t'(\tau)|\,d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\,(t(\tau))\right| t'(\tau)\,d\tau =$$

$$= (\operatorname{sign} t') \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

З а м е ч а н и е. Последняя замена переменной обоснована ранее лишь для случая непрерывной функции F (теорема 14.5.1). Для ее обоснования в случае интегрируемой функции $F(x(t), y(t), z(t))$ достаточно сослаться на следующее обобщение специального случая теоремы 14.5.1.

Теорема 1 (14.5.1). *Пусть функции φ, φ' непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.*

Тогда из существования интеграла в одной из частей равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{3}$$

следует существование интеграла в другой его части и справедливость равенства (3).

Эта теорема формально содержится в теореме 19.5.2, а непосредственно ее доказательство можно получить в виде упрощенного аналога доказательства теоремы 19.5.2.

Следствие. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.*

В самом деле, если Γ из (1) не только гладкая, а гладкая ориентированная кривая (ее ориентация определяется возрастанием параметра t), то замена параметра $t = t(\tau) = -\tau$ $(-b \leqslant \tau \leqslant -a)$ меняет на ней ориентацию на противоположную. В силу свойства 2° величина криволинейного интеграла, вычисленного с помощью параметра τ, та же, что и вычисленного с помощью исходного параметра t.

Заметим, что гладкая кривая является спрямляемой, и в качестве допустимого параметра можно взять переменную длину ее дуги S, отсчитываемую от A. Тогда Γ описывается уравнением

$$\Gamma = \{\vec{r}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\} = \{(x(s), y(s), z(s)),\ 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где S — длина кривой, а интеграл (1) равен

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds. \tag{4}$$

3°. $\int_\Gamma ds = S$, *где* S — *длина дуги* Γ.

Для обоснования достаточно воспользоваться формулой (4) при $F = 1$.

4°. $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} F(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta s_i$, *где* $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — *разбиение отрезка* $[0, S]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — *длина дуги кривой* Γ *от точки* $\hat{r}(s_{i-1})$ *до точки* $\hat{r}(s_i)$, $s_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant s_i$.

Для доказательства свойства 4° заметим, что под знаком предела в правой части стоит интегральная сумма Римана интеграла из правой части (4), так что по определению определенного интеграла этот предел равен интегралу из правой части (4).

З а м е ч а н и е. Часто криволинейный интеграл первого рода определяют формулой (4). В этом случае от кривой Γ требуется лишь свойство быть спрямляемой.

§ 20.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{1}$$

— гладкая *ориентированная* кривая в трехмерном пространстве, $A = \hat{r}(a)$ — ее начало, $B = \hat{r}(b)$ — ее конец. Часто такую кривую обозначают символом $\overset{\frown}{AB}$. Ее единичный касательный вектор

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{2}$$

(направленный в сторону возрастания параметра на кривой) непрерывно зависит от параметра t.

Определение 1. Пусть фиксирована декартова система координат в $\mathbb{R}^3$ и векторное поле (т. е. вектор-функция) $\vec{a} = (P, Q, R)$ задано на множестве Г. Тогда

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz :=$$
$$:= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)+$$
$$+R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt = \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}\,')\,dt \tag{3}$$

называется *криволинейным интегралом второго рода* от векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ по кривой Г. Интеграл (3) часто обозначают также символом $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$.

В частности, когда лишь одна компонента векторного поля $\vec{a}$ отлична от нуля, получаем следующие криволинейные интегралы второго рода от функций (соответственно P, Q, R):

$$\int_\Gamma P\,dx := \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt, \tag{4}$$

$$\int_\Gamma Q\,dy := \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\int_\Gamma R\,dz := \int_a^b R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\,dt. \tag{6}$$

С помощью криволинейных интегралов второго рода можно вычислить работу силы в силовом поле при движении точки по кривой.

Установим некоторые свойства криволинейного интеграла второго рода.

1°. *Для существования интеграла* (3) *достаточно, чтобы функции* $P(x(t), y(t), z(t))$, $Q(x(t), y(t), z(t))$,

$R(x(t), y(t), z(t))$ *(как функции переменной t) были интегрируемы на отрезке* $[a, b]$.

В частности, если поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ непрерывно на Γ, то $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ существует.

2° *(Выражение криволинейного интеграла второго рода через криволинейный интеграл первого рода).*

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\,ds. \quad (7)$$

Для обоснования достаточно в (3) заменить $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ на равные им величины:

$$x' = \frac{dx}{ds}\,|\vec{r}\,'| = \cos\alpha|\vec{r}\,'|,$$
$$y' = \frac{dy}{ds}\,|\vec{r}\,'| = \cos\beta|\vec{r}\,'|,$$
$$z' = \frac{dz}{ds}\,|\vec{r}\,'| = \cos\gamma|\vec{r}\,'|,$$

где штрих означает взятие производной по t, и сравнить полученный интеграл с криволинейным интегралом (20.1.2).

3° *Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации гладкой кривой* Γ *с фиксированной ориентацией.*

Доказательство такое же, как для криволинейного интеграла первого рода. Следует лишь учесть дополнительное требование $t'(\tau) > 0$ на допустимую замену параметра $t = t(\tau)$, означающее сохранение ориентации кривой Γ (1) при переходе к ее параметрическому заданию с помощью параметра τ.

4° *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный при изменении ориентации кривой* Γ *на противоположную.*

Для обоснования воспользуемся равенством (7). Напомним, что интеграл первого рода не меняется при изменении ориентации кривой. В то же время в (7) множители $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а значит, и все подынтегральное выражение меняют знак на противоположный.

Следовательно, и интеграл в правой части (7) меняет знак на противоположный.

5° *Если* $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$, *то*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} dx = x_b - x_a, \quad \int\limits_{\widehat{AB}} dy = y_b - y_a, \quad \int\limits_{\widehat{AB}} dz = z_b - z_a.$$

6° Криволинейные интегралы как первого, так и второго рода обладают свойством *аддитивности относительно кривой интегрирования.*

Поясним его. Пусть кривая Γ задана уравнением (1), $a < c < b$,

$$\Gamma_1 = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma_2 = \{\vec{r}(t),\ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Тогда

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\Gamma_1} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} (\vec{a}, d\vec{r}),$$

если интеграл слева или оба интеграла справа существуют.

Это свойство следует из выражения (3) криволинейного интеграла второго рода через определенный интеграл и аддитивности определенного интеграла относительно отрезков интегрирования.

Обобщим понятие криволинейных интегралов первого и второго рода на интегрирование по кусочно гладким кривым.

Определение 2. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кусочно гладкая (ориентированная) кривая, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, $\Gamma_i = \{\vec{r}(t),\ a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$ $(i = 1, \ \ldots, \ k)$ — гладкие (ориентированные) кривые.

Тогда

$$\int_\Gamma F\, ds := \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F\, ds$$

$$\left(\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) := \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} (\vec{a}, d\vec{r}) \right),$$

если каждый из интегралов в правой части равенства существует.

Пусть ориентированная кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^3$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $|\tau| = \max(t_i - t_{i-1})$ —

мелкость разбиения. Пусть Λ_τ — ломаная с вершинами в точках $\hat{r}(t_i)$, последовательно соединенных ее звеньями. Такая ломаная называется вписанной в кривую Γ. Ломаную Λ_τ также будем считать ориентированной (при движении точки по ней ее вершины проходятся в порядке возрастания чисел i, $\hat{r}(a)$ — начало ломаной, $\hat{r}(b)$ — ее конец).

Лемма 1 (об аппроксимации криволинейного интеграла). *Пусть* $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ *— гладкая ориентированная кривая в* $\mathbb{R}^3$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ *— разбиение отрезка* $[a, b]$, Λ_τ *— вписанная в* Γ *ломаная.*

Пусть E *— компакт в* $\mathbb{R}^3$ *(т. е. ограниченное замкнутое множество), содержащий* Γ *и* Λ_τ *при всех достаточно малых* $|\tau|$.

Пусть на E *заданы непрерывные функции* P, Q, R. *Тогда*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \int_{\Lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Доказательство проведем лишь для случая $Q \equiv \equiv R \equiv 0$. Положим $A_i = \hat{r}(t_i)$, $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = \{\vec{r}(t)\colon\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, через $\overline{A_{i-1}A_i}$ обозначим звено вписанной ломаной с началом в A_{i-1} и концом в A_i. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на $[a, b]$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при произвольном разбиении τ, $|\tau| < \delta$, $\Lambda_\tau \subset E$,

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_i)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall\, i = 1, \ldots, i_\tau, \tag{8}$$

так что $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ и $\overline{A_{i-1}A_i}$ лежат в $E \cap U_\varepsilon(A_{i-1})$.

Зададим произвольно $\eta > 0$. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности P на E существует $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ такое, что

$$|P(M) - P(A_i)| < \eta, \qquad \text{если} \quad M \in E \cap U_\varepsilon(A_{i-1}), \quad i \in \{1, \ldots, i_\tau\}. \tag{9}$$

Будем считать, что $|\tau| < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано по $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$, так что выполняются оценки (8), (9). Оценим разность интегралов

$$\Delta_i := \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}} P\,dx - \int\limits_{\overline{A_{i-1}A_i}} P\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}} P\,dx =$$
$$= \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}} (P(x,y,z) - P(A_i))\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}} P(A_i)\,dx,$$

где $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}$ означает контур, составленный из дуги $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ и ее хорды.

Последний интеграл равен нулю в силу свойства 5° криволинейных интегралов второго рода.

В силу (9)

$$|\Delta_i| < \eta 2(s(t_i) - s(t_{i-1})),$$

где $s(t)$ — переменная длина дуги Γ, отсчитываемая от ее начала. Следовательно,

$$\left| \int_{\Lambda_\tau} P\,dx - \int_\Gamma P\,dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta_i \right| < 2\eta S,$$

где S — длина дуги Γ.

В силу произвольности $\eta > 0$ приходим к утверждению леммы.

§ 20.3. Формула Грина

При изучении криволинейных интегралов рассматривались интегралы по кривой, лежащей в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. В частности, кривая может лежать в плоскости (такая кривая называется плоской кривой). В этом случае удобно считать эту плоскость координатной, имеющей уравнение $z = 0$. Тогда кривая Γ имеет в этой плоскости уравнение

$$\Gamma = \{(x = x(t),\ y = y(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\},$$

а криволинейный интеграл первого рода записывается в виде $\int_\Gamma F(x,y)\,ds$.

Если на ориентированной кривой Γ задано векторное поле $\vec{a}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, то криволинейный интеграл второго рода имеет вид

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Все рассмотренные свойства криволинейных интегралов верны, разумеется, и в плоском случае.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — плоская область и простой кусочно гладкий ориентированный контур $\Gamma \subset \partial D$. Контур Γ будем называть *ориентированным положительно относительно* D и обозначать через Γ^+, если при движении по нему в направлении заданной ориентации ближайшая часть области D остается слева. В противном случае контур Γ будем называть *ориентированным отрицательно относительно области* D и обозначать символом Γ^-.

Если граница ∂D области D состоит из конечного числа попарно не пересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_i ($\partial D = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$), каждый из которых ориентирован положительно относительно D, то ∂D будем обозначать символом ∂D^+ ($\partial D^+ = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^+$).

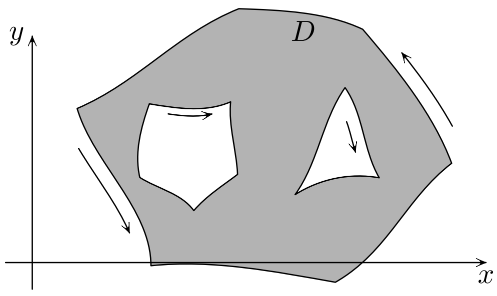


Рис. 20.1

Определение 1. Плоскую область D назовем *простой относительно оси* Oy, если она имеет вид

$$D = \{(x,y) \;:\; \varphi(x) < y < \psi(x),\; a < x < b\}, \tag{1}$$

где φ, ψ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и $\varphi < \psi$ на (a, b).

Плоскую область D назовем *простой относительно оси* Ox, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) \,:\, \varphi(y) < x < \psi(y),\ c < y < d\}, \tag{2}$$

где φ, ψ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$ и $\varphi < \psi$ на (c, d).

Плоскую область D назовем *простой*, если она является простой относительно хотя бы одной из координатных осей.

Будем говорить, что ограниченная плоская область D *разрезана* на конечное число простых областей $\{D_i\}_{i=1}^{I}$, если

1°. $\bigcup_{i=1}^{I} D_i \subset D$;
2°. $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
3°. $\bigcup_{i=1}^{I} \overline{D}_i = \overline{D}$;
4°. $(\partial D_i \cap \partial D_j) \cap D$ при $i \neq j$ является либо пустым множеством, либо точкой, либо отрезком, интервалом, полуинтервалом прямой.

В этом параграфе будут рассматриваться лишь такие плоские области, которые можно разрезать на конечное число простых.

Теорема 1 (формула Грина). *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная плоская область, граница ∂D которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_i ($\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$), ориентированных положительно относительно области D ($\partial D^+ = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i^+$).*

Пусть на замкнутой области $\overline{D}$ задано векторное поле $\vec{a}(x, y) = P(x, y)\vec{\imath} + Q(x, y)\vec{\jmath}$, причем P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{D}$ (подразумевается, что $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D и непрерывно продолжены на $\overline{D}$).

Тогда справедлива формула Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial D^+} (\vec{a}, d\vec{r}). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы установим эту теорему сначала при **дополнительном предположении**, что область D может быть разрезана на конечное число простых областей. Затем снимем это предположение.

Достаточно установить (3) при $Q \equiv 0$, т. е. в виде

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial D^+} P\, dx, \tag{4}$$

т. к. случай $P \equiv 0$ рассматривается аналогично и вместе они приводят к формуле (3) общего вида.

<u>1-й ш а г.</u> Установим (4) в случае, когда D — простая относительно оси Oy область, т. е. имеет вид (1) (см. рис. 20.2). Сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу

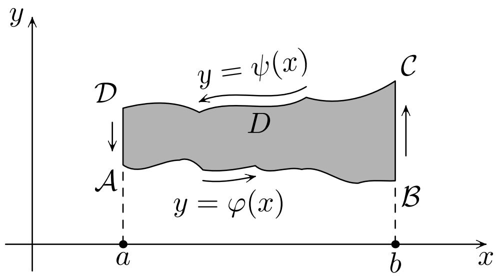


Рис. 20.2

Ньютона–Лейбница, имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx =$$

$$= \int_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\, dx =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{\mathcal{DC}}} P(x,y)\, dx - \int_{\overset{\frown}{\mathcal{AB}}} P(x,y)\, dx =$$

$$= -\int_{\overset{\frown}{\mathcal{CD}}} P\, dx - \int_{\overset{\frown}{\mathcal{AB}}} P\, dx = -\int_{\partial D^+} P\, dx,$$

т. е. равенство (3).

При получении последнего равенства были добавлены равные нулю слагаемые $\int_{\overset{\frown}{\mathcal{BC}}} P\, dx = 0$, $\int_{\overset{\frown}{\mathcal{DA}}} P\, dx = 0$.

2-й шаг. Установим (4) в случае, когда D — простая относительно оси Ox область, т. е. имеет вид (2), причем кривые

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x = \varphi(y), y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x = \psi(y), y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\} \end{aligned} \tag{5}$$

являются ломаными. Тогда при некотором разбиении $\{c_i\}_{i=0}^k$ отрезка $[c, d]$ функции φ, ψ линейны на каждом отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. При этом замкнутая область $\overline{D}$ представляется в виде $\overline{D} = \bigcup_{i=1}^k \overline{D}_i$, где D_i — трапеции

$$D_i = \{(x, y) \,:\, \varphi(y) < x < \psi(y),\ c_{i-1} < y < c_i\},$$

каждая из которых является простой областью относительно оси Oy.

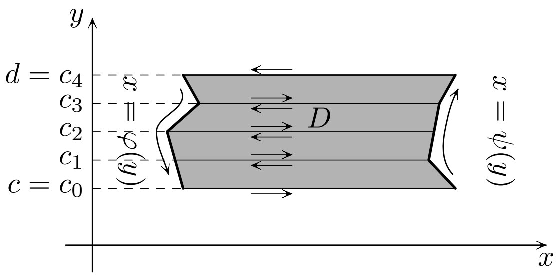


Рис. 20.3

По доказанному на первом шаге

$$\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial D_i^+} P\, dx, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Сложим полученные равенства почленно. Тогда в левой части в силу аддитивности двойного интеграла относительно областей интегрирования получим

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

В правой же части получим

$$\sum_{i=1}^k -\int_{\partial D_i} P\, dx = -\int_{\partial D^+} P\, dx,$$

поскольку при сложении криволинейных интегралов по ∂D_i^+ и ∂D_{i+1}^+ взаимно уничтожаются их части по отрезку

$$\{(x, y) \,:\, \varphi(c_i) \leqslant x \leqslant \psi(c_i),\; y = c_i\}$$

как криволинейные интегралы второго рода, отличающиеся лишь ориентацией кривой. Таким образом, формула (4) установлена.

3-й шаг. Установим (4) в случае, когда D — простая относительно оси Ox область, т. е. имеющая вид (2), причем при некотором $h > 0$ $\psi - \varphi \geqslant 3h$ на $[c, d]$. Пусть $0 < h < h_0$,

$$D_h := \{(x, y) \,:\, \varphi(y) + h < x < \psi(y) - h,\; c < y < d\} \subset D,$$
$$\Gamma_{1h} = \{(\varphi(y) + h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\Gamma_{2h} = \{(\psi(y) - h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Пусть

$$\Lambda_{1h\tau} = \{(\varphi_\tau(y) + h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\Lambda_{2h\tau} = \{(\psi_\tau(y) - h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\}$$

— ломаные, вписанные соответственно в кривые Γ_{1h}, Γ_{2h} и построенные с помощью разбиения τ отрезка $[c, d]$ изменения параметра y (см. § 8.1). Мелкость $|\tau|$ разбиения τ будем считать достаточно малой. Пусть

$$D_{h,\tau} := \{(x, y) \,:\, \varphi_\tau(y) + h < x < \psi_\tau(y) - h,\; c < y < d\} \subset D.$$

В силу результата шага 2

$$\iint_{D_{h,\tau}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial D_{h,\tau}^+} P\, dx.$$

Устремляя $|\tau| \to 0$, приходим к формуле

$$\iint_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial D_h^+} P\, dx. \tag{6}$$

В самом деле, при $M = \max\{\max\limits_{[c,d]} |\varphi'|,\ \max\limits_{[c,d]} |\psi'|\}$ мера криволинейной трапеции высоты $2M|\tau|$ со «средней линией» Γ_{1h}

(Γ_{2h}) равна $2M|\tau|(d-c)$. Следовательно,

$$\left|\iint\limits_{D_h}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy-\iint\limits_{D_{h,\tau}}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right|\leqslant\iint\limits_{(D_h\setminus D_{h,\tau})\cup(D_{h,\tau}\setminus D_h)}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|4M|\tau|(d-c)\to 0\quad(|\tau|\to 0).$$

$$\int_{\Lambda_{ih\tau}}P\,dx-\int_{\Gamma_{ih}}P\,dx\to 0\quad(|\tau|\to 0,\ i=1,2)$$

по лемме 20.2.1.

При $h\to 0$ левая часть (6) стремится к $\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, т. к.

$$\left|\iint_{D\setminus D_h}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right|\leqslant\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|\mu(D\setminus D_h)=\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|h(d-c).$$

Остается показать, что правая часть (6) при $h\to 0$ стремится к $\int_{\partial D^+}P\,dx$ и перейти в (6) к пределу. Для этого достаточно установить, что

$$\int_{\Gamma_{ih}}P\,dx\to\int_{\Gamma_i}P\,dx\quad\text{при}\quad h\to 0\quad(i=1,2),\tag{7}$$

поскольку очевидно, что при $h\to 0$

$$\left(\int_{\varphi(c)}^{\varphi(c)+h}+\int_{\psi(c)-h}^{\psi(c)}\right)|P(x,c)|\,dx+$$

$$+\left(\int_{\varphi(d)}^{\varphi(d)+h}+\int_{\psi(d)-h}^{\psi(d)}\right)|P(x,d)|\,dx\to 0.$$

Для доказательства (7) при $i=1$ выберем y в качестве параметра на Γ_1 и на Γ_{1h}. Тогда, используя модуль непрерывности функции P на $\overline{D}$, имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1}P\,dx-\int\limits_{\Gamma_{1h}}P\,dx\right|\leqslant\int\limits_c^d|P(\varphi(y),y)-P(\varphi(y)+h,y)|\,|\varphi'(y)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\omega(h,P,\overline{D})\max_{[c,d]}|\varphi'|(d-c)\to 0\quad\text{при}\quad h\to 0.$$

Аналогично устанавливается (7) при $i=2$.

Утверждение шага 3 установлено.

4-й шаг. Установим (4) для простой относительно Ox области D, т. е. имеющей вид (2) с кусочно гладкими кривыми (5). Здесь не исключаются случаи, когда $\varphi(c)=\psi(c)$ и (или) $\varphi(d)=\psi(d)$. Пусть $\varepsilon>0$,

$$D_\varepsilon=\{(x,y)\;:\;\varphi(y)<x<\psi(y),\;c+\varepsilon<y<d-\varepsilon\}.$$

Формула (4) верна для области D_ε в силу результата шага 3. Остается перейти в ней к пределу при $\varepsilon\to 0$.

5-й шаг. Установим (4) в условиях теоремы 1 при дополнительном предположении, что область D может быть разрезана на конечное число простых областей $\{D_i\}_{i=1}^I$.

Напишем формулу (4) для каждой простой области D_i:

$$\iint_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int_{\partial D_i^+}P\,dx\quad(1\leqslant i\leqslant I)\tag{8}$$

и сложим почленно эти равенства. В силу аддитивности двойного интеграла относительно областей интегрирования и равенства нулю интеграла по множеству нулевой меры

$$\sum_{i=1}^{I}\iint_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\iint_{D}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.\tag{9}$$

При сложении правых частей (8) учтем, что

$$\partial D_i^+=\partial' D_i^+\cup\partial'' D_i^+,$$

где $\partial' D_i=\overline{D\cap\partial D_i}$, $\partial'' D_i=\partial D\cap\partial D_i$ — соответственно «внутренняя» и «внешняя» части границы ∂D_i. Ясно, что $\bigcup_{i=1}^I\partial'' D_i=\partial D$.

Пусть при $j\neq i$ множество $E_{ij}:=\partial' D_i\cap\partial' D_j$ содержит более одной точки. Тогда оно представляет собой отрезок, наделенный противоположными ориентациями (положительной относительно D_i и положительной относительно D_j). Поэтому при сложении правых частей (8) «части» криволинейных интегралов по ∂D_i^+ и ∂D_j^+ (интегралы по отрезкам E_{ij}) взаимно уничтожатся. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{I} \int_{\partial D_i^+} P\,dx = \sum_{i=1}^{I} \int_{\partial'' D_i^+} P\,dx = \int_{\partial D^+} P\,dx. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует (4).

Итак, теорема 1 (формула (3)) установлена при дополнительном предположении, что область D можно разрезать на конечное число простых областей.

Примерами таких областей являются, очевидно, круг и кольцо.

6-й шаг. Для доказательства теоремы в приведенной формулировке достаточно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1. *Ограниченная плоская область D с границей ∂D, состоящей из конечного числа попарно не пересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_i ($\partial D = \bigcup_{i=1}^{I} \Gamma_i$), может быть разрезана на конечное число простых областей.*

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы покрыть область D некоторым семейством попарно не пересекающихся замкнутых прямоугольников и требуемые простые области получить в качестве пересечения внутренности каждого из этих прямоугольников с D либо в качестве такого пересечения с одним дополнительным разрезом.

До конца доказательства под прямоугольниками будем понимать замкнутые прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.

1-й шаг. Построим сначала покрытие границы $\partial D = \bigcup_{i=1}^{I} \Gamma_i$. Будем брать только прямоугольники, по диаметру меньшие достаточно малого числа $\delta > 0$. Тогда покрытия различных кривых Γ_i, Γ_j ($i \neq j$) не пересекаются.

Точку границы ∂D назовем *угловой*, если единичный касательный вектор контура Γ_i, проходящего через эту точку, не является в ней непрерывным. Граница ∂D может либо не содержать угловых точек, либо иметь их в конечном числе. При наличии угловых точек покроем каждую из них прямоугольником (квадратом по форме) с центром в ней. Мы получим покрытие $\bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ множества угловых точек. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{dist}(Q_i, Q_j) > \delta$ при $i \neq j$. Вблизи центра Q_i граница ∂D представляет собой кривую, составленную из двух простых дуг, имеющих в центре Q_i односторонние касательные и отклоняющихся от этих касательных на величину, бесконечно малую сравнительно с расстоянием до центра. Будем считать Q_i столь малыми по диаметру, что каждая из этих дуг пересекает под ненулевым углом ту же сторону Q_i, что и односторонняя касательная к ней в центре Q_i, и что

$$D_i = D \cap \operatorname{int} Q_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

либо является простой областью, либо может быть разрезана (удалением интервала с концом в центре Q_i) на две простые области. Прямоугольники Q_i построенного покрытия $\bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ назовем *угловыми*.

2-й шаг. Часть границы $\partial' D := \partial D \setminus \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ представляет собой конечное множество простых гладких кривых или простых гладких контуров. Для построения покрытия $\partial' D$ построим покрытие для каждой кривой или контура в отдельности и объединим их. Пусть, например, сначала

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{11}$$

— простой гладкий контур и $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — единичный вектор его касательной, где $\alpha = \alpha(t)$ — угол между $\vec{\tau}$ и положительным направлением оси Ox. Координаты $\vec{\tau}$, т. е. $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ непрерывно зависят от t.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $\{t_j\}_{j=0}^{j^*}$ на конечное число отрезков, так чтобы для каждой дуги

$$\Gamma^{(j)} = \{\vec{r}(t),\ t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j^* \tag{12}$$

выполнялось либо неравенство

$$\operatorname{tg}|\alpha| < 2 \quad \text{на} \quad [t_{j-1}, t_j]$$

(такую дугу будем называть дугой *горизонтального типа*), либо неравенство

$$|\operatorname{ctg}\alpha| < 2 \quad \text{на} \quad [t_{j-1}, t_j]$$

(такую дугу будем называть дугой *вертикального типа*).

Такое разбиение отрезка $[a, b]$ нетрудно построить, используя равномерную непрерывность $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Заметим, что на дуге горизонтального типа в качестве параметра можно взять координату x, а на дуге вертикального типа — координату y точки.

Будем считать дополнительно, что дуги горизонтального и вертикального типов чередуются (если это не так с самого начала, то придем к этому, объединяя соседние дуги совпадающих типов). За счет сдвига параметра можем считать, что первая и последняя дуга в (12) имеют разные типы.

Так, например, окружность $\{(x = \cos\theta, y = \sin\theta)\colon 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ разбивается на 5 дуг. При ее параметризации:

$$\left\{(x = \cos\theta, y = \sin\theta)\ :\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$$

будет выполнено и последнее требование.

Точки $\hat{r}(t_j)$, $(0 \leqslant j \leqslant j_0 - 1)$, каждая из которых принадлежит двум дугам разного типа, будем называть переходными точками. Так, например, для рассмотренной окружности в качестве переходных можно взять 4 точки с параметрами $\theta = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$.

Будем точки $\hat{r}(t_{j-1})$, $\hat{r}(t_j)$ дуги $\Gamma^{(j)}$ из (12) называть *концевыми*, а прямоугольник, граница которого содержит концевую точку, — *концевым*.

Построим для каждой дуги $\Gamma^{(j)}$ из (12) покрытие семейством замкнутых прямоугольников $\{P_{i_i}\}_{i=1}^{i_j}$ со свойствами:

1°. $\bigcup_{i=1}^{i_j} P_{ji} \supset \Gamma^{(j)}$;

2°. $P_{ji} \cap \operatorname{int} P_{jk} = \varnothing$ при $j \neq k$;

3°. пересечение $D_{ji} := D \cap \operatorname{int} P_{ji}$ $(1 \leqslant i \leqslant i_j)$ является простой областью;

4°. каждая из концевых точек дуги $\Gamma^{(j)}$ находится в вершине (единственного) концевого прямоугольника семейства.

Покажем, как осуществить это построение, например, на случае, когда $\Gamma^{(j)}$ из (12) — дуга горизонтального типа. Переходя к параметру x, запишем дугу $\Gamma^{(j)}$ из (12) в виде

$$\Gamma^{(j)} = \{(x, \psi(x)),\ x_* \leqslant x \leqslant x^*\}, \quad |\psi'| \leqslant 2.$$

Пусть τ^* — разбиение отрезка $[x_*, x^*]$ на равные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть P_{ji} — прямоугольник, проекция которого на Ox есть $[x_{i-1}, x_i]$, центр находится в точке $\left(\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right), \psi\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right)$, а вертикальная сторона вдвое больше горизонтальной. При этом мелкость $|\tau^*|$ разбиения τ^*, а значит, и $\operatorname{diam} P_{ji}$ мы можем взять сколь угодно малыми.

Выполнение свойств 1°, 2°, 3° очевидно. Если для построенного покрытия свойство 4° не выполняется в точке $\hat{r}(t_{j-1})$ $(\hat{r}(t_j))$, то прямоугольник P_{j1} (P_{ji_j}) можно сдвинуть параллельно оси Oy настолько, чтобы добиться его выполнения. Такая возможность основана на том, что в переходных точках $\frac{1}{2} \leqslant |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 2$, так что на $[x_0, x_1]$ и на $[x_{i_j-1}, x_{i_j}]$ можно считать выполненной оценку $\frac{1}{4} \leqslant |\psi'| \leqslant 4$.

Пусть теперь кривая (11) не является контуром. Это означает, что ее начало и конец лежат на сторонах угловых прямоугольников (различных или одного и того же). Рассуждая так же, как в случае, когда кривая является контуром, построим для каждой ее дуги из (12) покрытие семейством прямоугольников $\{P_{ji}\}_{i=1}^{i_j}$ со свойствами 1°, 2°, 3° и 4°°, 5°, где последние два из них формулируются следующим образом:

4°° каждая из концевых точек $\hat{r}(t_{j-1})$, $\hat{r}(t_j)$ совпадает с вершиной одного из концевых прямоугольников, если касательная $\Gamma^{(j)}$ в ней не параллельна ни одной из осей координат, и совпадает с серединой стороны одного из концевых прямоугольников, если касательная в ней параллельна одной из координатных осей;

5° $\operatorname{int} P_{ji}$ не пересекаются ни с одним из угловых прямоугольников Q_k.

Перенумеровав заново все построенные прямоугольники P_{ji} для всех простых гладких дуг из $\partial' D$, получим семейство $\{P_j\}_{j=1}^m$ прямоугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек, и таких, что

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \supset \partial D.$$

Проведем все прямые, содержащие все стороны всех прямоугольников Q_i и P_j. Из образовавшихся таким образом (замкнутых) прямоугольников занумеруем и обозначим через R_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ те, которые пересекаются с D, но не имеют общих внутренних точек ни с одним из прямоугольников Q_i и P_j. Тогда $R_k \subset \overline{D}$. В самом деле, допустив, что в R_k имеются точки из D и из $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, на соединяющем их отрезке получим точку $(x^*, y^*) \subset (\partial D) \cap \operatorname{int} R_k$. Следовательно, R_k имеет общую внутреннюю точку с тем прямоугольником Q_i или P_j, который содержит точку (x^*, y^*), а это противоречит построению R_k. Следовательно, $D \cap \operatorname{int} R_k = \operatorname{int} R_k$ — простая область.

Итак, показано, что

$$D \subset \left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r} R_k\right),$$

где $l+m+r$ прямоугольников попарно не имеют общих внутренних точек, пересечения $D \cap \operatorname{int} P_j$ и $D \cap \operatorname{int} R_k$ являются простыми областями, пересечение $D \cap \operatorname{int} Q_i$ либо является простой областью, либо может быть разрезано на две простые области.

Лемма доказана.

Заметим, что формула Грина имеет определенную аналогию с формулой Ньютона–Лейбница: интеграл от производных по области интегрирования выражается через значения функции на границе этой области.

Формулу Грина можно использовать для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла по ее границе. Для этого возьмем в качестве $(P(x,y), Q(x,y))$

$$(0, x) \quad \text{или} \quad \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right) \quad \text{или} \quad (-y, 0).$$

Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ и по формуле Грина

$$\mu D = \int_{\partial D^+} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -y\,dx + x\,dy = -\int_{\partial D^+} y\,dx. \qquad (13)$$

§ 20.4. Геометрический смысл знака якобиана плоского отображения

Изложим два подхода к выяснению геометрического смысла знака якобиана плоского отображения.

Первый подход

Для двух векторов

$$\vec a = a_1\vec\imath + a_2\vec\jmath,$$
$$\vec b = b_1\vec\imath + b_2\vec\jmath$$

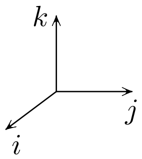


Рис. 20.4

из формулы

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (\vec\imath \times \vec\jmath)$$

видно, что

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

показывает направление кратчайшего поворота от первого вектора ко второму. Именно при

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (< 0)$$

кратчайший поворот от $\vec a$ к $\vec b$ производится в плоскости i, j против (по) часовой стрелки.

Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение

$$\mathcal{F}\ :\ \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

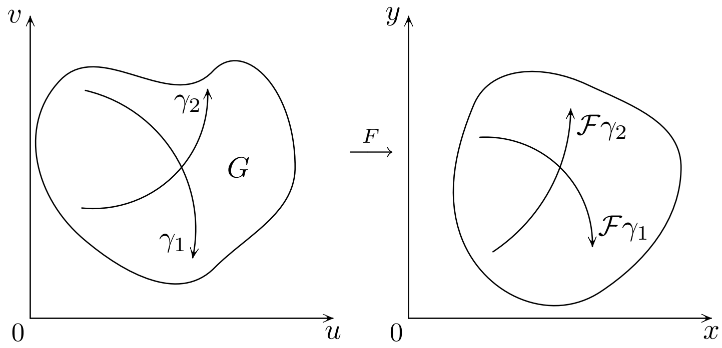


Рис. 20.5

области G плоскости (u, v), содержащей две пересекающиеся гладкие ориентированные кривые, на область в плоскости (x, y) (см. рис. 20.5):

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{(u,v) : u = u_1(t), v = v_1(t)\},\\ \gamma_2 &= \{(u,v) : u = u_2(t), v = v_2(t)\},\\ \mathcal{F}\,\gamma_1 &= \{(x,y) : x = x_1(t), y = y_1(t)\},\\ \mathcal{F}\,\gamma_2 &= \{(x,y) : x = x_2(t), y = y_2(t)\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}x_1(t) &:= x(u_1(t), v_1(t)), y_1(t) := y(u_1(t), v_1(t)),\\ x_2(t) &:= x(u_2(t), v_2(t)), y_2(t) := y(u_2(t), v_2(t)).\end{aligned}$$

Будем считать, что в точке пересечения кривых γ_1 и γ_2 значение параметров $t = t_0$. Сравним направление кратчайшего поворота касательного вектора к γ_1 до касательного вектора к γ_2 в точке пересечения кривых с соответствующим направлением для их образов $\mathcal{F}\,\gamma_1$, $\mathcal{F}\,\gamma_2$. Преобразуем для этого векторное произведение касательных векторов:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dx_2}{dt}\\ \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt}\end{vmatrix}(\vec\imath\times\vec\jmath) = \left(\frac{dx_1}{dt}\,\vec\imath + \frac{dy_1}{dt}\,\vec\jmath\right)\times\left(\frac{dx_2}{dt}\,\vec\imath + \frac{dy_2}{dt}\,\vec\jmath\right) =$$

$$\begin{gathered}= [(x'_u u'_1 + x'_v v'_1)\vec\imath + (y'_u u'_1 + y'_v v'_1)\vec\jmath] \times [(x'_u u'_2 + x'_v v'_2)\vec\imath +\\ +(y'_u u'_2 + y'_v v'_2)\vec\jmath] = (x'_u u'_1 y'_v v'_2 + x'_v v'_1 y'_u u'_2)(\vec\imath\times\vec\jmath) -\\ -(x'_u u'_2 y'_v v'_1 + x'_v v'_2 y'_u u'_1)(\vec\imath\times\vec\jmath) =\end{gathered}$$

$$= (x'_u y'_v - x'_v y'_u)(u'_1 v'_2 - v'_1 u'_2)(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}).$$

Здесь было учтено, что $\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{\imath} \times \vec{\jmath}$. Сравнивая коэффициенты при $\vec{\imath} \times \vec{\jmath}$ в левой и правой частях цепочки равенств, получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix}.$$

По столбцам определителей стоят координаты касательных векторов к γ_1 и γ_2 (правый определитель) и к $\mathcal{F}\gamma_1$ и $\mathcal{F}\gamma_2$ (левый определитель). Сравнивая знаки этих определителей, приходим к выводу: при $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ (< 0) направление кратчайшего поворота от первого касательного вектора ко второму после отображения *сохраняется* (*меняется на противоположное*).

Пусть теперь гладкая кривая γ_1 является частью границы некоторой области D, замыкание которой содержится в G. Пусть γ_1 ориентирована положительно относительно D. Сравним ориентацию γ_1 относительно D и ориентацию $\Gamma_1 = \mathcal{F}(\gamma_1)$ относительно $\mathcal{F}(D)$. Возьмем кривую γ_2, пересекающую γ_1, с касательным вектором в точке пересечения, направленным по нормали к γ_1 внутрь D. Из предыдущего видно, что возможны случаи ($\Gamma_i = \mathcal{F}(\gamma_i)$):

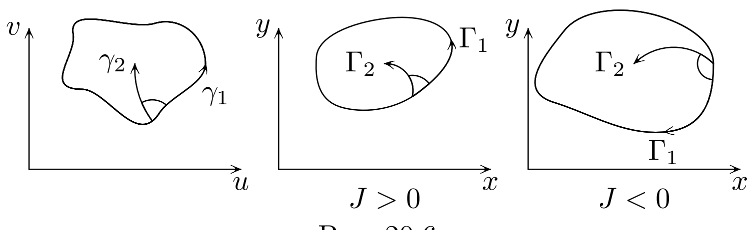


Рис. 20.6

Таким образом, приходим к окончательной формулировке геометрического смысла знака якобиана плоского отображения.

При положительном якобиане сохраняется после отображения направление кратчайшего поворота от одной из пере-

секающихся кривых до другой, а также ориентация кривой, являющейся частью границы области D, относительно D.

При отрицательном якобиане указанные направления кратчайшего поворота и ориентация относительно области меняются на противоположные.

Второй подход

Этот подход основан на использовании формулы Грина. Пусть снова

$$\mathcal{F} \ : \begin{cases} x = (u, v), \\ y = (u, v) \end{cases}$$

— взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение некоторой области G плоскости (u, v).

Пусть ограниченная область $D \subset \overline{D} \subset G$ и якобиан

$$J(u, v) := \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \text{на} \quad \overline{D}.$$

Тогда $J(u, v)$ сохраняет знак на D, т. е. является либо положительным на G, либо отрицательным на G (см. теорему 10.5.4). Тогда $D^* := \mathcal{F}\,(D)$ также является ограниченной областью плоскости (x, y) (теорема 12.3.4).

Пусть $\Gamma := \partial D$ является простым кусочно гладким контуром. Тогда

$$\Gamma^* := \mathcal{F}\,(\Gamma) = \mathcal{F}\,(\partial D) = \partial D^*$$

(доказательство последнего равенства совпадает с доказательством утверждения 1° леммы 19.4.2) также является простым кусочно гладким контуром. В самом деле, пусть

$$\Gamma_i = \{(u(t), v(t)) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\}$$

— гладкая кривая, $\Gamma_i \subset \Gamma$. Тогда

$$\Gamma_i^* := \mathcal{F}\,(\Gamma_i) = \{(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t))),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

является непрерывно дифференцируемой кривой по теореме о дифференцируемости сложной функции. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u \, \frac{du}{dt} + x'_v \, \frac{dv}{dt} \\ y'_u \, \frac{du}{dt} + y'_v \, \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix},$$

причем определитель квадратной матрицы равен $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Поэтому из $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0$ следует, что $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 >$ > 0, т. е. что Γ_i^* не имеет особых точек, т. е. является гладкой. Предполагая для определенности, что ориентация контура $\Gamma := \{(u(t), v(t))\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$, определяемая возрастанием параметра t, является положительной относительно D, так ориентированный контур Γ обозначим через Γ^+. При этом ориентация контура $\Gamma^* = \mathcal{F}(\Gamma)$, наследуемая от ориентации контура Γ^+ (т. е. определяемая возрастанием параметра t), может оказаться как положительной, так и отрицательной относительно области $D^* = \mathcal{F}(D)$. Контур Γ^* с такой ориентацией относительно D^* обозначим через $\Gamma^{*\pm}$. В силу (20.3.13) имеем

$$\mu D^* = \pm \int_{\Gamma^{*\pm}} x\,dy = \pm \int_a^b x y_t'\,dt =$$
$$= \pm \int_a^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt = \pm \int_{\Gamma^+} x\frac{\partial y}{\partial u}\,du + x\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

Положим $x\frac{\partial y}{\partial u} = P$, $x\frac{\partial y}{\partial v} = Q$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}.$$

Будем дополнительно предполагать, что на области G непрерывны, а следовательно, и равны, производные $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$. Применяя к последнему интегралу формулу Грина (20.3.3), получаем, что в зависимости от ориентации $\Gamma^{*\pm}$

$$\mu D^* = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\,dv = \pm \iint_D \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv. \quad (1)$$

В силу положительности левой части этой цепочки равенств положительна и правая часть, так что в области G

$$\pm\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| > 0.$$

Рассматривая отдельно случаи различной ориентации контура Γ^* (т. е. Γ^{*+} и Γ^{*-}) и соответственно беря знаки в (1), приходим к следующему выводу.

В случае положительного якобиана при отображении ориентация граничного контура относительно области сохраняется, а в случае отрицательного якобиана — меняется на противоположную.

Отметим еще, что равенство (1) можно переписать в виде $\mu D^* = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$. Таким образом, при иных (сделанных здесь) предположениях получено новое доказательство формулы (19.5.11), из которой с помощью теоремы о среднем вытекает и формула (19.4.3) (геометрический смысл модуля якобиана отображения).

§ 20.5. Потенциальные векторные поля

Определение 1. Векторное поле $\vec{a} = (P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z))$, заданное на области $G \subset \mathbb{R}^3$, называется *потенциальным* в области G, если существует непрерывно дифференцируемая функция $U\colon\ G \to \mathbb{R}$ такая, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{на} \quad G. \tag{1}$$

Функцию U называют при этом *потенциальной функцией* поля $\vec{a}$ или *потенциалом* поля $\vec{a}$.

Если функция U является потенциалом поля $\vec{a}$, то функция $U + C$, где C — произвольная постоянная, также является потенциалом поля $\vec{a}$.

Упражнение 1. Показать, что верно и обратное (что будет ясно из дальнейшего): если U, V — два потенциала поля $\vec{a}$ в области G, то $V = U + C$ на G, где C — некоторая постоянная.

Равенства (1) иначе можно записать так:

$$\vec{a} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} U = \nabla U, \tag{2}$$

$$\text{или} \quad dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где ∇ — символический вектор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

называемый *набла.*

Интеграл $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ по контуру Γ называют *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}$ по контуру Γ.

Теорема 1. *Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)$ — непрерывное поле в области G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

I. *Поле $\vec{a}$ потенциально в G.*

II$'$. *Для любого кусочно гладкого контура $\Gamma \subset G$*

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

II$''$. *Для любых двух фиксированных точек A, $B \in G$ значение интеграла*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}),$$

где $\overset{\frown}{AB}$ — произвольная кусочно гладкая кривая, лежащая в G и соединяющая точки A и B, не зависит от кривой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала, что II$'$ $\Leftrightarrow$II$''$. Пусть выполнено II$'$ и Γ_1^+, Γ_2^+ — две кривые, лежащие в G, начала которых находятся в точке A, а концы — в точке B. Тогда $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ является ориентированным контуром и в силу II$'$

$$\int_{\Gamma_1^+} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2^-} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

Заменив во втором интеграле ориентацию кривой Γ_2^- на противоположную на Γ_2^+, получаем

$$\int_{\Gamma_1^+} (\vec{a}, d\vec{r}) - \int_{\Gamma_2^+} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0,$$

т. е. утверждение II$''$.

Пусть выполнено II$''$ и $\Gamma^+ \subset G$ — произвольный кусочно гладкий контур. Пусть точки $A, B \in \Gamma$ и кривые $\Gamma_1^+ := \overset{\frown}{AB}$, $\Gamma_2^+ := \overset{\frown}{BA}$ являются дугами контура Γ^+, причем ориентация на каждой из них совпадает с ориентацией контура Γ^+.

Тогда Γ_1^+ и Γ_2^- — две кусочно гладкие кривые с началами в A и концами в B. В силу II$''$

$$\int_{\Gamma^+}(\vec{a},d\vec{r}) = \int_{\Gamma_1^+}(\vec{a},d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2^+}(\vec{a},d\vec{r}) =$$
$$= \int_{\Gamma_1^+}(\vec{a},d\vec{r}) - \int_{\Gamma_2^-}(\vec{a},d\vec{r}) = 0.$$

Покажем, что I $\Rightarrow$ II$''$. Пусть U — потенциал, $\overset{\frown}{AB} = \{(x(t),y(t),z(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кусочно гладкая кривая, лежащая в области G. Тогда

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+$$
$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt =$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\,U(x(t),y(t),z(t))\,dt = U(x(t),y(t),z(t))\Big|_a^b =$$
$$= U(B) - U(A).$$

Покажем, наконец, что II$''$ $\Rightarrow$I. Пусть точка A_0 — фиксированная, а $B(x,y,z)$ — произвольная точка области G. Рассмотрим функцию

$$U(B) = U(x,y,z) := \int_{\overset{\frown}{A_0B}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{3}$$

где $\overset{\frown}{A_0B}$ — кусочно гладкая кривая, лежащая в G. Такое определение функции U корректно, т. к. правая часть (3) в силу II$''$ зависит лишь от $B(x,y,z)$, т. е. от (x,y,z). Поэтому правую часть (3) нередко записывают в виде $\int_{A_0}^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Покажем, что U является потенциалом поля $\vec{a}$, т. е. выполняются равенства (1), из которых установим лишь первое. Пусть $B_0 = B_0(x_0,y_0,z_0) \in G$. Установим равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,(x_0,y_0,z_0) = P(x_0,y_0,z_0) \tag{4}$$

непосредственным вычислением производной $\dfrac{\partial U}{\partial x}$. Пусть $U(x_0,y_0,z_0)$ и $U(x_0+\Delta x,y_0,z_0)$ представлены в виде (20.3.3) с помощью соответственно кривых $\overset{\frown}{A_0B_0}$ и $\overset{\frown}{A_0B} := \overset{\frown}{A_0B_0} \cup \overline{B_0B}$, где $\overline{B_0B}$ — отрезок, соединяющий точки B_0 и B. Тогда

$$\Delta U := U(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \int_{\overline{BB_0}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x, y_0, z_0)\,dx.$$

При получении последнего равенства использовано определение криволинейного интеграла через определенный интеграл по параметру, в качестве которого выбран x (так что $x'_x = 1$, $y'_x = 0$, $z'_x = 0$). Тогда

$$\left|\frac{\Delta U}{\Delta x}(x_0, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} [P(x_0 + \xi, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)]\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|\xi| \leqslant |\Delta x|} |P(x_0 + \xi, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

поскольку функция P непрерывна в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, установлено равенство (4) и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При доказательстве потенциальности поля $\vec{a}$ в условиях II$''$ было не только доказано существование потенциала, но и указано его выражение через $\vec{a}$ в виде формулы (3).

Представляет интерес найти простые (в отличие от II$'$ или II$''$) условия потенциальности поля $\vec{a}$. Введем ротор (или вихрь) поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} := \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \quad (5)$$

Определенное в области G векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в G.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{a} = (P, Q, R)$ *— непрерывно дифференцируемое в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *векторное поле. Тогда*

1° *если поле* $\vec{a}$ *потенциально, то* $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$*;*

2° *если область* G *поверхностно односвязна, а в плоском случае* ($G \subset \mathbb{R}^2$, $R \equiv 0$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$) *— односвязна, и* $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ *на* G*, то поле* $\vec{a}$ *потенциально.*

Доказательство. Установим 1°, т. е. равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0.$$

Для его обоснования достаточно сослаться на теорему о независимости второй смешанной производной от порядка дифференцирования, если каждая из вторых производных непрерывна.

Аналогично устанавливаются и другие два равенства в (6).

Доказательство утверждения 2° (после разъяснения встречающихся в нем понятий) будет приведено для плоского случая в теореме 3, а для трехмерного случая будет получено позднее как следствие из формулы Стокса.

Следующий пример показывает, что без каких-либо предположений о геометрических свойствах области G безвихревое поле не обязано быть потенциальным.

Пример 1. Пусть поле

$$\vec{a} = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

задано во всех точках плоскости, кроме начала координат. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)} \quad \text{при} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

так что $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$. Однако поле не является потенциальным, так как отлична от нуля циркуляция его по окружности:

$$C_R = \{(x = R\cos\theta, y = R\sin\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} :$$

$$\int_{C_R} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} -\frac{R^2\cos^2\theta\, d\theta}{R^2} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{R\sin\theta}{R^2}\, R(-\sin\theta) + \frac{R\cos\theta}{R^2}\, r\cos\theta\right] d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Определение 2. Плоская область G называется *односвязной*, если для всякой ограниченной плоской области D, границей ∂D которой является простой кусочно гладкий контур, из условия $\partial D \subset G$ следует $D \subset G$.

Односвязность G означает, грубо говоря, что область G не имеет дыр.

Теорема 3. *Пусть в плоской односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = (P, Q)$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ в G.*

Тогда поле $\vec{a}$ потенциально в G.

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 1) показать, что $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ для любого простого кусочно гладкого контура $\Gamma \subset G$. Пусть такой контур Γ является границей ограниченной области D $(\partial D = \Gamma)$. По формуле Грина

$$\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Везде в этом параграфе вместо кусочно гладких кривых можно было бы брать лишь ломаные. Все определения и полученные при этом утверждения оказались бы эквивалентны приведенным в силу леммы 20.2.1 об аппроксимации криволинейного интеграла.

Глава 21
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 21.1. Гладкие поверхности

Для описания и изучения поверхностей будем пользоваться вектор-функциями двух переменных. В соответствии с общим определением функции (отображения) будем говорить, что на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ задана вектор-функция $\vec{r}$: $E \to \mathbb{R}^3$, если каждой точке $(u, v) \in E$ поставлен в соответствие трехмерный вектор

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ — евклидовы пространства, числовые функции x, y, z называют координатными функциями.

Аналогично соответствующим понятиям вектор-функции одной переменной и числовой функции двух переменных вводятся понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и др.

Вектор $\vec{a}$ называется пределом вектор-функции $\vec{r}$ (1) при $(u, v) \to (u_0, v_0)$ по множеству E, если (u_0, v_0) — предельная точка множества E и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, |\vec{r}(u, v) - \vec{a}| < \varepsilon \qquad \forall\, (u, v) \in E \cap \mathring{U}_\delta(u_0, v_0).$$

При этом пишут

$$\lim_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a},$$

а если при этом $\mathring{U}_\delta(u_0, v_0) \subset E$ при некотором $\delta > 0$, то пишут

$$\lim_{(u,v) \to (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a}.$$

Функцию $\vec{r}$ называют непрерывной в предельной точке $(u_0, v_0) \in E$, если

$$\lim_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(u_0, v_0).$$

Частная производная $\vec{r}\,'_u = \vec{r}(u_0, v_0)$ определяется равенством
$$\vec{r}\,'_u(u_0, v_0) \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,(u_0, v_0) = \left.\frac{d\vec{r}(u, v_0)}{du}\right|_{u=u_0}.$$

Аналогично определяется и другая частная производная $\vec{r}\,'_v \equiv \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ и частные производные высших порядков.

Понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и другие можно сформулировать эквивалентным образом в терминах координатных функций (ср. § 8.1).

Часто в качестве области определения $E \subset \mathbb{R}^2$ вектор-функции (1) будем брать замкнутую область (т. е. замыкание области). В этом случае будем говорить, что производная $\vec{r}\,'_u$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ области D, если она непрерывна на области D, и функция $\vec{r}\,'_u$ после подходящего доопределения на границе ∂D становится непрерывной на $\overline{D}$. То же относится и к другим производным вектор-функции $\vec{r}$.

Определение 1. Множество точек $S \subset \mathbb{R}^3$ вместе с конкретным его описанием
$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ (u, v) \in \overline{D}\}, \tag{2}$$
где замкнутая область $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, а функции x, y, z непрерывно дифференцируемы на $\overline{D}$, и
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \text{ на } \overline{D}, \tag{3}$$
будем называть (*параметрически заданной*) *гладкой поверхностью*[1)].

Переменные u, v называются параметрами поверхности (2) или ее координатами.

Ту же поверхность можно задать в виде
$$S = \{\vec{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D}\} \quad \text{или} \quad S = \{\hat{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D}\},$$

[1)] С общей точки зрения (2) естественнее было бы называть (*параметрически заданным*) *куском поверхности*, оставив термин «(параметрически заданная) поверхность» за множеством, формально отличающимся от (2) лишь заменой замкнутой области $\overline{D}$ на область D. Мы будем придерживаться предложенной терминологии ради простоты записи.

где $\vec{r}(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Точкой поверхности S называют пару $\{(u,v),\ \hat{r}(u,v)\}$, а (u,v) — координатами этой точки. Ради краткости точку $\hat{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ часто также называют точкой поверхности S.

В определении 1 не исключается, что через некоторую точку $M \in \mathbb{R}^3$ поверхность «проходит» не один раз, т. е. что при некоторых $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \overline{D}$

$$\hat{r}(u_1, v_1) = \hat{r}(u_2, v_2) = M.$$

Поверхность S (2) называется *простой*, если отображение $\hat{r}(u,v)\colon \overline{D} \to S$ является взаимно однозначным.

Пусть

$$S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\} \tag{4}$$

— гладкая поверхность, $(u_0, v_0) \in \overline{D}$. Заметим, что пересечение $\overline{D}$ с прямой $v = v_0$ содержит, во всяком случае при $(u_0, v_0) \in D$, некоторый интервал, которому принадлежит точка (u_0, v_0).

Множество

$$\{\vec{r}(u, v_0),\ (u, v_0) \in \overline{D}\}$$

называется *координатной линией* $v = v_0$. Вектор $\vec{r}\,'_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (x'_u, y'_u, z'_u)$ является ее касательным вектором. Аналогично определяется координатная линия

$$\{\vec{r}(u_0, v),\ (u_0, v) \in \overline{D}\}$$

с касательным вектором

$$\vec{r}\,'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

З а м е ч а н и е 1. Поскольку

$$\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}, \tag{5}$$

где

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,,$$

то условие (3) можно записать в виде $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ или в виде $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$.

Пример 1. Поверхность

$$S_\varepsilon = \{(R\cos\varphi\cos\psi, R\sin\varphi\cos\psi, R\sin\psi),$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}-\varepsilon\},\ R>0,\ 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

(сфера при $\varepsilon = 0$, сферический пояс при $\varepsilon > 0$) является непрерывно дифференцируемой параметрически заданной поверхностью, а при $\varepsilon > 0$ — гладкой параметрически заданной поверхностью.

Мы будем рассматривать далее гладкие параметрически заданные поверхности или поверхности, составленные из конечного числа таких поверхностей.

§ 21.2. Касательная плоскость и нормальная прямая

Определение 1. Плоскость, проходящая через точку $\{(u_0, v_0), \hat{r}(u_0, v_0)\}$ гладкой поверхности (21.1.4) параллельно векторам $\vec{r}\,'_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}\,'_v(u_0, v_0)$, называется *касательной плоскостью* к поверхности в этой точке.

Пусть $(u_0, v_0) \in D$, $\{(u(t), v(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая кривая, $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ при некотором t_0, $a < t_0 < b$. Тогда

$$\{\vec{r}(u(t), v(t))\ (u(t), v(t)) \in D,\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{1}$$

— гладкая кривая, лежащая на поверхности и проходящая через данную точку $\{(u_0, v_0),\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$ поверхности. Касательный вектор этой кривой в точке $\{t_0,\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$ имеет вид

$$\vec{r}\,'_t(t_0) = \vec{r}\,'_u(u_0, v_0)u'_t(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'_t(t_0),$$

т. е. является линейной комбинацией векторов $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$, а значит, параллелен касательной плоскости.

Следовательно, касательные по всем таким кривым (1) в точке $\{t_0,\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$ лежат в касательной плоскости к поверхности в точке $\{(u_0, v_0),\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$.

Исходя из определения касательной плоскости к поверхности, можно написать ее уравнение в векторной форме:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки касания, $\vec{r}$ — текущий радиус-вектор точек на касательной плоскости. В координатной форме уравнение (2) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r}\,'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\vec{r}\,'_v = $ $= (x'_v, y'_v, z'_v)$.

Определение 2. Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормальной прямой* к поверхности в указанной точке.

Определение 3. Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется *нормалью* к поверхности в этой точке.

Нормалью к гладкой поверхности (21.1.4) в данной точке является, например, вектор $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ (см. (21.1.5)).

Поэтому уравнение нормальной прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C},$$

или в подробной записи

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, а производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v вычислены в точке (u_0, v_0).

Поверхность

$$S = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in \overline{D}\}, \tag{5}$$

где функция f непрерывно дифференцируема на замкнутой области $\overline{D}$, называется *гладкой явно заданной поверхностью.* Это важный частный случай гладкой параметрически заданной поверхности (21.1.2).

Гладкая явно заданная поверхность является, очевидно, простой.

Для $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$$\vec{r}\,'_x = (1, 0, f'_x), \quad \vec{r}\,'_y = (0, 1, f'_y),$$

$$\vec{r}\,'_x \times \vec{r}\,'_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x\vec{\imath} - f'_y\vec{\jmath} + \vec{k} \neq 0. \tag{6}$$

Уравнение (3) касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0,$$

или иначе

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0), \tag{7}$$

а уравнение нормальной прямой в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ — вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = -(z - z_0). \tag{8}$$

Определение гладкой явно заданной поверхности очевидным образом распространяется на случай, когда параметрами поверхности служат (y, z) или (z, x).

§ 21.3. Преобразование параметров гладкой поверхности

Изучим вопрос о преобразовании (замене) параметров на гладкой поверхности. Пусть D — плоская область,

$$S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$

— гладкая параметрически заданная поверхность, так что вектор-функция $\vec{r}$ непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$ и $\vec{r}\,'_u \times$ $\times\, \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$.

Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F}\ \begin{Bmatrix} u = \varphi(u_1, v_1) \\ v = \psi(u_1, v_1) \end{Bmatrix}\ :\ \overline{D}_1 \to \overline{D}, \tag{2}$$

где D_1 — область, и параметрически заданную поверхность

$$\tilde{S} = \{\vec{\rho}(u_1, v_1),\ (u_1, v_1) \in \overline{D}_1\},$$

где $\vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1))$.

Будем считать поверхность $\tilde{S}$ той же, что и S, но иначе параметризованной, если замена параметров (2) является *допустимой*, т. е. обладает свойствами:

1° $\mathcal{F}$ устанавливает взаимно однозначные отображения $\overline{D}_1 \leftrightarrow \overline{D}$, $D_1 \leftrightarrow D$, $(\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D)$;

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}_1$ (т. е. φ, ψ непрерывно дифференцируемы на $\overline{D}_1$), обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}$;

3° $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \neq 0$ на D_1, $(\Rightarrow \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \neq 0$ на $D)$.

Замечая, что

$$\vec{\rho}\,'_{u_1} = \vec{r}\,'_u \varphi'_{u_1} + \vec{r}\,'_v \psi'_{u_1}, \quad \vec{\rho}\,'_{v_1} = \vec{r}\,'_u \varphi'_{v_1} + \vec{r}\,'_v \psi'_{v_1},$$

имеем

$$\vec{\rho}\,'_{u_1} \times \vec{\rho}\,'_{v_1} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)}\, \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v. \tag{3}$$

Поскольку каждый из якобианов в 3° ограничен, а их произведение $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \cdot \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = 1$ (см. (12.3.5)), то якобиан $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \neq 0$ на $\overline{D}_1$. Подчеркнем еще, что отображение, обратное допустимому также, очевидно, является допустимым. Поэтому из (3) следует, что при допустимом преобразовании параметров:

a) гладкая параметрически заданная поверхность переходит в гладкую параметрически заданную поверхность,

b) нормальная прямая и касательная плоскость сохраняются.

Заметим, что не всякую параметрически заданную гладкую поверхность (1) можно представить в виде гладкой явно заданной поверхности с помощью замены параметров (u, v) на (x, y), или на (y, z), или на (z, x). Это невозможно сделать, в частности, для поверхности S_ε, $\varepsilon > 0$, из примера 21.1.1, которая не проектируется взаимно однозначно ни на одну из координатных плоскостей.

Однако *локально* такое преобразование параметров осуществить можно. В самом деле, поскольку на D

$$|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \\ = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 > 0,$$

то в произвольной точке $(u_0, v_0) \in D$ один из трех якобианов отличен от нуля. Пусть, например, $\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0$. Тогда по теореме 12.3.3 о локальной обратимости отображения найдутся две окрестности $U(u_0, v_0)$ и $U(x_0, y_0)$ (где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$) такие, что отображение $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ является взаимно однозначным отображением $U(u_0, v_0) \leftrightarrow U(x_0, y_0)$, причем обратное отображение $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{U}(x_0, y_0)$ и якобиан его $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на $\overline{U}(x_0, y_0)$. Сужая при необходимости указанные окрестности, можем каждую из них считать областью (см. теорему 12.3.4). Тогда часть

$$S^{(0)} = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in \overline{U}(u_0, v_0)\}$$

поверхности (1) после замены параметров (u,v) на (x,y) имеет представление

$$S^{(0)} = \{(x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in \overline{U}(x_0, y_0)\},$$

где $f(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$.

§ 21.4. Ориентация гладкой поверхности

Пусть S — гладкая параметрически заданная поверхность (21.3.1). Тогда единичный нормальный вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|} \tag{1}$$

является непрерывной функцией на $\overline{D}$, равно как и вектор $-\vec{n}$.

Функцию $\vec{n}$ (и $-\vec{n}$) называют непрерывным полем единичных нормалей поверхности S.

Определение 1. Всякое непрерывное поле единичных нормалей гладкой поверхности S называется *ориентацией* (или стороной) поверхности S.

Поверхность S (21.3.1), как имеющая две различных ориентации (стороны) $\pm\vec{n}$, называется *двусторонней* поверхностью.

Одна из этих двух ориентаций называется положительной, а другая — отрицательной. Для определенности за положительную ориентацию гладкой поверхности (21.3.1) (если не оговорено противное) примем поле нормалей (1).

Поверхность S (21.3.1), у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется *ориентированной* поверхностью. Ориентированную поверхность S (21.3.1) с положительной ориентацией будем обозначать через S^+, а с отрицательной ориентацией — через S^-.

При замене параметров гладкой ориентированной поверхности в понятие допустимой замены параметров наряду с требованиями 1°, 2°, 3° включим еще требование

4°. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} > 0$ на D_1.

Тогда, как видно из (21.3.3), при замене параметров гладкой поверхности выполняются не только свойства a), b) и c), но еще и свойство

d) сохраняется ориентация поверхности (т. е. положительно ориентированная поверхность при новом ее представлении остается положительно ориентированной, а отрицательно ориентированная остается отрицательно ориентированной).

§ 21.5. Первая квадратичная форма гладкой поверхности

Пусть
$$S = \{\vec{r}(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}\}$$
— гладкая параметрически заданная поверхность. Это означает по определению, что $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$ и $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ на $\overline{D}$.

Рассмотрим дифференциал вектор-функции $\vec{r}$:
$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u\,du + \vec{r}\,'_v\,dv.$$

Тогда
$$|d\vec{r}|^2 = |\vec{r}\,'_u\,du + \vec{r}\,'_v\,dv|^2 = |\vec{r}\,'_u|^2 du^2 + 2(\vec{r}\,'_u, \vec{r}_v)\,du\,dv + |\vec{r}\,'_v|^2 dv^2.$$

В обозначениях
$$E = |\vec{r}\,'_u|^2, \quad F = (\vec{r}\,'_u, \vec{r}_v), \quad G = |\vec{r}\,'_v|^2, \tag{1}$$
$$|d\vec{r}|^2 = |\vec{r}\,'_u\,du + \vec{r}\,'_v\,dv|^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{2}$$

Определение 1. Квадратичная форма $Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2$ называется *первой квадратичной формой поверхности*, E, F, G — ее коэффициентами.

Первая квадратичная форма положительно определённа, т. к. $|d\vec{r}|^2 = 0$ только при $du = 0$, $dv = 0$. Следовательно, дискриминант ее $EG - F^2 > 0$.

Кроме того, $E > 0$, $G > 0$.

Заметим, что
$$EG - F^2 = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|^2, \tag{3}$$
т. к. если ω — угол между $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, то
$$EG - F^2 = |\vec{r}\,'_u|^2|\vec{r}\,'_v|^2 - |\vec{r}\,'_u|^2|\vec{r}\,'_v|^2\cos^2\omega = |\vec{r}\,'_u|^2|\vec{r}\,'_v|^2\sin^2\omega = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|^2.$$

С помощью коэффициентов квадратичной формы поверхности можно вычислять площадь поверхности, длины кривых на поверхности и углы между такими кривыми.

§ 21.6. Неявно заданные гладкие поверхности

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ и функция $F\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 > 0$ на G. Тогда множество точек

$$S = \{(x, y, z) \ : \ (x, y, z) \in G, \ F(x, y, z) = 0\}$$

будем называть *неявно заданной гладкой поверхностью.*

Примером такой поверхности является сфера, определяемая уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$.

Поверхность S локально можно представить как явно заданную гладкую поверхность. В самом деле, пусть, например, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности $U((x_0, y_0)) \times U(z_0)$ $F_z' \neq 0$ и уравнение $F(x, y, z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U((x_0, y_0)),$$

где f — непрерывно дифференцируемая на $U((x_0, y_0))$ функция,

$$f_x' = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad f_y' = -\frac{F_y'}{F_z'}.$$

В качестве нормали (см. (21.2.6)) удобно взять вектор

$$\operatorname{grad} F := F_x'\vec{\imath} + F_y'\vec{\jmath} + F_z'\vec{k}.$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0, z_0) плоскости имеет вид

$$(x - x_0)F_x'(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y'(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F_z'(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

а уравнение нормальной прямой —

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}.$$

Если рассмотреть поверхность уровня функции F, т. е. поверхность, определяемую уравнением $F(x, y, z) = c$, то из предшествующего следует, что $\operatorname{grad} F$ ортогонален поверхности уровня. Последнее свойство согласуется, конечно, с тем, что $\operatorname{grad} F$ указывает направление быстрейшего роста функции F.

§ 21.7. Кусочно гладкие поверхности

В дальнейшем будет использовано понятие кусочно гладкой поверхности, которое приведем здесь для простейшего случая.

Определение 1. Гладкую параметрически заданную поверхность
$$S = \{\vec{r}(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$
назовем *элементарным гладким куском* поверхности (сокращенно — *гладким куском* или *куском* поверхности), если граница ∂D представляет собой простой кусочно гладкий контур.

Краем ∂S куска поверхности S (1) назовем
$$\partial S := \{\vec{r}(u, v),\ (u, v) \in \partial D\}. \tag{2}$$

Можно показать, что край ∂S куска поверхности представляет собой кусочно гладкий контур в $\mathbb{R}^3$, если параметризация его индуцирована параметризацией контура ∂D. Это очевидно, если $\vec{r}|u, v|$ непрерывно дифференцируемо на некоторой окрестности $\overline{D}$.

Два куска поверхности
$$S_i = \{\vec{r}_i(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}_i\}, \quad i = 1, 2,$$
назовем *соседними*, если пересечение их краев $\partial S_1 \cap \partial S_2 = S_1 \cap \cap S_2 \neq \varnothing$ представляет собой объединение конечного числа кусочно гладких кривых и, быть может, конечного числа точек.

Определение 2. Объединение $S = \bigcup\limits_{i=1}^{I} S_i$ кусков поверхности S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$ называется кусочно гладкой поверхностью при выполнении следующих условий:

1° для любых двух кусков поверхности S_i и S_j существует такой набор кусков поверхности $S_i = S_{i_1}, S_{i_2}, \ \ldots, S_{i_j} = S_j$, что любые два стоящие в нем рядом куска поверхности являются соседними;

2° если при $i \neq j$ пересечение $\partial S_i \cap \partial S_j$ содержит более чем конечное множество точек, то куски поверхности S_i и S_j являются соседними;

3° пересечение краев $\partial S_i \cap \partial S_j \cap \partial S_k$ любых трех различных кусков поверхности состоит не более чем из конечного числа точек.

Для каждого куска S_j кусочно гладкой поверхности S обозначим через $\partial^{(i)} S_j$ часть его края ∂S_j, состоящую из объединения всех кусочно гладких кривых из $\bigcup\limits_{k\neq j} (\partial S_k \cap \partial S_j)$. Назовем $\partial^{(i)} S_j$ внутренней частью края ∂S_j, а $\partial^{(e)} S_j := \overline{\partial S_j \setminus \partial^{(i)} S_j}$ назовем внешней частью края ∂S_j.

Краем кусочно гладкой поверхности S назовем множество $\partial S := \bigcup\limits_{i=1}^{I} \partial^{(e)} S_i$. Край ∂S является либо пустым множеством (в этом случае S называется поверхностью без края), либо состоит из конечного числа кусочно гладких контуров (в этом случае S называется поверхностью с краем).

Так, например, краем боковой поверхности пирамиды является периметр ее основания, а поверхность куба является кусочно гладкой поверхностью без края.

З а м е ч а н и е. Понятия кусочно гладкой поверхности S и края ∂S кусочно гладкой поверхности можно было бы обобщить, если считать, что соседние куски поверхности S_i и S_j «склеиваются» не по всем кривым из $\partial S_i \cap \partial S_j$ (как в нашем случае), а лишь по некоторым избранным (и не называются соседними, если в $\partial S_i \cap \partial S_j$ нет кривых «склейки»). При таком подходе краем ∂S лежащего в плоскости $z = 0$ кольца с разрезом по радиусу можно считать объединение двух окружностей и этого разреза по радиусу, а у последнего различать два берега. Однако для наших дальнейших целей достаточно приведенных менее сложных определений соседних кусков поверхностей и края кусочно гладкой поверхности.

Рассмотрим пример другой поверхности, называемой листом Мёбиуса. Он получится, если, взяв полоску бумаги прямоугольной формы, повернуть один из ее концов вокруг средней линии на 180° и склеить оба конца. На листе Мёбиуса нельзя задать непрерывное поле нормалей. Такая поверхность называется неориентируемой или односторонней. Разрезав же лист Мёбиуса по месту склейки бумаги, можно представить его как (ориентируемый, т. е. двусторонний) кусок поверхности.

Обсудим связь между ориентацией гладкого куска поверхности S (1) и ориентацией его края ∂S.

Край ∂S, являющийся простым кусочно гладким контуром будем считать ориентированным. Предположим, что мы движемся по ∂S в направлении его ориентации и единичная нормаль $\vec{n}$ к куску S пронизывает нас с ног до головы. Если ближайшая часть S остаётся при этом слева, то говорят, что *ориентация $\vec{n}$ куска поверхности S и ориентация его края ∂S согласованы* (говорят ещё «согласованы по правилу штопора», «согласованы по правилу буравчика»).

Лемма 1. *Пусть S — гладкий кусок поверхности* (1), *контур ∂D ориентирован положительно относительно D, ориентация края ∂S индуцирована ориентацией ∂D.*

Тогда ориентация $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} = \dfrac{A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ куска S согласована с ориентацией его края ∂S.

Доказательство.

<u>1-й шаг.</u> Пусть S — явно заданный гладкий кусок поверхности и (для определённости) параметрами S служат (x, y):

$$S = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in \overline{D}\}, \quad \vec{n} = \frac{-f'_x\vec{\imath} - f'_y\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}\,. \qquad (3)$$

Нормаль $\vec{n}$ составляет острый угол с положительным направлением оси Oz. Край ∂S лежит на поверхности цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, проекцией ∂S на плоскость $z = 0$ является ∂D. Ориентация ∂S определяется тем, что при движении точки по ∂S её проекция движется по ∂D так, что ближайшая часть D остаётся слева. Следовательно, если мы движемся по краю ∂S в направлении указанной ориентации и нормаль $\vec{n}$ пронизывает нас с ног до головы, то ближайшая часть S остаётся слева, так что лемма в условиях шага 1 доказана.

Замечание. Название согласованности ориентаций «по правилу штопора» объясняется следующим. Пусть в (3) D — круг, окружность ∂D ориентирована положительно относительно D, т.е. проходится против часовой стрелки. Если ручку штопора вращать в соответствии с ориентацией ∂S, то штопор движется в направлении $\vec{n}$.

2-й шаг. Пусть теперь S — гладкий кусок поверхности общего вида (1). Вопрос согласованности ориентаций достаточно решить локально, т.е. в сколь угодно малой окрестности произвольной точки $\hat{r}(u_0, v_0) \in \partial S$ $((u_0, v_0) \in \partial D)$.

Для определённости будем считать, что $(\vec{n}, \vec{k})(u_0, v_0) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Привлекая теорему 12.3.3 о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения, можно показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

1° Отображение $\mathcal{F} : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ является взаимно однозначным отображением $\overline{D_\varepsilon} := \overline{D} \cap \overline{u_\varepsilon(u_0, v_0)} \leftrightarrow \overline{D^*_\varepsilon}$, $\partial D_\varepsilon \leftrightarrow \partial D^*_\varepsilon$, где D^*_ε — область в плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$ с кусочно гладкой границей ∂D^*_ε.

2° $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ на $\overline{D_\varepsilon}$, $\quad \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$ на $\overline{D^*_\varepsilon}$.

Рассмотрим гладкий кусок поверхности

$$S_\varepsilon := \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D_\varepsilon}\} \subset S.$$

Замена параметров (u,v) на параметры (x,y) является допустимой для S_ε. (см. § 21.3) и S_ε можно представить в виде

$$S_\varepsilon = \{(x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in \overline{D^*_\varepsilon}\}, \tag{4}$$

где $(x, y, f(x,y)) = \hat{r}(u(x,y), v(x,y)) = \hat{\rho}(x,y)$.

Остаётся убедиться в согласованности ориентаций S_ε и ∂S_ε, для чего дважды воспользуемся положительностью якобианов $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ и $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$.

С одной стороны единичная нормаль к куску S_ε, вычисленная по формуле (3), совпадает с исходной единичной нормалью $\vec{n}$ в силу (21.3.3).

С другой стороны, ориентация ∂D^*_ε, индуцированная ориентацией ∂D_ε, является положительной относительно D^*_ε в силу геометрического смысла знака якобиана отображения $\mathcal{F}$: $D_\varepsilon \leftrightarrow D^*_\varepsilon$ (см. конец § 20.4).

Следовательно, мы находимся в условиях первого шага доказательства леммы, из утверждения которого получаем, что ориентации S_ε и ∂S_ε согласованы.

Таким образом, задание ориентации куска поверхности S (1) равносильно заданию ориентации его края ∂S (являющегося кусочно гладким контуром). Поэтому ориентацию края ∂S также будем называть ориентацией S.

Пусть теперь $S_1^{\vec{\nu}_1}$ и $S_2^{\vec{\nu}_2}$ — два соседних куска поверхности, каждый из которых ориентирован каким-либо способом (одним из двух). Их ориентации $\vec{\nu}_1$, $\vec{\nu}_2$ будем называть согласованными, если каждая из них на любой кусочно гладкой кривой из $\partial S_1 \cap \partial S_2$ порождает противоположные ориентации.

Определение 3. Кусочно гладкая поверхность $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ называется *ориентируемой*, если существуют такие ориентации $\vec{\nu}_1, \ \ldots, \vec{\nu}_I$ кусков поверхности $S_1, \ \ldots, S_I$, что ориентации $\vec{\nu}_i$ и $\vec{\nu}_j$ любых двух соседних кусков поверхности S_i и S_j согласованы.

Совокупность $\vec{\nu} = \{\vec{\nu}_i\}$ таких ориентаций кусков поверхности S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$, если она существует, называется ориентацией $\vec{\nu}$ поверхности S. Совокупность противоположных ориентаций $(-\vec{\nu}_i)$ кусков S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$ называется при этом противоположной ориентацией поверхности S.

Ориентируемая кусочно гладкая поверхность S, у которой фиксирована одна (из двух) ее ориентаций $\vec{\nu}$, называется *ориентированной*; обозначим ее через $S^{\vec{\nu}}$.

Край ориентированной кусочно гладкой поверхности (с краем) состоит из конечного числа контуров. Любой из этих контуров представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из ориентированных контуров ∂S_i и потому сама имеет ориентацию.

Можно показать, что совокупность ориентаций всех таких кривых определяет ориентацию всех контуров из ∂S. Совокупность этих ориентаций контуров из ∂S называется *ориентацией края* ∂S, порожденной заданной ориентацией поверхности $S^{\vec{\nu}}$.

Глава 22
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 22.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задана гладкая поверхность

$$S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где D — плоская измеримая область. Согласно определению 21.1.1 и замечанию 21.1.1 $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}_v$ — непрерывны на $\overline{D}$, $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ на $\overline{D}$.

В определении *допустимой* замены параметров (u,v) поверхности (1) ($u = u(u_1,v_1)$, $v = v(u_1,v_1)$, $(u_1,v_1) \in \overline{D}$) будем теперь включать еще дополнительное требование *измеримости* области D_1.

Определение 1. Пусть числовая функция $F\colon\ E \to \mathbb{R}$ задана на S. Тогда

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS := \\ := \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\,du\,dv \tag{2}$$

называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции F по поверхности S.

Установим некоторые свойства поверхностного интеграла (2).

1° *Для существования интеграла* $\iint_S F(z,y,z)\,dS$ *необходимо и достаточно, чтобы функция* $F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ *(как функция переменных* u, v*) была интегрируемой на* D.
В частности, если F *непрерывна на* S *(см. определение* 10.5.2*), то* $\iint_S F(z,y,z)\,dS$ *существует.*

2° *Поверхностный интеграл первого рода* (2) *не зависит от параметризации гладкой поверхности* (1) *(при которой область изменения параметров измерима).*

Пусть гладкая поверхность S (1) имеет другое представление

$$S = \{\vec{\rho}(u_1, v_1),\ (u_1, v_1) \in \overline{D}_1\},$$

где D_1 — измеримая область,

$$\vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1)) = \\ = (\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)),$$

а $\begin{cases} u = u(u_1, v_1) \\ v = v(u_1, v_1) \end{cases}$ — допустимая замена параметра на S. Тогда с помощью формулы (21.3.3) и теоремы 19.5.2 получаем, что

$$\iint\limits_{D_1} F(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))|\vec{\rho}\,'_{u_1} \times \vec{\rho}\,'_{v_1}|\, du_1\, dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D_1} F(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \right| du_1 dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv.$$

Определение 2. *Площадью гладкой поверхности* S (1) называется число

$$\mu S := \iint_S dS = \iint_D |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv. \tag{3}$$

В силу свойств 1° и 2° площадь гладкой поверхности S существует и не зависит от параметризации поверхности (при допустимой замене параметров).

Приведем соображения в пользу естественности определения площади поверхности формулой (3). Рассмотрим разбиение плоскости $\mathbb{R}^2_{u,v}$ на квадраты ранга $m \in \mathbb{N}$:

$$Q^{(m)}_{j,k} = \{(u, v),\ \frac{j-1}{2^m} \leqslant u \leqslant \frac{j}{2^m},\ \frac{k-1}{2^m} \leqslant v \leqslant \frac{k}{2^m}\}, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Перенумеруем непустые пересечения $D \cap Q^{(m)}_{j,k}$ и переобозначим их через E_i, $1 \leqslant i \leqslant i_m$. Получим разбиение $\tau_m = \{E_i\}_{i=1}^{i_m}$

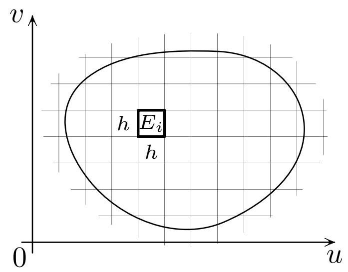


Рис. 22.1

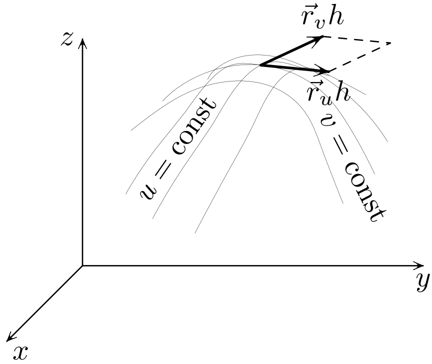


Рис. 22.2

области D. Пусть m достаточно велико и $\overline{E}_i \cap \partial D = \varnothing$. Тогда E_i представляет собой квадрат вида

$$E_i = \{(u, v) \;:\; u_i \leqslant u \leqslant u_i + h,\; v_i \leqslant v \leqslant v_i + h\} \subset D.$$

При переходе от вершины (u_i, v_i) к соседним вершинам E_i радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ получит приращения

$$\vec{r}(u_i + h, v_i) - \vec{r}(u_i, v_i) = \vec{r}\,'_u(u_i, v_i)h + \vec{o}(h),$$
$$\vec{r}(u_i, v_i + h) - \vec{r}(u_i, v_i) = \vec{r}\,'_v(u_i, v_i)h + \vec{o}(h).$$

Заменим образ квадрата E_i «близким» ему параллелограммом, лежащим в касательной плоскости к поверхности S в точке $\hat{r}(u_i, v_i)$ и построенным на векторах $\vec{r}\,'_u(u_i, v_i)h$, $\vec{r}\,'_v(u_i, v_i)h$ с площадью $|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|_{(u_i, v_i)} \mu E_i$.

Если же $\overline{E}_i \cap \partial D \neq \varnothing$, то $E_i \subset U_{2^{-m+1}}(\partial D)$ и через (u_i, v_i) обозначим произвольную точку из E_i. Поскольку $\mu^* U_{2^{-m+1}}(\partial D) \to 0$ при $m \to \infty$ (лемма 18.2.3), получаем в силу сходимости сумм Римана к интегралу, что при $m \to \infty$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_m \\ E_i \not\subset U_{2^{-m+1}}(\partial G)}} |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|_{(u_i, v_i)} \mu E_i \to \iint_S |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| \, du \, dv.$$

Часто выражение $|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| \, du \, dv$ называют *элементом площади* и обозначают символом dS. Учитывая еще формулы (21.1.5), (21.5.3), получаем различные виды записи dS:

$$dS = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\,du\,dv =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} du\,dv =$$
$$= \sqrt{EG - F^2} du\,dv,$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы.

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно гладкой поверхности $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ (см. § 21.7) определяется как сумма поверхностных интегралов по каждому из кусков S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$.

Аналогично площадь кусочно-гладкой поверхности $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ определяется как сумма $\sum\limits_{i=1}^{I} \mu S_i$ площадей каждого из кусков.

§ 22.2. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана гладкая поверхность
$$S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$
где D — измеримая область.

По определению $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$ — непрерывны на $\overline{D}$, $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ на $\overline{D}$.

Ориентируем S с помощью выбора непрерывного векторного поля единичных нормалей $\vec{\nu} = \pm\vec{n}$ и обозначим через $S^{\vec{\nu}}$, где
$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{2}$$

В случае $\vec{\nu} = \vec{n}$ поверхность $S^{\vec{n}}$ будем называть ориентированной положительно и обозначать также через S^+, в случае $\vec{\nu} = -\vec{n}$ поверхность $S^{-\vec{n}}$ будем называть ориентированной отрицательно и обозначать также через S^-.

Пусть на поверхности S задано векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$.

Определение 1. *Потоком* вектор-функции $\vec{a}$ через гладкую ориентированную поверхность $S^{\vec{\nu}}$ (говорят также: через поверхность S в направлении нормали $\vec{\nu}$) называется поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{\nu})\, dS. \tag{3}$$

В силу свойств поверхностных интегралов первого рода этот интеграл существует, если функции $P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ как функции (u,v) интегрируемы на D, в частности, если P, Q, R непрерывны на S.

Интеграл (3) меняет знак при замене ориентации $\vec{\nu}$ на $-\vec{\nu}$, т. е. на противоположную.

Интеграл (3), вычисляемый через двойной интеграл по области D изменения параметров, *не зависит* от допустимой замены параметров, сохраняющей ориентацию поверхности.

Определение 2. Интеграл (3) называют *поверхностным интегралом второго рода* от вектор-функции $\vec{a}$ по ориентированной поверхности $S^{\vec{\nu}}$.

В случае положительно ориентированной поверхности S^+ ($\vec{\nu} = \vec{n}$) поверхностный интеграл второго рода по S^+ обозначается символом

$$\iint_{S^+} P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dz\, dx + R(x,y,z)\, dx\, dy := \\ := \iint_S (\vec{a}, \vec{n})\, dS. \tag{4}$$

В силу определения 22.1.1 поверхностного интеграла первого рода и (2) имеем

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \\ = \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\, dS = \\ = \iint_S \Big[P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \\ + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} +$$

$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Bigg]du\,dv. \qquad (5)$$

Поверхностный интеграл второго рода по ориентированной кусочно гладкой поверхности определяется как сумма поверхностных по соответственно ориентированным гладким кускам этой поверхности.

Глава 23
СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

§ 23.1. Скалярные и векторные поля

Здесь будут рассматриваться числовые или векторные функции, заданные на плоских или трехмерных областях. При этом будем говорить, что на данной области задано скалярное или соответственно векторное поле. Если заданные функции непрерывны, дифференцируемы и т. п., будем говорить соответственно, что скалярное или векторное поле непрерывно, дифференцируемо и т. п.

Введем символический вектор, называемый *оператором Гамильтона* или оператором «*набла*»:

$$\nabla = \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Тогда *градиент* числовой функции u

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

если правую часть понимать как «произведение» вектора набла на числовую функцию u.

Пусть задано векторное поле $\vec{a}$: $G \to \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^3$.

Его *производной по направлению* $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке $(x_0, y_0, z_0) \in G$ называется

$$\frac{\partial \vec{a}(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{e}} := \frac{d}{dt}\,\vec{a}(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0},$$

если производная в правой части существует.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}\cos\gamma = (\vec{e}, \nabla)\vec{a},$$

где *скалярное произведение*

$$(\vec{e}, \nabla) = \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Если $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный фиксированный вектор, то вектор

$$(\vec{b}, \nabla)\vec{a} := b_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}$$

называется *градиентом* вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$.

Если поле $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке, то число

$$\operatorname{div} \vec{a} := \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* (или расходимостью) поля $\vec{a}$ в этой точке.

Символически можно записать

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\nabla, \vec{a}).$$

Ротором или *вихрем* векторного поля $\vec{a}$ в данной точке называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} := \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} :=$$

$$:= \vec{\imath} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{\jmath} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Пусть Γ — кусочно гладкий контур в области G. Интеграл

$$\int_\Gamma a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz =: \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$$

называется *циркуляцией векторного поля* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по контуру Γ.

Ни градиент скалярного поля, ни дивергенция, ни вихрь векторного поля не зависят от сдвига и поворота декартовой системы координат. Это утверждение можно доказать как непосредственными вычислениями, так и на основе геометрических соображений. Например, градиент функции, как известно, направлен в сторону быстрейшего роста функции и по величине равен производной по этому направлению. Обсуждаемая независимость дивергенции и вихря векторного поля будут получены в качестве следствий соответственно из теоремы Остроградского–Гаусса и теоремы Стокса.

Оператор ∇, применяемый к скалярному или векторному полю, действует, с одной стороны, как оператор дифференцирования, а с другой — как обычный вектор. Выработаны формальные правила преобразований выражений, содержащих ∇, основанные на разделении этих ролей. Приведем пример таких преобразований, разъяснения к которому будут даны вслед за ним:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(f\vec{a}) = \nabla \times (f\vec{a}) = \\
&\qquad = \overset{\uparrow}{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{f}\vec{a}) + \overset{\uparrow}{\nabla} \times (f\overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\overset{\uparrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{f}) \times \vec{a} + f(\overset{\uparrow}{\nabla} \times \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = \\
&\qquad\qquad = (\nabla f) \times \vec{a} + f(\nabla \times \vec{a}) = \operatorname{grad} f + \vec{a} + f \operatorname{rot} \vec{a}.
\end{aligned}$$

Здесь f — скалярная, $\vec{a}$ — векторная функции. Стрелка $\uparrow$ означает, что мы «снимаем» операцию дифференцирования с ∇, перенося ее (что показывается стрелкой $\downarrow$) на объект действия ∇, т. е. на произведение $f\vec{a}$. Дифференцирование $\downarrow$ произведения проводится по правилу Лейбница. Применяем правила действия с обычными векторами (перенос числового множителя $\overset{\downarrow}{f}$ или f), стараясь сблизить $\overset{\uparrow}{\nabla}$ с множителем, снабженным стрелкой $\downarrow$. Снимаем все стрелки.

Обоснование этих преобразований можно получить на следующем пути. Представим ∇ в виде $\nabla = \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3$, где $\nabla_1 = \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_2 = \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_3 = \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$. Такое представление означает, что результат действия ∇ на числовую или векторную функцию равен сумме результатов действий на эту функцию ∇_1, ∇_2 и ∇_3. Приведенные же формальные операции, если заменить в них ∇ на ∇_1, или на ∇_2, или на ∇_3, превращаются в неформальные и хорошо известные. Остается провести их и результат записать в желаемой форме.

§ 23.2. Формула Остроградского–Гаусса

Нам понадобится выражение потока векторного поля через гладкую поверхность, которая имеет явное описание более общего вида, чем данное в определении 21.7.1. Приведем в связи с этим

Определение 1. Поверхность

$$S = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где D — ограниченная плоская область, ∂D — простой кусочно гладкий контур, назовем *явно заданным почти гладким куском поверхности*, если функция f непрерывна на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируема на D.

Почти гладкий кусок поверхности является гладким куском поверхности (определение 21.7.1), если f непрерывно дифференцируема не только на D, но и на $\overline{D}$.

Примером почти гладкого куска поверхности является полусфера

$$\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}.$$

Определение 2. *Потоком* непрерывного векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$ через почти гладкий кусок поверхности (22.2.1) в направлении нормали $-f'_x\vec{\imath} - f'_y\vec{\jmath} + \vec{k}$ называется

$$\iint_D R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy. \tag{2}$$

Это определение обобщает определение потока данного векторного поля, введенное в случае явно заданного гладкого куска поверхности (см. (22.2.5) при $P \equiv Q \equiv 0$, $(u, v) = (x, y)$).

Довод в пользу естественности такого обобщения (2) состоит в следующем. Пусть S_ε — часть поверхности (1)

$$S_\varepsilon = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in \overline{D}_\varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{(x, y) \in D\colon \operatorname{dist}((x, y), \partial D) > \varepsilon\}$ — область в $\mathbb{R}^2$.

Тогда S_ε — гладкий кусок поверхности и поток вектора $R\vec{k}$ через S_ε в направлении той же нормали равен (согласно определению 22.2.1):

$$\iint_{D_\varepsilon} R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

Последний интеграл при $\varepsilon \to 0$ стремится к (2) в силу непрерывности $R(x, y, f(x, y))$ на $\overline{D}$ и стремления $\mu(D \setminus D_\varepsilon) \to 0$.

Наряду с определениями 22.2.1, 22.2.2 будем считать принятыми и аналогичные определения почти гладких кусков поверхности, заданных в явном виде формулами $x = g(y, z)$ или $y = h(z, x)$ и соответственно потоков непрерывных векторных полей $P(x, y, z)\vec{\imath}$, $Q(x, y, z)\vec{\jmath}$.

Определение 3. Расширим понятие кусочно гладкой поверхности, считая, что наравне с гладкими кусками она может содержать и явно заданные почти гладкие куски.

Определение 4. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ вида

$$G = \{(x, y, z) \,:\, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y),\ (x, y) \in D\} \tag{3}$$

назовем простой относительно оси Oz (короче: Oz-простой), если D — ограниченная плоская область, ∂D — простой кусочно гладкий контур, функции φ, ψ непрерывны на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемы на D, $\varphi < \psi$ на D.

Будем считать принятыми также и аналогичные определения *Ox-простой* области и *Oy-простой* области.

Как видим, граница Oz — простой области G $\partial G = S_1 \cup \cup S_2 \cup S_0$ состоит из нижней S_1, верхней S_2 и боковой S_0 частей, причем нижняя и верхняя части являются явно заданными почти гладкими кусками поверхности, а боковая часть — частью цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz и направляющей ∂D. Боковую часть S_0 можно представить как объединение конечного числа явно заданных с помощью параметров (y, z) или (z, x) гладких поверхностей.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана измеримая область G, граница ∂G которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся кусочно гладких поверхностей, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G.

Пусть в замыкании $\overline{G}$ области G задано непрерывное векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$, для которого $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$.

Теорема 1 (Остроградского–Гаусса). *Пусть для замкнутой области $\overline{G}$ существуют три разбиения: $\tau_x = \{\overline{G}_{x,m}\}_{m=1}^{m_x}$, $\tau_y = \{\overline{G}_{y,m}\}_{m=1}^{m_y}$, $\tau_z = \{\overline{G}_{z,m}\}_{m=1}^{m_z}$, где $G_{x,m}$, $G_{y,m}$, $G_{z,m}$ соответственно Ox-простые, Oy-простые и Oz-простые области.*

Пусть $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ — непрерывное векторное поле на $\overline{G}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$.

Тогда справедлива формула

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a} = \iint_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n})\, dS \tag{4}$$

Это равенство называется формулой Остроградского–Гаусса.

Доказательство. Будем рассматривать лишь поле вида $\vec{a} = R\vec{k}$, т. к. случаи полей $P\vec{\imath}$, $Q\vec{\jmath}$ рассматриваются аналогично, а из доказательства формулы (4) во всех трех случаях следует утверждение теоремы.

<u>1-й шаг.</u> Пусть область G является Oz-простой (см. определение 4). Тогда, сводя тройной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$
$$= \iint_D R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy.$$

Пусть S_1 — нижняя, S_2 — верхняя, S_0 — боковая сторона поверхности ∂G. Ориентируем их с помощью единичного вектора $\vec{n}$ внешней (по отношению к G) нормали.

Тогда из последней цепочки равенств получаем, что

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{S_2^{\vec{n}}} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{S_1^{\vec{n}}} R(x,y,z)\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{S_2} (\vec{a},\vec{n})\,dS + \iint_{S_1} (\vec{a},\vec{n})\,dS + \iint_{S_0} (\vec{a},\vec{n})\,dS,$$

поскольку последнее слагаемое равно нулю, т. к. $(\vec{a},\vec{n}) = 0$ на S_0. Следовательно, в условиях шага 1 формула (4) справедлива.

2-й шаг. Пусть условия теоремы выполнены при $\vec{a} = R\vec{k}$ и $\tau_z = \{\overline{G}_{z,m}\}_{m=1}^{m_z}$ — разбиение $\overline{G}$ из условия теоремы. Тогда, используя результат шага 1, имеем

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \sum_{m=1}^{m_z} \iiint_{G_{z,m}} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \sum_{m=1}^{m_z} \iint_{\partial G_{z,m}} (\vec{a},\vec{n}^{(m)})\,dS = \iint_{\partial G} (\vec{a},\vec{n})\,dS.$$

Здесь $\vec{n}^{(m)}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial G_{z,m}$ области $G_{z,m}$. При получении последнего равенства учтено, что на общей части $\partial G_{z,m} \cap \partial G_{z,p}$ границ двух Oz-простых областей $G_{z,m}$ и $G_{z,p}$ $(m \neq p)$ внешние нормали $\vec{n}^{(m)}$ и $\vec{n}^{(p)}$ противоположны. Поэтому сумма потоков вектора $\vec{a}$ через эту общую часть границы в направлениях $\vec{n}^{(m)}$ и $\vec{n}^{(p)}$ равна нулю.

Следовательно, в последней сумме интегралы по $\partial G_{z,m}$ можно заменить интегралами по $\partial G \cap \partial G_{z,m}$. Поскольку $\bigcup_{m=1}^{m_z}(\partial G \cap G_{z,m}) = \partial G$, мы приходим к последнему равенству последней цепочки равенств.

Таким образом, утверждение теоремы для $\vec{a} = R\vec{k}$, а вместе с ним и для общего случая векторного поля $\vec{a}$, установлено.

Получим одно следствие формулы Остроградского–Гаусса. Пусть векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ непрерывно вместе с производными P'_x, Q'_y, R'_z в некоторой окрестности $U(M)$ точки $M \in \mathbb{R}^3$. Пусть B_ε — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M, ∂B_ε — поверхность шара, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂B_ε. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{a}, \vec{n})\, dS.$$

В силу теоремы о среднем для некоторой точки $M_\varepsilon \in B_\varepsilon$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_\varepsilon) = \frac{1}{\mu B_\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{a}, \vec{n})\, dS,$$

а в силу непрерывности $\operatorname{div} \vec{a}$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu B_\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{a}, \vec{n})\, dS. \tag{5}$$

Интеграл в правой части (5) не зависит от выбора прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^3$, так что и дивергенция векторного поля не зависит от выбора прямоугольной системы координат. Формула (5) может служить определением дивергенции. Такое определение дивергенции называют *геометрическим*.

Упражнение 1. Выразить меру области $G \subset \mathbb{R}^3$ через поверхностные интегралы, применив формулу Остроградского–Гаусса к каждому из векторных полей: $\vec{a} = x\vec{\imath}$, $\vec{a} = y\vec{\jmath}$, $\vec{a} = z\vec{k}$, $\vec{a} = \frac{1}{3}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$.

Определение 5. Ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям теоремы Остроградского–Гаусса, будем называть *допустимой*.

Определение 6. Непрерывно дифференцируемое в области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ называется *соленоидальным*, если

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0 \quad \text{на} \quad G.$$

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю его поток в направлении внешней нормали через границу любой допустимой области D, замыкание которой $\overline{D} \subset G$.*

Доказательство достаточности следует из формулы (5), а необходимости — из формулы Остроградского–Гаусса (4).

Определение 7. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *объемно односвязной*, если для любой допустимой области $D \subset \mathbb{R}^3$ из условия $\partial D \subset G$ следует, что $D \subset G$.

Можно сказать условно, что объемно односвязная область не имеет «дыр», «пустот».

З а м е ч а н и е 1. Дают и отличное от определения 6 определение соленоидального поля в области $G \subset \mathbb{R}^3$, называя соленоидальным такое непрерывно дифференцируемое векторное поле, для которого равен нулю поток в направлении внешней нормали через границу ∂D любой допустимой области D с границей $\partial D \subset G$.

Ясно, что оба этих определения совпадают, если область G объемно односвязна.

§ 23.3. Формула Стокса

Пусть дважды непрерывно дифференцируемый (элементарный гладкий) кусок поверхности

$$S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\} \subset G \subset \mathbb{R}^3,$$

где G — область в $\mathbb{R}^3$, D — плоская ограниченная область с границей

$$\partial D = \{(u(t), v(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{1}$$

представляющей собой простой кусочно гладкий контур,

$$\partial S = \Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{2}$$

Говорят, что контур Γ *ограничивает* поверхность S, а также, что поверхность S *натянута* на контур Γ.

Будем считать контур ∂D ориентированным положительно относительно D.

Пусть

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

— ориентация поверхности S. При этом ориентации S и ∂S оказываются согласованными по правилу штопора (см. лемму 21.7.1).

Теорема 1 (Стокса). *Пусть в области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ и поверхность S описанного типа. Тогда, если ориентации S и Γ согласованы по «правилу штопора», то*

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, dS = \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}), \tag{3}$$

т. е. поток вихря векторного поля через поверхность S равен циркуляции векторного поля по контуру, ограничивающему эту поверхность.

Формула (3) называется *формулой Стокса.*

В координатной форме формула (3) имеет вид

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS =$$

$$= \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим лишь случай векторного поля $\vec{a} = P\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, так как случаи поля $Q\vec{\jmath}$ и $R\vec{k}$ рассматриваются аналогично и все вместе приводят к формуле (4) общего вида. Итак,

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx =$$

$$= \int_a^b P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]\times$$

$$\times[x'_u(u(t), v(t))u'_t + x'_v(u(t), v(t))v'_t]\,dt =$$

$$= \int_{\partial D} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)][x'_u(u, v)\,du + x'_v(u, v)\,dv].$$

Применив формулу Грина к последнему интегралу, получаем, что

$$\int_\Gamma P\,dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] du\,dv =$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right] du\, dv =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial (z,x)}{\partial (u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right] du\, dv =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) dS,$$

что и требовалось показать.

З а м е ч а н и е 1. Справедливость теоремы (формулы) Стокса сохранится, если в ее условиях уменьшить требование к поверхности S, сняв условие непрерывности вторых производных (которое является лишь «техническим», т. е. нужным лишь для проведения приведенного доказательства).

Таким образом, теорема Стокса остается верной, если под S понимать произвольный параметрически заданный (элементарный гладкий) кусок поверхности (см. терминологию в § 21.5). План доказательства такого обобщения теоремы Стокса может состоять в аппроксимации гладкого куска поверхности гладким дважды непрерывно дифференцируемым куском, применением к последнему доказанной теоремы Стокса и предельном переходе по последовательности аппроксимирующих гладких дважды непрерывно дифференцируемых кусков.

Не приводя самого доказательства, будем считать, что теорема (формула) Стокса верна в указанной более общей формулировке.

Формула Стокса (3) остается справедливой и при одновременной замене ориентаций куска поверхности S и его края $\partial S = \Gamma$ на противоположные, т. к. при этом обе части равенства (3) поменяют знаки на противоположные. Ориентации S и $\partial S = \Gamma$ после смены на противоположные также окажутся взаимно согласованными по «правилу штопора».

Теорему Стокса можно обобщить на случай ориентированной кусочно-гладкой поверхности S (см. терминологию в § 21.7).

Теорема 2 (Стокса). *Пусть* $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ *— ориентированная полем* $\vec{\nu} = \{\vec{\nu}_i\}_{i=1}^{I}$ *единичных нормалей кусочно гладкая поверхность, лежащая в области* $G \subset \mathbb{R}^3$, ∂S *— ее край с ориентацией, порожденной заданной ориентацией поверхности* S. *Тогда для непрерывно дифференцируемого в области* G *векторного поля* $\vec{a}$

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu})\, dS = \sum_{i=1}^{I} \iint_{S_i} (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu}_i)\, dS = \int_{\partial S} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Доказательство состоит в применении формулы Стокса для каждого куска поверхности S_i и сложения полученных равенств. При этом части контурных интегралов по общей части $\partial S_i \cap \partial S_j$ $(i \neq j)$ соседних кусков S_i и S_j взаимно уничтожаются, поскольку они отличаются лишь ориентацией кривых, входящих в $\partial S_i \cap \partial S_j$, определяемой ориентацией S_i и S_j.

Теорема Стокса дает возможность геометрического подхода к понятию вихря поля. Пусть $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемое в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) векторное поле, $\vec{\nu}$ — единичный вектор, D_ε — круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в (x_0, y_0, z_0) в плоскости, ортогональной $\vec{\nu}$. Тогда по формуле Стокса и теореме о среднем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{D_\varepsilon} (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu})\, dS = (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu}) \Big|_{(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)} \mu D_\varepsilon,$$

где ориентация окружности ∂D_ε согласована с $\vec{\nu}$ по «правилу штопора», точка $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in D_\varepsilon$. Отсюда

$$(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu}) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu D_\varepsilon} \int_{\partial D_\varepsilon} (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{r}). \tag{5}$$

Поскольку криволинейный интеграл второго рода не зависит от сдвига и поворота ортогональной системы координат, то и $(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu})$ не зависит от сдвига и поворота ортогональной системы координат. То же относится, следовательно, и к $\operatorname{rot}\vec{a}$ в силу произвольности вектора $\vec{\nu}$.

Правая часть (5) может быть принята за определение проекции $\operatorname{rot}\vec{a}$ на $\vec{\nu}$.

§ 23.4. Потенциальные векторные поля (продолжение)

Напомним определение 20.5.1 потенциального поля.

Определение 1. Непрерывное на области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ называется *потенциальным в области* G, если существует непрерывно дифференцируемая функция (*потенциал*) $U\colon G \to \mathbb{R}$ такая, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{на} \quad G. \tag{1}$$

Необходимым и достаточным условием потенциальности *непрерывного* в области G векторного поля $\vec{a}$ является в силу теоремы 20.5.1 условие равенства нулю его циркуляции

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0 \tag{2}$$

по любому кусочно гладкому контуру $\Gamma \subset G$.

Выясним связь между потенциальностью непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ и условием

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ = (R'_y - Q'_z)\vec{\imath} + (P'_z - R'_x)\vec{\jmath} + (Q'_x - P'_y)\vec{k} = \vec{0}, \tag{3}$$

при выполнении которого векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым*.

Теорема 1. *Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле в области $G \subset \mathbb{R}^3$ потенциально.*

Тогда оно является безвихревым.

Эта теорема содержится как часть в теореме 20.5.2.

Условие (3), являясь необходимым условием потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$, не является достаточным в случае произвольной области $G \subset \mathbb{R}^3$.

Пример 1. Пусть $G = \mathbb{R}^3 \setminus Oz$, $\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath} + {}$ $+ 0\vec{k}$, $(x, y, z) \in G$.

Тогда $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в области G. Однако поле $\vec{a}$ не является потенциальным, в чем можно убедиться, вспомнив, что циркуляция его по окружности $C_R = \{(R\cos\theta, R\sin\theta, 0),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ радиуса R

$$\int_{C_R} (\vec{a}, d\vec{r}) = 2\pi \neq 0,$$

см. пример 20.5.1.

Условие (3) оказывается необходимым и достаточным условием потенциальности поля для областей $G \subset \mathbb{R}^3$ с некоторым геометрическим свойством, называемым *поверхностной односвязностью.*

Определение 2. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностно односвязной*, если для любой простой замкнутой ломаной $\Lambda \subset G$ существует удовлетворяющая условиям теоремы Стокса и натянутая на Λ поверхность $S \subset G$.

Пример 2. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и отрезок с концами в этих точках.

Выпуклая область является поверхностно односвязной. В самом деле, пусть замкнутая ломаная $\Lambda \subset G$. Покажем, что на нее можно натянуть лежащую в области G поверхность S, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса. Пусть

$$\Lambda = \{\vec{\rho}(u),\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi\},$$

$0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_I = 2\pi$, $A_i = \hat{\rho}(u_i)$ — последовательно занумерованные ее вершины ($A_i = A_0$). Выберем произвольную точку $B \subset G$, не лежащую ни на одной прямой, соединяющей точки A_{i-1} и A_i ($i = 1, \ \ldots, I$). Рассмотрим кусочно гладкую поверхность $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$, гладкие куски S_i которой являются треугольниками с вершинами A_{i-1}, A_i, B. Очевидно, что S и является искомой поверхностью.

Пример 3. Область G из примера 1 не является поверхностно односвязной, т. к., например, на ломаную Λ, лежащую в плоскости $z = 0$ и «охватывающую» ось Oz, нельзя натянуть требуемую поверхность S, лежащую в области G, т. е. не пересекающую ось Oz. В качестве такой ломаной Λ можно взять, например, ломаную, вписанную в окружность C_R из примера 1, в частности, равносторонний треугольник в плоскости $z = 0$ с центром в точке $(0, 0)$.

Пример 4. Область, образованная вращением открытого круга плоскости Oxz, не пересекающего оси Oz, вокруг оси Oz и называемая *тором*, не является поверхностно односвязной.

Теорема 2. *Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ задано в поверхностно односвязной области G.*

Тогда для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Доказательство. Необходимость установлена в теореме 20.5.2. Для доказательства достаточности покажем, что выполняется условие (2) для произвольного кусочно гладкого контура $\Gamma \subset G$. В силу леммы об аппроксимации криволинейного интеграла второго рода достаточно убедиться в выполнении условия

$$\int_\Lambda (\vec{a}, d\vec{r}) = 0 \tag{4}$$

для любой замкнутой ломаной $\Lambda \subset G$. Достаточно установить (4) для любой простой замкнутой ломаной Λ. Натянем на Λ поверхность $S \subset G$, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса, что можно сделать в силу поверхностной односвязности области G. Тогда по теореме Стокса

$$\int_\Lambda (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu})\, dS = \iint_S (\vec{0}, \vec{\nu})\, dS = 0.$$

Следовательно, условие (4) выполняется и теорема доказана.

Замечание 1. Сравним характер условий (1), (2), (3) потенциальности непрерывно дифференцируемого поля $\vec{a}$.

Условие (3) является *локальным* (для его проверки в данной точке достаточно знать поведение поля $\vec{a}$ в сколь угодно малой окрестности этой точки). Условия (1), (2) называют *интегральными* (для их проверки требуется знание поведения поля $\vec{a}$ «в целом»). Мы видели (теорема 1), что из интегрального условия вытекает локальное для произвольной области G, т. к. для доказательства привлекаются свойства поля $\vec{a}$ в лежащем в области малом шаре с центром в данной точке.

Из локального условия (3) интегральное условие (1) или (2) вытекает лишь при некотором специальном геометрическом условии (поверхностная односвязность) на область (см. теорему 2 и пример 1).

Глава 24
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 24.1. Определение ряда Фурье и принцип локализации

Определение 1. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (a_k,\ b_k \in \mathbb{R})$$

называется *тригонометрическим рядом.*

Множество функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cos 3x, \quad \sin 3x, \ \ldots$$

называется *тригонометрической системой.*

Тригонометрическая система функций является *ортогональной* системой в том смысле, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1}$$

и этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \tag{2}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Домножим равенство (1) почленно на $\cos nx$ или $\sin nx$ $(n \in \mathbb{N})$. Полученные ряды также будут сходиться равномерно и их почленное интегрирование с использованием свойства ортогональности функций системы дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx\,dx = \pi b_n,$$

откуда получаем вторую и третью формулы из (2). Первая из формул (2) получается почленным интегрированием ряда (1).

Заметим, что члены тригонометрического ряда являются определенными на действительной оси 2π-периодическими функциями. Поэтому и сумма тригонометрического ряда (если этот ряд сходится) также является 2π-периодической функцией.

Определение 2. Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тригонометрический ряд с коэффициентами a_k, b_k, определенными формулами (2), называется (*тригонометрическим*) *рядом Фурье* функции f, а коэффициенты a_k, b_k — *коэффициентами Фурье* функции f.

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{3}$$

понимая под такой записью, что функции f поставлен в соответствие ее ряд Фурье.

Лемму 1 можно переформулировать так: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Упражнение 1. Показать, что тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, является рядом Фурье.

Заметим, что если 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на каком-либо отрезке $[a, a+2\pi]$ длины 2π, то она будет абсолютно интегрируемой и на любом сдвинутом отрезке $[b, b+2\pi]$ и при этом

$$\int_b^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx.$$

Это свойство, очевидное с геометрической точки зрения, без труда можно доказать и аналитически. В частности, коэффициенты Фурье 2π-периодической функции f можно вычислять, заменив в формулах (2) интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ на интеграл по любому отрезку $[a, a+2\pi]$.

С другой стороны, каждую заданную на $[a-\pi, a+\pi]$ абсолютно интегрируемую функцию можно (изменив при необходимости ее значение в точке $a-\pi$ или в точке $a+\pi$, или и в той и в другой точке) продолжить до определенной на всей оси 2π-периодической функции. При этом изменение ее значения в одной или двух точках не изменит коэффициентов Фурье ее 2π-периодического продолжения (2), а значит, и ряда Фурье (3). Поэтому сходимость и другие свойства ряда Фурье можно изучать, считая, что функция f задана лишь на отрезке длиной 2π, например, на $[-\pi, \pi]$.

Мы будем изучать в первую очередь вопросы сходимости ряда Фурье в данной точке, на отрезке, равномерной сходимости на всей числовой оси и т. п. Наибольший интерес представляет случай, когда ряд Фурье функции f сходится в том или ином смысле к функции f. В этом случае говорят, что функция f разложена в ряд Фурье.

Теорема 1 (Римана об осцилляции). *Пусть функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ (если это не так, то функцию f можно доопределить нулем на $(-\infty, +\infty) \setminus (a, b)$). По теореме 14.8.4, функция f является непрерывной в среднем, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{4}$$

Заменив переменную x на $x + \frac{\pi}{\lambda}$, получаем

$$I(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right]\cos\lambda x\,dx.$$

В силу (4)

$$|I(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|\,dx \to 0 \quad (\lambda\to\infty).$$

Для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$ доказательство аналогично.

Следствие 1. *Коэффициенты Фурье* (2) *абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Частичная сумма ряда Фурье

$$S_n(x; f) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

называется суммой Фурье порядка $n \in \mathbb{N}_0$ функции f. Приведем ее к компактному виду, удобному для дальнейших исследований.

Назовем *ядром Дирихле* функцию

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,. \tag{5}$$

Последнее равенство (правая часть понимается при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, как предел частного при $x \to 2m\pi$) устанавливается следующим образом. При $x \neq 2m\pi$

$$D_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}x - \sin\frac{2k-1}{2}x\right)\right) =$$
$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Ядро Дирихле (5) является, очевидно, 2π-периодической, четной, непрерывной функцией:

$$\max|D_n(x)| = D_n(0) = n + \frac{1}{2}\,,$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1. \tag{6}$$

Преобразуем сумму Фурье $S_n(x; f)$, подставив в нее вместо коэффициентов Фурье их выражения (2). Получим

$$S_n(x; f) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt. \tag{7}$$

Произведя в последнем интеграле (называемом интегралом Дирихле)замену переменной t на $t+x$ и сдвиг отрезка интегрирования, получим

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi}\right) D(t)f(x+t)\,dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt. \quad (8)$$

При произвольном δ, $0<\delta<\pi$, представим последний интеграл в виде

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}\right)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt.$$

Во втором из этих интегралов знаменатель дроби $2\sin\frac{t}{2} \geqslant 2\sin\frac{\delta}{2} > 0$, поэтому сама дробь абсолютно интегрируема как функция t.

Следовательно, второй интеграл стремится к нулю при $n \to \to \infty$ по теореме Римана об осцилляции. Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, $x_0\in\mathbb{R}$, $0<\delta<\pi$. Пределы*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0;f),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$$

существуют или не существуют одновременно и совпадают в случае их существования.

Следствием теоремы 2 является **Принцип локализации**: *сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 и величина его суммы в случае сходимости определяются поведением функции f на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, т. е. в сколь угодно малой окрестности точки x_0.*

§ 24.2. Сходимость ряда Фурье

Пусть x_0 — точка разрыва первого рода функции f. Введем следующие обобщения односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h},$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0-0)}{-h},$$

Определение 1. Точку x_0 назовем *почти регулярной* точкой функции f, если существуют $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Если при этом $f(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то x_0 назовем *регулярной* точкой функции f.

Если функция f непрерывна в точке x_0 и имеет в ней правую и левую производные, то x_0 — регулярная точка функции f.

Теорема 1. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и x_0 — ее почти регулярная точка. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$. Если же при этом x_0 — регулярная точка f (в частности, если f непрерывна в точке x_0), то ряд Фурье в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть x_0 — почти регулярная точка функции f. Из формулы (24.1.8) с помощью (24.1.6) получаем

$$S_n(x_0;f) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt -$$
$$- \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} + \right.$$

$$+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\Bigg]\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt. \quad (1)$$

Дробь $\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$, доопределенная единицей при $t=0$, является непрерывной на $[0,\pi]$ функцией. Дробь $\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ является абсолютно интегрируемой на $[0,\pi]$ функцией, поскольку таковой является ее числитель, и при $t\to 0+0$ она имеет конечный предел. То же относится и ко второй дроби в квадратной скобке. Следовательно, множитель при $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$ в подынтегральном выражении последнего интеграла представляет собой абсолютно интегрируемую на $[0,\pi]$ функцию. По теореме Римана об осцилляции, последний интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$, т. е.

$$S_n(x_0;f)\to\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

З а м е ч а н и е 1. Требование существования $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ в условии теоремы можно (как это видно из доказательства) заменить более слабым требованием выполнения неравенств

$$\begin{aligned}|f(x_0+h)-f(x_0+0)|\leqslant Mh^\alpha, &\quad \forall\, h\in(0,\delta),\\ |f(x_0-h)-f(x_0-0)|\leqslant Mh^\alpha, &\quad \forall\, h\in(0,\delta)\end{aligned} \quad (2)$$

при некоторых $\alpha\in(0,1]$, $\delta>0$, $M>0$. Условия (2) называются (односторонними) условиями Гёльдера степени α, а при $\alpha=1$ еще и (односторонними) условиями Липшица.

Следствие 1. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и существует $f'(x_0)$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.*

З а м е ч а н и е 2. Непрерывность на $\mathbb{R}$ 2π-периодической функции не является достаточным условием сходимости ее ряда Фурье в данной точке x_0. Существуют примеры 2π-периодических непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, ряды Фурье которых расходятся в каждой рациональной точке.

В теореме 1, замечании 1 и следствии 1 приводятся достаточные условия сходимости ряда Фурье в данной точке. Существуют и значительно более общие достаточные условия такой сходимости.

З а м е ч а н и е 3. Пусть функция f задана и абсолютно интегрируема на отрезке длиной 2π, например, на $[-\pi, \pi]$. Для выяснения сходимости ее ряда Фурье в концах отрезка можно применить теорему 1, продолжив функцию f до 2π-периодической функции (изменив при необходимости ее значения на одном или обоих концах). После такого продолжения точка $x = -\pi$ будет почти регулярной тогда и только тогда, когда $\exists\, f'_+(-\pi)$, $f'_-(\pi)$. В этом случае ряд Фурье функции f сходится в точке $x_0 = -\pi$ к $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Аналогично решается вопрос о сходимости ряда Фурье в точке $x_0 = \pi$.

Пример 1. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in$ $\in [0, 2\pi]$.

Пусть $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $0 < x < 2\pi$, $\tilde{f}(0) = 0$. Как мы знаем, коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}$ можно вычислить по формулам (24.1.2) либо отличающихся от них сдвигом отрезка интегрирования. В силу нечетности $\tilde{f}$, $a_k = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Интегрируя по частям, получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx\, dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi}(\pi - x)\,\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\,.$$

Заметим, что всякая точка $x \in \mathbb{R}$ является регулярной точкой функции $\tilde{f}$. Следовательно,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Итак, на отрезке $[0, 2\pi]$ сумма ряда Фурье $\tilde{f}$ функции f совпадает с f на интервале $(0, 2\pi)$ и отличается от f в концах интервала.

Определение 2. Функцию f называют *непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и существует такое разбиение $\{a_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_m = b$), что производная f' непрерывна на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, если в концах его производную понимать как одностороннюю.

2π-периодическую функцию будем называть *кусочно непрерывной* (*непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой*), если она кусочно непрерывна (непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 2. *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n} \quad \text{\textit{при}} \quad n \geqslant 2,$$

где C не зависит от n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < \delta = \delta_n < \pi$. Перепишем формулу (1) в виде

$$S_n(x; f) - f(x) = \\ = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) g_x(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = I_n + J_n, \qquad (4)$$

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Пусть $M_1 = \max|f'|$. С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем, что при $0 < t \leqslant \pi$

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2M_1 t.$$

Следовательно, при $0 < t \leqslant \pi$

$$|g_x(t)| \leqslant \frac{2M_1 t}{2\sin\frac{t}{2}} \leqslant \pi M_1$$

и (за исключением, быть может, конечного числа значений t)

$$\left|\frac{d}{dt}\,g_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t) - f'(x-t)|\,\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} +$$

$$+|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi M_1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{2\pi M_1}{t}\,.$$

Очевидно, что $|I_n| \leqslant \delta M_1$.

С помощью интегрирования по частям имеем

$$J_n = -\frac{1}{\pi}\,g_x(t)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_\delta^\pi - \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{d}{dt}\,g_x(t)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\,dt.$$

Отсюда

$$|J_n| \leqslant \frac{M_1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2M_1\ln\frac{1}{\delta}}{n+\frac{1}{2}} = \left(1+2\ln\frac{1}{\delta}\right)M_1\,\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,.$$

Полагая $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, получаем, что при $n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x;f) - f(x)| \leqslant |I_n| + |J_n| \leqslant \frac{C\ln n}{n}\,,$$

где C не зависит от n. Теорема доказана.

Другое доказательство теоремы 2 совпадает с доказательством случая $\alpha = 1$ теоремы 3.

Подчеркнем, что теорема 2 не только устанавливает равномерную сходимость ряда Фурье, но и дает оценку быстроты стремления к нулю остатка этого ряда.

Равномерная сходимость ряда Фурье периодической функции может быть установлена и при условиях более общих, чем в теореме 2, например, для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Определение 3. Говорят, что функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера степени α, $0 < \alpha \leqslant 1$ (или условию Липшица в случае $\alpha = 1$), если $\exists\, M_\alpha > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M_\alpha |x-y|^\alpha \quad \forall\, x, y \in [a,b].$$

Заметим, что функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, непрерывны и что класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера степени α, сужается при увеличении α.

Если функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то она удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица.

Следующая теорема обобщает теорему 2.

Теорема 3. *Пусть 2π-периодическая функция f удовлетворяет на $\mathbb{R}$ условию Гёльдера степени α, $0 < \alpha \leqslant 1$.*

Тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\sup_x |S_n(x; f) - f(x)| \leqslant C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall\, n \geqslant 2,$$

где C_α не зависит от n.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2) в виде

$$S_n(x; f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) dt.$$

Положим

$$h_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad \lambda = \lambda_n = n + \frac{1}{2}, \quad \delta \geqslant \frac{\pi}{\lambda}.$$

Так же, как при доказательстве теоремы Римана об осцилляции, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_x(t) \sin \lambda t \, dt = -\int_{-\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi-\frac{\pi}{\lambda}} h_x\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin \lambda t \, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} h_x\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin \lambda t \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[h_x(t) - h_x\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right] \sin \lambda t \, dt.$$

Следовательно,

$$|S_n(x; f) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h_x\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - h_x(t) \right| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \ldots dt + \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \ldots dt = I_{\delta,n}(x) + J_{\delta,n}(x). \quad (5)$$

Напомним, что $\frac{2}{\pi}\,t < \sin t < t$ при $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Поэтому при $|t| \leqslant 2\delta$

$$|h_x(t)| \leqslant \frac{\pi M_\alpha |t|^\alpha}{2|t|} = \frac{\pi}{2}\,M_\alpha |t|^{\alpha-1},$$

так что

$$I_{\delta,n}(x) \leqslant M_1 \int_0^{2\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\alpha}\,M_\alpha 2^\alpha \delta^\alpha. \tag{6}$$

Для оценки $J_{\delta,n}(x)$ при $\frac{\pi}{\lambda} \leqslant \delta < |t| < \pi$ воспользуемся равенством

$$h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - h_x(t) = \frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right)}{2\sin\dfrac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)}{2\sin\dfrac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x+t)}{2\sin\dfrac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)(f(x+t) - f(x)),$$

так что

$$\left|h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - h_x(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x+t)\right|}{|t|} + \frac{C_2|f(x+t) - f(x)|}{t^2\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 M_\alpha \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\alpha}{|t|} + \frac{C_2 M_\alpha |t|^\alpha}{t^2\lambda} \leqslant \frac{CM_\alpha}{|t|\lambda^\alpha}, \tag{7}$$

$$J_{\delta,n}(x) \leqslant 2\int_\delta^\pi \frac{CM_\alpha}{\lambda^\alpha}\,\frac{dt}{t} \leqslant \frac{2CM_\alpha}{\lambda^\alpha}\ln\frac{1}{\delta}\,.$$

Полагая $\delta = \dfrac{7}{n}$ и собирая оценки, приходим к утверждению теоремы.

Часть теоремы 2, касающаяся лишь факта равномерной сходимости, допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Пусть на некотором отрезке $[a', b']$ f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема.*

Тогда ряд Фурье функции f равномерно сходится к f на любом отрезке $[a, b] \subset (a', b')$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{\lambda} \leqslant \delta$, $[a - - 2\delta, b + 2\delta] \subset [a', b']$, $x \in [a, b]$. Воспользуемся оценкой (5). В силу (6) при $\alpha = 1$

$$I_{\delta,n}(x) \leqslant 2\delta \max_{[a',b']} |f'|.$$

Для получения оценки $J_{\delta,n}$ используем оценку (7) разности в подынтегральном выражении. Тогда

$$J_{\delta,n}(x) \leqslant \frac{C_1}{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(u) \right| du + \\ + \frac{C_2}{\delta^2 \lambda} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\, du + 2\pi \max_{[a,b]} |f| \right).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что $\sup\limits_{[a,b]} I_{\delta,n} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $\forall\, n \geqslant \frac{\pi}{\delta}$. При выбранном δ

$$\exists\, n_\delta \in \mathbb{N} \ :\ \sup_{[a,b]} J_{\delta,n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\delta.$$

Тогда из (5) и полученных оценок следует, что

$$\sup_{x \in [a,b]} |S_n(x; f) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

и теорема доказана.

Отметим, что теорема 4 расширяет сформулированный ранее принцип локализации, показывая, что для утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье функции f на отрезке $[a, b]$ достаточно учесть поведение этой функции лишь на окрестности $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ этого отрезка при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 4 следует, например, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ из примера 1 на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, равномерно сходится к функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Теорему 4 можно обобщить, заменив условие кусочно непрерывной дифференцируемости на условие Гёльдера степени $\alpha > 0$ на $[a', b']$.

§ 24.3. Приближение непрерывных функций многочленами

Определение 1. Функция вида

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (A_n^2 + B_n^2 > 0)$$

называется *тригонометрическим многочленом* (*тригонометрическим полиномом*) степени n.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T, что*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{J}$, $x_j = -\pi + j\,\frac{2\pi}{J}$, — разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$. Построим ломаную (вписанную в график функции f), соединив отрезками последовательно точки $(x_j, f(x_j))$ графика f. Обозначим через $\Lambda_J\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодическую непрерывную функцию, график которой совпадает на $[-\pi, \pi]$ с построенной ломаной. Очевидно, Λ_J — кусочно линейная на $[-\pi, \pi]$ функция, а значит, и кусочно непрерывно дифференцируемая (т. е. Λ'_J кусочно непрерывна).

Непрерывная функция f является равномерно непрерывной. Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad |x' - x''| \leqslant \frac{2\pi}{J}\,,$$

если $J = J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Тогда

$$\max |f(x) - \Lambda_J(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Функция Λ_J удовлетворяет условиям теоремы 24.2.1, поэтому ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, существует такое $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |\Lambda_j(x) - S_n(x;\Lambda_J)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x;\Lambda_J)| < \varepsilon,$$

т. е. утверждение теоремы при

$$T(x) = S_n(x;\Lambda_J).$$

Теорему 1 в эквивалентной форме можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1′. (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T, что*

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Упражнение 1. Показать, что последняя теорема перестает быть верной, если отбросить условие $f(-\pi) = f(\pi)$.

Заметим, что в теореме 1 в качестве тригонометрического многочлена T нельзя (вообще говоря) взять $S_n(x;f)$ (частичную сумму ряда Фурье функции f), поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан равномерно сходиться (не обязан даже и поточечно сходиться) к функции f. Однако в качестве T можно взять $\sigma_n(x;f)$ (сумму Фейера функции f) при достаточно большом n, где

$$\sigma_n(x;f) = \frac{S_0(x;f) + S_1(x;f) + \ \ldots + S_n(x;f)}{n+1}$$

— среднее арифметическое сумм Фурье, как это следует из теоремы Фейера.

Теорема 2 (Фейера). *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Тогда*

$$\sigma_n(x;f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

Оставим эту теорему без доказательства.

Факт сходимости последовательности сумм Фейера в теореме Фейера выражают еще и следующим образом:

Ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции f суммируем к $f(x)$ методом средних арифметических.

Метод суммирования ряда средними арифметическими (последовательности его частичных сумм) дает возможность и для некоторых расходящихся рядов определить понятие их суммы как предела последовательности этих средних арифметических. Для сходящегося ряда это понятие совпадает с понятием суммы ряда.

Пример 1. Расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$ суммируем методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

С помощью теоремы 1 (Вейерштрасса) доказывается и возможность приближения с любой точностью непрерывной на отрезке функции подходящим алгебраическим многочленом P.

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен P, что*

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)-P(x)| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отобразим линейно отрезок $[0,\pi]$ на отрезок $[a,b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi}\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и положим $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}\, t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$ и затем на всю ось с периодом 2π, сохранив обозначение f^*. Полученная функция f^*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является 2π-периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$. По теореме 1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен T, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\pi} |f^*(t) - T(t)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Функции $\cos kt$, $\sin kt$ (а значит, и $T(t)$) раскладываются в степенные ряды с радиусом сходимости $\mathbb{R} = +\infty$, и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом отрезке. Поэтому существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где P_n — многочлен Тейлора функции T.

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |f^*(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или (возвращаясь к переменной x)

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f(x) - P_n\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорему 3 можно переформулировать следующим образом:

Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является равномерным пределом некоторой последовательности алгебраических многочленов.

§ 24.4. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье

Лемма 1. *Пусть f — 2π-периодическая и кусочно непрерывная функция, a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье.*

Тогда справедливо неравенство Бесселя*:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала f является 2π-периодической непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой функцией. По теореме 2, она раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{2}$$

Домножим равенство (2) почленно на $f(x)$ и проинтегрируем полученный ряд (также равномерно сходящийся) почленно. Получим в силу формул (24.1.2) для коэффициентов Фурье *равенство Парсеваля*:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx, \tag{3}$$

следствием которого является (2).

Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям леммы и $\Lambda_J\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывная функция, кусочно линейная на $[-\pi,\pi]$, построенная при доказательстве теоремы Вейерштрасса 24.3.1 (график Λ_J представляет собой вписанную в график f ломаную). Обозначим через $a_k(f)$, $b_k(f)$ коэффициенты Фурье функции f.

Используя уже доказанный случай неравенства (1), получаем

$$\frac{a_0^2(\Lambda_J)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(\Lambda_J)+b_k^2(\Lambda_J))\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_J^2(x)\,dx\quad\forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$ фиксировано, а $J\to\infty$. Тогда, как легко видеть,

$$a_k(\Lambda_J)\to a_k(f),\quad b_k(\Lambda_J)\to b_k(f),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_J^2(x)\,dx\to\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Переходя к пределу в неравенстве (4), получаем, что

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f)+b_k^2(f))\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, приходим к утверждению леммы.

З а м е ч а н и е 1. Равенство Парсеваля (3) и (следовательно) неравенство Бесселя (1) будут распространены в § 25.4 на абсолютно интегрируемые на $(-\pi,\pi)$ функции со сходящимися интегралами в правых частях (3), (1).

Теорема 1. *Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема и пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— ее разложение в ряд Фурье. Тогда

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье функции почленным дифференцированием.

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx\,dx = \\ = \frac{1}{\pi}\, f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx = kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx\,dx = \\ = \frac{1}{\pi}\, f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = -ka_k.$$

Лемма 2. *Пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка $m \in \mathbb{N}$.*

Тогда для коэффициентов Фурье функции f выполняются оценки

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \geqslant 1$ и

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Применяя m раз теорему 1, получаем, что

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку коэффициенты Фурье α_k, $\beta_k \to 0$ ($k \to \infty$), из последнего равенства получаем (5).

Лемма 2 показывает, что коэффициенты Фурье функции f тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные свойства функции f.

Утверждение леммы 2 можно несколько усилить, если применить неравенство Бесселя (1) к производной $f^{(m)}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{(m)}(x))^2 dx < \infty.$$

Установим оценки скорости приближения функции ее суммами Фурье в зависимости от дифференциальных свойств функции. Изучим для этого характер сходимости ряда, *сопряженного с рядом Фурье* 2π-периодической непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой функции f, т. е. *ряда*

$$\tilde{S}(x; f) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx, \tag{6}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Сопряженным ядром Дирихле называется

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Последнее равенство устанавливается так же, как (24.1.5). Так же, как (24.1.8), устанавливается, что частичную сумму

$$\tilde{S}_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx - b_k \cos kx$$

ряда (6) можно представить в виде

$$\tilde{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \tilde{D}_n(t)[f(x+t) - f(x-t)]\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h_x(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt + \tilde{f}(x),$$

где

$$h_x(t) := \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}},$$
$$\tilde{f}(x) := -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Лемма 3. *Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема, a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье.*

Тогда ряд (6) *сходится равномерно и при некотором $C > 0$ и $\forall\, n \geqslant 2$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx\right| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n}. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $M_1 := \max\limits_{\mathbb{R}} |f'|$. С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant 2M_1 t, \quad 0 < t \leqslant \pi,$$

откуда следует, в частности, что $\tilde{f}(x)$ существует для каждого x (как интеграл от непрерывной на $(0,\pi]$ и ограниченной функции) и его ряд (6) сходится для каждого x. Оценим при $2 \leqslant n < p$

$$\tilde{S}_p(x, f) - \tilde{S}_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h_x(t)\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)t\,dt -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h_x(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

используя оценки

$$|h_x(t)| \leqslant \pi M_1,$$

$$\left|\frac{d}{dt}\,h_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t)+f'(x-t)|\,\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} +$$
$$+|f(x+h)-f(x-h)|\,\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi M_1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t}\,.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 24.1.2, получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\tilde{S}_p(x;f)-\tilde{S}_n(x;f)| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n} + C\,\frac{\ln p}{p} \quad \text{при} \quad 2\leqslant n<p,$$

при $p\to\infty$ влечёт (7).

Напомним, что в теореме 15.4.2 (признак Дирихле сходимости числового ряда) установлена сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ и оценка его суммы

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant |a_1| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \tag{8}$$

при выполнении условий:

1°. последовательность $\{a_k\}$ монотонно стремится к нулю;
2°. правая часть (8) конечна (т. е. последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена).

Теорема 2. *Пусть при $m\in\mathbb{N}$ 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно и

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-S_n(x;f)| = O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right) =$$
$$= o\left(\frac{1}{n^{m-\varepsilon}}\right) \text{ при } n\to\infty \text{ и } \forall\,\varepsilon>0. \tag{9}$$

Доказательство. Случай $m = 1$ совпадает с теоремой 24.2.2. Пусть $\varphi := f^{(m-1)}$ и α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции φ. По теореме 24.2.2

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n} \quad \forall\, n \geqslant 2. \tag{10}$$

Пусть a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f. Пусть сначала $m-1$ — четно. Тогда в силу $m-1$ раз примененной теоремы 1 при $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|r_n(x; f)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}}\,(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right|.$$

В силу (8), (10)

$$|r_n(x; f)| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\,\frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C\,\frac{\ln n}{n^m}\,,$$

и (9) в этом случае установлено.

Пусть теперь $m-1$ нечетно. Тогда

$$|r_n(x; f)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}}\,(\alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx) \right|.$$

Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx$ сходится по лемме 3. В силу (7), (8)

$$|r_n(x; f)| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\,\frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C\,\frac{\ln n}{n^m}\,,$$

и теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что чем больше производных имеет функция f, тем с большей скоростью сходится ее ряд Фурье.

Замечание 2. Лемму 2 и теорему 2 можно переформулировать для функции f, заданной лишь на отрезке

$[-\pi,\pi]$, добавив условия в концах отрезка, гарантирующие выполнение для ее 2π-периодического продолжения условий соответственно леммы 2 и теоремы 2. Именно, следует для функции $f\colon [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ считать выполненными следующие дополнительные условия на односторонние производные:

$$f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi) \quad \text{при} \quad j=0,1,\,\ldots,\,m-1.$$

При соответствующей переформулировке теоремы 24.2.2 и теоремы 1 для функции $f\colon [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ следует считать выполненным равенство $f(-\pi)=f(\pi)$.

Наряду с теоремой 2 установим и другую теорему $2'$, хотя и менее сильную, но также указывающую на связь между дифференциальными свойствами 2π-периодической функции и скоростью сходимости ее ряда Фурье.

Доказательство теоремы $2'$ в отличие от доказательства теоремы 2 опирается не на анализ сходимости сопряженного с рядом Фурье ряда, а на неравенство Бесселя (1).

Читатель может по своему усмотрению ограничиться изучением одной из этих двух теорем.

Теорема $2'$. *Пусть при $m\in\mathbb{N}$ 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-S_n(x;f)|=o\left(\frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}\right) \quad \textit{при} \quad n\to\infty. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная сходимость к функции f ее ряда Фурье установлена в теореме 24.2.2. Оценим остаток ее ряда Фурье.

$$|r_n(x;f)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|\leqslant \\ \leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(|\alpha_k|+|\beta_k|)\,\frac{1}{k^m}\,,$$

где α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $f^{(m)}$, а последнее неравенство получено m-кратным применением теоремы 1. В силу неравенства Коши–Шварца (10.1.2)

$$\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|) \frac{1}{k^m} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{2m}}}.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $N \to \infty$ показывает, что оно остается верным, если в нем вместо N поставить ∞. Используя его, получаем, что

$$|r_n(x; f)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} = \varepsilon_n \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}}, \qquad (12)$$

причем $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + {}$ ${}+ \beta_k^2)$, вытекающей из неравенства Бесселя для функции $f^{(m)}$. Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{m} \frac{dx}{x^{2m}} \leqslant \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}\,.$$

Отсюда и из (12) следует (11).

Теорема 3 (о почленном интегрировании ряда Фурье). *Пусть f — кусочно непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— ее ряд Фурье. Тогда

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{a_0\,dt}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,dt =$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) \qquad (13)$$

и ряд в правой части равенства сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Положим

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt.$$

Функция F непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - \pi a_0 = 0.$$

Кроме того, ее производная $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$ кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$. В силу теоремы 2 и замечания к ней ряд Фурье функции F сходится к ней равномерно на $[-\pi, \pi]$:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx. \tag{14}$$

Найдем связь между коэффициентами Фурье A_k, B_k функции F и коэффициентами Фурье функции f.

Интегрируя по частям, получаем

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\, F(x) \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] \sin kx\, dx = -\frac{b_k}{k}\,,\ k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично $B_k = \frac{a_k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Для нахождения A_0 положим в (14) $x = 0$. Получим

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\,.$$

Следовательно,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k}\,(1 - \cos kx),$$

что совпадает с (13).

§ 24.5. Ряды Фурье $2l$-периодических функций. Комплексная форма рядов Фурье

Пусть $l > 0$ и f — $2l$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-l, l]$. Положим $f_l(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$. Тогда функция f_l — 2π-периодическая и абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построив для f_l ряд Фурье и произведя обратную замену переменной x на $\frac{\pi x}{l}$, получаем для функции f ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\,,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\;dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\;dx,$$

который называется тригонометрическим рядом Фурье функции f периода $2l$.

Подобным же образом переносится и вся теория тригонометрических рядов Фурье на случай $2l$-периодических функций.

Вместо такого способа перенесения теории на случай $2l$-периодических функций можно было бы с самого начала рассмотреть ортогональную на $[-l, l]$ систему тригонометрических функций

$$1, \quad \cos\frac{\pi}{l}x, \quad \sin\frac{\pi}{l}x, \quad \cos\frac{2\pi}{l}x, \quad \sin\frac{2\pi}{l}x, \quad \dots$$

и на ее основе построить теорию тригонометрических рядов Фурье, повторяющую все полученные при $l = \pi$ результаты и выкладки.

Оба указанных подхода приводят к одним и тем же результатам.

Для рядов Фурье существует комплексная форма записи.

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Заменим в членах этого ряда $\cos kx$, $\sin kx$, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i) e^{ikx} + \frac{1}{2} (a_k + b_k i) e^{-ikx} \right].$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - b_k i), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + b_k i),$$

получаем

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Здесь частичной суммой ряда называется $S_n(x; f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, а ряд называется сходящимся, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x; f)$, который называется суммой ряда.

Заметим, что мы пришли бы к тому же ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, если бы, исходя из системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, ортогональной в том смысле, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{isx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-isx} dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq s,$$

начали строить такую же теорию рядов Фурье, как для тригонометрической системы.

Глава 25
МЕТРИЧЕСКИЕ, НОРМИРОВАННЫЕ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 25.1. Метрические и нормированные пространства

Определение 1. Множество $\mathbb{R}$ называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1° $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3° $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называют также *точками*.

Примером метрического пространства является n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Другим примером является множество $C([a, b])$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|.$$

С помощью понятия расстояния можно ввести понятия сходящейся последовательности точек метрического пространства, фундаментальной последовательности, полноты метрического пространства, ε-окрестности точки, открытого и замкнутого множества, замыкания множества и другие. Мы познакомимся с этими понятиями на примере линейных нормированных пространств, входящих в класс метрических пространств. Перенос этих понятий и свойств на случай произвольного метрического пространства не составляет труда.

Определение 2. Множество R называется *действительным* (или *вещественным*) *линейным* (или *векторным*) *пространством*, если для каждых двух его элементов $x, y \in R$ определена их *сумма* $x + y \in R$ и для каждого элемента $x \in \in R$ и любого вещественного числа λ определено *произведение* $\lambda x \in R$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1°. $x + y = y + x \; \forall \, x, y \in R$;
2°. $(x + y) + z = x + (y + z) \; \forall \, x, y, z \in R$;
3°. в R существует такой элемент $\vec{0}$, что $x + \vec{0} = \vec{x} \; \forall \, x \in R$;
4°. для каждого $x \in R$ существует противоположный элемент, обозначаемый через $-x$ такой, что $x + (-x) = \vec{0}$ $\forall \, x \in R$;
5°. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \; \forall \, x \in R, \; \forall \, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
6°. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x \; \forall \, x, y \in R, \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}$;
7°. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \; \forall \, x \in R, \; \forall \, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; (\mathbb{C})$;
8°. $1x = x \quad \forall \, x \in R$.

Вычитанием называется операция, обратная сложению. Под разностью $x - y$ понимают $x - y := x + (-y)$.

Если в этом определении множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел заменить на множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$, то получим определение *комплексного линейного* (*векторного*) *пространства.*

Определение 3. Если в линейном пространстве можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n + 1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что линейное пространство *имеет размерность* n.

Если же в линейном пространстве можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что линейное пространство *бесконечномерно.*

Бесконечная система элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любое конечное число ее элементов линейно независимо.

Определение 4. Линейное пространство R называется *нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in$ $\in R$ поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\|x\| \geqslant 0$, называемое *нормой* элемента x и удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1°. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$;
2°. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|\ \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$;
3°. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\ \forall\, x, y \in R$ (неравенство треугольника).

Всякое нормированное пространство является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Обратное неверно уже потому, что произвольное метрическое пространство не обязательно линейно (не обязательно введены понятия суммы элементов и произведения элемента на число). Даже в линейном метрическом пространстве R $\rho(x, 0)$ не обязательно является нормой элемента $x \in R$. В последнем можно убедиться на примере линейного метрического пространства числовых последовательностей.

$$x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

в котором при $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x + y := \{\xi_i + \eta_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \lambda x = \{\lambda \xi_i\}_{i=1}^{\infty},$$

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}\,.$$

Приведем примеры нормированных пространств.

Пример 1. Пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (действительных или комплексных чисел) с нормой

$$\|x\| = |x|.$$

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad (x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)),$$

или

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

или

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Говоря о линейных пространствах функций, определенных на $E \subset \mathbb{R}^n$, всегда будем предполагать, что операции сложения и умножения на число введены в них естественным образом, т. е.

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t) \quad \forall\, t \in E,$$
$$(\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \forall\, t \in E.$$

Пример 3. $C([a, b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{C([a,b])} := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Все свойства нормы в примерах 1–3 проверяются элементарно.

Изучим некоторые понятия и свойства нормированных пространств, связанные с понятием расстояния и обобщающие известные понятия и свойства числовых последовательностей и множеств. До конца параграфа символом R будем обозначать нормированное пространство.

При $x_0 \in R$ *ε-окрестностью* точки x_0 в нормированном пространстве R называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \,:\, x \in R, \quad \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Точка x_0 называется центром этой окрестности, а ε — ее радиусом.

Множество $E \subset R$ называется *ограниченным*, если $\exists\, M \colon E \subset U_M(\vec{0})$.

Точка $a \in R$ называется *предельной* точкой множества $E \subset \subset R$, если любая ε-окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества E.

Предельная точка множества E может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E.

Объединение множества $E \subset R$ и множества всех предельных множества E называется *замыканием* множества E и обозначается символом $\overline{E}$.

Операцией замыкания (*замыканием*) множества $E \subset R$ называется переход от множества E к его замыканию $\overline{E}$.

Множество $E \subset R$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $\overline{E} = E$.

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}$ является замкнутым множеством (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Точка x называется *внутренней* точкой множества $E \subset R$, если существует окрестность $U_\varepsilon(x)$ этой точки, содержащаяся в E.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Для того чтобы множество E было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \setminus E$ до всего пространства R было замкнутым (доказать в качестве упражнения).

Определение 5. Говорят, что последовательность $\{x_k\}_{i=1}^\infty$ точек R сходится к точке $x_0 \in R$, если

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0.$$

Точку x_0 называют при этом пределом последовательности $\{x_k\}$ и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Такую сходимость часто называют *сходимостью по норме*.

Это определение можно сформулировать еще и следующим образом: последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к x_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ x_n \in U_\varepsilon(x_0) \quad (\text{т. е. } \|x_n - x_0\| < \varepsilon) \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Из определения предела следует, что никакая последовательность не может иметь двух различных пределов и что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке x_0, то и всякая ее подпоследовательность сходится к x_0.

С использованием понятия предела последовательности можно дать эквивалентное определение предельной точки множества: точка $a \in R$ называется предельной точкой множества $E \subset R$, если существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in E$, $x_k \neq a \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к a (доказать эту эквивалентность в качестве упражнения).

Определение 6. Последовательность $\{x_k\}$ точек R называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \|x_k - x_j\| < \varepsilon \quad \forall\, k, j \geqslant n_\varepsilon.$$

Всякая сходящаяся последовательность является, очевидно, фундаментальной, но не наоборот.

Определение 7. Нормированное пространство R называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его точек является сходящейся, т. е. имеет в R предел.

Ранее было установлено (критерий Коши), что линейные нормированные пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ из примеров 1, 2 являются полными.

Из теоремы 16.1.1 и теоремы 16.3.1 следует, что пространство $C([a, b])$ из примера 3 является полным.

Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Определение 8. Пусть $A \subset B \subset R$. Множество A называется *плотным* в B, если $\overline{A} \supset B$.

Теорему 24.3.3 (Вейерштрасса) можно переформулировать следующим образом: множество всех алгебраических многочленов плотно в пространстве $C([a, b])$.

Если пространство R не полно, то его всегда можно *пополнить*, т. е. «экономно» включить некоторым (и, по существу, единственным) способом в некоторое полное пространство.

Определение 9. Пусть R — нормированное пространство. Полное нормированное пространство R^* называется *пополнением*пространства R, если

1°. R является подпространством R^*, т. е. $R \subset R^*$ и определения суммы, произведения элемента на число и нормы в пространствах R и R^* совпадают для элементов из R;

2°. $\overline{R} = R^*$, т. е. R плотно в R^*.

Определение пополнения метрического пространства аналогично; при этом вместо 1° требуется, чтобы $R \subset R^*$ и совпадали расстояния в R и R^*.

Теорема 1. *Каждое метрическое пространство и каждое нормированное пространство имеет пополнение.*

Не приводя доказательства, укажем лишь его идею на примере *метрического* пространства R, представляющего собой множество всех рациональных чисел с естественным расстоянием $\rho(x, y)$.

Задача состоит прежде всего в том, чтобы «экономно» присоединить к R некоторые новые («идеальные») элементы и распространить на полученное расширенное множество понятие расстояния. Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, не являющиеся сходящимися в R. Расстоянием между двумя такими последовательностями назовем

$$\rho(\{x_k\}, \{y_k\}) := \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k).$$

Этот предел существует в силу фундаментальности числовой последовательности $\{\rho(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и полноты R.

Расстоянием между такой последовательностью и рациональным числом x_0 назовем

$$\rho(\{x_k\}, x_0) = \lim_{k\to\infty} |x_k - x_0|.$$

Две не сходящиеся в R фундаментальные последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ назовем эквивалентными, если $\rho(\{x_k\}, \{y_k\}) = 0$. Все фундаментальные последовательности, не сходящиеся в R, разбиваются на классы эквивалентных последовательностей. Каждый такой класс назовем «идеальным» элементом. Расстояние между двумя «идеальными» элементами введем как расстояние между какими-либо двумя представителями соответствующих классов эквивалентных последовательностей. Аналогично введем понятие расстояния между «идеальным» элементом и элементом $x_0 \in R$.

Объединение R и множества полученных «идеальных» элементов обозначим через R^*. Наделенное введенным расстоянием, оно является искомым пополнением метрического пространства R.

Определение 10. Пусть R — нормированное пространство, $x, x_k \in R \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится к x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = x$, где предел понимается в смысле сходимости по норме, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

§ 25.2. Пространства CL_1, CL_2, RL_1, RL_2, L_1, L_2

Если в аксиомах нормы из определения 25.1.3 снять требование $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \overline{0}$, то $\|x\|$ будет называться *полунормой*, а определение нормированного пространства превратится в определение *полунормированного* пространства. На полунормированные пространства дословно переносятся понятия предельного перехода, замыкания множества, плотности множества, полноты пространства и другие.

Рассмотрим примеры нормированных и полунормированных пространств, норма (полунорма) которых задается с помощью интегралов.

Пример 1. $CL([a,b]) = CL_1([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L([a,b])} = \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

Пример 2. $CL_2([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_2([a,b])} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt}.$$

Все свойства нормы в примерах 1, 2 проверяются элементарно, за исключением неравенства треугольника в примере 2. Последнее будет выведено позднее из свойств скалярного произведения.

Определение 1. Пусть $(a,b) \subset (-\infty,\infty)$. Функция f: $(a,b) \to \mathbb{R}$ называется *финитной на* (a,b), если $f = 0$ вне некоторого отрезка $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

Пример 3. $C_0L_p((a,b))$, $p \in \{1,2\}$, — линейное пространство непрерывных и финитных на (a,b) функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_p((a,b))} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пример 4. $RL((a,b)) = RL_1((a,b))$ — полунормированное пространство абсолютно интегрируемых на интервале $(a,b) \subset (-\infty,\infty)$ функций x: $(a,b) \to R$, т. е. функций со сходящимся интегралом $\int_a^b |x(t)|\,dt$, понимаемым как несобственный с конечным числом особенностей, и интегрируемых по Риману на каждом отрезке из (a,b), не содержащем особенностей (см. определение 14.8.2). При этом

$$\|x\| = \|x\|_{L_1((a,b))} := \int_a^b |x(t)|\,dt. \tag{1}$$

Эта полунорма не является нормой на линейном пространстве $RL_1((a,b))$, т. к. из равенства $\|\theta\| = \int_a^b |\theta(t)|\,dt = 0$ не следует, что $\theta \equiv 0$ (а ведь именно тождественно равная нулю функция является нулевым элементом рассматриваемого линейного пространства). В самом деле, равенство $\|\theta\| = 0$ выполняется, например, и для функции θ, принимающей нулевые значения всюду на (a,b), за исключением конечного числа точек, в которых она отлична от нуля.

З а м е ч а н и е 1. Отметим без доказательства следующие два свойства интегрируемой по Риману функции:

1° ограниченная функция θ: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль, т. е. может быть покрыто объединением счетного числа интервалов сколь угодно малой суммарной длины;
2° для интегрируемой по Риману на $[\alpha, \beta]$ функции θ условие $\int_\alpha^\beta |\theta(t)|\,dt = 0$ эквивалентно тому, что $\theta(t) = 0$ в каждой точке t непрерывности функции θ.

Для множества функций $RL_1((a,b))$ можно построить другое линейное пространство $\widetilde{RL_1}((a,b))$, которое уже окажется нормированным с помощью интеграла (1).

Две функции $x, y \in RL_1((a,b))$ назовем *эквивалентными*, если $\int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt = 0$. Таким образом, линейное пространство $RL_1((a,b))$ разбивается на классы эквивалентных функций. В силу замечания 1 две эквивалентные функции «мало» отличаются друг от друга: их значения могут быть различны лишь на множестве точек нулевой лебеговой меры.

Совокупность всех таких классов называется *фактор-пространством* пространства $RL_1((a,b))$. Обозначим его через $\widetilde{RL_1}((a,b))$. Превратим его в линейное пространство, введя операции сложения и умножения на действительное число следующим образом. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — два класса из $\widetilde{RL_1}((a,b))$, а x $(\in \tilde{x})$, y $(\in \tilde{y})$ — два каких-либо из их представителей. Суммой $\tilde{x} + \tilde{y}$ классов $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ назовем тот класс $\tilde{z}$, который содержит $x + y$, а произведением $\lambda\tilde{x}$ класса $\tilde{x}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ — тот класс, который содержит λx. Легко проверить независимость суммы и произведения от выбора представителей и выполнения для $\widetilde{RL_1}([a,b])$ всех аксиом линейного пространства.

Нулевым элементом $\vec{0}$ пространства $\widetilde{RL_1}((a,b))$ является множество абсолютно интегрируемых на (a,b) функций θ, для которых $\int_a^b |\theta(t)|\,dt = 0$.

Положим

$$\|\tilde{x}\|_{\widetilde{L}_1([a,b])} := \|x\|_{L_1([a,b])} = \int_a^b |x(t)|\,dt,$$

где $x \in \tilde{x}$. Нетрудно проверить, что $\|\tilde{x}\|_{\widetilde{L}_1([a,b])}$ является нормой в $\widetilde{RL_1}([a,b])$.

Пример 5. $RL_2((a,b))$ — полунормированное пространство определенных на интервале $(a,b) \subset (-\infty,+\infty)$ функций $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ со сходящимся интегралом $\int_a^b |x(t)|^2 dt$, понимаемым как несобственный с конечным числом особенностей, и интегрируемых по Риману на каждом отрезке из (a,b), не содержащем особенностей. При этом

$$\|x\| = \|x\|_{L_2((a,b))} := \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}. \tag{2}$$

Аналогично тому, как это сделано при рассмотрении примера 4, можно построить фактор-пространство $\widetilde{RL_2}((a,b))$ пространства $RL_2((a,b))$, состоящее из классов функций, причем две функции x, y входят в один и тот же класс (называются *эквивалентными*, *отождествляются*, *не различаются*), если

$$\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt = 0.$$

Операции сложения и умножения на число $\lambda \in \mathbb{R}$ вводятся в $\widetilde{RL_2}([a,b])$ так же, как в примере 4. Построенное фактор-пространство является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\|_{\widetilde{L}_2((a,b))} := \|x\|_{L_2((a,b))} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt},$$

где x — произвольная функция из $\tilde{x}$ ($x \in \tilde{x}$). Нулевым элементом $\vec{0}$ пространства $\widetilde{RL_2}((a,b))$ является множество функций $\theta \in RL_2((a,b))$, для которых $\int_a^b |\theta(t)|^2 dt = 0$.

Пространства $CL_p([a,b])$, $C_0L_p((a,b))$, $p = 1, 2$, из примеров 1–3 не являются полными. Покажем это на примере пространства $CL_1([-1,1])$. Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1,1]$ функций

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ kt & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{k}, \\ 1 & \text{при } \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $CL_1([-1,1])$, т. к.

$$\|f_m - f_k\|_{L_1([-1,1])} \leqslant \int_0^{\max\left\{\frac{1}{m},\frac{1}{k}\right\}} 2\,dt = 2\max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{k}\right\}.$$

Однако не существует функции из $CL_1([-1,1])$, являющейся пределом этой последовательности по норме $CL_1([-1,1])$. В самом деле, предполагая противное, обозначим предельную функцию через φ. Она непрерывна на $[-1,1]$ как функция из $CL([-1,1])$, и

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(t) - f_k(t)|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Но тогда при $k \to \infty$

$$\int_{-1}^{0} |\varphi(t) - f_k(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} |\varphi(t)|\,dt \to 0,$$

так что

$$\int_{-1}^{0} |\varphi(t)|\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0 \text{ при } -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leqslant t \leqslant 1 \quad \forall\,\delta \in (0,1).$$

Как видим, функция φ разрывна в точке $t = 0$, что противоречит предположению о существовании в $CL([-1,1])$ предела последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, пространство $CL_1([a,b])$ не полно.

Лемма 1. *Множество $C_0((a,b))$ непрерывных и финитных на (a,b) функций плотно как в $RL_1((a,b))$, так и в $RL_2((a,b))$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы представляет собой переформулировку следствия 14.8.1. Установим второе утверждение. Пусть $f \in RL_2((a,b))$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f_\varepsilon \in RL_2((a,b))$ такая, что $f_\varepsilon = 0$ вне некоторого отрезка $[A,B] \subset (a,b)$, f_ε интегрируема по Риману на $[A,B]$,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_2((a,b))} < \varepsilon.$$

Функция f_ε строится так же, как при доказательстве теоремы 14.8.3.

Пусть $M := \sup\limits_{(a,b)} |f_\varepsilon|$. В силу следствия 14.8.1 существует функция $\varphi \in C_0((a,b))$ такая, что

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2M}\,.$$

При этом, как видно из построения, можно считать, что $|\varphi| \leqslant M$.

Тогда

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|^2 dx \leqslant 2M \int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon^2,$$

$$\|f - \varphi\|_{L_2((a,b))} \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_{L_2((a,b))} + \|f_\varepsilon - \varphi\|_{L_2((a,b))} < 2\varepsilon.$$

Можно показать, что пространства $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ не являются полными (см., например, § 19.7 учебника С.М. Никольского «Курс математического анализа»; Т. 2. М.: Наука, 1973). Мы не будем приводить доказательства, поскольку оно требует привлечения теории интеграла Лебега. Укажем лишь последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ функций, фундаментальную в $RL_1((0,1))$, но не имеющую предела в $RL_1((0,1))$.

Перенумеруем все рациональные точки интервала $(0,1)$ и покроем k-ю из них интервалом $I_k \subset (0,1)$ с центром в этой точке и длиной $\mu I_k < \varepsilon 2^{-k}$ ($0 < \varepsilon < 1$, $k = 1, 2, \ \ldots$). Пусть

$$f_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j, \\ 0, & t \in (0,1) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j. \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $RL_1((0,1))$. Можно показать, что она не имеет предела в $RL_1((0,1))$.

Упражнение 1. Показать, что в пространствах $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ счетное множество финитных ступенчатых функций с рациональными параметрами (начало и конец ступени, высота ступени) является плотным.

У к а з а н и е. Использовать теорему 14.8.3.

Для описания пополнений пространств $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ придется ввести понятия меры и интеграла Лебега. Мы лишь коснемся этих понятий, избегая точных определений. Понятие измеримости множества по Лебегу шире понятия измеримости по Жордану: всякое множество, измеримое по Жордану, является измеримым по Лебегу и его мера Лебега совпадает с мерой Жордана.

Множество всех рациональных точек отрезка $[0,1]$ измеримо по Лебегу (и имеет лебегову меру нуль, т.е. может быть покрыто счётной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины), но не измеримо по Жордану.

Рассмотрим для примера определенную на отрезке $[a,b]$ функцию f со значениями, лежащими на отрезке $[A,B]$. Эту функцию будем считать *измеримой*, т. е. такой, что множество $\{x \in [a,b]\colon\ f(x) \leqslant \alpha\}$ измеримо по Лебегу при $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Поделим отрезок $[A,B]$ на k равных частей точками $A = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = B$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{j=1}^{k} y_k \operatorname{mes} e_k, \quad e_k = \{x\ :\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_{k-1} < f(x) \leqslant y_k\}, \tag{3}$$

где $\operatorname{mes} e_k$ — мера Лебега.

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} y_k \operatorname{mes} e_k$$

называется *интегралом Лебега* функции f по отрезку $[a,b]$.

Как видим, при построении интегральной суммы (3) в качестве «представителя» функции f на множестве e_k выступает число y_k, близкое к значениям f в любой точке e_k. В то же время при построении интегральной суммы Римана

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

представителем функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выступает число $f(\xi_i)$ — значение функции f в одной из точек отрезка. Такой представитель может считаться удачным, если f мало меняется на отрезке разбиения (например, если f непрерывна на $[a, b]$).

В общем же случае, число $f(\xi_i)$ не обязательно является удачным представителем значений f на $[x_{i-1}, x_i]$.

Естественно ожидать (и легко показывается), что функция, интегрируемая по Риману, интегрируема и по Лебегу, и эти интегралы совпадают.

С другой стороны, функция $f\colon\ [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу (и ее интеграл Лебега равен нулю), но не интегрируема по Риману. Таким образом, понятие интеграла Лебега шире понятия интеграла Римана.

Пример 6. Обозначим через $L((a, b)) = L_1((a, b))$ полунормированное пространство интегрируемых по Лебегу на $(a, b) \subset \subset (-\infty, +\infty)$ функций с полунормой (1), интеграл в которой понимается как интеграл Лебега. Тогда можно показать, что пространство $L_1((a, b))$ является полным и что $RL_1((a, b))$, а значит, в силу леммы 1 и $C_0L_1((a, b))$ плотны в нем. Согласно определению пополнения, пространство $L_1((a, b))$ является пополнением как пространства $RL_1((a, b))$, так и пространства $C_0L_1((a, b))$.

Пример 7. Обозначим через $L_2((a, b))$ полунормированное пространство измеримых по Лебегу на $(a, b) \in (-\infty, +\infty)$ функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу. Полунорму в нем зададим равенством (2), интеграл в котором понимается как интеграл Лебега. Можно показать, что пространство $L_2((a,b))$ является полным и что $RL_2((a,b))$, а значит (в силу леммы 1), и $C_0L_2((a,b))$ плотны в нем. Согласно определению пополнения, пространство $L_2((a,b))$ является пополнением как пространства $RL_2((a,b))$, так и пространства $C_0L_2((a,b))$.

З а м е ч а н и е 2. В случае конечных a, b вместо $L_p((a,b))$ можно писать $L_p([a,b])$, $p=1, 2$.

З а м е ч а н и е 3. Часто, допуская некоторую вольность, пространства $L_1((a,b))$, $L_2((a,b))$ называют нормированными пространствами функций, в которых отождествлены функции, отличающиеся между собой лишь на множестве лебеговой меры нуль.

Придерживаясь точных формулировок, следовало бы говорить о нормированных пространствах $\tilde{L}_1((a,b))$ и $\tilde{L}_2((a,b))$, элементами лишь которых являются классы эквивалентных (т. е. попарно отличающихся на множестве лебеговой меры нуль) функций с соответственно введенными операциями сложения и умножения на число и нормой (ср. пространства $\widetilde{RL_1}$, $\widetilde{RL_2}$ из примеров 5, 6).

§ 25.3. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение 1. *Скалярным произведением* в действительном линейном пространстве R называется вещественная функция (x,y), определенная для каждой пары элементов $x, y \in$ $\in R$ и удовлетворяющая условиям:

1° $(x,y)=(y,x)$,

2° $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$,

3° $(\lambda x,y)=\lambda(x,y) \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$,

4° $(x,x)\geqslant 0$, $(x,x)=0 \iff x=\vec{0}$.

Определение 2. Действительное линейное пространство с фиксированным скалярным произведением называется *евклидовым* пространством.

В евклидовом пространстве вводится норма формулой

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}. \tag{1}$$

Выполнение для $\|x\|$ всех аксиом нормы очевидно, за исключением неравенства треугольника. Установим его, доказав предварительно *неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{2}$$

Считая $\|x\| > 0$, рассмотрим квадратный трехчлен

$$(tx+y, tx+y)^2 = t^2(x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \\ = \|x\|^2 t^2 + 2(x,y)t + \|y\|^2.$$

Так как он неотрицателен (по свойству 4° скалярного произведения), то его дискриминант $4|(x,y)|^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leqslant 0$, откуда и следует (2).

С помощью (2) получаем неравенство

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

равносильное неравенству треугольника:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами и скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (\text{где } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)).$$

Пример 2. $CL_2([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, где $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Вводя норму

$$\|f\| = \|f\|_{L_2([a,b])} = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt},$$

получаем, что $CL_2([a,b])$ совпадает с линейным нормированным пространством $CL_2([a,b])$ из примера 25.2.2.

Пример 3. $RL_2((a,b))$ — линейное пространство из примера 25.2.5. Введем

$$(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \quad f,g \in RL_2((a,b)).$$

Для вещественной функции (f,g) выполняются все свойства скалярного произведения, за исключением свойства $(f,f) = 0 \Rightarrow f = \vec{0}$ (т. е. $f(t) \equiv 0$). Такую функцию (f,g) называют полускалярным произведением. Полунорма определяется как

$$\|f\|_{L_2((a,b))} = \sqrt{(f,f)}.$$

З а м е ч а н и е 1. В евклидовом пространстве для нормы, определенной равенством (1), выполняется, как нетрудно проверить, равенство

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \tag{3}$$

выражающее свойство: *сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Упражнение 1. Убедиться с помощью (3), что нормы в пространствах $C([a,b])$, $CL_1([a,b])$ из примеров 25.1.3, 25.2.1 нельзя задать с помощью какого бы то ни было скалярного произведения.

Наряду с действительным евклидовым пространством рассматривают и комплексное линейное пространство со скалярным произведением (комплексное евклидово пространство). При этом скалярным произведением называется комплексная функция (x,y) с условиями

1° $(x,y) = \overline{(y,x)}$,

2° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

3° $(\lambda x, y) = \lambda(y,x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$,

4° $(x,x) \geqslant 0$, $(x,x) = 0 \iff x = \vec{0}$.

Норма в комплексном евклидовом пространстве определяется, как и в действительном, формулой (1).

Приведем примеры комплексных евклидовых пространств.

Пример 4. $\mathbb{C}^n$ — линейное пространство, представляющее собой совокупность систем $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n комплексных чисел со сложением и умножением на комплексное число, определенными по тем же правилам, что и для $\mathbb{R}^n$, и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Пример 5. Комплексное пространство $CL_2([a, b])$ — комплексное линейное пространство комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Определение 3. Бесконечномерное евклидово пространство называется *предгильбертовым.*

Полное бесконечномерное евклидово пространство (т. е. полное предгильбертово пространство) называется *гильбертовым.*

Всякое предгильбертово пространство, будучи пополненным по его норме, превращается в гильбертово, если скалярное произведение распространить на это пополнение по непрерывности. В связи с этим важна следующая

Лемма 1. *Скалярное произведение (x, y) в предгильбертовом пространстве непрерывно зависит от x, y.*

Доказательство. Пусть $\|x_0 - x\| < \delta < 1$, $\|y_0 - y\| < \delta < 1$. Тогда с помощью неравенства Коши–Буняковского (2) имеем

$$\begin{aligned}|(x_0, y_0) - (x, y)| &\leqslant |(x_0 - x, y_0)| + |(x, y_0 - y)| \leqslant \\ &\leqslant \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x\|\, \|y_0 - y\| \leqslant \\ &\leqslant \delta\|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\delta \leqslant \delta(\|x_0\| + \|y_0\| + 1).\end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть R — предгильбертово пространство, x_k, x, $a \in R$. Тогда*

1° *при* $k \to \infty$ $x_k \to x \Rightarrow (x_k, a) \to (x, a)$,

2° $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j = x \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_j, a) = (x, a)$.

Мы будем рассматривать лишь *сепарабельные* предгильбертовы и гильбертовы пространства, т. е. такие, в которых существует *счетное* плотное множество.

Пример 6. Пространство l_2 с элементами

$$x = (x_1, x_2, \ldots), \qquad \text{где } x_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

является сепарабельным гильбертовым.

Сходимость последнего ряда (даже абсолютная сходимость) следует из оценки

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right).$$

Аксиомы гильбертова пространства проверяются непосредственно. Плотным в l_2 является счетное множество всех его элементов x со всеми рациональными координатами x_i.

Пример 7. Пространство $CL_2([a, b])$ из примера 2 является сепарабельным предгильбертовым пространством.

Упражнение 2. Доказать, что плотным множеством в $CL_2([a, b])$ является множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Это можно сделать с помощью теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.

Пример 8. Пространство $L_2((a, b))$, $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, из примера 25.2.7 является гильбертовым, если под элементами $L_2((a, b))$ понимать функции и не различать две функции, отличающиеся лишь на множестве лебеговой меры нуль.

Счетным плотным множеством в $L_2((a, b))$ является множество финитных ступенчатых функций с рациональными параметрами.

§ 25.4. Ортогональные системы и ряды Фурье по ним

В этом параграфе R будет обозначать предгильбертово пространство.

Определение 1. Элементы $x, y \in R$ называют ортогональными (друг другу), если $(x, y) = 0$.

Последовательность ненулевых элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства R называют *ортогональной системой* или *ортогональной последовательностью*, если

$$(e_j, e_k) = 0 \quad \forall\, j, k \in \mathbb{N}, \quad j \neq k.$$

Если при этом $\|e_j\| = 1 \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, то ортогональная система (последовательность) называется *ортонормированной*.

Если каждый элемент ортогональной системы поделить на его норму, получим ортонормированную систему. Если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональная система, то $\|e_j\| > 0\ \forall\, j$ (согласно определению), и при любом $k \in \mathbb{N}$ векторы $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ линейно независимы.

Установим последнее. Допустив противное, имеем при некотором $k \in \mathbb{N}$ и при некоторых $\lambda_j \in \mathbb{R}$, не всех равных нулю,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j = \vec{0}.$$

Если при этом $\lambda_s \neq 0$, то, умножая последнее равенство скалярно на e_s и пользуясь ортогональностью, получаем, что $\lambda_s \|e_s\|^2 = 0$. Отсюда $e_s = \vec{0}$, что противоречит принадлежности e_s ортогональной последовательности.

Приведем примеры ортогональных систем.

Пример 1. Последовательность $\frac{1}{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\ldots$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Пример 2. Последовательность комплекснозначных функций $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)\bar{g}(x)\,dx.$$

Пример 3. Последовательность $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ многочленов Лежандра ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Здесь $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что полином Лежандра P_n ортогонален любому многочлену Q_m степени $m < n$.

Учитывая, что $((x^2-1)^n)^{(k)}$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ обращается в нуль в точках $x = \pm 1$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = -\int_{-1}^{1} Q_m'(x)\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} Q_m''(x)\,\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\,dx = \ldots =$$
$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\,\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0. \quad (1)$$

В частности, $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$, $0 \leqslant m < n$.

Вычислим норму многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}\,x^n + Q_{n-1}(x),$$

где Q_{n-1} — многочлен степени не выше $n-1$. Используя (1) и интегрируя несколько раз по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)x^n\,dx =$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\int_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,x^n\,dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^n)' x\, dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} x^2\, dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-2} x^4\, dx = \ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}\, dx \, \frac{2}{2n+1}\,.$$

Следовательно, $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Далее через R обозначаем предгильбертово пространство, через $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ — норму его элемента x, через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональную последовательность в нем. Напомним, что по определению $\|e_j\| > 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть $x \in R$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Тогда*

$$\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}\,. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 25.3.1 скалярное произведение суммы сходящегося в R ряда можно производить почленно. Используя свойство ортогональности, имеем

$$(x, e_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_s) = \alpha_s (e_s, e_s),$$

откуда и следует (2).

Определение 2. Пусть $x \in R$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в R. Тогда $\alpha_k = \dfrac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}$ называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ — рядом Фурье элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $S_n = S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ — n-й суммой Фурье элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Таким образом, каждому элементу $x \in R$ ставится в соответствие его ряд Фурье:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k. \tag{3}$$

Говорят, что элемент *x разложен в ряд Фурье*, и пишут $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, если ряд в (3) сходится к x в R, т. е.

$$\|x - S_n(x)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Очевидны следующие свойства частичных сумм ряда Фурье:

$$S_n(e_k) = e_k \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

откуда

$$S_n(T_n) = T_n, \quad \text{если} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k. \tag{4}$$

$$(x - S_n(x), e_k) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Лемма 1 (об ортогональном разложении).

$$x = S_n(x) + (x - S_n(x)), \quad (x - S_n(x), S_n(x)) = 0. \tag{5}$$

Лемма 2 (аналог теоремы Пифагора).

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2. \tag{6}$$

Доказательство. Используя (5), имеем

$$\|x\|^2 = \|(x - S_n) + S_n\|^2 = ((x - S_n) + S_n, (x - S_n) + S_n) = \\ = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2.$$

Теорема 2 (минимальное свойство коэффициентов Фурье).

$$\min_{c_1, \ldots, c_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| = \|x - S_n(x)\|.$$

Доказательство. Пусть $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. С помощью леммы 2 и (4) получаем, что

$$\|x - T_n\|^2 = \|(x - T_n) - S_n(x - T_n)\|^2 + \|S_n(x - T_n)\|^2 = \\ = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x) - T_n\|^2 \geqslant \|x - S_n(x)\|^2.$$

Следствие 1.

$$\|x - S_n(x)\| \leqslant \|x - S_m(x)\| \quad \textit{при} \quad n \geqslant m.$$

Теорема 3 (неравенство Бесселя). *Пусть $x \in R$, α_k — его коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда справедливо неравенство Бесселя:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7}$$

Доказательство. Из ортогональности системы $\{e_k\}$ и (6) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|S_n\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Следствие 2. *Коэффициенты Фурье обладают свойством*

$$\alpha_k \|e_k\| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

а если система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \alpha_k \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Упражнение 1. В условиях теоремы 4 (см. ниже) доказать, что $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ с помощью почленного скалярного умножения ряда из 2° на x.

Теорема 4. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в R. Тогда для каждого элемента $x \in R$ следующие утверждения эквивалентны (α_k — коэффициент Фурье элемента x):*

1° *для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует полином $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которого*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

2° $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$

3° *справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $1^\circ \iff 2^\circ$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье 1° эквивалентно тому, что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \|x - S_{n_\varepsilon}(x)\| < \varepsilon,$$

а значит, в силу следствия 1 — тому, что

$$\|x - S_n(x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Последнее эквивалентно 2°.

Эквивалентность $2^\circ \iff 3^\circ$ становится очевидной, если переписать (6) в виде

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2.$$

З а м е ч а н и е 1. Равенство Парсеваля (8) является бесконечномерным аналогом теоремы Пифагора.

Определение 3. Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов предгильбертова (или линейного нормированного) пространства R называется *полной* в R, если множество (конечных) линейных комбинаций ее элементов плотно в R.

Теорема 5 (критерий полноты ортогональной последовательности). *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортогональная последовательность в* R. *Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1° $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в* R,

2° $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \quad \forall\, x \in R$,

3° $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \quad \forall\, x \in R$

(α_k — *коэффициенты Фурье элемента* x*).*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 4 для каждого $x \in R$.

Теорема 6 (Рисса–Фишера). *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортогональная система в гильбертовом пространстве* H, *и пусть действительные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ \ldots$ *таковы, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \tag{9}$$

сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ *сходится в* H *к некоторому элементу* $x \in H$*:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = x.$$

Доказательство. В силу сходимости ряда (9) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

см. теорему 16.1.2 (критерий Коши сходимости числового ряда). Это значит, что последовательность $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в H, а значит, и сходящейся в H (в силу полноты H) к некоторому $x \in H$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = x$ по определению суммы ряда в H.

Лемма 3. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортогональная система в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для* $\forall\, x \in H$ *сходится (в* H*) его ряд Фурье по этой системе:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}\, e_k = x_0,$$

причем $(x - x_0, e_j) = 0 \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится в силу неравенства Бесселя (7). Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится по теореме 6 (Рисса–Фишера). Имеем далее при $j \in \mathbb{N}$

$$(x - x_0, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_j) =$$
$$= (x, e_j) - \alpha_j \|e_j\|^2 = (x, e_j) - (x, e_j) = 0.$$

Определение 4. Ортогональная последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в предгильбертовом пространстве R называется *замкнутой*, если для $\forall\, x \in R$

$$(x, e_j) = 0 \quad (\forall\, j \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = \vec{0},$$

т. е. если не существует ненулевого элемента $x \in R$, ортогонального всем элементам системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 7. *В гильбертовом пространстве* H *ортогональная система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. 1. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в H и $x \in H$. Тогда в силу равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}\,.$$

Поэтому, если $(x, e_k) = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, то $\|x\| = 0$, т. е. $x = \vec{0}$.

Следовательно, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута.

2. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в H, $x \in H$ и α_k — коэффициенты Фурье элемента x. Тогда по лемме 3 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}\, e_k = x_0 \in H$$

сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$, причем

$$(x - x_0, e_k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует в силу замкнутости системы, что $x - x_0 = 0$, т. е. $x = x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Из теоремы 5 следует теперь, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Обратимся к конкретным примерам.

Пример 4. Последовательность одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в нормированном пространстве функций $C([a,b])$:

$$C([a,b]) = \{f \,:\, f \text{ — непрерывна на } [a,b],\ \|f\| = \max_{[a,b]} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.3 Вейерштрасса о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами.

Пример 5. Тригонометрическая система

$$\frac{1}{2},\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t;\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t,\ \ldots \tag{10}$$

полна в нормированном пространстве функций:

$$C_{per} = \{f \,:\, f \text{ — } 2\pi\text{-периодическая непрерывная функция,} \quad \|f\| = \max_{(-\infty,+\infty)} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.1 Вейерштрасса о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами.

Пример 6. Тригонометрическая система (10) полна в пространстве функций:

$$C^*([-\pi,\pi]) = \{f \,:\, f \text{ — непрерывна на } [-\pi,\pi],\ f(-\pi) = f(\pi)\}$$

в силу теоремы 24.3.1$'$ Вейерштрасса.

Пример 7. Тригонометрическая система (10) не является полной в пространстве $C([-\pi,\pi])$. Например, никакую непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию f при $f(-\pi)\neq f(\pi)$ нельзя с высокой точностью приблизить никаким тригонометрическим многочленом, т. к. для всякого тригонометрического многочлена T_n выполнено условие $T_n(-\pi)=T_n(\pi)$.

Пример 8. Последовательность одночленов $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ полна в пространствах $CL_1([a,b])$, $CL_2([a,b])$, $RL_1([a,b])$, $RL_2([a,b])$, $L_1([a,b])$, $L_2([a,b])$ в силу примера 4 и плотности множества непрерывных на $[a,b]$ функций в указанных пространствах (см. лемму 25.2.1 и примеры 25.2.6, 25.2.7).

Пример 9. Тригонометрическая система функций (10) полна в пространствах $CL_1([-\pi,\pi])$, $CL_2([-\pi,\pi])$, $RL_1((-\pi,\pi))$, $RL_2((-\pi,\pi))$, $L_1([-\pi,\pi])$, $L_2([-\pi,\pi])$ в силу примера 6 и плотности в указанных пространствах множества

$$C_0([-\pi,\pi])=\{f\,:\, f \text{ — непрерывна на } [-\pi,\pi],\\ f(-\pi)=f(\pi)=0\}.$$

Упражнение 2. Показать, что система (10) не полна в $RL_1((-\pi,\pi+\delta))$ при $\delta>0$.

Пример 10. Пусть $f\in L_2([-\pi,\pi])$. Тогда f раскладывается в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

(сходящийся к f по норме в $L_2([-\pi,\pi])$, т. е. в смысле среднего квадратичного), и справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k^2+b_k^2.$$

Здесь a_k, b_k — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, вычисляемые по формулам (24.1.2).

Утверждение вытекает из полноты системы (10) в $L_2([-\pi,\pi])$ (см. пример 9) и теоремы 5.

В частности, сформулированные свойства верны для произвольной непрерывной или кусочно непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции f.

Пример 11. Пусть $f \in L_2([-1, 1])$. Тогда f раскладывается в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n, \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

(сходящийся по норме в $L_2([-1, 1])$, т. е. в смысле среднего квадратичного), и справедливо равенство Парсеваля.

Сказанное верно, в частности, для произвольной непрерывной или кусочно непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции f.

Обоснование то же, что в примере 10.

Определение 5. Пусть R — нормированное пространство. Последовательность $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, $e_j \in R\ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, называется *базисом* в R, если

1° для $\forall\, x \in R$ справедливо представление

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R};$$

2° указанное представление единственно.

Упражнение 3. Показать, что система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов базиса линейно независима.

Базис является, очевидно, полной системой в R. Обратное не верно. Например, система одночленов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, являясь полной в $C([-1, 1])$ (см. пример 4), не является в этом пространстве базисом. В самом деле, если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k$, причем этот степенной ряд сходится в $C([-1, 1])$, т. е. равномерно на $[-1, 1]$, то его сумма f является бесконечно дифференцируемой на $(-1, 1)$, но не произвольной функцией из $C([-1, 1])$.

Известно, что тригонометрическая система (10) не является базисом в $C^*([-\pi, \pi])$, являясь в этом пространстве полной системой (пример 6).

Теорема 8. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортогональная система в предгильбертовом пространстве* R. *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— полная система, то она является базисом в* R.

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система в предгильбертовом пространстве R и $x \in R$. Тогда в силу теоремы 5

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e\|^2},$$

т. е. x совпадает с суммой своего ряда Фурье. Такое представление единственно по теореме 1. Следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в R.

Теорема 9 (об ортогонализации). *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— линейно независимая система элементов в предгильбертовом пространстве* R. *Тогда в* R *существует система элементов* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1°. *система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ортогональная и нормированная,*

2°. *при каждом* $n \in \mathbb{N}$

$$e_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \quad a_{nn} \neq 0.$$

Каждый элемент системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *определяется условиями* 1°, 2° *однозначно с точностью до множителя* ± 1.

Доказательство. Элемент e_1 ищется в виде $e_1 = a_{11}x_1$; при этом a_{11} определяется из условия

$$(e_1, e_1) = a_{11}^2 (x_1, x_1) = 1, \quad \text{т. е.} \quad a_{11} = \frac{\pm 1}{\|x_1\|^2}.$$

Пусть элементы e_k ($\forall\, k \leqslant n-1$), удовлетворяющие условиям 1°, 2°, уже построены.

Ищем элемент e_n в виде

$$e_n = a_{nn}(x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{n,n-1}e_{n-1}).$$

Здесь виден геометрический смысл выражения

$$x_n - b_{n,1}e_1 - \ldots - b_{n,n-1}e_{n-1},$$

состоящий в том, что из элемента x_n вычитается его проекция на подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ \ldots, e_{n-1}$.

Из требований ортогональности $(e_n, e_k) = 0$ при $k < n$ получаем, что

$$b_{n_k} = (x_n, e_k) \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Из требования нормированности получаем, что

$$(e_n, e_n) = a_{nn}^2 \|x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{n,n-1}e_{n-1}\|^2 = 1,$$

откуда a_{nn} (а значит, и e_n) определяется с точностью до множителя ± 1.

Переход от системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ к системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, называется *процессом ортогонализации.* Ясно, что системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полны или не полны в R одновременно.

Глава 26
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 26.1. Интегралы Римана, зависящие от параметра

Интегралы Римана вида

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \quad J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$$

называются интегралами, зависящими от параметра. Здесь будут изучены такие их свойства, как непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру y.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ непрерывен на $[c, d]$.*

Доказательство. Пусть $y \in [c, d]$, $y + \Delta y \in [c, d]$. Тогда

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| = \left| \int_a^b f(x, y + \Delta y)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|\,dx \leqslant (b - a)\omega(|\Delta y|, f),$$

где $\omega(\Delta, f)$ — модуль непрерывности функции f. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности функции f на $[a, b] \times [c, d]$ $\omega(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть функции φ, ψ непрерывны на $[c, d]$, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$ при $y \in [c, d]$, $\overline{G} = \{(x, y)\colon\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$.*

Пусть f — непрерывна на $\overline{G}$. Тогда интеграл $J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$ непрерывен на $[c, d]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью замены переменной

$$J(y) = \int_0^1 f(\varphi(y)+t(\psi(y)-\varphi(y)))(\psi(y)-\varphi(y))\,dt =: \int_0^1 g(t,y)\,dt.$$

Подынтегральная функция g непрерывна на $[0,1]\times[c,d]$ по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций. По теореме 1 интеграл $J(y)$ непрерывен на $[c,d]$.

Теорема 3 (об интегрировании под знаком интеграла). *Пусть*

1° *функция f интегрируема на $[a,b]\times[c,d]$,*

2° *интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ существует при каждом $y\in[c,d]$,*

3° *интеграл $\int_c^d f(x,y)\,dy$ существует при каждом $x\in[a,b]$.*

Тогда существуют оба повторных интеграла и

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Эта теорема вытекает из теорем 19.3.1, 19.3.1′.

Последняя формула справедлива, в частности, если функция f непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$.

Теорема 4 (правило Лейбница). *Пусть f и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$. Тогда функция*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

дифференцируема на $[c,d]$ и

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y\in[c,d]$, $y+\Delta y\in[c,d]$. Тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\left|\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx\right| =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| dx \leqslant (b-a)\omega\left(|\Delta y|, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

где $\omega\left(\delta, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ — модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на $[a,b] \times$ $\times [c,d]$. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ на $[a,b] \times [c,d]$

$$\omega\left(|\Delta y|, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta y| \to 0.$$

Из приведенных оценок получаем теперь, что существует

$$\frac{dI(y)}{dy} := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b] \times [c,d]$, φ, ψ — непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, $a \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y) \leqslant b$ при $y \in [c,d]$.*

Тогда на отрезке $[c,d]$ существует производная

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (x,y)\,dx =$$
$$= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\frac{d\psi}{dy}(y) - f(\varphi(y),y)\frac{d\varphi}{dy}(y). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим на $[c,d] \times [a,b] \times [a,b]$ функцию

$$F(y,u,v) := \int_u^v f(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$J(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

Формула (1) получается, очевидно, при дифференцировании последнего равенства в соответствии с правилами дифференцирования интеграла с переменным верхним (нижним) пределом и дифференцирования сложной функции. Для обоснования последнего достаточно убедиться в непрерывности на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$ производных

$$F'_u(y,u,v) = -f(u,y), \quad F'_v(y,u,v) = f(v,y),$$
$$F'_y(y,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Производные F'_u, F'_v непрерывны в силу непрерывности функции f.

Производная F'_y, вычисленная по правилу Лейбница (теорема 4), с помощью замены переменной в интеграле записывается в виде

$$F'_y(y,u,v) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(u+(v-u)t,y)(v-u)\,dt =: \int_0^1 h(y,u,v,t)\,dt. \tag{2}$$

По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций подынтегральная функция h непрерывна на $[c,d]\times{}$ $\times[a,b]\times[a,b]\times[0,1]$. Отсюда следует, что интеграл $\int_0^1 h(y,u,v,t)\,dt$ непрерывен на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$. Последнее свойство можно установить с помощью непосредственной оценки:

$$\left|\int_0^1 h(y+\Delta y,u+\Delta u,v+\Delta v,t)\,dt - \int_0^1 h(y,u,v,t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |h(y+\Delta y,u+\Delta u,v+\Delta v,t) - h(y,u,v,t)|\,dt \leqslant \omega(\delta,h),$$

где $\omega(\delta,h)$ — модуль непрерывности функции h, $(\Delta y)^2+(\Delta u)^2+$ $+(\Delta v)^2\leqslant\delta^2$.

§ 26.2. Равномерная сходимость на множестве

Определение 1. Пусть $X\subset\mathbb{R}$, $Y\subset\mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y (не исключается $y_0=+\infty$, $-\infty$, ∞).

Пусть заданы функции $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$, $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$. Говорят, что функция f *равномерно на* X *стремится* к φ при $Y\ni y\to$ $\to y_0$, и пишут

$$f(x,y)\underset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x) \quad \text{при} \quad Y\ni y\to y_0,$$

если

$$\sup_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0. \tag{1}$$

Можно сформулировать определение равномерного стремления f к φ, эквивалентное определению 1, если вместо условия (1) написать:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, U(y_0)\ :\ |f(x,y) - \varphi(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in Y \cap \mathring{U}(y_0).$$

В последней формулировке вместо $U(y_0)$ можно написать $U_\delta(y_0)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Пример 1. Пусть функция f непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$, $y_0 \in [c,d]$. Тогда

$$f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0).$$

В самом деле, из равномерной непрерывности функции f на $[a,b] \times [c,d]$ следует, что для

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ |f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon \text{ при } |y - y_0| < \delta.$$

В случае $Y = \mathbb{N}$, $y_0 = +\infty$ значения функции f на $X \times \times Y$ можно записать как $f_n(x) := f(x,n)$. Тогда понятие равномерного стремления $f(x,n) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$ совпадает с изученным понятием равномерной на X сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. Введем нормированное пространство ограниченных на X функций:

$$M(X) = \{g\ :\ g \text{ — ограничена на } X,\ \|g\|_M = \sup_X |g|\}.$$

Тогда равномерное стремление $f(x,y) \underset{Y\ni y\to y_0}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ на X совпадает, очевидно, с понятием сходимости по норме:

$$\|f(\cdot,y) - \varphi(\cdot)\|_M \to 0 \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0,$$

а понятие равномерной сходимости последовательности $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ — со сходимостью этой последовательности по норме:

$$\|f_n - \varphi\|_M \to 0 \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Если же $X = [a, b]$, и $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b]$ как функция x при каждом $y \in Y$, то вместо $M([a, b])$ можно взять $C([a, b])$.

Так же, как для случая равномерной сходимости последовательности функций, доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция f равномерно на X стремилась к какой-либо функции при $Y \ni y \to y_0$, необходимо и достаточно выполнения условия Коши*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\ :\ \sup_{x \in X} |f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \qquad \forall\, y',\ y'' \in Y \cap \mathring{U}_\delta(y_0).$$

Теорема 2. *Пусть заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция f при каждом фиксированном $y \in Y$ непрерывна как функция от x в точке $x_0 \in X$ (по X),*

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Тогда φ непрерывна в точке x_0 (по X).

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon\ [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$ при каждом $y \in Y$ непрерывна на $[a, b]$ как функция x.*

Пусть

$$f(x, y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \to \int_a^b \varphi(x)\, dx \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Теорему 3 называют *теоремой о предельном переходе под знаком интеграла*, поскольку она утверждает, что

$$\lim_{Y \ni y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{Y \ni y \to y_0} f(x, y)\, dx.$$

Упражнение 1. Получить в качестве следствия из теоремы 3 теорему 26.1.1.

Упражнение 2. Сравнить теоремы 1, 2, 3 соответственно с теоремами 16.1.1, 16.3.1, 16.3.2.

Упражнение 3. Сформулировать и доказать аналог теоремы 16.3.3.

§ 26.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y \qquad (1)$$

с особенностью на верхнем пределе, где

$$f \;:\; [a,b) \times Y \to \mathbb{R}, \quad [a,b) \subset \mathbb{R}, \quad Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Чаще всего будем считать $m = 1$ и $Y = [c,d]$.

Напомним, что при написании $\int_a^b f(x,y)\,dy$ предполагается, что функция $f(x,y)$ интегрируема по x по Риману на $\forall\,[a,\eta] \subset \subset [a,b)$, т. е. что интеграл

$$I(y,\eta) := \int_a^\eta f(x,y)\,dx, \quad \forall\,[a,\eta] \subset [a,b) \qquad (2)$$

существует как интеграл Римана.

Напомним, что несобственный интеграл $I(y)$ при фиксированном $y \in Y$ называется *сходящимся* и

$$I(y) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x,y)\,dx,$$

если последний предел существует и конечен. В противном случае несобственный интеграл $I(y)$ называется *расходящимся*.

Определение 1. Говорят, что несобственный интеграл $I(y)$ (1) сходится равномерно на Y, если

1° $I(y)$ сходится на Y (т. е. при $\forall\,y \in Y$),

2° $\sup\limits_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x,y)\,dx \right| \to 0$ при $\eta \to b - 0$.

Поясним, что при выполнении условия 1° при $\forall\,y \in Y$

$$\left| \int_\eta^b f(x,y)\,dx \right| \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to b - 0, \qquad (3)$$

однако быстрота этого стремления к нулю может существенно зависеть от y. Условие же 2° показывает, что стремление к нулю интеграла в (3) «в равной мере быстрое» на множестве точек из Y (можно сказать, что имеется стремящаяся к нулю миноранта скорости этого стремления).

Пример 1.

$$I(y) = \int_0^\infty y\, e^{-xy}\, dx, \quad Y = (\delta, +\infty) \subset (0, +\infty).$$

Здесь

$$\sup_{y\in Y} \left| \int_\eta^\infty y\, e^{-xy}\, dx \right| = \sup_{y\in Y} \left| \int_{\eta y}^\infty e^{-u}\, du \right| = e^{-\eta\delta}.$$

При $\delta > 0$ $\lim\limits_{\eta\to+\infty} e^{-\eta\delta} = 0$, так что $I(y)$ сходится равномерно на $(\delta, +\infty)$.

При $\delta = 0$ $e^{-\eta 0} \not\to 0$ $(\eta \to +\infty)$, так что $I(y)$ не сходится равномерно на $(0, +\infty)$.

З а м е ч а н и е 1. Условие 2° определения 1 можно переписать в виде

$$I(y,\eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} I(y) \quad \text{при} \quad \eta \to b - 0.$$

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла). *Для того чтобы несобственный интеграл* (1) *сходился равномерно на* Y, *необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \eta_\varepsilon \in [a, b) :\ \sup_{y\in Y} \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\, dx \right| < \varepsilon\ \forall\, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b). \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о необходимости основывается на равенстве

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\, dx = \int_{\eta'}^{b} f(x,y)\, dx - \int_{\eta''}^{b} f(x,y)\, dx,$$

а достаточности — на критерии Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 14.7.1) и предельном переходе при $\eta'' \to b - 0$ в неравенстве $|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\, dx| < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е 2. Доказательство теоремы 1 можно получить в качестве следствия теоремы 26.2.1, используя замечание 1.

Упражнение 1. Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \sin x \, dx, \quad Y = Y_\delta = (\delta, +\infty)$$

а) сходится равномерно на множестве Y_δ при $\delta > 0$;

б) сходится, но не равномерно на Y_0.

Упражнение 2. Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad y \geqslant 0,$$

сходится равномерно на $Y = [0, +\infty)$.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть функции $f, g \colon [a, b) \times Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Пусть при некотором $M > 0$ $|f(x, y)| \leqslant Mg(x, y)$ при $(x, y) \in [a, b) \times Y$ и несобственный интеграл*

$$J(y) = \int_a^b g(x, y) \, dx$$

сходится равномерно на Y.

Тогда несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

сходится равномерно на Y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости $J(y)$ и критерия Коши

$$\exists \, \eta_\varepsilon \in [a, b) \; : \; \sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) \, dx \right| < \varepsilon \quad \forall \, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b).$$

Тогда

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y) \, dx \right| < M\varepsilon \quad \forall \, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b).$$

В силу критерия Коши несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно на Y.

Частным случаем признака сравнения (теоремы 2) является

Теорема 3 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла). *Пусть*

$$f : [a, b) \times Y \to \mathbb{R}, \quad \varphi : [a, b) \to \mathbb{R},$$
$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x) \quad \textit{при} \quad (x, y) \in [a, b) \times Y.$$

Пусть несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ *сходится. Тогда несобственный интеграл* $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *сходится равномерно на* Y.

Упражнение 3. Доказать, что несобственный интеграл

$$Y(y) = \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1 + x^2}\, dx$$

сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$.

Установим достаточные условия непрерывности несобственного интеграла $I(y)$ (1), возможности его интегрирования и дифференцирования под знаком интеграла.

Теорема 4. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a, b) \times \Pi$, $\Pi = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_m, d_m]$, *и интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad y \in \Pi, \tag{5}$$

сходится равномерно на Π.

Тогда $I(y)$ *непрерывен на* Π.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\eta_\varepsilon \in [a, b)$ таково, что

$$\sup_\Pi \left| \int_{\eta_\varepsilon}^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть y, $y + \Delta y \in \Pi$. Тогда

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| \leqslant \int_a^{\eta_\varepsilon} |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|\, dx +$$
$$+ \left| \int_{\eta_\varepsilon}^b f(x, y + \Delta y)\, dx \right| + \left| \int_{\eta_\varepsilon}^b f(x, y)\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant (\eta_\varepsilon - a)\omega(|\Delta y|, f, \Pi_\varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon,$$

где $\omega(\delta, f, \Pi_\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции f на замкнутом прямоугольнике $\Pi_\varepsilon := [a, \eta_\varepsilon] \times \Pi$, который (при фиксированном $\varepsilon > 0$) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Следовательно, существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что $|I(y+\Delta y) - I(y)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$, если $|\Delta y| \leqslant \delta_\varepsilon$, что и означает непрерывность $I(y)$ при любом $y \in \Pi$, т.е. непрерывность I на Π.

Упражнение 4. Доказать следующую теорему о предельном переходе под знаком несобственного интеграла.

Теорема 5. *Пусть $y^{(0)}$ — предельная точка множества $Y \subset \mathbb{R}^m$ (при $m = 1$ не исключаются значения $y^{(0)} = +\infty, -\infty, \infty$). Пусть функция $f\colon [a, b) \times Y \to \mathbb{R}$, $[a, b) \subset \mathbb{R}$, при каждом $y \in Y$ непрерывна на $[a, b)$ как функция x и*

$$f(x, y) \underset{[a,\eta]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y^{(0)}.$$

на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$.

Пусть интеграл $I(y)$ (1) сходится равномерно на Y.

Тогда сходится $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ и

$$\lim_{Y \ni y \to y^{(0)}} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема 6 (об интегрировании под знаком интеграла). *В условиях теоремы 4 при $m = 1$, $\Pi = [c, d]$*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности функции f на $[a, \eta] \times [c, d]$ при $a < \eta < b$

$$\int_c^d \int_a^\eta f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^\eta \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx. \tag{7}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\eta \to b - 0$. Левая часть (7) имеет конечный предел

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d I(y)\,dy$$

— интеграл от непрерывной на $[c, d]$ в силу теоремы 4 функции.

В самом деле,

$$\left| \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy - \int_c^d \int_a^\eta f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant (d-c) \sup_{y\in[c,d]} \left| \int_\eta^b f(x,y)\,dx \right| \to 0$$

при $\eta \to b-0$ в силу равномерной сходимости $I(y)$. Следовательно, и правая часть (7) имеет конечный предел, который по определению несобственного интеграла есть правая часть (6).

Переходя в равенстве (7) к пределу при $\eta \to b-0$, получаем равенство (6).

Упражнение 5. Получить теоремы 4 (при $m = 1$), 6 в качестве следствий из теорем 26.2.2, 26.2.3. Сравнить с доказательством теорем 16.3.1′, 16.3.2′.

Теорема 7 (о дифференцировании под знаком интеграла). *Пусть* $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, *функции* f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны на* $[a,b)\times[c,d]$. *Пусть для некоторого* $y_0 \in [c,d]$ *сходится интеграл* $I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$, *а интеграл* $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$.

Тогда функция $I(y)$ *дифференцируема и*

$$\frac{d}{dy} I(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Доказательство. По теореме 6 при $y \in [c,d]$

$$\int_{y_0}^y \int_a^b f'_y(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

Первый из интегралов в правой части сходится в силу сходимости второго интеграла и интеграла в средней части равенства. Дифференцируя полученное тождество, имеем

$$\int_a^b f'_y(x,y)\,dx = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

что и требовалось получить.

Упражнение 6. Доказать, что

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{8}$$

У к а з а н и е. Вычислить предварительно вспомогательный интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,$$

найдя его производную $\frac{d}{d\alpha} I(\alpha)$ с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Воспользоваться затем упражнением 2.

Иногда для доказательства равномерной сходимости несобственного интеграла бывает полезно применить интегрирование по частям, «улучшающее» сходимость интеграла.

Пример 2.

$$I(y) = \int_1^\infty \frac{1}{x} \cos yx\, dx, \quad Y = (y_0, +\infty), \quad y_0 > 0.$$

Этот интеграл сходится, но не абсолютно (ср. с примером 14.7.3). После интегрирования по частям возникает интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \frac{\sin yx}{y}\, dx$, сходящийся абсолютно и по признаку Вейерштрасса — равномерно на Y.

Приведем точные рассуждения. В соответствии с определением 1 следует оценить

$$\sup_{y \geqslant y_0} \left| \int_\eta^\infty \frac{1}{x} \cos yx\, dx \right| =$$

$$= \sup_{y \geqslant y_0} \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin yx}{y} \Big|_{x=\eta}^\infty + \int_\eta^\infty \frac{1}{x^2} \frac{\sin yx}{y}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y \geqslant y_0} \frac{2}{\eta y} = \frac{2}{\eta y_0} \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to +\infty.$$

Следовательно, $I(y)$ сходится равномерно на Y.

Приведем два признака (признаки Дирихле и Абеля) равномерной сходимости интеграла

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) g(x, y)\, dx, \quad y \in Y, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где функции $f, g\colon [a, +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, f и $\frac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны по x при $\forall\, y \in Y$, функция g монотонна по x $\forall\, y \in Y$.

Теорема 8 (признак Дирихле). *Пусть*

1° *интегралы*
$$\int_a^\eta f(x,y)\,dx$$
равномерно ограничены на Y, *т. е. существует число* $M>0$ *такое, что*
$$\left|\int_a^\eta f(x,y)\,dx\right| \leqslant M \quad \forall\,\eta\in[a,+\infty), \quad \forall\,y\in Y,$$

2° $g(x,y)\underset{Y}{\rightrightarrows}0$ *при* $x\to+\infty$.

Тогда интеграл $I(y)$ *из* (9) *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости несобственного интеграла (теорема 1). Оценим для этого при $a<\eta'<\eta''<\infty$ интеграл
$$I(\eta',\eta'',y) := \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)g(x,y)\,dx =$$
$$= g(x,y)\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)\,d\xi\bigg|_{x=\eta'}^{\eta''} - \int_{\eta'}^{\eta''}\left(\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)\,d\xi\right)g'_x(x,y)\,dx.$$
Тогда
$$|I(\eta',\eta'',y)| \leqslant |g(\eta'',y)|2M + 2M\int_{\eta'}^{\eta''}|g'_x(x,y)|\,dx =$$
$$= 2M\left[|g(\eta'',y)| + \left|\int_{\eta'}^{\eta''} g'_x(x,y)\,dx\right|\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2M[2|g(\eta'',y)| + |g(\eta',y)|].$$

Следовательно, для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\eta_\varepsilon\in[a,\infty)$ такое, что
$$\sup_{y\in Y}|I(\eta',\eta'',y)|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad \eta',\ \eta''>\eta_\varepsilon,$$
и теорема доказана.

Теорема 9 (признак Абеля). *Пусть*

1° *интеграл*
$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$
сходится равномерно на Y,

2° *функция g равномерно ограничена, т. е. $\exists\, M > 0$ такое, что*

$$|g(x,y)| \leqslant M \quad \textit{при} \quad x \in [a,\infty), \quad y \in Y.$$

Тогда интеграл $I(y)$ из (9) *сходится равномерно на Y.*

Доказательство предлагается читателю провести самостоятельно, оценив (как и при доказательстве признака Дирихле) $I(\eta', \eta'', y)$ с использованием условий теоремы.

Упражнение 7. Установить равномерную сходимость интеграла из примера 2 с помощью признака Дирихле.

Упражнение 8. Доказать с помощью признака Абеля утверждение из упражнения 2, воспользовавшись примером 14.7.3.

В этом параграфе до сих пор рассматривались несобственные интегралы с особенностью на верхнем пределе. Аналогично изучаются зависящие от параметра несобственные интегралы с особенностью на нижнем пределе (см. определение 14.7.3) и зависящие от параметра несобственные интегралы с несколькими особенностями (см. определение 14.7.5). В последнем случае интеграл с несколькими особенностями

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y,$$

представляется в виде суммы интегралов

$$I(y) = \sum_{i=1}^{k} I_i(y) = \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x,y)\,dy,$$
$$-\infty \leqslant a = c_0 < c_1 < \ \ldots < c_k = b \leqslant +\infty,$$

где каждый из интегралов $I_i(y)$ является несобственным с одной особенностью на верхнем либо на нижнем пределе. При этом *интеграл $I(y)$ называется равномерно сходящимся на Y, если каждый из интегралов $I_i(y)$ равномерно сходится на Y.*

Пример 3. (Гамма-функция Эйлера).

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx, \quad s > 0. \tag{10}$$

Интеграл имеет две особенности на нижнем и на верхнем пределах. Представим $\Gamma(s)$ в виде

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx. \tag{11}$$

Легко видеть, что первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$, а второй сходится при $\forall\, s > 0$. Следовательно, интеграл (10) сходится при $\forall\, s > 0$.

Интеграл (10) сходится равномерно на $\forall\, [s_0, s_1] \subset (0, +\infty)$, т. к. на таком отрезке равномерно сходятся оба интеграла в (11), что устанавливается с помощью признака Вейерштрасса с мажорантами соответственно $\varphi_0(x) = x^{s_0-1}$, $\varphi_1(x) = x^{s_1-1}e^{-x}$. Следовательно, гамма-функция $\Gamma(s)$ непрерывна при $s > 0$ по теореме 4.

С помощью интегрирования по частям имеем при $s > 0$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s).$$

Следовательно, при $s > 0$

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)\ldots(s+1)s\Gamma(s).$$

Из этой формулы видно, что по значениям гамма-функции на отрезке $(0, 1]$ можно вычислить ее значения для любого аргумента $s > 1$.

Поскольку $\Gamma(1) = 1$, из последнего соотношения получаем, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. что функция $\Gamma(s+1)$ является продолжением функции $s!$ с множества целых неотрицательных чисел n на полуось $\{s\colon s > -1\}$.

Пример 4. (Бета-функция Эйлера).

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{12}$$

зависящая от двух параметров p, q. Интеграл имеет две особенности на нижнем и верхнем пределах интегрирования.

Представим его поэтому в виде

$$B(p,q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \quad (13)$$

Первый из интегралов в (13) сходится при $p>0$ и расходится при $p\leqslant 0$, а второй сходится при $q>0$ и расходится при $q\leqslant 0$. Следовательно, бета-функция $B(p,q)$ (12) определена на первом квадранте $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Интеграл $B(p,q)$ (12) равномерно сходится на

$$\{(p,q)\ :\ p\geqslant p_0, \quad q\geqslant q_0\} \quad \text{при} \quad p_0,\ q_0>1,$$

т. к. на этом множестве равномерно сходится каждый из интегралов (13), что легко установить, применив признак Вейерштрасса с мажорантой $\varphi(x)=x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$. Следовательно, по теореме 4 бета-функция $B(p,q)$ непрерывна на первом квадранте:

$$\{(p,q)\ :\ p>0, \quad q>0\}=(0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

Функции $B(p,q)$ и $\Gamma(s)$ связаны между собой формулой Эйлера:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p>0, \quad q>0.$$

Для функций $\Gamma(s)$, $B(p,q)$ составлены таблицы значений. Они используются при численном вычислении интегралов, сводящихся к этим функциям.

Глава 27
ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 27.1. Интеграл Фурье

Напомним определение 14.8.2.

При $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *функция* f *называется абсолютно интегрируемой на интервале* (a, b), *если существует конечное число точек* $\{c_i\}$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ *таких, что*

1° *функция* f *интегрируема по Риману на любом отрезке* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, *не содержащем точек* c_i;

2° *сходится несобственный интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$, *понимаемый как несобственный интеграл с особенностями в точках* $c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Множество всех абсолютно интегрируемых на (a, b) функций образует полунормированное пространство $RL((a, b))$ с полунормой $\int_a^b |f(x)|\,dx$, см. пример 25.2.5.

Лемма 1. *Пусть функция* f *абсолютно интегрируема на* (a, b), *функция* φ *непрерывна и ограничена на* $(a, b) \times [c, d]$. *Тогда*

1° *несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x)\varphi(x, y)\,dx$$

непрерывен на $[c, d]$,

2° $$\int_c^d \int_a^b f(x)\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x)\varphi(x, y)\,dy\,dx.$$

Доказательство. 1°. Пусть $|\varphi(x, y)| \leqslant M$ при $(x, y) \in (a, b) \times [c, d]$. Пусть $\varepsilon > 0$, $a < \xi < \eta < b$, причем $\xi = \xi(\varepsilon)$ и $\eta = \eta(\varepsilon)$ таковы, что

$$\int_a^\xi |f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \int_\eta^b |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Тогда при y, $y \times \Delta y \in [c, d]$

$$\Delta I := I(y + \Delta y) - I(y) =$$
$$= \left(\int_a^\xi + \int_\xi^\eta + \int_\eta^b\right) f(x)[\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)]\,dx,$$

$$|\Delta I| \leqslant 2M\varepsilon + \omega(\Delta y, \varphi, \Pi)\int_a^b |f(x)|\,dx + 2M\varepsilon, \tag{1}$$

где $\omega(\delta, \varphi, \Pi)$ — модуль непрерывности функции φ на замкнутом прямоугольнике $\Pi = [\xi, \eta] \times [c, d]$.

Поскольку φ равномерно непрерывна на Π, то можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\omega(\delta_\varepsilon, \varphi, \Pi) < \varepsilon$.

Тогда из (1) получаем, что

$$|\Delta I| \leqslant 4M\varepsilon + \varepsilon\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Следовательно, интеграл $I(y)$ непрерывен на $[c, d]$.

2°. При $\varepsilon > 0$ обозначим через $f_\varepsilon\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывную финитную (т. е. равную нулю вне некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$) функцию такую, что

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ такая функция f_ε существует в силу следствия 14.8.1.

Тогда

$$\int_c^d \int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b f_\varepsilon(x)\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\,dx. \tag{2}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим утверждение 2° теоремы.

Предельный переход в левой части равенства (2) обосновывается с помощью оценок:

$$\left|\int_c^d \int_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]\varphi(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant M(d - c)\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant M(d - c)\varepsilon.$$

Обоснование предельного перехода в правой части (2) аналогично.

Определение 1. Пусть f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. *Интегралом Фурье* функции f называется интеграл

$$S(x) = S(x, f) := \int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\, dy, \tag{3}$$

где

$$\begin{Bmatrix} a(y) \\ b(y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \begin{Bmatrix} \cos yt \\ \sin yt \end{Bmatrix} dt. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Тогда функции $a(y)$, $b(y)$ из* (4)

1° *непрерывны на* $[0, +\infty)$;

2° $a(y)$, $b(y) \to 0$ *при* $y \to +\infty$.

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы 24.1.1 Римана об осцилляции.

Из леммы 2 следует, что интеграл $S(x)$ из (3) является несобственным интегралом с одной особенностью на верхнем пределе.

Как видим, правая часть (3) является аналогом ряда Фурье, а $a(y)$, $b(y)$ из (4) — аналогами коэффициентов Фурье.

Перепишем $S(x, f)$ в виде

$$S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty\cos xy + \sin ty\sin xy)\, dt\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\, dt\, dy.$$

Изучим сходимость интеграла Фурье (т. е. внешнего интеграла в правой части последнего равенства). Рассмотрим для этого интеграл

$$S_\eta(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\, dt\, dy, \quad \eta > 0,$$

(являющийся аналогом суммы Фурье).

Применяя лемму 1, имеем

$$S_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_0^\eta \cos y(x-t)\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u+x)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^\infty\right) f(u+x)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du,$$

$$S_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \tag{5}$$

Лемма 3.

$$\int_0^\infty \frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad \forall\,\eta > 0. \tag{6}$$

Доказательство этого равенства предлагается провести самостоятельно, используя указание к упражнению 26.3.6.

Напомним определение 24.2.1. Точка x_0 называется *почти регулярной* точкой функции f, если существуют $f(x_0+{}$ $+\,0)$, $f(x_0-0)$,

$$f'_+(x_0) := \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h},$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}.$$

Если при этом $f(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то x_0 называется *регулярной* точкой функции f.

Если функция f имеет в точке x_0 правую и левую односторонние производные, то f непрерывна в точке x_0 и x_0 — регулярная точка функции f.

Теорема 1 (достаточные условия сходимости в точке интеграла Фурье). *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$ и $a(y)$, $b(y)$ определены формулой (4). Тогда*

1° *если x_0 — почти регулярная точка функции f, то*

$$S(x_0) = S(x_0,f) = \int_0^\infty [a(y)\cos x_0 y + b(y)\sin x_0 y]\,dy =$$

$$= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2};$$

2° *если же* x_0 — *регулярная точка функции* f, *то*

$$S(x_0, f) = f(x_0).$$

Доказательство. Используя (6), получим

$$S_\eta(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+t) - f(x_0+0)]\,\frac{\sin \eta t}{t}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0-t) - f(x_0-0)]\,\frac{\sin \eta t}{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\,J^+(\eta) + \frac{1}{\pi}\,J^-(\eta).$$

Представим $J^+(\eta)$ при $\eta > 1$ в виде

$$J^+(\eta) = \int_0^1 \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin \eta t\,dt +$$
$$+ \int_1^\infty \frac{f(x_0+t)}{t}\sin\eta t\,dt - f(x_0+0)\int_\eta^\infty \frac{\sin u}{u}\,du =$$
$$= J_1^+(\eta) + J_2^+(\eta) - f(x_0+0)J_3^+(\eta).$$

Интегралы $J_1^+(\eta)$, $J_2^+(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$ по теореме 24.1.1 Римана об осцилляции. Интеграл $J_3^+(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$ в силу сходимости интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$. Следовательно, $J_3^+(\eta) \to 0$ и аналогично $J^-(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$.

Таким образом, теорема 1 установлена.

Многие свойства интегралов Фурье аналогичны соответствующим свойствам рядов Фурье по тригонометрической системе. В качестве примера можно сравнить формулировки теорем 1 и 24.2.1. Для интегралов Фурье, как и для рядов Фурье, справедлив принцип локализации, аналогично формулируются различные условия сходимости в точке (например, в терминах условий Гёльдера) и равномерной сходимости, одинаково влияние гладкости функции на скорость сходимости рядов Фурье и интегралов Фурье, имеется аналог равенства Парсеваля и т. п.

Напомним, что для комплекснозначной функции действительного аргумента

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad u(t),\ v(t) \in \mathbb{R} \quad \forall\, t$$

интеграл Римана и несобственный интеграл Римана определяются так же, как для действительнозначной функции. При этом

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt,$$

если два последних интеграла существуют, и

$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |w(t)|\,dt,$$

если интеграл в левой части существует как интеграл Римана или абсолютно сходится как несобственный интеграл с несколькими особенностями.

Определение 2. Пусть функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[-\eta, \eta]$, $\eta > 0$. Тогда

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\eta\to+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)\,dx.$$

Пусть функция $\varphi\colon [a,b]\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, интегрируема по Риману на любом множестве $[a,b] \setminus U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\text{v.p.} \int_a^b \varphi(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(x_0)} \varphi(x)\,dx.$$

Введенные конструкции называются главными значениями (valeur principale) интегралов.

Если интеграл сходится как несобственный, то он имеет, очевидно, и главное значение, совпадающее с несобственным интегралом. Обратное неверно. Например, главные значения интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ существуют и равны нулю, но сами интегралы не сходятся как несобственные.

Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке имеет обе односторонние производные (а значит, и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$). Тогда по теореме 1 для $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos y(x-t)\,dt\,dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\,dy.$$

В то же время вследствие нечетности функции $\sin x$

$$0 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt\,dy.$$

Умножив последнее равенство почленно на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с предыдущим, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}\,dt\,dy. \qquad (7)$$

Последняя формула называется *комплексной записью интеграла Фурье.*

§ 27.2. Преобразование Фурье

Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке x оси имеет односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ (а значит, и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$). Тогда она может быть разложена в интеграл Фурье. Это разложение, имеющее в комплексной форме вид (27.1.7), можно переписать так:

$$f(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt\right)e^{ixy}\,dy. \qquad (1)$$

Правая часть (1) представляет собой результат двух последовательно примененных интегральных преобразований.

Определение 1. Пусть функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ (комплекснозначная) абсолютно интегрируема на любом отрезке $[-\eta, \eta] \subset (-\infty, +\infty)$.

Преобразование Фурье функции f определяется формулой

$$\hat{f}(y) = F[f](y) := \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx. \qquad (2)$$

Обратное преобразование Фурье функции f определяется формулой

$$\tilde{f}(y) = F^{-1}[f](y) := \text{v.p. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}\,dx. \tag{3}$$

В частности, если f — комплекснозначная абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция, то

$$\begin{aligned} F[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx, \\ F^{-1}[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ *абсолютно интегрируема на* $(-\infty, +\infty)$ *и имеет в каждой точке обе односторонние производные. Тогда*

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f. \tag{5}$$

Доказательство. Первая из формул (5) совпадает с ранее установленной формулой (1). Вторая получается применением первой к функции $f^*(x) := f(-x)$.

Формулы (5) называют *формулами обращения*.

Замечание 1. Теорема 1 установлена для действительнозначных функций f. Она справедлива и для комплекснозначных функций f действительного аргумента ($f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$), поскольку каждую такую функцию можно представить в виде $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g, h\colon (-\infty, +\infty) \to \to \mathbb{R}$, и воспользоваться теоремой 1 для функций g и h.

Эти же соображения применимы и при выводе ряда других свойств преобразований F и F^{-1}. Поэтому при их формулировке и доказательстве можно ограничиться рассмотрением лишь действительнозначных функций.

Установим некоторые *свойства преобразования Фурье* абсолютно интегрируемых функций (f_1, f_2, f):

1° (линейность)

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2] \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

2°. $\hat{f} = F[f]$ — непрерывна на $(-\infty, +\infty)$,

$$\hat{f}(y) \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \pm\infty,$$

3°. $\hat{f}$ — ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. 1°. Линейность преобразования Фурье следует из линейности несобственного интеграла.

2° следует из леммы 27.1.2, т. к. $\sqrt{2\pi}\hat{f}(y) = a(y) + ib(y)$.

3° является следствием 2° или устанавливается простой оценкой

$$\sup_{-\infty<y<+\infty} |\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Изучим преобразование Фурье производных и производные преобразования Фурье.

Теорема 2. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и f' непрерывна и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Тогда*

$$F[f'](y) = (iy)F[f](y), \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Представим функцию f в виде

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ следует существование пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ixy} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy}\, dy = iyF[f](y).$$

Следствие 1. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ вместе со своими производными до порядка n включительно и $f^{(n)}$ — непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. Тогда*

$$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n F[f](y), \quad \textit{при} \quad y \in (-\infty, +\infty), \tag{6}$$

$$|F[f](y)| \leqslant \frac{M}{|y|^n}, \quad \textit{где} \quad M = \sup_{(-\infty,+\infty)} |F[f^{(n)}]|. \tag{7}$$

Доказательство равенства (5) сводится к последовательному применению n раз теоремы 2. Оценка (7) следует из равенства (6).

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, а функция f_1 $(f_1(x) = xf(x))$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Тогда*

$$\frac{d}{dy} F[f](y) = F[-if_1](y) = F[-ixf(x)](y).$$

Доказательство. Дифференцируя первый из интегралов (4) по параметру y, получаем на основании теоремы 26.3.7

$$\frac{d}{dy} F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-iyx}\, dx.$$

Заметим, что последний интеграл сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса с мажорантой $\varphi(x) = |xf(x)|$.

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, а функция f_n $(f_n(x) = x^n f(x))$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Тогда при $y \in (-\infty, +\infty)$ существует*

$$\frac{d^n}{dy^n} F[f](y) = F[(-i)^n f_n](y) = F[(-ix)^n f(x)](y).$$

Глава 28
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 28.1. Пространства D, D' основных и обобщенных функций

Понятие обобщенной функции обобщает классическое понятие функции и дает возможность выразить в математической форме такие понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда, интенсивность мгновенного точечного источника и т. п. Реально можно измерить лишь среднюю плотность вещества в данной точке. Обобщенная функция определяется своими средними значениями в окрестности каждой точки. Возьмем, например, стержень, совпадающий с отрезком $[-1, 1]$ действительной прямой. Пусть требуется охарактеризовать его плотность, создаваемую материальной точкой массы 1, расположенной в точке $x = 0$. Будем считать сначала, что эта масса равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, где $\varepsilon > 0$ мало. Тогда плотность стержня $\delta_\varepsilon(x)$ задается формулой

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } |x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Как видим, масса стержня

$$m = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда получим «функцию»

$$\delta(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

В то же время хотелось бы, чтобы

$$\int_{-1}^{1} \delta(x)\, dx = 1.$$

Как видим, наши требования к предельной «функции» $\delta(x)$ противоречивы, если понимать их в классических математических терминах. Этот (в частности) вопрос разрешим в рамках теории обобщенных функций, созданной С.Л. Соболевым и Л. Шварцем.

В рассмотренном примере можно использованное понятие поточечного предельного перехода заменить другим. Если φ — произвольная непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция, то существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Формально это записывают так:

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0) \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Отображение, которое каждой функции некоторого класса ставит в соответствие число, называется *функционалом.* Последнее равенство означает, что $\delta(x)$ — функционал, определенный на множестве всех непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ функций и ставящий в соответствие каждой непрерывной функции ее значение в точке 0. Функционал $\delta(x)$ называют δ-функцией Дирака. Функцию $\delta_\varepsilon(x)$ также можно рассматривать как функционал на множестве всех непрерывных функций, действующий по формуле

$$\varphi \to \int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx,$$

в которой интеграл можно понимать как интеграл Римана по отрезку $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, а предельный переход $\delta_\varepsilon \to \delta$ (называемый слабой сходимостью) понимать как предельный переход на множестве функционалов.

Перейдем к точным формулировкам. Будем далее рассматривать лишь одномерный случай.

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если $f = 0$ вне некоторого отрезка.

Носителем функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}$, в которых $f(x) \neq 0$. Он обозначается символом $\operatorname{supp} f$.

В силу данных определений функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ финитна тогда и только тогда, когда ее носитель компактен (т. е. является замкнутым ограниченным множеством).

Символом C_0^∞ обозначается множество бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Оно является линейным пространством при естественном определении операций сложения функций и умножения функции на число.

Введем в C_0^∞ понятие сходимости.

Определение 1. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ функций $\varphi_k \in C_0^\infty$ называется *сходящейся к функции* $\varphi \in C_0^\infty$, если

1° $\exists\, [a,b]\colon \operatorname{supp} \varphi_k \subset [a,b]\ \forall\, k \in \mathbb{N}$,

2° $\sup |\varphi_k^{(s)} - \varphi^{(s)}| \to 0$ при $k \to \infty$, $\forall\, s \in \mathbb{N}_0$.

Определение 2. Линейное пространство C_0^∞ с введенным определением 1 понятием сходимости называется *пространством* D *основных функций.*

Пусть f — функционал на пространстве D основных функций. Значение f на $\varphi \in D$ обозначается через (f, φ).

Определение 3. Функционал f на D называется линейным, если

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi) \quad \forall\, \varphi, \psi \in D, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Определение 4. Функционал f на D называется непрерывным, если при $k \to \infty$ из

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{в} \quad D \quad \text{следует} \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi).$$

Определение 5. Всякий линейный непрерывный функционал на D называется обобщенной функцией.

Определение 6. Пространством обобщенных функций D' называется множество (линейное пространство) всех обобщенных функций с введенными в нем операциями сложения, умножения на число и сходимостью по следующим правилам:

1° $(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$, $f, g \in D'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in D$;

2° последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in D'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, называется сходящейся в D' к $f \in D'$ при $k \to \infty$, если

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in D.$$

Сходимость в D' записывается в виде

$$f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. При $\forall\, a > 0$ функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{a^2}{x^2 - a^2}} & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 0 \end{cases} \in C_0^{\infty}$$

(ср. с примером функции φ из начала § 17.3).

Этот пример показывает, что C_0^{∞} содержит функции, отличные от тождественного нуля.

Пример 2. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локально абсолютно интегрируема* (т.е абсолютно интегрируема на каждом отрезке $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$). Тогда функционал, определенный равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{1}$$

является обобщенной функцией, т. е. элементом D'.

Определение 7. Обобщенная функция называется *регулярной*, если ее значения на $\forall\, \varphi \in D$ представимы в виде (1) с некоторой локально абсолютно интегрируемой функцией f.

В противном случае обобщенная функция называется *сингулярной.*

Регулярная обобщенная функция, определяемая формулой (1), обозначается тем же символом f и отождествляется с локально абсолютно интегрируемой функцией f. Можно сказать, таким образом, что D' содержит все локально абсолютно интегрируемые функции.

Пример 3. δ-функция, определяемая формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in D,$$

является сингулярной обобщенной функцией. Покажем это. Допустив противное, предположим, что δ-функция является регулярной обобщенной функцией, т. е. что при некоторой локально абсолютно интегрируемой функции f

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in D.$$

Тогда для φ из примера 1

$$\int_{-a}^{a} f(x)e^{\frac{a^2}{x^2-a^2}}\, dx = \varphi(0) = e^{-1} \quad \forall\, a \in (0, 1).$$

Но это равенство не выполняется при малых значениях a, т. к. его левая часть ограничена интегралом

$$\int_{-a}^{a} |f(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0+0.$$

Следовательно, δ-функция не является регулярной, а значит, является сингулярной обобщенной функцией.

Пример 4. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных абсолютно интегрируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций называется *δ-образной последовательностью*, если

1°. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, dx = 1 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$;

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_k(x)\, dx = 1 \ \ \forall\, \varepsilon > 0$.

Примером δ-образной последовательности функций является последовательность функций

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{1}{k}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Упражнение 1. Показать, что если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — δ-образная последовательность, то

$$f_k \to \delta \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

т. е. (в соответствии с определением сходимости в D')

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0) \quad \text{при} \quad k\to\infty \quad \forall\,\varphi\in D.$$

§ 28.2. Дифференцирование обобщенных функций

Если функция f непрерывно дифференцируема на $(-\infty,+\infty)$, то для $\forall\,\varphi\in D$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Это соотношение делает естественным следующее

Определение 1. Пусть $f\in D'$. Обобщенная функция f', задаваемая формулой

$$(f',\varphi) := -(f,\varphi') \quad \forall\,\varphi\in D, \tag{1}$$

называется *производной* обобщенной функции f.

Читателю предлагается проверить, что функционал, стоящий в правой части (1), является линейным и непрерывным на D, т. е. обобщенной функцией.

Переход от обобщенной функции к ее производной называется *операцией дифференцирования.*

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства операции дифференцирования:*

1° *линейность, т. е.*

$$(\alpha f+\beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall\, f,g\in D', \quad \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

2° *непрерывность, т. е. при* $k\to\infty$

$$f_k\to f \quad \text{в} \quad D' \Rightarrow f_k'\to f' \text{ в } D'.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Для $\forall\,\varphi\in D$ имеем

$$((\alpha f+\beta g)',\varphi) = -(\alpha f+\beta g,\varphi') = -\alpha(f,\varphi') - \beta(g,\varphi') = \\ = \alpha(f',\varphi)+\beta(g',\varphi) = (\alpha f'+\beta g',\varphi).$$

2°. Пусть при $k\to\infty$ $f_k\to f$ в D'. Тогда для $\forall\,\varphi\in D$

$$(f_k',\varphi) = -(f_k,\varphi') \to -(f,\varphi') = (f',\varphi).$$

Пример 1. Пусть θ — функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Рассматривая θ как обобщенную функцию, найдем ее производную. Пусть $\varphi \in D$. Тогда

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Следовательно, $\theta' = \delta$.

Определение 2. Пусть $f \in D'$, $n \in \mathbb{N}$. Обобщенная функция $f^{(n)}$, задаваемая формулой

$$(f^{(n)}, \varphi) := (-1)^n (f, \varphi^{(n)}) \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{2}$$

называется производной порядка n от обобщенной функции f.

Так же, как для $n = 1$, проверяется, что функционал $(f, \varphi^{(n)})$ из правой части (2) является линейным и непрерывным на D, т. е. обобщенной функцией.

Упражнение 1. Вычислить вторую производную функции $f(x) = |x|$.

Мы видим, что каждую обобщенную функцию f $(\in D')$ можно дифференцировать и притом сколько угодно раз, а ее производная $f^{(n)}$ любого порядка n также является обобщенной функцией (элементом D').

Определение 3. Пусть $f_k \in D' \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется *рядом обобщенных функций.* Этот ряд называется *сходящимся* в D' к $f \in D'$, если

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f. \tag{3}$$

Из непрерывности операции дифференцирования (свойство 2° теоремы 1) следует, что всякий сходящийся в D' ряд обобщенных функций (3) можно почленно дифференцировать:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k' = f',$$

и полученный ряд также будет сходиться в D'.

Определение 4. Пусть $f \in D'$ и функция λ бесконечно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$. Произведением λf называется обобщенная функция, задаваемая формулой

$$(\lambda f, \varphi) := (f, \lambda\varphi) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty.$$

Упражнение 2. Показать, что λf — линейный непрерывный функционал на D, т. е. обобщенная функция из D'.

§ 28.3. Пространства S, S' основных и обобщенных функций

Наряду с парой D, D' основных и обобщенных функций важнейшей в математическом анализе и теории дифференциальных уравнений в частных производных является пара пространств S, S' (называемых пространствами Л. Шварца) основных и обобщенных функций. Эти пространства замечательны тем, что они инвариантны относительно преобразования Фурье:

$$\varphi \in S \Rightarrow F[\varphi] \in S, \quad f \in S' \Rightarrow F[f] \in S'.$$

Определение 1. Линейным пространством S называется множество комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций φ, для которых конечна каждая из полунорм

$$\|\varphi\|_{n,m} := \sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| < \infty \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

при естественном определении сложения функций и умножения функции на комплексное число.

При $x \to \pm\infty$ функция $\varphi \in S$ и каждая из ее производных убывает быстрее любой степени функции $\frac{1}{|x|}$. Такую функцию называют *быстро убывающей.*

Заметим, что $C_0^\infty \subset S$, однако S не совпадает с C_0^∞. Так, функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$ принадлежит S, но не C_0^∞.

Введем в S понятие сходимости.

Определение 2. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ функций $\varphi_k \in S$ называется сходящейся к функции $\varphi \in S$, если

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{n,m} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \text{для} \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

В других терминах сходимость (2) означает, что для любых $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$x^n \varphi_k^{(m)}(x) \rightrightarrows x^n \varphi^{(m)}(x) \quad \text{на} \quad (-\infty, +\infty) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Определение 3. Линейное пространство S с введенной сходимостью (2) называется *пространством S основных функций.*

Определение 4. Линейный непрерывный функционал над S называется обобщенной функцией *медленного роста.*

Пример 1. Пусть функция f локально абсолютно интегрируема и при некоторых $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x)| \leqslant A(1 + |x|^n), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Тогда

$$(f, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in S$$

является обобщенной функцией медленного роста.

Определение 5. *Пространством S' обобщенных функций* (медленного роста) называется множество (линейное пространство) всех обобщенных функций медленного роста с введенными в нем операциями сложения, умножения на комплексные числа и сходимостью по следующим правилам:

1° $(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$, $f, g \in S'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\varphi \in S$,

2° последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, $f_k \in S'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, называется сходящейся в S' к $f \in S'$ при $k \to \infty$, если

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in S.$$

В пространстве S' определена операция дифференцирования равенством

$$(f', \varphi) := -(f, \varphi') \quad \forall\, \varphi \in S.$$

Эта операция является непрерывной в S' в том смысле, что (при $k \to \infty$) $\varphi_k \to \varphi$ в $S' \Rightarrow \varphi'_k \to \varphi'$ в S.

Отсюда следует, что при $f_k,\ f \in S'$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{S'}{=} f \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \overset{S'}{=} f'.$$

В пространстве S' определена операция умножения на многочлен $p(x)$ формулой

$$(pf, \varphi) := (f, p\varphi) \quad \forall\, \varphi \in S, \quad \forall\, f \in S'.$$

Преобразование Фурье $F[\varphi]$ и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[\varphi]$ для $\varphi \in S$ записывается в виде

$$F[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy,$$

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ixy} dy.$$

Упражнение 1. Установить следующие свойства преобразования Фурье:

1° $\varphi \in S \Rightarrow F[\varphi],\ F^{-1}[\varphi] \in S$;

2° преобразование Фурье взаимно однозначно отображает S на S;

3° операции преобразования Фурье $F[\varphi]$ (и обратного преобразования Фурье $F^{-1}[\varphi]$) непрерывны в S в том смысле, что при $k \to \infty$

$$\varphi_k \to \varphi \Rightarrow F[\varphi_k] \overset{S}{=} F[\varphi] \quad (F^{-1}[\varphi_k] \overset{S}{=} F^{-1}[\varphi]).$$

Равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iyx} dx \right) f(y)\, dy$$

для функций $\varphi \in S$, f — абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ делает естественным

Определение 6. Преобразованием (обратным преобразованием) Фурье обобщенной функции $f \in S'$ называется обобщенная функция $F[f]$ $(F^{-1}[f])$, определенная равенством

$$(F[f], \varphi) := (f, F[\varphi]) \quad ((F^{-1}[f], \varphi) := (f, F^{-1}[\varphi])) \quad \forall\, \varphi \in S.$$

Упражнение 2. Установить следующие свойства преобразования Фурье обобщенных функций:

1° $f \in S' \Rightarrow F[f] \in S'$, $F^{-1}[f] \in S$;

2° $S' \overset{F}{\leftrightarrow} S'$;

3° непрерывность — при $k \to \infty$

$$f_k \to f \text{ в } S' \Rightarrow F[f_k] \to F[f] \text{ в } S',\ F^{-1}[f_k] \to F^{-1}[f] \text{ в } S';$$

4° $F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f] \quad \forall\, f \in S'$;

5° $(F[f])^{(n)} = F[(-ix)^n f] \quad \forall\, f \in S'$.

Предметный указатель