Опр. Пусть $f(x)$ - определена в $U(x_0)$.

Тогда производной функции в x_0 называется:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Замечание: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to x_0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где

$\Delta x = x - x_0$

Пример: Док-ть: $(\sin x)' = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Док-во: Обозначим $f(x) = \sin x$, возьмём

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{2 \cdot \frac{x - x_0}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0 \quad \text{ЧТД}$$

т.к. lim можно вносить

под непрерывную функцию.

$\cos \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x+x_0}{2}$

Th. (Об арифм. операциях)

Пусть $\exists f'(x_0)\in\mathbb{R}$; $\exists g'(x_0)\in\mathbb{R}$. Тогда:

1) $\exists \underbrace{(f\pm g)'(x_0)}_{h'(x_0)} = f'(x_0)\pm g'(x_0)$

2) $\exists (fg)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + g'(x_0)\cdot f(x_0)$

3) Если $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Док-во: Докажем (3).

Обозначим $\Delta x = x-x_0$; $\Delta f = f(x)-f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{f(x)\cdot g(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \frac{(\cancel{f(x_0)}+\Delta f)g(x_0) - f(x_0)\cdot(\cancel{g(x_0)}+\Delta g)}{\Delta x\cdot g(x_0)\, g(x_0+\Delta x)} =$$

$$= \frac{\Delta f}{\ }\cdot g(x_0) - f(x_0)\frac{\Delta g}{\ }$$

$$\frac{\Delta x \quad \ldots \quad \Delta x}{g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

ЧТД

Пусть $f(x) = \text{sign}(x)$, $f'(0)$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-1}{x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \exists\, f'(0) = +\infty$$