Опр. $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

до 3-го знака

Th. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} =$

$e = 2,718$

```
while(|an-2,718|)>0,001:
    an=(1+1/n)^n
print(an)
```

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$a_n = (-1)^n$

$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 = b_k$ $\quad a_2\ a_4\ a_6$ - подпосл-ть

~~$a_1\ a_4\ a_6\ a_6$ — неподп.~~

$\cancel{a_1}$.

Опр. Посл-ть $\{b_k\}$ называется **подпоследовательностью** посл-ти $\{a_n\}$, если $\exists$ строго возрастающая посл-ть натуральных чисел $\{n_k\}$, $n_k = 2k$: $\forall k \in \mathbb{N} \to$ $b_k = a_{n_k}$

$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$

Опр. 1 Если посл-ть $\{b_k\}$ является подпосл-ю посл-ти $\{a_n\}$ и $\exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$

=> A – частичный предел посл-ти $\{a_n\}$

можно записать $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
a_n	2	$\sqrt{3}$	-47	55	69	$\sqrt{2}$	1	3	11	15...

$n_k = \{1, 4, 5, 6, 7, 10 \dots\}$

$a_{n_k} = \{2, 55, 69, \sqrt{2}, 1, 15 \dots\}$

$n_k = \{1, 1, 4, 5, 6, 10 \dots\}$

a_{n_k} – не подп.

Опр. Верхний предел посл-ти a_n – наибольший из частичных пределов $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

нижн → $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ – нижний предел

• ТВГ

← $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$

$a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$ $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$

Всего з ЧП.

Опр. 2 Частичным пределом пос-ти называется $a \in \overline{\mathbb{R}}$: в $\forall\, U_\varepsilon(a)$ лежит бесконечно много членов пос-ти

Док-во: Докажем $(1) \overset{опр}{\Longleftrightarrow} (2)$

I $(1) \Rightarrow (2)$

(1) Если a - частичный предел $\{a_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, где $b_k = a_{n_k}$ (n_k - строго возр.)

$\Rightarrow$ в $\forall$ окр-ти a лежит бесконечно много членов пос-ти (все с номера $N(\varepsilon)$)

II $(2) \Rightarrow 1$

В $\forall\, U_\varepsilon(a)$ ∞ много членов $\Rightarrow$

$\Rightarrow U_1(a)$ ∞ членов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в качестве a_{n_1} берём число:

$a_{n_1} \in U_1(a)$

аналогично, в $U_{\frac{1}{2}}(a)$ ∞ много членов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ возьмём $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(a) : n_2 > n_1$

$\vdots$

в $U_{1/k}(a)$ ∞ членов

$\Rightarrow$ берём $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\varepsilon)$:

$\vdots$

Получили $\{a_{n_k}\}$: $\forall l \in \mathbb{N} \rightarrow a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{l \to \infty} a_{n_k} = a \rightarrow$ по Th о двух милиц. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a – предел подпосл-ти a_{n_k} ЧТД