Пусть $f(x)$ определена на некотором мн-ве X, а ф-ия $g(t)$ на мн-ве T, причём $g(T) \subset X$. Тогда сложная функция $f \circ g$ определяется на T формулой: $(f \circ g)(t) = f(g(t)), t \in T$

(непрерывность сложной функции)

Пусть f непрерывна в т. X_0, пусть g непрерывна в t_0; $g(t_0) = X_0$. Тогда $f \circ g$ — непрерывна в t_0.

Док-во:

f — непрерывна в $X_0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon): \forall x \in U_\delta(X_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(X_0))$

g — непрерывна в $t_0 \Longleftrightarrow$

$\forall \delta > 0 \; \exists \zeta(\delta) > 0: \forall t \in U_\zeta(t_0) \hookrightarrow g(t) \in U_\delta(X_0)$ $\quad \rightarrow$ по усл.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \zeta(\varepsilon) > 0: \forall t \in U_\zeta(t_0) \hookrightarrow f(g(t)) \in U_\varepsilon(f(X_0))$

$$\Rightarrow f(g(t)) - \text{непрерывна в } t_0$$

Th2 (о занесении предела под знак непрерывной функции)

Пусть f — непрерывна в т. x_0, g — определена на $\overset{\circ}{U}_{t_0}$; $\exists \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$

Тогда $\exists \lim\limits_{t \to t_0} (f \circ g)(t) = f \cdot \left(\lim\limits_{t \to t_0} g(t) \right) = f(x_0)$

$$f(g(t))$$

Док-во аналогично предыдущему

Th3 Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, пусть g — определена на $\overset{\circ}{U}(t_0)$; $x_0 \notin g(\overset{\circ}{U}(t_0))$, $\exists \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$

Тогда $\exists \lim\limits_{t \to t_0} (f \circ g)(t) = y_0$

$$f(g(t))$$