Семинар 2. Последовательности. Ограниченность и монотонность.

Скубачевский Антон Александрович

5 сентября 2021 г.

Определение. Пусть X - произвольное множество и пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a \in X$. Тогда говорят, что задана последовательность $a_1, a_2, a_3, ...,$, которая обозначается также символами $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

В ближайшее время в качестве множества мы будем рассматривать лишь множество действительных чисел.

Определение. Числовое множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M$. Такое число M называется верхней гранью множества X.

Ограниченность снизу вводится аналогично.

Определение. Числовое множество называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Верхних и нижних граней у множества может быть сколько угодно. Например, верхней гранью отрезка $[0, 1]$ являются числа 1,2,$\sqrt{2}$,47, да и вообще любое число$\in [1; +\infty)$. Поэтому, чтобы можно было точнее охарактеризовать множество, вводят понятие точной верхней и точной нижней грани:

Определение. Точной верхней гранью числового множества называется наименьшая из верхних граней. Точной нижней гранью-наибольшая из нижних граней.

Точная верхняя грань множества X обозначается: $supX$, точная нижняя: $infX$.

Эквивалентное определение:

Определение. Точной верхней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число M, удовлетворяющее условиям:

1. $x \leqslant M \forall x \in X$; (то есть оно является верхней гранью)

2. $\forall b < M \exists x \in X : x > b$ или $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon$ (то есть для любого числа $b < M$ найдется элемент множества, больший, чем b, то есть любое $b < M$ не является верхней гранью, а значит, M-как раз наименьшая из верхних граней)

Знак $\forall$ - значит для любого, а $\exists$ - существует. Эти знаки называются кванторами.

То есть для того, чтобы быть точной верхней гранью, М должен ограничивать множеству сверху, и кроме того быть "максимально прижатым"к множеству X, то есть сколь бы немного вниз мы не отступили от М на малое ε, в этом зазоре от $M - \varepsilon$ до M найдется элемент из нашего множества.

Точная верхняя и нижняя грани отрезка [a,b] и интервала (a,b) совпадают. Точная верхняя b, точная нижняя a. То есть точная верхняя грань может как принадлежать, так и не принадлежать множеству.

Покажем, что 1 - точная верхняя грань интервала (0,1).

1-верхняя грань. Осталось показать, что она наименьшая из верхних граней. Предположим противное, т.е. что существует некое число $b < 1$, являющееся верхней гранью $(0, 1)$. Есть такое утверждение: между любыми двумя действительными числами найдется рациональное. Следовательно, между b и 1 найдется некое число $x \in (b, 1)$, принадлежащее $(0, 1)$. Значит, b не является верхней гранью $(0, 1)$, т.к. оно не больше всех его элементов. Значит, не существует числа $b < 1$, являющегося верхней гранью $(0, 1)$. Значит, 1 - наименьшая из верхних граней, то есть точная верхняя грань, ч.т.д.

Докажем теперь, что между любыми двумя действительными числами существует рациональное:

Доказательство вспомогательного факта: $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : x < a < y$

Возьмем 2 числа:$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. $y > x$. Тогда возьмем

$$z = y - x > 0$$

Посмотрим на число $1/z$. По лемме Архимеда для любого действительного числа существует натуральное, большее его:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 1/z$$

Отсюда:

$$nz > 1$$

$$n(y-x) > 1$$

$$ny > 1 + nx$$

Но это означает, что между числами nx и ny зазор больше, чем 1, значит, между ними можно впихнуть некое целое число m:

$$\exists m : nx < m < ny$$

Разделим обе части на n:

$$x < \frac{m}{n} < y$$

$\frac{m}{n}$−искомое рациональное число, ч.т.д.

Советую запомнить этот факт, а еще лучше - с доказательством.

Конец доказательства вспомогательного факта

Для пущего понимания определения точной верхней грани приведем следующий пример. Рассмотрим аквариум с рыбками (рис. 2). На рыбок пофиг, нас интересует вода, вода-наше множество X. Воду сверху ограничивает много что: потолок комнаты, в которой стоит аквариум, крышка аквариума и линия, являющаяся кромкой воды. Это все верхние грани воды. Но из них лишь кромка воды является точной верхней гранью, поскольку в любой ее "нижней полуокрестности"есть элемент нашего множества, то есть водичка. Потолок же не является точной верхней гранью воды, поскольку между ним и водой зазор метра полтора, в которых может быть все, что угодно, от пылинки до кошки, летящей в произвольном направлении. То есть потолок - верхняя грань, но не точная верхняя грань. Летящая над аквариумом кошка-тоже.

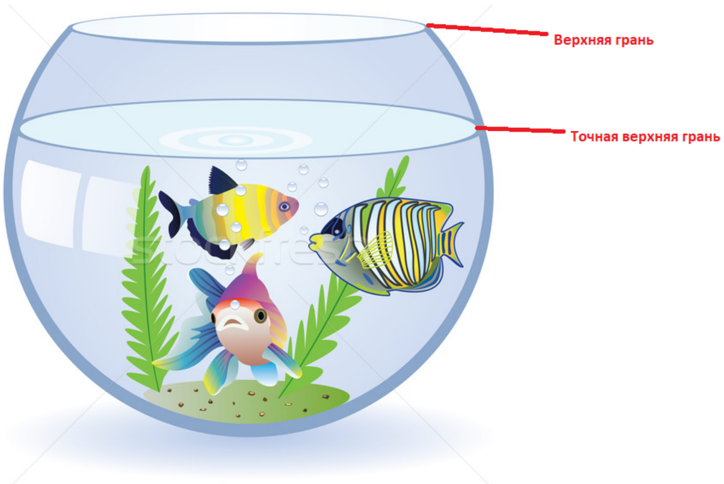

Рис. 1: Точная верхняя грань множества

Замечание В некоторых источниках точную верхнюю грань, введенную выше, называют верхней гранью, а верхнюю грань, введенную у нас, вообще никак не называют (просто числом, ограничивающим сверху). Например, Олег Владимирович Бесов так делает. Так тоже правильно, главное, не запутайтесь в определениях =)

Теорема У любого непустого множества существует и единственна точная верхняя грань.

Определение Последовательность называется ограниченной сверху(снизу), если множество ее элементов ограничено сверху(снизу).

Определение Последовательность называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу. Запишем это дело в кванторах:

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leqslant M.$$

Модуль нужен, чтобы учесть, что ограничена и сверху, и снизу. Если сверху ограничена M_1, а снизу M_2, то $M = max\{|M_1|, |M_2|\}$.

Начнем учиться писать отрицание утверждений, данных в кванторах: чтобы написать отрицание, нужно просто поменять все кванторы $\forall$ на $\exists$ и $\exists$ на $\forall$, а также знаки в неравенствах на противоположные.

Таким образом, последовательность a_n называется неограниченной, если:

$$\forall M \exists n(M) \in \mathbb{N} : |a_n| > M$$

То есть если она неограничена хотя бы сверху или хотя бы снизу.

Определение Точная верхняя(точная нижняя) грань последовательности - точная верхняя (точная нижняя) грань множества ее элементов.

Пример 1. Доказать, что последовательность ограничена: $\{\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\}$

Доказательство:

Будем доказывать, что модуль ограничен, чтобы не доказывать отдельно ограниченность сверху и снизу.

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| :$$

$$|\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} \leqslant 1+1 \leqslant 2$$

Что и требовалось доказать. Модули сняли после первого перехода (в котором, кстати, воспользовались неравенством треугольника), т.к. эти величины и без модуля неотрицательны.

Замечание: Проще было так:

$$|a_n| = \left|\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right| < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} < 1.$$

Но так не использовалось неравенство треугольника, а хотелось его показать.

Пример 2. Доказать неограниченность последовательности: $\{a_n\} = \{n^2 - n\}$

Доказательство:

На этот раз воспользуемся неравенством

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|$$

$$|n^2 - n| \geqslant n^2 - n \geqslant n^2/2 \text{ при } n \geqslant 2. \tag{1}$$

Получили, что каждый член, начиная со второго, больше члена последовательности, которая неограничена, значит и наша последовательность неограничена. Запишем это четко:

$$\forall M \exists n_0 = \lceil \sqrt{2M} \rceil : |a_{n_0}| \geqslant n_0^2/2 \geqslant M \tag{2}$$

Получили отрицание условия ограниченности, что и требовалось доказать. Если надо доказать некоторое утверждение в кванторах, то если мы предъявим в явном виде все числа, у которых стоит значок $\exists$, утверждение будет доказано. Взяли мы $\sqrt{2M}$ из условия $n_0^2/2 = M$

Скобки $\lceil\sqrt{2M}\rceil$ означают ближайшее целое число, $\geqslant \sqrt{2M}$. Сделали мы это, так как номер должен быть натуральным числом, а корень- далеко не всегда натуральное число.

Особо внимательных гигантов мысли смутит, что $a_n >= M$, а не строго $>$, ведь в отрицании $>$ стоит. Но это не проблема, можно даже на это забить. Но если не забивать, можно немного подправить запись нашего утверждения, а именно выбор n_0:

$$\forall M \exists n_0 = \lceil\sqrt{2M}\rceil + 1 : |a_{n_0}| \geqslant n_0^2/2 > M$$

В целом всего двух строчек: утверждений (1) и (2) достаточно для полного решения задачи, так что не стоит пугаться.

Второй способ: Поскольку для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $n^2 - n \geqslant 0$, то $|n^2 - n| = n^2 - n$. Далее, нетрудно установить, что при всех $n \geqslant 2$ верно $n^2 - n \geqslant n$. Таким образом, $|a_n| \geqslant n$ при всех $n \geqslant 2$.

Поэтому

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 = \lceil M\rceil + 2 :\ |a_{n_0}| \geqslant n_0 \geqslant M.$$

Пример 3. Доказать, что последовательность $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, n \in \mathbb{N}$ ограничена, найти ее sup и inf.

Доказательство:

В данном случае имеем дело с довольно необычной последовательностью, также называемой последовательностью частичных сумм ряда.

Ее члены:

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

$$...$$

То есть $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$
Чтобы доказать ограниченность, заметим, что

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Распишем теперь x_n:

$$x_n = (1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+...+(1/(n-1)-1/n)+(1/n-1/(n+1)) = 1-1/(n+1)$$

Почти все красиво сократилось. Осталось заметить, что

$$x_n = 1 - 1/(n+1) \leqslant 1;$$

$$x_n \geqslant 1/2$$

Таким образом, последовательность ограничена, ч.т.д.

Последовательность $x_n = 1 - 1/(n+1)$ возрастает, следовательно, $inf\{x_n\}$ = ее первому члену = $\frac{1}{2}$. Найдем теперь ее точную верхнюю грань. Покажем, что $sup\{x_n\} = 1$. 1 - очевидно, верхняя грань, т.к. $x_n \leqslant 1$. Покажем, что она наименьшая из верхних граней, т.е. что любое число, меньшее ее, не является верхней гранью. Чтобы это сделать, надо для любого числа, меньшего, чем 1, подобрать член последовательности, больший этого числа:

$$\forall M < 1 \exists n \in \mathbb{N} : x_n > M$$

$$x_n > M \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} > M \Leftrightarrow n > \frac{M}{1-M}$$

Значит, начиная с номера $\lceil \frac{M}{1-M} \rceil + 1$ все члены последовательности больше произвольного числа $M < 1$ (эти квадратные скобочки значат округлить вверх до ближайшего целого: ведь номер члена последовательности может быть только целым). Значит M - не верхняя грань. Значит 1 - точная верхняя грань: $sup\{x_n\} = 1$.

Определение. Монотонность Последовательность a_n называется монотонно возрастающей, если $\forall n\ a_{n+1} \geqslant a_n$. Аналогично вводится определение монотонно убывающей последовательности. Последовательность называется монотонной, если она либо монотонно возрастающая, либо монотонно убывающая. Последовательность называется строго монотонной, если знак $\geqslant$ изменить на $>$.

Пример 4. Доказать, что последовательность $a_n = (-1)^n$ не монотонна.

Для этого надо найти 3 соседних члена: $a_n > a_{n-1}$; $a_n > a_{n+1}$ или $a_n < a_{n-1}$; $a_n < a_{n+1}$.

Такими членами являются: $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$. Значит, последовательность не монотонна, ч.т.д.

Пример 5. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n^2+4}{n+1}$ возрастает начиная с некоторого номера.

Последовательность возрастает, если $x_{n+1} \geqslant x_n$

$$\frac{(n+1)^2+4}{(n+1)+1} \geqslant \frac{n^2+4}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n^2+2n+5}{n+2} \geqslant \frac{n^2+4}{n+1}$$

Приведя к общему знаменателю, получаем:

$$n^2 + 3n - 3 \geqslant 0$$

Учитывая, что нам подходят только $n > 0$, решение этого неравенства будет:

$$n \geqslant \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$$

Таким образом, получили, что последовательность возрастает, начиная с номера $\lceil \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \rceil$, ч.т.д.

Пример 6. Доказать, что последовательность $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ монотонна, начиная с некоторого номера.

Доказательство:

Домножим и разделим a_n на сопряженные:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}$$

Последовательность в знаменателе убывающая, значит, a_n возрастающая, ч.т.д.

Часто также для доказательства монотонности показывают, что $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1$, начиная с некоторого n, или что разность элементов >0, начиная с некоторого n, так делать даже более четко, чем то, как я решил предыдущий пример.

Пример 7. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n}{2^n}$ убывает.

Рассмотрим отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Если оно $\leqslant 1 \forall n$, то последовательность убывающая.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leqslant 1 \forall n$$

Пример 8. Доказать, что последовательность $\{a_n\} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ монотонна.

Покажем, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Для этого домножим 2 раза на сопряженные числитель и знаменатель:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} > 1$$