Семинар 4. Предел последовательности(Продолжение).

Скубачевский Антон

3 сентября 2021 г.

Определение. Подпоследовательность. Пусть n_k - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

То есть выкинем часть членов нашей последовательности, так чтобы осталось все равно бесконечное число. Эти оставшиеся члены и образуют подпоследовательность. Ну и, разумеется, ее члены нужно перенумеровать, потому что, например, если мы выкинем третий член последовательности, то четвертый член последовательности будет у подпоследовательности уже третьим. Определение такое мудреное для четкости определения. Поясню, почему оно такое, и что в нем откуда берется.

Пусть наша последовательность a_n (первые 10 ее членов):

an	42	52	67	84	92	30	64	23	46	20
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Выкинем теперь 2,3,4,7 и 9 члены. Оставшиеся 1, 5, 6, 8 и 10 члены формируют первые 5 членов новой последовательности $\{a_{n_k}\}$, являющейся подпоследовательностью последовательности a_n. Получаем: $a_{n_1} = 42$, $a_{n_2} = 92$, $a_{n_3} = 30$, $a_{n_4} = 23$, $a_{n_5} = 20$. Здесь $n_1 = 1$; $n_2 = 5$; $n_3 = 6$; $n_4 = 8$; $n_5 = 10$. Разумеется, это не вся подпоследовательность, а лишь ее первые члены (у любой последовательности бесконечное число членов, не забываем). Заметим, кстати, что 1, 5, 6, 8, 10, очевидно, являются куском строго возрастающей последовательности натуральных чисел.

Подпоследовательность сама по себе, разумеется, тоже является последовательностью. Также не забывайте, что у всех последовательностей бесконечное число членов. Последовательности с конечным числом членов по самому определению последовательности не бывает.

Определение. Частичный предел. Частичным пределом последовательности называется предел любой ее подпоследовательности.

Определение. Частичный предел(эквивалентное). Частичным пределом последовательности называется число, любая окрестность которого содержит бесконечное число элементов последовательности.

Также есть эквивалентное определение обычного предела:

Определение. Предел последовательности(эквивалентное). Пределом последовательности называется число, ВНЕ любой ε - окрестности которого лежит лишь конечное число членов (разумеется, конечное, ведь ВНУТРИ ε-окрестности лежать должен весь бесконечный хвост последовательности, начиная с некоторого определенного конечного номера)

Заметим, что последовательность $(-1)^n$ имеет 2 частичных предела: 1 и -1.

Могут быть такие хитрые последовательности, у которых множество частичных пределов - множество натуральных чисел, например, последовательность:

$$1; 1; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 4; 1; 2; 3; 4; 5; ...$$

Каждое из натуральных чисел встречается бесконечное число раз, значит, в любой окрестности такого числа бесконечное число членов этой последовательности, значит, оно-частичный предел по определению.

Может быть еще интереснее пример.

Пример 1. Найти множество частичных пределов последовательности $r_1; r_1; r_2; r_1; r_2; r_3; r_1; r_2; r_3; r_4; ...$, где r_i - i-е по номеру рациональное число (напомню, что все рациональные числа мы может занумеровать натуральными.)

Очевидно, что любое рациональное число является ее частичным пределом (аналогично предыдущему примеру).

Оказывается, что вообще все действительные числа могут быть ее частичными пределами. Чтобы это доказать, докажем для начала следующий факт: между 2 действительными числами всегда можно впихнуть рациональное.

Теперь давайте покажем, что множество частичных пределов нашей последовательности - множество всех действительных чисел. Для этого для произвольного действительного числа построим подпоследовательность нашей последовательности, сходящуюся к нему (иначе говоря, достаточно построить последовательность рациональных чисел, сходящуюся к произвольному действительному. Числа в ней могут быть равны.).

Возьмем действительное число r. Возьмем его $\varepsilon = 1$-окрестность. Между r и $r-1$ можно по только что доказанной теореме впихнуть рациональное число. Это число будет первым членом искомой подпоследовательности. Возьмем $\varepsilon = 1/2$. Между $r-1/2$ и r впихнем рациональное число, это второй член, и так до бесконечности. Очевидно, по теореме о 2 ментах, что построенная таким образом последовательность сходится к r, где r-произвольное действительное число. Ч.т.д.

Теорема. Если последовательность сходится к некоторому числу a, то она имеет единственный частичный предел, тоже равный a.

Доказательство:

Если последовательность сходится, то "почти все"ее члены кроме конечного числа лежат в любой ε-окрестности числа а. Значит, если мы выкинем из них, к примеру, половину (то есть выделим подпоследовательность), то "почти все"члены полученной подпоследовательности кроме конечного числа будут лежать в этой же ε-трубке. Значит, а-предел этой подпоследовательности по определению, то есть частичный предел исходной последовательности, и других пределов быть не может. Ч.т.д.

Эта теорема дает нам очень удобный инструмент для доказательства того, что предела у последовательности не существует: если у последовательности есть 2 подпоследовательности, имеющие разные пределы, то предела у нашей последовательности нет. Например, последовательность $(-1)^n$ имеет 2 подпоследовательности: $x_{n_k} = 1$ при четных n и $x_{n_k} = -1$ при нечетных. Предел одной равен 1, а второй -1, они неравны, следовательно, у нашей последовательности предела нет, т.к. из нее можно выделить 2 подпоследовательности, имеющие разные пределы.

Пример 2. Доказать, что последовательность $x_n = n^2 sin\frac{\pi n}{4}$ расходится.

Доказательство:

1 способ (более простой). Выделим 2 подпоследовательности с номерами $n_k = 8k+2$ и $n'_k = 8k+4$. Тогда:

$$x_{n_k} = (8k+2)^2 sin(2\pi k + \pi/2) = (8k+2)^2$$

$$x_{n'_k} = 0$$

Предел x_{n_k} равен бесконечности, а предел последовательности $x_{n'_k}$ равен нулю. Т.о., у последовательности x_n 2 частичных предела, которые не равны, следовательно, у нее нет предела, т.е. она расходится, ч.т.д.

2 способ (по определению).

нужно доказать, что $\forall a > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : |x_n - a| \geqslant \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Докажем сначала для $a > 1$, а потом для $a \leqslant 1$.

При $a < 1$: $\exists \varepsilon = 1 : \forall N \in \mathbb{N} \exists k, n_k : n_k = 8k + 2 \geqslant N : |x_{n_k} - a| = |(8k+2)^2 - a| \geqslant 1$

При $a \geqslant 1$: $\exists \varepsilon = 1 : \forall N \in \mathbb{N} \exists k, n_k : n_k = 8k + 4 \geqslant N : |x_{n_k} - a| = |a| \geqslant 1$

Т.о., никакое число не может быть пределом, ч.т.д.

Утверждение. Пусть у последовательности x_n есть две подпоследовательности y_{n_k} и z_{n_k}, причем любой член последовательности x_n принадлежит одной из них. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} z_{n_k} = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{k_\varepsilon}^{(1)} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_{k_\varepsilon}^{(1)} \Rightarrow |a - y_{n_k}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{k_\varepsilon}^{(2)} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_{k_\varepsilon}^{(2)} \Rightarrow |a - z_{n_k}| < \varepsilon$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon = max\{n_{k_\varepsilon}^{(1)}, n_{k_\varepsilon}^{(2)}\} : \forall n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |a - x_n| < \varepsilon$$

Последнее утверждение справедливо, т.к. $|a - x_n| < \varepsilon$ и если $x_n = y_{n_k}$, и если $x_n = z_{n_k}$, т.к. $n_\varepsilon = max\{n_\varepsilon^{(1)}, n_\varepsilon^{(2)}\}$. Ч.т.д.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$

Доказательство:

Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \frac{a_n}{a}$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Если мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = 1$, то докажем то, что требовалось.

Рассмотрим две подпоследовательности x_n: y_{n_k} и z_{n_k}.

$$1 \leftarrow 1 \leqslant \sqrt[3]{y_{n_k}} \leqslant y_{n_k} \to 1$$

$$1 \leftarrow z_{n_k} \leqslant \sqrt[3]{z_{n_k}} \leqslant 1 \to 1$$

Видим, что по теореме о двух милиционерах $\sqrt[3]{y_{n_k}}$ и $\sqrt[3]{z_{n_k}}$ имеют одинаковые пределы, равные 1, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = 1$, откуда следует то, что требовалось доказать.

Мы забыли рассмотреть отдельно случай $a = 0$. Докажем, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

Возьмем кубический корень из обеих частей неравенства, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \sqrt[3]{|a_n|} < \sqrt[3]{\varepsilon}$$

Это и есть определение $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = 0$, т.к. ε любое, ч.т.д.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пример 4. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и имеет один частичный предел, то она сходится.

Доказательство:

Пусть этот единственный частичный предел равен a. Докажем, что последовательность сходится к a. Предположим противное. Тогда вне некоторой $\varepsilon-$окрестности a бесконечное число членов. Из любого счетного бесконечного количества чисел можно склепать подпоследовательность. Поэтому обзовем это бесконечное число членов x_n, лежащее вне $U_\varepsilon(a)$ подпоследовательностью x_n, называемой x_{n_k}. Т.к. x_n по условию ограничена, то и подпоследовательность x_{n_k} ограничена, тогда выделим по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_{k_l}}\}$ Пусть она сходится к некоторому числу b. x_{n_k} лежит вне $U_\varepsilon(a)$, а значит, a не может быть ее пределом и пределом ее подпоследовательностей, то есть вот это вот найденное $b \neq a$. Мы получили, что у x_n два частичных предела: один из условия (a), а второй найден по построению: b. И они не равны. Но по условию частичный предел единственный. Противоречие. Значит, наше предположение неверно, значит, последовательность сходится к a, ч.т.д.

Последнее, что следует обсудить в теории пределов последовательности это необходимое и достаточное условие существование предела последовательности, известное как критерий Коши. Но для начала введем следующее определение:

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Также порой используют эквивалентное определение (сами подумайте, почему они эквивалентны):

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$$

Иначе говоря, если расстояние между любыми элементами в хвосте последовательности стремится к нулю.

Сразу запишем отрицание этого определения: последовательность не является фундаментальной, если:

$$\exists \varepsilon : \forall N \exists n, m \geqslant N : |a_n - a_m| =\geqslant \varepsilon$$

Теорема(Критерий Коши). Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Пример 5. Доказать, что $\frac{1}{n}$ сходится.

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{min\{n, m\}} < \varepsilon$$

$$min\{n, m\} > \frac{2}{\varepsilon}$$

Значит, выполняется условие фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon = \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil + 1 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Значит, последовательность сходится по Критерию Коши, ч.т.д.

С помощью Критерия Коши обычно доказывают расходимость последовательностей, сходимость с помощью него никто не доказывает.

Пример 6. Доказать, что $(-1)^n$ расходится.

Заметим, что если взять разность 2 соседних членов этой последовательности (N-го и N+1-го), то получится:

$$|a_N - a_{N+1}| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N + (-1)^N| = 2$$

Значит, данная последовательность не является фундаментальной:

$$\exists\varepsilon = 2 : \forall N \exists n = N, m = N+1 : |a_n - a_m| = 2 \geqslant 2$$

Значит, она расходится по критерию Коши, ч.т.д.

Пример 7. Доказать, что $(-1)^n(1+\frac{1}{n})^n$ расходится.

Аналогично будем рассматривать расстояние между 2 соседними элементами (N и N+1). Также сразу заметим, что по неравенству Бернулли $(1+\frac{1}{n})^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$.

$$|a_N - a_{N+1}| = |(-1)^N(1+\frac{1}{N})^N - (-1)^{N+1}(1+\frac{1}{N+1})^{N+1}| =$$

$$= |(-1)^N(1+\frac{1}{N})^N + (-1)^N(1+\frac{1}{N+1})^{N+1}| = |(1+\frac{1}{N})^N + (1+\frac{1}{N+1})^{N+1}| \geqslant 2+2 = 4$$

В последнем переходе мы как раз применили неравенство Бернулли.

Значит,

$$\exists\varepsilon = 4 : \forall N \exists n = N, m = N+1 : |a_n - a_m| \geqslant 4$$

Значит, последовательность не фундаментальна, значит, она расходится по Критерию Коши.

Пример 8. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$:$\forall p \in \mathbb{N}\ \underset{n\to\infty}{lim}|x_{n+p} - x_n| = 0$

Решение:

Казалось бы, этот пример идет в разрез с критерием Коши, по второму(эквивалентному определению) эта последовательность с первого взгляда фундаментальна. Но это не так: в этом примере хоть p и любое, но оно фиксировано и конечно, а в определении фундаментальности-нет.

Пример такой последовательности: $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Это так называемые частичные суммы гармонического ряда, который расходится (т.е. x_n расходится). Но при этом $\forall p \in \mathbb{N}\ \underset{n\to\infty}{lim}|x_{n+p} - x_n| = \underset{n\to\infty}{lim} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leqslant \underset{n\to\infty}{lim} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{n+1} = \underset{n\to\infty}{lim} \frac{p}{n+1} = 0$, т.к. p конечно.

Докажем заодно расходимость гармонического ряда.

Доказательство:

Докажем по критерию Коши. Для этого докажем, что $\{x_n\}$ не фундаментальна (и, следовательно, расходится). Т.е. что $\exists\varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \exists n > k, p \in \mathbb{N} : |a_{n+p} - a_n| \geqslant \varepsilon$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geqslant \frac{p}{n+p}$$

Возьмем $p = N$, $n = N$. Тогда $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists \ p = N, \ n = N :$ $|a_n - a_p| = |a_{2N} - a_N| \geqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, данная последовательность не является фундаментальной и по критерию Коши расходится, ч.т.д.