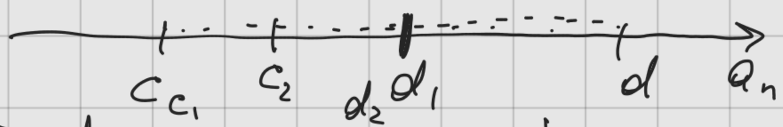
Th. Пусть $\{a_n\}$ - ограничена. Тогда у неё $\exists$ конечный частичный предел (то есть из любой ограниченной посл-ти можно выделить сходящуюся подпосл-ть.) (всё в $\mathbb{R}$)

Док-во (т.е. нам нужно найти число, в $\forall$ окр-ти которого ∞ элементов посл-ти)



Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \in [c, d]$, (т.е. a_n - огр.)

- Разобьём $[c, d]$ пополам. За $[c_1, d_1]$ обозначим половину, в которой ∞ элементов.
- Разобьём $[c_1, d_1]$ пополам. За $[c_2, d_2]$ - в которой ∞ эл.

⋮

- $[c_k, d_k]$ - в нём ∞ элементов

Получили систему вложенных отрезков. В каждом $[c_k, d_k]$ ∞ эл-в посл-ти в каждом $[c_k, d_k]$ ∞ эл-в посл-ти

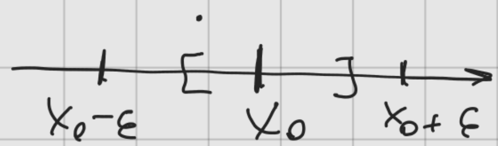
Данная система вложенных отрезков стягивающаяся, т.к. $d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\ x_0$, принадлежащая всем отрезкам

Покажем, что x_0 – частичный предел посл-ти $\{a_n\}$, то есть, что в $\forall\, U_\varepsilon(x_0)$ лежит ∞ эл-в посл-ти

$d_k - c_k \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \overset{\text{мал}}{\exists K}: d_K - c_K < \varepsilon \Rightarrow$

$\exists k: k \geq K$



$\Rightarrow [c_K, d_K] \subset U_\varepsilon(x_0)$

т.к. $x_0 \in [c_K, d_K]$

Т.о. $\forall \varepsilon > 0\ \exists K: [c_K, d_K] \subset U_\varepsilon(x_0)$

$\Rightarrow$ т.к. в $[c_K, d_K]$ ∞ эл-в $\Rightarrow$ в $\forall\, U_\varepsilon(x_0)$ ∞ эл-в $\Rightarrow$ ЧТД $\Rightarrow x_0$ – ч.п. (по определению)

Th (обобщённая Б-В) $\forall$ посл-ть имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ частичный предел

Док-во:

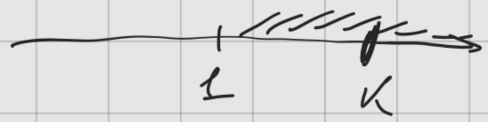
· Случай, если $\{a_n\}$ — огр. доказан

• Рассмотрим случай, когда $\{a_n\}$ — неогр. сверху, т.е $\forall M>0 \ \exists n_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N} : a_n > M$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N} : a_n > \varepsilon$

Построим $\{a_{n_k}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$

для $\varepsilon = 1 \ \exists n_1 : a_{n_1} > 1$



$\vdots$

для $\varepsilon = k \ \exists n_k^{?} \ (n_{k-1} > n_1) : a_{n_k} > k$

Т.о, мы построили $\{a_{n_k}\}$: в $\forall U_\varepsilon(+\infty)$ ∞ эл-в

$\{a_{n_k}\} \Rightarrow$ по опр. $\rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$