Оглавление

1. Действительные числа

1.1. Верхние и нижние грани числовых множеств

Определение 1.1. *1) Число $M \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$.*

2) Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует (конечная) верхняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$.

3) Число $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant m$.

4) Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если существует (конечная) нижняя грань этого множества: $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant m$.

5) Множество A называется ограниченным, если A ограничено сверху и ограничено снизу.

Определение 1.2.

$$\sup A = M \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ \forall a \in A \ \hookrightarrow\ a \leqslant M \ \ \textit{и} \\ 2)\ \forall M' < M\ \exists a \in A :\ M' < a. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда существует единственное число $M \in \mathbb{R}$, которое является точной верхней гранью множества A.*

Доказательство. Рассмотрим B — множество всех (конечных) верхних граней множества A. Так как множество A ограничено сверху, то B не пусто. Поскольку $\forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$, то по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$.

Покажем, что c является точной верхней гранью A. Так как $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant c$, то c является верхней гранью A, т.е. $c \in B$. Поскольку $\forall b \in B \hookrightarrow c \leqslant b$, то c — минимальный элемент B. Итак, c — точная верхняя грань A.

Предположим, что c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ — две различные точные верхние грани множества A. Тогда c_1, c_2 — два различных минимальных элемента множества B. Пусть для определенности $c_1 < c_2$. Тогда c_2 не является минимальным элементом множества B. Противоречие. $\square$

1.2. Теорема Кантора о вложенных отрезках

Определение 1.3. *Множество отрезков*

$$\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty} = \{[a_1; b_1], [a_2; b_2], \ldots\},$$

$$-\infty < a_n < b_n < +\infty \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

называется системой вложенных отрезков, если $[a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *т.е. каждый отрезок содержит следующий за ним.*

Теорема 1.2. ***(Кантора).*** *Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Очевидно, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant a_{n+m} < b_{n+m} \leqslant b_m.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число c такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $m = n$ получаем, что

$$c \in [a_n, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

1.3. Счётные и несчётные множества

Определение 1.4. *Множества X и Y называются равномощными, если существует взаимно однозначное соотвествие $f : X \to Y$.*

Определение 1.5. *Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется счётным.*

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчётным.

Теорема 1.3. *Множество рациональных чисел счётно.*

Доказательство. Составим таблицу чисел (открытую снизу и справа), содержащую все рациональные числа (см. таблицу 1.1)

$n \backslash m$	0	1	-1	2	-2	3	-3	…
1	0/1	1/1	$-1/1$	2/1	$-2/1$	3/1	$-3/1$	…
2	0/2	1/2	$-1/2$	2/2	$-2/2$	3/2	$-3/2$	…
3	0/3	1/3	$-1/3$	2/3	$-2/3$	3/3	$-3/3$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Рис. 1.1 Таблица, содержащая все рациональные числа

. Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла по следующему пути:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
{}_{n}\diagdown^{m} & 0 & & 1 & & -1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
1 & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{-1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
2 & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{2}{2} & & \cdots \\
 & \downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
3 & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{-1}{3} & & \frac{2}{3} & & \cdots \\
 & & & & & & & \downarrow & & \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа и пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались (сократимые дроби).

эл. табл.	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\dots$
номер	1	2	3	–	–	4	5	6	7	8	–	$\dots$

Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами таблицы (рациональными числами) и их номерами (натуральными числами), т. е. между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$. Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ счётно. $\square$

Теорема 1.4. ***Кантор.*** *Множество всех точек отрезка* $[0;1]$ *несчётно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0;1]$ можно занумеровать: $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Поделим отрезок $[0;1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1;b_1]$ один из них, свободный от точки x_1. Поделим $[a_1;b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2;b_2]$ один из них, свободный от точки x_2. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n;b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка не совпадает ни с одной из занумерованных точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$, так как любая из них x_j не содержится в отрезке $[a_j;b_j]$, то время как c содержится в этом отрезке. Итак, при допущении, что все точки отрезка $[0; 1]$ занумерованы, мы пришли к противоречию, найдя точку $c \in [0; 1]$, отличную от каждой из занумерованных. Это противоречие показывает, что наше допущение неверно. $\square$

Определение 1.6. *Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называют также числовым континуумом (continuum (лат.) — непрерывное, сплошное), а его мощность — мощностью континуума. Из теоремы Кантора следует, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.*

2. Предел числовой последовательности

2.1. Определение предела числовой последовательности

Определение 2.1. *Числовой последовательностью* $\{a_n\}$ *называется функция* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *где* $a(n) = a_n$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Элемент последовательности — это пара* (n, a_n), *где* n *— номер элемента последовательности, а* a_n *— значение элемента последовательности.*

Определение 2.2. *Элемент* $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *называется пределом последовательности* $\{a_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\;\hookrightarrow\;\; a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Определение 2.3. *Последовательность называется сходящейся (говорят, что она сходится), если она имеет конечный (т.е. принадлежащий* $\mathbb{R}$ *предел). В противном случае последовательность называется расходящейся (говорят, что она расходится).*

2.2. Единственность предела последовательности

Лемма 2.1. *Пусть* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ *и* $a < b$. *Тогда существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\forall x \in U_\varepsilon(a) \; \forall y \in U_\varepsilon(b) \;\hookrightarrow\; x < y,$$

а значит, окрестности $U_\varepsilon(a)$ *и* $U_\varepsilon(b)$ *не пересекаются.*

Доказательство. Возможны четыре случая:
(1) $-\infty < a < b < +\infty$;
(2) $-\infty < a < b = +\infty$;
(3) $-\infty = a < b < +\infty$;
(4) $-\infty = a < b = +\infty$.

в случае (1) положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, в случае (2): $\varepsilon = \dfrac{1}{|a|+1}$, в случае (3): $\varepsilon = \dfrac{1}{|b|+1}$, в случае (4): $\varepsilon = 1$.

Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$, $y \in U_\varepsilon(b)$. Покажем, что в каждом из четырёх случаев $x < y$. Отсюда будет следовать, что окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются.

(1) $x < a + \varepsilon = a + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b}{2} = b - \varepsilon < y$;

(2) $x \leqslant a + 1 \leqslant |a| + 1 = \dfrac{1}{\varepsilon} < y$.

Случаи (3) и (4) рассмотрите самостоятельно. □

Теорема 2.1. ***(Единственность предела.)*** *Числовая последовательность не может иметь более одного предела из $\bar{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Предположим противное: последовательность $\{a_n\}$ имеет пределы $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. По лемме 2.1

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = .$$

По определению предела

$$\exists N_1 : \ \forall n \geqslant N_1 \ \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(a),$$

$$\exists N_2 : \ \forall n \geqslant N_2 \ \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(b).$$

При $n \geqslant \max\{n_1, N_2\}$ получаем $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ — противоречие. □

Задача 2.1. *Докажите, что последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, не имеет ни конечного ни бесконечного предела.*

2.3. Бесконечно малые последовательности

Определение 2.4. *Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \hookrightarrow \ |a_n| < \varepsilon.$$

Непосредственно из определения предела последовательности следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n - a\}$ является бесконечно малой. Используя это обстоятельство, из свойств бесконечно малых последовательностей мы получим свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями.

Лемма 2.2. *Если $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n - b_n\}$ — бесконечно малые последовательности.*

Доказательство. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_1 \ \ \hookrightarrow \ \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_2 \ \ \hookrightarrow \ \ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, используя неравенство треугольника

$$|a_n \pm b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|,$$

получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \ \hookrightarrow$$

$$|a_n \pm b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = 0$. $\square$

Лемма 2.3. *Если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{b_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\{a_n b_n\}$ — бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то

$$\exists M > 0: \ \forall n \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ |a_n| \leqslant M.$$

Так как последовательность $\{b_n\}$ является бесконечно малой, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \ \hookrightarrow \ \ |b_n| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \bar{N} = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant \bar{N} \ \ \hookrightarrow \ \ |a_n b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{a_n b_n\}$ является бесконечно малой. $\square$

2.4. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Теорема 2.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *то существуют* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

Доказательство. Так как последовательности $\{a_n - a\}$ и $\{b_n - b\}$ являются бесконечно малыми, то в силу леммы 2.2 последовательности $\{a_n + b_n - (a+b)\} = \{(a_n - a) + (b_n - b)\}$ и $\{a_n - b_n - (a - b)\} = \{(a_n - a) - (b_n - b)\}$ являются бесконечно малыми, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$. $\square$

Теорема 2.3. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, *то существует* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Доказательство. Имеем $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$. Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ в силу определения предела получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. $\square$

Теорема 2.4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *то существуют* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

Доказательство. Требуется доказать, что последовательность $\{a_n b_n - ab\}$ являетя бесконечно малой.

Заметим, что $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$. Так как последовательность $\{a_n\}$ сходится, то по теореме **??** она ограничена. В силу леммы 2.3 последовательности $\{a_n(b_n - b)\}$ и $\{(a_n - a)b\}$ бесконечно малые, следовательно, по лемме 2.2 последовательность $\{a_n b_n - ab\}$ также является бесконечно малой. $\square$

Лемма 2.4. *Если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a| > 0$. Отсюда, положив в определении предела последовательности $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, получаем, что $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow |a_n| > |a| - \varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, т.е. $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow \left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \dfrac{2}{|a|}$.

Определим число $M = \max\left\{\frac{1}{|a_1|}, \ldots, \frac{1}{|a_{N-1}|}, \frac{2}{|a|}\right\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hookrightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \leqslant M$, т.е. последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ограничена. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{a_n a}\right\}$ также ограничена. Отсюда и из леммы 2.3 следует, что последовательность $\left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right\} = \left\{\frac{1}{a_n a}(a - a_n)\right\}$ является бесконечно малой, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. $\square$

Теорема 2.5. *Если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$.

Доказательство. В силу леммы 2.4 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. Поэтому, согласно, теореме 2.4, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \frac{1}{a_n} = b\frac{1}{a} = \frac{b}{a}$. $\square$

Задача 2.2. *Пусть последовательности* $\{a_n + b_n\}$ *и* $\{a_n b_n\}$ *сходятся. Верно ли, что последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся?*

Задача 2.3. *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = y \geqslant 0$. *Верно ли, что последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся?*

2.5. Переход к пределу в неравенствах

Теорема 2.6. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, *где* $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$, $A < B$. *Тогда* $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n < b_n$.

Доказательство. В силу леммы 2.1 существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in U_\varepsilon(A)\ \forall y \in U_\varepsilon(B) \hookrightarrow x < y$.

По определению предела

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \ \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(A),$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \ \hookrightarrow\ b_n \in U_\varepsilon(B).$$

Определив $N = \max\{N_1, N_2\}$ получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 2.7. *(О предельном переходе в неравенстве.) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$ и $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant b_n$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Предположим противное: $A > B$. По теореме 2.6 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_1 \hookrightarrow b_n < a_n$. При $n \geqslant \max\{N, N_1\}$ получаем противоречие с условием $a_n \leqslant b_n$. $\square$

Следствие 2.1. *Если $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n < B$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Если $B \in \mathbb{R}$, то определим $\{b_n\} = \{B\}$ и, применяя теорему 2.7, получаем неравенство $A \leqslant B$.

Если $B = +\infty$, неравенство $A \leqslant B$ также выполнено.

Случай $B = -\infty$ не реализуется, т.к. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n < B$. $\square$

Замечание 2.1. *Из условий $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n < b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ не следует, что $A < B$.*

Например, $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $A = B = 0$.

Теорема 2.8. *(О трех последовательностях.) Если $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant b_n \leqslant {}_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} {}_n = A \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.*

Доказательство. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_1 \ \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(A),$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_2 \ \hookrightarrow \ c_n \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначим $\bar{N} = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant \bar{N}$ имеем

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon,$$

следовательно, $b_n \in U_\varepsilon(A)$.

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{N} \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant \bar{N} \ \hookrightarrow \ b_n \in U_\varepsilon(A),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. $\square$

Теорема 2.9. *Пусть $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant b_n$. Тогда*

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Доказательство.

1) По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1\ \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty),$$

т.е. $a_n > \varepsilon$, но тогда $b_n \geqslant a_n > \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \max\{N, N_1\}$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = \max\{N, N_1\} \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2\ \hookrightarrow\ b_n \in U_\varepsilon(+\infty),$$

а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Доказательство пункта 2) аналогично. $\square$

2.6. Число e

Лемма 2.5. ***(Якоб Бернулли)*** *Для любого $x > -1$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Теорема 2.10. *Последовательность $a_n = (1+1/n)^n$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность $b_n = (1+1/n)^{n+1}$. Во-первых, она ограничена снизу: $b_n > 1$.

Далее, исследуем ее на монотонность. С этой целью рассмотрим отношение значений последовательности:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geqslant \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1,$$

мы применили неравенство Бернулли с $x = (n^2-1)^{-1}$ и показателем $n+1$. Значит, последовательность b_n невозрастающая. Поэтому последовательность b_n сходится как ограниченная снизу и невозрастающая.

Поскольку $a_n = b_n(1+1/n)^{-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n / \lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. $\square$

Определение 2.5. *Числом Леонарда Эйлера (1707–1783) называют $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$.*

Доказано, что e — иррациональное число.

3. Понятие подпоследовательности, частичного предела последовательности. Критерий Коши

3.1. Понятие подпоследовательности, частичного предела последовательности

Определение 3.1. *Последовательность* $\{b_k\}$ *называется подпоследовательностью последовательности* $\{a_n\}$*, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}$*:* $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_k = a_{n_k}$.

Пример 3.1. *Сама последовательность является своей подпоследовательностью.*

Пример 3.2. *Пусть задана последовательность* $\{a_n\}$*. Последовательность* $\{a_{2k}\}$*, составленная из элементов* $\{a_n\}$ *с четными номерами, является подпоследовательностью последовательности* $\{a_n\}$*. Действительно, для любого* $k \in \mathbb{N}$ *определим* $n_k = 2k$*. Тогда* $\{n_k\}$ *— строго возрастающая последовательность натуральных чисел и* $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{2k} = a_{n_k}$.

Определение 3.2. *Если последовательность* $\{b_k\}$ *является подпоследовательностью* $\{a_n\}$ *и существует* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A \in \bar{\mathbb{R}}$*, то* A *называется частичным пределом последовательности* $\{a_n\}$.

3.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 3.1. ***(Теорема Больцано-Вейерштрасса)*** *Ограниченная последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е.

$$\exists a_0, b_0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ x_n \in [a_0, b_0].$$

Определим $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Если в отрезке $[a_0, {}_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_1, b_1] = [a_0, {}_0]$. В противном случае в отрезке $[c_0, b_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, тогда определим $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$.

Пусть определён отрезок $[a_k, b_k]$, в котором содержатся значения бесконечного набора членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $c_k = (a_k + b_k)/2$. Если в отрезке $[a_k, {}_k]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, {}_k]$. В противном случае определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$. Так как этот процесс не может оборваться, мы получаем последовательность вложенных отрезков, которые по теореме Кантора имеют общую точку $x \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$.

Заметим, что $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$. Индукцией по k получаем, что $2^k > k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Поэтому $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $k \in \mathbb{N}$: $b_k - a_k < \varepsilon/2$. Отсюда и из включения $x \in [a_k, b_k]$, получаем, что $[a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x)$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} : \ [a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(x)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. В силу критерия частичного предела число x является частичным пределом $\{x_n\}$. $\square$

3.3. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение 3.3. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна или удовлетворяет условию Коши, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N, \ m \geqslant N \ \ \hookrightarrow \ \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма 3.1. *Сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу x. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\;\; \hookrightarrow \;\;\; |x_n - x| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N, \; m \geqslant N \;\;\; \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \;\;\; |x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

Лемма 3.2. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N, \; m \geqslant N \;\;\; \hookrightarrow \;\;\; |x_n - x_m| < \varepsilon$, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; n \geqslant N \quad \hookrightarrow \quad |x_N - x_n| < 1$. Определим $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \;\;\; \hookrightarrow \;\;\; |x_n| \leqslant M$. $\square$

Теорема 3.2. ***(Критерий Коши)*** *$\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ фундаментальна.*

Доказательство. Если $\{x_n\}$ сходится, то по лемме 3.1 она фундаментальна. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна. По лемме 3.2 $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса существует $x \in \mathbb{R}$ — частичный предел $\{x_n\}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности $\{x_n\}$ следует существование номера N такого, что

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N, \; m \geqslant N \;\;\; \hookrightarrow \;\;\; |x_n - x_m| < \varepsilon/2.$$

В силу критерия частичного предела найдётся номер $m \geqslant N$ такой, что $|x - x_m| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n - x| \leqslant |x_n - x_m| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\;\; \hookrightarrow \;\;\; |x_n - x| < \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ сходится к x. $\square$

4. Предел функции

4.1. Понятие предела функции

Определение 4.1. ***(Определение предела по Коши.)*** *Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$ и заданы $A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, причём $\exists \delta_0 > 0$: $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subseteq X$. Тогда пишут*

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)\ \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A). \tag{4.1}$$

Определение 4.2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Гейне в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если*

1) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ и

2) $x_n \neq x_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 4.3. ***(Определение предела по Гейне.)*** *Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$ и заданы элементы $A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$. Тогда пишут $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой $\{x_n\}$ — последовательности Гейне в точке x_0 такой, что $x_n \in X$ при всех $n \in \mathbb{N}$, предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A.*

Теорема 4.1. *Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$, пусть $x_0, A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ и $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subseteq X$, $\delta_0 > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Коши;

(2) $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Гейне.

Доказательство.

(1)$\Rightarrow$(2). Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Коши, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \tag{4.2}$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Тогда по определению предела последовательности и в силу условия $x_n \neq x_0$ имеем

$$\forall\delta > 0\ \exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \hookrightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0). \tag{4.3}$$

Применим (7.3) к δ из (4.2), тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Значит, $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне.

(2)$\Rightarrow$(1). Предположим противное: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне, но не по Коши.

Тогда

$$\exists\varepsilon > 0 :\ \forall\delta \in (0;\delta_0]\ \exists x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) :\ \ f(x) \notin U_\varepsilon(A).$$

Следовательно,

$$\exists\varepsilon > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_0/n}(x_0) :\ \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A).$$

Из условия $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_0/n}(x_0)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} = x_0$ и $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы получили последовательность Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 такую, что $f(x_n) \nrightarrow A$ при $n \to \infty$ — противоречие. $\square$

4.2. Критерий Коши существования конечного предела функции

Лемма 4.1. *Пусть функция f определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, и пусть для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.*

Тогда этот предел не зависит от последовательности Гейне: $\exists A \in \mathbb{R}$: для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке $x_0 \hookrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Доказательство. Пусть имеются две произвольные последовательности Гейне в точке x_0: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$. Составим из них последовательность $\{z_k\}$:

$$z_k = \begin{cases} x_n, \ k = 2n-1, \\ y_n, \ k = 2n. \end{cases}$$

Последовательность $\{z_k\}$ также является последовательностью Гейне, так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x_0$, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow z_k \neq x_0$. Поэтому в силу условия леммы, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)$. Так как последовательности $\{f(x_n\}$ и $\{f(y_n\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(z_k\}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. $\square$

Определение 4.4. *Пусть функция f определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Условие Коши существования предела функции в точке x_0 состоит в том, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \ \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_\delta (x_0) \ \hookrightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. ***(Критерий Коши.)***

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *выполнено условие Коши существования предела функции f в точке x_0.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta (x_0) \ \hookrightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \ \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_\delta (x_0) \ \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

т.е. выполнено условие Коши.

($\Leftarrow$) Пусть выполнено условие Коши. Возьмём произвольную последовательность Гейне в точке x_0: $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Тогда

$$\forall \delta \in (0; \delta_0] \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N \ \hookrightarrow \ x_n \in \overset{o}{U}_\delta (x_0). \tag{4.5}$$

Используя условие (4.5) для δ из (4.4), получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant N, k \geqslant N \ \hookrightarrow\ |f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon,$$

т.е. выполнено условие Коши существования предела последовательности $\{f(x_n\}$. В силу критерия Коши для последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Итак, для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 существует $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$, тогда по лемме 4.1

$$\exists A \in \mathbb{R} :\ \forall \text{ посл. Гейне } \{x_n\} \text{ в точке } x_0 \ \hookrightarrow\ A = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Пользуясь определением предела функции по Гейне, получаем $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. $\square$

Задача 4.1. *Пусть*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \hookrightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Верно ли, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$*?*

Задача 4.2. *Пусть задана функция* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*. Верно ли, что* $\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \mathbb{R}$*, если*

а) $\forall \varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \exists x_0 > 0 :\ \forall x > x_0 \ \hookrightarrow\ |f(x + d) - f(x)| < \varepsilon$*;*

б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 > 0 :\ \forall d > 0 \ \hookrightarrow\ |f(x_0 + d) - f(x_0)| < \varepsilon$*? Рассмотреть данный вопрос отдельно для каждого из условий а) и б)?*

4.3. Односторонние пределы

Определение 4.5. *Пусть функция f определена на интервале (a, x_0). Предел функции f в точке x_0 по множеству (a, x_0) называют пределом слева функции f в точке x_0 и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.*

Определение 4.6. *Пусть функция f определена на интервале (x_0, b). Предел функции f в точке x_0 по множеству (x_0, b) называют пределом справа функции f в точке x_0 и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$.*

4.4. Пределы монотонных функций

Теорема 4.3. ***(Об одностороннем пределе монотонной функции.)***

1. Если функция f нестрого возрастает на (a, x_0), то $\exists f(x_0 - 0) = \sup\limits_{x \in (a, x_0)} f(x)$.

2. Если функция f нестрого убывает на (a, x_0), то $\exists f(x_0 - 0) = \inf\limits_{x \in (a, x_0)} f(x)$.

3. Если функция f нестрого возрастает на (x_0, b), то $\exists f(x_0 + 0) = \inf\limits_{x \in (x_0, b)} f(x)$.

4. Если функция f нестрого возрастает на (x_0, b), то $\exists f(x_0 + 0) = \sup\limits_{x \in (x_0, b)} f(x)$.

Доказательство. Пусть функция f нестрого возрастает на (a, x_0). Так как конечный или бесконечный супремум любого множества существует, то существует $\sup\limits_{x \in (a, x_0)} f(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$.

Из определения супремума следует, что $\forall x \in (a, x_0) \hookrightarrow f(x) \leqslant M$ и, кроме того, $\forall M_1 < M \ \exists x_1 \in (a, x_0) : M_1 < f(x_1)$. Отсюда и из возрастания функции f следует, что $\forall x \in x_1, x_0 \hookrightarrow M_1 < f(x_1) \leqslant f(x)$.

Итак, $\forall M_1 < M \ \exists x_1 \in (a, x_0) : \forall x \in x_1, x_0 \hookrightarrow M_1 < f(x_1) \leqslant f(x)$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in (a, x_0) : \forall x \in x_1, x_0 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = x_0 - x_1 > 0$: $\forall x \in x_0 - \delta, x_0 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$, а значит, $M = f(x_0 - 0$. Другие случаи рассматриваются аналогично. $\square$

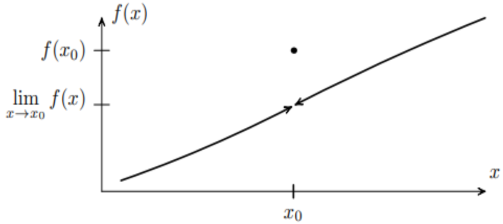
5. Непрерывность функции в точке

5.1. Определение непрерывности в точке. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация

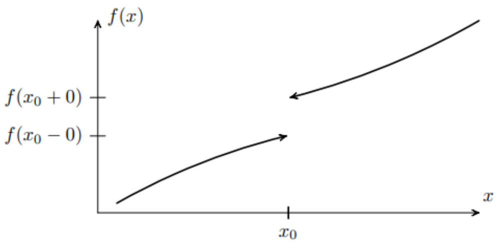
Определение 5.1. *Пусть функция f определена в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда f называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.*

Определение 5.2. *Пусть функция f определена в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Тогда*

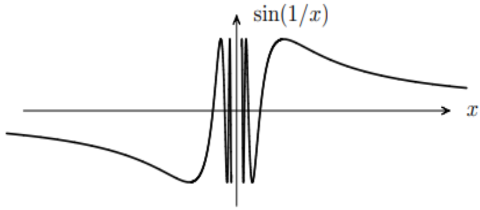
а) если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, но в точке x_0 функция f не определена либо $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва;

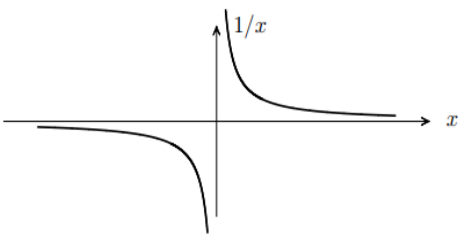


б) если $\exists\ f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 — точка разрыва первого рода;



в) если какой-либо из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не существует или бесконечен, то x_0 — точка разрыва второго рода.





Лемма 5.1. *Пусть f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) f непрерывна в x_0;

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0, \delta_0] :\ \forall x \in U_\delta(x_0)\ \hookrightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(3) $\forall \{x_n\} \subset U_{\delta_0}(x_0) :\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\ \hookrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Доказательство.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из определения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ по Коши. В данном случае условие $x \neq x_0$ можно не писать, так как при $x = x_0$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) следует из определения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ по Гейне. В данном случае условие $x \neq x_0$ можно не писать, так как при $x = x_0$ выполняется $f(x_n) = f(x_0)$. $\square$

5.2. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 5.1. *Пусть функции f и g определены в $U_\delta(x_0)$ и непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если дополнительно $g(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство состоит в применении теоремы об арифметических свойствах пределов функций.

Пример 5.1. *Пусть x_0, y_0, $A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$. Верно ли, что предел сложной функции $f \circ y$ в точке x_0 существует и равен A: $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(y(x)) = A$?*

Решение. Неверно. Например,

$$y(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}, \; f(y) = \begin{cases} 0, \; y \neq 0, \\ 1, \; y = 0. \end{cases}$$

Тогда $A = 0$, но $f(y(x)) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(y(x)) = 1 \neq A$.

Теорема 5.2. ***(О пределе сложной функции)***

Пусть заданы функции $y : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ и $f : \overset{\circ}{U}_{\beta_0}(y_0) \to \mathbb{R}$, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть выполнено хотя бы одно из следующих дополнительных условий:

(а) $\exists \delta_0 > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \; \hookrightarrow \; y(x) \neq y_0$ или

(б) $f(y_0) = A$ (т.е. функция f непрерывна в точке y_0).

Тогда сложная функция $\varphi(x) = f(y(x))$ определена в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(y(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$, то

$$\exists \beta \in (0, \beta_0): \ \forall y \in \overset{\circ}{U}_\beta (y_0) \ \hookrightarrow \ f(y) \in U_\varepsilon(A). \tag{5.1}$$

По определению предела $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y_0$

$$\exists \delta \in (0, \delta_0): \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \ \hookrightarrow \ y(x) \in U_\beta(y_0). \tag{5.2}$$

Покажем, что сложная функция $\varphi(x) = f(y(x))$ определена в $\overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$ и

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \ \hookrightarrow \ f(y(x)) \in U_\varepsilon(A). \tag{5.3}$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$. В силу условия (5.2) получаем $y(x) \in U_\beta(y_0)$. В случае $y(x) \neq y_0$ имеем $y(x) \in \overset{\circ}{U}_\beta (y_0)$, и согласно (5.1) включение $f(y) \in U_\varepsilon(A)$ выполнено. Рассмотрим случай $y(x) = y_0$. В этом случае дополнительное условие (а) реализоваться не может. Следовательно, реализуется дополнительное условие (б), а значит, $f(y(x)) = f(y_0) = A \in U_\varepsilon(A)$. Таким образом, доказано соотношение (5.3). Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \ \hookrightarrow \ f(y(x)) \in U_\varepsilon(A).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = A$. $\square$

Теорема 5.3. ***(О непрерывности сложной функции в точке)***

Пусть функция y определена в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0. Пусть функция f определена в некоторой $U_{\beta_0}(y_0)$ и непрерывна в точке $y_0 = y(x_0)$. Тогда сложная функция $\varphi(x) = f(y(x))$ определена в некоторой $U_{\delta_1}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.

Доказательство состоит в применении пункта (б) теоремы о пределе сложной функции для случая $y_0 = y(x_0)$.

5.3. Разрывы монотонных функций

Теорема 5.4. ***(О разрывах монотонных функций)***

Если функция монотонна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), тогда

1) она имеет только разрывы первого рода;

2) множество точек разрыва не более, чем счетно.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что функция f на интервале (a, b) является неубывающей. Пусть $x_0 \in (a, b)$ — её точка разрыва. По теореме об одностороннем пределе монотонной функции и в силу неубывания функции, существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{x \in (x_0, b)} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Если оба знака " $\leqslant$" внутри оценки есть равенства, то f непрерывна в x_0 по определению. Значит, $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, т.е. x_0 — точка разрыва первого рода.

С каждой точкой разрыва связан интервал $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$, причём, в силу монотонности функции, интервалы, отвечающие разным точкам разрыва не пересекаются:

если $x_0 < x_1$, то

$$f(x_0-0) < f(x_0+0) = \inf_{x \in (x_0, x_1)} f(x) \leqslant \sup_{x \in (x_0, x_1)} f(x) = f(x_1-0) < f(x_1+0)$$

(равенство внутри не исключено). Возьмём в каждом интервале по одному произвольному рациональному числу. Эти числа заведомо не совпадают, а их множество не более, чем счётно. $\square$

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке

6.1. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции

Теорема 6.1. ***(Теорема Коши о промежуточном значении функции)***

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть C находится между A и B: $A \leqslant C \leqslant B$ или $B \leqslant C \leqslant A$. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] : \ f(\xi) = C.$$

Доказательство. Пусть, для определённости, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a, b]$ пополам и через $[a_1, b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Затем поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Пусть $\xi \in [a_n, b_n] \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и (в силу непрерывности функции f в точке ξ)

$$f(a_n) \to f(\xi), \ f(b_n) \to f(\xi) \text{ при } n \to \infty.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi) \ \Rightarrow \ f(\xi) = C.$$

$\square$

Следствие 6.1. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, причём $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда*

$$\exists \xi \in (a, b): \; f(\xi) = 0.$$

Следствие 6.2. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Тогда функция f принимает все значения из $[m, M]$ и только эти значения.*

7. Производная функции одной переменной

7.1. Производная

Определение 7.1. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется производной (от) функции f в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$.

Теорема 7.1. ***(Арифметические свойства производных)*** *Пусть существуют $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Тогда*

(1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$; в частности, $(Cf)'(x_0) = Cf'(x_0)$, где C — постоянная;

(3) если $g(x_0) \neq 0$, то

$$\exists \ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Доказательство приведём лишь для дифференцирования дроби. Другие формулы устанавливаются аналогично. Положим $\Delta x := x - x_0$ (называется приращением аргумента в точке x_0), $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (называется приращением функции f в точке x_0), $\Delta g := g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(f(x_0) + \Delta f)g(x_0) - f(x_0)(g(x_0) + \Delta g)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0) \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0 + \Delta x) g(x_0)} \to$$

$$\to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \text{ при } x \to x_0.$$

□

7.2. Дифференциал

Определение 7.2. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть её приращение в точке x_0 может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \tag{7.1}$$

при $\Delta x \to 0$, где $A \in \mathbb{R}$.

Тогда функцию f называют дифференцируемой в точке x_0, а линейную функцию

$$df(x_0) = A\Delta x, \ \ -\infty < \Delta x < \tag{7.2}$$

— дифференциалом функции f в точке x_0.

Теорема 7.2. *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$.*

Доказательство.

1°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство (4.1). Поделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $\exists f'(x_0) = A$.

2°. Пусть теперь существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда

$$f'(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = o(1) \ \text{ при } \ \Delta x \to 0.$$

Умножая последнее равенство на Δx, получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \ \text{ при } \ \Delta x \to 0. \tag{7.3}$$

Это означает, что приращение функции f представлено в виде (4.1) с $A = f'(x_0)$, так что функция f дифференцируема в точке x_0. □

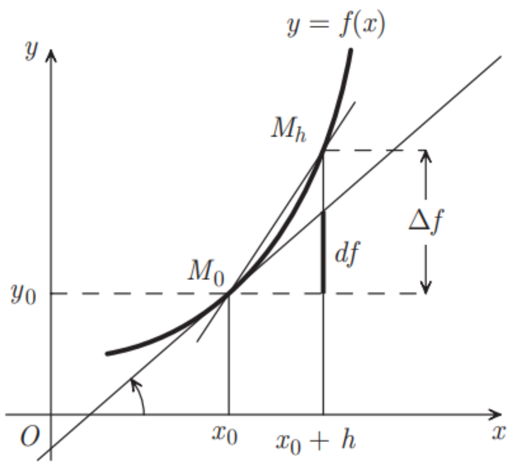
Теорема 7.3. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. По условию теоремы приращение $\Delta f(x_0)$ представимо в виде (4.1), из которого следует, что $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и означает непрерывность функции f в точке x_0. □

Пример 7.1. *функция $f(x) = |x|$, точка $x_0 = 0$. Этот пример показывает, что непрерывность функции в точке не влечет за собой ее дифференцируемости в этой точке.*

7.3. Геометрический смысл производной и дифференциала

Проведем секущую M_0M_h через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ графика функции $y = f(x)$, где $h \neq 0$ (см. рис. 1).



Уравнение секущей M_0M_h имеет вид

$$y = k(h)(x - x_0) + y_0,$$

$$\text{где} \;\; y_0 = f(x_0), \quad k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Устремим $h \to 0$, тогда точка $M_h \to M_0$, и секущая M_0M_h поворачивается, меняя свой угловой коэффициент $k(h)$, который стремится к конечному пределу тогла и только тогда, когда существует $f'(x_0)$: $k(h) \to k_0 = f'(x_0)$.

Прямую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ графика и являющуюся «предельным положением» секущей, называют *касательной.* Дадим точное определение:

Определение 7.3. *Пусть существует $f'(x_0)$. Касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ называется прямая*

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + y_0, \quad \textit{где} \;\; y_0 = f(x_0).$$

Теорема 7.4. *Пусть функции f определена на $U(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Тогда среди всех прямых, проходящих через точку $(x_0, f(x_0))$*

$$y_{np} = \lambda\,(x - x_0) + y_0, \quad \textit{где} \;\; y_0 = f(x_0),$$

только касательная к графику обладает свойством

$$f(x) - y_{np} = o(x - x_0) \quad \textit{при} \;\; x \to x_0.$$

Доказательство. Поскольку функция f дифференцируема в точке x_0, имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \;\; \text{при} \;\; x \to x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - y_{np} = (f'(x_0) - la)(x - x_0) + o(x - x_0) \;\; \text{при} \;\; x \to x_0.$$

Правая часть равенства есть величина $o(x - x_0)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = f'(x_0)$, то есть когда прямая $y_{np} = \lambda\,(x - x_0) + y_0$ является касательной. $\square$

Теорема показывает, что касательная к графику в окрестности точки касания расположена ближе всех остальных прямых.

Определение 7.4. *Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to +\infty \ (-\infty, \infty)$$

Тогда говорят, что функция f имеет бесконечную производную в точке x_0 и пишут

$$f'(x_0) = +\infty \ (-\infty, \infty),$$

и что график функции f имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ вертикальную касательную $x = x_0$.

Ранее рассмотренную касательную с конечным угловым коэффициентом $f'(x_0)$ часто называют наклонной касательной.

Определение 7.5. *Правой (соответственно, левой) односторонней производной функции f в точке x_0 называется число*

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

соответственно,

$$f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен.

Слово «односторонняя» часто опускают и называют $f'_+(x_0)$ правой, а $f'_-(x_0)$ левой производной.

Теорема 7.5. *Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и они равны друг другу.*

7.4. Производная сложной функции

Теорема 7.6. *Пусть существуют производные $f'(y_0)$ и $\varphi'(x_0)$, где $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда существует производная композиции функций f и g в точке x_0 и выполнено равенство*

$$(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\,\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Из существования $f'(y_0)$ и $\varphi'(x_0)$ следует, что f, g непрерывны в точках y_0, x_0, соответственно. По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций суперпозиция

$$z = F(x) := f(\varphi(x))$$

определена и непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Из условий теоремы следует, что приращения $\Delta x, \Delta y$ функций f, φ представимы в виде

$$\begin{aligned}
&\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \varepsilon(\Delta y) \to 0 \ \text{ при } \ \Delta y \to 0, \\
&\Delta y = \varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x, \quad \varepsilon_1(\Delta x) \to 0 \ \text{ при } \ \Delta x \to 0.
\end{aligned}$$

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.

Считая, что впервом из этих приращение Δy вызвано приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из второго равенства в первое:

$$\begin{aligned}
\Delta z = \Delta F(x_0) &= \\
&= f'(y_0)[\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x] + \varepsilon(\Delta y)\Delta y = \\
&\qquad = f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.
\end{aligned}$$

Разделив это равенство почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\varphi'(x_0) + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Учитывая, что $\Delta y \to 0$, а $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, и переходя в последнем равенстве к пределу $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы. □

Рассмотрим в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ дифференциал сложной функции $f(x)$, где функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $x : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ имеют производные $f'(x_0)$ и $x'(t_0)$, где $x_0 = x(t_0)$. Тогда в силу теоремы о производной сложной функции имеем:

$$df(x)(t_0) = f'(x(t_0))x'(t_0)\,dt = f'(x_0)\,dx(t_0).$$

Опустим обозначение аргумента t_0, получается:

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad \text{где} \ \ x : (\alpha, \beta) \to (a, b).$$

Здесь dx – дифференциал функции. Мы видим, что дифференциал $df(x)$ имеет ту же форму, как если бы x было независимым переменным. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

7.5. Производная функции, заданной параметрически

Производная функции, заданной параметрически, т.е. функции $y(x)$, заданной в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пусть $x_0 = \varphi(t_0)$. Будем считать, что функция φ непрерывна и строго монотонная на $U(t_0)$ и что существуют производные $\varphi'(t_0) \neq 0$, $\psi'(t_0)$. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$, $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \psi'(t_0)\frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

8. Производные высших порядков

8.1. Производные высших порядков и формула Лейбница

Пусть на $U(x_0)$ функция f определена и имеет производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ также является функцией переменного x. Если в точке x_0 она имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют второй производной функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Производная порядка n функции f определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)'\Big|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из него видно, в частности, что если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Производную порядка n обозначают также символом $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Удобно считать по определению, что $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Теорема 8.1. ***(Свойства производных высших порядков)*** *Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке x_0:*
1° $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$*;*
2° *(формула Лейбница)*

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \ldots + fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство формулы Лейбница проведём по индукции. В случае $n = 1$ эта формула была установлена в прошлой теме (теорема об арифметических свойствах производных). В предположении, что она верна для производной порнядка n, установим её для производной порядка $n+1$.

Имеем

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)} =$$

$$= C_n^0 f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1-k)} g^{(k)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Осталось показать, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Имеем

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

□

Следствие 8.1. *$(Cf)^{(n)}(x_0) = Cf^{(n)}(x_0)$, если существует $f^{(n)}(x_0)$, $C = const$.*

8.2. Дифференциалы высших порядков

Введём теперь понятие дифференциалов высших порядков.

Если функция f такова, что её производная f' существует в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, то дифференциал функции f

$$df(x) = f'(x)dx, \;\; x \in U(x_0),$$

является функцией аргумента x (помимо этого, дифференциал является линейной функцией аргумента dx, но в данном случае будем считать dx фиксированным). Если f' дифференцируема в точке x_0 (т.е. существует (конечная) $f''(x_0)$), то можно рассмотреть дифференциал от $df(x)$, т.е. $\delta(df(x))$ (этот дифференциал обозначим новым символом δ, чтобы отличить его от ранее построенного дифференциала df). Соответственно дифференциал независимого переменного в выражении дифференциала δ будем обозначать через δx.

Определение 8.1. *Вторым дифференциалом функции f в точке x_0 называется*

$$d^2 f(x_0) := \delta(df)(x_0)\Big|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)dx)(x_0)\Big|_{\delta x = dx} =$$

$$= (f'(x)dx)'(x_0)\delta x\Big|_{\delta x = dx} = f''(x_0)(dx)^2.$$

В этой цепочке равенств содержится не только определение второго дифференциала (первое равенство), но и его выражение через $f''(x_0)$.

Определение 8.2. *n-м дифференциалом функции f в точке x_0 называется*

$$d^n f(x_0) := \delta(d^{n-1} f)(x_0)\Big|_{\delta x = dx}.$$

Применяя метод математической индукции, убеждаемся, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то существует

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \tag{8.1}$$

Последняя формула при $n \geqslant 2$ (в отличие от $n = 1$) верна лишь в случае, когда x — независимая переменная. Покажем это для случая $n = 2$. Найдём выражение второго дифференциала сложной функции $f(x)$, считая, что функция f дважды дифференцируема в точке x_0, а её аргумент x является дважды дифференцируемой в точке t_0 функцией $x = x(t)$ некоторой независимой переменной t, $x_0 = x(t_0)$. Имеем

$$d^2 f(x) = (f(x))''_{tt}(dt)^2 = (f'(x)x')'_t(dt)^2 =$$

$$= (f''(x)(x')^2 + f'(x)x'')(dt)^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Итак, $d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x$.

Сравнивая полученное выражение с (8.1) при $n = 2$, убеждаемся, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

9. Теоремы о среднем

9.1. Теорема Ферма

Определение 9.1. *Пусть функции f определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Точка x_0 называется точкой локального строгого (нестрогого) максимума (минимума), если существует такая её δ-окрестность, что для всех $x \in \overset{o}{U}_\delta (x_0)$ выполняется $f(x_0) > f(x)$ ($\geqslant, <, \leqslant$).*

Точки локального максимума и минимума называются точками строгого (нестрогого) локального экстремума функции f. Точки строгого экстремума автоматически являются точками нестрогого экстремума. Обратное в общем случае неверно.

Пример 9.1. *У функции $f(x) \equiv const$ все точки числовой прямой являются точками нестрогого максимума и минимума одновременно.*

Теорема 9.1. ***(Необходимое условие экстремума (Пьер Ферма))***

Если в точке x_0 нестрогого экстремума функция дифференцируема, то $f'(x_0) = 0$.

Геометрическая формулировка: в условиях теоремы в точке экстремума касательная параллельна оси абсцисс.

Доказательство. Пусть, для определённости, x_0 — точка минимума. Поскольку в ней существует конечная производная, то существуют односторонние и равные между собой производные. Из определения минимума и теореме о предельном переходе в неравенстве получаем, что

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

поскольку в обоих случаях числитель неотрицательный, а знаменатель в первом случае положительный, а во втором отрицательный.

Следовательно,

$$f'(x_0) \geqslant 0 \ \wedge \ f'(x_0) \leqslant 0 \ \Rightarrow \ f'(x_0) = 0.$$

□

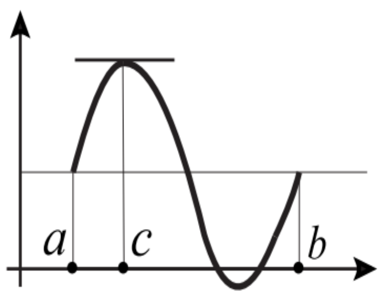
Замечание 9.1. *Теорема Ферма дает только необходимое условие существования экстремума для функции, имеющей производную. Это условие не является достаточным: контрпример $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.*

Замечание 9.2. *В точке локального экстремума производная может отсутствовать.*

9.2. Теорема Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 9.2. ***(Мишель Ролль)***

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.



Доказательство. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция f достигает своего минимального m и максимального M значений в некоторых точках x_1 и x_2 соответственно. Если $m = M$, то функция есть константа. В этом случае в качестве c можно взять произвольную точку отрезка.

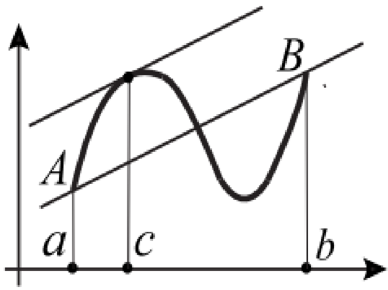
Если $m < M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что или минимум, или максимум достигаются внутри отрезка. Значит, существует хотя бы одна точка локального экстремума $c \in (a, b)$. Тогда из теоремы Ферма следует, что $f'(c) = 0$. $\square$

Замечание 9.3. *Ещё раз подчеркнём, что c – внутренняя точка отрезка $[a, b]$.*

Замечание 9.4. *Отказаться от условия $f(a) = f(b)$ нельзя, иначе минимум или максимум функции могут достигаться на концах отрезка, где производная не обязана обнуляться. Например, функция $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ достигает точных граней на краях.*

Теорема 9.3. ***(Жозеф-Луи Лагранж)***
Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, для которой справедлива формула конечных приращений:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{9.1}$$



Геометрическая интерпретация теоремы состоит в том, что на графике найдётся точка, в которой касательная параллельна замыкающей хорде AB, где $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

Доказательство сводит условия Лагранжа к условиям Ролля. С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$D(\widetilde{f}) = [a, b],\ \widetilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a).$$

Функция $\widetilde{f}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, в частности, $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(b) = f(a)$. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная обнуляется:

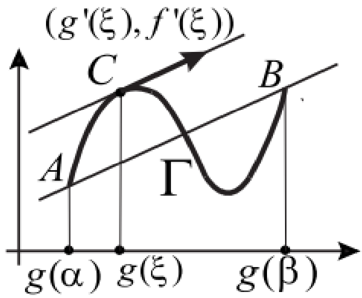
$$0 = \widetilde{f}'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Теорема 9.4. ***(Огюстен Луи Коши)***

Пусть функции $y = f(t)$ и $x = g(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемы внутри него. Пусть для любой точки $t \in (\alpha, \beta)$ производная $g'(t) \neq 0$. Тогда существует точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, для которой справедлива формула:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{9.2}$$



Геометрическая интерпретация. Теорему Коши можно доказать с помощью функции $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$, заданной параметрически. Однако для этого предварительно нужно доказать строгую монотонность функции $x = g(t)$. Множество $\Gamma := \{x = g(t), y = f(t)\}$ представляет собой график функции h, в каждой внутренней точке которого существует касательная прямая. Из теоремы следует, что существует такая внутренняя точка $C(g(\xi), f(\xi)) \in \Gamma$, в которой касательная параллельна замыкающей хорде AB, где $A = (g(\alpha), f(\alpha))$, $B = (g(\beta), f(\beta))$.

Физическая интерпретация теоремы состоит в том, что существует момент времени, в котором вектор $(g'(\xi), f'(\xi))$ мгновенной скорости движения по кривой (траектории) Γ параллелен вектору $\overrightarrow{AB}$ замыкающей хорды.

Доказательство. Во-первых, заметим, что $g(\alpha) \neq g(\beta)$ (в противном случае из теоремы Ролля следует, что найдётся точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$, в которой $g'(t_0) = 0$). Следовательно, формулировка теоремы корректна.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) := f(t) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}(g(t) - g(\alpha)).$$

Функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, для которой

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} g'(\xi) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Замечание 9.5. *Теорема Лагранжа является частным случаем и следствием теоремы Коши: возьмите в формуле (9.2) функцию $g(t) = t$. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа: возьмите в формуле (9.1) конечных приращений $f(a) - f(b) = 0$. Однако теорема Ролля не следует из теоремы Лагранжа, поскольку для доказательства последней мы применяли теорему Ролля.*

9.3. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, заменяя функции в числителе и знаменателе их производными. Обоснования правила опираются на теоремы о среднем. Но предварительно (для сравнения) мы докажем утверждение, вытекающее из определения производной.

Лемма 9.1. *Если функции f и g дифференцируемы в точке a, $f(a) = g(a) = 0$, и $g'(a) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Из определения производной получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+o(x-a)}{g'(a)(x-a)+o(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)+o(x-a)/(x-a)}{g'(a)+o(x-a)/(x-a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

□

Теорема 9.5. *(О неопределённости типа $\frac{0}{0}$ в конечной точке, Гийом Франсуа Лопиталь)*

Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки $a\in\mathbb{R}$. Пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0,\ \forall x\neq a\ \hookrightarrow\ g'(x)\neq 0.$$

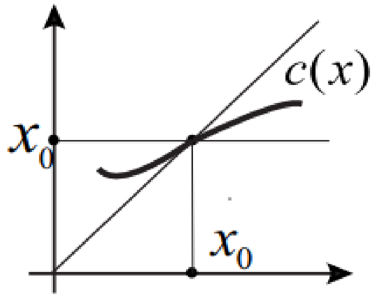
Пусть существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}f'(x)/g'(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. Тогда существует предел отношения функций и оба предела равны:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке a: $f(a)=g(a)=0$. Теперь обе функции непрерывны в некоторой окрестности $U(a)$ точки a и дифференцируемы в проколотой окрестности этой точки. Из теоремы Коши следует, что для любого $x\in\overset{o}{U}_\delta(a)$ найдется такое число c строго между a и x, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Определим для каждого $x\in\overset{o}{U}_\delta(a)$ указанное число c произвольным единственным способом. Тем самым мы определили функцию $c=c(x)$ (возможно разрывную), обладающую свойствами: $c(x)\to a$ при $x\to a$, но $c(x)\neq a$ при $x\neq a$



Поэтому из полученных выше равенств и теоремы о замене переменной под знаком предела следует утверждение теоремы. □

Замечание 9.6. *Из доказательства видно, что утверждение теоремы справедливо и для односторонних пределов.*

Следствие 9.1. ***(О неопределённости типа*** $0/0$ ***в бесконечности)***

Пусть функции f *и* g *дифференцируемы на луче* $(c, +\infty)$ $(c > 0)$*. Пусть*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0, \;\; \forall x > c \;\hookrightarrow\; g'(x) \neq 0.$$

Пусть существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)/g'(x)) \in \overline{\mathbb{R}}$*. Тогда существует предел отношения функций и оба предела равны:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi : (1/c, 0) \to (c, +\infty), \;\; \varphi(t) = \frac{1}{t},$$

которая всюду строго убывает и непрерывна, $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = +\infty$, а $Im(\varphi) = D(f/g)$. Согласно теореме о пределе сложной функции $\lim\limits_{t\to+0}(f(1/t)/g(1/t))$ существует только в том случае, когда существует предел внешней функции $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))$, причем пределы совпадают. Но предел сложной функции мы найдем с помощью теоремы О неопределённости типа $\frac{0}{0}$ в конечной точке и теореме о пределе сложной функции:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to+0}\frac{(f(1/t))'}{(g(1/t))'}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Замечание 9.7. *Чтобы иметь возможность сослаться на теорему о неопределённости типа* $\frac{0}{0}$ *в конечной точке, мы дважды применяли фактически одну и ту же замену — сначала в одну сторону, потом в противоположную.*

Теорема 9.6. ***(Лопиталя об одностороннем пределе в конечной точке для неопределенности типа*** ∞/∞***)***

Пусть функции f *и* g *дифференцируемы при* $x\in(a,b)$ *и* $g'(x)\neq 0$ *при* $x\in(a,b)$. *Пусть*

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a+0}g(x)=\infty.$$

Наконец, пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=C\in\mathbb{R}$. *Тогда существует*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C.$$

Доказательство. Покажем, что разность между отношением функций $f(x)/g(x)$ и числом C становится сколь угодно малой при $x\to a+0$. С помощью искусственных преобразований и теоремы Коши о среднем оценим эту разность через отношение производных $f'(\xi)/g'(\xi)$, где точка $\xi\to a+0$ при $x\to a+0$. Пусть $n\in\mathbb{N}$ столь велико, что $a+(1/n)\in(a,b)$, тогда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-C\right|=$$

$$=\left|\frac{f(a+(1/n))-f(x)}{g(a+(1/n))-g(x)}\left(\frac{g(a+(1/n))-g(x)}{f(a+(1/n))-f(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right)-C\right|=\dots$$

1) К первой дроби с $x\in(a,a+(1/n))$ применим теорему Коши с некоторым значением $\xi_n(x)\in(x,a+(1/n))\subset(a,a+(1/n))$;

2) в числителе второй дроби вынесем за скобки $g(x)$, а в знаменателе второй дроби вынесем за скобки $f(x)$;

3) прибавим и вычтем слагаемое, которое позволяет сгруппировать пары с общими множителями ...

$$\ldots = \left|\frac{f'(\xi_n(x))}{g'(\xi_n(x))} \cdot \frac{\frac{g(a+(1/n))}{g(x)}-1}{\frac{f(a+(1/n))}{f(x)}-1} - C\frac{\frac{g(a+(1/n))}{g(x)}-1}{\frac{f(a+(1/n))}{f(x)}-1} + C\frac{\frac{g(a+(1/n))}{g(x)}-1}{\frac{f(a+(1/n))}{f(x)}-1} - C\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\frac{g(a+(1/n))}{g(x)}-1}{\frac{f(a+(1/n))}{f(x)}-1}\right| \left|\frac{f'(\xi_n(x))}{g'(\xi_n(x))} - C\right| + |C|\left|\frac{\frac{g(a+(1/n))}{g(x)}-1}{\frac{f(a+(1/n))}{f(x)}-1} - 1\right| \leqslant \ldots$$

Пусть $C \neq 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

1) Выберем такое $n(\varepsilon)$, чтобы для всех $x \in (a, a + (1/n(\varepsilon)))$ выполнялось

$$\left|\frac{f'(\xi_n(x))}{g'(\xi_n(x))} - C\right| < \varepsilon/4;$$

2) выберем такое $0 < \delta(n(\varepsilon)) < 1/n(\varepsilon)$, чтобы для всех $x \in (a, a + \delta(n(\varepsilon)))$ выполнялось

$$(a)\ \left|\frac{g(a+(1/n))}{g(x)} - 1\right| < 1 + (\varepsilon/2),$$

$$(b)\ \left|\frac{f(a+(1/n))}{f(x)} - 1\right| > 1 - (\varepsilon/2),$$

$$(c)\ \left|\frac{\frac{g(a+(1/n))}{g(x)}-1}{\frac{f(a+(1/n))}{f(x)}-1} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2|C|}.$$

Тогда

$$\ldots \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Если $C = 0$, то рассуждения ещё проще (сделайте). □

Замечание 9.8. *Доказательство для случая $x \to a$ осуществляется точно так же. Случай неопределенности ∞/∞ при $x \to +\infty$ формулируется аналогично теореме Лопиталя об одностороннем пределе в конечной точке для неопределенности типа ∞/∞ и доказывается аналогично следствию о неопределённости типа $0/0$ в бесконечности. Теорема Лопиталя об одностороннем пределе в конечной точке для неопределенности типа ∞/∞ справедлива и для случаев $C = \pm\infty$ и $C = \infty$.*

Для удобства применения приводим единую формулировку всех случаев применения правила Лопиталя:

Теорема 9.7. *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности (полуокрестности) точки $a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, причём в указанной окрестности $g'(x) \neq 0$. Пусть*

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty(\pm\infty).$$

Если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, то существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

Замечание 9.9. *Правило Лопиталя — это достаточное условие существования предела. Предел отношения производных может отсутствовать, а предел отношения функций существовать.*

10. Формула Тейлора

Определение 1. Пусть существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. **Многочленом Тейлора** n-го порядка функции f в точке x_0 называется многочлен

$$P_n(f; x-x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \ \dots$$

$$\dots \ + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \ + \dots \ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Разность $r_n(f; x-x_0) := f(x) - P_n(f; x-x_0)$ называется **остаточным членом** n-го порядка функции f в точке x_0. $\boxtimes$ ‘

Определение. Представление функции f в виде

$$f(x) = P_n(f, x-x_0) + r_n(f, x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + r_n(f; x-x_0) \tag{10.1}$$

называется **формулой Тейлора** в точке x_0. $\boxtimes$

Лемма 1. *Пусть существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 верно:*

1. *Производная многочлена Тейлора функции f равна многочлену Тейлора на единицу меньшего порядка от производной f':*

$$(P_n(f; x-x_0))' \equiv P_n'(f; x-x_0) \equiv P_{n-1}(f'; x-x_0).$$

2. *Производные (до порядка n включительно) многочлена Тейлора по* переменной $t = x - x_0$ *в точке $t_0 = 0$ совпадают с соответствующими производными функции f в точке x_0:*

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(f; 0), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. *Производная остаточного члена n-го порядка равна остаточному члену на единицу меньшего порядка от производной:*

$$(r_n(f; x - x_0))' \equiv r_n'(f; x - x_0) \equiv r_{n-1}(f'; x - x_0).$$

4. *Производные (до порядка n включительно) остаточного члена по переменной $t = x - x_0$ в точке $t_0 = 0$ равны нулю:*

$$r_n^{(k)}(f; 0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство п. 1.:

$$P_n'(f; x - x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k\right)' =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k)!} (f')^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = P_{n-1}(f'; x - x_0).$$

Доказательство п. 2. Во-первых, для любой функции g, имеющей в точке x_0 производную порядка m, очевидно справедливо равенство $P_m(g; 0) = g(x_0)$. Во-вторых, применяя утверждение п. 1 k раз ($k \leq n$), получаем $P_n^{(k)}(f; x - x_0) = P_{n-k}(f^{(k)}; x - x_0)$. Поэтому $P_n^{(k)}(f; 0) = P_{n-k}(f^{(k)}; 0) = f^{(k)}(x_0)$.

Доказательство п. 3. В силу замечания 2, мы можем продифференцировать остаточный член и воспользоваться п. 1:

$$r_n'(f; x - x_0) = (f(x) - P_n(f; x - x_0))' = f'(x) - P_n'(f; x - x_0) =$$

$$f'(x) - P_{n-1}(f'; x - x_0) = r_{n-1}(f'; x - x_0).$$

Доказательство п. 4. Применим k раз утверждение п. 3 к остаточному члену $r_n(f; x - x_0)$; к полученному выражению применим определение 10; к полученному выражению k раз применим утверждение п. 1 – в результате:

$$r_n^{(k)}(f; x - x_0) = r_{n-k}(f^{(k)}; x - x_0) =$$

$$= f^{(k)}(x) - P_{n-k}(f^{(k)}; x - x_0) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(f; x - x_0).$$

Теперь подставим $x = x_0$ и воспользуемся п. 2. ■

10.1. Формулы Тейлора

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Пусть ***в точке*** *x_0 существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула (10.1), в которой $r_n(f;x-x_0) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство индукцией по n *для любой функции.* При $n = 1$ это определение **??** дифференцируемости с учетом теоремы **??** об эквивалентности существования конечной производной и дифференцируемости. Пусть утверждение верно при $n-1$ для любой функции. Применяя формулу (**??**) Лагранжа конечных приращений и пп. 3, 4 леммы 10, имеем:

$$\frac{r_n(f;x-x_0)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{п. 4}}{=} \frac{r_n(f;x-x_0) - r_n(f;0)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{Лагранж}}{=}$$

$$= \frac{r_n'(f;c(x-x_0))(x-x_0)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{п. 3}}{=} \frac{r_{n-1}(f';c(x-x_0))}{(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{индукция}}{=}$$

$$= \frac{o((c(x-x_0))^{n-1})}{(x-x_0)^{n-1}},$$

где $c = c(x-x_0)$ – произвольная функция, определяемая теоремой Лагранжа, значения которой находятся строго между нулем и $x - x_0$. Переходя к пределу, получаем

$$\frac{o((c(x-x_0))^{n-1})}{(x-x_0)^{n-1}} = \frac{o((c(x-x_0))^{n-1})}{(c(x-x_0))^{n-1}} \cdot \frac{(c(x-x_0))^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} \xrightarrow{x\to x_0} 0, \quad (10.2)$$

поскольку первая дробь в (10.2) имеет пределом ноль, а модуль второй ограничен единицей. Следовательно, $r_n(f;x-x_0) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$. ■

Наличие дополнительной производной позволяет уточнить вид остаточного члена.

Теорема 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Пусть в некоторой ***окрестности*** *$U(x_0)$ точки x_0 существует конечная производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда в этой окрестности справедлива формула (10.1), в которой*

$$r_n(f;x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ – некоторое число строго между нулем и $x - x_0$, если $x \neq x_0$, и ξ – любое достаточно малое число при $x = x_0$.

Доказательство индукцией по n, начиная с нуля. При $n = 0$ получаем формулу (**??**) Лагранжа. Пусть утверждение верно при $n-1$ для любой функции. Применяя формулу (**??**) Коши и пп. 3, 4 леммы 10, имеем

$$\frac{r_n(f; x - x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} \overset{\text{п. 4}}{=} \frac{r_n(f; x - x_0) - r_n(f; 0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \overset{\text{Коши}}{=}$$

$$= \frac{r_n'(f; \eta(x - x_0))}{(n+1)(\eta(x - x_0))^n} \overset{\text{п. 3}}{=} \frac{r_{n-1}(f'; \eta(x - x_0))}{(n+1)(\eta(x - x_0))^n} \overset{\text{индукция}}{=}$$

$$= \frac{(f')^n(x_0 + \xi(\eta))(\eta(x - x_0))^n}{(n+1)n!(\eta(x - x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \xi(\eta))}{(n+1)!},$$

где $\eta(x - x_0)$ строго между нулем и $x - x_0$, а $\xi(\eta)$ строго между нулем и η. (Например, если $x > x_0$, то $0 < \xi < \eta < x - x_0$.) При $x = x_0$ получаем $r_n(f; 0) = 0$ независимо от выбора ξ. ■

Замечание. В теореме 1 требуется существование n-й производной *в точке*; в теореме 2 требуется существование следующей $(n+1)$-й производной *в окрестности* исследуемой точки, т.е. существенно больше. Зато появляется возможность использовать свойства $(n+1)$-й производной на всей окрестности, т.е. на некотором интервале, которому принадлежит точка x_0.

11. Исследование функции с помощью производных

11.1. Условия монотонности

Теорема 1 (критерий нестрогой монотонности функции).

Пусть функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ *и дифференцируема внутри него. Она нестрого возрастает (убывает) на отрезке тогда и только тогда, когда ее производная неотрицательна (неположительна). В символах:*

$$\forall x_1, x_2 : \ a \leq x_1 < x_2 \leq b \ \hookrightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2) \ \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in (a, b) \hookrightarrow \ f'(x) \geq 0.$$

Геометрический смысл. Дифференцируемая функция нестрого возрастает только в том случае, когда угол наклона касательной в каждой внутренней точке графика неотрицательный.

Доказательство

$\boxed{\Rightarrow}$

Из условия следует, что

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$

При условии $x_2 > x_1$ из теоремы Лагранжа следует, что

$$\operatorname{sgn}(f(x_2) - f(x_1)) = \operatorname{sgn}(f'(\xi)(x_2 - x_1)) = \operatorname{sgn} f'(\xi) \geq 0. \blacksquare$$

Теорема 2. (достаточные условия строгой монотонности функции).

Пусть функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема внутри него. Если ее производная всюду положительна (отрицательна), то функция строго возрастает (убывает) на отрезке. В символах:

$$\forall x \in (a,b) \hookrightarrow f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \forall x_1, x_2 : \; a \leq x_1 < x_2 \leq b \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Доказательство. При условии $x_2 > x_1$ из теоремы Лагранжа следует, что

$$\operatorname{sgn}(f(x_2) - f(x_1)) = \operatorname{sgn}(f'(\xi)(x_2 - x_1)) = \operatorname{sgn} f'(\xi) > 0. \blacksquare$$

Замечание 1. *В условиях теорем 1 и 2 отрезок можно заменить промежутком (в том числе, и с бесконечными концами).*

Замечание 2. *В теореме 2 сформулированы именно достаточные условия строгой монотонности.*

Пример 1. Функция $y = x^3$ строго возрастает на всей оси, однако в точке $x = 0$ ее производная равна нулю.

11.2. Условия локального экстремума

Если функция дифференцируема, теорема **??** Ферма дает *необходимые* условия локального экстремума (обнуление производной).

Теорема 3. (достаточные условия строгого локального экстремума).

Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности. Пусть слева от x_0 производная строго положительна (отрицательна), а справа – строго отрицательна (положительна). Тогда точка x_0 является точкой строгого максимума (минимума). Другими словами: если знак производной меняется с плюса (минуса) на минус (плюс), то x_0 – точка строгого максимума (минимума)

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ функция строго возрастает, на полуинтервале $[x_0, x_0 + \delta)$ – строго убывает. $\blacksquare$

Замечание 3. *Ценность теоремы 3 в том, что не требуется существование производной в исследуемой точке x_0.* ⊟

Примеры 1. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ – в обоих случаях точка $x_0 = 0$ является строгим минимумом, в которой производная отсутствует (рис. 11.1, 11.2)

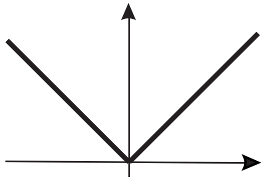


Рис. 11.1

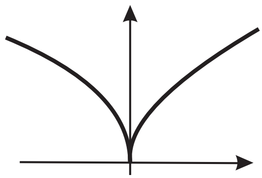


Рис. 11.2

Если первая и несколько следующих производных обнуляются в точке x_0, то знак первой отличной от нуля производной характеризует поведение функции в точке x_0:

Теорема 4. (достаточные условия строгого экстремума в терминах производных высших порядков).

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ имеют место условия

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1. *если $n = 2m$ четно ($m \in \mathbb{N}$), то точка x_0 является точкой локального экстремума: при $f^{(2m)}(x_0) > 0$ точкой строгого локального минимума, при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ точкой строгого локального максимума;*

2. *если $n = 2m + 1$ нечетно, то точка x_0 НЕ является точкой нестрогого локального экстремума.*

Доказательство. Из условия теоремы и формулы Тейлора следует, что

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x - x_0) \right),$$

где функция $\varepsilon(x-x_0) \to 0$ при $x \to x_0$. При всех x достаточно близких к x_0 знак выражения в скобках совпадает со знаком производной. При четном n все выражение в малой проколотой окрестности имеет знак производной и обнуляется только в точке x_0. Следовательно, это точка строгого экстремума. При нечетном n выражение меняет меняет знак при переходе через точку x_0. Следовательно, это не есть точка экстремума. ■

Замечание 4. *Теоремы 3 и 4 дают достаточные условия строгого экстремума, однако в первой предъявляются требования к функции в некоторой проколотой окрестности точки, а во второй – в самой точке x_0. Подчеркнем, что условия теорем 3 и 4 именно достаточные для существования локального экстремума.*

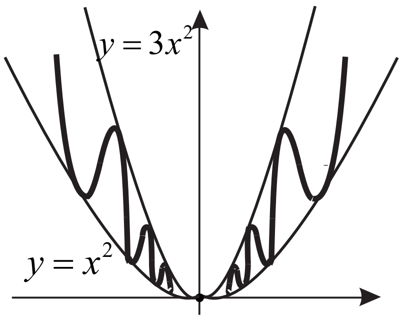


Рис. 11.3

11.3. Выпуклость

Определение выпуклости функции.

Функция f называется нестрого выпуклой внизз (вверх) на промежутке $\langle a,b\rangle$, если для любых двух точек $x_1 < x_2$ из этого промежутка и любого числа $t \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{11.1}$$

Функция f называется **строго** *выпуклой вниз (вверх) на промежутке $\langle a,b\rangle$, если предыдущее неравенство выполняется с $<$ $>$ вместо $\leq$ $\geq$ соответственно.*

Геометрический смысл. Соединим точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ графика функции f хордой AB. Параметрическое задание хорды имеет вид:

$$C(t): \quad x(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \quad y(t) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in [0,1].$$

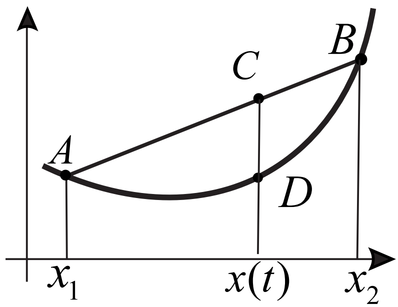


Рис. 11.4

Точка $D((1-t)x_1 + tx_2, f((1-t)x_1 + tx_2))$, принадлежащая графику, имеет ту же абсциссу, что и точка C. Следовательно, неравенство (11.1) означает, что каждая точка C любой хорды AB графика нестрого (строго) выпуклой вниз функции находится не ниже (выше) соответствующей точки D дуги $\smile{AB}$ графика (рис. 11.4). Часто выпуклую вниз функцию называют просто выпуклой, а выпуклую вверх – вогнутой.

Замечание 5. *Выпуклость и монотонность – независимые между собой свойства функции. Выпуклость и экстремальные свойства функции связаны: строго выпуклая вниз функция может иметь только строгий минимум, строго выпуклая вверх – может иметь только строгий максимум.* $\boxminus$

Оказывается, понятие выпуклости проявляет себя через *односторонние производные*:

Теорема 5.

Функция f нестрого выпукла вниз на ***интервале*** (a,b) *тогда и т. т., когда выполнены два условия:*

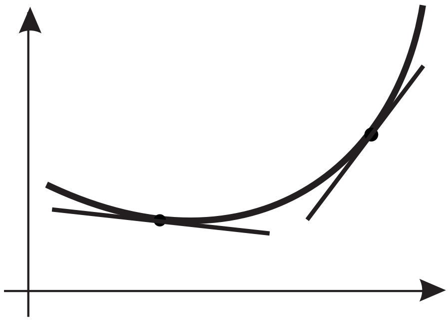


Рис. 11.5

1. *в каждой точке $x \in (a,b)$ существуют конечные односторонние производные $f'_{\pm}(x)$, причем левая не больше правой:*

$$\forall x \in (a,b) \ \hookrightarrow \ -\infty < f'_{-}(x) \leq f'_{+}(x) < +\infty;$$

2. *для любых двух разных точек правая производная в левой точке не больше левой производной в правой точке:*

$$\forall x_1, x_2 : \ a < x_1 < x_2 < b \ \hookrightarrow \ f'_{+}(x_1) \leq f'_{-}(x_2).$$

Из теоремы 5 следует

Теорема 6 (основные свойства выпуклых функций).
Если функция нестрого выпукла вниз на интервале, то она на нем:

1. *всюду непрерывна;*
2. *всюду имеет конечные односторонние производные, которые нестрого возрастают;*
3. *за исключением, возможно, счетного множества функция дифференцируема, причем если в точках $x_1 < x_2$ функция дифференцируема, то $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.*

Задача. Сформулируйте основные свойства функции, которая нестрого выпукла вверх на интервале.

Замечание 6. *Утверждения теоремы 6 показывают, что выпуклость сильнее, чем непрерывность и (с точностью до счетного множества) дифференцируемость.*

Замечание 7. *Определение выпуклости сохраняет свой смысл и на (полу)отрезке. Однако свойство непрерывности может в концах отрезка исчезнуть, а односторонние производные стать бесконечными.*

Опираясь на теорему 5, дадим сразу

Доказательство теоремы 6.

П. 1. В силу существования конечных односторонних производных (первое условие теоремы 5, в каждой точке функция непрерывна и слева, и справа; следовательно, она непрерывна (см. теорему **??** и лемму **??**).

П. 2. Из обоих условий теоремы 5 следует, что

$$\forall x_1, x_2 : \ a < x_1 < x_2 < b \ \hookrightarrow$$

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2). \tag{11.2}$$

П. 3. Из доказанного п. 2 и теоремы **??** о разрывах монотонных функций следует, что односторонние производные имеют не более, чем счетное множество разрывов первого рода. Покажем, что разрывы могут происходить только одновременно в обеих односторонних производных. Пусть x_0 – точка непрерывности функции f'_+. Согласно оценкам (11.2), в произвольных точках $x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < x_4$ справедливо

$$f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_0) \le f'_-(x_3) \le f'_+(x_4).$$

Воспользовавшись непрерывностью функции f'_+ в точке x_0, сделаем предельный переход при $x_1 \to x_0 - 0$ и $x_4 \to x_0 + 0$:

$$\lim_{x_2 \to x_0 - 0} f'_-(x_2) = f'_+(x_0) = \lim_{x_3 \to x_0 + 0} f'_-(x_3).$$

Последнее означает непрерывность функции f'_- в точке x_0 и *совпадение* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Аналогично доказывается, что непрерывность функции f'_- влечет непрерывность f'_+ и их совпадение.

Итак, обе односторонние производные разрываются одновременно не более, чем на счетном множестве точек. Значит, во всех остальных точках односторонние производные совпадают и равны производной: $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$. ■

11.4. Доказательство теоремы 5 (необходимость)

Оно опирается на свойства выражения (функции двух переменных)

$$\operatorname{tg}(f; x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ где } x_1 \neq x_2.$$

Геометрический смысл этого выражения – тангенс угла наклона секущей AB (рис. 11.6).

Лемма 1 (свойства тангенса наклона секущей).

Если функция f нестрого выпукла вниз на (a, b), то ее функция тангенса

1. *симметрична:* $\operatorname{tg}(x_1, x_2) = \operatorname{tg}(x_2, x_1)$*;*

2. *нестрого возрастает по каждой переменной в каждом допустимом интервале; например, при $x_1 < x_2 < x_2'$ верно $\operatorname{tg}(x_1, x_2) \leq \operatorname{tg}(x_1, x_2')$;*

3. *справедливо неравенство трех точек: для любых $x_1 < x < x_2$ верно*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{11.3}$$

См. рис. 11.6 и 11.7.

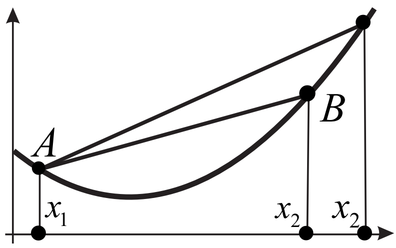


Рис. 11.6

Доказательство.

П. 1. Следует из определения функции $\operatorname{tg}(x_1, x_2)$.

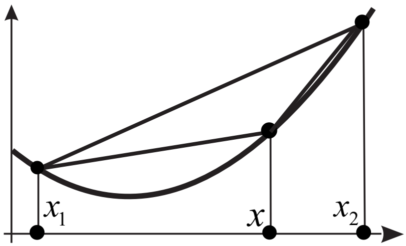


Рис. 11.7

П. 2. Следует из определения (11.1) после специальных преобразований. Пусть $x_2 = x_1 + \delta$, $x_2' = x_1 + \Delta$, где $0 < \delta < \Delta$. Тогда

$$f(x_2) = f(x_1 + \delta) = f\left(\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)x_1 + \frac{\delta}{\Delta}(x_1 + \Delta)\right) \overset{(11.1)}{\leq}$$

$$\leq \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)f(x_1) + \frac{\delta}{\Delta}f(x_1 + \Delta) = \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_2' - x_1}\right)f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_2' - x_1}f(x_2') \Leftrightarrow$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_2' - x_1}(f(x_2') - f(x_1)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2') - f(x_1)}{x_2' - x_1}.$$

Первое неравенство в (11.3) есть следствие п. 2 по второй переменной, второе неравенство в (11.3) – следствие п. 2 по первой переменной. ■

Доказательство теоремы 5 (необходимость). Зафиксируем точку x. В неравенстве (11.3) рассмотрим крайние дроби как неубывающие функции по переменным $x_1 < x$ и $x_2 > x$ соответственно:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Указанная монотонность позволяет в неравенстве перейти к пределу:

$$-\infty < f'_-(x) = \sup_{x_1 < x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \inf_{x_2 > x} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_+(x) < +\infty.$$

П. 1 теоремы доказан.

Зафиксируем точки x_1, x_2, а точку x понимаем как переменную. Учитывая, что существование конечных односторонних производных уже обосновано, из левого и правого неравенств в (11.3) получаем:

$$f'_+(x_1) = \inf_{x>x_2} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1};$$

$$f'_-(x_2) = \sup_{x<x_2} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \ge \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

что доказывает п. 2. ■

Задача.

1) Доказательство достаточности в теореме 5 опирается на теорему Лагранжа о среднем для односторонних производных: пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет на (a,b) конечную правую производную $f'_+(x)$. Докажите, что: или существует точка $c \in (a,b)$, в которой имеет место формула конечных приращений $f(b)-f(a) = f'_+(c)(b-a)$, или существуют две разные точки $c_1, c_2 \in (a,b)$, в которых $f(b)-f(a) < f'_+(c_1)(b-a)$ и $f(b)-f(a) > f'_+(c_2)(b-a)$.

2) Опираясь на предыдущее утверждение, докажите достаточность в теореме 5.

11.5. Выпуклость в условиях второй производной

Теперь, когда мы увидели, что выпуклость связана с монотонностью первой производной, естественно исследовать ее в предположении существования второй производной. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2

Если в точке x_0 существует конечная вторая производная, то ее можно вычислить по формуле

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)-2f(x_0)}{(\Delta x)^2}. \tag{11.4}$$

Замечание 8. *Предложенная формула не эквивалентна определению второй производной, поскольку указанный предел может существовать и в том случае, когда вторая производная отсутствует.*

Ценность формулы (11.4) в том, что она позволяет вычислять вторую *производную не через первую производную (как требует определение), а непосредственно через функцию.*

Доказательство. Выпишем формулу Тейлора для двух видов приращений аргумента:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2),$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2).$$

Сложим равенства, разделим полученное равенство на квадрат приращения и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим требуемое. ■

Теорема 7 (критерий нестрогой выпуклости в условиях существования второй производной).

Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда функция f нестрого выпукла вниз (вверх) на (a, b) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).

Доказательство

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть функция выпукла вверх. Тогда в любой точке интервала x и для произвольного достаточно малого приращения Δx точки $x \pm \Delta x \in (a, b)$, в силу определения выпуклости, получаем при $t = 1/2$:

$$f(x) = f\left(\frac{(x + \Delta x) + (x - \Delta x)}{2}\right) \geq \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)}{2}.$$

Следовательно,

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x) \leq 0.$$

Разделим полученное неравенство на $(\Delta x)^2$ и перейдем к пределу при условии $\Delta x \to 0$. Из равенства (11.4) получаем, что $f''(x) \leq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Проверим условие выпуклости вверх. Обозначим $x(t) := (1 - t)x_1 + tx_2$. Исследуем разность

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-f(x(t)) = (1-t)(f(x_1)-f(x(t)))+t(f(x_2)-f(x(t)))\ldots$$

Применим формулу Тейлора в форме Лагранжа к полуинтервалам $(x_1, x(t)]$ и $[x(t), x_2)$ $(t \in (0, 1))$:

$$\ldots = (1 - t)(f'(x(t))(x_1 - x(t)) + \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x(t))^2)+$$

$$+ t(f'(x(t))(x_2 - x(t)) + \frac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x(t))^2) \dots$$

Поскольку вторые производные неположительны, отбрасывая слагаемые с ними, мы не уменьшаем выражение. Поэтому

$$\dots \leq f'(x(t))((1-t)x_1 - (1-t)x(t) + tx_2 - tx(t)) =$$

$$= f'(x(t))((1-t)x_1 + tx_2 - x(t)) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 8 (достаточные условия строгой выпуклости при существовании второй производной).

Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если вторая производная всюду строго положительна (отрицательна), то функция f строго выпукла вниз (вверх) на (a, b).

Задача. Докажите теорему 8.

Замечание 9. *В теореме 8 сформулированы именно достаточные условия строгой выпуклости.*

Пример 2. *Функция $f(x) = x^4$ строго выпукла вниз на всей оси, однако в точке $x = 0$ ее вторая производная равна нулю.*

Замечание 10. *Обращаем внимание, что теоремы 1 и 2 о монотонности и теоремы 7 и 8 о выпуклости имеют аналогичные логические конструкции.*

Определение. *Точка x_0 называется **точкой перегиба** функции f, если в этой точке: 1) функция непрерывна, 2) существует производная $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ и 3) найдется такое $\delta > 0$, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция нестрого выпукла вверх (вниз), а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ – нестрого выпукла вниз (вверх) (рис. 11.8, 11.9).*

Другими словами, в точке перегиба график имеет касательную прямую и при переходе через эту точку меняется тип выпуклости. В силу теоремы 9, по разные сторона от точки перегиба график находится по разные стороны от касательной (в широком смысле). Заметим, что на рис. 11.10 в точке $x_0 = 0$ происходит изменение характера выпуклости, но такую точку мы не трактуем как точку перегиба, поскольку в ней отсутствует касательная к графику. Точку *разрыва*, в которой

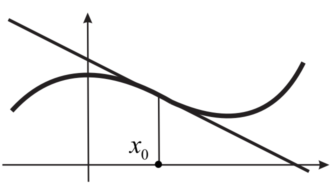


Рис. 11.8

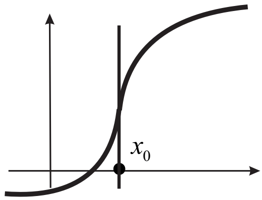


Рис. 11.9

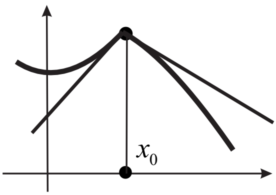


Рис. 11.10

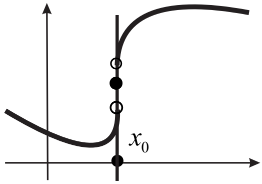


Рис. 11.11

существует бесконечная производная (рис. 11.11) мы также не трактуем как точку перегиба. Не следует думать, что точка перегиба обязательно изолирована: если график содержит отрезок, то все его точки автоматически являются точками перегиба.

Теорема 10 (критерий точки перегиба в условиях существования второй производной).

Пусть: 1) функция f непрерывна в точке x_0, 2) существует $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, 3) в проколотой окрестности существует конечная вторая производная $f''(x)$. Тогда точка x_0 является точкой перегиба в том и только том случае, если найдется такое $\delta > 0$, что одновременно выполняются два условия:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) & \hookrightarrow & f''(x) \leq 0 \quad (\geq 0), \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) & \hookrightarrow & f''(x) \geq 0 \quad (\leq 0). \end{array} \right.$$

Т.е. вторая производная нестрого меняет знак при переходе через точку x_0.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 7.

Задача.

Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$. Докажите, что точка x_0 является точкой перегиба.

12. Равномерная непрерывность функции на множестве

Определение 1. *Функция f называется* ***равномерно непрерывной на подмножестве*** $X \subset \mathbb{R}$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x, \widehat{x} \in X$ таких, что $\rho(x, \widehat{x}) < \delta$, справедлива оценка $|f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon): \ \forall x, \widehat{x} \in X \quad \rho(x, \widehat{x}) < \delta \ \hookrightarrow \ |f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon. \tag{12.1}$$

Лемма 1. *Если функция равномерно непрерывна на некотором множестве X, то она равномерно непрерывна на любом его подмножестве $\widetilde{X} \subset X$.*

Лемма 2. *Из равномерной непрерывности функции на X следует ее непрерывность на X.*

Доказательство. Хотя утверждение очевидно, рассмотрим ситуацию формально-логически на языке кванторов. Сравнивая определения (**??**) и (12.1), мы видим, что в первом определении точка x стоит *перед* выбором δ, поэтому δ зависит от x. Во втором определении δ не зависит от x. Значит, из второго определения следует первое. ■

Теорема 1 (***Кантора о равномерной непрерывности на компакте***). *Если функция f непрерывна на* ***компактном*** *подмножестве, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство от противного. Тогда выполняется (**??**). Чтобы построить последовательность точек, возьмем последовательность чисел $\delta_k = 1/k$ $(k = 1, 2 \ldots)$. Возникают две последовательности точек

$x_k, \widehat{x}_k \in X$ таких, что $\rho(x_k, \widehat{x}_k) < 1/k$, но $|f(x_k) - f(\widehat{x}_k)| \geq \varepsilon_0$. В силу компактности X, из последовательности $\{x_k\}$ выбираем сходящуюся подпоследовательность: $x_{k_m} \to x_0 \in X$ при $m \to \infty$. Поскольку

$$\rho(\widehat{x}_{k_m}, x_0) < \rho(\widehat{x}_{k_m}, x_{k_m}) + \rho(x_{k_m}, x_0) < \frac{1}{k_m} + \rho(x_{k_m}, x_0) \to 0$$

при $m \to \infty$, то получаем вторую сходящуюся к той же точке x_0 подпоследовательность $\widehat{x}_{k_m} \to x_0$. В силу *непрерывности функции в точке* x_0, получаем

$$\lim_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = \lim_{m\to\infty} f(\widehat{x}_{k_m}) = f(x_0).$$

Поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} |f(x_{k_m}) - f(\widehat{x}_{k_m})| = 0$. Что противоречит допущению. ■

Следствие 1. *Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем.*