Оглавление

0.1. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных (вещественных) чисел

Определение 0.1. *Множества X и Y называются равномощными, если существует взаимно однозначное соответствие $f : X \to Y$.*

Определение 0.2. *Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется счётным.*

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчётным.

Теорема 0.1. *Множество рациональных чисел счётно.*

Доказательство. Составим таблицу чисел (открытую снизу и справа), содержащую все рациональные числа:

$n \backslash m$	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\ldots$
1	0/1	1/1	$-1/1$	2/1	$-2/1$	3/1	$-3/1$	$\ldots$
2	0/2	1/2	$-1/2$	2/2	$-2/2$	3/2	$-3/2$	$\ldots$
3	0/3	1/3	$-1/3$	2/3	$-2/3$	3/3	$-3/3$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Рис. 1 Таблица, содержащая все рациональные числа

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла по следующему пути:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
{}_{n}\diagdown^{m} & 0 & & 1 & & -1 & & 2 & \cdots \\ \hline
1 & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{-1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
2 & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{2}{2} & \cdots \\
 & \downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
3 & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{-1}{3} & & \frac{2}{3} & \cdots \\
 & & & & & & & \downarrow & \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа и пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались (сократимые дроби).

эл. табл.	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	…
номер	1	2	3	–	–	4	5	6	7	8	–	…

Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами таблицы (рациональными числами) и их номерами (натуральными числами), т. е. между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$. Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ счётно. □

Теорема 0.2. ***Кантор.*** *Множество всех точек отрезка* $[0;1]$ *несчётно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0;1]$ можно занумеровать: $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Поделим отрезок $[0;1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1;b_1]$ один из них, свободный от точки x_1. Поделим $[a_1;b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2;b_2]$ один из них, свободный от точки x_2. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n;b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка не совпадает ни с одной из занумерованных точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$, так как любая из них x_j не содержится в отрезке $[a_j; b_j]$, то время как c содержится в этом отрезке. Итак, при допущении, что все точки отрезка $[0;1]$ занумерованы, мы пришли к противоречию, найдя точку $c \in [0;1]$, отличную от каждой из занумерованных. Это противоречие показывает, что наше допущение неверно. $\square$

Следствие 0.1. *Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел несчётно.*

Определение 0.3. *Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называют также числовым континуумом (continuum (лат.) — непрерывное, сплошное), а его мощность — мощностью континуума.*

0.2. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани множества

Определение 0.4. *Число M называется точной верхней гранью или супремумом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $M = \sup A$), если M является минимальной верхней гранью множества A, т.е.*

1) M является верхней гранью множества A и

2) $\forall M' \in \mathbb{R}$: (M' является верхней гранью множества A) $\hookrightarrow$ $M \leqslant M'$.

Замечание 0.1. *Для любых условий U_1 и U_2 условие $U_1 \Rightarrow U_2$ эквивалентно условию $\neg U_2 \Rightarrow \neg U_1$. Это проверяется по таблице истинности. На этом свойстве основан метод доказательства от противного.*

Замечание 0.2. *Условие (M' является верхней гранью множества A) $\hookrightarrow M \leqslant M'$ эквивалентно условию $M' < M \hookrightarrow$ (M' не является верхней гранью множества A). Следовательно,*

$$\sup A = M \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1) \ \forall a \in A \ \hookrightarrow \ a \leqslant M \ \ и \\ 2) \ \forall M' < M \ \exists a \in A : \ M' < a. \end{cases}$$

Замечание 0.3. *Точная верхняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.*

Теорема 0.3. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда существует единственное число $M \in \mathbb{R}$, которое является точной верхней гранью множества A.*

Доказательство. Рассмотрим B — множество всех (конечных) верхних граней множества A. Так как множество A ограничено сверху, то B не пусто. Поскольку $\forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$, то по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$.

Покажем, что c является точной верхней гранью A. Так как $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant c$, то c является верхней гранью A, т.е. $c \in B$. Поскольку $\forall b \in B \hookrightarrow c \leqslant b$, то c — минимальный элемент B. Итак, c — точная верхняя грань A.

Предположим, что $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — две различные точные верхние грани множества A. Тогда c_1, c_2 — два различных минимальных элемента множества B. Пусть для определенности $c_1 < c_2$. Тогда c_2 не является минимальным элементом множества B. Противоречие. $\square$

Определение 0.5. *Расширенным множеством действительных чисел $\bar{\mathbb{R}}$ называется множество*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

так что элементами множества $\bar{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и ещё два элемента: $-\infty$, $+\infty$.

На множестве $\bar{\mathbb{R}}$ не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ в случае $a, b \in \mathbb{R}$ отношение порядка то же, что в $\mathbb{R}$. В других же случаях оно определено так: $-\infty < a$, $a < +\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $-\infty < +\infty$.

Рассматривая множество $X \subset \mathbb{R}$ как подмножество расширенного множества действительных чисел ($X \subset \bar{\mathbb{R}}$), можно обобщить понятие $\sup X$. Это обобщающее определение будет отличаться от приведённого выше лишь тем, что в качестве M можно брать не только число, но и элемент $+\infty$.

Определение 0.6. *Точной верхней гранью неограниченного сверху множества считается $+\infty$.*

Теорема 0.4. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое множество.*

а) Существует единственная точная верхняя грань множества $A : \sup A \in \bar{\mathbb{R}}$.

б) Если множество A ограничено сверху, то $\sup A \in \mathbb{R}$, иначе $\sup A = +\infty$.

в) $\sup A = M \in \bar{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ \forall a \in A \ \hookrightarrow \ a \leqslant M, \\ (2)\ \forall M' < M\ \exists a \in A : \ M' < a. \end{cases}$

Доказательство. В случае, когда множество A ограничено сверху, доказываемые утверждения следуют из теоремы 0.3 и замечания перед этой теоремой.

Пусть теперь множество A неограничено сверху. Согласно определению не существует конечной верхней грани множества A. Поэтому никакое число не является точной верхней гранью A. В этом случае единственной точной верхней гранью A является $+\infty$.

Обоснуем пункт (в). $\Rightarrow$: Пусть $M = \sup A = +\infty$.Тогда пункт (1) следует из неравенства $a \leqslant +\infty$ для любого $a \in \mathbb{R}$, а пункт (2) следует из того, что множество A неограничено сверху.

$\Leftarrow$: Из пункта (1) и неограниченности сверху множества A следует, что $M = +\infty$. Поэтому $M = \sup A$. $\square$

Аналогично сформулируем определение точной нижней грани.

Определение 0.7. *Число m называется точной нижней гранью или инфимумом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $m = \inf A$), если m является максимальной нижней гранью множества A, т.е.*

1) m является нижней гранью множества A и

2) $\forall m' \in \mathbb{R}$: (m' является нижней гранью множества A) $\hookrightarrow$ $m \geqslant m'$.

Точной нижней гранью неограниченного снизу множества считается $-\infty$.

Теорема 0.5. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое множество.*

а) Существует единственная точная нижняя грань множества $A : \inf A \in \bar{\mathbb{R}}$.

б) Если множество A ограничено снизу, то $\inf A \in \mathbb{R}$, иначе $\inf A = -\infty$.

в) $\inf A = m \in \bar{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (1)\ \forall a \in A\ \hookrightarrow\ a \geqslant m, \\ (2)\ \forall m' > m\ \exists a \in A :\ m' > a. \end{array} \right.$

Доказательство теоремы 0.5 аналогично доказательству теоремы 0.4. $\square$

0.3. Теорема Кантора о вложенных отрезках

Определение 0.8. *Множество отрезков*

$$\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty} = \{[a_1; b_1], [a_2; b_2], \ldots\},$$

$$-\infty < a_n < b_n < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

называется системой вложенных отрезков, если $[a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, т.е. каждый отрезок содержит следующий за ним.

В следующей теореме формулируется свойство, называемое непрерывностью множества действительных чисел по Кантору.

Теорема 0.6. ***(Кантора).*** *Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Очевидно, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant a_{n+m} < b_{n+m} \leqslant b_m.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число c такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $m = n$ получаем, что

$$c \in [a_n, b_n] \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Определение 0.9. *Система вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется стягивающейся, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$.*

Теорема 0.7. *Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.*

Доказательство. По крайней мере одна общая точка для отрезков рассматриваемой системы имеется в силу теоремы 0.6. Покажем, что общих точек не больше одной. Допустив противное, предположим, что каждая из двух различных точек c и c' является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определённости, $c' < c$, т.е. $\varepsilon := c - c' > 0$. По определению стягивающейся системы $\exists n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leqslant c' < c \leqslant b_n$. Отсюда $c - c' \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, что противоречит выбору ε. □

0.4. Единственность предела сходящейся последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности

Лемма 0.1. *Пусть $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ и $a < b$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\forall x \in U_\varepsilon(a)\ \forall y \in U_\varepsilon(b)\ \hookrightarrow\ x < y,$$

а значит, окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются.

Доказательство. Возможны четыре случая:
(1) $-\infty < a < b < +\infty$;
(2) $-\infty < a < b = +\infty$;
(3) $-\infty = a < b < +\infty$;
(4) $-\infty = a < b = +\infty$.

в случае (1) положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, в случае (2): $\varepsilon = \dfrac{1}{|a|+1}$, в случае (3): $\varepsilon = \dfrac{1}{|b|+1}$, в случае (4): $\varepsilon = 1$.

Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$, $y \in U_\varepsilon(b)$. Покажем, что в каждом из четырёх случаев $x < y$. Отсюда будет следовать, что окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются.

(1) $x < a + \varepsilon = a + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b}{2} = b - \varepsilon < y$;

(2) $x \leqslant a + 1 \leqslant |a| + 1 = \dfrac{1}{\varepsilon} < y$.

Случаи (3) и (4) рассмотрите самостоятельно. $\square$

Теорема 0.8. ***(Единственность предела.)*** *Числовая последовательность не может иметь более одного предела из $\bar{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Предположим противное: последовательность $\{a_n\}$ имеет пределы $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. По лемме 0.1

$$\exists \varepsilon > 0 :\ U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = .$$

По определению предела

$$\exists N_1 :\ \forall n \geqslant N_1\ \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(a),$$

$$\exists N_2 :\ \forall n \geqslant N_2\ \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(b).$$

При $n \geqslant \max\{n_1, N_2\}$ получаем $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ — противоречие. $\square$

Задача 0.1. *Докажите, что последовательность* $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, *не имеет ни конечного ни бесконечного предела.*

Определение 0.10. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется ограниченной (сверху, снизу), если ограничено (соответственно сверху, снизу) множество значений её элементов.*

В частности,

$$\{a_n\} \text{ ограничена } \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: \forall a \in \{a_1, a_2, \ldots\} \hookrightarrow |a| \leqslant M \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a| \leqslant M.$$

Теорема 0.9. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Возьмём $\varepsilon = 1$. По определнию предела $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \in (a-1; a+1)$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$-|a| - 1 \leqslant a - 1 < a_n < a + 1 \leqslant |a| + 1,$$

а значит, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow |a_n| < |a| + 1$.

Определим $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}, |a|+1\}$ (максимум существует, так как множество конечно). Тогда для $n \in \mathbb{N}$, $n < N$ по определению максимума $|a_n| \leqslant M$. При $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$ имеем $|a_n| < |a| + 1 \leqslant M$. Итак $n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| \leqslant M$, т.е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена. $\square$

0.5. Бесконечно малые последовательности и их свойства

Определение 0.11. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \hookrightarrow \ |a_n| < \varepsilon.$$

Непосредственно из определения предела последовательности следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n - a\}$ является бесконечно малой. Используя это обстоятельство, из свойств бесконечно малых последовательностей мы получим свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями.

Задача 0.2. *Докажите, что*
1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow |a+b| \leqslant |a| + |b|$ *(неравенство треугольника).*
2) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow ||a| - |b|| \leqslant |a-b|$.

Лемма 0.2. *Если* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *— бесконечно малые последовательности, то* $\{a_n + b_n\}$ *и* $\{a_n - b_n\}$ *— бесконечно малые последовательности.*

Доказательство. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N_1 \;\; \hookrightarrow \;\; |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N_2 \;\; \hookrightarrow \;\; |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, используя неравенство треугольника

$$|a_n \pm b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|,$$

получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |a_n \pm b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = 0$. $\square$

Лемма 0.3. *Если* $\{a_n\}$ *— ограниченная последовательность, а* $\{b_n\}$ *— бесконечно малая последовательность, то* $\{a_n b_n\}$ *— бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то

$$\exists M > 0: \; \forall n \in \mathbb{N} \; \hookrightarrow \; |a_n| \leqslant M.$$

Так как последовательность $\{b_n\}$ является бесконечно малой, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |b_n| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{N} = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant \bar{N} \;\; \hookrightarrow \;\; |a_n b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{a_n b_n\}$ является бесконечно малой. $\square$

0.6. Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема 0.10. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *то существуют* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

Доказательство. Так как последовательности $\{a_n - a\}$ и $\{b_n - b\}$ являются бесконечно малыми, то в силу леммы 0.2 последовательности $\{a_n + b_n - (a+b)\} = \{(a_n - a) + (b_n - b)\}$ и $\{a_n - b_n - (a - b)\} = \{(a_n - a) - (b_n - b)\}$ являются бесконечно малыми, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$. $\square$

Теорема 0.11. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, *то существует* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Доказательство. Имеем $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$. Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ в силу определения предела получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. $\square$

Теорема 0.12. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *то существуют* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

Доказательство. Требуется доказать, что последовательность $\{a_n b_n - ab\}$ является бесконечно малой.

Заметим, что $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$. Так как последовательность $\{a_n\}$ сходится, то по теореме 0.9 она ограничена. В силу леммы 0.3 последовательности $\{a_n(b_n - b)\}$ и $\{(a_n - a)b\}$ бесконечно малые, следовательно, по лемме 0.2 последовательность $\{a_n b_n - ab\}$ также является бесконечно малой. $\square$

Лемма 0.4. *Если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

Доказательство. В силу теоремы 0.11 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a| > 0$. Отсюда, положив в определении предела последовательности $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, получаем, что $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow |a_n| > |a| - \varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, т.е. $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow \left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \dfrac{2}{|a|}$.

Определим число $M = \max\left\{\frac{1}{|a_1|}, \ldots, \frac{1}{|a_{N-1}|}, \frac{2}{|a|}\right\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hookrightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \leqslant M$, т.е. последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ограничена. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{a_n a}\right\}$ также ограничена. Отсюда и из леммы 0.3 следует, что последовательность $\left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right\} = \left\{\frac{1}{a_n a}(a - a_n)\right\}$ является бесконечно малой, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. $\square$

Теорема 0.13. *Если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$.

Доказательство. В силу леммы 0.4 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. Поэтому, согласно, теореме 0.12, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \frac{1}{a_n} = b\frac{1}{a} = \frac{b}{a}$. $\square$

0.7. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема 0.14. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, *где* $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$, $A < B$. *Тогда* $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n < b_n$.

Доказательство. В силу леммы 0.1 существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in U_\varepsilon(A)$ $\forall y \in U_\varepsilon(B) \hookrightarrow x < y$.

По определению предела

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_1 \ \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(A),$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_2 \ \hookrightarrow \ b_n \in U_\varepsilon(B).$$

Определив $N = \max\{N_1, N_2\}$ получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 0.15. ***(О предельном переходе в неравенстве.)*** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$ *и* $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant b_n$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство. Предположим противное: $A > B$. По теореме 0.14 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_1 \hookrightarrow b_n < a_n$. При $n \geqslant \max\{N, N_1\}$ получаем противоречие с условием $a_n \leqslant b_n$. $\square$

Следствие 0.2. *Если* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant N \hookrightarrow a_n < B$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*,* $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$*, то* $A \leqslant B$*.*

Доказательство. Если $B \in \mathbb{R}$, то определим $\{b_n\} = \{B\}$ и, применяя теорему 0.15, получаем неравенство $A \leqslant B$.

Если $B = +\infty$, неравенство $A \leqslant B$ также выполнено.

Случай $B = -\infty$ не реализуется, т.к. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \hookrightarrow a_n < B$. $\square$

Замечание 0.4. *Из условий* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n < b_n$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ *не следует, что* $A < B$*.*

Например, $a_n = 0$*,* $b_n = \dfrac{1}{n}$*,* $A = B = 0$*.*

Теорема 0.16. ***(О трех последовательностях.)*** *Если* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$*.*

Доказательство. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_1 \ \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(A),$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_2 \ \hookrightarrow \ c_n \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначим $\bar{N} = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant \bar{N}$ имеем

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon,$$

следовательно, $b_n \in U_\varepsilon(A)$.

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{N} \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant \bar{N} \ \hookrightarrow \ b_n \in U_\varepsilon(A),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. $\square$

Теорема 0.17. *Пусть* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant b_n$*. Тогда*

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$*;*

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*.*

Доказательство.

1) По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N_1 \ \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty),$$

т.е. $a_n > \varepsilon$, но тогда $b_n \geqslant a_n > \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \max\{N, N_1\}$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = \max\{N, N_1\} \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2\ \hookrightarrow\ b_n \in U_\varepsilon(+\infty),$$

а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Доказательство пункта 2) аналогично. □

0.8. Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности

Определение 0.12. *Последовательность $\{a_n\}$ называется нестрого возрастающей или неубывающей, если*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \hookrightarrow\ a_n \leqslant a_{n+1};$$

нестрого убывающей или невозрастающей, если

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \hookrightarrow\ a_n \geqslant a_{n+1};$$

если в этих определениях нестрогие неравенства заменить на строгие, то получим определения строго возрастающей и строго убывающей последовательностей.

Последовательность $\{a_n\}$ называется монотонной, если она является нестрого возрастающей или нестрого убывающей.

Теорема 0.18. ***(Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.)***

1) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$;

2) если последовательность $\{a_n\}$ нестрого убывает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает. Рассмотрим сначала случай, когда эта последовательность ограничена сверху. В силу теоремы 0.3 существует $a = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. В силу второго пункта определения супремума $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $a_N > a - \varepsilon$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{a_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \hookrightarrow$

$a_n \geqslant a_N > a-\varepsilon$. В силу первого пункта определения супремума $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leqslant a$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\ \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(a),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{a_n\}$ неограничена сверху. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ a_N > \varepsilon.$$

Отсюда в силу возрастания последовательности $\{a_n\}$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\ \hookrightarrow\ a_n \geqslant a_N > \varepsilon,$$

т.е. $a_n \in U_\varepsilon(+\infty)$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Доказательство пункта 2) аналогично. $\square$

Следствие 0.3. *Любая монотонная последовательность имеет конечный или бесконечный предел. Если $\{a_n\}$ — нестрого возрастающая и ограниченная сверху последовательность или нестрого убывающая и ограниченная снизу последовательность, то предел $\{a_n\}$ конечен.*

0.9. Подпоследовательности и частичные пределы. Критерий частичного предела

Наличие предела у числовой последовательности является изысканным свойством. Однако, "смягчив" понятие предела, мы увидим, что так называемые частичные пределы всегда существуют. Это обстоятельство широко применяется в математическом анализе и других разделах математики.

Определение 0.13. *Последовательность $\{b_k\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$: $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_k = a_{n_k}$.*

Пример 0.1. *Сама последовательность является своей подпоследовательностью.*

Пример 0.2. *Пусть задана последовательность $\{a_n\}$. Последовательность $\{a_{2k}\}$, составленная из элементов $\{a_n\}$ с четными номерами, является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$. Действительно, для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $n_k = 2k$. Тогда $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел и $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{2k} = a_{n_k}$.*

Определение 0.14. *Если последовательность $\{b_k\}$ является подпоследовательностью $\{a_n\}$ и существует $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A \in \bar{\mathbb{R}}$, то A называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}$.*

Пример 0.3. *Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где*

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно}, \\ -1, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Последовательности $\{b_k\} = \{a_{2k}\}$ и $\{c_k\} = \{a_{2k-1}\}$ являются подпоследовательностями $\{a_n\}$. Так как $b_k = 1$, $c_k = -1$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = -1$. Следовательно, числа 1 и -1 являются частичными пределами $\{a_n\}$.

Теорема 0.19. ***Критерий частичного предела.***

Для любой последовательности $\{a_n\}$ и любого $A \in \bar{\mathbb{R}}$ следующие условия эквивалентны:

(1) A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{a_n\}$;

(3) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$: $a_n \in U_\varepsilon(A)$.

Доказательство.

(1)⇒(2). Пусть A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Тогда существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant K_\varepsilon\ \hookrightarrow\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(A).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{a_n\}$.

(2)⇒(3). Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Так как выполнено условие (2), то в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{a_n\}$, среди которых найдётся элемент с номером $n \geqslant N$. Иначе в $U_\varepsilon(A)$ будут содержаться лишь с номерами $n < N$, а таких элементов конечное число. Следовательно, выполнено условие (3).

(3)⇒(1). Пусть выполнено условие (3):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n = n(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N : \; a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Построим строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такую, что $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Определим $n_1 = n(1, 1)$. Пусть на некотором шаге $k - 1 \in \mathbb{N}$ определено значение $n_{k-1} \in \mathbb{N}$. Определим

$$n_k = n\left(\frac{1}{k}, 1 + n_{k-1}\right),$$

т.е. $n_k = n(\varepsilon, N)$, где $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, $N = 1 + n_{k-1}$. Тогда $n_k \geqslant 1 + n_{k-1} > n_{k-1}$ и $a_{n_k} \in U_{1/k}(A)$. По индукции получаем, что определена последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такая, что $\forall k \geqslant 2 \hookrightarrow n_k > n_{k-1}$ и $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{n_k} \in U_{1/k}(A)$. Поэтому последовательность $\{n_k\}$ строго возрастает и $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Следовательно, выполнено условие (1). □

Замечание 0.5. *Предел последовательности является ее частичным пределом, но в общем случае не наоборот.*

0.10. Теорема Больцано–Вейерштрасса

Теорема 0.20. ***(Теорема Больцано-Вейерштрасса)*** *Ограниченная последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е.

$$\exists a_0, b_0 : \; \forall n \in \mathbb{N} \; \hookrightarrow \; x_n \in [a_0, b_0].$$

Определим $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Если в отрезке $[a_0, {}_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_1, b_1] = [a_0, {}_0]$. В противном случае в отрезке $[c_0, b_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, тогда определим $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$.

Пусть определён отрезок $[a_k, b_k]$, в котором содержатся значения бесконечного набора членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $c_k = (a_k + b_k)/2$. Если в отрезке $[a_k, {}_k]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, {}_k]$. В противном случае определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$. Так как этот процесс не может оборваться, мы получаем последовательность вложенных отрезков, которые по теореме Кантора имеют общую точку $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$.

Заметим, что $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$. Индукцией по k получаем, что $2^k > k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Поэтому $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $k \in \mathbb{N}$: $b_k - a_k < \varepsilon/2$. Отсюда и из включения $x \in [a_k, b_k]$, получаем, что $[a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x)$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}:\ [a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(x)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. В силу критерия частичного предела число x является частичным пределом $\{x_n\}$. $\square$

Лемма 0.5. *Если $\{x_n\}$ неограничена снизу, то $-\infty$ является её частичным пределом, если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $+\infty$ является её частичным пределом (при этом могут быть и другие частичные пределы).*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ множество $\{x_n |\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\}$ неограничено сверху. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N:\ x_n > \frac{1}{\varepsilon},$$

т.е. $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$. Применяя критерий частичного предела, получаем, что $+\infty$ является частичным пределом $\{x_n\}$.

Случай, когда $\{x_n\}$ неограничена снизу, рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 0.21. ***(Обобщённая теорема Больцано-Вейерштрасса)*** *Любая числовая последовательность имеет конечный или бесконечный частичный предел.*

Доказательство состоит в применении теоремы Больцано-Вейерштрасса и леммы 0.5.

0.11. Теорема о единственном частичном пределе

Теорема 0.22. *Для любой последовательности $\{a_n\}$ и любого $A \in \bar{\mathbb{R}}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;

(2) A является единственным частичным пределом $\{a_n\}$.

Доказательство.

(1)$\Rightarrow$(2). Пусть $\{a_{n_k}\}$ — произвольная подпоследовательность $\{a_n\}$. Условие (1) означает,что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\ \hookrightarrow\ a_n\in U_\varepsilon(A).$$

Так как $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то по индукции получаем, что $\forall k\in\mathbb{N}\hookrightarrow n_k\geqslant k$. Следовательно, при $k\geqslant N$ справедливы неравенства $n_k\geqslant k\geqslant N$. Поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant N\ \hookrightarrow\ a_{n_k}\in U_\varepsilon(A).$$

Итак из условия (1) следует, что для любой последовательности $\{a_{n_k}\}$ справедливо соотношение $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k}$. Поэтому A является единственным частичным пределом $\{a_n\}$.

(2)$\Rightarrow$(1). Предположим противоположное: условие (2) выполнено, а условие (1) не выполнено, т.е.

$$\exists\varepsilon > 0:\ \forall N\in\mathbb{N}\ \ \exists n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N:\ a_n\notin U_\varepsilon(A). \tag{1}$$

Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такую, что

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \hookrightarrow\ a_{n_k}\notin U_\varepsilon(A). \tag{2}$$

Из 1 следует существование числа $n_1\in\mathbb{N}$ такого, что $a_{n_1}\notin U_\varepsilon(A)$. Пусть на некотором шаге $k-1\in\mathbb{N}$ определено значение $n_{k-1}\in\mathbb{N}$. Тогда в силу 1 существует натуральное число $n_k\geqslant 1+n_{k-1}$ такое, что $a_{n_k}\notin U_\varepsilon(A)$. Таким образом, построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, удовлетворяющая 2. В силу обобщённой теоремы Больцано-Вейерштрасса последовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет частичный предел $B\in\bar{\mathbb{R}}$. При этом в силу 2 $B\neq A$. Поскольку подпоследовательность последовательности $\{a_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, то B является частичным пределом $\{a_n\}$, отличным от A, что противоречит условию (2). $\square$

0.12. Верхний и нижний пределы числовой последовательности

Определим точные грани подмножества расширенной числовой прямой $\bar{\mathbb{R}}$.

Определение 0.15. *Пусть заданы множество $L \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ и элементы $m \in \bar{\mathbb{R}}$, $M \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$m = \inf L \quad \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall x \in L \hookrightarrow \ x \geqslant m, \\ \forall m' \in \bar{\mathbb{R}} : m' > m \ \exists x \in L : \ m' > x. \end{cases}$$

$$M = \sup L \quad \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall x \in L \hookrightarrow \ x \leqslant M, \\ \forall M' \in \bar{\mathbb{R}} : M' < M \ \exists x \in L : \ M' < x. \end{cases}$$

Определение 0.16. *Пусть $L \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ — множество всех конечных и бесконечных (со знаком) частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Тогда нижним (верхним) пределом последовательности $\{x_n\}$ называется*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L \ \left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L \right).$$

Лемма 0.6. *Верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.*

Доказательство. Пусть $L \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ — множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $M = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. по определению супремума существует $x \in L$, $x \in U_\varepsilon(M)$. Выберем число $\varepsilon' > 0$ так, что $U_{\varepsilon'} \subseteq U_\varepsilon(M)$. в случае $M \in \mathbb{R}$ можно взять $\varepsilon' = \varepsilon - |M - x|$. в случае $M = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$ можно взять $\varepsilon' = x - \frac{1}{\varepsilon}$. В случае $x = M = +\infty$ можно взять $\varepsilon' = \varepsilon$. Так как $x \in L$, то по критерию частичного предела $U_{\varepsilon'}$ содержит значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. Отсюда и из включения $U_{\varepsilon'} \subseteq U_\varepsilon(M)$ получаем, что $U_\varepsilon(M)$ содержит значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. Снова применяя критерий частичного предела, получаем, что M — частичный предел $\{x_n\}$. Аналогично $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ — частичный предел $\{x_n\}$. $\square$

0.13. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение 0.17. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна или удовлетворяет условию Коши, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N, \ m \geqslant N \ \hookrightarrow \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма 0.7. *Сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу x. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n - x| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N, \; m \geqslant N \;\; \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \;\; |x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Лемма 0.8. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N, \; m \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n - x_m| < \varepsilon$, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_N - x_n| < 1$. Определим $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n| \leqslant M$. □

Теорема 0.23. ***(Критерий Коши)*** *$\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ фундаментальна.*

Доказательство. Если $\{x_n\}$ сходится, то по лемме 0.7 она фундаментальна. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна. По лемме 0.8 $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса существует $x \in \mathbb{R}$ — частичный предел $\{x_n\}$. Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности $\{x_n\}$ следует существование номера N такого, что

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N, \; m \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n - x_m| < \varepsilon/2.$$

В силу критерия частичного предела найдётся номер $m \geqslant N$ такой, что $|x - x_m| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n - x| \leqslant |x_n - x_m| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant N \;\; \hookrightarrow \;\; |x_n - x| < \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ сходится к x. □

0.14. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность

Определение 0.18. *Пусть задано число $\delta > 0$. Проколотой δ-окрестностью элемента $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ называется множество*

$$\overset{o}{U}_\delta (x_0) = U_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}.$$

В частности, $\overset{o}{U}_\delta (x_0) = U_\delta(x_0)$ при $x_0 \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, и для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\overset{o}{U}_\delta (x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Определение 0.19. ***(Определение предела по Коши.)*** *Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$ и заданы $A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, причём $\exists \delta_0 > 0$: $\overset{o}{U}_{\delta_0} (x_0) \subseteq X$. Тогда пишут*

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta (x_0)\ \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A). \qquad (3)$$

Замечание 0.6. *Условие $\delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0]$ в формуле (3) обеспечивает то, что для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta (x_0)$ значение $f(x)$ определено. Если $D(f) = \mathbb{R}$, то вместо $\delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0]$ в формуле (3) можно писать $\delta > 0$.*

Замечание 0.7. *То, как определена (и определена ли вообще) функция f в точке x_0, не влияет на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

В частности, если $A \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, а функция f определена на всей числовой прямой, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \hookrightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon;$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \hookrightarrow\ f(x) > \frac{1}{\varepsilon};$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ x < -\frac{1}{\delta}\ \hookrightarrow\ f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$

Определение 0.20. *Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Гейне в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *и*

2) $x_n \neq x_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 0.21. ***(Определение предела по Гейне.)*** *Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$ и заданы элементы $A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$. Тогда пишут $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой $\{x_n\}$ — последовательности Гейне в точке x_0 такой, что $x_n \in X$ при всех $n \in \mathbb{N}$, предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A.*

Теорема 0.24. *Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$, пусть $x_0, A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ и $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subseteq X$, $\delta_0 > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *по Коши;*

(2) $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *по Гейне.*

Доказательство.

(1)⇒(2). Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A). \tag{4}$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Тогда по определению предела последовательности и в силу условия $x_n \neq x_0$ имеем

$$\forall \delta > 0 \ \exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \hookrightarrow \ x_n \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0). \tag{5}$$

Применим (5) к δ из (4), тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \hookrightarrow \ f(x_n) \in U_\varepsilon(A),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Значит, $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне.

(2)⇒(1). Предположим противное: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне, но не по Коши.

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta \in (0; \delta_0] \ \exists x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) : \ \ f(x) \notin U_\varepsilon(A).$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_0/n}(x_0) : \ \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A).$$

Из условия $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_0/n}(x_0)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} = x_0$ и $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы получили последовательность Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 такую, что $f(x_n) \not\to A$ при $n \to \infty$ — противоречие. $\square$

0.15. Критерий Коши существования предела функции

Лемма 0.9. *Пусть функция f определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, и пусть для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.*

Тогда этот предел не зависит от последовательности Гейне: $\exists A \in \mathbb{R}$: для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке $x_0 \hookrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Доказательство. Пусть имеются две произвольные последовательности Гейне в точке x_0: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$. Составим из них последовательность $\{z_k\}$:

$$z_k = \begin{cases} x_n, \ k = 2n-1, \\ y_n, \ k = 2n. \end{cases}$$

Последовательность $\{z_k\}$ также является последовательностью Гейне, так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x_0$, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow z_k \neq x_0$. Поэтому в силу условия леммы, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)$. Так как последовательности $\{f(x_n\}$ и $\{f(y_n\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(z_k\}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. $\square$

Определение 0.22. *Пусть функция f определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Условие Коши существования предела функции в точке x_0 состоит в том, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \ \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Теорема 0.25. ***(Критерий Коши.)***

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *выполнено условие Коши существования предела функции f в точке x_0.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] :\ \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

т.е. выполнено условие Коши.

($\Leftarrow$) Пусть выполнено условие Коши. Возьмём произвольную последовательность Гейне в точке x_0: $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Тогда

$$\forall \delta \in (0;\delta_0]\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0). \tag{7}$$

Используя условие (7) для δ из (6), получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant N, k \geqslant N \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon,$$

т.е. выполнено условие Коши существования предела последовательности $\{f(x_n)\}$. В силу критерия Коши для последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Итак, для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 существует $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$, тогда по лемме 0.9

$$\exists A \in \mathbb{R} :\ \forall \text{ посл. Гейне } \{x_n\} \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow A = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Пользуясь определением предела функции по Гейне, получаем $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. $\square$

0.16. Существование односторонних пределов у монотонных функций

Теорема 0.26. ***(Об одностороннем пределе монотонной функции.)***

1. Если функция f нестрого возрастает на (a, x_0), то $\exists f(x_0 - 0) = \sup\limits_{x\in(a,x_0)} f(x)$.

2. Если функция f нестрого убывает на (a, x_0), то $\exists f(x_0 - 0) = \inf\limits_{x \in (a, x_0)} f(x)$.

3. Если функция f нестрого возрастает на (x_0, b), то $\exists f(x_0 + 0) = \inf\limits_{x \in (x_0, b)} f(x)$.

4. Если функция f нестрого убывает на (x_0, b), то $\exists f(x_0 + 0) = \sup\limits_{x \in (x_0, b)} f(x)$.

Доказательство. Пусть функция f нестрого возрастает на (a, x_0). Так как конечный или бесконечный супремум любого множества существует, то существует $\sup\limits_{x \in (a, x_0)} f(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$.

Из определения супремума следует, что $\forall x \in (a, x_0) \hookrightarrow f(x) \leqslant M$ и, кроме того, $\forall M_1 < M \; \exists x_1 \in (a, x_0) : M_1 < f(x_1)$. Отсюда и из возрастания функции f следует, что $\forall x \in x_1, x_0 \hookrightarrow M_1 < f(x_1) \leqslant f(x)$.

Итак, $\forall M_1 < M \; \exists x_1 \in (a, x_0) : \forall x \in x_1, x_0 \hookrightarrow M_1 < f(x_1) \leqslant f(x)$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_1 \in (a, x_0) : \forall x \in x_1, x_0 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = x_0 - x_1 > 0$: $\forall x \in x_0 - \delta, x_0 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$, а значит, $M = f(x_0 - 0$. Другие случаи рассматриваются аналогично. □

0.17. Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции

Определение 0.23. *Пусть функция f определена в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда f называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.*

Определение 0.24. *Пусть функция f определена на $(a, x_0]$. Тогда f называется непрерывной слева в точке x_0, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.*

Пусть функция f определена на $[x_0, b)$. Тогда f называется непрерывной справа в точке x_0, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Лемма 0.10. *Пусть f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) f непрерывна в x_0;

(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in (0, \delta_0] : \; \forall x \in U_\delta(x_0) \; \hookrightarrow \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(3) $\forall \{x_n\} \subset U_{\delta_0}(x_0) : \; \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \; \hookrightarrow \; \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Доказательство.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из определения $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ по Коши. В данном случае условие $x \neq x_0$ можно не писать, так как при $x = x_0$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) следует из определения $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ по Гейне. В данном случае условие $x \neq x_0$ можно не писать, так как при $x = x_0$ выполняется $f(x_n) = f(x_0)$. $\square$

Теорема 0.27. ***(О пределе сложной функции)***

Пусть заданы функции $y : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ и $f : \overset{\circ}{U}_{\beta_0}(y_0) \to \mathbb{R}$, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть выполнено хотя бы одно из следующих дополнительных условий:

(а) $\exists \delta_0 > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \ \hookrightarrow \ y(x) \neq y_0$ или

(б) $f(y_0) = A$ (т.е. функция f непрерывна в точке y_0).

Тогда сложная функция $\varphi(x) = f(y(x))$ определена в некоторой $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$, то

$$\exists \beta \in (0, \beta_0) : \ \forall y \in \overset{\circ}{U}_{\beta}(y_0) \ \hookrightarrow \ f(y) \in U_{\varepsilon}(A). \tag{8}$$

По определению предела $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y_0$

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow \ y(x) \in U_{\beta}(y_0). \tag{9}$$

Покажем, что сложная функция $\varphi(x) = f(y(x))$ определена в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ и

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow \ f(y(x)) \in U_{\varepsilon}(A). \tag{10}$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$. В силу условия (9) получаем $y(x) \in U_{\beta}(y_0)$. В случае $y(x) \neq y_0$ имеем $y(x) \in \overset{\circ}{U}_{\beta}(y_0)$, и согласно (8) включение $f(y) \in U_{\varepsilon}(A)$ выполнено. Рассмотрим случай $y(x) = y_0$. В этом случае дополнительное условие (а) реализоваться не может. Следовательно, реализуется дополнительное условие (б), а значит, $f(y(x)) = f(y_0) = A \in U_{\varepsilon}(A)$. Таким образом, доказано соотношение (10). Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow \ f(y(x)) \in U_{\varepsilon}(A).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = A$. $\square$

Теорема 0.28. ***(О непрерывности сложной функции в точке)***

Пусть функция y определена в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0. Пусть функция f определена в некоторой $U_{\beta_0}(y_0)$ и непрерывна в точке $y_0 = y(x_0)$. Тогда сложная функция $\varphi(x) = f(y(x))$ определена в некоторой $U_{\delta_1}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.

Доказательство состоит в применении пункта (б) теоремы о пределе сложной функции для случая $y_0 = y(x_0)$.

0.18. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке. Достижение точной верхней и точной нижней граней функцией, непрерывной на отрезке

Определение 0.25. *Функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке. При этом под непрерывностью в точках a, b понимается непрерывность справа и слева соответственно. Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.*

Определение 0.26. *Будем говорить, что функция f, определённая на множестве X, достигает на X своей верхней (нижней) грани, если*

$$\exists x_0 \in X : \ f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) \ \left(f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x) \right).$$

Теорема 0.29. ***(Теорема Вейерштрасса)***

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нём своих верхней и нижней граней.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть $B := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant +\infty$. В силу определения верхней грани

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a, b] : \ f(x_n) \in U_{1/n}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b \ \forall n \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$.

Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x_0 \in [a, b]$. В силу непрерывности в точке x_0 функции f имеем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \;\text{ при }\; k \to \infty.$$

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность сходящейся к B последовательности. Поэтому

$$f(x_{n_k}) \to B \;\text{ при }\; k \to \infty.$$

Из последних двух соотношений получаем, что

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = B = f(x_0).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) < +\infty$, т.е. что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.

Аналогично можно доказать, что функция f ограничена снизу и достигает своей нижней грани. □

Задача 0.3. *Сохранится ли доказательство теоремы Вейерштрасса, если в её условиях отрезок $[a, b]$ заменить на интервал (a, b)? Останется ли верным её утверждение?*

Следствие 0.4. *Пусть функции f непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть $f(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$. Тогда $\exists d > 0 : f(x) \geqslant d \ \forall x \in [a, b]$.*

Определение 0.27. *Пусть функция f задана на X и для некоторой точки $x_0 \in X$ справедливо неравенство*

$$f(x) \leqslant f(x_0) \ \forall x \in X.$$

Тогда точка x_0 называется точкой максимума функции f на X. Значение $f(x_0)$ называется максимумом функции f на X и обозначается $\max\limits_X f$.

Аналогично определяются точка минимума функции f на X и минимум f на X, обозначаемый $\min\limits_X f$.

Теорема Вейерштрасса утверждает, в частности, что непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимум и минимум.

0.19. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 0.30. ***(Теорема Коши о промежуточном значении функции)***
Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть C находится между A и B: $A \leqslant C \leqslant B$ или $B \leqslant C \leqslant A$. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b]: \ f(\xi) = C.$$

Доказательство. Пусть, для определённости, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a, b]$ пополам и через $[a_1, b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Затем поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Пусть $\xi \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и (в силу непрерывности функции f в точке ξ)

$$f(a_n) \to f(\xi), \ f(b_n) \to f(\xi) \text{ при } n \to \infty.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi) \ \Rightarrow \ f(\xi) = C.$$

$\square$

Следствие 0.5. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, причём $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда*

$$\exists \xi \in (a, b): \ f(\xi) = 0.$$

Следствие 0.6. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Тогда функция f принимает все значения из $[m, M]$ и только эти значения.*

0.20. Теорема об обратной функции

Лемма 0.11. *Пусть функция $f: X \to f(X)$ строго монотонна на множестве X. Тогда обратная функция $f^{-1}: f(X) \to X$ строго монотонная на множестве $f(X)$.*

Доказательство см. лекции.

Теорема 0.31. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна.*

Тогда обратная функция задана на отрезке $[A,B] = [f(a), f(b)]$, строго возрастает и непрерывная на нём.

Доказательство.

Найдем область значений Y_f функции f. Поскольку $A \le f(x) \le B$ для всех $x \in [a,b]$, то $Y_f \subseteq [A,B]$. С другой стороны, по теореме Коши для любого $C \in [A,B]$ существует $c \in [a,b]$: $f(c) = C$, так что $[A,B] \subseteq Y_f$. Следовательно, $Y_f = [A,B]$.

Строгое возрастание f^{-1} следует из леммы.

Установим непрерывность f^{-1}. Пусть сначала $y_0 \in (A,B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a,b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq [a,b].$$

Положим $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$ и $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$.

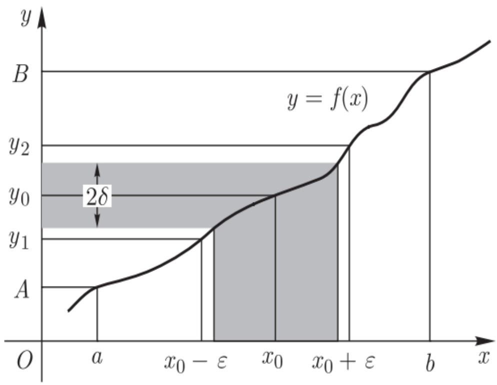
Функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1, y_2] \subseteq [A,B]$ (рис. 1). При этом $y_1 < y_0 < y_2$. Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subseteq f^{-1}((y_1, y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда (односторонняя) непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично (с использованием односторонних окрестностей).

□



Теорема 0.32. *Пусть функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ задана на интервале (a,b), строго возрастает и непрерывна на нем. Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале (A,B), где*

$$A = \inf_{(a,b)} f, \quad B = \sup_{(a,b)} f.$$

Доказательство.
Найдем область значений Y_f функции f. Покажем, что

$$A < f(x) < B \quad \forall\, x \in (a,b). \tag{11}$$

В самом деле, допущение, например, того, что $f(x_0) \geq B$ при некотором $x_0 \in (a,b)$, означало бы в силу строгого возрастания f, что $f(x) > B$ для всех $x \in (x_0, b)$, что противоречит условию $B = \sup\limits_{(a,b)} f$.

Покажем теперь, что

$$\forall y_0 \in (A,B) \quad \exists x_0 \in (a,b) \,:\, f(x_0) = y_0. \tag{12}$$

Из определений inf и sup следует, что

$$\exists x_1, x_2 \in (a,b) \,:\, f(x_1) < y_0, \;\; f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению функции f на отрезок $[x_1, x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists x_0 \in [x_1, x_2] \,:\, f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, утверждение (12) установлено.

Из (11), (12) следует, что $f((a,b)) = (A,B)$.

Остается показать, что обратная функция f^{-1} непрерывна в каждой точке $y_0 \in (A,B)$. Это делается так же, как и в теореме 3. $\Box$

Аналогично формулируются вариант теоремы 4 для функции, строго убывающей на интервале, а также варианты теоремы об обратной функции для полуинтервалов.