Математический анализ. Числовые ряды

18 января 2022 г.

Определение. Символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, или $a_1 + a_2 + a_3 + ...$, где $a_k \in \mathbb{R}$ называется числовым рядом, a_k его членом, а $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ - n-й частичной суммой ряда.

Разумеется, как и всякая уважающая себя сумма, ряд может быть равен конкретному конечному числу или бесконечности. Но, кроме того, его значение может быть вообще не определено (например, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$). Поэтому, как и для несобственных интегралов, логично ввести понятие сходимости (своего рода конечности и равенства ряда конкретному числу). Вводится оно через частичные суммы:

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся (к числу S), если сходится его последовательность частичных сумм (как обычная числовая последовательность, к числу S).

Определение вполне логичное: если в $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ вместо n запихнуть ∞ (т.е. устремить n к бесконечности, иначе говоря), то получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то есть наш числовой ряд как раз. То есть если есть предел у последовательности частичных сумм, то это и есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Поясню на конкретном примере, что такое последовательность частичных сумм. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Этот ряд расходится и называется гармоническим, но это пока не важно. Ряд имеет вид: $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ...$ Его частичные суммы:

$S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$

$S_2 = \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + 1/2$

$S_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3$

$S_4 = \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$

...

Теорема. Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд сходится, то $a_k \to 0$. (Т.е. необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю его k-го члена при $k \to \infty$). (Например, не нужно долго вспоминать определение сходимости, чтобы просто сказать, что по этой теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$ расходится, т.к. $k \not\to 0$).

Так же, как и для несобственных интегралов, для числовых рядов есть критерий Коши сходимости:

Критерий Коши. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ является сходящимся $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n', n'' \geq n(\varepsilon) (n'' \geq n') \Rightarrow |\sum_{k=n'}^{n''} a_k| < \varepsilon$$

Заметим, что он чертовски похож на критерий Коши для несобственных интегралов: интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (1, +\infty) : \forall \xi', \xi'' \geq \delta \Rightarrow |\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)| < \varepsilon$$

Критерий Коши для числовых рядов также зачастую записывают в следующем виде:

Критерий Коши'. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ является сходящимся $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$$

Заметим, что два приведенных критерия Коши для числовых рядов эквивалентны (ежику понятно, если секунду подумать, то вам будет тоже понятно).

Разумеется, как и в других темах, в числовых рядах критерий Коши используется для доказательства того, что ряд не сходится (то есть используется отрицание критерия Коши):

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \exists n_0(n) \geq n, p_0(n) \in \mathbb{N} : |\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} a_k| \geq \varepsilon$$

Воспользуемся Критерием Коши, чтобы доказать, что гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится:

$$\exists \varepsilon = 1/2 : \forall n \exists n_0 = n, p_0 = n : |\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}| \geq |\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} |\sum_{k=n+1}^{2n} 1| = \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Как вы уже заметили, числовые ряды и несобственные интегралы очень похожи. И даже есть прямая связь между их сходимостью, так называемый интегральный признак:

Интегральный признак сходимости. Пусть функция f монотонно убывает к нулю на $[1, +\infty)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)$ сходятся и расходятся одновременно.

С помощью данного признака получаем шаблон, аналогичный интегралу $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha > 1$, только для рядов: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \in (0, 1]$.

Полезный контрпример Условие монотонного убывания к нулю важно. То есть нельзя бездумно говорить, что любые ряд и несобственный интеграл от одной функции одновременно сходятся или расходятся. В этом можно убедиться на примере $\int\limits_{1}^{+\infty} sinx^3 dx$, который сходится (делаем замену $x^3 = t$, дальше по Дирихле) и соответствующего ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} sink^3$, который расходится, т.к. k-й член не стремится к нулю.

Для знакопостоянных рядов, как и для интегралов, есть 2 признака сравнения:

Первый признак сравнения. Пусть $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 : 0 \leq a_k \leq b_k$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (то есть если ряд с бОльшими членами сходится (конечен), то ряд с меньшими - и подавно), а если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Второй признак сравнения. Пусть $\forall k \ a_k > 0, b_k > 0$, а также $\exists \lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0, +\infty)$(то есть равен конечному числу). Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и расходятся одновременно.

Пример 1. Исследовать на абсолютную сходимость:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sink^3}{k^2}$$

Решение:

По признаку сравнения: $|a_k| \leq \frac{1}{k^2}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится (шаблон). Значит, исходный ряд сходится абсолютно по признаку сравнения.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(e^{1/k^2} - 1)$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(e^{1/k^2} - 1) \overset{\text{сх}}{\sim} \sum_{k=2}^{\infty} k(1 + \frac{1}{k^2} - 1) \overset{\text{сх}}{\sim} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Полученный ряд расходится(гармонический ряд), следовательно, исходный тоже расходится по признаку сравнения.

Следующие 2 признака также применимы ТОЛЬКО для знакопостоянных рядов. Именно они используются в задаче по числовым рядам на экзамене.

Признак Коши. Пусть $a_k \geq 0 \forall k$ и $\exists \lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, где q - некоторое число. Тогда:

1. q<1⇒ряд сходится
2. q>1⇒расходится
3. q=1⇒хз

Пример 3. Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ((k + \frac{1}{12k}) sin\frac{1}{k})^{k^3}$

Решение:

Пример содержит некое выражение в степени, кратной n, целиком. Поэтому прям руки чешутся применить именно признак Коши, ведь в нем берется корень n-й степени (то есть степень делится на n).

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}((k+\frac{1}{12k})sin\frac{1}{k})^{k^2} = [Teilor] = \lim_{k\to\infty}((k+\frac{1}{12k})(\frac{1}{k}+\frac{1}{6k^3}+o(\frac{1}{k^3})))^{k^2} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{12k^2}-\frac{1}{6k^2}+o(\frac{1}{k^2}))^{k^2} = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{12k^2})^{k^2} = e^{-1/12} < 1$$

.

Значит, числовой ряд сходится по признаку Коши. Это ответ. Рассуждения ниже не входят в решение данного примера, а лишь показывают, по каким соображениям мы разложили синус именно до такой степени.

Заметим, что если разложить синус до первой степени, мы получили бы другой результат:

$$... = \lim_{k\to\infty}((k+\frac{1}{12k})(\frac{1}{k}+o(\frac{1}{k})))^{k^2} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{12k^2}+o(1))^{k^2} = e^{1/12} > 1$$

Но результат этот неверный: из-за o(1): рядом с ним есть член $\frac{1}{12k^2}$, который имеет порядок малости как раз $\leq$ o(1). То есть он "входит в o(1)". А в o(1) вполне могут быть члены порядка $\frac{1}{k^2}$ (-$\frac{1}{6k^2}$ как раз), то есть мы недоразложили бы, получили недостаточную точность.

Признак Даламбера. Пусть $\forall k : a_k > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = q \Rightarrow$:

1. q<1⇒ряд сходится
2. q>1⇒расходится
3. q=1⇒хз

Пример 4. Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}(2k)!}{k^k k!}$

Решение:

Здесь мы не видим одной жирной висящей надо всем степени, поэтому будем пользоваться признаком Даламбера, а не Коши. Также факториалы являются признаком того, что надо использовать признак Даламбера.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{2k+2}(2k+2)!k^k k!}{(k+1)^{k+1}(k+1)!3^{2k}(2k)!} = \frac{9(2k+1)(2k+2)k^k}{(k+1)(k+1)^{k+1}} = \frac{9(2k+1)(2k+2)k^k}{(k+1)^2(k+1)^k} =$$

Далее разделим числитель и знаменатель на k^k, а также в последствии воспользуемся замечательным пределом:

$$= \frac{9(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}(\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}) \to \frac{36}{e} > 1, k \to \infty$$

Значит, ряд расходится по признаку Даламбера.

Знакопеременные ряды.

Признак Лейбница. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ сходится, если a_k монотонно убывает к 0 при $k \to \infty$.

Пример 5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$: $\frac{1}{\sqrt{k}}$ монотонно убывает к нулю при $k \to \infty$, следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница.

Пример 6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ исследовать на сходимость и абсолютную сходимость.

Решение:

При исследовании на просто сходимость нам пригодится, очевидно, признак Лейбница. Рассмотрим $a_k = 1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}} = 2sin^2\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ - монотонно $\to 0$ при $k \to \infty$. Это так, потому что аргумент синуса при всех k принадлежит отрезку $[0; \pi/2]$, а синус на этом отрезке является монотонной функцией. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ сходится по признаку Лейбница.

Исследуем на абсолютную сходимость. $|(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})| = 2sin^2\frac{\pi}{2\sqrt{k}} \sim 2(\frac{\pi}{2\sqrt{k}})^2 \sim \frac{1}{k}$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ не сходится абсолютно по признаку сравнения.

Признак Дирихле. Пусть a_k монотонно убывает к нулю ($\downarrow 0$) при $k \to \infty$. Пусть частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. (Частичные суммы ограничены значит, что $\exists M : \forall n |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| < M$). (Обратите внимание, что ограничены именно частичные суммы, а не ряд, что разные вещи.)

Пример 7. Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{sink \cdot sink^2}{k}$.

Решение:

Будем решать с помощью признака Дирихле. $a_k = \frac{1}{k} \downarrow 0$. $b_k = sink \cdot sink^2$. Покажем, что частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены. В ходе решения воспользуемся формулой произведения синусов $2sin\alpha sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$.

$$|\sum_{k=1}^{n} b_k| = |\sum_{k=1}^{n} sink \cdot sink^2| = |\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(cos(k^2-k) - cos(k^2+k))| =$$

$$= |\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(cosk(k-1) - cosk(k+1))| = \frac{1}{2}|(cos1(1-1) - cos1(1+1) + cos2(2-1) + ...)| =$$

$$= \frac{|cos0 - cosn(n+1)|}{2} \leq \frac{2}{2} = 1$$

Предпоследнее равенство верно, потому что "соседние члены"взаимосокращаются.

Как видим, частичные суммы ограничены.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{sink \cdot sink^2}{k}$ сходится по признаку Дирихле.

Пример 8. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n} - sinn}$

Решение:

В данном примере мы используем 2 принципиальных приема: разложение по формуле Тейлора до O большого (!) и доказательство, что сумма синусов ограничена.

Итак, начнем с того, что разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{n}$, чтобы разложить по формуле Тейлора. Раскладывать будем $(1 - \frac{sinn}{\sqrt{n}})^{-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n} - sinn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{sinn}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{sinn}{\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$$

Свели исходный ряд к трем рядам попроще. Исследуем их на сходимость.

Первый ряд: $\frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow 0$. Осталось показать, что частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} sink$ ограничены. Разделим и умножим для этого их на $2sin(1/2)$, воспользуемся формулой произведения синусов и заметим, что соседние члены сократятся, как и в предыдущем примере. Умножили и разделили именно на $2sin(1/2)$, чтобы соседи сократились (см. формулу ниже).

$$|\sum_{k=1}^{n} sink| = |\frac{1}{2sin(1/2)}\sum_{k=1}^{n} 2sin(1/2)sink| =$$

$$= |\frac{1}{2sin(1/2)}\sum_{k=1}^{n}(cos(k-1/2)-cos(k+1/2))| = \frac{1}{sin(1/2)}|cos(1/2)-cos(n+1/2)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2sin(1/2)} = \frac{1}{sin(1/2)}$$

То есть частичные суммы ограничены. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим второй ряд. Понизим степень $sin^2 n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-cos2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos2n}{2n}$$

Первый из этих рядов расходится (Гармонический ряд), а второй сходится по признаку Дирихле. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n}$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося рядов.

Рассмотрим оставшийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$.

Воспользуемся определением O большого: $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C|g(x)|$.

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})| \leq C\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{sin^3 n}{n^{3/2}}| \leq C\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^{3/2}}|$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (шаблон, полученный нами из интегрального признака). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n}-sinn}$ расходится как сумма сходящегося, абсолютно сходящегося и расходящегося рядов.

Ответ: расходится.

Замечание 1: Часто возникает вопрос: а до какого члена в подобных примерах раскладывать по Тейлору? Ответ прост: до того, пока интеграл от О большого не будет сходиться абсолютно. Больше можно, меньше нельзя: если бы разложили до $O(\frac{sin^2 n}{n})$, то мы бы ряд от такого О большого не смогли сверху ограничить сходящимся шаблоном (только $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, что нам бы ничего не дало.)

Замечание 2: Не путайте порядок малости, который мы запихиваем под О большое: если мы пишем $O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$, то если бы писали о малое, то оно было бы: $o(\frac{sin^2 n}{n})$

Замечание 3: Также с помощью разложения по Тейлору решаются примеры типа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin(\frac{sinn}{\sqrt[3]{n}})$. Не забывайте, что для разложения нужно, чтобы аргумент раскладываемой функции должен $\to 0$.

Пример 9. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin2nln^2 n}{n^{\alpha}}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin2nln^2 n}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2 n}{n^{\alpha}} \cdot sin2n$$

Обозначим $a_n = \frac{ln^2 n}{n^{\alpha}}$; $b_n = sin2n$.

Частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{n} b_k$ ограничены (было для $sinn$ доказано в предыдущем примере).

Осталось найти, при каких α $a_n \downarrow 0$.

Рассмотрим для того, чтобы исследовать на монотонность, функцию $f(x) = \frac{ln^2 x}{x^{\alpha}}$

$$f'(x) = \frac{2lnx \cdot \frac{1}{x}}{x^{\alpha}} - \frac{\alpha ln^2 x}{x^{\alpha+1}} = \frac{lnx}{x^{\alpha+1}}(2 - \alpha lnx)$$

$\frac{lnx}{x^{\alpha+1}}$ всегда больше нуля при $x \geq 1$ ($n \geq 1$, т.к. натуральное).

$(2 - \alpha lnx) < 0$ при $\alpha > 0$ (при достаточно больших x). То есть f(x), а вместе с ней и f(n) монотонно убывают при $\alpha > 0$. Также очевидно, что $f(x) \to 0$при $\alpha > 0$ (при $x \to \infty$). Значит, $a_n \downarrow 0$ при $\alpha > 0$.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin2nln^2 n}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 0$ по признаку Дирихле.

Докажем, что ряд расходится при $\alpha \leq 0$ с помощью необходимого условия сходимости. Заметим, что при $\alpha \leq 0$ $\frac{sin2nln^2n}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Значит, ряд расходится.

Докажем, что ряд абсолютно сходится при $\alpha > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{ln^2n}{n^\alpha} \cdot sin2n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2n}{n^\alpha} - \text{сх. ряд}$$

Получаем, что наш ряд сходится абсолютно по признаку сравнения.

Докажем, что ряд не сходится абсолютно при $0 < \alpha \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{ln^2n}{n^\alpha} \cdot sin2n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2n}{n^\alpha} \cdot sin^2 2n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2n}{2n^\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2ncos4n}{2n^\alpha}$$

Первый ряд расходится (по интегральному признаку; там шаблонный интеграл), а второй - сходится по признаку Дирихле (см. пункт про сходимость; т.к. $\alpha > 0$). Значит, их разность расходится, значит, исходный ряд не сходится абсолютно по признаку сравнения.

Ответ: ряд расходится при $\alpha \leq 0$; сходится условно при $\alpha \in (0; 1]$; сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

Пример 10. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся условно. Может ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$:

1. сходиться абсолютно?
2. сходиться условно?
3. расходиться?

1. Пусть $a_n = b_n = \frac{sinn}{n}$, тогда $a_n b_n = \frac{sin^2n}{n^2}$.

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся по признаку Дирихле. Но они не сходятся абсолютно, т.к.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{sinn}{n}| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos2n}{2n}$$

Первый ряд расходится как гармонический, а второй сходится по признаку Дирихле. Значит, их разность расходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не сходится абсолютно. Значит он сходится условно.

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n^2}$ сходится абсолютно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{sin^2 n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится}$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

2. Пусть $a_n = \frac{sinn}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{cosn}{\sqrt{n}}$, тогда $a_n b_n = \frac{sin2n}{2n}$.

В этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходятся условно (доказывается, как и в предыдущем пункте).

3. Пусть $a_n = \frac{sinn}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{sinn}{\sqrt{n}}$, тогда $a_n b_n = \frac{sin^2 n}{n}$.

В этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится (доказывается, как и обычно, с помощью понижения степени $sin^2 n$).

Пример 11. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно. Что можно сказать про сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

Ответ прост: этот ряд также сходится абсолютно, т.к. последовательность его частичных сумм ограничена (а значит, сходится, как монотонная ограниченная функция. Монотонна, потому что сумма модулей, которые ≥ 0):

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

У нас в курсе есть даже более сильное утверждение:

Теорема. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно. Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

А справедливо ли аналогичное 11 примеру заключение для несобственных интегралов? В отличие от рядов, оно будет неверно. Рассмотрим следующий пример:

Пример 12. Пусть $f(x), g(x)$ интегрируемы на отрезке $[1, a]$ $\forall a > 1$. Пусть $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ и $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходятся абсолютно. Сходится ли абсолютно интеграл $I_3 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$?

Придумаем пример функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, чтобы это было неверно.

Используем для этого геометрический смысл определенного интеграла: площадь под графиком. Возьмем $f(x) = g(x) = n^2$ при $n \in \mathbb{N}$; при $x \in [n; n+\frac{1}{n^4}]$ и равные нулю при остальных значениях x. Тогда, посчитав интеграл, как площадь под графиком, то есть сумму прямоугольничков с основанием $\frac{1}{n^4}$ и высотой n^2, получаем:

$$\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int\limits_1^{+\infty} |g(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4}$$

То есть I_1, I_2 сходятся абсолютно.

При этом основания совпадают у прямоугольничков $f(x)$ и $g(x)$, причем совпадают с основанием прямоугольничков для произведения этих функций $f(x)g(x)$. А вот высота $f(x)g(x)$ будет равна $n^2 \cdot n^2 = n^4$. Тогда:

$$I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot n^2}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Получили, что I_3 может вообще расходиться, даже если I_1 и I_2 сходятся абсолютно. Можно подобрать $f(x)$ и $g(x)$ таким образом, что I_3 сойдется условно.