Опр. Пусть ф-ия $f(x)$ - бесконечно дифференцируема в x_0 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ - **ряд Тейлора** ф-ии $f(x)$ в т. x_0

Вопрос: Когда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Опр. $f(x)$ - **регулярная** в т. x_0, если она бесконечно дифференцируема и ряд Тейлора ф-ии $f(x)$ с центром в т. x_0 сх. к ф-ии $f(x)$ в некоторой окр-ти точки x_0, то есть

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Th (Достаточное усл-е регулярности)

Пусть $\exists \delta > 0$: f - ∞ диф-ма в $U_\delta(x_0)$, пусть

$$\exists M > 0 : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in U_\delta(x_0) \end{cases} \hookrightarrow |f^{(n)}(x)| \le M$$

Тогда f - регулярна в x_0 и $\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) =$
$\sum\limits^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{} (x-x_0)^k$

$k=0 \quad k!$

Док-во:

Чтобы показать, что ряд сх., причём сумма ряда $= f(x)$, покажем, что остаток ряда $\to 0$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x, x_0)$$

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \mapsto |r_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\delta^{n+1} \to 0,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{(n+1)!} = 0 \ \forall a > 0$ ЧТД.

Пример нерегулярной ф-ии:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right\}$$

$f''(x) = \{ \ldots$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ – многочлен степени $3n$, по степеням $\frac{1}{x}$

$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ её ряд Тейлора $\equiv 0 \rightarrow \sum\limits_{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$

$f(x) = 0$ только при $x = 0$, иначе $f \neq 0$

а ряд $\equiv 0$ в любой окр-ти – не представима в окр-ти в ряд