Опр. Пусть $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $x^{(0)} \in E$. Тогда $f(x)$ **называется непрерывной** в $x^{(0)}$ по мн-ву E, если

1) (Коши)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap E \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2) (По Гейне)

$$\forall \{x^{(m)}\} \in E : x^{(m)} \xrightarrow{m \to \infty} x_0 \hookrightarrow \lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = f(x^{(0)})$$

3) **а)** $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$ – если $x^{(0)}$ - пред. точка E

б) если $x^{(0)}$ - изолированная, то считаем $f(x)$ непр. в ней

(1) <=> (2) <=> (3)

Th. (**непрерывность сл. ф-ии**)

Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и каждая из m ф-ий $f_1, \dots, f_m$ непрерывна в т. $x^{(0)}$ по мн-ву E

Пусть $f(x)$: $f_m(x) \in F \subset \mathbb{R}^m$ ($\forall x \in E$). Пусть g непр...

$(f_1(x),\dots,f_m(x)) \in F$ ($\forall x \in E$). Пусть g - непр.

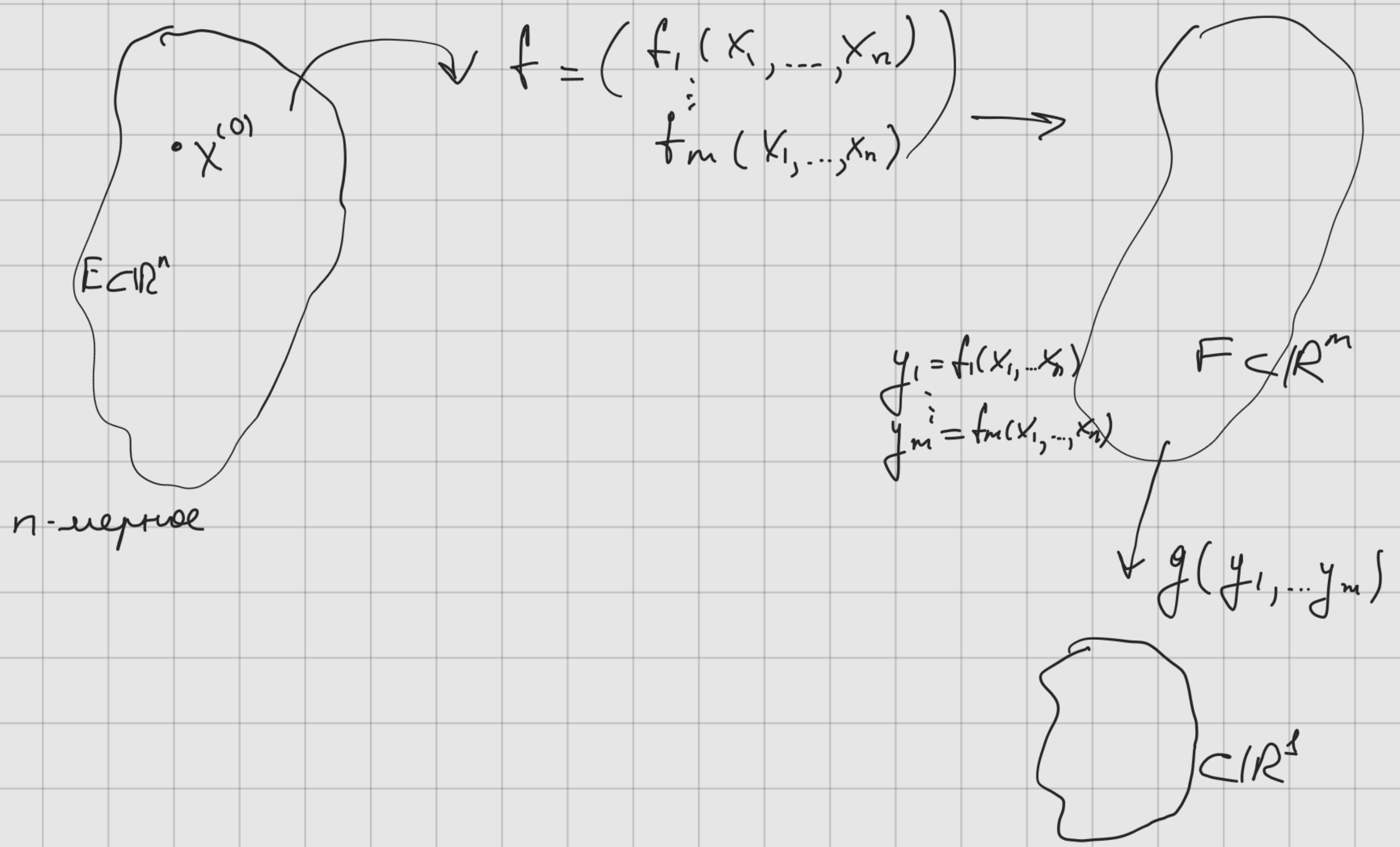
в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}) \dots f_m(x^{(0)}))$ по мн-ву F. Тогда

определённая на E сложная ф-ия

$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x)) : E \to \mathbb{R}^1$ - непрерывна

в т. $x^{(0)}$ по мн-ву E.

$y^{(0)}$ – образ т. $x^{(0)}$; $g(f(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $E \subset$



Док-во:

1) g – непр. в $y^{(0)}$ по $F \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta(\varepsilon) > 0 : \forall y \in U_\eta(y^{(0)}) \cap F \mapsto |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon$ (1)

2) $\forall i \in \overline{1,m}$ f_i – непр в т. $x^{(0)}$ по мн-ву E $\Leftrightarrow$

$\forall \eta > 0\ \exists \delta(\eta) > 0 : \forall x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap E \mapsto |f_i(x) - f_i(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |y - y^{(0)}| = |f(x) - f(x^{(0)})| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(x^{(0)}))^2} <$$

$$< \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\eta^2}{m}} = \eta$$

Т.О., $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\eta(\varepsilon)) > 0 : \forall x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap E \mapsto$

$\mapsto y \in U_\eta(y^{(0)}) \cap F \underset{(1)}{\Rightarrow} |h(x) - h(x^{(0)})| =$

$$= |g(f_1(x), \dots, f_m(x)) - g(f_1(x^{(0)}) \dots f_m(x^{(0)}))| =$$

$$= |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap E \mapsto |h(x) - h(x^{(0)})| < \varepsilon$

$\Rightarrow h(x) = g(f(x))$ – непр. в $x^{(0)}$ по мн-ву E.

Th (Вейерштрасса)

Функция f непрерывна на компакте ограничена на нём и достигает своих верхней и нижней граней

Th. (Кантора) Функция непрерывная на компакте равномерно непрерывна на нём