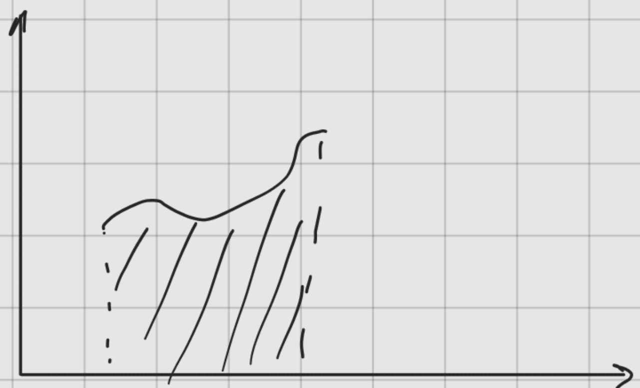
I Опр. Криволинейной трапецией называется мн-во $G_T \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$G_T = \{(x,y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}, \quad (1)$$

где $f(x)$ – непр-на на $[a,b]$, $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$.

Утв. Площадь криволинейной трапеции равна $\int_a^b f(x)\,dx$ – следует из опр-я интеграла



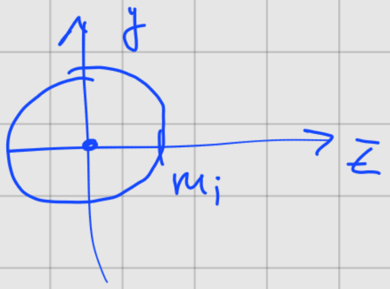
II Объём тела вращения

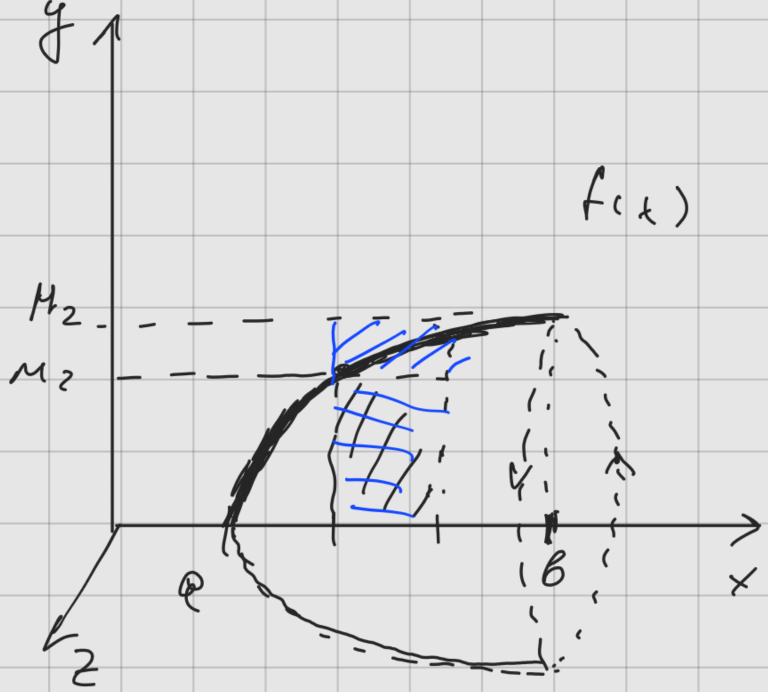
Опр. Пусть $f(x)$ – непр. и неотриц. на $[a,b]$ и тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ образовано вращением криволинейной трапеции (1) вокруг OX

Утв.

Тогда $V_\Omega = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ – объём тела вращения

Тогда $\mu\Omega = \pi \int_a f^2(x)\,dx$ — если $f \in C$ ...





Док-во: 1) $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ — разбиение $[a, b]$;

$m_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$; $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$, $i = \overline{1, n}$

2) $\Omega_*(\tau) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{(x, y, z) : x_{i-1} < x < x_i ; y^2 + z^2 < m_i^2\}$

Провращали нижние суммы Дарбу

$\Omega^*(\tau) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{(x, y, z) : x_{i-1} < x < x_i ; y^2 + z^2 < M_i^2\}$

3) $\pi \sum\limits_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta x_i = \mu\Omega_*(\tau) \le \mu\Omega \le \mu\Omega^*(\tau) = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i$

Устремим $|\tau| \to 0 \Rightarrow \mu\Omega = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \Rightarrow$ ЧТД.

(по опр. Дарбу)

Утв. Опр-е из 8.3

3) Вычисление длины кривой

Пусть кривая $\Gamma = \{\bar{r}(t); a \le t \le b\}$ – непр. диф-ма

Тогда $S = \int\limits_a^b |\bar{r}'(t)| \, dt$

Док-во: 1) в § 8.3 было утв, что, если

Г – непр. диф. $s'(t) = |r'(t)|$, где $s(t)$ – перемен-

ная длина дуги.

2) $S = S(b) - S(a) = \int\limits_a^b s'(t)\, dt = \int\limits_a^b |r'(t)| \, dt$. чтд.

$$= \int\limits_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt$$

в $\mathbb{R}^2$, если $y = f(x) \Rightarrow S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx$