Оглавление

Введение

1. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества. Компакты.

2. Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора (без доказательства)). Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области. Непрерывные отображения компактных и линейно связных подмножеств конечномерных пространств.

3. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость суперпозиции отображений. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл. Производная отображения конечномерных пространств и матрица Якоби.

4. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

5. Определение измеримости по Жордану множества в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная ад-

дитивность меры Жордана. Измеримость и мера прямого произведения.

6. Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

7. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой. Вычисление площади поверхности вращения. (без доказательств)

8. Криволинейный интеграл первого рода. Криволинейный интеграл второго рода.

9. Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

10. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.

11. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

12. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при формальном дифференцировании и интегрировании ряда. Вторая теорема Абеля.

13. Степенные ряды с действительными членами. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и в форме Коши . Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x, $cosx$, $sinx$, $ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

1. Точечно-векторное пространство

1.1. Типы точек и подмножеств

По отношению к произвольному множеству $X \in \mathbb{R}^n$ все точки пространства $\mathbb{R}^n$ можно разделить на несколько типов:

Определение 1.1. *По отношению к множеству X точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется*

1. ***внутренней**, если x^0 принадлежит X вместе с некоторой своей окрестностью:*
$$\exists \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(x^0) \subset X;$$
2. ***изолированной**, если она принадлежит X, и существует ее проколотая окрестность, не пересекающаяся с X:*
$$x^0 \in X \ \wedge \exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0): \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \cap X = \emptyset;$$
3. ***предельной**, если в любой ее окрестности находятся точки из X,* отличные от x^0 $\Leftrightarrow$ *в любой ее **проколотой** окрестности находятся точки из X:*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \cap X \neq \emptyset;$$
4. ***граничной**, если в любой ее окрестности находятся как точки из X, так и точки из дополнения X^C:*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x^0) \cap X \neq \emptyset \ \wedge U_\varepsilon(x^0) \cap X^C \neq \emptyset.$$

Замечание 1.1. В силу симметричности определения, точка x является граничной для множества X только в том случае, когда она граничная для дополнения X^C.

Обсуждение 1.1. Одна и та же точка может одновременно принадлежать к разным типам. Так, внутренняя точка всегда предельная, изолированная – всегда граничная. Внутренние и изолированные точки принадлежат множеству X; предельные и граничные точки могут принадлежать как X, так и дополнению X^C.

Лемма 1.1. *Если точка $x^0 \in X$, то:*

1. *она является предельной только в том случае, когда она не является изолированной;*
2. *она является граничной только в том случае, когда она не является внутренней.*

Доказательство п. 1 сразу следует из того обстоятельства, что определение предельной точки при условии $x^0 \in X$ есть отрицание определения изолированной точки. Доказательство п. 2 сразу следует из того обстоятельства, что определение граничной точки при условии $x^0 \in X$ есть отрицание определения внутренней точки. ■

Различные типы точек порождают различные типы подмножеств пространства.

Определение 1.2. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется*

1. ***открытым**, если все его точки внутренние;*
2. ***замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.*

Лемма 1.2.

1. *Дополнение к открытому (замкнутому) подмножеству замкнуто (открыто).*
2. *Пустое множество $\emptyset$ и все пространство $\mathbb{R}^n$ одновременно открыты и замкнуты.*
3. *Произвольное объединение (пересечение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*
4. *Любое **конечное** пересечение (объединение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*

Доказательство п. 1. Пусть X – открытое множество, а x^0 – предельная точка для дополнения X^C. Если она внутренняя для X^C, то принадлежит ему (по определению). Если же она не является внутренней для X^C, то в каждой ее окрестности лежат точки из X. В силу определения предельной точки, получается, что в каждой окрестности x^0 лежат как точки из X^C, отличные от нее, так и точки из X. Значит, x^0 – граничная точка и для X, и для X^C (см. замечание 1.1). Но из п. 2 леммы 1.1 следует, что открытое множество X НЕ содержит свои граничные точки. Значит, точка x^0 принадлежит дополнению X^C.

Если же X – замкнутое множество, то ему принадлежат все граничные точки. Поэтому дополнению X^C НЕ принадлежит ни одна граничная точка. Значит, согласно п. 2 леммы 1.1, все точки X^C внутренние.

Доказательство п. 3. Если точка x^0 принадлежит объединению открытых подмножеств, то она принадлежит хотя бы одному из этих подмножеств, например, X. Значит, существует окрестность $U_\varepsilon(x^0) \subset X$. Тогда, в силу определения *объединения* подмножеств, указанная окрестность принадлежит объединению.

Пусть множества X_α замкнуты. Тогда дополнение к их пересечению $\left(\bigcap_\alpha X_\alpha\right)^C = \bigcup_\alpha X_\alpha^C$ есть объединение дополнений (это известное теоретико-множественное равенство), которое является открытым (по доказанному выше). Значит, само пересечение замкнутых подмножеств – замкнуто.

Докажите пункты 2 и 4 леммы самостоятельно. ■

Примеры 1.1. открытых и замкнутых подмножеств.

1. Открытый n-мерный шар и открытый прямоугольный параллелепипед являются открытыми подмножествами. (Докажите, опираясь на неравенство треугольника.)
2. Замкнутый n-мерный шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x^0 – это

$$\overline{U}_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x^0) \leq \varepsilon\} = U_\varepsilon(x^0) \cup S^{n-1}(x^0).$$

Замкнутый прямоугольный параллелепипед – это

$$\overline{\Pi}_n := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

Замкнутый шар и замкнутый прямоугольный параллелепипед – замкнутые подмножества (докажите).

Замечание 1.2. Все понятия, которые мы вводим в данном пункте, опираются только на понятие открытого шара. Оказывается, взяв утверждения леммы 1.2 в качестве **аксиом открытых множеств**, можно построить раздел математики, именуемый **топологией**.

Изучая данное множество X, прежде всего нужно выяснить, насколько оно “отличается” от открытого и замкнутого. С этой целью дадим

Определение 1.3 (***типов подмножеств, порожденных*** X).

1. ***Внутренностью*** *множества X называется подмножество $X^0 \subset X$ всех его внутренних точек.*
2. ***Границей*** *∂X множества X называется совокупность всех его граничных точек.*
3. ***Замыканием*** *множества X называется объединение $\overline{X} = X \cup \partial X$ множества с его границей.*

Замечание 1.3. Введенные понятия зависят не только от множества X, но и от объемлющего пространства. Рассмотрим подмножество $\mathbb{Q}_x$ всех рациональных чисел на оси x в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Между $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_x \subset \mathbb{R}^2$ существует каноническая биекция $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_x$, сохраняющая расстояния между точками. Указанная биекция "продолжается" и на границы: $\partial\mathbb{Q}_x = \mathbb{R}_x \cong \mathbb{R} = \partial\mathbb{Q}$. Но если взять границу еще раз, то биективность не сохраняется:

$$\mathbb{R}^2 \supset \partial(\partial\mathbb{Q}_x) = \partial\mathbb{R}_x = \mathbb{R}_x \neq \emptyset, \quad \text{но} \quad \mathbb{R} \supset \partial(\partial\mathbb{Q}) = \partial\mathbb{R} = \emptyset. \boxminus$$

Обсуждение 1.2. Исследуя свойства точек по отношению к подмножеству X, во-первых, полезно работать одновременно с X и с его дополнением X^C. Во-вторых, удобно применять **классификацию** точек множества X, т. е. его разбиение на попарно непересекающиеся подмножества, обладающие определенными свойствами.

Обсудим одну из возможных классификаций подмножества X. Обозначим через $\mathrm{Is}\,(X) \subset X \cap \partial X$ подмножество всех изолированных точек множества X. Через $\mathrm{Lm}\,(X) \subset X \cap \partial X$ обозначим подмножество всех тех граничных точек *из* X, которые *не являются изолированными.* Последние будем называть **межевыми** (от англ. *landmark*).

Лемма 1.3. *Произвольное множество X состоит из внутренних, изолированных и межевых точек, причем указанные подмножества попарно не пересекаются:*

$$X^0 \cap \mathrm{Is}\,(X) = X^0 \cap \mathrm{Lm}\,(X) = \mathrm{Is}\,(X) \cap \mathrm{Lm}\,(X) = \emptyset,$$
$$X = X^0 \cup \mathrm{Is}\,(X) \cup \mathrm{Lm}\,(X).$$

Теперь у нас есть полная классификация точек пространства относительно подмножества X:

Лемма 1.4.

$$\mathbb{R}^n = X \bigcup X^C =$$
$$= (X^0 \cup \mathrm{Is}\,(X) \cup \mathrm{Lm}\,(X)) \bigcup ((X^C)^0 \cup \mathrm{Is}\,(X^C) \cup \mathrm{Lm}\,(X^C)). \qquad (1.1)$$

Граница множества X и его дополнения X^C совпадают и в общем случае содержит как точки из X, так и точки из дополнения X^C:

$$\partial X = \mathrm{Is}\,(X) \cup \mathrm{Lm}\,(X) \cup \mathrm{Lm}\,(X^C) \cup \mathrm{Is}\,(X^C) = \partial(X^C). \qquad (1.2)$$

Классификации (1.1) и (1.2) изображены на схеме:

$$\mathbb{R}^n = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathrm{Is}\,(X) & \\ \cline{2-2} & \mathrm{Lm}\,(X) & \\ \cline{2-2} \cline{2-2} X^0 & \mathrm{Lm}\,(X^C) & (X^C)^0 \\ \cline{2-2} & \mathrm{Is}\,(X^C) & \\ \hline \end{array}$$

Лемма 1.5 (***свойства подмножеств, порожденных*** X).

1*а*. *Внутренность* X^0 *множества* X *есть наибольшее открытое подмножество, содержащееся в* X. *То есть: 1)* $X^0 \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое подмножество, 2)* $X^0 \subset X$, *3) для любого открытого подмножества* $X_0 \subset X$ *верно, что* $X_0 \subset X^0$.

1*б*. *Множество* X *открыто только тогда, когда* $X = X^0$.

1*в*. $(X^0)^0 = X^0$.

2*а*. *Замыкание* $\overline{X}$ *множества* X *есть наименьшее замкнутое множество, содержащее* X. *То есть: 1)* $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n$ *– замкнутое подмножество, 2)* $X \subset \overline{X}$, *3) для любого замкнутого подмножества* $\widetilde{X} \supset X$ *верно, что* $\overline{X} \subset \widetilde{X}$.

2*б*. *Множество замкнуто только тогда, когда* $X = \overline{X}$.

2*в*. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

3*а*. *Границы множества* X *и его дополнения* X^C *совпадают:* $\partial X = \partial X^C$.

3*б*. *Граница есть замыкание минус внутренность:*
$\partial X = \overline{X} \setminus X^0$.

3*в*. $X^0 \cup \partial X \cup (X^C)^0 = \mathbb{R}^n$.

3*г*. $\partial(\partial X) \subset \partial X$, $\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)$.

Замечание 1.4. Операции внутренности и замыкания стабилизируются на первом шаге, а граница в общем случае – на втором шаге.

Пример 1.1. $\partial(U_\varepsilon(x^0)) = S^{n-1}(x^0)$, $\partial S^{n-1}(x^0) = S^{n-1}(x^0)$. Но, как было показано выше, на числовой прямой $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, а $\partial\mathbb{R} = \emptyset$.

Доказательство п. 3*г*. Из п. 3*б* следует, что граница ∂X есть замкнутое множество. Возможны два случая: либо граница содержит внутренние (по отношению к себе) точки, либо не содержит. Во втором случае все точки границы ∂X являются граничными (по отношению к ∂X); следовательно, $\partial(\partial X) = \partial X$. В первом случае $\partial X = \partial(\partial X) \cup (\partial X)^0$, поэтому $\partial(\partial X) \subset \partial X$; но на следующем этапе $\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)$, поскольку замкнутое множество $\partial(\partial X)$ уже не содержит внутренних по отношению к себе точек. ■

1.2. Предел последовательности точек в $\mathbb{R}^n$

Определение 1.4. ***Последовательностью точек в*** $\mathbb{R}^n$ *называется отображение из множества натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *в пространство* $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.5. *Точка* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ *называется* ***пределом*** *последовательности* $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$, *если* $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^k, x^0) = 0$. *Последовательность, имеющая предел, называется* ***сходящейся***.

Замечание 1.5. Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно определить на языке "$\varepsilon - k$", но мы свели его к старому понятию – пределу *числовой* последовательности $\{\rho(x^k, x^0)\}_{k=1}^{\infty}$. В $\mathbb{R}^n$ мы не будем вводить аналога бесконечности т. е. предел в $\mathbb{R}^n$ всегда конечен.

Лемма 1.6 (***критерии сходимости***). *Последовательность сходится к точке x^0 только тогда, когда:*

1. *геометрический критерий: в любой окрестности точки x^0 содержатся значения почти всех элементов последовательности, т. е. всех, кроме конечного их количества;*
2. *координатный критерий:* $\forall i = 1, \ldots, n \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$.

Доказательство п. 2. ($\Rightarrow$) очевидно: $|x_i^k - x_i^0| \le \rho(x^k, x^0) \to 0$.

($\Leftarrow$) Для $\forall \varepsilon > 0$ и каждой координаты $i = 1, \ldots, n$ существует номер $K_i = K_i(\varepsilon)$ такой, что $\forall k > K_i$ выполняется оценка $|x_i^k - x_i^0| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Следовательно, эта оценка верна $\forall k > K := \max_i\{K_i\}$. Поэтому $\forall k > K$ справедливо неравенство $\rho(x^k, x^0) < \varepsilon$. (В доказательстве принципиально, что количество координат *конечно*.) ■

Определение 1.6. *Последовательность $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется **фундаментальной** (или последовательностью **Коши**), если выполнено следующее условие:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall k > k_0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \hookrightarrow\ \rho(x^k, x^{k+m}) < \varepsilon.$$

Теорема 1.1 (***критерий Коши сходимости последовательности***).

Последовательность $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. Последовательность в многомерном пространстве сходится только тогда, когда сходятся координатные последовательности (п. 2 леммы 1.6). Каждая координатная последовательность сходится только тогда, когда она фундаментальна (критерий Коши для числовой последовательности). Наконец, последовательность в многомерном пространстве фундаментальна только тогда, когда фундаментальна каждая координатная последовательность (доказательство осуществляется так же, как доказательство координатного критерия сходимости; докажите). ■

1.3. Ограниченные и компактные подмножества

Определение 1.7. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется **ограниченным**, если оно целиком содержится в некотором шаре. Последовательность называется ограниченной, если ограничено множество ее значений.*

Лемма 1.7 (***необходимое условие сходимости***). *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Понятия подпоследовательности и частичного предела остаются неизменными. В конечномерном пространстве по-прежнему верна

Теорема 1.2 (***Больцано–Вейерштрасса***). *Ограниченная последвательность имеет по крайней мере один частичный предел.*

Доказательство. Нам предстоит доказать, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{x^{k_i}\}$,

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots, \quad \mathbb{N} \ni i \to \infty.$$

Поскольку последовательность ограничена, то каждая координатная последовательность $\{x_j^k\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ тем более ограничена. Возьмем первую координатную последовательность. В силу одномерной теоремы Больцано–Вейерштрасса, выберем из нее сходящуюся подпоследовательность с номерами $k_1, k_2, \ldots$. Теперь оставляем во второй координатной последовательности подпоследовательность с указанными номерами: $x_2^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_2^{k_m}, \ldots$. Из этой последовательности, которая занумерована индексом m, выберем сходящуюся подпоследовательность и составим из третьей координатной последовательности подпоследовательность именно с этими номерами, и т. д. За *конечное* количество шагов мы получим нумерацию для n-й сходящейся координатной подпоследовательности. При этой нумерации будут сходиться все координатные подпоследовательности. Остается сослаться на координатный критерий сходимости (п. 2 леммы 1.6). ■

Определение (счетной) компактности остается тем же:

Определение 1.8. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется* ***(счетно) компактным****, если из любой принадлежащей ему последовательности можно выделить* сходящуюся в нем же *подпоследовательность.*

Ценность компактности объясняет

Теорема 1.3. *Следующие два условия равносильны компактности:*

1. *Подмножество X ограничено и замкнуто.*
2. *Из любого* ***открытого покрытия*** *множества X можно выбрать его* ***конечное*** *подпокрытие. Точнее: пусть множество $X \subset \cup_\alpha O_\alpha$ принадлежит произвольному объединению открытых подмножеств O_α; тогда из данных подмножеств можно выбрать такое конечное число, что объединение $\cup_{i=1}^p O_{\alpha_i} \supset X$ содержит X.*

Обсуждение 1.3. Понятие счетной компактности применяется в функциональном анализе для доказательства существования решений "бесконечномерных" уравнений. Второй критерий компактности применяют в топологии для получения глобальных объектов с заранее заданными свойствами.

Заметим, что в топологии и функциональном анализе второй критерий берут в качестве определения. Первый критерий компактности удобен только в конечномерном пространстве.

Доказательство. Ограничимся доказательством равносильности определения 1.8 и первого утверждения.

($\Leftarrow$) Пусть последовательность $\{x^k\} \subset X$. Поскольку множество X ограниченное, то, в силу теоремы 1.2, существует сходящаяся подпоследовательность, которая целиком принадлежит X. Но подмножество X замкнуто. Значит, предельная точка этой подпоследовательности также принадлежит подмножеству X.

($\Rightarrow$) Пусть из любой последовательности $\{x^k\} \subset X$ можно выбрать подпоследовательность $\{x^{k_i}\}$, которая сходится в X: $x^{k_i} \overset{i\to\infty}{\to} x^0 \in X$. Ограниченность докажем от противного. Пусть X не является ограниченным множеством. Пусть $U_k(O)$ – шар радиуса $k \in \mathbb{N}$ с центром в начале координат. Из принятого допущения следует, что существует такая последовательность точек $\{x^k\} \subset X$, что $x_k \notin U_k(O)$. Но у такой последовательности любая подпоследовательность неограничена (докажите). Значит, для любой подпоследовательности не выполняется необходимое условие сходимости (лемма 1.7) – противоречие с условием.

Докажем замкнутость X: пусть точка x^0, является предельной для подмножества X, покажем, что она принадлежит X. Поскольку точка предельная, то существует последовательность точек из X, сходящаяся к x^0. Поскольку последовательность сходится к x^0, то и *любая* ее подпоследовательность к ней сходится. По условию найдется подпоследовательность, которая сходится в X. Значит, $x^0 \in X$. ■

2. Предел и непрерывность отображений

2.1. Понятие предела функции нескольких переменных

Определение 2.1 (предела по Коши). *Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x^0) \subset \mathrm{Dom}\,(f)$ точки x^0. Точка $y^0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x^0) \ \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(y^0).$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1^0, \ldots, x_n^0)} f(x_1, \ldots, x_n) = y^0.$$

Терминология: предел функции нескольких переменных будем также называть n-**арным**, чтобы отличать его от различных одномерных модификаций (см. ниже).

Определение 2.2. ***Последовательностью Гейне*** *точки x^0 для функции f мы называем последовательность точек $\{x^k\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta}(x^0) \subset \mathrm{Dom}\,(f)$, сходящуюся к точке x^0.*

Определение 2.3 (предела по Гейне). *Точка $y^0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если для любой последовательности Гейне $x^k \to x^0$ справедливо*

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = y^0.$$

Неизменными вместе с доказательствами остаются истинными следующие утверждения из теории пределов функции одной переменной:

1. эквивалентность двух определений пределов (по Коши и по Гейне);
2. предельный переход в неравенствах, арифметические действия с пределами;
3. критерий Коши существования конечного предела;
4. предел сложной функции: пусть

$$f : \mathbb{R}^n \supset \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \to \mathrm{Dom}\,(g) \subset \mathbb{R},\ \ g : \mathrm{Dom}\,(g) \to \mathbb{R};$$

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = y_0 \ \wedge\ f(x) \neq y_0 \text{ при } x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0), \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = u_0;$$

тогда

$$\lim_{x \to x^0} (g \circ f)(x) = u_0$$

(заметим, что внутренняя функция f зависит от нескольких переменных, а внешняя g – от одной переменной);

5. свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций;
6. свойства понятий o и O.

2.2. Предел по направлению

Обозначим $\widetilde{f}(\rho, \varphi) := f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$.

Определение 2.4. *Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0).* ***Пределом по направлению,*** *которое задается углом $\varphi_0 = const$, называется предел функции* одной *переменной ρ:*

$$\lim_{\rho \to +0} f(x_0 + \rho \cos \varphi_0, y_0 + \rho \sin \varphi_0) = \lim_{\rho \to +0} \widetilde{f}(\rho, \varphi_0).$$

Очевидно, что двойной предел "сильнее" предела по направлению:

Лемма 2.1. *Если существует двойной предел $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = t_0$, то предел по любому направлению φ_0 существует и равен t_0.*

Доказательство леммы 2.1 основано на теореме о пределе сложной функции.

Следствие 2.1. *Если отсутствует предел по какому-либо направлению, или пределы по двум разным направлениям различны, то двойной предел не существует.*

Замечание 2.1. Мы знаем, что существование предела вектор-функции *одной* переменной *равносильно* существованию покоординатных пределов. Аналогично, существование предела *последовательности* точек в конечномерном пространстве равносильно существованию пределов координатных последовательностей. Однако (это принципиальный момент!) существование и совпадение пределов по всем направлениям в общем случае не влечет за собой существование двойного предела. Различие ситуаций в том, что в первом и втором случаях области определения *одномерны*, а в третьем случае область определения многомерная.

Пример 2.1. Существует ли двойной предел функции

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)}$$

при $(x,y) \to (0,0)$? Воспользуемся полярными координатами:

$$\widetilde{f}(\rho,\varphi) = \frac{(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)^2}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = (\cos\varphi + \sin\varphi)^2.$$

При $\varphi = \pi/4$ предел по направлению равен 2, при $\varphi = -\pi/4$ – равен 0. Следовательно, двойной предел отсутствует.

Пример 2.2. Существует ли двойной предел функции

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^4+y^2)}$$

при $(x,y) \to (0,0)$? Снова воспользуемся полярными координатами:

$$\widetilde{f}(\rho,\varphi) = \frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi}.$$

Если $\sin\varphi = 0$, то числитель тождественно равен нулю. Если $\sin\varphi \neq 0$, то при *фиксированном* φ имеем

$$\left|\frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi}\right| \leq \frac{\rho\cos^2\varphi|\sin\varphi|}{\sin^2\varphi} = \frac{\rho\cos^2\varphi}{|\sin\varphi|} \to 0$$

при $\rho \to 0$. Следовательно, предел функции по любому направлению равен нулю. Теперь будем приближаться к началу координат по параболе $y = x^2$. Поскольку $f(x,x^2) \equiv 1/2$, то предел по параболе равен $1/2$. Следовательно, двойной предел отсутствует.

Лемма 2.2 (достаточное условие существования двойного предела). *Если существует такая неотрицательная функция $F(\rho)$, что*

$$|\widetilde{f}(\rho,\varphi) - z_0| \leq F(\rho), \text{ где } F(\rho) \to 0 \text{ при } \rho \to +0,$$

тогда существует двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = z_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Данное в теореме условие равносильно тому, что

$$|f(x,y) - z_0| \le F(\sqrt{x^2+y^2}), \text{ где } F(\sqrt{x^2+y^2}) \to 0 \text{ при } \sqrt{x^2+y^2} \to +0.$$

Теперь, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, чтобы при $\rho \in (0, \delta)$ выполнялось неравенство $F(\sqrt{x^2+y^2}) < \varepsilon$. Откуда следует, что условие принадлежности $f(x,y) \in U_\varepsilon(z_0)$ выполняется для всех таких пар $(x,y) \neq (x_0, y_0)$, для которых $(x,y) \in U_\delta(x_0, y_0)$. ■

На практике поиск функции $F(\rho)$ сводится к доказательству неравенства $|\widetilde{f}(\rho,\varphi) - z_0| =: \widetilde{F}(\rho,\varphi) \le F(\rho)$, в правой части которого *отсутствует* переменная φ.

Пример 2.3. Существует ли двойной предел функции

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

при $(x,y) \to (0,0)$? Справедлива оценка

$$|\widetilde{f}(\rho,\varphi)| = \left| \frac{\rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \right| = \rho\cos^2\varphi |\sin\varphi| \le \rho.$$

Следовательно, предел существует и равен нулю. Заметим, из того, что

$$\lim_{\rho\to+0} (\rho\cos^2\varphi|\sin\varphi|) = 0,$$

еще не следует, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Рассмотрим случай высоких размерностей $n \ge 3$

Определение 2.5. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$.* ***Пределом по направлению*** *единичного вектора называется односторонний предел функции одной переменной ρ:*

$$\lim_{\rho\to+0} f(x^0 + \rho\boldsymbol{e}).$$

При $n = 2$ получим определение 2.4.

Верен аналог леммы 2.1 об n-арном пределе и пределе по направлению.

Координаты вектора $\boldsymbol{e} = (e^1, \ldots, e^n)^T$ определяют положение точки на единичной $(n-1)$-мерной сфере. Хотя координат n, но независимых среди них $(n-1)$. Для наших целей удобно ввести криволинейную систему из n координат, среди которых одна координата есть полярный радиус ρ, а остальные координаты определяют точку на единичной сфере. В трехмерном случае можно воспользоваться *сферической системой координат.*

2.3. Предел по множеству и повторный предел

Предел по множеству является достаточно общей конструкцией, включающей в себя различные случаи вычисления пределов.

Определение 2.6. *Пусть $E \subset \mathrm{Dom}\,(f) \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество области определения функции f. Пусть x^0* – предельная точка *подмножества E. Точка $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется* ***предeлом функции f по множеству E*** *при $x \to x^0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon): \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x^0) \cap E \ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0).$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x^0, x \in E} f(x) = y_0.$$

Примеры 2.1 (пределов по множеству).

1) односторонние пределы функции одной переменной: $E = (x_0, x_0 + \delta)$ или $E = (x_0 - \delta, x_0)$.

2) предел по направлению функции нескольких переменных : E – луч, выходящий из точки x^0.

3) предел по дуге кривой, выходящей из точки x^0 (пример 2.2).

4) предел по области определения, которая не содержит целиком проколотую малую δ-окрестность точки x^0 («дырчатая» окрестность).

Пример 2.4. Найти предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^{xy}.$$

Хотя о множестве E ничего не сказано, но область определения $\mathrm{Dom}\,(h) = \{x \neq 0, \ y \neq 0\}$ такова, что в любой проколотой окрестности точки $(0,0)$ найдутся точки, которые не принадлежат $E := \mathrm{Dom}\,(h)$. Будем рассматривать данную функцию как сложную:

$$f(x,y) := xy, \ g(u) := |u|^u, \ \ h(x,y) = g(f(x,y)) = |xy|^{xy}.$$

Предел “внутренней” функции равен нулю, поскольку

$$0 \leq |xy| = \rho^2 |\cos\varphi \sin\varphi| \leq \rho^2 \to 0 \ \text{ при } \ \rho \to +0.$$

Причем $f(x,y) \neq 0$ при $(x,y) \in \mathrm{Dom}\,(h)$. Предел “внешней” функции $\lim\limits_{u\to 0} |u|^u = 1$ (доказательство основано на потенцировании и применении правила Лопиталя, докажите). Все условия теоремы о замене выполнены, поэтому

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = 1.$$

Для функции нескольких переменных существует еще один способ перехода к пределу функции одной переменной: он состоит в последовательном применении предельных переходов по *каждой координате в отдельности*. Рассмотрим двумерный случай.

Определение 2.7. *Пусть дана функция двух переменных $f(x, y)$, которая определенна в некоторой проколотой прямоугольной окрестности $\overset{\circ}{\Pi}_\varepsilon (x_0, y_0) \subset \mathrm{Dom}\,(f)$ точки (x_0, y_0). Пусть для каждого числа y, удовлетворяющего условию $0 < |y - y_0| < \varepsilon$, существует конечный предел функции одной переменной*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) =: \varphi(y).$$

Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

называется ***повторным пределом*** *функции f в точке (x_0, y_0). Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.*

Связи между повторными и двойным пределами нетривиальны. В общем случае:

1) из существования повторных пределов не следует существование двойного,

2) повторный предел, в общем случае, зависит от его порядка; 3) из существования двойного предела не следует существование повторных.

Рассмотрим два примера.

Пример 2.5. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 y/(x^4 + y^2)$ при $x, y \to 0$. Повторные пределы существуют и оба равны нулю. Двойной предел, как показано выше, отсутствует.

Пример 2.6.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Двойной предел существует и равен нулю. При фиксированном y отсутствует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, при фиксированном x отсутствует предел $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$. Значит, повторные пределы отсутствуют.

Замечание 2.2. Интерес представляют как раз те случаи, когда n-арный предел можно заменить “цепочкой” повторных. Мы познакомимся с такими конструкциями в теории интегрирования.

Достаточные условия замены n-арного предела повторными дает

Лемма 2.3. *Пусть:*
1) в точке (x_0, y_0) существует двойной предел функции $f(x, y)$;
2) при каждом фиксированном $y \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$,
3) при каждом фиксированном $x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.
Тогда оба повторных предела существуют и равны двойному.

2.4. Отображение конечномерных пространств

Определение 2.8. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Мы говорим, что на X задано* ***отображение конечномерных точечных пространств*** *$f : X \to \mathbb{R}^m$, если каждой точке $x \in X$ поставлена в соответствие единственная точка $f(x) \in \mathbb{R}^m$.*

Лемма 2.4. *Задание отображения эквивалентно заданию m координатных функций от n переменных:*

$$f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2.1}$$

Частными случаями отображения являются:
1) числовая функция одной переменной, т. е. $n = m = 1$;
2) "вектор-функция", т. е. $n = 1$, $m \geq 2$ (взяли в кавычки, т. к. $f(x)$ все-таки точка, а не вектор);
3) числовая функция нескольких переменных, т. е. $n \geq 2$, $m = 1$.

Числовую функцию нескольких переменных $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}$ в физике называют **скалярным полем**. Примерами скалярных полей являются температура, электростатический потенциал и др.

Обсудим понятие предела для отображения точечных пространств (для векторных пространств определения и утверждения те же). Для простоты считаем, что область определения $\mathrm{Dom}\,(f) = X$ является областью в $\mathbb{R}^n$. Понятие окрестности позволяет без изменений сформулировать понятие предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ для отображения f.

Определение 2.9 (по Коши). *Точка $y^0 \in \mathbb{R}^m$ называется* ***пределом*** *отображения f при $x \to x^0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x^0) \;\; \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y^0).$$

Определение 2.10 (по Гейне). *Точка $y^0 \in \mathbb{R}^m$ называется* ***пределом*** *отображения f при $x \to x^0$, если для* любой *последовательности Гейне $x^k \to x^0$ $(k \to \infty)$ справедливо: $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) = y^0$.* $\boxtimes$

Для отображений общего вида, т. е. $m \geq 2$, остаются справедливыми те понятия и утверждения о пределах, которые не используют порядок на числовой прямой в *образе*:

1. эквивалентность двух определений пределов;
2. критерий Коши существования предела;
3. предел суперпозиции отображений: пусть

$$f:\ \mathbb{R}^n \supset \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x^0) \to \mathrm{Dom}\,(g) \subset \mathbb{R}^m,\ g : \mathrm{Dom}\,(g) \to \mathbb{R}^p;$$

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = y^0 \ \wedge \ f(x) \neq y^0 \text{ при } x \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x^0), \quad \lim_{y \to y^0} g(y) = u^0,$$

   тогда

$$\lim_{x \to x^0} (g \circ f)(x) = u^0;$$

4. предел по множеству (в частности, предел по направлению – определение (2.5)), повторные пределы.

Лемма 2.5 (покоординатный критерий предела). *Точка $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$ является пределом отображения (2.1) при $x \to x^0$ только тогда, когда для каждой координатной функции $f_i(x)$ число y_i^0 является пределом при $x \to x^0$ $(i = 1, \ldots, m)$.*

Доказательство можно осуществить пользуясь определением предела по Гейне: рассмотреть последовательность $f(x^k)$, где $x^k \to x^0$ при $k \to \infty$, и сослаться на п. 2 леммы 1.6 (координатный критерий сходимости последовательности). Однако полезно увидеть геометрический смысл утверждения.

С одной стороны, m-мерный шар радиуса ε вписан в m-мерный куб с ребром $a = 2\varepsilon$. Поэтому проекцией шара $U_\varepsilon(y^0)$ на i-ю координатную ось является ε-окрестность числа y_i^0. Следовательно, $|f_i(x) - y_i^0| \leq \rho(f(x), y^0)$, откуда вытекает необходимость утверждения.

С другой стороны, в силу m-мерной теоремы Пифагора, открытый m-мерный куб с ребром $b = 2\varepsilon/\sqrt{m}$ вписан в шаровую ε-окрестность точки y^0 (на рис. 2.1 $m = 2$):

$$\left(y_1^0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},\, y_1^0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right) \times \cdots \times \left(y_m^0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, y_m^0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right) \subset U_\varepsilon(y^0).$$

Теперь, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, чтобы $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x^0)$ и $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ выполнялось $|f_i(x) - y_i^0| < \varepsilon/\sqrt{m}$. Тогда

$$\rho(f(x), y^0) = \sqrt{(f_1(x) - y_1^0)^2 + \ldots + (f_n(x) - y_n^0)^2} < \varepsilon,$$

что доказывает достаточность.

Заметим, что размерность пространства-образа находится в знаменателе, поэтому предельный переход при $m \to \infty$ исключен. ■

Наконец, аналогично лемме 2.1 формулируется и доказывается

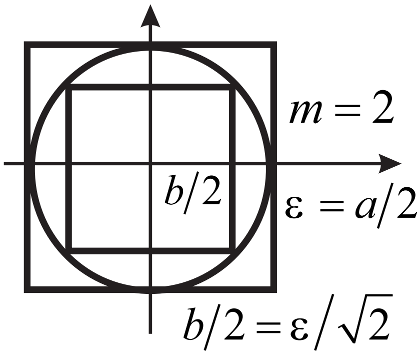

Рис. 2.1

Лемма 2.6 (необходимое условие предела). *Если существует предел*

$$\lim_{x\to x^0} f(x) = y^0,$$

то предел по любому направлению существует и равен y^0. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно.

Замечание 2.3. Возвращаясь к замечанию 2.1, еще раз подчеркнем, что в пространстве-образе сходимость равносильна покоординатной сходимости (лемма 2.5), но в пространстве-прообразе сходимость является только достаточным условием покоординатной сходимости (лемма 2.6).

2.5. Непрерывность отображения в точке

Определение 2.11. *Отображение $f:\mathbb{R}^n\supset X \to \mathbb{R}^m$ называется* ***непрерывным в точке*** *$x^0\in X$, если:*

1. *или x^0 является изолированной точкой подмножества X;*
2. *или x^0 является предельной точкой подмножества X и*

$$\lim_{x\to x^0,\ x\in X} f(x) = f(x^0).$$

Определение можно сформулировать на языке $\varepsilon-\delta$ по Коши или на языке последовательностей по Гейне, как это сделано для понятия предела. Но теперь нужно пользоваться не проколотой, а обычной окрестностью точки x_0, поскольку отображение в этой точке определено.

Лемма 2.7. *Отображение f непрерывно в точке x^0 только тогда, когда каждая координатная функция $f_i(x)$ $(i=1,\dots,m)$ (см. (2.1)) непрерывна в x^0.*

Доказательство сразу следует из леммы 2.5.

Понятие предела по направлению порождает понятие непрерывности по выделенной переменной.

Определение 2.12. *Отображение f называется* ***непрерывным по переменной*** x_i *в точке* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$, *если вектор-функция одной переменной*

$$\varphi(x_i) := f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

непрерывна в точке x_i^0.

Терминология. Если точка x_0 является внутренней для множества X, то непрерывность по определению 2.11 еще называют **непрерывностью по совокупности переменных** в точке x_0.

Лемма 2.8 (необходимое условие непрерывности). *Если отображение f непрерывно по совокупности переменных в точке x^0, то оно непрерывно по каждой переменной в отдельности. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно.*

Доказательство необходимости есть прямое следствие леммы 2.6. Для обоснования второго утверждения достаточно взять функцию из примера 2.2 и доопределить ее в точке $O(0,0)$ нулем: $f(0,0) := 0$. Теперь функция f непрерывна по каждой переменной в точке O, но разрывна в этой точке, поскольку в ней отсутствует предел. ■

Замечание 2.4. В пространстве-образе $\mathbb{R}^m$ непрерывность равносильна покоординатный непрерывности (лемма 2.7), в пространстве-прообразе $\mathbb{R}^n$ непрерывность является только достаточным условием покоординатной непрерывности (лемма 2.8). (Сравните с замечанием 2.3.)

Если пространство-образ $\mathbf{V}^m$ векторное, то справедлива

Лемма 2.9 (о непрерывности операций). *Пусть даны два отображения f, g с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\boldsymbol{V}^m$. Пусть эти отображения непрерывны в точке x^0. Тогда:*

1. *их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также непрерывна в точке x^0;*
2. *если $m = 1$ (числовые функции нескольких переменных), то произведение $f(x)g(x)$ и частное $f(x)/g(x)$ (при условии $g(x^0) \neq 0$) непрерывны в точке x^0.*

Доказательство немедленно вытекает из утверждений об арифметических действиях с пределами.

Задача 2.1. Пусть выполнены условия леммы 2.9; пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – числовые функции, которые непрерывны в точке x^0. Докажите, что отображение $x \to \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$ непрерывно в точке x^0.

Аналогично случаю числовых функций числового аргумента формулируется и доказывается

Лемма 2.10 (о непрерывности суперпозиции отображений). *Если отображение*

$$f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}^m$$

непрерывно в точке x^0, а отображение

$$g : \mathbb{R}^m \supset U_\delta(y^0) \to \mathbb{R}^p$$

непрерывно в точке $y^0 = f(x^0)$, то суперпозиция отображений $h = g \circ f$, заведомо определенная в некоторой окрестности точки x^0, непрерывна в этой точке.

2.6. Непрерывность отображения на множестве

Определение 2.13. *Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Теорема 2.1. *Пусть даны два отображения f, g с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\boldsymbol{V}^m$. Пусть эти отображения непрерывны на X. Тогда:*

1. *их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также непрерывна на X;*
2. *если $m = 1$ (т. е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ непрерывно на X, и при дополнительном условии $\forall x \in X \hookrightarrow g(x) \neq 0$ их частное $f(x)/g(x)$ также непрерывно на X.*

Доказательство немедленно следует из леммы 2.9.

Теорема 2.2. *Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на подмножестве X, отображение $g : \mathbb{R}^m \supset Y \to \mathbb{R}^p$ непрерывно на подмножестве Y, и $f(X) \subset Y$, то суперпозиция отображений $h = g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ непрерывна на X.*

Доказательство немедленно следует из леммы 2.10.

Отображение конечномерных пространств назовем **элементарным**, если каждая его координатная функция является элементарной по каждой переменной. Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что элементарное отображение непрерывно всюду, где оно определено.

Теорема 2.3 (критерий непрерывности на множестве). *Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$, область определения которого открытое подмножество, непрерывно на X только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества из $\mathbb{R}^m$ открыт в $\mathbb{R}^n$:*

$$f \text{ непрерывно на } X = X^0 \subset \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow$$

$$\forall\, O = O^0 \subset \mathbb{R}^m \;\hookrightarrow\; f^{-1}(O) \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$

Замечание 2.5. Подмножество $O \subset \mathbb{R}^m$ не обязано принадлежать образу $f(X)$, но автоматически $f^{-1}(O) \subset X$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $O \subset \mathbb{R}^m$ – открытое подмножество. Покажем, что каждая точка $x \in f^{-1}(O)$ является внутренней для $f^{-1}(O)$, т. е. "окружена" точками из $f^{-1}(O)$. Полный прообраз $f^{-1}(O) = \{x \in X : f(x) = y \in O\}$. Поскольку O открытое подмножество, существует $U_\varepsilon(y) \subset O$. В силу открытости подмножества X и непрерывности отображения f в точке x, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что: 1) $U_\delta(x) \subset X$, 2)$f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(y) \subset O$. Значит, $U_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.

($\Leftarrow$) Пусть $x \in X$ – произвольная точка из области определения и $f(x) = y \in O$. Возьмем произвольную окрестность $U_\varepsilon(y) \subset O$ (такая окрестность существует в силу открытости подмножества O). Поскольку окрестность открытое подмножество, то его прообраз $f^{-1}(U_\varepsilon(y)) \subset X$ – открытое подмножество. По определению каждая точка открытого подмножества входит в него вместе с некоторой δ-окрестностью. Значит, существует окрестность $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(y))$. Что означает непрерывность отображения в точке $x \in X$. ■

Следствие 2.2 (***решение строгого неравенства***). *Если числовая функция $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}$ определена на открытом подмножестве и непрерывна на нем, то решение строгого неравенства $f(x) > 0$ $(< 0, \neq)$ представляет собой открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. В частности, если $n = 1$ (т. е. f – числовая функция), то решение строгого неравенства есть объединение (конечное или счетное) открытых интервалов.*

Примеры 2.2. 1. $x^2 - 4 > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

2. $\sin x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$.

Теорема 2.4 (***образ компактного множества***). *Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на компактном множестве X. Тогда множество значений $f(X)$ – компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$. Коротко говоря, непрерывный образ компактного множества компактен.*

Доказательство основано на определении *счетной* компактности. Пусть $\{y^k\}_{k=1}^\infty \subset f(X)$ – произвольная последовательность. Она порождает (необязательно однозначно) некоторую последовательность прообразов

$$\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset X, \quad f(x^k) = y^k.$$

В силу компактности X, из последовательности $\{x^k\}$ можно выбрать сходящуюся в X подпоследовательность: $x^{k_i} \to x^0 \in X$ при $i \to \infty$. Тогда, в силу непрерывности отображения f в точке x^0, получаем сходимость образов: $y^{k_i} = f(x^{k_i}) \to y^0 = f(x^0) \in f(X)$. $\blacksquare$

Определение 2.14. *Рассмотрим отображение числового отрезка в пространство* $\mathbb{R}^n$*:*

$$x: \ [a,b] \to \mathbb{R}^n, \ x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Пусть координатные функции $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *непрерывны. Тогда отображение* x *называется* ***непрерывной кривой****.*

Данное определение аналогично определению кривой в геометрическом пространстве. Говорят, что непрерывная кривая **соединяет точки** x^1 и x^2, если $x(a) = x^1, \ x(b) = x^2$.

Определение 2.15. *Подмножество* $X \subset \mathbb{R}^n$ *называется* ***линейно связным****, если любые две точки* $x^1, x^2 \in X$ *можно соединить непрерывной кривой в* X*, т. е. образ* $x([a,b]) \subset X$*.*

Примеры 2.3.

1) Линейно связными подмножествами на числовой прямой являются только промежутки.

2) Кольцо является линейно связным (рис. 2.2). 3) Объединение двух открытых кругов

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

не является линейно связным подмножеством (рис. 2.3). Если добавить одну точку $O(0,0)$, получится линейно связное подмножество.

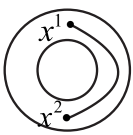

Рис. 2.2

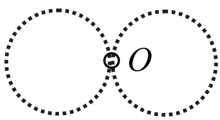

Рис. 2.3

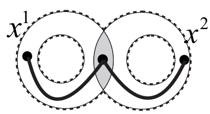

Рис. 2.4

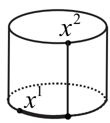

Рис. 2.5

Определение 2.16. *Открытое, линейно связное подмножество* $X \subset \mathbb{R}^n$ *называется* ***областью****.*

Теорема 2.5 (сохранение линейной связности при непрерывном отображении). *Пусть отображение* $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно на линейно связном подмножестве* X*. Тогда его образ* $f(X)$ *также линейно связен.*

Доказательство. Пусть $y^1, y^2 \in f(X)$. Следовательно существуют прообразы $x^1, x^2 \in X$: $f(x^1) = y^1, f(x^2) = y^2$. Возьмем непрерывную кривую φ, соединяющую точки x^1 и x^2 в X, т. е. такое непрерывное отображение $\varphi : [a,b] \to X$, для которого $\varphi(a) = x^1$, $\varphi(b) = x^2$. Тогда суперпозиция $f \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ есть непрерывная *функция на отрезке* (теорема 2.2), для которой $(f \circ \varphi)(a) = y^1$, $(f \circ \varphi)(b) = y^2$. ■

Замечание 2.6. Итак, компактность и линейная связность сохраняются в образах, а открытость – в прообразах.

2.7. Свойства числовых функций, непрерывных на множестве

Рассмотрим случай $m = 1$. Специфические свойства непрерывных числовых функций (одного или нескольких аргументов) связаны с *упорядоченностью* точек прямой.

Теорема 2.6 (о промежуточных значениях). *Пусть область определения $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ является линейно связной. Пусть $y_1 = f(x^1) < f(x^2) = y_2$. Тогда для любого значения $y_0 \in (y_1, y_2)$ найдется такая точка $x^0 \in X$, что $f(x^0) = y_0$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Линейная связность позволяет свести функцию нескольких переменных к одной переменной. Возьмем непрерывную кривую φ, соединяющую точки x^1 и x^2 в X, т. е. такое непрерывное отображение $\varphi : [a,b] \to X$, для которого $\varphi(a) = x^1$, $\varphi(b) = x^2$. Тогда суперпозиция $f \cdot \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ есть непрерывная на отрезке числовая функция, для которой $(f \circ \varphi)(a) = y_1$, $(f \circ \varphi)(b) = y_2$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции найдется число $t_0 \in [a,b]$, для которого $(f \circ \varphi)(t_0) = y_0$. Обозначим $\varphi(t_0) = x^0 \in X$. Тогда $f(x^0) = y_0$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 2.7 (Вейерштрасса о достижении точных граней). *Пусть числовая функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существуют точки $x^1, x^2 \in X$, в которых $f(x^1) = \inf_X f(x) = \min_X f(x)$, $f(x^2) = \sup_X f(x) = \max_X f(x)$. То есть, непрерывная на компактном подмножестве функция достигает своих точных граней.*

Доказательство. Из теоремы 2.4 следует, что образ $f(X)$ является компактным подмножеством числовой прямой. Дальнейшие рассуждения такие же, как и в доказательстве теоремы Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции. ■

Определение 2.17. *Функция f называется* ***равномерно непрерывной на подмножестве*** $X \subset \mathbb{R}^n$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x, \widehat{x} \in X$ таких, что $\rho(x, \widehat{x}) < \delta$, справедлива оценка $|f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x, \widehat{x} \in X \quad \rho(x, \widehat{x}) < \delta \ \hookrightarrow \ |f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon. \qquad (2.2)$$

Теорема 2.8 (Кантора)**.** *Если функция f непрерывна на* ***компактном*** *множестве X, то она равномерно непрерывна на нем.*

3. Производная отображения

3.1. Основные определения и понятия

Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ точки x^0. Пусть $x \in U_\delta(x^0)$ – произвольная точка, принадлежащая δ-окрестности; разность точек

$$\Delta\boldsymbol{x} := \overrightarrow{x - x^0}$$

будем называть **приращением аргумента** в точке x^0. Если же точка $x \in \mathbb{R}^n$ произвольная, то разность

$$d\boldsymbol{x} := \overrightarrow{x - x^0} = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)^T \in \mathbb{V}^n$$

мы называем **дифференциалом аргумента**.

Определение 3.1 (дифференцируемости).
1. Функция называется ***дифференцируемой*** *в точке x^0, если существует такая* ***матрица-строка*** *$A = (1 \times n) = (a_1, \ldots, a_n)$, что*

$$f(x) = f(x^0) + A \cdot \Delta\boldsymbol{x} + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) =$$

$$= f(x^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \tag{3.1}$$

при $x \to x^0$, где $o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ – некоторая функция $\varphi(\Delta\boldsymbol{x})$, для которой

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{\varphi(\Delta\boldsymbol{x})}{|\Delta\boldsymbol{x}|} = 0.$$

2. Матрица-строка $A = (a_1, \ldots, a_n)$ называется ***производной*** *функции f в точке x^0.*
3. Вектор $\operatorname{grad} f(x^0) := (a_1, \ldots, a_n)^T$ называется ***градиентом*** *функции f в точке x^0.*

4. ***Дифференциалом*** *функции f в точке x^0 называется функция, которая линейна относительно дифференциала аргумента $d\boldsymbol{x}$, т. е.* линейный функционал, *задаваемый матрицей-строкой A:*

$$df(x^0):\ \mathbb{V}^n \to \mathbb{R},$$

$$df(x^0, d\boldsymbol{x}) := A \cdot d\boldsymbol{x} = a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0).$$

Обозначим скалярное произведение скобкой: $EF = (E, F)$.

Лемма 3.1 (геометрическая интерпретация производной)**.** *Представление (3.1) функции и ее дифференциал можно записать, используя градиент и скалярное произведение:*

$$f(x) = f(x^0) + (\operatorname{grad} f(x^0), \Delta\boldsymbol{x}) + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \text{ при } x \to x^0,$$

$$df(x^0, d\boldsymbol{x}) = (\operatorname{grad} f(x^0), d\boldsymbol{x}). \tag{3.2}$$

Обсуждение 3.1. Определение 3.1 аналогично определению дифференцируемости функции одной переменной. Воспользоваться аналогом определения производной функции одной переменной невозможно, поскольку отсутствует операция деления на вектор. Заметим, что функция f определена на *подмножестве точечного пространства* $\mathbb{R}^n$, а дифференциал $df(x^0)$ – на *всем векторном пространстве* $\mathbb{V}^n$. Если функция f дифференцируема на некоторой области $X \subset \mathbb{R}^n$, то дифференциал мы понимаем как функцию двух многомерных переменных:

$$df:\ X \times \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}, \quad df(x, d\boldsymbol{x}) = A(x) \cdot d\boldsymbol{x},$$

которая линейна по второму аргументу.

Теорема 3.1 (единственность производной)**.** *Если производная существует, то она единственна.*

Доказательство. В противном случае существует такой вектор $F \neq \operatorname{grad} f(x^0)$, для которого

$$f(x) = f(x^0) + (F, \Delta\boldsymbol{x}) + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \text{ при } x \to x^0.$$

Сравнивая оба представления функции f, получаем что для любых $\Delta\boldsymbol{x}$ таких, что $|\Delta\boldsymbol{x}| < \delta$, верно: $(F - \operatorname{grad} f(x^0), \Delta\boldsymbol{x}) = o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$. Возьмем специальное приращение аргумента $\Delta\boldsymbol{x} = t(F - \operatorname{grad} f(x^0))$, где $0 < t < \delta/|F - \operatorname{grad} f(x^0)|$, и поделим обе части равенства на t. Получим:

$$|F - \operatorname{grad} f(x^0)|^2 = \frac{o(t|F - \operatorname{grad} f(x^0)|)}{t} \ \Leftrightarrow$$

$$|F - \operatorname{grad} f(x^0)| \overset{t}{\equiv} \frac{o(t|F - \operatorname{grad} f(x^0)|)}{t|F - \operatorname{grad} f(x^0)|} \to 0$$

при $t \to 0$. Значит, $|F - \operatorname{grad} f(x^0)| = 0 \ \Leftrightarrow\ F = \operatorname{grad} f(x^0)$.

Следствие 3.1 (аналитический смысл дифференциала). *Дифференциал – единственная функция, линейная относительно приращения аргумента, которая отличается от приращения данной функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем приращение аргумента:*

$$\Delta f(x^0) := f(x) - f(x^0) = df(x^0) + o(|\Delta \boldsymbol{x}|). \tag{3.3}$$

Доказательство. Равенство (3.3) следует из определения 3.1. Единственность дифференциала – из теоремы 3.1. ■

Условие дифференцируемости сильнее, чем непрерывность:

Лемма 3.2 (первое необходимое условие дифференцируемости). *Если функция f дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство немедленно следует из определения 3.1 дифференциала и формулы приращения (3.3):

$$\rho(f(x), f(x^0)) = |(\operatorname{grad} f(x^0), \Delta \boldsymbol{x}) + o(|\Delta \boldsymbol{x}|)| \leq$$

$$\leq |\operatorname{grad} f(x^0)| \cdot |\Delta \boldsymbol{x}| + |o(|\Delta \boldsymbol{x}|)| \to 0 \text{ при } x \to x^0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0). \;\blacksquare$$

Замечание 3.1. Из непрерывности в общем случае не следует дифференцируемость (достаточно вспомнить функцию $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$).

3.2. Производная по направлению и частные производные

Пусть $\boldsymbol{e}$ – произвольный единичный ($|\boldsymbol{e}| = 1$) вектор.

Определение 3.2. ***Производной*** *функции f в точке x^0* ***по направлению $\boldsymbol{e}$*** *называется предел*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x^0) := \lim_{t \to +0} \frac{f(x^0 + t\boldsymbol{e}) - f(x^0)}{t}. \;\boxtimes$$

Лемма 3.3 (второе необходимое условие дифференцируемости). *Если функция f дифференцируема в точке x^0, то у нее в этой точке существует производная по любому направлению, равная проекции градиента на выбранное направление:*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e}).$$

Доказательство. Подставим в формулу (3.3) точку $x = x^0 + t\boldsymbol{e}$:

$$f(x^0 + t\boldsymbol{e}) - f(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), t\boldsymbol{e}) + o(t).$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x^0 + t\boldsymbol{e}) - f(x^0)}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{(\operatorname{grad} f(x^0), t\boldsymbol{e}) + o(t)}{t} =$$

$$= (\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e}) + \lim_{t\to+0} \frac{o(t)}{t} = (\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e}). \blacksquare$$

Замечание 3.2. Из существования производных в точке x^0 по всем направлениям вовсе не следует, что функция дифференцируема в x^0. Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = x^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } y \neq x^2 \text{ или } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

В точке $O(0,0)$ производная функции f по любому направлению существует и равна нулю. Между тем, в т. O функция разрывна.

Замечание 3.3. Если в точке x^0 существуют производные по всем направлениям, то по переменной $\boldsymbol{e}$ определена функция

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0): \ S^{n-1} \to \mathbb{R}, \text{ где } S^{n-1} = \{|\boldsymbol{e}| = 1\} \ \text{– сфера размерности } n-1.$$

Определение 3.3. ***Частной производной*** *функции* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_i *в точке* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *называется производная функции* одной *переменной* $\varphi(x_i) := f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ *в точке* x_i^0, *т. е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{x_i}(x^0) := \varphi'(x_i^0) =$$

$$= \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x^0)}{x_i - x_i^0}.$$

Лемма 3.4 (связь частных производных с производными по направлению). *Пусть* $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ *единичный вектор, указывающий направление i-й оси координат. Частная производная* $f'_{x_i}(x^0)$ *существует только тогда, когда обе производные по направлениям* $\boldsymbol{e}_i$ *и* $(-\boldsymbol{e}_i)$ *существуют и отличаются знаком. При этом*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{e}_i)}(x^0).$$

Доказательство. Частная производная $f'_{x_i}(x^0)$ существует только тогда, когда функция $\varphi(x_i)$ имеет в точке x_i^0 равные *односторонние* производные. Но

$$\varphi'_+(x_i^0) = \lim_{x_i \to x_i^0+0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x^0)}{x_i - x_i^0} =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t\boldsymbol{e}_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(x^0),$$

$$\varphi'_-(x_i^0) = \lim_{x_i \to x_i^0-0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x^0)}{x_i - x_i^0} =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 - t\boldsymbol{e}_i) - f(x_0)}{-t} = -\lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t(-\boldsymbol{e}_i)) - f(x_0)}{t} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{e}_i)}(x^0). \quad \blacksquare$$

Следующее утверждение связывает понятие частной производной с дифференцируемостью и дает удобную аналитическую процедуру нахождения градиента.

Лемма 3.5 (третье необходимое условие дифференцируемости). *Если функция f дифференцируема в точке x^0, то у нее в этой точке существуют все частные производные, которые совпадают с соответствующими координатами градиента:*

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)^T. \tag{3.4}$$

Доказательство. Дифференцируемость равносильна существованию градиента. Поскольку базис $\{\boldsymbol{e}_i\}$ *ортонормированный*, координаты градиента – суть его проекции на базисные векторы:

$$\operatorname{grad} f(x^0)_i = (\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e}_i) = -(\operatorname{grad} f(x^0), -\boldsymbol{e}_i) = \ldots$$

Теперь из лемм 3.3 и 3.4 получаем:

$$\ldots = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{e}_i)}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0). \quad \blacksquare$$

Еще раз подчеркнем, что в лемме 3.5 даны только необходимые условия дифференцируемости. В замечании 3.2 дана функция, у которой частные производные в точке $O(0,0)$ существуют (равны нулю), но функция не является даже непрерывной в O. Однако справедлива

Теорема 3.2 (критерий дифференцируемости).
Функция $f : U_\delta(x^0) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. x^0 только тогда, когда существуют все частные производные $(\partial f/\partial x_i)(x^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, а разность

$$f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i^0 - x_i) = o(|\Delta \boldsymbol{x}|)$$

при $|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0$.

3.3. Геометрический смысл градиента и частной производной

В трехмерном пространстве уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \quad A^2+B^2+C^2>0,$$

задает плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), с вектором нормали $\boldsymbol{N}=(A,B,C)^T$. По аналогии дадим

Определение 3.4. ***Гиперплоскостью*** *в пространстве $\mathbb{R}^p$, проходящей через точку $z^0=(z_1^0,\ldots,z_p^0)$, с вектором нормали $\boldsymbol{N}=(N_1,\ldots,N_p)^T$ называется подмножество, определяемое уравнением*

$$(\boldsymbol{N}, \overrightarrow{z-z^0})=0, \text{ где } z=(z_1,\ldots,z_p) \Leftrightarrow$$

$$N_1(z_1-z_1^0)+\ldots+N_n(z_p-z_p^0)=0, \quad N_1^2+\ldots+N_p^2>0.$$

Размерность *гипер*плоскости равна $p-1$, т. е. максимальная для многомерных плоскостей в пространстве размерности p; отсюда приставка "гипер". ⊠

Определение 3.5. ***Поверхностью уровня*** *$c\in\mathbb{R}$ функции $f:\ \mathbb{R}^n\supset X\to\mathbb{R}$ называется полный прообраз*

$$f^{-1}(c)=\{x\in X:\ f(x)=c\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Примеры 3.1.

1) Для функции $u=x^2+y^2+z^2$ поверхность уровня $c<0$ есть пустое множество, $c=0$ – точка $O(0,0,0)$, $c>0$ – сфера радиуса $\sqrt{c}$.

2) Для линейной невырожденной функции $u=Ax+By+Cz$ поверхности уровней c есть параллельные плоскости.

Определение 3.6. ***Касательной плоскостью в точке касания*** *$z^0=(x^0,f(x^0))$ к графику $\mathrm{Gr}\,(f)$ называется гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через эту точку и имеющая вектор нормали $\boldsymbol{N}=(\operatorname{grad} f(x^0),-1)^T$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\ (x_1-x_1^0)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\ (x_n-x_n^0)-(y-f(x^0))=0 \ \Leftrightarrow$$

$$y=f(x^0)+(\operatorname{grad} f(x^0),\overrightarrow{x-x^0}).$$

Обозначение касательной плоскости $T_{z^0}\mathrm{Gr}\,(f)$ (от англ. tangent *– касательный).*

Геометрический смысл дифференциала и градиента объясняет следующая теорема, в которой используется вектор

$$\boldsymbol{e}_{gr} := \frac{\operatorname{grad} f(x^0)}{|\operatorname{grad} f(x^0)|}$$

при условии, что $\operatorname{grad} f(x^0) \neq \mathbf{0}$.

Теорема 3.3.

1. Касательная плоскость получается в результате параллельного переноса графика дифференциала (3.2) в точку касания $(x^0, f(x^0))$.

2. Касательная плоскость – единственная гиперплоскость, которая в окрестности точки касания $(x^0, f(x^0))$ отличается от графика $\operatorname{Gr}(f)$ на величину $o(|\Delta \boldsymbol{x}|)$.

3. Если градиент $\operatorname{grad} f(x^0) \neq \mathbf{0}$, то он указывает направление наиболее быстрого роста f в точке x^0, а противоположный вектор $-\operatorname{grad} f(x^0)$ указывает направление наиболее быстрого убывания f в точке x^0 (рис. 3.1). Другими словами,

а) $\max\limits_{\boldsymbol{e} \in S^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x^0)$ достигается на векторе $\boldsymbol{e}_{gr}$,

б) $\min\limits_{\boldsymbol{e} \in S^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x^0)$ достигается на векторе $-\boldsymbol{e}_{gr}$.

Доказательство пунктов 1 и 2 вытекает непосредственно из данных выше определений и формулы (3.3).

Прежде, чем доказывать п. 3, заметим, что его утверждение относится к пространству прообразов $\mathbb{R}^n$, а не к пространству $\mathbb{R}^{n+1}$, где находится график функции. Из леммы 3.3 следует, что равномерно по всем единичным векторам $\boldsymbol{e} \in S^{n-1}$ справедлива двусторонняя оценка

$$-|\operatorname{grad} f(x^0)| \leq -|(\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e})| \leq \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x^0) \leq$$

$$\leq |(\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e})| \leq |\operatorname{grad} f(x^0)|.$$

Но для вектора $\boldsymbol{e}_{gr}$ имеем

$$(\operatorname{grad} f(x^0), \boldsymbol{e}_{gr}) = |\operatorname{grad} f(x^0)|.$$

То есть верхняя оценка производной по направлению достигается в направлении $\boldsymbol{e}_{gr}$. Аналогично доказывается утверждение о противоположном направлении $-\boldsymbol{e}_{gr}$. ■

Замечание 3.4 (еще о геометрическом смысле градиента)**.** Если $\operatorname{grad} f(x^0) \neq \mathbf{0}$, то поверхность уровня $c = f(x^0)$ имеет “касательную плоскость” в точке x^0, а вектор $\operatorname{grad} f(x^0)$ является вектором нормали к этой касательной плоскости (рис. 3.1). Мы сейчас не готовы дать определение касательной плоскости к поверхности уровня $c = f(x^0)$, поэтому ограничимся

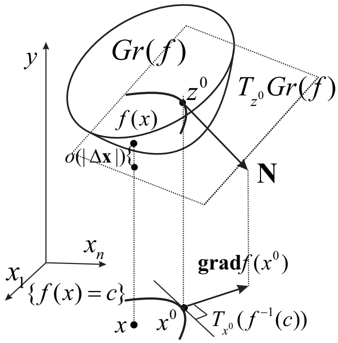

Рис. 3.1

эвристическим рассуждением. Будем опираться на интуитивное представление о касательной плоскости как о "наиболее тесно" примыкающей к поверхности уровня в исследуемой точке x^0. Обозначим искомую касательную плоскость через $T_{x^0}f^{-1}(c)$. Запишем уравнение $f(x)-f(x^0)=0$ поверхности уровня $c=f(x^0)$ с помощью геометрической интерпретации производной (3.2):

$$f(x)-f(x^0)=0 \;\Leftrightarrow\; (\operatorname{grad} f(x^0), \Delta\boldsymbol{x}) + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) = 0.$$

Отбрасывая в полученном уравнении o-малое, получаем *линейное* уравнение, которое в пространстве $\mathbb{R}^n$ задает *гиперплоскость*. Это и есть искомое уравнение касательной плоскости к поверхности уровня: при $c=f(x^0)$ уравнение $T_{x^0}f^{-1}(c)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) = 0.$$

Пересечение $\operatorname{Gr}(f)\cap\{y=c\}$ графика функции с "горизонтальной" гиперплоскостью есть поверхность уровня $f^{-1}(c)$, сдвинутая вдоль оси y на c (рис. 3.1).

Геометрический смысл частной производной.

График $\operatorname{Gr}(\varphi)$ функции

$$\varphi(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

получается в результате *пересечения* графика $\operatorname{Gr}(f)$ с двумерной плоскостью Π, образованной вертикальной прямой (x^0, y) $(y\in\mathbb{R})$ и прямой, проходящей через точку x^0 в направлении вектора $\boldsymbol{e}_i$. Касательная прямая τ к графику $\operatorname{Gr}(\varphi)$ в точке z_0 является *пересечением* той же плоскости Π с касательной плоскостью $T_{z^0}\operatorname{Gr}(f)$. Обозначим угол наклона касательной прямой τ к оси x_i через α. Тогда частная производная равна тангенсу угла

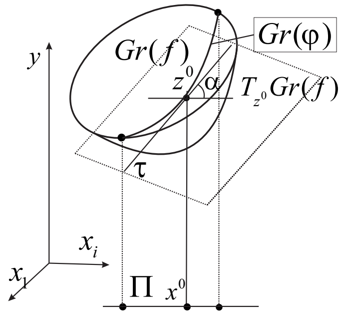

Рис. 3.2

наклона:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \varphi'(x_i^0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

рис. 3.2. В литературе общепринятым является обозначение

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0).$$

3.4. Достаточные условия дифференцируемости

Дифференцируемость влечет существование частных производных – это лемма 3.5. Оказывается, дополнительные требования к частным производным обеспечивают дифференцируемость.

Теорема 3.4. *Если все частные производные функции f определены в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, то функция дифференцируема в этой точке.*

Доказательство проведем для функции двух переменных $f(x, y)$. Оно основано на применении теоремы Лагранжа и выделении приращений от точки (x_0, y_0). Представим приращение функции f как сумму приращений по каждой переменной:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (f(x, y) - f(x_0, y)) + (f(x_0, y) - f(x_0, y_0)) =$$

$$= f'_x(\chi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \nu)(y - y_0) =$$
$$= (f'_x(x_0, y_0) + (f'_x(\chi, y) - f'_x(x_0, y_0)))(x - x_0) +$$
$$+ (f'_y(x_0, y_0) + (f'_y(x_0, \nu) - f'_y(x_0, y_0)))(y - y_0) =$$

$$= f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+(f'_x(\chi,y) - f'_x(x_0,y_0))(x-x_0) + (f'_y(x_0,\nu) - f'_y(x_0,y_0))(y-y_0),$$

где функция $\chi = \chi(x,y)$ принимает значения между x_0 и x, а функция $\nu = \nu(y)$ принимает значения между y_0 и y. Поэтому $\chi(x,y) \to x_0$, а $\nu(y) \to y_0$ при условии $(x,y) \to (x_0,y_0)$. В силу непрерывности частных производных в точке (x_0,y_0), справедливо

$$\varepsilon_1(x,y) := f'_x(\chi(x,y),y) - f'_x(x_0,y_0) \to 0, \quad \text{при } (x,y) \to (x_0,y_0),$$

$$\varepsilon_2(y) := f'_y(x_0,\nu(y)) - f'_y(x_0,y_0) \to 0 \ \text{ при } y \to y_0.$$

Следовательно, приращение функции в исследуемой точке имеет вид:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + \varepsilon_2(y)(y-y_0).$$

Поскольку

$$\frac{|\varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + \varepsilon_2(y)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \leq |\varepsilon_1(x,y)| + |\varepsilon_2(y)| \to 0$$

при $(x,y) \to (x_0,y_0)$, то

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}). \ \blacksquare$$

3.5. Дифференцируемость отображений

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$, определенное в некоторой окрестности $U_\delta(x^0) \subset X$ точки x^0. Задание отображения f эквивалентно заданию совокупности m функций от n переменных:

$$f_j : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Определение 3.7 (дифференцируемости отображения).

1. *Отображение f называется **дифференцируемым** в точке x^0, если существует такая матрица A размером $m \times n$, что*

$$f(x) = f(x^0) + A \cdot \Delta\boldsymbol{x} + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \ \text{при } x \to x^0,$$

где $o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ – некоторое отображение $\varphi : U_\delta(x^0) \to \mathbb{V}^m$, для которого

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\varphi(\Delta\boldsymbol{x})}{|\Delta\boldsymbol{x}|} = \mathbf{0}.$$

2. Матрица A называется ***производной*** *отображения f в точке x^0:*

$$A = Df(x^0) = Df|_{x=x^0} = f'(x^0).$$

3. ***Дифференциалом отображения*** *f в точке x^0 называется линейное относительно дифференциала аргумента $d\boldsymbol{x}$ отображение*

$$df(x^0): \ \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m, \quad df(x^0, d\boldsymbol{x}) := Df(x^0)d\boldsymbol{x}.$$

Лемма 3.6 (координатный критерий дифференцируемости)**.** *Отображение $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ дифференцируемо в точке x^0 только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все координатные функции f_j $(j = 1, \ldots, m)$.*

Определение 3.8. *Пусть $S^{n-1} = \{E \in \mathbb{V}^n : \ |E = 1|\}$ – единичная сфера в векторном пространстве.* ***Нормой матрицы*** *$A = (m \times n)$ называется*

$$\|A\| := \sup_{|E|=1} |AE| = \sup_{E \in S^{n-1}} |AE|.$$

Лемма 3.7 (о достижимости и свойстве нормы)**.**

1. Норма матрицы конечна и достижима, т. е. существует вектор $E_0 \in S^{n-1}$, для которого

$$\|A\| = |AE^0| = \max_{E \in S^{n-1}} |AE| < +\infty.$$

2. Для любого вектора E выполняется оценка $|AE| \le \|A\| \cdot |E|$.

Доказательство. Каждая координатная функция $E \to (AE)_j$, $j = 1, \ldots, m$, будучи линейной, непрерывна на $\mathbb{V}^n$; поэтому отображение $E \to AE \in \mathbb{V}^m$ непрерывно. Следовательно, суперпозиция $E \to |AE|$ есть непрерывная функция, достигающая на компактном подмножестве S^{n-1} своей точной верхней грани.

Если $E \neq \mathbf{0}$, то $E/|E| \in S^{n-1}$ и

$$|AE| = \left|A\frac{E}{|E|}\right| \cdot |E| \le \sup_{E \neq \mathbf{0}} \left|A\frac{E}{|E|}\right| \cdot |E| = \|A\| \cdot |E|. \ \blacksquare$$

Замечание 3.5. Из п. 1 леммы следует, что норма матрицы – это наибольший коэффициент растяжения длины векторов, к которым применяется матрица.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольное число , A, B – произвольные матрицы размером $m \times n$, а C – произвольная $(p \times m)$-матрица. Норма матрицы:
1) положительно определенная: $\|\Theta\| = 0$ и $\|A\| > 0$, если $A \neq 0$;
2) однородная: $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;
3) удовлетворяет неравенству треугольника: $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$;
4) удовлетворяет условию “субмультипликативности”: $\|C \cdot A\| \le \|C\| \cdot \|A\|$.

Без изменений формулируются и доказываются (с помощью леммы 3.7) все утверждения п. 3.1: 1) единственность производной отображения, 2) единственность и смысл дифференциала, 3) непрерывность отображения в точке, где оно дифференцируемо. Что касается понятия частной производной, то оно без изменений сохраняется для каждой координатной функции f_j. Так мы получаем

Определение 3.9. ***Матрицей Якоби*** *в точке x^0 отображения f называется матрица размером $m \times n$, составленная из всех частных производных каждой координатной функции f_j, взятых в точке x^0:*

$$J(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_i} \right).$$

Заметим, что каждая строка матрицы Якоби есть производная соответствующей координатной функции. Важными частными случаями матрицы Якоби являются:

1. $n = m = 1$: f – числовая функция числового аргумента, матрица Якоби "вырождается" в *число*;
2. $n = 1$, $m \geq 2$: f – вектор-функция числового аргумента (кривая), матрица Якоби – *столбец* длины m;
3. $n \geq 2$, $m = 1$: f – числовая функция нескольких переменных, матрица Якоби – *строка* длины n;
4. $n = m \geq 2$: f – отображение пространств одинаковой размерности, матрица Якоби *квадратная*, ее важнейшая характеристика – определитель, называемый **якобианом**.

Обобщением леммы 3.5 является

Лемма 3.8 (необходимое условие дифференцируемости отображения).

Если отображение f дифференцируемо в точке x_0, то у него в этой точке существуют все частные производные каждой координатной функции f_j, которые совпадают с соответствующими элементами матрицы $Df(x^0)$. Другими словами, $J(x^0) = Df(x^0)$.

Доказательство немедленно следует из лемм 2.5 и 3.5. ■

Аналогично теореме 3.2 формулируется

Теорема 3.5 (критерий дифференцируемости). *Отображение $f : U_\delta(x^0) \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в т. x^0 только тогда, когда для каждого $j = 1, \dots, m$ существуют все частные производные $(\partial f_j / \partial x_i)(x^0)$, $i = 1, \dots, n$, а разность*

$$f(x) - f(x^0) - J(x^0) \cdot \Delta \boldsymbol{x} = o(|\Delta \boldsymbol{x}|) \quad \text{при} \quad |\Delta \boldsymbol{x}| \to 0.$$

Теорему 3.4 обобщает

Теорема 3.6 (достаточные условия дифференцируемости отображения). *Если матрица Якоби существует в некоторой окрестности точки* x^0 *и все ее элементы суть непрерывные в точке* x^0 *функции, то отображение* f *дифференцируемо в точке* x^0.

Дадим обобщение теоремы о дифференцируемости суперпозиции функций одной переменной:

Теорема 3.7 (о дифференцировании суперпозиции отображений). *Пусть даны два подмножества* $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ *и два отображения:*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to \mathbb{R}^p.$$

Пусть $x^0 \in X$ *и* $y^0 = f(x^0) \in Y$ *– внутренние точки указанных подмножеств. Пусть отображение* f *дифференцируемо в точке* x^0, *а отображение* g *дифференцируемо в точке* y^0. *Тогда суперпозиция отображений* $h(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$ *определена в некоторой окрестности точки* x^0 *и дифференцируема в ней по правилу*

$$D(g \circ f)(x^0) = Dg(y^0) \cdot Df(x^0),$$

т. е. матрица Якоби отображения h *равна произведению матриц Якоби отображений* g *и* f*:*

$$\frac{\partial (g \circ f)_i(x^0)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i(y^0)}{\partial y_k} \; \frac{\partial f_k(x^0)}{\partial x_j} \quad (i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Возьмем приращение отображения h и выделим в нем линейную часть (аналогично тому, как мы делали для функций одной переменной). Для упрощения записи опускаем точку вычисления производной (т. е. $Df := Df(x^0)$, $Dg := Dg(y^0)$) и не ставим стрелку вектора над разностью точек ($x - x^0 := \overrightarrow{x - x^0}$). Итак:

$$h(x) - h(x^0) = g(f(x)) - g(f(x^0)) = Dg(f(x) - f(x^0)) + o(|f(x) - f(x^0)|) =$$
$$= Dg(Df(x - x^0) + o(|x - x^0|)) + o(|Df(x - x^0) + o(x - x^0)|) =$$
$$= Dg(Df(x - x^0)) + Dg(o(|x - x^0|)) + o(|Df(x - x^0) + o(x - x^0)|) \ldots$$

(мы воспользовались линейностью действия матрицы Dg). Из п. 2 леммы 3.7 следует, что

$$|Dg(o(|x - x^0|))| \le \|Dg\| \cdot |o(|x - x^0|)| \;\Rightarrow\; Dg(o(|x - x^0|)) = o(|x - x^0|).$$

По непрерывности доопределим дробь

$$\psi(x - x^0) := \frac{o(|Df(x - x^0) + o(x - x^0)|)}{|Df(x - x^0) + o(x - x^0)|}, \text{ где } |Df(x - x^0) + o(x - x^0)| \ne 0,$$

нулем, если знаменатель $|Df(x-x^0)+o(x-x^0)|=0$. Поскольку верна оценка

$$|Df(x-x^0)| \le \|Df\| \cdot |x-x^0|,$$

то

$$\frac{o(|Df(x-x^0)+o(x-x^0)|)}{|x-x^0|} =$$

$$= \frac{o(|Df(x-x^0)+o(x-x^0)|)}{|Df(x-x^0)+o(x-x^0)|} \cdot \frac{|Df(x-x^0)+o(x-x^0)|}{|x-x^0|} \xrightarrow{x\to x^0} 0$$

(первый сомножитель стремится к нулю, а второй ограничен постоянной $2\|Df\|$). Завершая прерванную выкладку, получаем

$$\ldots = Dg(Df(x-x^0)) + o(|x-x^0|). \ \blacksquare$$

Прямым следствием теоремы 3.7 является

Теорема 3.8 (инвариантность формы первого дифференциала)**.** *Пусть выполнены условия теоремы 3.7. Тогда дифференциалы "внешнего" отображения $u = g(y)$ и суперпозиции отображений $u = g(f(x))$ могут быть записаны в одной и той же (**инвариантной**) форме $d\boldsymbol{u} = Dg(y^0)d\boldsymbol{y}$, где в первом случае $d\boldsymbol{y}$ – приращение* независимой *переменной y, а во втором случае $dy = Df(x^0)d\boldsymbol{x}$ – дифференциал* зависимой *от x переменной y.*

Доказательство. Для внешнего отображения данная формула – определение 3.7 п. 3 его дифференциала. Для суперпозиции $g \circ f$ из теоремы 3.7 получаем:

$$d(g(f(x^0))) = (Dg(y^0)\cdot Df(x^0))d\boldsymbol{x} = Dg(y^0)(Df(x^0)d\boldsymbol{x}) = Dg(y^0)d\boldsymbol{y}. \ \blacksquare$$

Следствие 3.2 (дифференциал и арифметические операции)**.** *Пусть*

$$f(x_1,\ldots,x_n), \quad g(x_1,\ldots,x_n)$$

– числовые функции n переменных, дифференцируемые в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда в x^0 дифференцируемы функции $f \pm g$, $fg, f/g$ (в последнем случае $g(x^0) \neq 0$) и

$$d(f \pm g) = df \pm dg,$$
$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg,$$
$$d\left(f/g\right) = (df \cdot g - f \cdot dg)\cdot g^{-2},$$

где

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}dx_i, \ dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i}dx_i.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : U_\delta(x^0) \to \mathbb{R}^2$, где $F(x) := (f(x), g(x))$ и функцию двух переменных $\psi(y_1,y_2) := y_1 + y_2$. Тогда функция $f+g$ есть суперпозиция $f+g = \psi \circ F$. Остается применить теорему 3.8. Аналогично с остальными арифметическими операциями. $\blacksquare$

4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

4.1. Частные производные высших порядков

Пусть в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ существует частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 4.1. ***Частной производной второго порядка*** *по переменной x_j в точке x^0 называется производная функции одной переменной*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\widehat{x}_j^0)\right)\Bigg|_{x_j = x_j^0},$$

где $\widehat{x}_j^0 = (x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0)$. То есть фиксируют все переменные, кроме j-й, по ней дифференцируют, после чего фиксируют и ее.

Определение 4.2. ***Частная производная порядка*** *$k \geq 2$ определяется по индукции:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(x^0) := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\widehat{x}_{i_k}^0)\right)\Bigg|_{x_{i_k} = x_{i_k}^0}.$$

Пример 4.1. У функции двух переменных может существовать четыре производных второго порядка, причем **смешанные** производные (т. е.

от разных переменных) в общем случае не обязаны совпадать. Найдем смешанные производные функции

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

Вне точки $O(0,0)$ частные производные равны

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+y\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x.$$

В точке $O(0,0)$ частные производные равны

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right)\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right)\Big|_{y=0}=-1.$$

Достаточные условия независимости второй смешанной производной от порядка дифференцирования:

Теорема 4.1. *Если обе смешанные производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

определены в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) *и непрерывны в точке* (x_0,y_0), *то они равны в этой точке:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

Доказательство. Обозначим через $\Delta_x f$ и $\Delta_y f$ приращения функции f, порожденные приращениями Δx и Δy аргументов x и y соответственно. Покажем, что

$$\Delta_y(\Delta_x f(x_0,y_0))=\Delta_x(\Delta_y f(x_0,y_0)).\tag{4.1}$$

В самом деле:

$$\Delta_y(\Delta_x f(x_0,y_0))=\Delta_y(f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0))=$$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - (f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) =$$
$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0, y_0) =$$
$$= \Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)).$$

(Заметим, что выражение симметрично относительно приращений аргументов.) Теперь применим к обеим частям равенства (4.1) теорему Лагранжа, к левой части – по переменной x, к правой части – по y:

$$\Delta_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0)\Delta x\right) = \Delta_x\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\vartheta_2\Delta y)\Delta y\right),$$

где $0<\vartheta_1,\vartheta_2<1$. Еще раз применяем теорему Лагранжа:

$$\Delta_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0)\Delta x\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0)\right)\Delta x =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0+\vartheta_3\Delta y)\Delta y\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\vartheta_4\Delta x, y_0+\vartheta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

где $0<\vartheta_3,\vartheta_4<1$. Деля обе части на произведение $\Delta x\cdot\Delta y$ и переходя к пределу при $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ по множеству $\{\Delta x\cdot\Delta y\neq 0\}$, получаем требуемое. ■

Утверждение, аналогичное теореме 4.1, справедливо для производной любого порядка:

Теорема 4.2. *Если у функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ всевозможные частные производные до k-го порядка включительно существуют в некоторой области и непрерывны* **на** *ней, то все они не зависят от порядка дифференцирования в любой точке области.*

Замечание 4.1. В терминах частных производных высоких порядков формулируются законы физики – это так называемые уравнения математической физики или уравнения в частных производных. Сформулированная выше теорема существенно упрощает сами уравнения и их исследование.

Важным приложением теоремы 4.1 является следующее утверждение о гармоничности компонент комплексно дифференцируемой функции:

Теорема 4.3. *Пусть функция*

$$f:\ \mathbb{C}\supset U\to\mathbb{C},\ \ f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

комплексно дифференцируема на открытом подмножестве U. Пусть ее компоненты (т. е. действительная и мнимая части) имеют на U всевозможные частные производные до второго порядка включительно, причем *эти производные непрерывны на U. Тогда компоненты f являются на U* ***гармоническими функциями***, *т. е. удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Доказательство. Продифференцируем по y (по x) первое уравнение и по x (по y) второе уравнение из системы (**??**) Коши–Римана. В силу теоремы 4.1, смешанные производные совпадают, и мы получаем гармоничность функции $u(x, y)$ (функции $v(x, y)$). ■

4.2. Операторы дифференцирования

Для определения дифференциалов высших порядков удобно ввести понятия функционального пространства и дифференциального оператора.

Определение 4.3. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – область. Функция f называется k* ***раз непрерывно дифференцируемой*** *($k = 0, 1, 2 \ldots$) на X, если она имеет в каждой точке области все частные производные до порядка k включительно и они непрерывны на X. Множество* ***всех*** *таких функций обозначают $C^k(X)$. (Если $k = 0$, то функция непрерывна на X.)*

Важно, что множество $C^k(X)$ обладает структурой линейного пространства, т. е. можно ввести операции сложения его элементов и умножения их на число.

Определение 4.4. *Определим* ***сложение функций и умножение их на число*** *так: $\forall f, g \in C^k(X)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ для любого } x \in X.$$

Эти правила столь естественны, что мы ими пользуемся не задумываясь. Заметим, что одинаковые знаки «+», «·» слева и справа имеют разный смысл, хотя первые определены через вторые.

Лемма 4.1. *Множество $C^k(X)$ с введенными операциями является линейным пространством.*

Доказательство состоит к проверке всех аксиом линейного пространства, которая приводит к операциям с числами и линейности дифференцирования.

Замечание 4.2. Итак, элементами=«векторами» рассматриваемых линейных пространств являются функции. Поэтому такие пространства называют **функциональными**. Пространства $C^k(X)$ по своим возможностям "богаче", чем линейные; их элементы можно *умножать*: если $f, g \in C^k(X)$, то функция $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ тоже принадлежит $C^k(X)$ (проверьте).

Среди всех отображений линейных пространств наиболее важны такие, которые сохраняют линейные операции.

Определение 4.5. *Отображение $A : L_1 \to L_2$ линейных пространств называется* ***линейным (линейным оператором)****, если для любых $E, F \in L_1$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено:*

$$A(\alpha E + \beta F) = \alpha A(E) + \beta A(F).$$

Лемма 4.2. *Частная производная $\frac{\partial}{\partial x_i}$ является линейным оператором, действующим из $C^k(X)$ в $C^{k-1}(X)$ $(k \in \mathbb{N})$.*

Сделаем следующий шаг – определим линейные операции с линейными операторами. Поступим аналогично тому, как мы вводили операции в функциональных пространствах, – перенесем операцию на образ.

Определение 4.6. *Пусть $A, B : L_1 \to L_2$ – линейные операторы, действующие в* одних и тех же *пространствах. Определим* ***сложение линейных операторов и умножение их на число*** *так:*

$$(A + B)(E) := A(E) + B(E), \quad (\alpha \cdot A)(E) := \alpha \cdot A(E).$$

Примеры 4.1.

1) Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)^T$ – фиксированный единичный вектор. Рассмотрим линейный оператор

$$A_{\boldsymbol{e}} : \ C^k(X) \to C^{k-1}(X), \quad A_{\boldsymbol{e}} := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

На функции $f \in C^k(X)$ его действие таково:

$$A_{\boldsymbol{e}}(f) = \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f(x)) := (\mathbf{grad} f(x), \boldsymbol{e}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x).$$

То есть это оператор нахождения производной по направлению вектора $\boldsymbol{e}$. Заметим, что в данной конструкции мы рассматриваем эту производную не в фиксированной точке (как это было в определении 3.2), а на всей области определения X, т. е. оператор $A_{\boldsymbol{e}}$ каждой функции $f \in C^k(X)$ ставит в соответствие функцию $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} \in C^{k-1}(X)$, которая в каждой точке $x \in X$ равна производной от f по выбранному фиксированному направлению $\boldsymbol{e}$.

2) Для произвольного фиксированного вектора $E = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{V}^n$ аналогично определим линейный оператор

$$A_E : \ C^k(X) \to C^{k-1}(X),$$

$$A_E(f(x)) := \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f(x)) = \\ = (\mathbf{grad} f(x), E) = df(x, E). \tag{4.2}$$

В определении (4.2) можно фиксировать функцию $f \in C^k(X)$ и точку $x = x^0 \in X$, а в качестве аргумента взять вектор $E \in \mathbb{V}^n$. При такой трактовке та же формула (4.2) определяет, согласно (3.2), дифференциал функции f в точке x^0:

$$A_E(f(x^0)) : \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}, \quad A_E(f(x^0)) = (\mathbf{grad} f(x^0), E) = df(x^0, E). \tag{4.3}$$

Указанной трактовкой мы воспользуемся для получения формулы Тейлора.

Для линейных операторов определена суперпозиция, как для отображений. Важно, что сохраняется линейность.

Определение 4.7. Пусть $A : L_1 \to L_2$, $B : L_2 \to L_3$ – линейные операторы. **Произведением (суперпозицией)** называется линейный оператор

$$BA : L_1 \to L_3, \; (BA)E := B(A(E)).$$

Примеры 4.2. Суперпозиция операторов частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^k(X) \to C^{k-1}(X), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} : C^{k-1}(X) \to C^{k-2}(X) \; \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} : C^k(X) \to C^{k-2}(X).$$

Замечание 4.3. Из теоремы 4.1 следует, что на пространствах $C^k(X)$ операторы частных производных *перестановочны*. В общем случае перестановка AB операторов является бессмысленной. Если A – матрица $(m \times n)$, а B – матрица $(p \times m)$ и $n \neq p$, то перемножать их можно только в порядке $B \cdot A$. Но даже в случае допустимости перестановки, изменение порядка может привести к другому результату. Так, в общем случае для квадратных матриц одного размера $A \cdot B \neq B \cdot A$.

4.3. Дифференциалы высших порядков

Определение 4.8. Пусть функция $f \in C^k(X)$ $(k \in \mathbb{N})$. Дифференциал k-го порядка определяется по индукции:

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f)(x). \tag{4.4}$$

В этом определении дифференциалы независимых переменных понимаются как *постоянные* множители.

Теорема 4.4 (выражение дифференциала через частные производные)**.**

Пусть $f \in C^k(X)$. Тогда дифференциал k-го порядка существует в каждой точке $x \in X$ и равен

$$d^k f(x) = \sum_{i_k=1}^{n} \dots \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(x) \; dx_{i_1} \dots dx_{i_k}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Выпишем первый дифференциал через частные производные (см. (3.2) и (3.4)) и применим к нему определение: каждую первую частную производную $\partial f(x)/\partial x_i$ будем дифференцировать по каждой переменной x_j. Получим:

$$d^2 f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) dx_j dx_i. \tag{4.6}$$

Остается переобозначить индексы $i := i_1,\ j := i_2$ и применить этот метод до k-го порядка. ■

Замечание 4.4. В сумме (4.5) n^k слагаемых. Однако среди них есть повторяющиеся. В частности, при $k = 2$ получаем *симметрическую* матрицу

$$(n \times n) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right), \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{4.7}$$

частных производных второго порядка, которая называется **матрицей Гессе** (Людвиг Гессé, 1811–1874), а ее определитель **гессианом**. Матрица, как будет показано, применяется для локального исследования поведения функции.

Теперь мы запишем дифференциал k-го порядка в операторном виде.

Теорема 4.5. *Пусть $f \in C^k(X)$, тогда в каждой точке $x \in X$*

$$d^k f = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f = (A_{\boldsymbol{dx}})^k f. \tag{4.8}$$

Доказательство. При $k = 1$ мы получаем, в силу (4.3), формулу первого дифференциала. Допустим, что формула верна для индекса $k - 1$. Опираясь на допущение индукции, из определения (4.4), определения 4.7 произведения операторов и формулы (4.2) получаем искомую формулу. ■

Замечание 4.5. В условиях теоремы 4.5 справедлива теорема 4.2 о совпадении смешанных производных, поэтому вычисление степени дифференциального оператора подчиняется тем же правилам, что и возведение в степень линейного выражения $(a_1 + \ldots + a_n)^k$. Это наблюдение облегчает нахождение дифференциалов высоких порядков.

В частности, получаем

Следствие 4.1 (***дифференциал функции двух переменных***)**.** *Пусть в условиях теоремы 4.5 количество переменных $n = 2$, тогда дифференциал вычисляется по формуле бинома Ньютона:*

$$d^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial^{k-i} y \partial^i x}\ dx^i dy^{k-i}, \ \text{где}\ C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!\ i!}. \tag{4.9}$$

Сравнивая общую формулу (4.5) с формулой (4.9), мы видим, каково количество *одинаковых частных производных* в случае двух переменных. Для дифференциала второго порядка функции двух переменных получаем формулу, аналогичную формуле квадрата суммы двух слагаемых:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2. \tag{4.10}$$

При конкретном вычислении дифференциала можно:

1) либо действовать по определению (4.4),

2) либо находить все частные производные и применять формулу (4.5),

3) либо возводить в k-ю степень дифференциальный оператор по формуле (4.8).

В любом случае мы получаем **однородную форму** порядка k относительно независимых переменных $dx_i \ \ (i = 1, \ldots, n)$.

Пример 4.2. Найти $d^2 f(3, -1)$, где $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

Преимущество вычисления по формуле (4.4) в том, что на каждом этапе мы находим *первый* дифференциал и можем воспользоваться *инвариантностью* его формы. Итак, в произвольной точке первый дифференциал

$$df = \frac{2xdx + dy}{x^2 + y}.$$

В произвольной точке второй дифференциал

$$d^2 f = d(df) = \frac{(x^2 + y)2dx^2 - (2xdx + dy)(2xdx + dy)}{(x^2 + y)^2}.$$

В данной точке второй дифференциал

$$d^2 f(3, -1) = \frac{16dx^2 - (6dx + dy)^2}{64} = -\frac{20dx^2 + 12dxdy + dy^2}{64}.$$

Второй способ. Найдем все частные производные до 2-го порядка включительно в произвольной точке:

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y}, \quad f'_y = \frac{1}{x^2 + y},$$

$$f''_{xx} = 2\frac{y - x^2}{(x^2 + y)^2}, \ f''_{xy} = 2\frac{x}{(x^2 + y)^2}, \ f''_{yy} = \frac{1}{(x^2 + y)^2}.$$

Теперь найдем производные второго порядка в точке $A(3 - 1)$:

$$f''_{xx}(3 - 1) = -\frac{20}{64}, \quad f''_{xy}(3 - 1) = -\frac{6}{64}, \quad f''_{yy}(3 - 1) = -\frac{1}{64}.$$

Поэтому $d^2 f(3, -1) = -(1/64)(20dx^2 + 12dxdy + dy^2)$.

Замечание 4.6. Если найден дифференциал k-го порядка, то из него можно получить значения всех производных k-го порядка.

Полезно выписать все формулы дифференциала *второго* порядка, поскольку он применяется в теории экстремумов функции многих переменных. Применение всех вышеназванных подходов (см. формулы (4.2), (4.4), (4.6), (4.7) и (4.8)) дает следующую цепочку равенств:

$$d^2f(x, d\boldsymbol{x}) = d(df)(x) = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f =$$

$$= (\mathbf{grad}(\mathbf{grad}f(x), d\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{x}) = (\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) =$$

$$= (d\boldsymbol{x})^T \circ \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) \circ d\boldsymbol{x}.$$

Обсудим роль инвариантности формы первого дифференциала для нахождения дифференциалов высокого порядка *сложной* функции. Пусть функция $f(u, v) \in C^2$ зависит (для простоты) от двух "внешних" переменных, а каждая переменная $u = \varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $v = \psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$, в свою очередь, зависит от n "внутренних" переменных. Нас интересует второй дифференциал по n внутренним переменным сложной функции $g(x) := f(\varphi(x), \psi(x))$. Воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала, получаем

$$d^2g = d(dg) = d(f'_u du + f'_v dv), \text{где } du = (\mathbf{grad}\varphi, d\boldsymbol{x}),\ dv = (\mathbf{grad}\psi, d\boldsymbol{x}).$$

Поскольку du и dv зависят от переменной x, то $d(du) = d^2u \neq 0, d(dv) = d^2v \neq 0$. В силу определения (4.4), получаем

$$d^2g = d(f'_u du + f'_v dv) = d(f'_u) \cdot du + f'_u \cdot d^2u + d(f'_v) \cdot dv + f'_v \cdot d^2v.$$

Еще раз воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала, теперь для частных производных $f'_u,\ f'_v$:

$$d^2g = (f''_{uu}du + f''_{uv}dv) \cdot du + f'_u \cdot d^2u + (f''_{vu}du + f''_{vv}dv) \cdot dv + f'_v \cdot d^2v.$$

Поскольку смешанные производные равны, окончательно получаем

$$d^2g = d^2f(u, v) = f''_{uu}du^2 + 2f''_{uv}dudv + f''_{vv}dv^2 + f'_u \cdot d^2u + f'_v \cdot d^2v, \qquad (4.11)$$

где вторые дифференциалы $d^2u = d^2\varphi(x)$, $d^2v = d^2\psi(x)$ определяются по формуле (4.6). Заметим, что мы записали второй дифференциал сложной функции в терминах только внешних переменных u и v, помня, что они выражаются через внутренние переменные.

Сравним формулу (4.11) второго дифференциала сложной функции с формулой (4.10) второго дифференциала функции от двух *независимых* переменных. Мы видим появление дополнительных слагаемых $f'_u \cdot d^2u + f'_v \cdot d^2v$, которые обнуляются в случае, если u и v – независимые переменные. Их присутствие означает, что второй дифференциал НЕ имеет инвариантной формы при замене переменных.

4.4. Формула Тейлора

Сейчас мы получим разложения функции $f(x)$ многих переменных в окрестности исследуемой точки x^0, аналогичные тем, которые были получены для функции одной переменной. Запись формулы Тейлора в терминах частных производных весьма громоздкая, поэтому мы запишем ее через дифференциалы. Оказывается форма записи через дифференциалы инвариантна относительно количества переменных и совпадает с формулой Тейлора для функции одной переменной. Так как аргумент x локализован в некоторой окрестности точки x^0, мы будем вместо независимого дифференциала $d\boldsymbol{x}$ писать знак приращения $\Delta\boldsymbol{x} = \overrightarrow{x - x^0}$.

Теорема 4.6 (***формула Тейлора в форме Лагранжа***)**.** *Пусть функция $f \in C^{k+1}(U_\delta(x^0))$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x^0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(x^0, \Delta\boldsymbol{x}) +$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x^0 + \vartheta\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}), \tag{4.12}$$

где число $\vartheta = \vartheta(x^0, \Delta\boldsymbol{x}) \in (0,1)$ определяется в общем случае неоднозначно.

Доказательство. Идея: свести задачу к одномерной, двигаясь по лучу от x^0 к x. Определим функцию $\varphi(t) := f(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x})$, где $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ с $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы точка $x^0 + (1+\varepsilon)\Delta\boldsymbol{x} \in U_\delta(x^0)$ (т. е. $(1+\varepsilon)|\Delta\boldsymbol{x}| < \delta$). Когда t меняется от нуля до единицы, точка $x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}$ пробегает отрезок от x^0 до x. Функция φ есть суперпозиция

$$t \to x^0 + t\Delta\boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \to f(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}.$$

Найдем ее производную с помощью теоремы 3.7 о дифференцировании суперпозиции отображений:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + t\Delta\boldsymbol{x}) \cdot \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0 + t\Delta\boldsymbol{x}) \cdot \Delta x_n =$$

$$= (A_{\Delta\boldsymbol{x}} f)(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}) = df(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}) \tag{4.13}$$

(мы воспользовались формулой (4.3); выражение $x^0 + t\Delta x$ – это точка, в которой берется значение функции $A_{\Delta\boldsymbol{x}} f$). Вывод: найден *фиксированный* линейный оператор $A_{\Delta\boldsymbol{x}}$, действие которого на *произвольную* функцию f в точке $x^0 + t\Delta x$ есть производная $\varphi'(t)$ сложной функции $\varphi(t) := f(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x})$ в точке t. Но функция $\varphi'(t)$ также есть сложная функция:

$$t \to x^0 + t\Delta\boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \to (A_{\Delta\boldsymbol{x}} f)(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}),$$

где на месте функции f в формуле (4.13) стоит функция $A_{\Delta\boldsymbol{x}}f$. Следовательно, вторая производная функции φ равна

$$\varphi''(t) = (A_{\Delta\boldsymbol{x}}(A_{\Delta\boldsymbol{x}}f))(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}) = (A^2_{\Delta\boldsymbol{x}}f)(x^0 + t\Delta\boldsymbol{x}).$$

И т. д. для $m = 1, \ldots, k+1$ производные $\varphi^{(m)}(t) = (A^m_{\Delta\boldsymbol{x}}f)(x_0 + t\Delta x)$.

Формула Маклорена для функции φ при $t = \Delta t = dt = 1$ имеет вид

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\vartheta) \;\Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}(A^m_{\Delta\boldsymbol{x}}f)(x^0) + \frac{1}{(k+1)!}(A^{k+1}_{\Delta\boldsymbol{x}}f)(x^0 + \vartheta\Delta\boldsymbol{x}),$$

где $0 < \vartheta < 1$. Но из формулы (4.8) следует, что $(A_{\Delta\boldsymbol{x}})^m f = d^m f$. Что доказывает теорему. ■

Следствие 4.2 (***теорема Лагранжа для функции нескольких переменных***). *Пусть функция $f \in C^1(U_\delta(x^0))$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x^0)$ справедлива формула Лагранжа:*

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0 + \vartheta\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}) =$$

$$= f(x_0) + \frac{\partial f(x^0 + \vartheta\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x_0 + \vartheta\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

где число $\vartheta = \vartheta(x^0, \Delta\boldsymbol{x}) \in (0,1)$ определяется в общем случае неоднозначно.

Доказательство. Это утверждение теоремы 4.6 при $k = 1$.

Замечание 4.7. Таким образом, для *числовой* функции, заданной на выпуклом множестве, теорема о среднем Лагранжа справедлива независимо от количества переменных. Для *вектор*-функции (т. е. отображения в многомерное пространство) теорема в общем случае неверна.

Теорема 4.7 (***формула Тейлора в форме Пеано***). *Пусть функция $f \in C^k(U_\delta(x^0))$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x^0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}d^m f(x^0, \Delta\boldsymbol{x}) + o(|\Delta\boldsymbol{x}|^k) \text{ при } \Delta\boldsymbol{x} = x - x^0 \to \boldsymbol{0}. \quad (4.14)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!}d^m f(x^0) + \frac{1}{k!}d^k f(x_0 + \vartheta\Delta\boldsymbol{x}),$$

где $0 < \vartheta < 1$. Добавим к сумме недостающее слагаемое и вычтем его:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(x^0) + \frac{1}{k!}(d^k f(x_0 + \vartheta \Delta \boldsymbol{x}) - d^k f(x^0)).$$

Оценим разность в скобках. Воспользуемся непрерывностью производных k-го порядка, теоремой (4.2) и формулой (4.5):

$$\frac{|d^k f(x^0 + \vartheta \Delta \boldsymbol{x}) - d^k f(x^0)|}{|\Delta \boldsymbol{x}|^k} \leq$$

$$\leq \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \left| \frac{\partial^k f(x^0 + \vartheta \Delta \boldsymbol{x})}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} - \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \right| \frac{|\Delta \boldsymbol{x}_{i_k}| \ldots |\Delta \boldsymbol{x}_{i_1}|}{|\Delta \boldsymbol{x}|^k} \leq$$

$$\leq n^k \max_{i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}} \left| \frac{\partial^k f(x^0 + \vartheta \Delta \boldsymbol{x})}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} - \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \right| \ \to \ 0$$

при $|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0$. ■

Замечание 4.8. После того, как формула (4.12) или (4.14) найдена, целесообразно заменить в ее правой части приращение $\Delta \boldsymbol{x} = \overrightarrow{x - x^0}$, чтобы обе части формулы содержали только *одну* переменную x. Но ни в коем случае так делать нельзя до тех пор, пока не найдены все дифференциалы!

5. Мера Жордана

Мера Жордана – обобщение понятия длины отрезка на прямой, площади плоской фигуры и объема пространственного тела. Понятие меры Жордана связано с основными теоретико-множественными понятиями (объединение, пересечение, дополнение), с топологическими понятиями (внутренность, замыкание, граница) и метрическим понятием (длина отрезка). Это понятие лежит в основе интеграла Римана функции многих переменных.

5.1. Клеточные множества

Точечно-векторным (или аффинным) пространством называется пара пространств $(\mathbb{R}^n, \mathbf{V}^n)$, связанных точечно-векторными операциями. Важно, что в точечном пространстве $\mathbb{R}^n$ присутствуют геометрические понятия: отрезок, угол, многогранник, длина отрезка и величина угла. Для пары пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и их подмножеств $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ определена операция прямого произведения $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которая является основополагающей в определении меры.

Определение 5.1. ***Клеткой*** *(точнее, n-мерной клеткой) в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют n-мерный замкнутый прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат, т. е. прямое произведение отрезков:*

$$\Pi^n = \Pi := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] =$$
$$= \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ a_k \le x_k \le b_k, \ k = 1, \ldots, n\}.$$

Мерой клетки *(точнее, n-мерной мерой) называется неотрицательное число*

$$\mu(\Pi) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n),$$

т. е. произведение длин сторон параллелепипеда.

Граница клетки $\partial\Pi$ представляет собой объединение всех точек, у которых хотя бы одна координата равна концу отрезка (рис. 5.1):

$$\partial\Pi = \{x \in \Pi : \ \exists k \in \{1, \ldots, n\} : \ x_k = a_k \vee x_k = b_k\}. \tag{5.1}$$

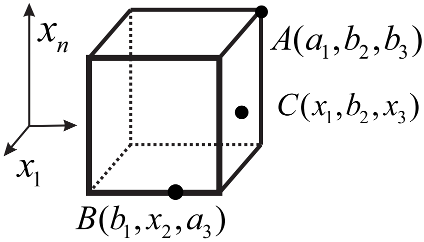

Рис. 5.1

Определение 5.2. *Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется* ***клеточным****, если оно допускает* ***конечное разбиение*** *на клетки, то есть существует* конечная *совокупность $P := \{\Pi_1, \ldots, \Pi_N\}$ клеток, которые попарно не пересекаются по внутренним точкам, а их объединение образует данное множество:*

$$K := \bigcup_{i=1}^{N} \Pi_i = K, \quad \operatorname{int} \Pi_i \cap \operatorname{int} \Pi_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Клетки, входящие в разбиение, назовем ***состыкованными****. Обозначение клеточного разбиения:*

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{N} \Pi_i.$$

Мерой клеточного подмножества *называют сумму мер состыкованных клеток:*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{N} \Pi_i\right) := \sum_{i=1}^{N} \mu(\Pi_i).$$

Пустое множество по определению считаем клеточным с нулевой мерой.

Обсуждение 5.1. Клеточное множество может быть состыковано бесконечным количеством способов (рис. 5.2). Более того, сама клетка имеет бесконечное количество разбиений на клетки. Возникает проблема корректности определения 5.2. Объединение двух клеточных множеств K_1 и K_2 назовем их **стыковкой** $K_1 \sqcup K_2$, если эти множества не пересекаются по внутренним точкам.

Спецификой клеток и клеточных множеств является их жесткая привязка к координатным осям: каждое ребро клетки параллельно соответствующей координатной оси. Но повернутая клетка, будучи прямоугольным параллелепипедом, равным исходному, уже не является клеткой (рис. 5.3).

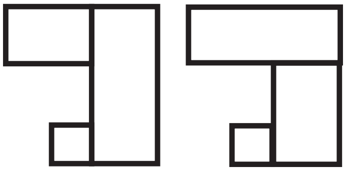

Рис. 5.2

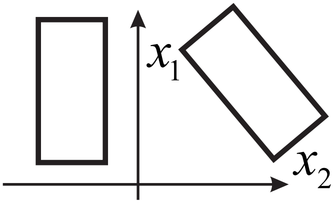

Рис. 5.3

Теорема 5.1 (основные свойства клеточных множеств).

1. *Клеточное множество замкнуто:* $\overline{K} = K$.
2. *(a) Пусть* $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ *и* $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ *– клеточные множества соответствующих размерностей. Тогда их прямое произведение* $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ *является клеточным* $(n+m)$*-мерным множеством.*

   (b) Пусть $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ *– произвольные клеточные подмножества. Тогда их пересечение* $K_1 \cap K_2$*, замкнутая разность* $K_2 \setminus (\operatorname{int} K_1)$ *(разность* $K_2 \setminus K_1$ *в общем случае НЕ является замкнутым подмножеством), объединение* $K_1 \cup K_2$ *являются клеточными подмножествами.*

   То есть множество всех клеточных подмножеств ***замкнуто*** *относительно основных теоретико-множественных операций.*
3. *Мера клеточного множества не зависит от способа его разбиения, что означает* ***корректность*** *определения меры клеточного множества.*
4. *Для произвольных клеточных подмножеств* $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ *верна* ***формула меры объединения****:*

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) - \mu(K_1 \cap K_2). \tag{5.2}$$

5. ***Аддитивность*** *меры при стыковке:*

$$\mu(K_1 \sqcup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

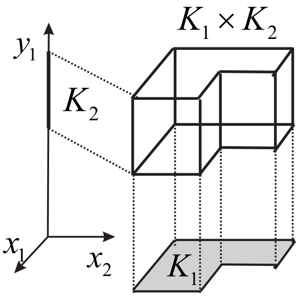

Рис. 5.4

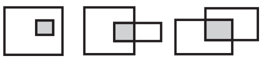

Рис. 5.5

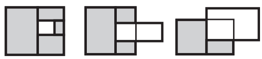

Рис. 5.6

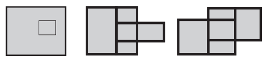

Рис. 5.7

6. ***Монотонность*** *меры: если* $K_1 \subset K_2$, *то* $\mu(K_1) \le \mu(K_2)$.
7. *Если существует* ***общая внутренняя точка*** *клеточных подмножеств, то имеет место* ***полуаддитивность****:*

$$K_1^0 \cap K_2^0 \ne \emptyset \;\hookrightarrow\; \mu(K_1 \cup K_2) < \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

8. *Мера прямого произведения равна произведению мер сомножителей:*

$$\mu(K_1 \times K_2) = \mu(K_1) \cdot \mu(K_2). \tag{5.3}$$

Доказательство (набросок для двумерного случая). Пункт 1 следует из замкнутости клеток и конечности их количества.

Доказательство п. 2(a) основано на том, что клеточное разбиение сомножителей порождает клеточное разбиение прямого произведения:

$$K_1 \times K_2 = \left(\bigsqcup_{i=1}^{N} \Pi_{1,i}\right) \times \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} \Pi_{2,j}\right) = \bigsqcup_{i,j=1}^{N,M} \Pi_{1,i} \times \Pi_{2,j}.$$

На рис. 5.4 изображено прямое произведение двумерного клеточного множества на одномерную клетку. (Разбейте множество K_1 на клетки и убедитесь, что это разбиение порождает разбиение прямого произведения.)

Доказательство всех свойств, перечисленных в п. 2(b), сводится к случаю пересечения двух клеток (см. рис. 5.5–5.7).

Доказательство п. 3 начнем с рассмотрения одной клетки $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Пусть стороны клетки разбиты на отрезки:

$$x_0 = a_1 < x_1 < \ldots < x_{N_1} = b_1, \quad [a_1, b_1] = \bigsqcup_{i=1}^{N_1} [x_{i-1}, x_i],$$

$$y_0 = a_2 < y_1 < \ldots < y_{N_2} = b_2, \quad [a_2, b_2] = \bigsqcup_{j=1}^{N_2} [y_{j-1}, y_j].$$

Тогда операция прямого произведения сторон клетки приводит к разбиению всей исходной клетки на подклетки $\Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, и, в силу независимости индексации,

$$\mu\left(\bigsqcup_{i,j=1}^{N_1,N_2} \Pi_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} \mu(\Pi_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sum_{j=1}^{N_2} (y_j - y_{j-1}) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2),$$

что согласуется с определением 5.1.

Если клетка $\Pi = \bigsqcup_{k=1}^{N} \Pi_k$ разбита на клетки произвольным образом, то мы спроектируем на оси каждую вершину каждой клетки Π_k и через полученные точки проведем прямые, параллельные осям. В результате данная клетка разбивается на клетки Π_{ij} как результат *прямого произведения* разбиения сторон. Но каждая клетка Π_k данного разбиения разбивается некоторыми клетками Π_{ij} тоже как результат прямого произведения. Заметим, что каждая из клеток Π_{ij} принадлежит в точности одной из клеток Π_k; указывая на это обстоятельство введем обозначение $\Pi_k = \bigsqcup_{i,j} \Pi_{ij;k}$. Исходя из доказанного, получаем

$$(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) = \sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} \mu(\Pi_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i,j} \mu(\Pi_{ij;k}) \right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(\Pi_k).$$

Следовательно, мера одной клетки не зависит от ее разбиения и для клетки определения 5.1 и 5.2 согласованы.

Пусть теперь клеточное множетво K произвольно разбито на клетки двумя способами:

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{N} \Pi'_i = \bigsqcup_{j=1}^{M} \Pi''_j.$$

Рассмотрим разбиение, которое возникает за счет попарного пересечения каждой клетки первого разбиения с каждой клеткой второго, т. е. его клетки $\Pi_{ij} = \Pi'_i \cap \Pi''_j$ $(i = 1, \ldots, N, \;\; j = 1, \ldots, M$, не исключено, что некоторые пересечения пусты; рис. 5.8). Такое разбиение назовем **измельчением**

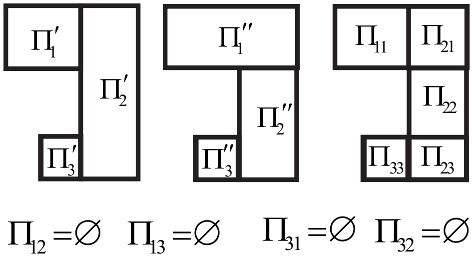

Рис. 5.8

данных. Тогда

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{N} \Pi_i' = \bigsqcup_{j=1}^{M} \Pi_j'' = \bigsqcup_{i,j=1}^{N,M} \Pi_{ij}, \text{ где } \Pi_{ij} = \Pi_i' \cap \Pi_j''.$$

Теперь, применяя определение 5.2, мы получаем, что мера $\mu(K) = \sum_{i,j=1}^{N,M} \mu(\Pi_{ij})$ и для обоих разбиений она одинакова.

Доказательство п. 4, аналогично п. 2, сводится к случаю пересечения двух клеток.

Пункты 5–7 следуют из формулы (5.2).

Пункт 8 следует из пунктов 2 и 3 и определения 5.1 меры клеточного множества. ■

5.2. Измеримые множества

Сейчас мы дадим ключевое определение – определение *измеримого по Жордану множества* и *меры Жордана*, названных так в честь французского математика Камиля Жордана (Мари Энмон Камиль Жордан, 1838 – 1922).

Определение 5.3. ***Нижней мерой*** *Жордана $\mu_*(E)$ подмножества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется супремум мер клеточных множеств K_{int}, которые содержатся в E;* ***верхней мерой*** *Жордана $\mu^*(E)$ подмножества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется инфимум мер клеточных множеств K_{ext}, которые содержат E (рис. 5.9):*

$$\mu_*(E) := \sup_{K_{int} \subset E} \mu(K), \quad \mu^*(E) := \inf_{K_{ext} \supset E} \mu(K).$$

Множество E называется ***измеримым*** *по Жордану, если его нижняя и верхняя меры конечны и совпадают: $\mu_*(E) = \mu^*(E) < +\infty$. Число $\mu(E) := \mu_*(E) = \mu^*(E)$ называют* ***мерой*** *Жордана множества E.*

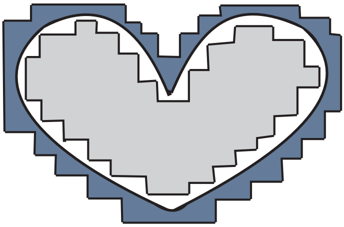

Рис. 5.9

Замечание 5.1.

1) В отличие от понятий длины, площади и объема, мера множества зависит не только от самого множества, но и от объемлющего пространства. Рассмотрим цепочку вложений

$$\Pi_0^2 = [0,1] \times [0,0] \subset \mathbb{R}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$$

вырожденного прямоугольника Π_0^2. Его *одномерная* мера как отрезка $\Pi_0^2 = \Pi^1 = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$ равна единице. В то же время его *двумерная* мера вырожденного прямоугольника $\Pi_0^2 \subset \mathbb{R}^2$ равна нулю.

2) Очевидна аналогия между определениями нижнего и верхнего интегралов Дарбу и интеграла Римана по схеме Дарбу (определение 6.2) с определениями нижней и верхней мер Жордана и меры Жордана. Ниже будет установлено, что, с определенными оговорками, эти понятия совпадают.

Из определений вытекают следующие утверждения:

Лемма 5.1 (необходимое свойство измеримости)**.** *Если подмножество E измеримо, то оно ограничено.*

Лемма 5.2 (критерий измеримости на языке ε-приближений)**.** *Подмножество E измеримо только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют вписанное клеточное множеств $K_{int} \subset E$ и описанное клеточное множество $K_{ext} \supset E$, меры которых различаются на ε, т. е. $\mu(K_{ext}) - \mu(K_{int}) < \varepsilon$.*

Пример 5.1. Множество $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ рациональных точек отрезка неизмеримо в $\mathbb{R}^1$, поскольку его нижняя мера равна нулю, а верхняя единице.

Среди всех измеримых подмножеств важную роль играют подмножества нулевой меры, поскольку к ним сводится, как будет показано ниже, исследование измеримости произвольного подмножества.

Лемма 5.3. *Множество E имеет нулевую меру только тогда, когда оно принадлежит клеточному множеству K сколь угодно малой меры.*

Более того, множество K можно выбрать таким, чтобы E принадлежало его ***внутренности****, т. е.*

$$\mu(E) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists K : \ E \subset \operatorname{int} K \wedge \mu(K) < \varepsilon.$$

Доказательство. По договоренности пустое множество $\emptyset = K_1 \subset E$ является клеточным и имеет меру ноль. Поэтому достаточность сразу следует из леммы 5.2.

Необходимость. В силу леммы 5.2 существует клеточное множество $\widehat{K}$, для которого $E \subset \widehat{K}$ и $\mu(\widehat{K}) < \varepsilon/2$. Пусть $\widehat{K} = \sqcup_{i=1}^{N} \widehat{\Pi}_i$. Применим к каждой клетке $\widehat{\Pi}_i$ гомотетию с центром в центре клетки и коэффициентом $k = \sqrt[n]{2} > 1$ (рис. 5.10). Получим клетки Π_i меры $k^n \mu(\widehat{\Pi}_i)$ (докажите). Объединение $K := \cup_{i=1}^{p} \Pi_i$ не является стыковкой клеток, однако оно является клеточным множеством (п. 2 теоремы 5.1), а его мера оценивается сверху (п. 7 теоремы 5.1):

$$\mu(K) = \mu(\cup_{i=1}^{N} \Pi_i) \le \sum_{i=1}^{N} k^n \mu(\widehat{\Pi}_i) = k^n \mu(\widehat{K}) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\widehat{\Pi}_i \subset \operatorname{int} \Pi_i$, то $\widehat{K} \subset \operatorname{int} K$. Следовательно $E \subset \operatorname{int} K$. Множество K – искомое. ■

Следствие 5.1. *Конечное объединение множеств нулевой меры имеет меру ноль (конечная аддитивность множеств нулевой меры).*

Для доказательства основного утверждения об измеримости нам потребуется

Лемма 5.4 (о пересечении с границей). *Если клетка Π пересекает подмножество E и его дополнение $E^C := \mathbb{R}^n \setminus E$, то она пересекает границу ∂E подмножества E.*

Доказательство. Пусть $x \in \Pi \cap E$, а $y \in \Pi \cap E^C$. Поскольку клетка *выпуклое* множество, то отрезок $[x, y] \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ (рис. 5.11). Параметризуем $[x, y]$ числовым отрезком $[0, 1]$: рассмотрим *непрерывное* отображение

$$f : [0, 1] \to [x, y], \quad f(t) := O + (1 - t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y},$$

$$\text{где } O = (0, \dots, 0), \ \boldsymbol{x} = \overrightarrow{Ox}, \ \boldsymbol{y} = \overrightarrow{Oy}.$$

По условию $f(0) = x \in E$. Поэтому существует $t_\partial = \sup\{t \in [0, 1] : \ f(t) \in E\}$. Покажем, что $z = f(t_\partial) \in \partial E$. Если $t_\partial = 0$, то для всех $t > 0$ выполняется $f(t) \in E^C$. Значит, в силу непрерывности f, в любой окрестности точки $x \in E$ имеются точки из дополнения. Следовательно $x \in \partial E$. Аналогично рассматривается случай $t_\partial = 1$. Если $0 < t_\partial < 1$, то сколь угодно близко существуют числа $t < t_\partial$, для которых $f(t) \in E$, а для всех $t > t_\partial$ верно $f(t) \in E^C$. Опять же, в силу непрерывности f, в любой окрестности точки $z = f(t_\partial)$ имеются точки из E и точки из дополнения E^C. ■

Перейдем к основному утверждению

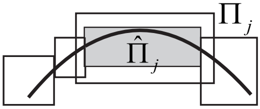

Рис. 5.10

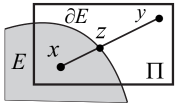

Рис. 5.11

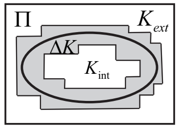

Рис. 5.12

Теорема 5.2 (критерий измеримости в терминах границы множества). *Подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо только тогда, когда оно ограничено и его граница имеет меру нуль.*

Замечание 5.2. В сформулированном утверждении проявляется связь между топологическим понятием граница множества и измеримостью. Эта связь уточняется ниже в теореме 5.3.

Доказательство. Необходимость. Из леммы 5.1 следует ограниченность E. Покажем, что $\mu(\partial E) = 0$. Из леммы 5.2 следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют клеточные множества K_{int}, K_{ext}, для которых $K_{int} \subset E \subset K_{ext}$ и $\mu(K_{ext}) - \mu(K_{int}) < \varepsilon$. Поскольку клеточные множества замкнуты (п. 1 теоремы 5.1), то замыкание $\overline{E} \subset K_{ext}$. Поэтому $\partial E \subset \overline{E} \subset K_{ext}$. Рассмотрим разность $\Delta K := K_{ext} \setminus \operatorname{int} K_{int}$, которая является клеточным множеством (п. 2 теоремы 5.1). Поскольку из K_{ext} удалены только *внутренние* точки множества $K_{int} \subset E$, то разность ΔK, как и K_{ext}, содержит целиком границу ∂E: $\partial E \subset \Delta K$. Теперь заметим, что клеточные множества ΔK и K_{int} состыкованы (по определению ΔK), поэтому $K_{ext} = \Delta K \sqcup K_{int}$ (рис. 5.12). В силу аддитивности и монотонности меры клеточных множеств (пункты 5, 6 теоремы 5.1) получаем:

$$\mu(K_{ext}) - \mu(K_{int}) < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \mu(\Delta K \sqcup K_{ext}) - \mu(K_{int}) < \varepsilon \;\Leftrightarrow$$

$$\mu(\Delta K) + \mu(K_{int}) - \mu(K_{int}) < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \mu(\Delta K) < \varepsilon.$$

Из леммы 5.3 следует, что $\mu(\partial E) = 0$.

Достаточность. Поскольку $\mu(\partial E) = 0$, в силу леммы 5.3, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое клеточное множество ΔK, что $\partial E \subset \operatorname{int} \Delta K$ и мера $\mu(\Delta K) < \varepsilon$. Далее, поскольку множества E и ΔK ограничены, существует клетка Π, содержащая оба эти множества: $E \cup (\Delta K) \subset \Pi$. Рассмотрим клеточное множество $\Pi \setminus \operatorname{int}(\Delta K)$ (рис. 5.12). Будучи клеточным, оно состыковано из конечного количества клеток:

$$\Pi \setminus (\operatorname{int} \Delta K) = \bigsqcup_{i=1}^{p} \Pi_i.$$

Поскольку граница ∂E принадлежит внутренности клеточного множества ΔK, верно:

$$\Pi_i \subset \operatorname{int} E \cup \operatorname{int} E^C \quad \forall i,$$

т. е. все клетки принадлежат объединению *внутренностей.*

Если допустить, что существует клетка Π_i, пересекающаяся и с множеством $\operatorname{int} E$, и с множеством $\operatorname{int} E^C$, то (по лемме 5.4) клетка Π_i пересекается с границей, что невозможно. Значит, каждая клетка Π_i или целиком лежит в $\operatorname{int} E$, или целиком лежит в $\operatorname{int} E^C$. Возьмем все клетки, целиком принадлежащие $\operatorname{int} E$. Их объединение K_{int} является стыковкой, т. е. образует клеточное множество, причем $K_{int} \subset \operatorname{int} E \subset E$. Более того, K_{int} состыковано с клеточным множеством ΔK, и, в силу определения K_{int}, справедливо вложение

$$E \subset \overline{E} \subset K_{ext} := K_{int} \sqcup \Delta K.$$

Остается заметить, что

$$\mu(K_{ext}) - \mu(K_{int}) = \mu(\Delta K) < \varepsilon.$$

■

5.3. Свойства измеримых множеств

Измеримые множества наследуют многие свойства клеточных множеств, сформулированные в теореме 5.1 Чтобы их доказать нам потребуется

Лемма 5.5 (***граница и теоретико-множественные операции***). *Для любых подмножеств $E, F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения (рис. 5.13 – 5.15):*

$$\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F, \quad \partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F, \quad \partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F.$$

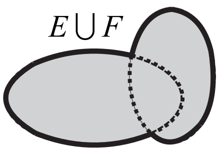

Рис. 5.13

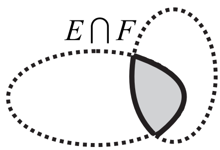

Рис. 5.14

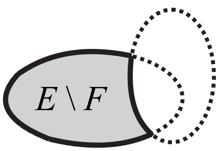

Рис. 5.15

Доказательство первого включения. Пусть точка $x \in \partial(E \cup F)$. По определению, в любой ее окрестности находится точка из $E \cup F$ и точка из дополнения $(E \cup F)^C$. Значит, выполнено по крайней мере одно из условий: 1) в любой ее окрестности находится точка из E, 2) в любой ее окрестности находится точка из F. Поскольку $(E \cup F)^C \subset E^C \cap F^C$, то в первом случае x является граничной точкой для E, а во втором случае – граничной для F.

Остальные включения доказываются аналогично. ∎

Теорема 5.3 (об операциях с измеримыми подмножествами).

1. *Для произвольных измеримых подмножеств $E, F \subset \mathbb{R}^n$, принадлежащих одному и тому же пространству, справедливы свойства:*
   (a) ***монотонность*** *меры: если $E \subset F$, то $\mu(E) \le \mu(F)$;*
   (b) ***замкнутость*** *измеримых множеств относительно теоретико-множественных операций: подмножества $E \cup F$, $E \cap F$ и $E \setminus F$ измеримы (рис. 5.13 – 5.15) и мера объединения вычисляется по формуле*
   $$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F); \tag{5.4}$$
   (c) ***мера множества сосредоточена в его внутренности:*** *$\operatorname{int} E$ и $\overline{E}$ измеримы, причем $\mu(E) = \mu(\operatorname{int} E) = \mu(\overline{E})$;*
   (d) ***полуаддитивность*** *меры: $\mu(E \cup F) \le \mu(E) + \mu(F)$;*
   (e) ***аддитивность*** *меры: если подмножества E и F не имеют* ***общих внутренних*** *точек, то $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;*
2. *Для произвольных измеримых подмножеств $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, принадлежащих разным пространствам, их прямое произведение измеримо и* ***мера произведения равна произведению мер сомножителей****:*
$$\mu(E \times F) = \mu(E) \times \mu(F). \tag{5.5}$$

Доказательство. Будем по-прежнему обозначать через K клеточное множество; индекс $intE$ ($extE$) указывает, что оно содержится (содержит) множество E.

Доказательство п. 1(a). Поскольку данные множества измеримы, их меры совпадают с верхними и нижними мерами. Воспользовавшись монотонностью меры клеточных множеств (п. 6 теоремы 5.1), получаем:

$$K_{intE} \subset E \subset F \subset K_{extF} \;\Rightarrow$$
$$\mu(E) = \sup_{K_{intE}} \mu(K_{intE}) \le \inf_{K_{extF}} \mu(K_{extF}) = \mu(F).$$

Доказательство п. 1(b). Во-первых, названные множества ограничены. Во-вторых, из леммы 5.5, следствия 5.1 и п. 1(a) теоремы следует, что мера их границ равна нулю. Значит, все названные множества измеримы.

Из п. 1(a) получаем:

$$K_{intE} \,\cup\, K_{intF} \subset E \,\cup F \,\subset K_{extE} \,\cup\, K_{extF} \;\Rightarrow$$

$$\mu(K_{intE}\ \cup\ K_{intF}) \le \mu(E\ \cup\ F) \le \mu(K_{extE}\ \cup\ K_{extF}).$$

Воспользуемся формулой (5.2) меры объединения клеточных множеств:

$$\mu(K_{intE}) + \mu(K_{intF}) - \mu(K_{intE}\ \cap\ K_{intF}) \le \mu(E\ \cup\ F) \le$$

$$\le \mu(K_{extE}) + \mu(K_{extF}) - \mu(K_{extE}\ \cap\ K_{extF}).$$

Поскольку $K_{intE}\ \cap\ K_{intF} \subset K_{ext(E\cap F)}$ и $K_{extE}\ \cap\ K_{extF} \supset K_{int(E\cap F)}$, то

$$\mu(K_{intE}) + \mu(K_{intF}) - \mu(K_{ext(E\cap F)}) \le \mu(E\ \cup\ F) \le$$

$$\le \mu(K_{extE}) + \mu(K_{extF}) - \mu(K_{int(E\cap F)}).$$

Полученная двусторонняя оценка справедлива для любых названных клеточных множеств, поэтому она переносится на точные грани:

$$\sup_{K_{intE},K_{intF},K_{ext(E\cap F)}} (\mu(K_{intE}) + \mu(K_{intF}) - \mu(K_{ext(E\cap F)})) \le \mu(E\ \cup\ F) \le$$

$$\le \inf_{K_{extE},K_{extF},K_{int(E\cap F)}} (\mu(K_{extE}) + \mu(K_{extF}) - \mu(K_{int(E\cap F)})). \tag{5.6}$$

Так как все названные клеточные множества определяются независимо друг от друга, то

$$\sup_{K_{intE},K_{intF},K_{ext(E\cap F)}} (\mu(K_{intE}) + \mu(K_{intF}) - \mu(K_{ext(E\cap F)})) =$$

$$= \sup_{K_{intE}} \mu(K_{intE}) + \sup_{K_{intF}} \mu(K_{intF}) - \inf_{K_{ext(E\cap F)}} \mu(K_{ext(E\cap F)}) =$$

$$= \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\inf_{K_{extE},K_{extF},K_{int(E\cap F)}} (\mu(K_{extE}) + \mu(K_{extF}) - \mu(K_{int(E\cap F)})) =$$

$$= \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F).$$

Теперь из двусторонней оценки (5.6) следует равенство (5.4).

Доказательство п. $1(c)$. Во-первых, $\partial(\operatorname{int} E) \subset \partial E$, поскольку точки из $\operatorname{int} E$ и $\operatorname{int} E^C$ не могут принадлежать границе $\partial(\operatorname{int} E)$. Значит, $\mu(\partial(\operatorname{int} E)) = 0$ и внутренность $\operatorname{int} E$ является измеримым множеством. Теперь утверждение следует из соотношений

$$\overline{E} = \operatorname{int} E \cup \partial E,\ \operatorname{int} E \cap \partial E = \emptyset,\ \operatorname{int} E \subset E \subset \overline{E},$$

равенства $\mu(\partial E) = 0$, монотонности меры (п. $1(a)$ теоремы) и формулы (5.4).

Доказательство пунктов $1(d)$ и $1(e)$ следует из формулы (5.4) и леммы 5.1.

Докажем п. 2. Из включений

$$K_{intE} \subset E \subset K_{extE}, \quad K_{intF} \subset F \subset K_{extF}$$

следуют включения

$$K_{intE} \times K_{intF} \subset E \times F \subset K_{extE} \times K_{extF}.$$

Согласно п. 1(a) и формуле (5.3),

$$\mu(K_{intE} \times K_{intF}) = \mu(K_{intE}) \cdot \mu(K_{intF}) \leq$$

$$\leq \mu(K_{extE}) \cdot \mu(K_{extF}) = \mu(K_{extE} \times K_{extF}).$$

Полученная двусторонняя оценка справедлива для любых названных клеточных множеств, поэтому она переносится на точные грани:

$$\sup_{K_{intE}, K_{intE}} (\mu(K_{intE}) \cdot \mu(K_{intF})) \leq \inf_{K_{extE}, K_{extE}} (\mu(K_{extE}) \cdot \mu(K_{extF})).$$

Так как все названные клеточные множества определяются независимо друг от друга, то

$$\sup_{K_{intE}, K_{intE}} (\mu(K_{intE}) \cdot \mu(K_{intF})) =$$

$$= \sup_{K_{intE}} \mu(K_{intE}) \cdot \sup_{K_{intE}} \mu(K_{intF}) = \mu(E) \cdot \mu(F).$$

Аналогично

$$\inf_{K_{extE}, K_{extE}} (\mu(K_{extE}) \cdot \mu(K_{extF})) = \mu(E) \cdot \mu(F).$$

Но

$$\sup \mu(K_{intE} \times K_{intF}) \leq \sup \mu(K_{int(E\times F)}) = \mu_*(E \times F),$$

поскольку множество клеточных подмножеств $\{K_{int(E\times F)}\}$ шире, чем множество клеточных модмножеств $\{K_{intE} \times K_{intF}\}$. Аналогично

$$\inf \mu(K_{extE} \times K_{extF}) \geq \inf \mu(K_{ext(E\times F)}) = \mu^*(E \times F).$$

Значит, нижняя и верхняя меры множества $E \times F$ совпадают и вычисляются по формуле (5.5). ■

Из п. 1(е) вытекает важное

Следствие 5.2 (**Конечная аддитивность** меры Жордана). *Если любые два измеримых подмножества E_i и E_j из конечной совокупности подмножеств $E_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, k)$ не имеют общих внутренних точек, то мера их объединения равна сумме мер:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i).$$

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное подмножество, а $[a, b] \subset \mathbb{R}$ – отрезок. Напомним, что **цилиндрическим множеством** (цилиндром) с **основанием** E мы называем прямое произведение $\mathrm{Cyl}_E := E \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. В теории многомерного интегрирования нам понадобится утверждение, вытекающее из п. 2 теоремы 5.3:

Следствие 5.3. *Цилиндр с измеримым основанием E измерим, и его мера равна произведению меры основания на «высоту»: $\mu(\mathrm{Cyl}_E) = \mu(E) \cdot (b - a)$.*

5.4. Примеры измеримых множеств

Лемма 5.6 (о мере графика непрерывной функции). *Пусть непрерывная функция $f: E \to \mathbb{R}$ определена на измеримом замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ее график $\mathrm{Gr}\,(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеет нулевую $(n+1)$-мерную меру.*

Теорема 5.4 (об измеримости “подграфика”). *Пусть непрерывная неотрицательная функция $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ определена на измеримом замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ее подграфик*

$$\mathrm{UGr}\,(f) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}_0^+ : \ 0 \le y \le f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

является измеримым множеством.

Замечание 5.3. В случае, когда $n = 1$ и E – отрезок, подграфик есть криволинейная трапеция.

Следствие 5.4. *Шар любого радиуса $r > 0$ в многомерном пространстве – измеримое множество:*

$$B_r^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ |\boldsymbol{x}| \le r\}.$$

6. Определённый интеграл Римана

6.1. Интеграл по Дарбу

1) На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ выберем произвольное конечное упорядоченное множество точек, включая концы:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Выбранные точки порождают **разбиение**

$$P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$$

данного отрезка на его **подотрезки**:

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i].$$

Длины подотрезков разбиения обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

2) Наибольшую из длин отрезков называют **мелкостью** разбиения

$$p(P) := \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i.$$

3) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – **ограниченная** функция, т. е. $|f(x)| \leq C = const$. Обозначим

$$M_i(f) = M_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq C,$$

$$m_i(f) = m_i := \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \geq -C,$$

$$v_i(f) = v_i := M_i - m_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n;$$

величина v_i называется **колебанием** функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

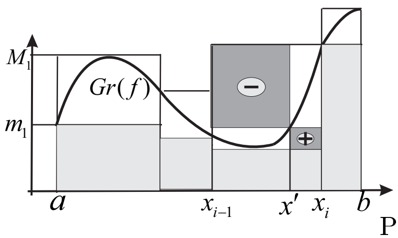

Рис. 6.1

4) Определим **верхнюю сумму Дарбу** и **нижнюю сумму Дарбу**:

$$S_P^*(f) = S_P^* := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le C(b-a),$$

$$S_{*P}(f) = S_{*P} := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ge -C(b-a),$$

а также **разность сумм Дарбу**

$$V_P := S_P^* - S_{*P} = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i \ge 0.$$

5) Разбиение P' называют **измельчением** разбиения P, если каждый из отрезков разбиения P' содержится в некотором отрезке из разбиения P: $P \prec P'$. Иначе говоря, к точкам, которые породили P, добавляют новые. Через $P_1 \sqcup P_2$ обозначим разбиение, порожденное объединением точек, которые породили P_1 и P_2. Очевидно, что $P_1 \sqcup P_2$ является измельчением и для P_1, и для P_2.

Геометрический смысл сумм Дарбу: если функция f неотрицательна и непрерывна, то суммы Дарбу суть площади вписанной и описанной ступенчатых фигур (см. рис. 6.1).

Нас интересует, как измельчение влияет на суммы Дарбу.

Лемма 6.1 (***о монотонности сумм Дарбу при измельчении***). *При измельчении нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается:*

$$\text{если } P \prec P' \;\Rightarrow\; S_{*P} \le S_{*P'}, \quad S_P^* \ge S_{P'}^*.$$

Доказательство основано на принципе “расширяющихся возможностей”:

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \;\Rightarrow\; \sup_{[a_2,b_2]} f(x) \le \sup_{[a_1,b_1]} f(x),$$

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \;\Rightarrow\; \inf_{[a_2,b_2]} f(x) \ge \inf_{[a_1,b_1]} f(x).$$

Поскольку при измельчении добавляется конечное количество новых точек, достаточно рассмотреть случай добавления к P одной точки $x' \in (x_{i-1}, x_i)$. В этом случае все слагаемые нижней суммы S_{*P} не изменятся, кроме слагаемого с номером i: слагаемое $m_i(x_i - x_{i-1})$ заменится на сумму

$$m_i''(x_i - x') + m_i'(x' - x_{i-1}),$$

где

$$m_i' = \inf_{[x_{i-1}, x']} f(x), \quad m_i'' = \inf_{[x', x_i]} f(x).$$

Но $m_i', m_i'' \geq m_i$ поскольку $[x_{i-1}, x'], [x', x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$. Поэтому (см. рис. 6.1)

$$m_i'(x_i - x') + m_i''(x' - x_{i-1}) \geq m_i(x_i - x') + m_i(x' - x_{i-1}) = m_i(x_i - x_{i-1}). \ \blacksquare$$

Следствие 6.1. *При измельчении разность сумм Дарбу не увеличивается:*

$$\textit{если } P \prec P' \ \Rightarrow \ 0 \leq V_{P'} \leq V_P.$$

Из следствия вытекает, что измельчая разбиение мы не отдаляем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу. Наша цель выяснить, могут ли суммы различаться сколь угодно мало, т. е. могут ли совпасть верхний и нижний интегралы Дарбу.

Лемма 6.2 (сравнение нижних и верхних сумм Дарбу). *Любая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу:*

$$\forall P_1 \ \forall P_2 \ \hookrightarrow \ S_{*P_1} \leq S^*_{P_2}.$$

Доказательство. Возьмем разбиение $P = P_1 \sqcup P_2$. Поскольку P является измельчением и P_1, и P_2, то, в силу определения сумм Дарбу и леммы 6.1, получаем

$$S_{*P_1} \leq S_{*P} \leq S^*_P \leq S^*_{P_2}. \ \blacksquare$$

Определение 6.1. ***Нижним интегралом Дарбу*** *называется*

$$I_*(f) = I_* := \sup_P S_{*P} \geq -C(b-a),$$

верхним интегралом Дарбу *называется*

$$I^*(f) = I^* := \inf_P S^*_P < C(b-a).$$

Теперь нас интересует, как измельчение и мелкость связаны с суммами и интегралами Дарбу.

Лемма 6.3 (упорядоченность сумм и интегралов Дарбу). *Для любых разбиений P_1 и P_2 справедливы оценки*

$$-\infty < S_{*P_1} \leq I_* \leq I^* \leq S^*_{P_2} < +\infty.$$

Доказательство сразу следует из леммы 6.2 и теоремы о разделении двух множеств. ■

Лемма 6.4. *При стремлении мелкости к нулю нижние суммы Дарбу стремятся снизу к нижнему интегралу Дарбу, а верхние суммы Дарбу стремятся сверху к верхнему интегралу Дарбу. В кванторах утверждение имеет вид:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 :\ (\forall P :\ p(P) < \delta)\ \hookrightarrow$$
$$0 \le I_* - S_{*P} < \varepsilon\ \wedge\ 0 \le S^*_P - I^* < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Доказательство. Достаточно доказать первую оценку. По определению точной верхней грани существует разбиение P_0, для которого $I_* - S_{*P_0} < \varepsilon/2$. Покажем, что существует такое δ, что для всех разбиений P с мелкостью $p(P) < \delta$ справедлива оценка $S_{*P_0} - S_{*P} \le \varepsilon/2$. Тогда будет выполнено искомое неравенство

$$0 \le I_* - S_{*P} = (I_* - S_{*P_0}) + (S_{*P_0} - S_{*P}) \le \varepsilon.$$

Идея доказательства: отрезки разбиения P, принадлежащие отрезкам разбиения P_0, не уменьшают сумму S_{*P} по сравнению с суммой S_{*P_0}, а отрезки разбиения P, пересекающие соседние отрезки разбиения P_0, мы выберем столь малой длины, чтобы их вклад несущественно повлиял на сумму S_{*P}.

Пусть n_0 – количество отрезков разбиения P_0, p_0 – мелкость P_0,

$$M = \sup_{[a,b]} |f(x)| < +\infty.$$

Возьмем

$$p(P) \le \delta = \min\left(p_0, \frac{\varepsilon}{8Mn_0}\right)$$

и $p(P) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим разбиение $P_0 \sqcup P$. Каждый отрезок $[x^{\sqcup}_{j-1}, x^{\sqcup}_j]$, порожденный разбиением $P_0 \sqcup P$, принадлежит целиком какому-то *одному* отрезку $[x^0_{i-1}, x^0_i]$, порожденному P_0, и какому-то *одному* отрезку $[x_{k-1}, x_k]$, порожденному P.

Сопоставим отрезку $[x^{\sqcup}_{j-1}, x^{\sqcup}_j]$ те два значения m^0_i и m_k, которые порождены указанными отрезками $[x^0_{i-1}, x^0_i]$ и $[x_{k-1}, x_k]$ соответственно. В силу разбиения $P_0 \sqcup P$ нижние суммы Дарбу разбиваются каждая на две суммы:

$$S_{*P_0} = \Sigma'_{*P_0} + \Sigma''_{*P_0}, \quad S_{*P} = \Sigma'_{*P} + \Sigma''_{*P},$$

где первая сумма берется по всем отрезкам из P, целиком принадлежащим *внутренностям* отрезков из разбиения P_0, а вторая сумма берется по всем оставшимся отрезкам из $P_0 \sqcup P$; в сумме S_{*P_0} слагаемые имеют вид $m^0_i \cdot \Delta x^{\sqcup}_j$, а в сумме S_{*P} имеют вид $m_k \cdot \Delta x^{\sqcup}_j$ (см. рис. 6.2). Поскольку в суммах с одним штрихом

$$[x^{\sqcup}_{j-1}, x^{\sqcup}_j] = [x_{k-1}, x_k] \subset (x^0_{i-1}, x^0_i),$$

то $m^0_i \le m_k$; следовательно, $\Sigma'_{*P_0} - \Sigma'_{*P} \le 0$.

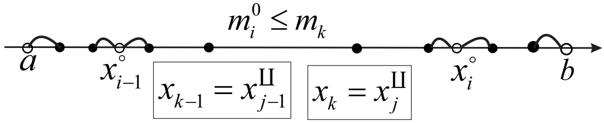

Рис. 6.2

Остается оценить модуль разности $|\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}|$. Оценивать будем опираясь на мелкость δ и на то обстоятельство, что количество n_0 отрезков разбиения P_0 *фиксировано*. Оставшиеся отрезки обязательно имеют хотя бы одним концом точку x_i^0 из разбиения P_0 (на рис. 6.2 отмечены дугами). Поэтому их не более, чем $2n_0$ штук. Каждый такой отрезок мельче, чем δ. Поэтому

$$|\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}| \le |\Sigma''_{*P_0}| + |\Sigma''_{*P}| \le 4n_0 M \frac{\varepsilon}{8Mn_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

("грубая" оценка через количество слагаемых). Окончательно получаем:

$$S_{*P_0} - S_{*P} = \left(\Sigma'_{*P_0} - \Sigma'_{*P}\right) + \left(\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}\right) \le 0 + \left|\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

Обсуждение 6.1. Утверждение леммы 6.4 означает, что, устремляя мелкость разбиения к нулю, можно добиться стремления сумм Дарбу к соответствующим интегралам Дарбу. Это утверждение можно записать так

$$\lim_{p(P)\to 0} S_{*P} = I_*, \quad \lim_{p(P)\to 0} S^*_P = I^*, \tag{6.2}$$

где записанный предел не является ни пределом последовательности, ни пределом функции. Это новый тип предела, определенный на языке "$\varepsilon - \delta$" и сформулированный специально для интегральных сумм (см. (6.1)). Такого рода пределы мы будем постоянно применять в теории интегрирования. Они обладает многими (но не всеми!) свойствами предела функции, в частности, единственностью.

Определение 6.2 (***интеграла Римана по Дарбу***). *Если $I_*(f) = I^*(f)$, то ограниченная функция f называется* ***интегрируемой по Риману на отрезке*** $[a, b]$, *а общее значение $I_D(f) = I^* = I_*$ называется* ***интегралом Римана по схеме Дарбу на отрезке*** $[a, b]$. ☒

Геометрический смысл интеграла Римана: если функция f неотрицательна и непрерывна, то интеграл Римана – это площадь "криволинейной трапеции", которая расположена между графиком и осью Ox.

В общем случае функция f не обязана быть интегрируемой:

Пример 6.1. Функция Дирихле D неинтегрируема на любом отрезке $[a,b]$, т.к. $I_*(D) = 0 < 1 \cdot (b-a) = I^*(D)$. (Почему $I_*(D) = 0$, $I^*(D) = b-a$?)

Теорема 6.1 (критерии интегрируемости по схеме Дарбу). *Для ограниченной функции равносильны следующие утверждения:*

1. *Функция f имеет интеграл Римана по схеме Дарбу на отрезке $[a,b]$.*
2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется* ***разбиение*** *P отрезка $[a,b]$ такое, что разность сумм Дарбу V_P меньше ε: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P: \; V_P < \varepsilon$.*
3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, как только* ***мелкость*** *меньше δ, разность сумм Дарбу меньше ε:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; (\forall P: \; p(P) < \delta) \; \hookrightarrow \; V_P < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Из определений точных граней и определения 6.2 следует, что существуют разбиения P_1, P_2, для которых $S_{*P_1} > I_D - \varepsilon/2$ и $S^*_{P_2} < I_D - \varepsilon/2$. Тогда для разбиения $P = P_1 \sqcup P_2$ тем более $S_{*P} > I_D - \varepsilon/2$ и $S^*_P < I_D - \varepsilon/2$ (лемма 6.1). Откуда $V_P = S^*_P - S_{*P} < \varepsilon$.

$1 \Leftarrow 2$. Пусть $V(P) = S^*_P - S_{*P} < \varepsilon$. Тогда из леммы 6.3 следует, что $I^* - I_* < \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, верхний и нижний интегралы Дарбу равны.

$1 \Leftrightarrow 3$. Из леммы 6.4 следует, что всегда существуют конечные пределы (6.2). Поэтому

$$I_* = I^* \; \Leftrightarrow \; \lim_{p(P)\to 0} S_{*P} = \lim_{p(P)\to 0} S^*_P \; \Leftrightarrow$$

$$\lim_{p(P)\to 0} (S^*_P - S_{*P}) = 0 \; \Leftrightarrow \; \lim_{p(P)\to 0} V_P = 0,$$

что равносильно условию (6.3). ■

Обсуждение 6.2. Оба критерия сформулированы в терминах разности V_P сумм Дарбу. Из теоремы 6.1 следует, что интеграл Римана (если он существует!) можно получить двумя равносильными способами. Первый: подбирать *специальные* разбиения P, при которых $V_P \to 0$. Второй: устремлять *мелкость* $p(P) \to 0$, не заботясь о расположении точек порождающих разбиение. Мы будем пользоваться обоими подходами в зависимости от обстоятельств.

6.2. Интеграл по Риману

Сейчас мы обсудим другой (исторически более ранний) подход, предложенный Риманом, приводящий к тому же результату. Пусть на $[a,b]$ определена (не обязательно ограниченная!) функция f. Пусть P есть произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. На каждом из отрезков разбиения выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

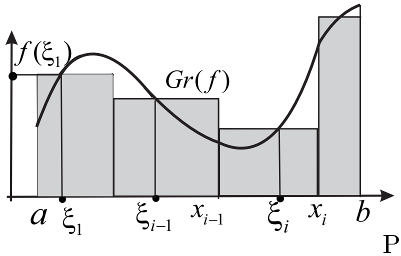

Рис. 6.3

Определение 6.3. *Упорядоченный набор $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ этих точек назовем* ***выборкой****, подчиненной разбиению P.* ***Интегральной суммой Римана*** *называется*

$$S_{P,\Xi}(f) = S_{P,\Xi} := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (6.4)$$

Геометрический смысл интегральной суммы Римана: если функция неотрицательна, то ее сумма Римана – площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 6.3.

Определение 6.4. ***Интегралом Римана по схеме Римана*** *называется конечный предел*

$$I_R(f) = I_R := \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi} \in \mathbb{R},$$

т. е. такое число I_R, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ (\forall P : p(P) < \delta) \ \wedge \ \forall \Xi \ \hookrightarrow \ |S_{P,\Xi} - I_R| < \varepsilon. \qquad (6.5)$$

Замечание 6.1. В определении интеграла по схеме Римана участвует **мелкость**. Сравните определение (6.5) с критерием (6.3).

Лемма 6.5 (необходимое условие интегрируемости по схеме Римана)**.** *Если интеграл по схеме Римана (6.5) существует, то функция f ограничена.*

Доказательство от противного. Возьмем произвольную последовательность разбиений P_n, мелкость которых $p_n \to 0$. На каждом шаге n найдется отрезок $[x'_n, x''_n]$, на котором функция неограничена. Выберем на остальных отрезках числа ξ_i произвольно. Пусть сумма Римана на всех отрезках, кроме выделенного, равна $\widehat{S}_{P_n,\Xi_n}$. Возьмем такое $\xi_n \in [x'_n, x''_n]$, что

$$|f(\xi_n)| > \frac{n + |\widehat{S}_{P_n,\Xi_n}|}{x''_n - x'_n}.$$

Тогда

$$|S_{P_n,\Xi_n}| = |f(\xi_n)(x''_n - x'_n) + \widehat{S}_{P_n,\Xi_n}| \geq |n + |\widehat{S}_{P_n,\Xi_n}|| - |\widehat{S}_{P_n,\Xi_n}| = n \to +\infty$$

при $n \to +\infty$. ■

Теорема 6.2. *Функция f имеет интеграл по схеме Дарбу только тогда, когда она имеет интеграл по схеме Римана. Если интегралы существуют, то они совпадают и имеют единое* ***обозначение****:*

$$\int_a^b f(x)dx = I_D = I_R.$$

Замечание 6.2. Из определений сумм Дарбу и определения (6.4) интегральной суммы Римана понятно происхождение обозначения интеграла. Хотя интегралы по схемам Дарбу и Римана совпадают, удобно пользоваться обоими подходами в зависимости от обстоятельств: для доказательства интегрируемости функции удобнее схема Дарбу, для доказательства интегральных равенств и неравенств – схема Римана.

Доказательство. ($\Rightarrow$) В силу определения, для любого разбиения P справедлива двусторонняя оценка

$$S_{*P} \le S_{P,\Xi} \le S_P^*. \tag{6.6}$$

Устремим мелкость к нулю. Из утверждения 3 теоремы-критерия 6.1 следует, что пределами сумм Дарбу является интеграл I_D. Откуда следует, что предел суммы Римана также равен I_D.

($\Leftarrow$) Если интеграл I_R существует, то (лемма 6.5) функция f ограничена. Поэтому для любого разбиения P на каждом отрезке разбиения можно выбрать такую точку ξ_i', что $f(\xi_i') - m_i \le \varepsilon/(4(b-a))$. Получаем для разности суммы Римана и нижней суммы Дарбу оценку сверху:

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i') - m_i)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon/4}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но на каждом отрезке разбиения можно выбрать и такую точку ξ_i'', что $M_i - f(\xi_i'') \le \varepsilon/4(b-a)$. Аналогично рассуждая, получаем оценку для разности верхней суммы Дарбу и суммы Римана:

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Складывая полученные оценки, получаем, что

$$0 \le S_P^* - S_{*P} = V_P \le |S_{P,\Xi''} - S_{P,\Xi'}| + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\Xi' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$, $\Xi'' = \{\xi_1'', \ldots, \xi_n''\}$. В силу существования I_R, если мелкость разбиения выбрана достаточна малой, то для любой выборки отличие суммы Римана от интеграла не больше $\varepsilon/4$. Поэтому

$$|S_{P,\Xi''} - S_{P,\Xi'}| \le |S_{P,\Xi''} - I_R| + |I_R - S_{P,\Xi'}| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $V_P \le \varepsilon$ для любого разбиения с достаточно малой мелкостью. Из утверждения 3 теоремы 6.1 следует, что существует I_D, а из двусторонних оценок (6.6) следует, что $I_D = I_R$. ■

6.3. Свойства определенного интеграла

Поскольку определенный интеграл определяется отрезком интегрирования и подынтегральной функцией, некоторые его свойства формулируются отдельно для отрезков интегрирования (при неизменной подынтегральной функции), отдельно – для подынтегральных функций (при неизменном отрезке интегрирования).

Теорема 6.3 (об отрезках интегрирования)**.** *Справедливы утверждения:*

1. *Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a, b]$.*
2. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом подотрезке $[c, d] \subset [a, b]$.*
3. *Пусть $c \in [a, b]$. Тогда имеет место* ***аддитивность интеграла*** *по отрезкам интегрирования: функция f интегрируема на $[a, b]$ только тогда, когда f интегрируема и на $[a, c]$, и на $[c, b]$, причем*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
4. *Если функция f* ***ограничена*** *на $[a, b]$ и для любых $a', b' \in (a, b)$ она интегрируема на подотрезке $[a', b'] \subset [a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство п. 1. Во-первых, функция ограничена на $[a, c]$ и на $[c, b]$, поэтому она ограничена на $[a, b]$. Применим утверждение 2 теоремы 6.1. Из интегрируемости на $[a, c]$ и на $[c, b]$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения P_1 и P_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно, для которых $V_{P_1} < \varepsilon/2$ и $V_{P_2} < \varepsilon/2$. Возьмем на $[a, b]$ разбиение P, *порожденное* P_1 **и** P_2. Тогда $S_{*P} = S_{*P_1} + S_{*P_2}$, $S^*_P = S^*_{P_1} + S^*_{P_2}$ и, следовательно, $V_P = V_{P_1} + V_{P_2} < \varepsilon$.

Доказательство п. 2. Так как функция ограничена на $[a, b]$, то она ограничена на $[c, d]$. В силу интегрируемости f на $[a, b]$, по любому $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения P отрезка $[a, b]$ с мелкостью $p(P) < \delta$ разность сумм Дарбу $V_P < \varepsilon$. Возьмем любое разбиение P_0 отрезка $[c, d]$, мелкость которого $p_0 < \delta$, и *продолжим* его до разбиения P всего отрезка $[a, b]$ с сохранением оценки мелкости $p(P) < \delta$. Тогда $V_{P_0} \le V_P < \varepsilon$.

Доказательство п. 3. Равносильность интегрируемости слева и справа доказана в предыдущих пунктах. Рассмотрим последовательность разбиений P_n отрезка $[a, b]$, которые *включают точку* c, и для которых мелкость $p(P_n) \to 0$. Каждое такое разбиение состоит из разбиений P'_n, P''_n отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно. Для сумм Римана получаем
$$S_{P_n, \Xi_n} = S_{P'_n, \Xi'_n} + S_{P''_n, \Xi''_n}.$$

Переходя к пределу при $p(P_n) \to 0$, получаем утверждение п. 3.

Доказательство п. 4. Рассмотрим случай $b' = b$. Если $f(x) \equiv 0$, то функция интегрируема. Иначе $C := \sup_{[a,b]} |f(x)| > 0$. Воспользуемся утверждением 2 из теоремы 6.1. По данному $\varepsilon > 0$ подберем подходящее разбиение отрезка $[a,b]$. Выберем $a' = a + \varepsilon/(4C) < b$. Поскольку f интегрируема на $[a',b]$, найдется разбиение P' отрезка $[a',b]$, для которого разность сумм Дарбу $V_{P'} < \varepsilon/2$. Рассмотрим разбиение P отрезка $[a,b]$, которое состоит из отрезка $[a,a']$ и всех подотрезков разбиения P'. Для него

$$V_P = (M' - m')(a - a') + V_{P'} < 2C\frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Мы рассматривали интеграл при условии, что верхний предел выше нижнего. Удобно снять это ограничение.

Определение 6.5. *Для произвольной функции f положим*

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, положим

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx. \quad \boxtimes$$

Следствие 6.2. *Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a, b, c, то при любом их расположении справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{6.7}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $c < a < b$. Из теоремы 6.3 следует

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \;\Leftrightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \blacksquare$$

Теперь обсудим свойства определенного интеграла, связанные с подынтегральной функцией.

Теорема 6.4 (линейность интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация функций $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a,b]$, причем*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Воспользуемся определением Римана. Заметим, что *сумма Римана линейна* относительно подынтегральной функции:

$$S_{P,\Xi}(\alpha f + \beta g) = \alpha S_{P,\Xi}(f) + \beta S_{P,\Xi}(g).$$

Остается перейти к пределу и воспользоваться *линейностью предельного перехода* (доказательство которого оставляем в виде упражнения):

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(\alpha f + \beta g) =$$

$$= \alpha \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(f) + \beta \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(g) =$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \ \blacksquare$$

Замечание 6.3. Утверждение теоремы 6.4 означает, что множество $R[a,b]$ всех функций, интегрируемых по Риману на фиксированном отрезке $[a,b]$, образует линейное пространство (заметим, функциональное), а определенный интеграл на нем является **линейным функционалом**, поскольку действует в $\mathbb{R}$:

$$l: \ R[a,b] \to \mathbb{R}, \ \ l(f) := \int_a^b f(x)dx.$$

Следствие 6.3 (о переопределении подынтегральной функции). *Изменение значений функции в конечном количестве точек не влияет на интегрируемость. Если же функция интегрируема, то значение интеграла не изменится.*

Доказательство. Пусть функция g тождественно равна нулю всюду на отрезке, кроме конечного количества точек $x_1, \dots, x_k$. Покажем, что функция g интегрируема и ее интеграл равен нулю. Пусть $M = \max\{|g(x_1)|, \dots, |g(x_k)|\}$ ($M > 0$, иначе $g(x) \equiv 0$). Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем любое разбиение P данного отрезка с мелкостью $p < \varepsilon/(2kM)$. Поскольку каждая из точек x_i ($i = 1, \dots, k$) может принадлежать не более, чем *двум* отрезкам разбиения, модуль интегральной суммы Римана допускает оценку сверху:

$$|S_{P,\Xi}(f)| < M2k \cdot \frac{\varepsilon}{2kM} = \varepsilon.$$

Следовательно, интегрируемость функции $f+g$ равносильна интегрируемости f, а интеграл суммы равен интегралу от f. $\blacksquare$

Теорема 6.5 (***интегрируемость произведения***). *Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, то их произведение $h(x) = f(x)g(x)$ интегрируемо на $[a,b]$.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 2 теоремы 6.1. Поскольку сомножители ограничены, то $|f(x)| < C$, $|g(x)| < C$. Пусть $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}$ – произвольное разбиение $[a,b]$, $\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]$ – произвольные точки. Оценим колебание $v_i(h)$ функции h на $[x_{i-1}, x_i]$:

$$|h(\xi) - h(\eta)| = |f(\xi)(g(\xi) - g(\eta)) + g(\eta)(f(\xi) - f(\eta))| \leq$$

$$\leq C(|g(\xi) - g(\eta)| + |f(\xi) - f(\eta)|) \leq C(v_i(g) + v_i(f)).$$

В полученном неравенстве правая часть вообще не зависит от точек $\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]$. Но для произвольных числовых множеств X и Y справедливо равенство:

$$\sup X - \inf Y = \sup(X - Y)$$

(разность множеств $X - Y := \{x - y\}$ по всем $x \in X, y \in Y$; докажите равенство). Поэтому

$$v_i(h) = M_i(h) - m_i(h) \leq C(v_i(g) + v_i(f)) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; V_P(h) \leq C(V_P(g) + V_P(f)).$$

Существует разбиение P_1, для которого $V_{P_1}(f) \leq \varepsilon/(2C)$, и разбиение P_2, для которого $V_{P_2}(g) \leq \varepsilon/(2C)$. Возьмем $P = P_1 \sqcup P_2$. В силу следствия 6.1, при измельчении разность сумм Дарбу не увеличивается, поэтому

$$V_P(h) \leq C(V_P(f) + V_P(g)) \leq C(V_{P_1}(f) + V_{P_2}(g)) \leq \varepsilon. \;\blacksquare$$

Теорема 6.6 (об интегрируемости модуля). *Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то и функция $|f|$ интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Для любых точек $\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]$ (обозначения из доказательства теоремы 6.5) справедлива оценка

$$||f(\xi)| - |f(\eta)|| \leq |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Поэтому $v_i(|f|) \leq v_i(f)$ и $V_P(|f|) \leq V_P(f)$. Остается сослаться на второй пункт теоремы 6.1. $\blacksquare$

Замечание 6.4. *Из интегрируемости функции $|f|$ не следует интегрируемость f. Пример: функция $f(x) = -1$ для рациональных точек и $f(x) = 1$ для иррациональных не интегрируема; ее модуль $|f(x)| \equiv 1$ интегрируем.*

6.4. Классы интегрируемых функций

Опишем наиболее важные классы интегрируемых функций.

Теорема 6.7. ***Непрерывная на отрезке*** *$[a,b]$ функция f интегрируема.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция ограничена на $[a, b]$, поэтому можно применить п. 3 теоремы 6.1. В силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности, по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|x' - x''| < \delta$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$. Возьмем мелкость разбиения меньше δ. В силу непрерывности, на каждом отрезке разбиения функция достигает минимума и максимума. Поэтому для разности сумм Дарбу верна оценка:

$$V_P = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i') - f(x_i''))\Delta x_i <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Теорема 6.8. ***Монотонная на отрезке*** *$[a, b]$ функция f интегрируема.*

Доказательство. Пусть, для определенности, функция не убывает. Тогда для любого $x \in [a, b]$ верно $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Значит, функция ограничена. Применим п. 3 теоремы 6.1. Если $f(a) = f(b)$, то функция постоянна и интегрируема. Пусть $f(a) < f(b)$. Возьмем $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Пусть P – произвольное разбиение мелкости меньшей δ. В силу монотонности, колебание на i-м отрезке разбиения равно $v_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Поэтому

$$V_P = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i < \delta\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Замечание 6.5. Если функция монотонна на интервале, то она может не быть интегрируемой на соответствующем отрезке. Пример: $y = 1/x$, дополненная условием $y(0) = 0$, не интегрируема на $[0, 1]$.

Теорема 6.9. *Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем конечное количество точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное количество подотрезков, концами которых являются точки разрыва. На каждом таком отрезке $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ функция ограничена и непрерывна внутри отрезка. Следовательно, она интегрируема на любом подотрезке

$$[\xi_{j-1}', \xi_j'] \subset [\xi_{j-1}, \xi_j], \quad \text{где} \quad \xi_{j-1} < \xi_{j-1}' < \xi_j' < \xi_j.$$

Из п. 4 теоремы 6.3 следует, что f интегрируема на $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, а из п. 3 теоремы 6.3 – интегрируема на объединении всех подотрезков $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, т. е. интегрируема на $[a, b]$. $\blacksquare$

Примеры 6.1.

1) Функция $f(x) = sign(x)$ имеет единственную точку разрыва первого рода – она интегрируема на любом отрезке.

2) функция $f(x) := \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) := 0$ ограничена и имеет единственную точку разрыва второго рода, поэтому она интегрируема на любом отрезке.

Напомним, что функция f называется **кусочно-непрерывной** на $[a, b]$, если она имеет на отрезке не более, чем конечное количество точек разрыва первого рода. Из теоремы 6.9 получаем

Следствие 6.4. *Кусочно-непрерывные функции интегрируемы на* $[a, b]$.

Замечание 6.6. Класс кусочно-непрерывных функций шире класса непрерывных функций. К нему относятся, например, кусочно-постоянные (ступенчатые) функции, которые мы уже применяли. Этот класс удобен для конструирования функций с наперед заданными свойствами.

Замечание 6.7. Критерий интегрируемости функции можно дать только с помощью «меры Лебега». Говорят, что множество $N \subset \mathbb{R}$ имеет **лебегову меру нуль**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное или счетное множество интервалов, объединение которых, во-первых, содержит N и, во-вторых, сумма длин всех интервалов меньше ε (самостоятельно дайте определение суммы длин счетного множества интервалов).

Теорема 6.10 (***критерий интегрируемости***). *Ограниченная функция f интегрируема на $[a, b]$ только в том случае, когда множество ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль.*

Доказательство критерия выходит за рамки нашего курса. $\boxminus$

6.5. Интегральные неравенства

Теорема 6.11 (интегрирование неравенств). *Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $g(x) \leq f(x)$ на этом отрезке, то*

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Для любого разбиения P и любой ей подчиненной выборки Ξ для сумм Римана справедливо $S_{P,\Xi}(g) \leq S_{P,\Xi}(f)$. Откуда предельным переходом получаем утверждение теоремы. ■

Следствие 6.5. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Из теоремы 6.6 следует, что интеграл справа существует. Из двусторонней оценки

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

и теоремы 6.11 следует, что

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx. \ \blacksquare$$

При дополнительных условиях теорему 6.11 можно усилить:

Теорема 6.12. *Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, $g(x) \leq f(x)$ на этом отрезке и $g(x_0) < f(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, в которой обе функции* ***непрерывны****, то*

$$\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Надо доказать, что для неотрицательной интегрируемой функции $\varphi(x) := f(x) - g(x) \geq 0$, у которой $\varphi(x_0) > 0$, причем φ непрерывна в точке x_0, справедлива оценка: $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$.

В силу непрерывности в точке x_0, существует окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)/2 > 0$. Поэтому

$$\int_a^b \varphi(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varphi(x_0)}{2}dx = \frac{\varphi(x_0)}{2}2\delta > 0. \ \blacksquare$$

Замечание 6.8. Отказаться от условия непрерывности нельзя – функция φ может иметь "точечный всплеск", который не повлияет на интеграл. Придумайте пример такой функции.

Теорема 6.13 (о среднем). *Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, причем функция g сохраняет знак (т. е. $g(x) \geq 0$ или $g(x) \leq 0$ на $[a,b]$), то:*

1. *существует такое $\mu \in [m, M]$, где $m := \inf_{[a,b]} f(x) \leq \sup_{[a,b]} f(x) =: M$, что*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx;$$
2. *если функция f непрерывна на $[a,b]$, то существует такое $\xi \in [a,b]$, что*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$, тогда

$$m \leq f(x) \leq M \ \Rightarrow \ mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \ \Rightarrow$$

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и число μ можно взять любым. Если же $\int_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M \;\Leftrightarrow\; m \le \mu := \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

Если функция f непрерывна, то она принимает все промежуточные значения на $[m, M]$, поэтому существует такое $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$. ■

Замечание 6.9. Теорема 6.13 верна для случая $b < a$. Проверьте.

6.6. Формула Ньютона–Лейбница

Определение интеграла Римана по схеме Дарбу "неконструктивно". Схема Римана требует нахождения сложного предела интегральных сумм. Оба определения не указывают на связи определенного интеграла с другими понятиями математического анализа. Эти пробелы ликвидирует знаменитая формула Ньютона–Лейбница. Чтобы ее получить, рассмотрим специальную функцию, порожденную определенным интегралом.

Определение 6.6. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$; пусть $x_0 \in [a, b]$ – произвольная фиксированная точка. Функция*

$$F: \; [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{6.9}$$

*называется **функцией верхнего предела интегрирования**.*

Теорема 6.14. *Функция верхнего предела равномерно непрерывна на $[a, b]$ (следовательно, непрерывна на $[a, b]$).*

Доказательство. Сразу заметим, что мы поменяли обозначения переменной интегрирования, иначе возникнет путаница.

Из леммы 6.5 следует, что функция f ограничена: $\exists C > 0: \; \forall x \in [a, b] \hookrightarrow |f(x)| < C$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x_1, x_2 \in [a, b]: \; |x_2 - x_1| < \varepsilon / C \; \hookrightarrow$

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \le \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \right| < C|x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

(Мы учли случай $x_1 > x_2$, поэтому сохранили внешний модуль.) ■

Теорема 6.15 (о производной интеграла по верхнему пределу). *Пусть функция f **непрерывна** на отрезке $[a,b]$. Тогда функция F дифференцируема на $[a,b]$, причем*

$$F'(x) := f(x). \tag{6.10}$$

В концах отрезка производные $F'(a)$, $F'(b)$ понимаются как односторонние.

Доказательство. Пусть точка $x \in [a,b]$ фиксирована, а приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in [a,b]$. Воспользуемся аддитивностью интеграла и равенством (6.8), взяв $g(x) \equiv 1$:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x))}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi),$$

где ξ нестрого между x и $x+\Delta x$. В силу непрерывности f в точке x, получаем

$$\exists F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x). \;\blacksquare$$

Следствие 6.6 (***о первообразной подынтегральной функции***). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$. Тогда для любой фиксированной точки $x_0 \in [a,b]$ функция*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

является первообразной функции $f(x)$ и справедлива формула для неопределенного интеграла:

$$\int f(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C. \tag{6.11}$$

Доказательство вытекает из определений первообразной и неопределенного интеграла, теоремы о структуре множества всех первообразных и формулы (6.10). $\blacksquare$

Формула (8.1) является ключевой в математическом анализе: она устанавливает связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла, следовательно, устанавливает связь между понятиями производная и определенный интеграл.

Геометрический смысл формулы (6.10): на рис. 6.4 видно, что приращение ΔF равно приращению площади ΔS, которое состоит из площади прямоугольника $f(x) \cdot \Delta x$ и площади $S_{tr}(\Delta x)$ криволинейного треугольника, то есть

$$\Delta F = \Delta S = f(x) \cdot \Delta x + S_{tr}(\Delta x).$$

В силу непрерывности функции f, верно: $S_{tr}(\Delta x) \approx (1/2)\Delta x \cdot \Delta f = o(\Delta x)$.

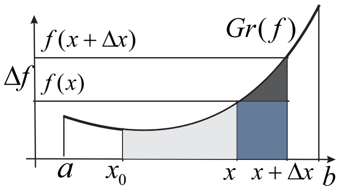

Рис. 6.4

Обсуждение 6.3. При фиксированном $x_0 \in [a, b]$ формула (6.9) определяет линейный оператор

$$\widehat{F}: \ R[a, b] \to C^0[a, b], \quad (\widehat{F}(f))(x) := F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

(см. замечание 6.3). Из теоремы 6.15 следует, что сужение этого оператора на пространство непрерывных функций действует в пространство гладких функций:

$$\widehat{F}\big|_{C^0}: \ C^0[a, b] \to C^1[a, b].$$

Можно сказать, что оператор $\widehat{F}$ "улучшает" свойства функций, на которые действует, в отличие от оператора дифференцирования.

Преформулировкой равенства (8.1) является

Теорема 6.16 (формула Ньютона–Лейбница).

Первая формулировка: пусть $\Phi(x)$ – произвольная первообразная непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\big|_a^b. \tag{6.12}$$

Вторая формулировка: пусть $\Phi(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, тогда

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'(x)dx. \tag{6.13}$$

Доказательство. Возьмем $x_0 = a$. Из формулы (8.1) следует, что существует единственная постоянная C, для которой

$$\int_a^x f(t)dt \equiv \Phi(x) + C, \quad x \in [a, b].$$

Чтобы найти C, возьмем $x = a$. Получим $C = -\Phi(a)$. Остается в тождестве подставить $x = b$. ■

Обсуждение 6.4. Формула Ньютона–Лейбница:

1) устанавливает связь между понятиями *определенного интеграла и неопределенного* (первообразной);

2) выражает глобальное свойство функции f *на отрезке* через значения ее первообразной только *на концах*;

3) есть мощный инструмент для *нахождения и исследования* определенного интеграла;

4) в формулировке (6.13) имеет многочисленные *обобщения*, которые будут нами рассмотрены позже.

Замечание 6.10. Если функция f кусочно-непрерывна, ее интегрируют с помощью формулы (6.12) на каждом отрезке, внутри которого она непрерывна. При этом ее доопределяют каждый раз в концах отрезков по непрерывности.

Замечание 6.11. Свойства функции f быть интегрируемой (то есть существование определенного интеграла) и иметь первообразную (т. е. существование неопределенного интеграла) являются *независимыми.* Функция может обладать одним из этих свойств, не обладая другим (приведите примеры). Непрерывность функции f является достаточным условием для того, чтобы существовал и определенный интеграл, и неопределенный. Откуда уже вытекает справедливость формулы Ньютона–Лейбница. Однако требование непрерывности подынтегральной функции не является необходимым.

Имеет место следующий критерий применимости формулы Ньютона–Лейбница:

Теорема 6.17. *Формула (6.12) верна только тогда, когда на отрезке $[a, b]$ функция f и интегрируема, и имеет на нем первообразную.*

Доказательство. Очевидно, если формула (6.12) верна, то f и интегрируема, и имеет первообразную. Докажем обратное утверждение: если функция Φ дифференцируема, а ее производная Φ' интегрируема, то формула (6.13) верна. Рассмотрим произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= (\Phi(x_1) - \Phi(a)) + (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \ldots + (\Phi(b) - \Phi(x_{n-1}) =$$
$$= \Phi'(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi'(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + \Phi'(\xi_n)\Delta x_n,$$

где $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Нами получена интегральная сумма Римана для функции Φ', т. е. $\Phi(b) - \Phi(a) = S_{P,\Xi}(\Phi')$, в которой (в силу интегрируемости функции Φ') можно перейти к пределу при стремлении мелкости $p(P) \to 0$. В результате получаем, что

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(\Phi') = \int_a^b \Phi'(x)dx.$$

Заметим, что все полученные интегральные суммы равны между собой и совпадают с интегралом. То есть попутно мы показали, что в условиях теоремы при любом разбиении P существует такая подчиненная выборка Ξ, для которой интегральная сумма Римана совпадает с интегралом. ■

6.7. Замена переменной и интегрирование по частям

Теорема 6.18. *Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и на концах принимает значения $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Пусть функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha,\beta])$. Тогда*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.14}$$

Доказательство. Поскольку функция f *непрерывна* на $\varphi([\alpha,\beta])$, у нее существует первообразная; например, функция

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

верхнего предела интегрирования: $F'(x)=f(x)$.

Применим к f формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

То есть функция $F(\varphi(t))$ – первообразная *непрерывной* функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta)). \ ■$$

Замечание 6.12.

1) Не обязательно $[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$; в общем случае $[a,b]\subset\varphi([\alpha,\beta])\subset Def(f)$.

2) Формулой (6.14) пользуются в обе стороны в зависимости от обстоятельств.

3) В отличие от формулы замены переменной в неопределенном интеграле, в правой части формулы (6.14) не нужно возвращаться к переменной

t, поскольку определенный интеграл – это число (и оно уже найдено), а неопределенный – функция.

4) Формулу (6.14) можно записать в терминах дифференциалов, используя инвариантность первого дифференциала:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\ d\varphi(t) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Теорема 6.19 (интегрирование по частям). *Если функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{6.15}$$

или в дифференциалах

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Доказательство следует из правила дифференцирования произведения функций и формулы Ньютона–Лейбница:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \int_a^b u(x)v'(x)dx =$$

$$= \int_a^b (u(x)v(x))'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx =$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \ \blacksquare$$

7. Приложения определённого интеграла

7.1. Площади плоских фигур

Определение 7.1. *Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geq 0$ – непрерывная неотрицательная функция.* ***Криволинейной трапецией*** *называют часть плоскости, расположенную между осью Ox и графиком функции f (рис. 7.1):*

$$T(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Аналогично определяется криволинейная трапеция, расположенная между осью Oy и графиком функции $x = g(y)$, где $g(y) \geq 0$.

Для произвольного разбиения P отрезка $[a,b]$ рассмотрим две **ступенчатые фигуры** – внутреннюю и объемлющую:

$$G_{*P}(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \{[x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]\}, \quad m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \ i = 1, \ldots, n;$$

$$G^*_P(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \{[x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]\}, \quad M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \ i = 1, \ldots, n;$$

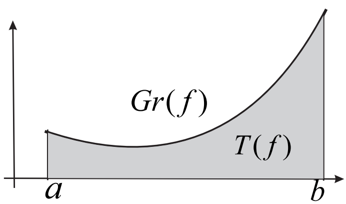

Рис. 7.1

$$G_{*P} \subset T \subset G_P^*.$$

Площади ступенчатых фигур совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу:

$$\mathrm{Sq}(G_{*P}(f)) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = S_{*P}(f),$$

$$\mathrm{Sq}(G_{*P}(f)) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S_P^*(f).$$

При стремлении мелкости разбиения к нулю суммы Дарбу непрерывной функции f, неограниченно сближаясь, стремятся к ее интегралу. Поэтому естественно дать следующее

Определение 7.2. ***Площадью криволинейной трапеции***, *порожденной графиком непрерывной неотрицательной функции f, называют неотрицательное число*

$$\mathrm{Sq}(T(f)) := \int_a^b f(x)dx. \tag{7.1}$$

Если криволинейная трапеция образована графиком неотрицательной функции $x = g(y)$, то ее площадь равна

$$\mathrm{Sq}(T(g)) = \int_c^d g(y)dy.$$

Рассмотрим ограниченные плоские множества Ω; в планиметрии их традиционно называют «фигурами». Точку фигуры называют **внутренней**, если она принадлежит фигуре вместе с некоторым открытым кругом, центром которого является. Примем, пока на веру, что некоторым из рассматриваемых ниже фигур (их называют **квадрируемыми**) можно сопоставить **площадь** – неотрицательное число, причем справедливы принципы:

1. **аддитивности**: *пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, причем фигуры Ω_i $(i = 1, 2)$ не имеют общих внутренних точек; если из трех названных фигур две квадрируемы, то и третья квадрируема, и верна формула:* $\mathrm{Sq}(\Omega) = \mathrm{Sq}(\Omega_1) + \mathrm{Sq}(\Omega_2)$*;*
2. **корректности**: *площадь фигуры не зависит от ее конечного разбиения на квадрируемые фигуры, которые попарно не имеют общих внутренних точек*;
3. **равновеликости**: *площади двух равных квадрируемых фигур равны* (две фигуры равны, если одна из них есть образ другой при некотором движении плоскости, рис. 7.2).

Рассмотрим фигуру

$$T(g, f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ g(x) \le y \le f(x)\},$$

заключенную между двумя графиками (рис. 7.3).

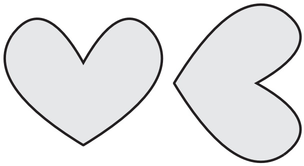

Рис. 7.2

Теорема 7.1. *Пусть $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, причем $g(x) \le f(x)$ на $[a, b]$. Тогда площадь фигуры $T(g, f)$ равна*

$$\mathrm{Sq}(T(g, f)) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \tag{7.2}$$

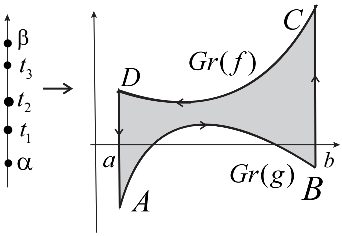

Рис. 7.3

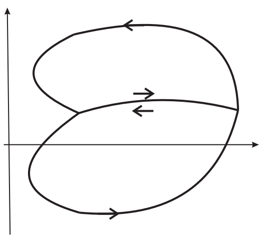

Рис. 7.4

Формула (7.2) позволяет, например, найти площадь фигуры Ω, ограниченной *замкнутой* кусочно-гладкой кривой γ, которая задана вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} :\ [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{r}(t) := (x(t), y(t))^T,\ (x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), y(\beta)),$$

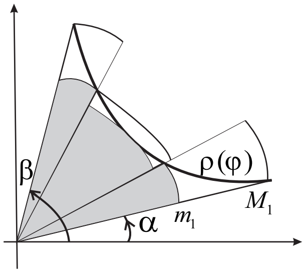

Рис. 7.5

где функции $x(t)$, $y(t)$ – кусочно-гладкие и $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$ в каждой точке гладкости. Пусть, по традиции, кривая ориентирована против часовой стрелки, т. е. в точке гладкости область Ω остается слева от касательной прямой $\boldsymbol{l}(u) = \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}'(t)u$, если смотреть по направлению вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ (рис. 7.3).

Теорема 7.2. *Пусть, описанная выше, фигура Ω представляет собой конечное объединение фигур, заключенных между двумя графиками. Тогда ее площадь*

$$\mathrm{Sq}(\Omega) = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\alpha^\beta (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt\right). \tag{7.3}$$

Замечание 7.1.

1) Последняя формула (7.3) полезна в том случае, когда фигура обладает симметрией, которая приводит к упрощению подынтегрального выражения.

2) Если функция f знакопеременная, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ трактуют как *ориентированную* площадь криволинейной трапеции.

Обсудим применение полярной системы координат.

Пусть в полярных координатах (ρ, φ) задана непрерывная кривая $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ $(\varphi \in [\alpha, \beta])$ – непрерывная неотрицательная функция. (По геометрической традиции функцию радиуса и ее значения обозначают, ради экономии записи, одной буквой.)

Определение 7.3. ***Криволинейным сектором*** *называют часть плоскости, расположенную между крайними лучами и кривой (рис. 7.5):*

$$\mathrm{Sec} := \{(\rho, \varphi) : \ \alpha \le \varphi \le \beta, \ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\}.$$

Для произвольного разбиения P отрезка $[\alpha, \beta]$ рассмотрим два **ступенчатых сектора** – внутренний и объемлющий:

$$G_{*P} = \bigcup_{i=1}^{n} \{(\rho, \varphi) : \ \varphi_{i-1} \le \varphi \le \varphi_i, \ 0 \le \rho \le m_i\},$$

$$\text{где } m_i = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} \rho(\varphi), \ i = 1, \ldots, n;$$

$$G_P^* = \bigcup_{i=1}^{n} \{(\rho, \varphi) : \ \varphi_{i-1} \le \varphi \le \varphi_i, \ 0 \le \rho \le M_i\},$$

$$\text{где } M_i = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} \rho(\varphi), \ i = 1, \ldots, n;$$

$$G_{*P} \subset \mathrm{Sec} \subset G_P^*.$$

Из школьного курса известна площадь сектора. Поэтому мы можем записать площади ступенчатых секторов, которые совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу функции $h(\varphi) = \rho^2(\varphi)$:

$$\mathrm{Sq}(G_{*P}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = S_{*P}\left(\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\right),$$

$$\mathrm{Sq}(G_P^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = S_P^*\left(\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\right).$$

Естественно дать следующее

Определение 7.4. ***Площадью криволинейного сектора****, порожденного непрерывной кривой $\rho = \rho(\varphi)$, называют число*

$$\mathrm{Sq}(\mathrm{Sec}) := \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \tag{7.4}$$

Формула (7.4) полезна при вычислении площади ограниченной **звездной фигуры**: фигуру Ω называют звездной относительно фиксированной точки C, если для любой ее точки $A \in \Omega$ отрезок $[CA] \subset \Omega$. Примеры: 1) выпуклая фигура является звездной относительно любой своей точки; 2) две пересекающиеся прямые звездны только относительно точки пересечения; 3) круг, проколотый в произвольной внутренней точке, не является звездным по отношению к любой точке (докажите). На рис. 7.6 и 7.7 изображены звездные фигуры: кардиоида $\rho = 1 - \cos\varphi$ и трехлепестковая роза $\rho = \sin 3\varphi$.

Обсуждение 7.1. Позже будет показано, что определения (7.1) и (7.4) – это частные случаи «жордановой меры» плоских фигур. Но уже сейчас полезно убедиться, что формулы (7.1) и (7.4) совпадают хотя бы для прямоугольника $OACB$ с вершинами $O(0.0)$, $A(a, 0)$, $C(a, b)$, $B(0, b)$ при $a, b > 0$.

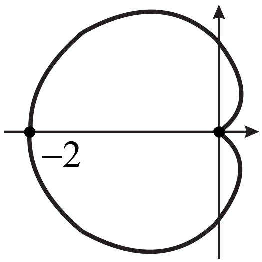

Рис. 7.6

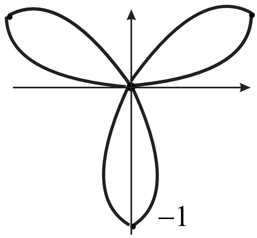

Рис. 7.7

7.2. Длина дуги кривой

Пусть дана гладкая дуга $\widetilde{AB}$, заданная вектор-функцией $\boldsymbol{r} \in C^1[a,b]$ с невырожденной производной $|\boldsymbol{r}'(t)| > 0$; пусть в координатах $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Ранее мы дали определение переменной длины дуги $s(t)$ и доказали теорему о производной длины по параметру:

$$s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} > 0.$$

Затем нами была доказана теорема о вычислении длины дуги $s(\widetilde{AB})$ через произвольную первообразную $F(t)$ производной $s'(t)$:

$$s(\widetilde{AB}) = F(b) - F(a).$$

Вспоминая формулу Ньютона–Лейбница, сразу получаем:

Теорема 7.3. *Длина гладкой дуги равна*

$$s(\widetilde{AB}) = \int_a^b s'(t)dt = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ dt. \tag{7.5}$$

Поскольку график гладкой функции f есть плоская кривая $\boldsymbol{r}(x) = (x, f(x))^T$, то справедливо

Следствие 7.1. *Длина дуги графика гладкой функции f равна*

$$s(\mathrm{Gr}\,(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Полезно знать формулу длины кривой, заданной в полярной системе координат (ρ, φ).

Следствие 7.2. *Пусть в полярной системе координат гладкая кривая задана непрерывно дифференцируемой функцией $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда ее длина вычисляется формулой*

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Замечание 7.2. Если кривая кусочно-гладкая, то находим длину каждой гладкой дуги и складываем результаты, опираясь на аддитивность длины.

7.3. Объем тела вращения

Определение 7.5. *Пусть $f \in C^0[a,b]$, $f(x) \geq 0$ – непрерывная неотрицательная функция.* ***Телом вращения вокруг*** *оси Ox, порожденным графиком $\mathrm{Gr}\,(f)$, называют подмножество*

$$R(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x), \ x \in [a,b]\}.$$

см. рис. 7.8.

Для произвольного разбиения P отрезка $[a,b]$ рассмотрим два **цилиндрических ступенчатых тела** – внутреннее и объемлющее:

$$G_{*P}(f) = \bigcup_{i=1}^n \{(x,y,z) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i, \ \sqrt{y^2+z^2} < m_i\},$$

$$\text{где } m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \ i = 1, \ldots, n;$$

$$G_P^*(f) = \bigcup_{i=1}^n \{(x,y,z) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i, \ \sqrt{y^2+z^2} < M_i\},$$

$$\text{где } M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \ i = 1, \ldots, n;$$

$$G_{*P} \subset R \subset G_P^*.$$

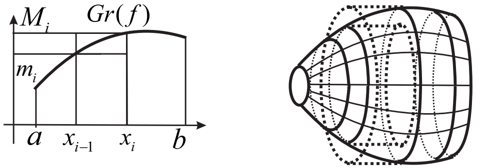

Рис. 7.8

Из школьного курса известен объем цилиндра. Поэтому мы можем записать объемы цилиндрических ступенчатых тел, которые совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу:

$$\mathrm{Sq}(G_{*P}(f)) = \pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (x_i - x_{i-1}) = S_{*P}(\pi f^2),$$

$$\mathrm{Sq}(G_{*P}(f)) = \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (x_i - x_{i-1}) = S_P^*(\pi f^2).$$

Естественно дать следующее

Определение 7.6. ***Объемом тела вращения***, *порожденного графиком непрерывной неотрицательной функции f, называют число*

$$Vol(R(f)) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

7.4. Площадь поверхности вращения

Определение 7.7. *Пусть $f \in C^1[a,b]$, $f(x) \geq 0$ – гладкая неотрицательная функция.* ***Поверхностью вращения вокруг*** *оси Ox, порожденной графиком $\mathrm{Gr}\,(f)$, называют подмножество пространства, заданное уравнением (рис. 7.9):*

$$SR(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{y^2+z^2} = f(x), \ x \in [a,b]\}.$$

В отличие от определения площади плоской фигуры и объема тела вращения, для определения площади поверхности вращения применим определение Римана, а не Дарбу. Для произвольного разбиения P отрезка $[a,b]$ построим ломанную, вписанную в график $\mathrm{Gr}\,(f)$ (рис. 7.9). Длина звена ломанной

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

При вращении звена ломанной образуется боковая поверхность усеченного конуса, а вся ломанная порождает **коническую ступенчатую поверхность** Con_P. Из школьного курса геометрии известно, что площадь поверхности усеченного конуса равна $\mathrm{Sq}(\mathrm{Con}) = \pi(R_1 + R_2)s$, где R_1, R_2 – радиусы

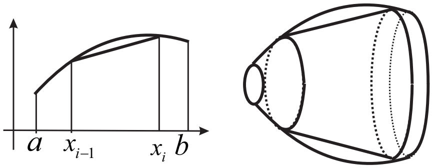

Рис. 7.9

оснований, s – длина образующей. Поэтому площадь конической ступенчатой поверхности Con_P равна

$$\mathrm{Sq}(\mathrm{Con}_P) = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta s_i. \tag{7.6}$$

Определение 7.8. ***Площадью поверхности вращения***, *порожденной графиком гладкой функции, называют предел*

$$\mathrm{Sq}(R(f)) = \lim_{p(P)\to 0} \mathrm{Sq}(\mathrm{Con}_P),$$

где $p(P)$ – мелкость разбиения P.

Теорема 7.4. *Площадь поверхности вращения, порожденная графиком гладкой неотрицательной функции $f(x) \geq 0$, существует и равна*

$$\mathrm{Sq}(R(f)) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{7.7}$$

Замечание 7.3. При нахождении объема тела вращения мы аппроксимировали его цилиндрами, при нахождении поверхности вращения аппроксимировали его же усеченными конусами. Вторая аппроксимация точнее первой. Можно показать, что для нахождения объемов уточнение ничего, кроме дополнительных вычислительных сложностей, не дает, а для нахождения площадей аппроксимация цилиндрами не пригодна.

Замечание 7.4. Если функция f кусочно-гладкая, то находим площадь поверхности вращения, порожденной каждой из гладких дуг графика, и складываем результаты, опираясь на аддитивность площади.

8. Криволинейные интегралы

8.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть: $\gamma = \widetilde{AB}$ – гладкая кривая, заданная вектор-функцией $\mathcal{LR}(s)$, зависящей от натурального параметра s, $s \in [0, S]$ $(S > 0)$; $A(0), B(S) \in \gamma$ – **начальная** и **конечная** точки кривой; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, содержащая кривую γ; $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, т. е. скалярное поле на Ω (рис. 8.1).

Определение 8.1. ***Криволинейным интегралом первого рода*** *(КИПР) по дуге $\gamma = \widetilde{AB}$ называется определенный интеграл*

$$\int\limits_{\gamma} f ds = \int\limits_{\widetilde{AB}} f ds := \int\limits_{0}^{S} f(\mathcal{LR}(s)) ds. \tag{8.1}$$

Первое и второе обозначения являются символическими.

Условие $S > 0$ является принципиальным в данном определении: КИПР – это определенный интеграл от сложной функции $f(\mathcal{LR}(s))$, у которого нижний предел интегрирования всегда меньше верхнего.

Для определения КИПР достаточно задать скалярное поле f только на кривой γ. Но в некоторых приложениях (например, в вариационных и топологических задачах) кривая подвергается «возмущениям». Поэтому естественно потребовать существования скалярного поля в некоторой области, содержащей данную кривую.

Физическая интерпретация. Если $f(\mathcal{LR}(s)) \equiv 1$, то $\int_\gamma ds$ – длина дуги γ. Если $f(\mathcal{LR}(s)) \geq 0$, то $\int_\gamma f ds$ – масса дуги с линейной плотностью

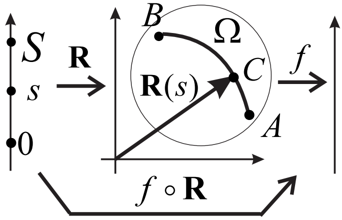

Рис. 8.1

$f(\mathcal{LR}(s))$. Если $f(\mathcal{LR}(s))$ – знакопеременная функция, то КИПР – электрический заряд дуги с линейной плотностью зарядов $f(\mathcal{LR}(s))$.

Теорема 8.1.

1. *КИПР НЕ зависит от направления обхода кривой:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f d\varsigma, \text{ где } \varsigma = S - s;$$

2. *КИПР* ***аддитивен****: если точка $C \in \gamma$ (рис. 8.1), то*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f ds + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f ds;$$

3. *КИПР по замкнутой кривой (т. е. $A = B$) НЕ зависит от выбора начальной точки и направления обхода кривой:*

$$\forall C \in \gamma \ \hookrightarrow \int\limits_{\overset{\frown}{ACA}} f ds = \int\limits_{\overset{\frown}{CAC}} f ds;$$

4. *КИПР линеен относительно подынтегральной функции:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall f, g \in C^0(\Omega) \ \hookrightarrow \int\limits_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int\limits_{\gamma} f ds + \beta \int\limits_{\gamma} g ds.$$

Доказательство п. 1:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f ds = \int\limits_0^S f(\mathcal{LR}(s)) ds = \left| \begin{array}{ll} s = S - \xi & ds = -d\xi \\ A(\xi_1 = S) & B(\xi_2 = 0) \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_S^0 f(\mathcal{LR}(S-\xi))(-d\xi) = -\int\limits_S^0 f(\mathcal{LR}(S-\xi)) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^S f(\mathcal{LR}(S-\xi))d\xi = \int\limits_0^S f(\mathcal{LR}_1(\xi))d\xi = \int\limits_{\widetilde{BA}} f d\xi,$$

где $\mathcal{LR}_1(\xi) = \mathcal{LR}(S-\xi)$ – натуральная параметризация кривой, задающая обход кривой от B к A. В доказательстве мы использовали требование к пределам интегрирования в определении КИПР – от нуля до S.

Доказательство п. 2. Пусть точке C отвечает значение параметра $S_1 \in (0, S)$. Воспользуемся аддитивностью определенного интеграла, а затем второй интеграл преобразуем к стандартному виду:

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f ds = \int\limits_0^{S_1} f ds + \int\limits_{S_1}^{S} f ds = \left| \begin{array}{cc} s = S_1 + \xi & ds = d\xi \\ C(\xi_1 = 0) & B(\xi_2 = S - S_1) \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{S_1} f(s) ds + \int\limits_0^{S-S_1} f(S_1 + \xi) d\xi = \int\limits_{\widetilde{AC}} f ds + \int\limits_{\widetilde{CB}} f ds.$$

Свойство 3 – тривиальное следствие п. 1 и 2 (докажите самостоятельно!). Свойство 4 – известное свойство определенного интеграла. ■

Замечание 8.1. *Свойство 1 означает, что КИПР берется НЕ по ориентированной дуге от точки A к точке B, а* по дуге без ориентации. *Поэтому предпочитают обозначать дугу одним символом γ.*

Применение натурального параметра в конкретных вычислениях явление исключительное. Поэтому полезно иметь формулу для вычисления КИПР в произвольной параметризации.

Теорема 8.2. *Пусть кривая γ задана в произвольной допустимой параметризации $\boldsymbol{r}(t)$, точки $A(t_1), B(t_2) \in \gamma$, причем $t_1 < t_2$ (т. е. параметризация согласована с данной натуральной). Тогда КИПР вычисляется по формуле*

$$\int_\gamma f ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\boldsymbol{r}(t)) |\boldsymbol{r}'(t)| dt. \qquad (8.2)$$

Если же $t_1 > t_2$, то следует поменять пределы интегрирования местами:

$$\int_\gamma f ds = \int_{t_2}^{t_1} f(\boldsymbol{r}(t)) |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

Доказательство. Допустимость параметризации означает, что вектор-функция $\boldsymbol{r} \in C^1$ и $|\boldsymbol{r}'(t)| > 0$. Тогда натуральный параметр выражается через данный: $s = s(t)$, где $|s'(t)| > 0$. Если $t_1 < t_2$, то $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$ (теорема о производной переменной длины дуги). Сделав замену в формуле (8.1), мы получим доказываемую формулу:

$$\int_0^S f(\mathcal{LR}(s)) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathcal{LR}(s(t))) |\boldsymbol{r}'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\boldsymbol{r}(t)) |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

Если же $t_1 > t_2$, то $s'(t) = -|\boldsymbol{r}'(t)|$. В этом случае

$$\int_0^S f(\mathcal{LR}(s))ds = -\int_{t_1}^{t_2} f(\mathcal{LR}(s(t)))|\boldsymbol{r}'(t)|dt = \int_{t_2}^{t_1} f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt. \blacksquare$$

Замечание 8.2. *В произвольной параметризации для КИПР сохраняется принцип: нижний предел интегрирования меньше верхнего.*

Если в координатах вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ и $s'(t) > 0$, тогда формула (8.2) приобретает вид

$$\int_\gamma f ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Если же кривая заданая явно, т. е. как график функции $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}dt.$$

Класс гладких кривых γ, для которого мы определили КИПР, не достаточно широк для применения КИПР. Поэтому мы даем

Определение 8.2. *Пусть: γ – кусочно-гладкая кривая, дуги γ_i $(i = 1, \ldots, k)$ которой суть гладкие кривые; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, содержащая кривую γ; $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. По определению полагаем*

$$\int_\gamma f(s)ds := \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f(s)ds.$$

КИПР по кусочно-гладкой кривой обладает всеми свойствами, сформулированными в теореме 8.1.

8.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть: $\gamma = \widetilde{AB}$ – гладкая *ориентированная* кривая, заданная вектор-функцией $\mathcal{LR}(s)$, зависящей от натурального параметра $s \in [0, S]$; ориентацию задает натуральный параметр s. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, содержащая кривую γ; $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{V}^3$ – непрерывное векторное поле (рис. 8.2). Поскольку параметризация натуральная, вектор $\mathcal{LR}'(s) = \vec{\tau}(s)$ есть *единичный* касательный вектор, направленный по ориентации кривой.

Определение 8.3. ***Криволинейным интегралом второго рода*** *(КИВР) по дуге $\widetilde{AB}$ называется определенный интеграл*

$$\int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = \int_0^S (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s)), d\mathcal{LR}(s)) := \int_0^S (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s)), \vec{\tau}(s))ds. \qquad (8.3)$$

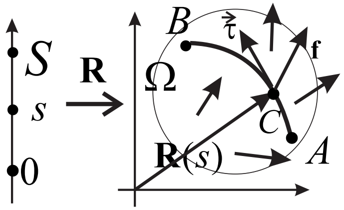

Рис. 8.2

Обсуждение 8.1.

1) Первое и второе обозначения является символическими, где $d\text{ß} := d\mathcal{LR}(s)$ по определению. Условие «нижний предел интегрирования меньше верхнего» является в определении КИВР принципиальным, как и в определении КИПР.

2) Подынтегральная функция есть "дважды сложная":

$$\mathbb{R} \ni s \;\to\; \mathcal{LR}(s) \;\to\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s)) \\ \vec{\tau}(s) \end{pmatrix} \;\to\; (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s)), \vec{\tau}(s)) \in \mathbb{R}.$$

3) КИВР по замкнутой кривой играет важную роль в теории функций комплексного переменного, дифференциальной геометрии и топологии, в теории поля и многочисленных физических приложениях. Его называют **циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{f}$ по контуру** γ и обозначают

$$\oint_{\gamma} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}).$$

4) Для определения КИВР достаточно задать векторное поле $\boldsymbol{f}$ только на кривой γ. Но в приложениях (например, в теории поля) кривая обычно подвергается возмущениям. Поэтому естественно потребовать существования векторного поля в некоторой области, содержащей данную кривую.

Физическая интерпретация. Если $\boldsymbol{f}$ – силовое поле, то КИВР – работа по перемещению материальной точки из A в B по кривой γ под воздействием силы $\boldsymbol{f}$.

Теорема 8.3.

1. *При изменении ориентации кривой КИВР меняет знак на противоположный:*
$$\int\limits_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = -\int\limits_{\widetilde{BA}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{l}), \text{ где } l = S - s;$$
2. *КИВР аддитивен: для любой точки $C \in \gamma$*
$$\int\limits_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = \int\limits_{\widetilde{AC}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) + \int\limits_{\widetilde{CB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß});$$

3. *КИВР по замкнутой кривой (т. е. $A = B$) НЕ зависит от выбора начальной точки при условии, что ориентация кривой не меняется. Другими словами: если для точек $C(s_1), D(s_2)$ справедливо $0 < s_1 < s_2 < S$, то*

$$\forall C \in \gamma \;\hookrightarrow\; \int\limits_{\widetilde{ACDA}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = \int\limits_{\widetilde{CDAC}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß});$$

4. *КИВР линеен относительно векторного поля: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in C^0(\Omega)$ справедливо*

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}, d\text{ß}) = \alpha \int\limits_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) + \beta \int\limits_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{g}, d\text{ß}).$$

Доказательство п. 1. При изменении ориентации кривой в каждой точке единичный касательный вектор $\vec{\tau}$ меняется на противоположный. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s)), d\mathcal{LR}(s)) = \left| \begin{array}{ll} s = S - l & ds = -dl \\ C(l_1 = S) & B(l_2 = 0) \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{S}^{0} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(S-l)), d\mathcal{LR}(S-l)) = -\int\limits_{0}^{S} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(S-l)), -\vec{\tau}(S-l))dl =$$

$$-\int\limits_{0}^{S} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}_1(l)), \vec{\tau}_1(l))dl = -\int\limits_{\widetilde{BA}} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}_1(l)), d\mathcal{LR}_1(l)),$$

где $\mathcal{LR}_1(l) = \mathcal{LR}(S-l)$ – натуральная параметризация кривой с противоположной ориентацией, а $\vec{\tau}_1(l) = \mathcal{LR}_1'(l)$.

Пункты 2–4 доказываются как в теореме 8.1. ■

Теперь мы обсудим различные способы обозначения КИВР в координатной записи и его вычисление в произвольной параметризации.

Пусть натуральная параметризация $\mathcal{LR}(s) = (x(s), y(s), z(s))^T$. Тогда единичный касательный вектор

$$\vec{\tau}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))^T = (\cos\alpha_1(s), \cos\alpha_2(s), \cos\alpha_3(s))^T,$$

где $\alpha_i(s)$ $(i = 1, 2, 3)$ – углы, образованные координатными осями с вектором $\vec{\tau}(s)$. Из определения дифференциала следует, что

$$d\mathcal{LR}(s) = (\cos\alpha_1(s), \cos\alpha_2(s), \cos\alpha_3(s))ds = (dx(s), dy(s), dz(s)).$$

Пусть векторное поле $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Тогда

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = \int\limits_{\widetilde{AB}} (P(s)\cos\alpha_1(s) + Q(s)\cos\alpha_2(s) + R(s)\cos\alpha_3(s))ds =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (Pdx + Qdy + Rdz),$$

где $P(s) = P(x(s), y(s), z(s))$ и аналогично определяются функции $Q(s)$, $R(s)$. Указанные способы записи КИВР носят геометрический (инвариантный) характер и удобны в теоретических исследованиях. Для конкретного вычисления КИВР применяют задание кривой и векторного поля в произвольной параметризации.

Теорема 8.4. *Пусть $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(t \in [t_1, t_2])$ – допустимая параметризация кривой γ. Тогда*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)), \boldsymbol{r}'(t))dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t))dt,$$

где $P(t) = P(x(t), y(t), z(t))$ и аналогично определяются функции $Q(t)$, $R(t)$.

Доказательство. Поскольку параметризация допустимая, то существует гладкая биекция $s = s(t)$, для которой $\mathcal{LR}(s(t)) \equiv \boldsymbol{r}(t)$. По правилу дифференцирования сложной функции $\mathcal{LR}'(s(t)) \cdot s'(t) = \boldsymbol{r}'(t)$. Поэтому, в силу правила замены переменной в определенном интеграле и линейности скалярного произведения, получаем:

$$\int\limits_{0}^{S} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s)), \mathcal{LR}'(s))ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s(t))), \mathcal{LR}'(s(t)))s'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{f}(\mathcal{LR}(s(t))), \mathcal{LR}'(s(t)) \cdot s'(t))dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)), \boldsymbol{r}'(t))dt. \blacksquare$$

Если кривая плоская и задана как график функции $y = \varphi(x)$, то получаем формулу

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(x) + Q(x)\varphi'(x))dx.$$

Класс гладких кривых γ, для которого мы определили КИВР, не достаточно широк для применения КИВР. Поэтому мы даем

Определение 8.4. *Пусть: γ – кусочно-гладкая кривая, дуги $\gamma_i = \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ которой суть гладкие кривые; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, содержащая кривую γ; $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{V}^3$ – непрерывное векторное поле. По определению полагаем*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{A_0A_k}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}) := \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}} (\boldsymbol{f}, d\text{ß}).$$

КИВР по кусочно-гладкой кривой обладает всеми свойствами, сформулированными в теореме 8.3.

9. Несобственный интеграл

9.1. Определение несобственного интеграла

Определение 9.1. *Пусть функция $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $b \le +\infty$, интегрируема на любом подотрезке $[a, b'] \subset [a, b]$.* ***Несобственным интегралом*** *называют* ***конечный*** *предел*

$$\int_a^{\to b} f(x)dx := \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Обсудим данное определение подробнее.

1) Функция $F(b') := \int_a^{b'} f(x)dx$ есть функция предела интегрирования. Она непрерывна в силу теоремы 6.14. Следовательно, существование НИ есть существование конечного одностороннего предела непрерывной функции F. В общей постановке мы уже обсуждали эту проблему. Сейчас мы сосредоточимся на специфике именно функции предела интегрирования.

2) Если условие (9.1) выполнено, функцию f называют **несобственно интегрируемой** на $[a, b)$. Еще говорят: НИ с **особенностью в точке** b. Аналогично определяются несобственные интегралы с особым левым концом. То есть НИ – это предел определенного интеграла Римана по верхнему (или нижнему) пределу интегрирования. Стрелку в открытом конце мы будем ставить только в том случае, когда хотим указать, где у НИ особенность. Если несобственный интеграл существует, то говорят, что **несобственный интеграл сходится**, в противном случае – **расходится**. Интеграл Римана (в противовес НИ) иногда называют **собственным** интегралом.

Примеры 9.1. При $\varepsilon > 0$ сходятся НИ:

$$\int_{0\leftarrow}^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \lim_{a' \to +0} \int_{a'}^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{a' \to +0} (1 - (a')^{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{9.2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{b'\to+\infty} \left(\frac{1}{(b')^\varepsilon} - 1\right) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{9.3}$$

Сравним понятие интеграла Римана и несобственного интеграла.

При $b = +\infty$ интеграл Римана не определен на $[a, b]$, в то время как несобственный интеграл *может* существовать. Если $b \in \mathbb{R}$, но функция f неограничена на $[a, b)$, то интеграл Римана на $[a, b]$ не существует, в то время как несобственный интеграл может существовать. Если же функция f *ограничена* на конечном полуотрезке $[a, b)$ и интегрируема на любом подотрезке $[a, b']$, то она интегрируема и на $[a, b]$ (п. 4 теоремы 6.3), причем интеграл Римана и несобственный интеграл равны (это вытекает из теоремы 6.14 о непрерывности интеграла по верхнему пределу). Следовательно, во-первых, понятие несобственного интеграла шире понятия интеграла Римана, во-вторых, "особенность" точки b проявляется в *неограниченности* или промежутка интегрирования (т. е. $b = \infty$), или функции f в окрестности точки b.

Случаи бесконечного и конечного концов интегрирования взаимозаменяемы; в примерах 9.1 это продемонстрировано с помощью замены переменной $t = 1/x$. Явное нахождение НИ, приведенное в примерах 9.1, является редким исключением. Основной проблемой теории несобственных интегралов является **проблема сходимости**. Если НИ

$$\int_a^{\to b} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^{\to d} g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно, мы будем применять запись

$$\int_a^{\to b} f(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_c^{\to d} g(x)dx.$$

Геометрическая интерпретация. Если функция f неотрицательна, НИ – это площадь *неограниченной* по вертикали или по горизонтали криволинейной трапеции (рис. 1 слева и в центре). Если же функция f знакопеременная, НИ – это *ориентированная* площадь неограниченной криволинейной трапеции (рис. 1 справа).

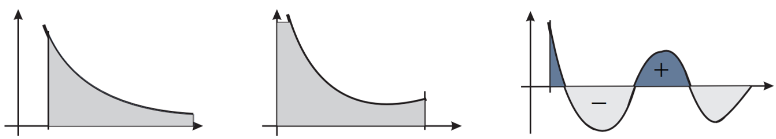

Рис. 9.1

9.2. Основные свойства несобственного интеграла

В этом пункте подразумевается, что функции $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ (где $b \leq +\infty$) интегрируемы на любом подотрезке $[a, b'] \subset [a, b]$.

Теорема 9.1 (линейность несобственного интеграла).

1. *Формула*
$$\int_a^{\to b} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{\to b} f(x)dx + \beta \int_a^{\to b} g(x)dx \qquad (9.4)$$
справедлива в предположении, что ***оба*** *НИ в правой части равенства сходятся.*
2. *Если один из интегралов в правой части сходится, а другой расходится, то интеграл в левой части расходится.*
3. *Если оба интеграла справа расходятся, то сходимость интеграла слева требует дополнительного исследования.*

Доказательство теоремы 9.1 следует из линейности собственного интеграла и линейности предела функции.

Следствие 9.1 (принцип отбрасывания слагаемого). *Если НИ $\int_a^{\to b} g(x)dx$ сходится, то*
$$\int_a^{\to b} (f(x) + g(x))dx \overset{cx}{\sim} \int_a^{\to b} f(x)dx,$$
т. е. при исследовании сходимости НИ можно игнорировать слагаемое, дающее заведомо сходящийся НИ.

Теорема 9.2 (аддитивность НИ). *Для любого $c \in (a, b)$ справедлива формула*
$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{\to b} f(x)dx \qquad (9.5)$$
в предположении, что НИ слева или справа сходится. Если же один из НИ расходится, то и второй расходится, и равенство (9.5) бессмысленно.

Следствие 9.2 (принцип локализации). *Для любого $c \in (a, b)$ справедливо:*
$$\int_a^{\to b} f(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_c^{\to b} f(x)dx.$$

Замечание 9.1. Смысл принципа локализации в том, что сходимость НИ определяется поведением подынтегральной функции в любой окрестности особой точки, не содержащей других особенностей.

Теорема 9.3 (формула Ньютона–Лейбница для НИ). *Если функция f непрерывна на $[a,b)$ и Φ – ее произвольная первообразная на $[a,b)$, то*

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{b'\to b-0} \Phi(b') - \Phi(a)$$

и сходимость НИ равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{b'\to b-0} \Phi(b')$.

Теорема 9.4 (интегрирование по частям). *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a,b)$. Тогда*

$$\int_a^{\to b} u(x)v'(x)dx = \lim_{b'\to b-0} \left(u(x)v(x)\Big|_a^{b'} \right) - \int_a^{\to b} u'(x)v(x)dx,$$

причем из существования любых двух пределов следует существование третьего и выполняется равенство.

Теорема 9.5 (замена переменной в НИ). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b)$, пусть функция φ строго монотонна и непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$. Тогда*

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_\alpha^{\to \beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{9.6}$$

В равенстве (9.6) если один из интегралов сходится, то сходится и другой, и их значения совпадают (т. е. формулу можно применять в обе стороны). Может оказаться, что один из двух интегралов в (9.6) собственный.

Доказательство. Для каждого $t\in[\alpha,\beta)$ справедлива формула (6.14) замены переменной в определенном интеграле. Поэтому

$$\int_a^{\varphi(t)} f(\tau)d\tau \equiv \int_\alpha^t f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau, \text{ где } t\in[\alpha,\beta). \tag{9.7}$$

Интеграл слева есть сложная функция $t\to\varphi(t)\to\int_a^\varphi f d\tau$. При $t\to\beta-0$ выполняется $\varphi(t)\to b-0$. Из теоремы о пределе сложной функции получаем существование предела слева при $t\to\beta-0$; значит, существует предел справа и равенство (9.6) справедливо при чтении слева направо.

Из монотонности функции φ следует существование обратной функции $t=\varphi^{-1}(x)$, у которой $\varphi^{-1}(a)=\alpha$, а $\varphi^{-1}(x)\to\beta-0$ при $x\to b-0$. Поэтому, в силу тождества (9.7), для $x\in[a,b)$ справедливо тождество

$$\int_a^x f(\tau)d\tau \equiv \int_\alpha^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau.$$

По теореме о пределе сложной функции получаем справедливость равенства (9.6) при чтении справа налево. ■

Будем впредь до конца параграфа обозначать через $(b-\delta, b)$ левую проколотую δ-окрестность точки b, а через $[b-\delta, b)$ левую проколотую δ-окрестность точки b с левым краем (полуинтервал) даже в случае $b=+\infty$.

Теорема 9.6 (критерий Коши сходимости НИ). *НИ* $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta > 0 : \forall b', b'' \in (b-\delta, b) \hookrightarrow \left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство сводится к применению критерия Коши к функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Обычно критерий Коши применяют для доказательства расходимости НИ:

Следствие 9.3 (критерий Коши расходимости НИ).

$$\int_a^{\to b} f(x)dx \quad \textit{расходится} \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \hookrightarrow \exists b', b'' \in (b-\delta, b) : \left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Если оба конца промежутка интегрирования являются особыми точками, и внутри промежутка имеется *конечное* количество особых точек $c_i \in (a, b)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, то между точками $c_0 := a$ и c_1, точками c_1 и c_2 и т. д. до точек c_{n-1} и $c_n := b$ выбирают произвольные точки $d_i \in (c_{i-1}, c_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и полагают

Определение 9.2.

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)dx := \int_{c_0 \leftarrow}^{d_1} f(x)dx + \int_{d_1}^{\to c_1} f(x)dx + \ldots + \int_{d_n}^{\to c_n} f(x)dx. \tag{9.8}$$

НИ считается сходящимся, если все *НИ в правой части равенства (9.8) сходящиеся.*

Корректность определения 9.2 вытекает из следующей леммы:

Лемма 9.1. *Если в (9.8) все НИ сходящиеся, то сумма не зависит от выбора точек d_i.*

Доказательство немедленно следует из аддитивности НИ (теорема 9.2).

9.3. Несобственные интегралы от знакопостоянных функций

Мы говорим о НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ от **знакопостоянной** функции, если $f(x) \ge 0$ ($\le$) в некоторой проколотой левой полуокрестности точки $b \le +\infty$. Если же функция f не сохраняет знак *ни в какой* проколотой левой полуокрестности точки b, то имеем НИ от **знакопеременной** функции. Причины сходимости НИ от знакопостоянных функций и знакопеременных функций разные, поэтому мы отдельно рассмотрим сходимость НИ в обоих случаях.

Теорема 9.7 (критерий сходимости НИ от знакопостоянной функци)**.** *Пусть функция $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $b \le +\infty$, интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Пусть функция f неотрицательна в некоторой левой проколотой полуокрестности точки b (т. е. $\forall x \in (b-\delta, b) \subset [a, b) \hookrightarrow f(x) \ge 0$). Тогда НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится только в том случае, когда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a, b)$.*

Доказательство. На интервале $(b-\delta, b)$ функция F возрастает (возможно, нестрого). В силу определения (9.1), сходимость данного НИ равносильна существованию **конечного** предела неубывающей функции F. Последнее, в силу теоремы о пределе монотонной функции, равносильно ограниченности функции F. ■

Обсуждение 9.1. Сам по себе критерий мало полезен, поскольку проверка ограниченности функции F означает прямое использование определения (9.1). (Лемма 9.2, замечание 9.2 и задача **??**, приведенные в конце пункта, показывают, сколь трудно охарактеризовать сходимость НИ от знакопостоянной функции f в терминах самой функции f.) Однако теорему 9.7 удобно применять при доказательстве признаков и критерия сходимости, основанных на идее **сравнения сходимостей**. Если ориентироваться на примеры (9.2) и (9.3) и задачу **??**, то естественно предположить в качестве рабочей гипотезы, что достаточные условия сходимости НИ от знакоположительной функции f таковы: 1) в конечной особой точке функция f "убегает в бесконечность не очень быстро"; 2) в бесконечной особой точке функция f "убывает к нулю достаточно быстро". (Взятое в кавычки ни в коем случае не является математическими утверждениями!)

Теорема 9.8 (признаки сравнения НИ)**.** *Пусть для функций f и g выполнены условия теоремы 9.7. Тогда:*

1. *Если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to b-0$, то из сходимости $\int_a^{\to b} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{\to b} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{\to b} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{\to b} g(x)dx$.*
2. *Если $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \to b-0$, то $\int_a^{\to b} g(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_a^{\to b} f(x)dx$.*

3. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде произведения $f(x) = h(x)g(x)$, причем существует конечный $\lim\limits_{x\to b-0} h(x) = C > 0$. Тогда*

$$\int_a^{\to b} h(x)g(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_a^{\to b} g(x)dx.$$

То есть, при исследовании сходимости НИ можно игнорировать знакопостоянный множитель, имеющий в особой точке конечный ненулевой предел.

Доказательство п. 1. В силу принципа локализации (следствие 9.2) достаточно исследовать НИ на промежутке $[b-\delta, b)$, где функции f и g неотрицательны. Из условия следует, что на $[b-\delta, b)$ справедлива оценка $0 \le f(x) \le C_1 g(x)$, где постоянная $C_1 > 0$. Из критерия 9.7 следует, что $\forall x \in [b-\delta, b)$ верно $\int_{b-\delta}^{x} g(t)dt < C_2$, где постоянная $C_2 > 0$. Поэтому

$$0 \le F(x) = \int_{b-\delta}^{x} f(t)dt \le C_1 \int_{b-\delta}^{x} g(t)dt < C_1 C_2.$$

Опять же в силу критерия 9.7, ограниченность функции F влечет сходимость НИ.

Утверждение п. 2 сразу следуют из симметричности отношения O^* и п. 1.

Из условия п. 3 следует выполнение условия п. 2 (докажите). Что доказывает утверждение п. 3. ■

Часто функцию сравнения берут из двупараметрического семейства $g(x;\alpha,\beta) = 1/(x^\alpha |\ln x|^\beta)$.

а) НИ $\int_2^{+\infty} dx/(x^\alpha(\ln x)^\beta)$ сходится только при условиях (см. рис. 2, слева): $\{\alpha > 1,\ \beta \in \mathbb{R}\} \cup \{\alpha = 1,\ \beta > 1\}$.

б) НИ $\int_{0\leftarrow}^{1/2} dx/(x^\alpha|\ln x|^\beta)$ сходится только при условиях (см. рис. 2, справа): $\{\alpha < 1,\ \beta \in \mathbb{R}\} \cup \{\alpha = 1,\ \beta > 1\}$.

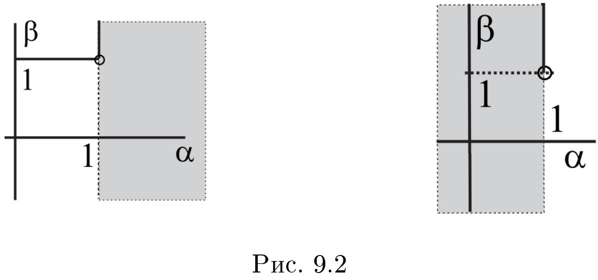

Рис. 9.2

Очевидный достаточный признак расходимости НИ:

Лемма 9.2. *Пусть функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом отрезке $[a, b']$. Если существуют такие числа $c \geq a$ и $C > 0$, что $f(x) \geq C$ для всех $x \geq c$, то НИ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.*

Замечание 9.2. Предельное условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ НЕ является ни достаточным (см. п. 1 теоремы 9.8), ни необходимым условием сходимости НИ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от знакопостоянной функции!

9.4. Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Прежде всего заметим, что всякий НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ от знакопеременной функции порождает НИ $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ от знакопостоянной функции. Между сходимостями указанных НИ существует такая связь:

Теорема 9.9. *Пусть функция f интегрируема на любом отрезке $[a, b']$, где $a < b' < b$. Если НИ $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ сходится, то НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ также сходится. Обратное утверждение в общем случае несправедливо.*

Доказательство. Во-первых, в силу теоремы 6.6, на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ существует интеграл $\int_a^{b'} |f(x)|dx$. Во-вторых, в силу критерия Коши (теорема 9.6), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $b', b'' \in (b - \delta, b)$ выполняется $|\int_{b'}^{b''} |f(x)|dx| < \varepsilon$. Поэтому

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{b'}^{b''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

Что, опять же в силу критерия Коши, влечет сходимость НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$.

В качестве доказательства несправедливости обратного утверждения ниже будет приведен контрпример. ■

Запишем логические связи между сходимостями.

1. Собственные интегралы:

$$\text{существование } \int_a^b f(x)dx \;\Rightarrow\; \text{существование } \int_a^b |f(x)|dx.$$

2. Несобственные интегралы:

$$\text{сходимость } \int_a^{\to b} |f(x)|dx \;\Rightarrow\; \text{сходимость } \int_a^{\to b} f(x)dx.$$

Заметим, что *логика оказалась противоположной.*

Утверждение теоремы 9.9 мотивирует введение следующих понятий:

Определение 9.3 (классификация НИ от знакопеременных функций).

1. *Если НИ $\int_a^{\to b}|f(x)|dx$ сходится, то НИ $\int_a^{\to b}f(x)dx$ (который тем более сходится) называется **абсолютно сходящимся**.*

2. *Если НИ $\int_a^{\to b}|f(x)|dx$ расходится, но НИ $\int_a^{\to b}f(x)dx$ сходится, то последний называется **условно сходящимся**.*

Итак, для НИ от знакопеременной функции возможны три взаимоисключающие ситуации: 1) абсолютная сходимость, 2) условная сходимость, 3) расходимость. (Для НИ от знакопостоянной функции возможны две ситуации. Какие?) Докажем полезное утверждение

Лемма 9.3. 1. *Если несобственные интегралы $\int_a^{\to b}f(x)dx$ и $\int_a^{\to b}g(x)dx$ сходятся абсолютно, то НИ $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))dx$ тоже сходится абсолютно.*

2. *Если НИ $\int_a^{\to b}f(x)dx$ сходится абсолютно, а НИ $\int_a^{\to b}g(x)dx$ сходится условно, то НИ $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))dx$ сходится условно.*

3. *Если несобственные интегралы $\int_a^{\to b}f(x)dx$ и $\int_a^{\to b}g(x)dx$ сходятся условно, то $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))dx$ сходится. Характер сходимости (абсолютный или условный) нуждается в дополнительном исследовании.*

Доказательство. Первое утверждение следует из неравенства треугольника $|f+g|\le|f|+|g|$ и признака сравнения НИ от знакоопределенных функций (теорема 9.8). Во втором пункте интеграл от суммы сходится (в силу линейности НИ, теорема 9.1). Если допустить, что он сходится абсолютно, то тогда (согласно п. 1) НИ

$$\int_a^{\to b}g(x)dx=\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))dx-\int_a^{\to b}f(x)dx$$

тоже сходится абсолютно, что противоречит условию. Для доказательства п. 3 достаточно привести примеры. ■

Исследуя абсолютную сходимость НИ, мы имеем дело со знакопостоянной функцией и применяем признаки сравнения. Для исследования сходимости от знакопеременной функции нужны более тонкие рассуждения. Оказывается, “достаточно быстрое” изменение знака подынтегральной функции (**осцилляция**) может компенсировать рост модуля функции (**амплитуда**) и обеспечивать сходимость НИ. Ниже приведены примеры сходящихся и расходящихся НИ, которые иллюстрируют “непростые взаимоотношения” между амплитудой и осцилляцией функции (доказательства будут даны ниже).

Примеры 9.2. Сходящиеся НИ:

$$(1.1)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}},\quad (1.2)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{x}},\quad (1.3)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{x}+\cos x},$$

$$(1.4)\ \int_1^{+\infty} \sin x^{3/2}\ dx,\quad (1.5)\ \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin x^2\ dx.$$

Расходящиеся НИ:

$$(2.1)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}},\quad (2.2)\ \int_1^{+\infty} \sin x\ dx,\quad (2.3)\ \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|\ dx}{\sqrt{x}},$$

$$(2.4)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{x}-\sin x},\quad (2.5)\ \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin x^{3/2}\ dx.$$

Основным инструментом доказательство сходимости НИ от знакопеременной функции является

Теорема 9.10 (признак Дирихле). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b)$ $(b \le +\infty)$, а функция g непрерывно дифференцируема на $[a,b)$. Пусть*

1. *первообразная $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – ограниченная (постоянной $C > 0$) на $[a,b)$ функция,*
2. *функция g стремится к нулю нестрого монотонно (для определенности, убывая):*

$$g \downarrow 0 \ \textit{при}\ x \to b-0 \ \Leftrightarrow\ g'(x) \le 0 \ \textit{на}\ (a,b) \ \wedge \lim_{x\to b-0} g(x) = 0.$$

Тогда НИ $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Интегрируя по частям на $[a,b']$ $(a < b' < b)$, получаем

$$\int_a^{b'} f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} F(x)g'(x)dx. \tag{9.9}$$

Из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{b'\to b-0} F(b')g(b') = 0$. Исследуем абсолютную сходимость интеграла в правой части равенства:

$$\int_a^{b'} |F(x)g'(x)|dx \le C\int_a^{b'} |g'(x)|dx =$$

$$= -C\int_a^{b'} g'(x)dx = C(g(a)-g(b')) \le Cg(a).$$

(Мы воспользовались знакопостоянством функции $g'(x) \le 0$ и знакопостоянством функции $g(x) \ge 0$!) Теперь из критерия 9.7 следует сходимость НИ $\int_a^{\to b} |F(x)g'(x)|dx$, а из теоремы 9.9 абсолютная сходимость НИ $\int_a^{\to b} F(x)g'(x)dx$. Последняя влечет за собой сходимость НИ $\int_a^{\to b} F(x)g'(x)dx$. По определению, это означает существование конечного предела

$$\exists \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} F(x)g'(x)dx = \int_a^{\to b} F(x)g'(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Значит, в равенстве (9.9) в правой части мы получаем конечный предел при $b' \to b - 0$. Что доказывает теорему. ■

Из признака Дирихле вытекает

Теорема 9.11 (признак Абеля). *Пусть на $[a, b)$ $(b \le +\infty)$ функция f непрерывна, а функция g непрерывно дифференцируема. Пусть:*

1. *НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится;*
2. *на (a, b) функция $g(x)$ ограничена и нестрого монотонна (т. е. ее производная $g'(x)$ не меняет знак).*

Тогда НИ $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Функция f имеет на $[a, b)$ первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Поскольку существует *конечный* предел $\lim_{x\to b-0} F(x) = \int_a^{\to b} f(x)dx \in \mathbb{R}$, функция F на $[a, b)$ ограничена. С другой стороны, в силу монотонности и ограниченности, функция g имеет конечный предел $\lim_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Значит, функция $\widetilde{g}(x) := g(x) - c$ непрерывно дифференцируема, монотонна и $\widetilde{g} \to 0$ при $x \to b-0$. Функции f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле. Поэтому НИ $\int_a^{\to b} f(x)\widetilde{g}(x)dx$ сходится. Следовательно НИ $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx = \int_a^{\to b} f(x)\widetilde{g}(x)dx + c\int_a^{\to b} f(x)dx$ тоже сходится. ■

Замечание 9.3. Образно говоря, в признаке Дирихле осциллирующая функция f (типа синус) и стремящаяся к нулю функция g при перемножении "помогают друг другу": функция $f(x)g(x)$ и осциллирует, и имеет убывающую амплитуду – этого достаточно, чтобы *ориентированная* площадь неограниченной криволинейной трапеции имела конечный предел (рис. 1). В признаке Абеля НИ от функции f сходится, а функция-сомножитель g "не мешает" функции f.

Обоснуем сходимость (расходимость) примеров 9.2. Интегралы (1.1) и (1.2) от знакопостоянных функций сходятся и расходятся (соответственно) в силу задачи **??**.a. Интеграл (1.2) от знакопеременной функции сходится в силу теоремы Дирихле ($f(x) = \sin x$, $g(x) = x^{-1/2}$). Расходимость интеграла (2.2) очевидна, поскольку первообразная $\int_1^x \sin t\ dt = \cos 1 - \cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Интеграл (2.3) от знакопостоянной функции расходится в силу оценки снизу:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|\ dx}{\sqrt{x}} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x\ dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{x}}\right),$$

причем первый интеграл в скобках расходится, а второй – сходится. Следовательно, интеграл (1.2) сходится условно. Значит, нами дан контрпример к теореме 9.9.

В интегралах (1.3) и (1.4) применим разложение по формуле Маклорена по степеням $1/x^\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$. При $x \to +\infty$ верно:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ \Rightarrow$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{x}} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x\ dx}{2\sqrt{x}} + \int\limits_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx,$$

где все три интеграла сходятся (обоснуйте). Аналогичные выкладки приводят интеграл (1.4) к виду

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x\ dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx,$$

где первый и третий интегралы сходятся, а второй – расходится.

Замена $t := x^{3/2}$ позволяет доказать сходимость интеграла (1.4) и расходимость интеграла (2.5). Поскольку

$$\int_1^{+\infty} \sin x^{3/2} dx = \frac{2}{3}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t\ dt}{t^{1/3}},$$

интеграл (1.4) сходится в силу теоремы Дирихле. Самостоятельно обоснуйте расходимость интеграла (2.5) и сходимость интеграла (1.5). Обратите внимание, что в интегралах (1.5) и (2.5) подынтегральные функции на бесконечности неограниченные, однако характер сходимости различный (чтобы понять причину, сравните расстояния между соседними нулями данных функций).

В некоторых случаях осуществить замену переменной интегрирования сложно. Проще функцию h, "претендующую" на роль функции f в теореме Дирихле, умножить и разделить на ее производную h' (естественно, если она не обращается в ноль); затем взять $f(x) := h(x)h'(x)$, первообразная которой находится без труда.

Пример 9.1. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^{3/2}+x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^{3/2}+x)\cdot(\frac{3}{2}x^{1/2}+1)}{\frac{3}{2}x^{1/2}+1}dx$$

сходится в силу теоремы Дирихле:

$$f(x) = \sin(x^{3/2} + x) \cdot (\tfrac{3}{2}x^{1/2} + 1), \quad g(x) = (\tfrac{3}{2}x^{1/2} + 1)^{-1}$$

(завершите обоснование).

Если подынтегральная функция зависит от параметра α и требуется исследовать сходимость НИ в зависимости от этого параметра, полное исследование сходимости состоит из четырех этапов:

1. Игнорируя осциллирующий сомножитель, отгадывают такой промежуток I_1, что при $\alpha \in I_1$ НИ сходится абсолютно (обоснование методом сравнения).
2. Выделяя осциллирующий сомножитель и монотонно убывающий сомножитель, отгадывают такой промежуток I_2, что при $\alpha \in I_2$ НИ сходится (обоснование с помощью теоремы Дирихле или теоремы Абеля). Обязательно $I_1 \subset I_2$.
3. Доказывают, что при $\alpha \in I_2 \setminus I_1$ отсутствует абсолютная сходимость (методом сравнения снизу).
4. Доказывают, что при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_2$ отсутствует сходимость (с помощью отрицания критерия Коши).

Ответ записывают так: *при $\alpha \in I_1$ – абсолютная сходимость, при $\alpha \in I_2 \setminus I_1$ – условная сходимость, при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_2$ – НИ расходится.* Сложность полного исследования прежде всего в том, что ответ *отгадывается*. А уже потом доказывается верность гипотезы.

Пример 9.2. Исследовать при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)^{-\alpha} \sin x \, dx. \tag{9.10}$$

Поскольку при $x \to +\infty$ справедливо

$$(\ln(x+1) - \ln x)^{-\alpha} = \ln^{-\alpha}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^{\alpha} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-\alpha},$$

то мы утверждаем, что при *фиксированном* $\alpha < -1$ интеграл (9.10) сходится абсолютно. В самом деле, если $A > 0$ достаточно велико, то при $x > A$ верно неравенство

$$(\ln(x+1) - \ln x)^{-\alpha} < x^{\alpha} 2^{-\alpha},$$

поэтому

$$\int_A^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)^{-\alpha} |\sin x| \, dx \le 2^{-\alpha} \int_A^{+\infty} x^{\alpha} dx < +\infty.$$

Остается сослаться на принцип локализации. Заметим, что мы пока не утверждаем, что при других значениях параметра интеграл (9.10) НЕ сходится абсолютно.

Вторая гипотеза: при $\alpha < 0$ интеграл (9.10) сходится. Достаточно применить теорему Дирихле, взяв $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \ln^{-\alpha}(1 + 1/x)$ (проверьте, что условия теоремы выполнены).

Теперь мы покажем, что при $\alpha \in [-1, 0)$ интеграл (9.10) абсолютно не сходится. При тех же предположениях относительно постоянной $A > 0$ получаем:

$$\int_A^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)^{-\alpha} |\sin x| \, dx \geq \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x} \right),$$

где первый интеграл в скобках расходится, а второй сходится.

Последняя гипотеза: при $\alpha \geq 0$ интеграл (9.10) расходиться. Чтобы воспользоваться критерием Коши расходимости НИ, для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{2\pi n + \pi/4}^{2\pi n + \pi/2} (\ln(x+1) - \ln x)^{-\alpha} \sin x \, dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{2\pi n + \pi/4}^{2\pi n + \pi/2} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Только теперь мы можем утверждать, что при $\alpha < -1$ интеграл (9.10) сходится абсолютно, при $\alpha \in [-1, 0)$ он сходится условно, а при $\alpha \geq 0$ расходится.

10. Числовые ряды

10.1. Сходимость числового ряда

Определение 10.1. *Пусть задана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда:*

1. *Символ*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
называется ***числовым рядом*** *или просто* ***рядом****. Слагаемое a_k называют* ***членом*** *или* ***общим членом*** *этого ряда.*

2. *Число*
$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
называется ***n-й частичной суммой ряда****.*

3. ***Суммой ряда*** *называется предел частичных сумм:*
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$
который обозначают тем же символом, что и ряд.

4. *Ряд называют* ***сходящимся****, если сумма ряда (т. е. предел!) существует и* ***конечна****. В противном случае ряд называют* ***расходящимся****.*

Частичные суммы S_n образуют новую числовую последовательность, порожденную данной. Обратно, если дана последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то ее всегда (и не единственным способом!) можно представить в виде частичных сумм. Например, так:

$$b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n-1}),$$

т. е. $a_1 = b_1, a_k = b_{k+1} - b_k$ при $k \geq 2$.

Основной задачей теории рядов является **задача сходимости ряда**. Найти значение суммы ряда (если он сходится) удается только в исключительных случаях. Обращаем внимание, что теория числовых рядов аналогична теории несобственных интегралов с особенностью в точке $+\infty$. Дело в том, что ряд можно представить как несобственный интеграл от *ступенчатой функции.*

Примеры 10.1. 1) Пусть $a_{2k-1} = k^{-1}$, $a_{2k} = -k^{-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots$$

сходится.

2) Пусть $a_k = (-1)^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится.

3) Пусть $a_k = q^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Ряд $1+q+q^2+q^3+\ldots$ (сумма геометрической прогрессии) сходится только в том случае, когда $|q| < 1$.

Теорема 10.1 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Доказательство. Из условия

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \ \blacksquare$$

Замечание 10.1. Сформулированное условие не является достаточным, что подтверждает контрпример: **гармонический ряд** $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots$ расходится. Допустим противное, тогда частичные суммы S_n и S_{2n} имели бы один и тот же конечный предел, а их разность стремилась бы к нулю. Но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Теорема 10.2 (критерий Коши сходимости ряда). *Ряд сходится только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Записан критерий сходимости Коши для последовательности S_n. $\blacksquare$

Исследуя сходимость числовых рядов, используют следующие свойства.

Лемма 10.1 (принцип локализации). *Для любого натурального m ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k \tag{10.1}$$

сходятся или расходятся одновременно. Аналогично несобственным интегралам мы пишем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{cx}{\sim} \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Для любого натурального $n > m$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \text{const} + \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим утверждение леммы. ■

Лемма 10.2 (линейность). *Если оба ряда* (10.1) *сходятся, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k),$$

составленный из линейных комбинаций их общих членов, тоже сходится.

Доказательство. Речь идет о сходимости частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Суммы в правой части равенства сходятся по условию. Следовательно, сходится и сумма в левой части. ■

Полезное

Следствие 10.1. *Если один из рядов* (10.1) *сходится, а другой расходится, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

расходится.

10.2. Знакопостоянные ряды

Ряд, все члены которого, начиная с некоторого номера, не меняют знак, называется **знакопостоянным**. Опираясь на принцип локализации, мы считаем, что все члены ряда неотрицательные.

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами:

Теорема 10.3. *Сходимость ряда с неотрицательными членами равносильна ограниченности его частичных сумм, т. е. существует такое $C > 0$, что $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le C < +\infty$.*

Доказательство. Сходимость ряда означает существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ неубывающей (обоснуйте!) последовательности частичных сумм. Неубывание гарантирует существование предела, а ограниченность частичных сумм равносильна конечности предела:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_n S_n \le C < +\infty.$$

■

Теорема 10.4 (признаки сравнения). *Пусть последовательности a_k и b_k неотрицательны. Тогда:*

1. *если $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (в частности, утверждение справедливо, если $a_n = o(b_n)$);*
2. *если $a_n = O^*(b_n)$ при $n \to \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{cx}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, т. е. ряды сходятся или расходятся одновременно (в частности, утверждение справедливо, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$).*

Доказательство п. 1. В силу критерия сходимости неотрицательных рядов (теорема 10.3), частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничены сверху по всем n. Из определения отношения O следует, что существует такая неотрицательная постоянная C, что $0 \le a_n \le C b_n$. Следовательно, частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$ также ограничены сверху. Откуда, опять же в силу теоремы 10.3, следует искомая сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство п. 2 вытекает из симметричности отношения O^*. ■

Из п. 2 вытекает

Следствие 10.2. *Пусть последовательности a_k и b_k положительны, и пусть существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k/b_k) = C > 0$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{cx}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Теорема 10.5 (интегральный признак сходимости ряда). *Пусть функция f нестрого убывает к нулю на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ равносильна сходимости несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. В силу монотонности, имеют место (см. рис. 10.1) двусторонние оценки

$$0 \le f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k).$$

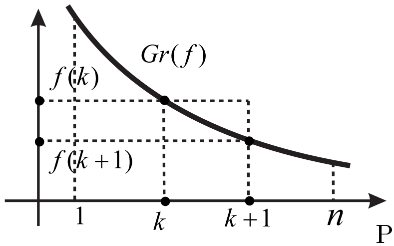

Рис. 10.1

Поэтому, а также в силу неотрицательности функции f, получаем, что

$$\int_2^n f(x)dx \le \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \le \sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \qquad (10.2)$$

Из того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \overset{cx}{\sim} \sum_{k=2}^{\infty} f(k), \quad \int_2^{\infty} f(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_1^{\infty} f(x)dx$$

и двусторонних оценок (10.2) следует утверждение теоремы. ■

Применяя интегральный признак, можно доказать, что

$$\text{ряд } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\ln k)^{\beta}} \text{ сходится } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1, \\ \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right. \bigcup \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1, \\ \beta > 1. \end{array} \right.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_k = q^k$ с положительным показателем q. Мы знаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится только при $q < 1$. Заметим, что знаменатель прогрессии можно выразить через члены прогрессии *двумя* способами: $q = b_{k+1}/b_k = \sqrt[k]{b_k}$. Эти наблюдения лежат в основе сравнительных признаков Даламбера и Коши.

Теорема 10.6 (признак сходимости Даламбера). *Пусть $a_k > 0$. Тогда:*

1. *если $a_{k+1}/a_k \le q < 1$ при $k \ge k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $a_{k+1}/a_k \ge 1$ при $k \ge k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство п. 1. В силу принципа локализации (лемма 10.1), можно считать, что $k_0 = 1$. Из условия индукцией получаем:

$$a_2 \le qa_1, \ a_3 \le qa_2 \le q^2 a_1, \ \ldots \ , \ a_k \le qa_{k-1} \le q^{k-1} a_1.$$

Значит, $a_k = O(q^{k-1})$ при $k \to \infty$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, то, в силу п. 1 теоремы 10.4, данный рад также сходится.

Доказательство п. 2. Из условия следует, что $a_k \ge a_{k-1} \ge \ldots \ge a_1 > 0$. Значит, не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 10.1). ■

Следствие 10.3 (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть $a_k > 0$ и существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1}/a_k) = q_D \in \mathbb{R}_0^+$. Тогда:*

1. *если $0 \le q_D < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $q_D > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство п. 1. Для любого числа $q' \in (q_D, 1)$ найдется такой номер $K \in \mathbb{N}$, что для больших номеров $k > K$ выполняется $a_{k+1}/a_k \le q'$ (обоснуйте существование K). Остается сослаться на п. 1 теоремы 10.6.

Доказательство п. 2. В этом случае для всех больших номеров справедливо $a_{k+1}/a_k \ge 1$, и ряд расходится согласно п. 2 теоремы 10.6. ■

Замечание 10.2. При $q_D = 1$ числовой ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 10.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$ (см. задачу **??**). Но во всех случаях предел $q_D = 1$.

Теорема 10.7 (признак сходимости Коши). *Пусть $a_k \ge 0$. Тогда:*

1. *если $\sqrt[k]{a_k} \le q < 1$ при $k \ge k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$ при $k \ge k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство п. 1. В силу принципа локализации (лемма 10.1), можно считать, что $k_0 = 1$. Поскольку $a_k \le q^k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится согласно признаку сравнения.

Доказательство п. 2. Из условия $a_k \ge 1$. Значит, не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 10.1). ■

Следствие 10.4 (признак Коши в предельной форме). *Пусть $a_k \ge 0$ и существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q_C \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. *если $0 \le q_C < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $q_C > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 10.3.

Замечание 10.3. При $q_C = 1$ числовой ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 10.2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Но во всех случаях предел $q_C = 1$.

Обсуждение 10.1. В предыдущих примерах предел по Коши совпал с пределом по Даламберу: $q_C = q_D$. Оказывается, *если существует $q_D \in \mathbb{R}$, то существует $q_C = q_D$* (доказательство этого утверждения мы не приводим, оно основано на теореме Коши о пределе последовательности средних арифметических). Значит, признак Коши сильнее (“тоньше”), чем признак Даламбера в следующем смысле: если сходимость ряда можно доказать с помощью признака Даламбера, то его можно доказать и с помощью признака Коши. Но не наоборот!

Пример 10.3. Пусть фиксированы разные положительные числа $a, b > 0$, $a \neq b$. Рассмотрим числовой ряд

$$S_{2n-1} := a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b^3 + \ldots + a^nb^{n-1},$$

$$S_{2n} := S_{2n-1} + a^nb^n.$$

Отношение c_{k+1}/c_k членов ряда зависит от четности номера: оно равно a, если $k = 2n$, и равно b, если $k = 2n-1$. Значит, предел q_D отсутствует и предельный признак Даламбера для исследуемого ряда неприменим. Если оба числа меньше единицы, то по теореме 10.6 ряд сходится. Если оба числа больше единицы – ряд расходится. Если же одно число больше единицы, а второе меньше, то признак Даламбера бессилен. Корень k-й степени из члена ряда равен $a^{n/(2n-1)}b^{(n-1)/(2n-1)}$, если $k = 2n-1$, и равен $a^{1/2}b^{1/2}$, если $k = 2n$. Значит, существует *предел* $q_C = \sqrt{ab}$ и, в силу следствия 10.4, ряд сходится, если $\sqrt{ab} < 1$, и расходится, если $\sqrt{ab} > 1$. Результат, полученный с помощью предельного признака Коши оказался сильнее, чем результат, полученный с помощью признака Даламбера.

То обстоятельство, что признак Коши сильнее, чем признак Даламбера не означает, что последний следует проигнорировать. Применение того или другого признака зависит от вида общего члена ряда.

Примеры 10.2.

1) Исследовать на сходимость ряд с общим членом

$$a_k = (2k+1)!! \cdot (1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3k+1))^{-1}.$$

Присутствие в формуле общего члена только операций умножения и деления подсказывает, что стоит применить признак Даламбера:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2(k+1)+1)!! \cdot 1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3k+1)}{(2k+1)!! \cdot 1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3k+1) \cdot (3(k+1)+1)} =$$

$$= \frac{2k+3}{3k+4} \xrightarrow{k \to +\infty} \frac{2}{3} < 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд сходится.}$$

2) Исследовать на сходимость ряд с общим членом $a_k = 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$. Присутствие в формуле общего члена показателя, зависящего от номера k, подсказывает, что стоит применить признак Коши:

$$\sqrt[k]{a_k} = 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} \xrightarrow{k \to +\infty} \frac{2}{e} < 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд сходится.}$$

В заключение отметим, что метод сравнения данного ряда (не только числового) с геометрической прогрессией является чрезвычайно плодотворным. Подход Коши лежит в основе теории степенных рядов (см. ниже) и, в конечном счете, в основе теории функций комплексного переменного.

10.3. Знакопеременные ряды

Ряд с общим членом c_n, который не является знакопостоянным, называется **знакопеременным**, т. е. $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n, m > N:\ c_n \cdot c_m < 0$. Для исследования сходимости знакопеременных рядов применяются признаки Дирихле и Абеля, аналогичные одноименным признакам сходимости несобственных интегралов. При этом роль интегрирования по частям играет **"суммирование по частям"=дискретное преобразование Абеля** числовых сумм: пусть $n, p \in \mathbb{N}$, $A_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$, тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= (A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1}) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_{k+1} - b_k). \tag{10.3}$$

Замечание 10.4. Роль первообразной функции $a(k) := a_k$ играет сумма A_k, а роль производной функции $b(k) := b_k$ играет разность $b_{k+1} - b_k$. При этом приращение аргумента равно $(k+1) - k = 1$.

Теперь нетрудно переформулировать и доказать

Теорема 10.8 (дискретный признак Дирихле). *Пусть последовательность A_k частичных сумм ограничена:*

$$\exists C > 0:\ \forall k \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow\ |A_k| \le C,$$

а последовательность b_k монотонно (вообще говоря, нестрого) стремится к нулю: $b_k \downarrow 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Применим критерий Коши. Из условия следует неотрицательность общего члена $b_k \ge 0$ и разности $b_k - b_{k+1} \ge 0$. Из первого условия теоремы и формулы (10.3) получаем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le C \left(b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \right) =$$

$$= C(b_{n+p} + b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+p}) = 2C b_{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \blacksquare$$

Теорема 10.9 (дискретный признак Абеля). *Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а последовательность b_k монотонна (вообще говоря, нестрого) и ограничена. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что последовательность b_k убывает. Тогда, в силу ограниченности последовательности b_k, существует конечный $\lim_{k\to\infty} b_k = B$. Поэтому последовательность $b'_k := b_k - B \downarrow 0$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, его частичные суммы ограничены. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b'_k$, в силу дискретного признака Дирихле, сходится. Но

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b'_k + B \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где оба ряда справа сходятся. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ тоже сходится. ■

Следствие 10.5 (признак Лейбница). *Пусть $b_k \downarrow 0$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ сходится. То есть,* ***знакочередующийся ряд****, общий член которого монотонно стремится к нулю, сходится.*

Доказательство. Возьмем $a_k := (-1)^k$ и применим признак Дирихле. ■

Для остатка $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k b_k$ ряда Лейбница имеет место оценка $|r_n| \le b_{n+1}$. То есть модуль остатка ряда ограничен модулем своего первого члена.

Пример 10.4. Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ расходится, а ряд Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k/k)$ сходится. Причем модуль остатка

$$|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} ((-1)^k/k) \right| < 1/(n+1).$$

10.4. Перестановки слагаемых в рядах и перемножение рядов

Поскольку ряд содержит бесконечное количество слагаемых, на ряды в полной мере не переносится свойство перестановочности (коммутативность) слагаемых и распределительное свойство (дистрибутивность) умножения по сложению. Однако для абсолютно сходящихся рядов (см. ниже) эти свойства сохраняются.

Определение 10.2. *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется* ***абсолютно сходящимся*** *(АСР), если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Сходящийся ряд, который не сходится абсолютно, называется* ***условно сходящимся****.*

Теорема 10.10 (***о сходимости АСР***). *АСР сходится.*

Доказательство сразу следует из оценки

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|$$

и критерия Коши (теорема 10.2). ■

Замечание 10.5. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно: см. пример 10.4 с гармоническим рядом и рядом Лейбница.

Из теоремы 10.10 следует, что знакопеременные ряды бывают трех видов: абсолютно сходящиеся, условно сходящиеся, расходящиеся. Очевидно, что у знакопостоянного ряда понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают. Знакопостоянные ряды бывают двух видов (каких?).

Сформулируем нетрудные и полезные при исследовании сходимости утверждения:

Лемма 10.3.

1. *Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ тоже сходится абсолютно.*
2. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится условно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится условно.*
3. *Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся условно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится. Характер сходимости (абсолютный или условный) нуждается в дополнительном исследовании.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.3.

Перейдем к перестановкам слагаемых в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Определение 10.3. *Пусть $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ –* биекция *множества натуральных чисел. Рассмотрим последовательность $b_i := a_{K(i)}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}$ называют рядом* ***с переставленными членами*** *по отношению к исходному ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Поскольку K биекция, то существует обратная биекция $I := K^{-1}$, причем исходный ряд получается перестановкой членов с помощью биекции I из ранее полученного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{I(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{K(I(k))}.$$

Начнем с исследования перестановок членов *всюду неотрицательного* ряда, т. е. для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a_k \ge 0$. Понятно, что такой ряд, в частности, знакопостоянный.

Лемма 10.4. *Если всюду неотрицательный ряд сходящийся, то ряд с переставленными членами тоже сходящийся. При этом их суммы совпадают.*

Доказательство. Введем следующее обозначение:

$$\max(K, n) = \max\{K(1), \ldots, K(n)\} \in \mathbb{N}.$$

Натуральных чисел $K(1), \ldots, K(n)$ всего n штук, поэтому $\max(K, n) \geq n$. Поскольку ряд всюду неотрицательный, то справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_{K(i)} \leq \sum_{k=1}^{\max(K,n)} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{10.4}$$

В самом деле, все слагаемые, содержащиеся в левой сумме, обязательно присутствуют в следующей сумме справа; при этом добавляются только неотрицательные слагаемые. Из критерия сходимости знакопостоянного ряда (теорема 10.3) следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}$. Более того, из оценки (10.4) следует предельная оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

С другой стороны, исходный ряд $\sum_{i=k}^{\infty} a_k$ получается перестановкой членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ с помощью биекции I. Поэтому справедлива обратная оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{I(k)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i,$$

что доказывает совпадение сумм. ■

Прежде чем исследовать перестановки членов знакопеременного ряда, представим его как разность двух всюду неотрицательных рядов. Обозначим

$$a_k^+ := \frac{a_k + |a_k|}{2}, \quad a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

Числа a_k^+, a_k^- называют **положительной и отрицательной частями члена** a_k. Ясно, что

$$a_k^+,\ a_k^- \geq 0, \quad a_k = a_k^+ - a_k^-, \quad |a_k| = a_k^+ + a_k^- \tag{10.5}$$

и

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k \geq 0, \\ 0, & \text{если } a_k < 0; \end{cases} \qquad a_k^- = \begin{cases} 0, & \text{если } a_k > 0, \\ -a_k, & \text{если } a_k \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем *три* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, нумерации которых согласованы, что позволяет применить к ним линейные операции.

Пример 10.5. Ниже выписаны первые члены данного ряда и ряды из положительных и отрицательных частей:

$$\begin{array}{lcccccccc} a_k: & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \dots \\ a_k^+: & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ a_k^-: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots \end{array}$$

Лемма 10.5.

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно только тогда, когда сходятся оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$.
2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходятся: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Доказательство п. 1. Поскольку $0 \le a_k^+ \le |a_k|$ и $0 \le a_k^- \le |a_k|$, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{i=1}^{\infty} a_k^-$. Обратно, если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$ сходятся, то, в силу (10.5) и леммы 10.2 о линейной комбинации рядов, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ + a_k^-)$$

сходится.

Доказательство п. 2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$ не могут одновременно сходится (иначе, см. п. 1, данный ряд сошелся бы абсолютно). Но если один из них сходится, а другой расходится, то, в силу (10.5), их разность

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

расходится (см. следствие 10.1), что противоречит условию. Остается единственная возможность – оба ряда расходятся. Но, поскольку они оба неотрицательные, их суммы равны $+\infty$. ■

Теперь мы можем доказать утверждение леммы 10.4 для АСР.

Теорема 10.11 (о сходимости АСР с переставленными членами)**.** *Если ряд сходится абсолютно, то и ряд с переставленными членами сходится абсолютно. При этом их суммы совпадают. В "школьной" формулировке: при перестановке слагаемых АСР сумма не меняется.*

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ всюду неотрицательный, из его сходимости следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{K(i)}|$ (лемма 10.4). Откуда (теорема 10.10) следует сходимость исследуемого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}$.

Остается доказать совпадение сумм. Во-первых, заметим, что при перестановке членов исходного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ возникает *согласованная по номерам* перестановка членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$, т. е. можно сначала переставить члены ряда, а потом построить ряд из положительных (отрицательных) частей, а можно сразу переставить члены ряда из положительных (отрицательных) частей – результат будет тот же:

$$(a_{K(i)})^+ = a^+_{K(i)}, \quad (a_{K(i)})^- = a^-_{K(i)}.$$

Во-вторых, суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$ при перестановке не меняются:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{i=1}^{\infty} a^+_{K(i)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{i=1}^{\infty} a^-_{K(i)}.$$

В самом деле, каждый из этих рядов всюду неотрицательный и к рядам с переставленными членами применима лемма 10.4. Теперь получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{i=1}^{\infty} a^+_{K(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} a^-_{K(i)} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a^+_{K(i)} - a^-_{K(i)}) = \sum_{i=1}^{\infty}((a_{K(i)})^+ - (a_{K(i)})^-) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}. \blacksquare$$

Оказывается, если ряд сходится условно, то перестановкой его слагаемых можно добиться любого эффекта: 1) сходимости к выбранному наперед числу, 2) сходимости к $\pm\infty$, 3) отсутствия предела частичных сумм. Докажем первое утверждение.

Теорема 10.12 (Римана). *Если данный ряд сходится условно, то для любого числа $A \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка членов, что полученный ряд сходится к A.*

В заключение раздела рассмотрим перемножение двух АСР. Обозначим через

$$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, \quad \Lambda(k) = (\lambda_1(k), \lambda_2(k)) = (i_k, j_k)$$

биекцию множества натуральных чисел в множество всех *пар* натуральных чисел. Поскольку множество $\mathbb{N}^2$ счетно, такие биекции существуют. Координатные отображения $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ не являются биекциями, но обязательно являются сюръекциями (накрытиями).

Теорема 10.13 (о перемножении АСР). *Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходящиеся. Тогда для любой биекции Λ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ абсолютно сходится, а его сумма равна произведению сумм "сомножителей":*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$\dots$
a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$\dots$
a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Рис. 10.2

Доказательство. Во-первых, сумма $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ содержит все возможные попарные произведения $a_i b_j$, причем по одному разу. Если взять другую биекцию Λ', то получится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i'_k} b_{j'_k}$ с переставленными членами.

Далее, обозначим

$$\max(\lambda_1, n) = \max\{i_1, \dots, i_n\}, \quad \max(\lambda_2, n) = \max\{j_1, \dots, j_n\}.$$

Справедлива оценка (сравните с доказательством леммы 10.4):

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k} b_{j_k}| \le \sum_{i=1}^{\max(\lambda_1,n)} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\max(\lambda_2,n)} |b_j| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < +\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ абсолютно сходящийся. Поэтому его сумма не зависит от перестановки членов, т. е. от выбора биекции Λ. Выберем из всех биекций Λ самую "удобную" и для нее вычислим сумму $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$. Расположим все возможные попарные произведения $a_i b_j$ в виде бесконечной вправо и вниз матрицы с индексами (i, j) по строкам и столбцам. Биекцию Λ определим по методу квадратов так, чтобы в каждом квадрате элемент $a_n \cdot b_n$ был *последним.* Запишем *подпоследовательность* частичных сумм (рис. 10.2):

$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что подпоследовательность S_{n^2} частичных сумм сходится к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n^2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ сходящийся, то и последовательность его частичных сумм сходится к тому же числу. ■

11. Функциональные последовательности и ряды

11.1. Равномерная сходимость функциональной последовательности

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ – некоторое фиксированное подмножество, а $F(X)$ – линейное пространство всех функций, определенных на множестве X. Напомним, что линейные операции в $F(X)$ мы определяем поточечно:

$$(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x) \ \ \forall f, g \in F(X), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X.$$

1. Классическое функциональной последовательности: если каждому натуральному $n \in \mathbb{N}$ соответствует некоторая функция $f_n : X \to \mathbb{R}$, то говорят, что задана функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. В духе функционального анализа: функциональной последовательностью $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется отображение из множества натуральных чисел в функциональное пространство $F(X)$:

$$\varphi : \ \mathbb{N} \to F(X), \ \varphi(n) = f_n.$$

Второе определение подчеркивает преемственность понятия последовательности как отображения из $\mathbb{N}$ в некоторое линейное пространство. Обратим внимание, что для ФП ее каждый член f_n является сам по себе отображением из X в $\mathbb{R}$, т. е. ФП есть отображение в пространство отображений.

Определение 11.1. *Говорят, что ФП $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$* ***поточечно сходится*** *к функции $f \in F(X)$ на X при $n \to \infty$, если $\forall x \in X$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Для поточечной сходимости применяют*

обозначение
$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x).$$

Замечание 11.1. Предельная функция f не задана заранее. Если она существует (что не обязательно), то определяется с помощью данной ФП $\{f_n\}$. Принципиально, что у всех функций из ФП и у предельной функции одна и та же область определения X.

Лемма 11.1. *Если функциональная последовательность поточечно сходится, то предел единственный.*

Запишем определение поточечной сходимости фнкциональной последовательности f_n к функции f на языке ε-номер:

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}:$$
$$\forall n \geq N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Теперь сформулируем основное

Определение 11.2. *Говорят, что ФП $\{f_n\}$* ***равномерно сходится*** *к функции $f \in F(X)$ на X при $n \to \infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \wedge \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{11.2}$$

Для равномерной сходимости применяют обозначения

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in X \ \textit{или}\ f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x).$$

Отличие условий (11.1) и (11.2) в том, что в (11.1) номер N зависит от аргумента x, т. е. поточечное стремление $f_n(x)$ к пределу $f(x)$ зависит от x. При равномерной сходимости *один и тот же номер N* обеспечивает *равномерную по всем $x \in X$* (откуда название) ε-близость $f_n(x)$ к $f(x)$.

Геометрическая интерпретация равномерной сходимости.

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, а $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Рассмотрим графики трех функций: $\mathrm{Gr}\,(f(x))$, $\mathrm{Gr}\,(f(x) \pm \varepsilon) \subset X \times \mathbb{R}$. Подмножество

$$\mathrm{Tub}_{\,\varepsilon}(f) := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R}:\ f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\},$$

заключенное между графиками $\mathrm{Gr}\,(f(x) \pm \varepsilon)$, называется ε-**трубчатой окрестностью** графика $\mathrm{Gr}\,(f)$ (см. рис. 11.1). Равномерная на X сходимость ФП f_n к функции f означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, начиная с которого $n \geq N(\varepsilon)$ все графики $\mathrm{Gr}\,(f_n)$ оказываются в ε-трубчатой окрестности: $\mathrm{Gr}\,(f_n) \subset \mathrm{Tub}_{\,\varepsilon}(f)$.

Лемма 11.2 (связь между поточечной и равномерной сходимостями).

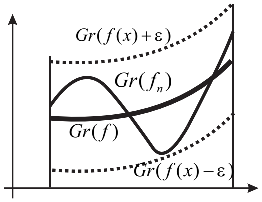

Рис. 11.1

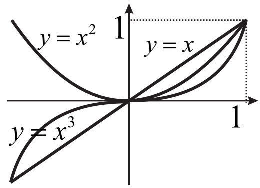

Рис. 11.2

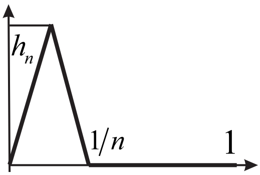

Рис. 11.3

1. *Из равномерной сходимости следует поточечная.*

2. *Если ФП $\{f_n\}$ сходится поточечно к функции f, то только к этой же функции f может равномерно сходиться $\{f_n\}$.*

3. *Пусть $X_p \subset X$ – подмножество, на котором последовательность сходится поточечно (pointwise convergence), а $X_u \subset X$ – подмножество, на котором последовательность сходится равномерно (uniform convergence), тогда $X_u \subset X_p \subset X$.*

Доказательство пункта 1 следует из (11.1) и (11.2). Второй и третий пункты являются следствиями первого. ■

Изучая ФП, мы прежде всего интересуемся подмножествами $X_u \subset X_p \subset X$.

Примеры 11.1.

1) ФП $f_n(x) = x^n$ определена на $X = \mathbb{R}$. Она поточечно сходится на $X_p = (-1, 1]$ к функции $f(x) \equiv 0$ при $x \in (-1, 1)$ и $f(1) = 1$. Эта же последовательность равномерно сходится к нулевой функции на любом отрезке $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, где $\delta \in (0, 1)$, поскольку справедлива *равномерная* $\forall x \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$ оценка: $|f_n(x)| \leq (1 - \delta)^n$ (рис. 11.2).

2) Рассмотрим на $X = [0, 1]$ функцию $f_n(x)$, график которой (см. рис. 11.3) представляет собой равнобедренный треугольник с основанием $x \in [0, 1/n]$ и высотой $y = h_n > 0$ и отрезок $\{x \in [1/n, 1], \ y = 0\}$. Из определения следует, что поточечно ФП сходится к нулю (обоснуйте). Но f_n сходится к нулю равномерно только в том случае, когда высота $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку справедлива *равномерная* $\forall x \in [0, 1]$ оценка: $|f_n(x)| \leq f_n(1/(2n)) = h_n$.

11.2. Свойства равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема 11.1 (критерии равномерной сходимости ФП). *Следующие условия равносильны равномерной сходимости* $f_n \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$.

1.
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{11.3}$$

2. Для ***любой*** *последовательности точек* $x_n \in X$ *выполняется равенство*
$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0. \tag{11.4}$$

3. Критерий Коши: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n, m \geq N \wedge \forall x \in X)\ \hookrightarrow$
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{11.5}$$

Доказательство пункта 1. Необходимость. Наряду с данной ФП рассмотрим последовательность $\rho_n := \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$, которая принимает значения на *расширенной* неотрицательной полуоси: $\rho_n \in [0, +\infty]$. Из определения (11.2) следует, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow \rho_n \leq \varepsilon,$$

значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Достаточность следует из оценки:

$$\forall x \in X \text{ справедливо : } |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство пункта 2. Необходимость: в силу п. 1, для любой последовательности $x_n \in X$ справедливо:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \rho_n \to 0 \text{ при } n \to 0.$$

Достаточность. Если f_n не сходится равномерно к f, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n > N$, для которого

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \rho_n \geq \varepsilon_0.$$

Значит, существует по крайней мере одна такая точка $x_n \in X$, для которой $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0/2 = \text{const}$. Следовательно, предельное условие (11.4) не выполняется.

Доказательство пункта 3. Необходимость мы доказываем, как и для числовых последовательностей, используя неравенства треугольника: при $n, m \to \infty$ справедлива оценка и предельный переход

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \rho_n + \rho_m \to 0.$$

Достаточность доказывается в два этапа. Первый: поскольку условие Коши выполняется равномерно для всех $x \in X$, то тем более оно выполняется для любого фиксированного $x \in X$. Поэтому существует поточечный предел, который обозначим через $f(x)$. Второй этап: в условии Коши (11.5) при произвольных фиксированных $x \in X$ и $n \in N$ перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ (\forall n \geq N \wedge \forall x \in X) \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Последнее означает, что $f_n \rightrightarrows f$. ■

Замечание 11.2. Доказательство достаточности п. 2 теоремы 11.1 мы осуществляли от противного. Этот подход полезен при доказательстве *отсутствия* равномерной сходимости: "отгадывают" такую последовательность $x_n \in X$, для которой $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0 = \text{const} > 0$.

Теорема 11.2 (свойства равномерной сходимости)**.**

1. ***Сужение*** *области определения : если ФП равномерно сходится на X, то тем более она равномерно сходится на произвольном подмножестве $X' \subset X$.*
2. ***Аддитивность*** *по области определения: пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ объединение $X_1 \cup X_2 \subset Def(f_n)$, пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X_1 и $f_n \rightrightarrows f$ на X_2, тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $X_1 \cup X_2$.*
3. ***Линейность*** *равномерной сходимости: если $f_n \rightrightarrows f$ на X и $g_n \rightrightarrows g$ на X, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется: $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ на X.*

Доказательство. Первый пункт очевиден.

Доказательство пункта 2. Из определения 11.2 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ при $X = X_1$ существует номер $N_1(\varepsilon)$, при $X = X_2$ существует номер $N_2(\varepsilon)$, для которых выполнено условие (11.2). Остается взять при $X = X_1 \cup X_2$ номер $n(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$.

Пункт 3 доказывается с помощью определения 11.2 по той же схеме, что и доказательство линейности предела числовой последовательности. ■

Ценность равномерной сходимости в том, что предельная функция f сохраняет "хорошие свойства" функций из последовательности f_n. Если же равномерная сходимость отсутствует, то свойства предельной функции f непредсказуемы.

Теорема 11.3 (***сохранение непрерывности***)**.** *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X. Если функции f_n непрерывны на X, то предельная функция f также непрерывна на X.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что f непрерывна по множеству X в произвольной точке $x_0 \in X$. В силу неравенства треугольника:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \ \hookrightarrow$$

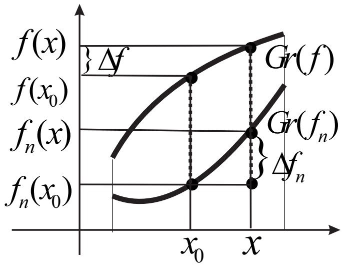

Рис. 11.4

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|. \quad (11.6)$$

Теперь мы оценим модуль приращения $|\Delta f| = |f(x)-f(x_0)|$ предельной функции f через модуль приращения $|\Delta f_n| = |f_n(x)-f_n(x_0)|$ “допредельной” функции f_n и отличие $\rho_n = \sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|$ допредельной функции от предельной (см. рис. 11.4).

В силу равномерной сходимости, первое и третье слагаемые могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора номера n:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \ge N\ \hookrightarrow\ \rho_n < \frac{\varepsilon}{3};$$

второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым, поскольку функция f_n непрерывна в точке x_0:

$$(\forall n \in N \wedge \forall \varepsilon > 0)\ \exists \delta = \delta(n,\varepsilon) > 0:\ \forall x \in X \cap U_\delta(x_0)\ \hookrightarrow\ |\Delta f_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, по $\forall \varepsilon > 0$ мы найдем номер $n \in \mathbb{N}$, а затем число $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$; в силу оценки (11.6), справедливо неравенство $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. ■

Замечание 11.3. В отсутствие равномерной сходимости последовательность непрерывных функций может поточечно сходиться к разрывной функции (см. пример 11.1.1). Вместе с тем, равномерная сходимость является только достаточным условием непрерывности предельной функции. В примере 11.1.2 равномерной сходимости нет, если $h_n \not\to 0$, но предельная функция $f(x) \equiv 0$ непрерывна.

Следствие 11.1 (о перестановочности пределов)**.** *Пусть функции f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ верно*

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

То есть пределы по номеру n члена последовательности и по переменной x перестановочны.

Доказательство. Напомним (лемма 11.1, п. 1), что равномерная сходимость влечет поточечную. Теперь, в силу поточечной сходимости ФП и непрерывности предельной функции f, получаем:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В силу непрерывности каждой функции f_n из ФП и поточечной сходимости ФП, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0). \quad \blacksquare$$

Если областью определения ФП является отрезок, то, наряду с данной ФП, могут появиться еще две ФП – полученные интегрированием и дифференцированием исходной.

Теорема 11.4 (интегрируемость предельной функции). *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $X = [a,b]$ и функции f_n непрерывны на $[a,b]$. Тогда $\forall c \in [a,b]$ функциональная последовательность*

$$I_n(x;c) = I_n(x) := \int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows I(x) := \int_c^x f(t)dt \text{ на } [a,b]$$

$$\text{и, в частности, } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt,$$

т. е. интегрирование и переход к пределу при $n\to\infty$ перестановочны.

Доказательство. Во-первых, по предыдущей теореме предельная функция f непрерывна, следовательно, интегрируема. В силу равномерной сходимости f_n к f получаем

$$\sup_{x\in X}\left|\int_c^x f_n(t)dt - \int_c^x f(t)dt\right| \le \int_c^x \sup_{x\in X}|f_n(t) - f(t)|dt \le$$

$$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|\cdot(b-a) \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Значит, $I_n(x)\rightrightarrows I(x)$ на $[a,b]$ (п. 1 теоремы 11.1). $\blacksquare$

Замечание 11.4. В теореме 11.4 сформулированы только достаточные условия допустимости предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема 11.5 (дифференцируемость предельной функции). *Пусть функции f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $X = [a,b]$, причем последовательность производных $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ на $[a,b]$ при $n\to\infty$. Пусть в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$ существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A \in \mathbb{R}.$$

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$*, где функция* f *непрерывно дифференцируема на* $[a,b]$*, и* $f'(x) = g(x)$ *на* $[a,b]$*. То есть дифференцирование и переход к пределу при* $n \to \infty$ *перестановочны:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x). \tag{11.7}$$

Доказательство. По теореме 11.3 предельная функция g непрерывна на $[a,b]$. Применим к последовательности производных f_n' теорему 11.4:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_{x_0}^{x} g(t)dt \;\Leftrightarrow\; f_n(x) - f_n(x_0) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

Поэтому

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} A + \int_{x_0}^{x} g(t)dt =: f(x).$$

Полученная функция непрерывно дифференцируема, ее производная $f'(x) = g(x)$ на $[a,b]$, а $f(x_0) = A$. ■

Замечание 11.5. Если отказаться от условия $f_n(x_0) \to A \in \mathbb{R}$ (не за что "зацепиться"), то у последовательности f_n может отсутствовать даже поточечный предел.

Пример 11.1. ФП $f_n(x) := n$ не сходится ни в одной точке, но $f_n'(x) \equiv 0 \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$.

Замечание 11.6. Если последовательность f_n непрерывно дифференцируемых функций (а не их производных!) равномерно сходится, то предельная функция $f(x)$ не обязана быть дифференцируемой (будучи непрерывной в силу теоремы 11.3) или же не будет выполняться перестановочность (11.7) предельного перехода и дифференцирования.

Пример 11.2. На $[-1,1]$ функциональная последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n \rightrightarrows f(x) \equiv 0.$$

Функции f_n и предельная функция непрерывно дифференцируемы, причем производная предельной функции $f'(x) \equiv 0$. Но $f_n'(x) = x^{n-1}/(1+x^{2n})$. Получается, что у последовательности $f_n'(-1) = (-1)^n/2$ предела нет, а последовательность

$$f_n'(1) = 1/2 \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

Значит, в точках $x = \pm 1$ равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$$

не выполняется (рис. 11.5 и 11.6).

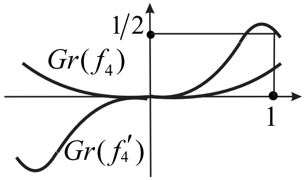

Рис. 11.5

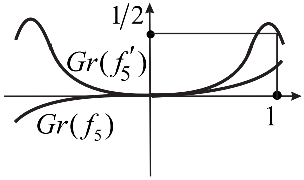

Рис. 11.6

Обсуждение 11.1. Утверждение теоремы 11.3 подсказывает, что в пространстве $C(X)$ непрерывных на X функций целесообразно рассматривать равномерно сходящиеся последовательности $\{f_n\}$; в этом случае мы уверены, что предельная функция $f \in C(X)$. Аналогично, в пространстве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций целесообразно рассматривать последовательности, удовлетворяющие условиям теоремы 11.5.

11.3. Равномерная сходимость функционального ряда

Если задана ФП $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x \in X)$, то возникает новая ФП частичных сумм

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ называется **функциональным рядом** (ФР), символ

$$r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$$

называют n-м **остатком** ФР.

Определение 11.3. *Если для каждого $x \in X$ существует конечный предел*

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \in \mathbb{R},$$

то говорят, что ФР сходится ***поточечно*** *на X к функции S. Функцию S называют* ***суммой функционального ряда****. ФР называют сходящимся* ***равномерно*** *на X при $n \to \infty$, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на X:*

$$S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Во многих ситуациях удобнее (или приходится) иметь дело не с ФП, а с ФР. Однако, если поточечный предел ФП порой удается найти, то сумма сходящегося ФР как правило неизвестна. Поэтому мы интересуемся здесь исключительно вопросами поточечной и равномерной сходимостей рядов, а не их вычислением. Изучая ФР, мы прежде всего интересуемся, на каком множестве X_p ФР сходится поточечно и на каком множестве X_u – равномерно. Понятно, что $X_u \subset X_p$.

На последовательность частичных сумм и на ФР переносятся все утверждения пунктов 1 и 2. Некоторые из этих утверждений мы переформулируем для рядов. Также будут сформулированы и доказаны утверждения, в которых проявляется специфика ФР. Прежде всего переформулируем критерии равномерной сходимости и вытекающие из них следствия.

Теорема 11.6 (критерии равномерной сходимости ФР). *Следующие условия равносильны равномерной сходимости $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ при $n \to \infty$.*

1. Равномерное стремление остатка к нулю:

$$r_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0.$$

2. Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X\ \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство состоит в переформулировке п. 1 и 3 теоремы 11.1 для частичных сумм. Отметим, что натуральный параметр m в теореме 11.1 через n и p определяется так: $m = n + p$. ■

Следствие 11.2 (***необходимое условие равномерной сходимости ряда***). *Если на X ФР $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится, то $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.*

Доказательство. Возьмите в п. 2 теоремы 11.6 параметр $p = 1$. ■

Критерий Коши чаще используют для доказательства отсутствия равномерной сходимости. Переформулировка признака выглядит так:

Следствие 11.3 (***критерий Коши отсутствия равномерной сходимости ФР***). *ФР НЕ является равномерно сходящимся на X только в том случае, когда*

$$\exists \varepsilon_0 > 0:\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N,\ \exists p(n) \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in X:\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x_n)\right| \geq \varepsilon_0.$$

Замечание 11.7. Под знаками слагаемых функционального ряда обязательно должен стоят один и тот же аргумент! Изучая функциональный ряд, бессмысленно пользоваться суммами вида

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x_k),$$

где аргумент зависит от индекса суммирования. Однако, рассматривая каждое слагаемое ФР в отдельности, можно каждый раз использовать новый аргумент (см. следствие ниже).

Следствие 11.4 (достаточный признак отсутствия равномерной сходимости ФР)**.** *Если*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \wedge \ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : |a_n(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *НЕ является равномерно сходящимся на* X*.*

Доказательство. Возьмите в следствии 11.3 параметр $p = 1$. ■

В заключение пункта приведем переформулировки теорем 11.3–11.5.

О непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР из непрерывных слагаемых:

Теорема 11.7. *Если все функции* $a_k(x)$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) непрерывны на* X *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *сходится равномерно на* X*, то его сумма непрерывна на* X*.*

О почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда:

Теорема 11.8. *Если функции* $u_k(x)$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) непрерывны на* $[a, b]$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$*, то* $\forall c \in [a, b]$ *функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_c^x u_k(x) dx$$

равномерно на $[a, b]$ *сходится к функции*

$$\int_c^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx.$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx.$$

О почленном дифференцировании функционального ряда:

Теорема 11.9. *Если все функции $u_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ из производных сходится равномерно на $[a,b]$ к сумме $V(x)$, и существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится, то ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно на $[a,b]$ сходится к непрерывно дифференцируемой функции $S(x)$, причем производная $S'(x) = V(x)$ для всех $x \in [a,b]$. То есть*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

11.4. Сравнение функциональных рядов, признаки Дирихле и Абеля

В отличие от числовых рядов мы не вводим для ФР понятия знакопостоянства, но сохраняем понятие поточечно (равномерно) **абсолютно сходящегося** функционального ряда, т. е. такого ФР $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, для которого поточечно (равномерно) сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$.

Лемма 11.3. *Если ряд поточечно (равномерно) абсолютно сходится на X, то он поточечно (равномерно) сходится на X.*

Теорема 11.10 (обобщенный признак сравнения). *Пусть, начиная с некоторого $K \in \mathbb{N}$, для всех номеров $k \geq K$ на X справедлива оценка $|a_k(x)| \leq \alpha_k(x)$ и неотрицательный ФР $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)$ равномерно сходится на X. Тогда ФР $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно абсолютно сходится на X.*

Доказательство. Запишем для равномерно сходящегося неотрицательного ФР $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)$ критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x) < \varepsilon.$$

Без ограничения общности верно $K < N$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X \hookrightarrow$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x) < \varepsilon.$$

Опять же в силу критерия Коши, ФР $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ равномерно сходится на X. Учитывая лемму 11.3, получаем требуемое. ■

Следствие 11.5 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

Пусть, начиная с некоторого $K \in \mathbb{N}$, для всех номеров $k \geq K$ на X справедлива оценка $|a_k(x)| \leq \alpha_k$; пусть неотрицательный числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится. Тогда ФР $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно абсолютно сходится на X.

Достаточные признаки сходимости Дирихле и Абеля, которые мы сформулировали для несобственных интегралов и числовых рядов, могут быть приспособлены для исследования равномерной сходимости ФР.

Теорема 11.11 (признак Дирихле для ФР).
Пусть для функциональных последовательностей $\{a_k(x)\}$ и $\{b_k(x)\}$, заданных на X, выполнены следующие условия:

1. *последовательность частичных сумм $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно ограничена:*
$$\exists C > 0: \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X \ \hookrightarrow \ |A_n(x)| \leq C;$$
2. *при любом $x \in X$ числовая последовательность $\{b_k(x)\}$ монотонно (вообще говоря, нестрого) убывает;*
3. *на X последовательность $b_k(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на X.

Доказательство. Дословно повторяя доказательство признака Дирихле для числовых рядов (теорема 10.8), получим
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| \leq 2C b_{n+1}(x) \text{ при всех } n, p \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X.$$
Поскольку $b_k(x) \rightrightarrows 0$ на X при $k \to \infty$, то
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \forall x \in X \hookrightarrow 0 \leq b_{n+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2C}.$$
Значит,
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X \hookrightarrow$$
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < 2C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon.$$
Из критерия Коши следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно. ■

Следствие 11.6 (признак Лейбница равномерной сходимости ФР).
Пусть при любом $x \in X$ числовая последовательность $\{b_k(x)\}$ убывает (вообще говоря, нестрого) и $b_k(x) \rightrightarrows 0$ на X при $k \to \infty$. Тогда знакочередующийся ФР $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k(x)$ сходится равномерно на X.

Теорема 11.12 (признак Абеля равномерной сходимости для ФР). *Пусть выполнены условия:*

1. *ФР $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на X;*
2. *при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\{b_k(x)\}$ монотонна (вообще говоря, нестрого и для разных x монотонность может иметь разный характер);*
3. *функциональная последовательность $\{b_k(x)\}$ ограничена равномерно на X:*
$$\exists C: \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X \ \hookrightarrow \ |b_k(x)| \leq C.$$

Тогда ФР $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на X.

Доказательство. В условиях теоремы 11.12 мы не можем свести ее к теореме 11.11 аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы Абеля 10.9 для числовых рядов. Запишем дискретное преобразование Абеля (10.3) в терминах "сумм Коши" $A_{n+1}^k := \sum_{i=n+1}^k a_i$, где $k \geq n+1$ и $A_{n+1}^n := 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_{n+1}^k - A_{n+1}^{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{n+1}^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{n+1}^{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{n+1}^k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_{n+1}^k b_{k+1} = (A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - A_{n+1}^n b_{n+1}) -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^k (b_{k+1} - b_k) = A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^k (b_{k+1} - b_k) \tag{11.8}$$

(обращаем внимание, что в предыдущих выкладках индекс k, по которому идет суммирование, находится наверху). Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно, то, в силу критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Значит,

$$|A_{n+1}^k| = \Big| \sum_{i=n+1}^{k} a_i(x) \Big| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

при $k \geq n+1$, $\forall x \in X$. Теперь, учитывая (11.8), монотонность по k последовательности $b_k(x)$ при фиксированном x и ее равномерную ограниченность, получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C} \left(|b_{n+p}(x)| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) \right| \right) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3C}\left(|b_{n+p}(x)| + |b_{n+p}(x) - b_{n+1}(x)|\right) \leq \frac{\varepsilon}{3C} \cdot 3C = \varepsilon.$$

Что означает, опять же в силу критерия Коши, равномерную сходимость ФР

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x).$$

■

12. Степенные ряды

12.1. Круг сходимости степенного ряда

Дадим основное

Определение 12.1. ***Степенным рядом*** *называют комплексный функциональный ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \text{ где } c_k,\ z_0,\ z \in \mathbb{C}$$

относительно переменной z.

То есть члены ряда $a_k(z) := c_k(z - z_0)^k$ есть *комплекснозначные функции комплексной переменной*. Нас прежде всего интересует, где ряд сходится поточечно. С этой целью рассмотрим

Пример 12.1. Пусть $z_0 = 0$, $c_k = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. В этом случае степенной ряд является суммой геометрической прогрессии с показателем $q = z = |z|e^{i\varphi}$, где φ – аргумент числа z. Как и в действительном случае, частичная сумма

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - |z|^n e^{in\varphi}}{1 - |z|e^{i\varphi}}.$$

Поэтому ряд сходится поточечно только при условии $|z| < 1$. То есть множество поточечной сходимости является открытым кругом.

Оказывается, это наблюдение верно с некоторыми оговорками для любого степенного ряда. Определим подмножество поточечной сходимости и подмножество поточечной абсолютной сходимости:

$$Conv_p := \{z \in \mathbb{C} :\ \text{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \text{ поточечно сходится}\},$$

$$Conv_{pa} := \{z \in \mathbb{C} :\ \text{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(z - z_0)^k| \text{ поточечно сходится}\}$$

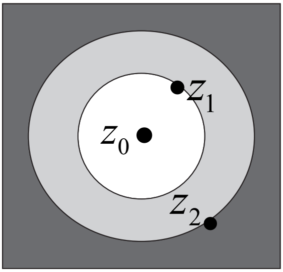

Рис. 12.1

(от англ. *convergence* – сходимость). Оба эти подмножества непусты и имеет место вложение

$$z_0 \in Conv_{pa} \subset Conv_p.$$

Теорема 12.1 (первая теорема Абеля). *Справедливы утверждения:*

1. *Если СР сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он **абсолютно** сходится в любой точке z, которая **ближе** к z_0, чем z_1: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Другими словами, ряд поточечно абсолютно сходится **в открытом круге** $U_{r_1}(z_0)$ радиуса $r_1 = |z_1 - z_0| > 0$, на окружности которого лежит точка z_1: $U_{r_1}(z_0) \subset Conv_{pa}$.*
2. *Если СР расходится в некоторой точке z_2, то он расходится в любой точке z, которая **дальше** от z_0, чем z_2, т. е. $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$. Иначе говоря, ряд расходится **вне замкнутого круга** $\overline{U}_{r_2}(z_0)$ радиуса $r_2 = |z_2 - z_0| > 0$, на окружности которого лежит точка z_2 (рис. 12.1).*

Доказательство п. 1. Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1 - z_0)^k$ сходится, его общий член $a_k(z) = c_k(z_1 - z_0)^k \overset{k\to\infty}{\to} 0$. Согласно условию $q := |z - z_0|/|z_1 - z_0| < 1$. Поэтому справедлива оценка модуля общего члена ряда в точке z:

$$|a_k(z)| = |c_k(z - z_0)^k| = |c_k(z_1 - z_0)^k| \cdot \left|\frac{(z - z_0)}{(z_1 - z_0)}\right|^k = o(q^k) \text{ при } k \to \infty.$$

Но геометрическая прогрессия $\sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty$ сходится, значит, данный ряд абсолютно сходится в точке z по признаку Вейерштрасса.

Доказательство п. 2. Допустим противное, тогда, в силу п. 1, в точке z_2 ряд сходится – противоречие. ■

Обсуждение 12.1. Из теоремы 12.1 уже вытекает главный вывод о сходимости степенного ряда: *множество точек сходимости СР является кругом* с точностью до окружности этого круга, где нужны дополнительные исследования.

Чтобы придать этому утверждению строгую форму, введем

Определение 12.2. *Неотрицательное число R или символ $+\infty$ называется* ***радиусом сходимости*** *степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, если для каждого z такого, что $|z-z_0| < R$, ряд сходится, а при условии $|z-z_0| > R$ – расходится. Множество*

$$U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

называется ***кругом сходимости*** *СР.*

Замечание 12.1. Сходимость ряда только в точке $z = z_0$ равносильна условию $R = 0$; поточечная сходимость на $\mathbb{C}$ равносильна условию $R = +\infty$. Заметим, что в определении ничего не говорится о сходимости на окружности круга сходимости.

Определение радиуса сходимости корректно:

Теорема 12.2. *Каждый степенной ряд имеет единственный радиус сходимости.*

Доказательство. Покажем, что искомый радиус есть супремум (который всегда существует и единственный):

$$R = \sup_{z \in Conv_p} |z - z_0| \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Если $Conv_p = \{z_0\}$, то $R = 0$. Если $Conv_p = \mathbb{C}$, то $R = +\infty$.

Рассмотрим основной случай: существует точка $z_* \neq z_0$, в которой ряд сходится, и существует точка, в которой ряд расходится. В этом случае $R > 0$, поскольку $R \geq |z_* - z_0| > 0$. Но $R < +\infty$ – это следует из п. 2 теоремы 12.1 Абеля.

Если мы возьмем произвольное число z', для которого $|z' - z_0| > R$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z' - z_0)^k$$

разойдется по определению супремума $\sup_{z \in Conv_p} |z-z_0|$. Если же $|z''-z_0| < R$ (неравенство строгое), то (в силу определения супремума) найдется число $\widehat{z} \in Conv_p$, для которого числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\widehat{z} - z_0)^k$$

сходится и $|z'' - z_0| < |\widehat{z} - z_0|$. Тогда, согласно п. 1 теоремы Абеля, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z'' - z_0)^k$$

сходится. ■

Покажем, как абсолютная и равномерная сходимости связаны с найденным кругом поточечной сходимости:

Теорема 12.3 (*об абсолютной и равномерной сходимостях степенного ряда*).

1. *Внутри круга сходимости степенной ряд поточечно абсолютно сходится, т. е.* $U_R(x_0) \subset Conv_{pa}$.
2. *Степенной ряд равномерно сходится и равномерно абсолютно сходится на любом замкнутом круге* $\overline{U}_r(z_0) \subset U_R(z_0)$*, радиус которого меньше радиуса сходимости:* $r < R$.

Доказательство. Пункт 1 следует из корректности определения круга сходимости и первой теоремы Абеля. В самом деле, для любой точки $z \in U_R(z_0)$ существует такая точка $z_1 \in U_R(z_0)$, что $|z - z_0| < |z - z_1|$.

Доказательство пункта 2. Возьмем число z_1 такое, что $|z_1 - z_0| = r < R$. Поскольку в точке z_1 ряд сходится абсолютно, то это означает сходимость неотрицательного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$. Для всех $z \in \overline{U}_r(z_0)$ справедлива оценка $|c_k(z - z_0)^k| \le |c_k| r^k$, поэтому на круге $\overline{U}_r(z_0)$ функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(z - z_0)^k|$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Из абсолютной равномерной сходимости следует "просто" равномерная сходимость. ■

Замечание 12.2. Из теорем 12.2 и 12.3 следует, что проблемы сходимости остаются на границе круга сходимости – окружности с центром в точке z_0 радиуса R. Оказывается, на границе ряд может вести себя по-разному: абсолютно сходиться, сходиться, расходиться. На всем (открытом) круге сходимости степенной ряд может сходится равномерно, а может сходится неравномерно (см. пример 12.2 ниже).

Отчасти проясняет связь сходимости в точке на границе круга со сходимостью внутри этого круга

Теорема 12.4 (вторая теорема Абеля о сходимости на радиусе). *Если степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

с конечным положительным радиусом сходимости $R \in (0, +\infty)$ *сходится в точке* z_1*, которая лежит на границе круга сходимости (т. е.* $|z_1 - z_0| = R$*), то он сходится* ***равномерно на радиусе*** $[z_0, z_1]$ *(рис. 12.2).*

Доказательство. Перепишем данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z_1 - z_0)^k \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^k .$$

Применим к полученному ряду признак Абеля (теорема 11.12) с $\Omega = [z_0, z_1]$ и

$$a_k(z) = a_k := c_k (z_1 - z_0)^k, \quad b_k(z) := \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^k .$$

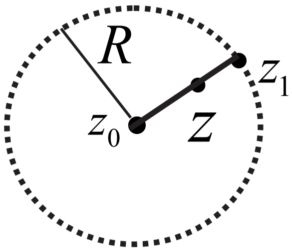

Рис. 12.2

Во-первых, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1 - z_0)^k$ сходится по условию и от переменной z вообще не зависит; поэтому он равномерно сходится на Ω. Во-вторых, при каждом $k \in \mathbb{N}$ на отрезке $\Omega = [z_0, z_1]$ функция $b_k(z) = (\frac{z-z_0}{z_1-z_0})^k$ принимает *действительные значения* (это ключевое наблюдение), принадлежащие отрезку $[0, 1]$:

$$0 \le b_k(z) = \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^k \le 1, \text{ при } z \in [z_0, z_1].$$

Наконец, для каждого фиксированного $z \in \Omega = [z_0, z_1]$ числовая последовательность $\{b_k(z)\} \subset \mathbb{R}$ является монотонно убывающей (нестрого) по k. Значит, признак Абеля равномерной сходимости справедлив для данного ряда на исследуемом множестве. ■

Теперь мы можем исследовать непрерывность суммы степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \tag{12.1}$$

Теорема 12.5.

1. *а) Сумма степенного ряда* (12.1) *непрерывна внутри его круга сходимости.*

   б) Сумма степенного ряда (12.1) *равномерно непрерывна на любом замкнутом круге*

   $$\overline{U}_r(z_0) = \{z : |z - z_0| \le r < R\},$$

   радиус которого r меньше радиуса сходимости ряда R (рис. 12.3).

2. *Если степенной ряд* (12.1) *сходится в точке z_1, которая лежит на границе круга сходимости (т. е. $|z_1 - z_0| = R$), то его сумма непрерывна в точке z_1 по множеству $\Omega = [z_0, z_1]$ (т. е. непрерывна по радиусу изнутри) и равномерно непрерывна на множестве $\Omega = [z_0, z_1]$.*

Доказательство п. 1(а). Так как $|z - z_0| < R$, то возьмем круг такого радиуса r, что $|z - z_0| < r < R$. На замкнутом круге $\overline{U}_r(z_0)$ степенной ряд сходится равномерно (п. 2 теоремы 12.3). Поскольку слагаемые ряда $c_k(z - z_0)^k$

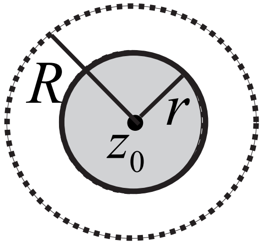

Рис. 12.3

– суть непрерывные функции, то по теореме 11.7 сумма ряда непрерывна на $\overline{U}_r(z_0)$ и, в частности, непрерывна в точке $z \in X$. Справедливость утверждения 1(б) вытекает из *компактности* замкнутого круга $\overline{U}_r(z_0)$ и теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной комплексной функции.

Доказательство п. 2 осуществляется аналогично со ссылкой на теорему 12.4. ■

12.2. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда

Мы доказали существование радиуса сходимости. Остается научится его вычислять. Опять же сравнивая СР с геометрической прогрессией, мы получаем следующее утверждение – *формулу радиуса сходимости Коши–Адамара*:

Теорема 12.6. *Радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{12.2}$$

равен

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}. \tag{12.3}$$

Мы считаем по определению, что $1/0 = +\infty,\ 1/(+\infty) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим неотрицательную числовую последовательность $C_k := \sqrt[k]{|c_k|}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Существует верхний предел $C = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} C_k$ – супремум множества всех частичных пределов последовательности $\{C_k\}$. Более того, нами доказано, что верхний предел сам по себе есть частичный предел, т. е. существует такая подпоследовательность k_i индексов, что предел $\lim\limits_{i\to\infty} C_{k_i} = C$.

Доказательство опирается на тождество

$$|c_k(z-z_0)^k| = (\sqrt[k]{|c_k|}|z-z_0|)^k.$$

Рассмотрим три случая.

Пусть $C=+\infty$, т. е. $\lim\limits_{i\to\infty} C_{k_i}=+\infty$. Значит, для любого $E>0$ существует такое $I\in\mathbb{N}$, что для всех $i>I$ выполняется $C_{k_i}=\sqrt[k_i]{|c_{k_i}|}>E$. Возьмем произвольное число $z\neq z_0$ и положим $E=1/|z-z_0|$. Тогда

$$\forall i>I \hookrightarrow |c_{k_i}(z-z_0)^{k_i}| > E^{k_i}\cdot\left(\frac{1}{E}\right)^{k_i} = 1 \not\to 0,$$

т. е. не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда. Поскольку число $z\neq z_0$ любое, то радиус сходимости $R=0$.

Пусть $C=0$. Если верхний предел неотрицательной последовательности равен нулю, то вся последовательность сходится к нулю. Значит, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $k\in\mathbb{N}$, что для всех $k>K$ выполняется $C_k=\sqrt[k]{|c_k|}<\varepsilon$. Возьмем произвольное число $z\neq z_0$ и положим $\varepsilon=1/(2|z-z_0|)$. Тогда

$$\forall k>K \hookrightarrow |c_k(z-z_0)^k| < \varepsilon^k\cdot\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Поскольку геометрическая прогрессия с показателем $1/2$ сходится, то данный числовой ряд сходится согласно признаку сравнения. Итак, $R=+\infty$.

Наконец, пусть $0<C<+\infty$. Возьмем число z *вне* предполагаемого круга сходимости: $|z-z_0|>1/C$ (неравенство строгое). Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что $|z-z_0|=1/(C-\varepsilon)$. Но из определения подпоследовательности C_{k_i} следует, что

$$\forall\varepsilon>0 \hookrightarrow \exists I\in\mathbb{N} : \forall i>I \hookrightarrow C_{k_i}=\sqrt[k_i]{|c_{k_i}|} > C-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$|c_{k_i}(z-z_0)^{k_i}| > \left(\frac{C-\varepsilon/2}{C-\varepsilon}\right)^{k_i} \overset{i\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Значит, не выполнен необходимый признак сходимости, следовательно, в любой точке z, которая находится “далеко” от z_0, ряд расходится.

Возьмем z *внутри* предполагаемого круга сходимости: $|z-z_0|<1/C$. Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что $|z-z_0|=1/(C+\varepsilon)$. Но из определения верхнего предела следует, что

$$\forall\varepsilon>0 \hookrightarrow \exists K\in\mathbb{N} : \forall k>K \hookrightarrow C_k=\sqrt[k]{|c_k|} < C+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\forall k>K \hookrightarrow |c_k(z-z_0)^k| < \left(\frac{C+\varepsilon/2}{C+\varepsilon}\right)^k.$$

Поскольку геометрическая прогрессия с показателем $\left(\frac{C+\varepsilon/2}{C+\varepsilon}\right) < 1$ сходится, то данный числовой ряд сходится. Следовательно, в любой точке z, которая находится "близко" от z_0, ряд сходится.

Окончательный вывод: $R = 1/C$. ■

Замечание 12.3. Существуют степенные ряды, в которых индексы ненулевых коэффициентов кратны натуральному числу $m \neq 1$. Такие ряды имеют вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{mk}.$$

Заметим, что в такой записи индекс k коэффициента НЕ совпадает с показателем степени. В этом случае формула (12.3) обобщается до формулы

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[mk]{|c_k|}}. \tag{12.4}$$

Замечание 12.4. Если существует "обычный" предел $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, то и в формулах (12.3) и (12.4) верхний предел заменяем обычным (обоснуйте).

Признак Даламбера приводит к альтернативному способу нахождения радиуса сходимости, удобному в том случае, когда коэффициенты ряда содержат сомножители-факториалы.

Теорема 12.7 (формула радиуса сходимости Даламбера)**.** *Пусть для последовательности* $c_k \neq 0$ *существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty} (|c_{k+1}|/|c_k|) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. *Тогда радиус сходимости степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{mk+n}$, *где* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *равен:*

$$R = \frac{1}{\sqrt[m]{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}}. \tag{12.5}$$

Замечание 12.5. Теорема 12.7 слабее теоремы 12.6, однако в некоторых случаях удобнее для вычисления радиуса сходимости. ⊟

Пример 12.2. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$. Радиус сходимости

$$R = (\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/k})^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

Если $|z| = 1$, то $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и по формуле Муавра

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k}.$$

Так как $1/k \downarrow 0$, то оба ряда сходятся при каждом $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (в силу признака Дирихле). При $\varphi = 2\pi n$ получаем ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(1/k)$, который расходится. При $|z| = 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |z^k/k| = \sum_{k=0}^{\infty}(1/k)$, составленный из модулей членов, расходится. Следовательно, в точке $z = 1$ ряд расходится, а в остальных точках границы круга сходимости ряд сходится условно. В круге сходимости $|z| < 1$ ряд сходится неравномерно. Докажем этот факт с помощью критерия Коши. Доказывать отсутствие равномерной сходимости будем в окрестности "плохой" точки $z = 1$, где ряд расходится. Возьмем $z_n = 1/\sqrt[n]{2} \to 1$ при $n \to \infty$ и рассмотрим сумму Коши с $p = n$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+n} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^k \geq n\,\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} \geq \frac{1}{8}.$$

Значит, критерий Коши не выполняется.

12.3. Действия со степенными рядами

Сейчас мы выясним, как влияют на радиус сходимости СР "формальные" интегрирование и дифференцирование. Полученные выводы понадобятся нам в теории рядов Тейлора.

Теорема 12.8 (о формальном дифференцировании и интегрировании СР).

Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ *имеет радиус сходимости* $R \in [0, +\infty]$*, то такой же радиус сходимости имеют* ***формально продифференцированный*** *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z - z_0)^{k-1}$ *и* ***формально проинтегрированный*** *ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$.

Замечание 12.6. Как связано формальное дифференцирование с "настоящим", будет показано позже для действительных степенных рядов.

Доказательство. Поскольку данный ряд является формально продифференцированным по отношению к формально проинтегрированному, то теорему достаточно доказать только для формально продифференцированного ряда.

Во-первых, ряды $S := \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z - z_0)^{k-1}$ и $\widehat{S} := \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(z - z_0)^k$ (второй получен из первого умножением на $(z-z_0)$) сходятся или расходятся одновременно (т. е. при одних и тех же значениях z). В самом деле, при $z = z_0$ оба ряда сходятся. При $z \neq z_0$ имеем для частичных сумм:

$$\widehat{S}_n := \sum_{k=0}^{n} kc_k(z - z_0)^k = \frac{1}{z - z_0}\sum_{k=1}^{n} kc_k(z - z_0)^{k-1} = \frac{1}{z - z_0} S_{n-1}.$$

Следовательно, оба предела $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$ и $\widehat{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{S}_n$ существуют или не существуют одновременно.

Теперь найдем радиус сходимости ряда $\widehat{S}$ по формуле Коши–Адамара, заменив верхний предел частичным пределом, который его реализует:

$$\frac{1}{\widehat{R}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|kc_k|} = \lim_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{|k_i c_{k_i}|} = \lim_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{k_i} \cdot \lim_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{|c_{k_i}|} = 1 \cdot \frac{1}{R}. \blacksquare$$

Позже нам понадобится

Теорема 12.9 (о радиусе сходимости суммы двух степенных рядов). *Пусть R_1 и R_2 – радиусы сходимости степенных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$ соответственно. Тогда радиус сходимости R ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(c_k+d_k)(z-z_0)^k$ равен:*

1) $R = \min\{R_1, R_2\}$, если $R_1 \neq R_2$;

2) $R \geq R_1$, если $R_1 = R_2$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $R_1 < R_2$. Тогда при $|z-z_0| < R_1$ оба ряда сходятся и ряд, являющийся их суммой, тоже сходится. Если $R_1 < |z-z_0| < R_2$, то первый ряд расходится, а второй сходится. Поэтому их сумма расходится. Поскольку сумма рядов также является степенным рядом, мы можем сделать вывод, что $R = R_1 = \min\{R_1, R_2\}$. (Нет необходимости исследовать сходимость ряда при условии $|z-z_0| \geq R_2$: т. к. обнаружены точки z, в которых ряд расходится при условии $|z-z_0| > R_1$, то ряд тем более будет расходится при условии $|z-z_0| \geq R_2 > R_1$. Хотя, заметим, сумма двух расходящихся рядов не обязана расходиться.)

Если же $R_1 = R_2$, то при $|z-z_0| < R_1$ оба ряда сходятся и ряд, являющийся их суммой, тоже сходится. Поэтому $R \geq R_1$. При условии, что $|z-z_0| > R_1 = R_2$, оба ряда расходятся, и сделать определенный вывод невозможно. $\blacksquare$

Примеры 12.1.

1) Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)z^k$ равен 2, поскольку радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)z^k$ равен 2, а радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\right)z^k$ равен 3.

2) Ряды $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)z^k$ имеют радиусы сходимости, равные 1, а их сумма имеет радиус сходимости $+\infty$, поскольку сумма равна нулевому ряду.

13. Ряды Тейлора

13.1. Степенные ряды с действительными членами

Ряды Тейлора также естественно исследовать на $\mathbb{C}$, однако для этого требуются продвинутые знания о функциях комплексной переменной. Поэтому сейчас мы вынуждены ограничиться случаем рядов с действительными коэффициентами от действительной переменной $x \in \mathbb{R}$. Прежде всего уточним результаты теории СР на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим действительный степенной ряд (ДСР)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad \text{где} \quad a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}. \tag{13.1}$$

Поскольку ДСР можно рассматривать как комплексный, трактуя *переменную* x как комплексную, то радиус сходимости ДСР можно определить по формуле Коши–Адамара (12.3), положив $c_k = a_k$. Центр круга сходимости $x_0 \in \mathbb{R}$, поэтому пересечение круга сходимости с действительной прямой есть **интервал сходимости** $I_R = (x_0 - R, x_0 + R)$.

Переформулируем утверждения теоремы 12.8 о *символических* интегрировании и дифференцировании комплексных СР в теорему об интегрировании и дифференцировании ДСР в полном понимании этих операций. Предположим, что ряд (13.1) имеет положительный радиус сходимости $R > 0$ и вля этого введем в рассмотрение функцию

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad \text{где} \quad x \in I_R = (x_0 - R, x_0 + R). \tag{13.2}$$

Теорема 13.1 (об интегрировании и дифференцировании ДСР). *При сделанном выше предположении*

1. *для любого $x \in I_R$ справедлива формула почленного интегрирования*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}; \tag{13.3}$$

2. *в интервале сходимости I_R функция f имеет производные любого порядка, причем для любого $x \in I_R$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула почленного дифференцирования*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k((x-x_0)^k)^{(n)}; \tag{13.4}$$

3. *коэффициенты a_k определяются по функции f формулой*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{13.5}$$

4. *Если функция представима в виде степенного ряда с положительным радиусом сходимости, то коэффициенты этого ряда определяются единственным образом.*

Доказательство п. 1. Возьмем произвольное $r \in (|x-x_0|, R)$. Данный ряд равномерно сходится на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$ (теорема 12.3). Поэтому, применяя теорему 11.8, получаем формулу (13.3).

Доказательство п. 2. Во-первых, ряд (13.4) сходится при $x = x_0$. Во-вторых, в силу теоремы 12.8, радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}, \tag{13.6}$$

полученного формальным дифференцированием, равен R. Поэтому на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$, который определен нами в предыдущем пункте доказательства, ряд (13.6) сходится равномерно. В силу теоремы 11.9, получаем формулу (13.4) при $n = 1$. Применяя те же рассуждения произвольное конечное количество раз, получаем формулу (13.4) для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Формула (13.5) получается из формулы (13.4) подстановкой $x = x_0$. Единственность коэффициентов степенного ряда следует из формулы (13.5), поскольку она определяет коэффициенты через саму функцию. ■

13.2. Ряд Тейлора

Напомним, что функция f называется **бесконечно дифференцируемой** в точке x_0, если для любого $k \in \mathbb{N}$ существует производная $f^{(k)}(x_0)$.

Определение 13.1. *Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0. Степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{13.7}$$

*называют **рядом Тейлора** функции f в точке x_0. По аналогии с формулой Тейлора, ряд Тейлора функции f в точке $x_0 = 0$ называют **рядом Маклорена** этой функции.*

Определение 13.2. *Функция f называется* ***регулярной*** *в точке x_0, если она бесконечно дифференцируема в этой точке и ее ряд Тейлора в точке x_0* ***сходится к этой же функции f в некоторой окрестности точки*** *x_0, т. е.*

$$\exists\delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \ \hookrightarrow \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Пусть функция f определена в μ-окрестности точки x_0. В точке x_0 функция f может быть:

1) регулярной в некоторой δ-окрестности ($\delta \le \mu$) (обозначение $f \in RF(x_0)$);

2) бесконечно дифференцируемой в некоторой δ-окрестности (обозначение $f \in ID(x_0)$);

3) иметь ряд Тейлора ($f \in TS(x_0)$);

4) иметь в некоторой δ-окрестности *представление в виде степенного ряда*, т. е.

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0),$$

то есть $f \in PS(x_0)$.

Между названными свойствами имеются логические связи, нуждающиеся в пояснении:

1. $f \in RF(x_0) \Rightarrow f \in ID(x_0)$: регулярная в точке x_0 функция, в силу п. 2 теоремы 13.1, является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности этой точки;

2. $f \in ID(x_0) \Rightarrow f \in TS(x_0)$ (РТ): в силу определения (13.7), если функция бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то она имеет в ней ряд Тейлора;

3. $f \in RF(x_0) \Leftrightarrow f \in PS(x_0)$: в силу п. 3 теоремы 13.1, если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости, то он (ряд) порождает функцию (сумму ряда), определенную на интервале сходимости, для которой этот же ряд является рядом Тейлора ($a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$), а функция является регулярной в точке x_0.

Однако из условия $f \in ID(x_0)$ в общем случае НЕ следует условие $f \in RF(x_0)$, т. е. существует бесконечно дифференцируемая функция, порождающая ряд Тейлора, который (т. е. ряд) к ней НЕ сходится ни в какой сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Примеры 13.1. Рассмотрим функции (рис. 13.1 – 13.3)

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \ne 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Функция g больше нуля всюду, кроме точки $x_0 = 0$. В нуле производная любого порядка $g^{(k)}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Следовательно, функция g бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, а ее коэффициенты ряда Маклорена в точке $x_0 = 0$ все равны нулю. Значит, ряд Маклорена всюду сходится, его сумма равна тождественному нулю на $\mathbb{R}$ и НЕ совпадает с функцией g ни в одной точке, кроме $x_0 = 0$. Все производные функции h также обнуляются в нуле, но ее ряд Маклорена совпадает с функцией на полуоси неотрицательных чисел. Известны бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции, ряд Маклорена которых не сходится ни в одной точке. Получается, что в общем случае все производные в одной точке не дают прогноза поведения функции ни в какой ее окрестности.

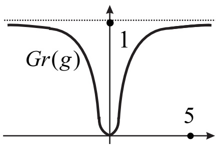

Рис. 13.1

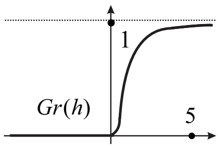

Рис. 13.2

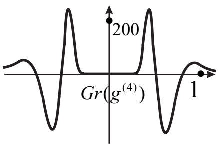

Рис. 13.3

Оказывается, для функций комплексного переменного ситуация принципиально иная: однократная дифференцируемость (в комплексном смысле!) в круге влечет бесконечную дифференцируемость, которая, в свою очередь, влечет регулярность.

Возникает естественный вопрос: каковы условия сходимости ряда Тейлора именно к той функции, которая его породила? Другими словами, каковы условия регулярности функции? Чтобы ответить на него, мы воспользуемся остатком

$$r_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) - S_n(x),$$

где $S_n(x)$ – одновременно и многочлен Тейлора, и частичная сумма ряда Тейлора, а $r_n(x)$ – одновременно и остаточный член формулы Тейлора, и остаток ряда Тейлора.

Лемма 13.1 (критерий регулярности функции). *Функция f является регулярной в точке x_0 только тогда, когда*

$$\exists\delta > 0: \ \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Доказательство. Достаточно определение регулярности (п. 3 определения **??**) сопоставить с определением суммы функционального ряда. ■

Замечание 13.1. Ранее, исследуя *формулу* Тейлора, мы проверяли порядок стремления остатка $r_n(x) \to 0$, фиксируя $n \in \mathbb{N}$, при $x \to x_0$. Сейчас, исследуя *ряд* Тейлора, мы проверяем стремление остатка $r_n(x) \to 0$, фиксируя произвольный $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$, при $n \to \infty$.

Применим лемму 13.1, чтобы получить

Теорема 13.2 (достаточный признак регулярности). *Пусть функция f бесконечно дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0 и все ее производные равномерно ограничены в этой окрестности, т. е.*

$$\exists\delta > 0 \ \wedge \ \exists M > 0: \ (\forall n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \forall x \in U_\delta(x_0)) \ \hookrightarrow \ |f^{(n)}(x)| \le M.$$

Тогда функция регулярна в точке x_0 и ее ряд Тейлора сходится к ней в той же δ-окрестности точки x_0:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \ \hookrightarrow \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Доказательство. Остаточный член формулы Тейлора запишем в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},$$

где $x \in U_\delta(x_0)$, а ξ лежит строго между x_0 и x. Из условия теоремы получаем равномерную для всех $x \in U_\delta(x_0)$ оценку сверху: $|r_n(x)| \le M\delta^{n+1}/(n+1)!$. Остается показать, что с ростом n дробь $d_{n+1} := \delta^{n+1}/(n+1)!$ стремится к нулю, иначе говоря, степенная функция растет медленнее, чем факториал (не исключено, что $\delta > 1$, и мы имеем дело с неопределенностью $\delta^{n+1}/(n+1)! = \infty/\infty$ при $n \to \infty$). Но отношение $d_{n+1}/d_n = \delta/(n+1) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому последовательность d_n убывает к нулю быстрее, чем геометрическая прогрессия с произвольным показателем $q \in (0, 1)$. ■

Замечание 13.2. Понятно, что функции из примеров 13.1 не удовлетворяют условиям теоремы 13.2: с ростом n производные $g^{(n)}(x)$ неограниченно растут в сколь угодно малой окрестности нуля (на рис. 13.3 порядок $n = 4$).

Чтобы воспользоваться леммой 13.1, полезно иметь в запасе разные способы представления остатка. Форма Пеано остатка для наших целей не подходит, поскольку оценивает его при условии $x \to x_0$, а не в конкретных точках. Кроме формы остатка по Лагранжу, нам понадобятся еще две.

Теорема 13.3 (интегральная форма остаточного члена). *Если функция f на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имеет непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно, то остаточный член формулы Тейлора равен*

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \quad \forall\, x\in(x_0-\delta, x_0+\delta). \tag{13.8}$$

Доказательство индукцией. При $n=0$ получаем:

$$r_0(x):=f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)dt=\frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f^{(0+1)}(t)dt,$$

т. е. утверждение справедливо.

Пусть теорема справедлива для n, т. е. верно тождество (13.8). Предполагая существование производной порядка $n+2$ и интегрируя по частям, получаем

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)\left(\frac{-1}{n+1}\right)d((x-t)^{n+1})=$$

$$=-\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt.$$

Но, по определению,

$$r_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+r_{n+1}(x).$$

Поэтому

$$r_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt. \ ■$$

Следствие 13.1. *(остаточный член в форме Коши) В условиях теоремы 13.3 для $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ справедливо тождество:*

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\vartheta\Delta x)\cdot(1-\vartheta)^n\Delta x^{n+1}, \tag{13.9}$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\vartheta=\vartheta(n,x)\in(0,1)$.

Доказательство. Применим к интегралу (13.8) теорему о среднем, взяв в качестве первого сомножителя $\alpha(x)$ всё подынтегральное выражение, а в качестве второго (знакопостоянного!) сомножителя функцию $\beta(x)\equiv 1$:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}((x-t)^n f^{(n+1)}(t))\cdot 1\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\vartheta\Delta x)\cdot(\Delta x-\vartheta\Delta x)^n\Delta x.$$

Остается вынести в предпоследней скобке общий множитель Δx. ■

Замечание 13.3. При оценке сверху форма Коши “проигрывает” форме Лагранжа в первом сомножителе: $1/(n+1)!\,:\,1/n!=1/(n+1)$. Но “выигрывает” за счет сомножителя $(1-\vartheta)^n$.

13.3. Ряды Маклорена основных элементарных функций

Мы уже умеем раскладывать по *формуле* Маклорена основные элементарные функции до любого конечного порядка. Поэтому записать ряд Тейлора этих функций не составляет труда. Но возникает принципиальный вопрос: где эти ряды сходятся к исходной функции? Мы ответим на него, оценивая остаток $r_n(x)$ с помощью теоремы 13.2 и следствия 13.1.

Теорема 13.4. *Ряды Маклорена функций $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \cos x, \sin x$ сходятся к этим функциям на всей числовой прямой: для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{13.10}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{13.11}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{13.12}$$

Доказательство. Поскольку для любого $x \in (-\delta, \delta)$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^\delta := M$, то для функции $y = e^x$ выполнено достаточное условие регулярности в точке $x_0 = 0$ на *произвольном* интервале $(-\delta, \delta)$ (теорема 13.2). Что доказывает тождество (13.10) на $\mathbb{R}$.

Аналогично доказываются тождества (13.11) и (13.12). ■

Теорема 13.5. *Ряд Маклорена функции $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$, сходится к ней на интервале $x \in (-1, 1)$:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k, \ \forall x \in (-1, 1), \tag{13.13}$$

где $C_\alpha^0 = 1, \ C_\alpha^k = \frac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1), \ k \in \mathbb{N}$.

При $\alpha = 0, 1, 2\ldots$ разложение (13.13) вырождается в конечный многочлен степени n – бином Ньютона:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k, \ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Применяя к ряду (13.13) признак Даламбера, убеждаемся, что он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Докажем, что он сходится именно к функции $f(x) = (1+x)^\alpha$. Запишем остаточный член в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}(1-\vartheta)^n x^{n+1}.$$

Поскольку $|x| < 1$, а $0 < \vartheta < 1$, то $0 < 1-\vartheta < 1+\vartheta x$. Поэтому

$$|r_n(x)| \le \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}(1+\vartheta x)^{\alpha-1}|x|^{n+1} \le$$

$$\le \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}\cdot 2^{\alpha-1}.$$

Рассмотрим последовательность $d_n := \frac{1}{n!}|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|\cdot|x|^{n+1}$. Оценим отношение ее соседних членов:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x| = \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)|x| < |x| < 1$$

для всех достаточно больших n. Значит, при любом фиксированном $x \in (-1,1)$ остаточный член стремится к нулю быстрее убывающей геометрической прогрессии с коэффициентом $|x| < 1$. ■

Выпишем наиболее часто встречающиеся случаи формулы (13.13):

$$a)\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad b)\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \tag{13.14}$$

$$a)\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}x^k,$$

$$b)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^k. \tag{13.15}$$

Из формулы (13.14)(a) и п. 1 теоремы 12.1 о почленном интегрировании следует, что

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1,1).$$

В формулу (13.14) п. a) подставим x^2 вместо x, получим разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}. \tag{13.16}$$

Ряд Маклорена функции $f(x) = (1+x)^{-1}$ сходится к $f(x)$ при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, поэтому ряд Маклорена функции $g(x) := f(x^2) =$

$(1+x^2)^{-1}$ сходится к $g(x)$ при $|x^2| < 1$ и расходится при $|x^2| > 1$. Значит, радиус сходимости ряда Маклорена остался прежним – он равен 1. Интегрируя разложение (13.16) и применяя п. 1 теоремы 13.1, получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Наконец, из формулы (13.15) п. b) после подстановки $x = t^2$ и интегрирования получаем

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Замечание 13.4. Еще раз подчеркнем, что свойства степенного ряда, в том числе и ряда Тейлора, раскрываются только на комплексной плоскости. Глядя на график функции $(1+x^2)^{-1}$, непонятно, почему ее ряд Маклорена имеет радиус сходимости 1. Все объясняет разложение $(1+z^2)^{-1} = (1+iz)^{-1} \cdot (1-iz)^{-1}$.

13.4. Разложение в степенной ряд функции e^z

Пусть комплексное число $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Согласно данному ранее определению экспоненты, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. С другой стороны, нами получены ряды Маклорена для e^x, $\cos x$, $\sin x$, которые естественно распространить на всю комплексную прямую.

Теорема 13.6. *Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{13.17}$$

Доказательство. Из теоремы 13.4 следует, что радиус сходимости ряда в (13.17) равен бесконечности (обоснуйте). Поэтому этот ряд для любого $z \in \mathbb{C}$ сходится абсолютно. Рассмотрим сумму исследуемого ряда

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ . \tag{13.18}$$

Требуется доказать, что $f(z) = e^z$, последнее равносильно равенству

$$f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Сначала покажем, что для функции (13.18) выполняется **групповое свойство** экспоненты:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2),$$

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	...
(2,0)	(2,1)	...	...
(3,0)	...	...	...

Рис. 13.4

т. е. сложение аргументов (показателей) приводит к перемножению функций (степеней). Из теоремы об умножении абсолютно сходящихся рядов следует, что

$$f(z_1)f(z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z_1^{k_i}}{k_i!}\frac{z_2^{n_i}}{n_i!},$$

где $\{(k_i,n_i)\}$ – **произвольная** последовательность пар номеров, порожденная биекцией между множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел i и множеством $(\mathbb{N}\cup\{0\})^2$ упорядоченных пар (k,n) неотрицательных целых чисел. Определим биекцию "методом диагоналей" (рис. 13.4). То есть, первый элемент – это пара $(0,0)$. Затем идут две пары $(1,0),(0,1)$, у которых сумма элементов равна единице. Затем идут три пары $(2,0),(1,1),(0,2)$, у которых сумма элементов равна двум, и т. д. При таком пересчете мы группируем слагаемые с *фиксированной суммой* элементов: $k_i+n_i=m=const$. Теперь ряд можно переписать так:

$$f(z_1)f(z_2)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z_1^{k_i}}{n_i!}\frac{z_2^{n_i}}{n_i!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{z_1^k z_2^{m-k}}{k!(m-k)!}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}z_1^k z_2^{m-k}.$$

Мы получили бином Ньютона, поэтому

$$f(z_1)f(z_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(z_1+z_2)^m=f(z_1+z_2).$$

Применяя доказанное свойство и формулу (13.18), имеем:

$$f(z)=f(x+iy)=f(x)\cdot f(iy)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}=$$

$$=e^x\left(\sum_{k-\text{четн.}}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}+\sum_{k-\text{неч.}}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}\right)=$$

$$=e^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z. \ \blacksquare$$

По аналогии с *доказанной* формулой (13.17) *определим* тригонометрические и гиперболические функции для комплексной переменной с помощью ранее полученных вещественных рядов (13.11) и (13.12): для любого $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{ch} z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Из теоремы 13.4 следует, во-первых, что радиус сходимости этих рядов равен $+\infty$. Во-вторых, для действительных z определенные выше функции совпадают с тригонометрическими и гиперболическими функциями действительного аргумента; т. е. выполнен принцип преемственности. Более того, сохраняются формулы Эйлера:

Следствие 13.2. *Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы равенства*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Из (13.17), подставив iz вместо z, получаем:

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i\sin z. \ \blacksquare$$