Опр. Пусть f опр-на на отрезке $[a,b]$. Её **колебанием** на этом отрезке называется число

$$\omega(f,[a,b]) = \sup_{x',x''\in[a,b]} |f(x')-f(x'')| = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

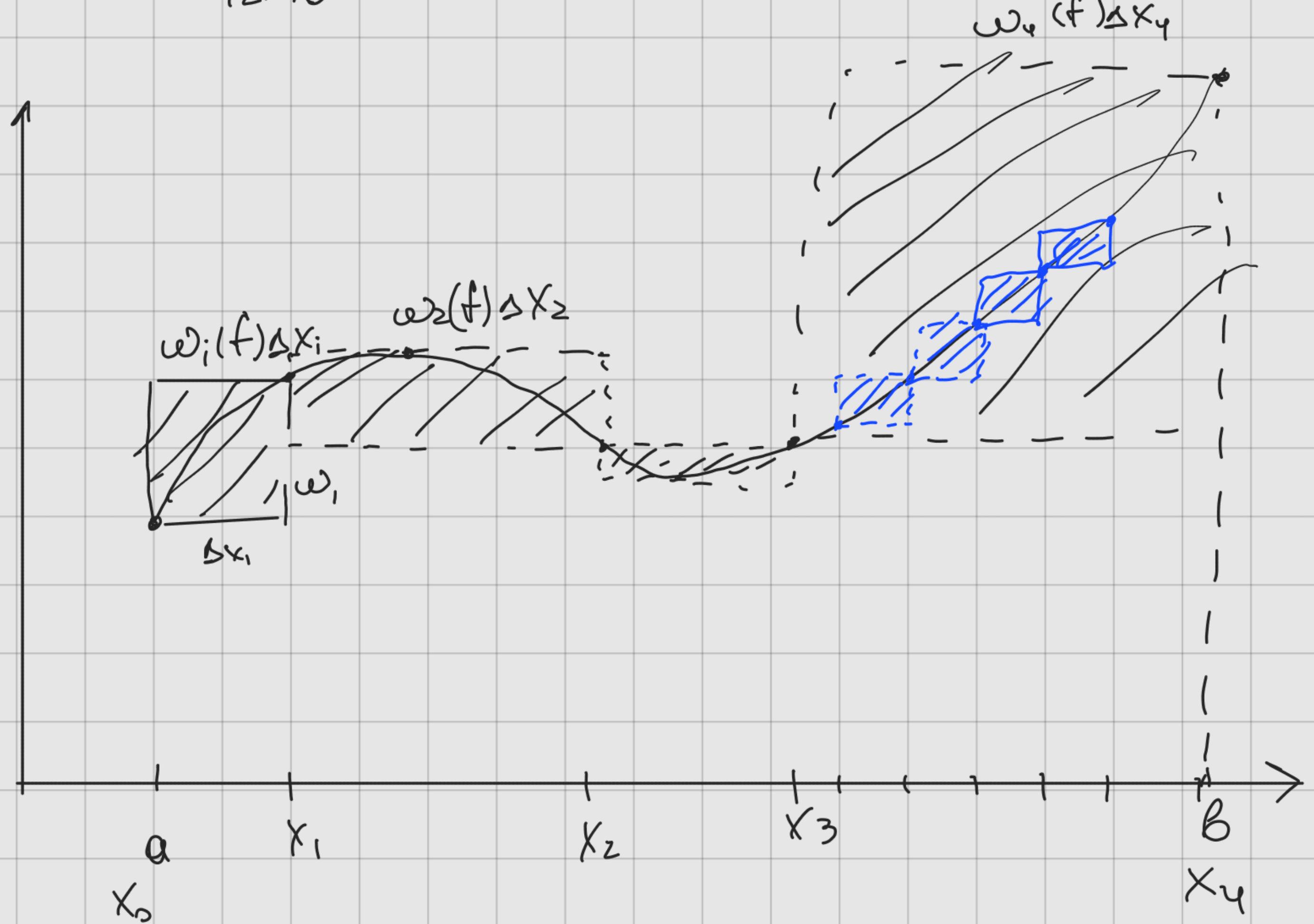
Th. (Критерий интегрируемости)

f - интегрируема на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0: \forall t: |t|<\delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$

$\downarrow$ разб-ие

или: $\lim_{|t|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = 0$



Замечание: $\sum (\sup_{\Delta x_i} f - \inf_{\Delta x_i} f)\Delta x_i < \varepsilon$

n

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \, \Delta x_i < \varepsilon$$

Опр. (Сумма Дарбу) Пусть f - огр. на $[a,b]$,

$\tau = \{x_i\}^n$ - разбиение $[a,b]$. Пусть $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$,

$m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$

Тогда $\underline{S_\tau}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ - ниж. сумма Дарбу

$\overline{S_\tau}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ - верх. сум. Дарбу

Опр. (Определённый интеграл по Дарбу)

f - инт-ма на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$

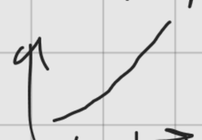
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta \hookrightarrow \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon$

Напоминание из равн. непр-ти:

Th. f - равн. непр. на $[a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \omega(f, \Delta x) = 0$

$\Delta x = x'' - x'$, $\forall x', x'' \in [a,b]$

Th. Ф-ия монотонная на $[a,b] \Rightarrow f$-интегрируема на $[a,b]$



(Если $f = const$ => очев)

Док-во: Будем считать, что f – возрастает.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)|t| = |t|\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right) =$$

$$= |t|\cdot\left(f(x_n)-f(x_0)\right) = |t|\cdot\left(f(b)-f(a)\right) \xrightarrow[|t|\to 0]{} 0$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2f(b)-f(a)} : \forall t : |t|<\delta \mapsto \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ – инт на $[a, b]$

Th. f – непр. на $[a,b] \Rightarrow f$ – инт-ма на $[a,b]$

Док-во:

1) f – непр-на на $[a,b] \overset{\text{по Th Кантора}}{\Rightarrow} f$ – равн. непр. на $[a,b]$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0 : \forall x', x'' \in [a,b] : |x'-x''|<\delta \mapsto \omega(f,[x',x''])<\varepsilon$

2) Распишем $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i$ при $t : |t|<\delta$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$ f – инт. в силу критерия инт-ти ($< \varepsilon$)

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)>0 : \forall t : |t|<\delta \mapsto \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$$