Семинар 9. Равномерная сходимость функциональных рядов. Теоремы о непрерывности, почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся рядов.

Скубачевский Антон

21 мая 2022 г.

1 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. Поточечно сходящийся функциональный ряд. Говорят, что функциональный ряд сходится поточечно на множестве E, если сходится поточечно на множестве E последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Определение. Равномерно сходящийся функциональный ряд. Говорят, что функциональный ряд сходится равномерно на множестве E, если сходится равномерно на множестве E последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

В решении задач забудьте про это определение и частичные суммы. В решении задач нам пригодятся лишь пара теорем:

Признак Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости) Пусть $\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N, \forall x \in E \Rightarrow |f_k(x)| \leq a_k$, где ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве E.

Этот признак очень похож на достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности: там мы тоже для любого икса ограничивали сверху числовой последовательностью, не зависящей от x.

Напишем теперь достаточное условие отсутствия равномерной сходимости функционального ряда:

Достаточное условие отсутствия равномерной сходимости Пусть $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} : \exists k(N) \geq N \exists x_N \in E \Rightarrow |f_k(x_N)| \geq \varepsilon$.

Это условие значит: если на некоторой последовательности иксов $k-$й член ряда не стремится к нулю, то ряд не сходится. Это логично: у сходящегося ряда $k-$й член должен стремиться к нулю.

Пример 1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{k} e^{k/x}}$$

Ход решения состоит из 3 пунктов, как и в задачах на функциональные последовательности. Причем в них мы делаем примерно то же самое, достаточные условия ведь для рядов и последовательностей очень похожи. Но, тем не менее, тут легко перепутать и облажаться.

1). Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$. Исследуем числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{k} e^{k/x_0}} = x_0 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} e^{k/x_0}}$ на сходимость. Мы знаем, что шаблонный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\alpha k} k^{\beta}}$ сходится при $\alpha > 0$ при любых β, значит, ряд $x_0 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} e^{k/x_0}}$ сходится $\forall x_0 \in E_1 \cup E_2$. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{k} e^{k/x}}$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$.

Заметим, что этот пункт принципиально отличается от первого пункта задачи про функциональные последовательности тем, что там мы фиксировали x_0 и искали предел получившейся числовой последовательности, а тут мы фиксируем x_0 и исследуем получившийся числовой ряд на сходимость, пользуясь знаниями из семинара про числовые ряды. Кроме того, в задаче с функциональными последовательностями нас интересовала предельная функция: потом мы исследовали еще модуль $|f_n(x) - f(x)|$ на стремление к нулю. А в задачах с функциональными рядами никакой предельной функции нет. Мы просто исследуем соответствующий ряд на сходимость.

2). Подумаем, какое бы нам значение x_N подобрать, чтобы $f_k(x_N) \nrightarrow 0$ при $k = N$ (мы обычно именно таким берем k в данном пункте). Очевидно, нам надо придумать такую последовательность, чтобы экспонента в знаменателе исчезла. Первое, что приходит в голову, – $x_N = N$. Но при $N = 1$ $x_N = 1$ и не принадлежит ни E_1, ни E_2. Поэтому берем $x_N = 2N$. $x_N \in E_2$, поэтому исследуем ряд на равномерную сходимость на множестве E_2. Имеем:

$$|f_k(x_N)| = |\frac{2N}{\sqrt{N}e^{N/2N}}| \geq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

То есть:

$$\exists \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{e}} > 0, \forall N : \exists k = N \exists x_N = 2N \in E_2 : |f_k(x_N)| \geq \varepsilon$$

Значит, функциональный ряд не сходится равномерно на E_2.

3). Исследуем на равномерную сходимость на множестве E_1. Т.к. на E_2 не сходится равномерно, то, по правилам подобных задач, на E_1 сходится равномерно. То есть нам нужно тут применить признак Вейерштрасса. Учтя, что на E_1 $x \in (0, 1)$, имеем:

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}e^k}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}e^k}$ сходится, значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

WARNING! В этом пункте после оценки $|f_k(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}e^k}$ многие пишут $\frac{1}{\sqrt{k}e^k} \to 0 \Rightarrow$ сходится равномерно. Так писать, разумеется, нельзя, потому что для функциональных рядов нет признака, который говорит, что если мы сверху ограничили числовым рядом со стремящимся к нулю $k-$м членом, то наш ряд тоже сходится. Стремления к нулю $k-$го члена недостаточно. Нам нужно более сильное утверждение, сходимость ряда. Это очень распространенная ошибка, связанная с тем, что народ путает достаточные условия сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Ответ: ряд сходится равномерно на E_1 и поточечно на E_2.

Пример 2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) =$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{sin\frac{1}{kx}}{1+kx^2}$

1). Исследуем на поточечную сходимость. Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$. Далее воспользуемся неравенством $|sinx| \le |x|$.

$$|f_k(x_0)| \le \frac{\frac{1}{kx_0}}{1+kx_0^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. Значит, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится по признаку сравнения. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2). Прикинем, при каком x_N $f_k(x_N)$ не будет стремиться к нулю. Нам подойдет $x_N = \frac{1}{2N} \in E_1$. Значит, будем доказывать, что ряд не сходится равномерно на E_1. Как всегда возьмем $k = N$. Тогда (т.к. $N/4N^2 \le 1$ при $N \in \mathbb{N}$):

$$|f_k(x_N)| = \frac{sin2}{1+\frac{N}{4N^2}} \ge \frac{sin2}{2}.$$

То есть

$$\exists \varepsilon = \frac{sin2}{2} : \forall N \exists k = N, \exists x_N = \frac{1}{2N} \in E_1 : |f_k(x_N)| \ge \varepsilon$$

Значит, ряд не сходится равномерно на E_1 по достаточному условию отсутствия равномерной сходимости.

3). Исследуем на равномерную сходимость на $E_2 = (1, \infty)$ с помощью признака Вейерштрасса. Используем неравенство $|sinx| \le |x|$

$$|f_k(x)| \le \frac{\frac{1}{kx}}{1+kx^2} \le \frac{1}{k^2x^3} \le \frac{1}{k^2}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на E_2 по признаку Вейерштрасса.

Ответ: сходится поточечно на E_1 и равномерно на E_2.

Иногда невозможно подобрать такую последовательность x_k, чтобы $f_k(x_k)$ не стремился к нулю. Но, тем не менее, противный ряд при этом все равно расходится. Чтобы доказать, что он расходится, в таких случаях нужно пользоваться нашим любимым критерием Коши:

Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве $E \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N (m < n), \forall x \in E \Rightarrow |\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)| < \varepsilon$$

Пример 3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{k}+k} arctg \frac{x}{\sqrt{k}}$.

1). Исследуем на поточечную сходимость. Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$. Т.к. $arctg \frac{x_0}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$, имеем: $|f_k(x_0)| \sim \frac{1}{k\sqrt{k}}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ сходится. Значит, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится по признаку сравнения. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2). Попробуем придумать x_k: $f_k(x_k) \not\to 0$. Подумали 5 минут. Чота не придумалась. Значит, $k-$й член не стремится к нулю, халявы не будет, придется доказывать расходимость ряда с помощью Критерия Коши. Запишем отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \begin{cases} \exists n(N) \geq N \\ \exists m(N) \geq N : \\ \exists x_N \end{cases} |\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x_N)| \geq \varepsilon$$

В таких номерах чаще всего берут $m = N$, $n = 2N$, чтобы пределы суммирования были простыми. Возьмем $x_N = \sqrt{N}$, чтобы под арктангенсом стояла константа. Теперь осталось все это подставить в сумму и не перепутать буковки, а также сделать оценки, зная, что в сумме $k \in (N, 2N]$.

$$|\sum_{k=N+1}^{2N} f_k(x_N)| = |\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{k}+k} arctg \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{k}}| \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{2N}+2N} arctg \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2N}} =$$

$$= \frac{1}{N(\sqrt{2}+2)} arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=N+1}^{2N} 1 = \frac{1}{N(\sqrt{2}+2)} arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot N = \frac{1}{\sqrt{2}+2} arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0$$

Имеем:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}+2} arctg \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 : \forall N \begin{cases} \exists n(N) = N \geq N \\ \exists m(N) = 2N \geq N : \quad |\sum\limits_{k=m+1}^{n} f_k(x_N)| \geq \varepsilon \\ \exists x_N = \sqrt{N} \end{cases}$$

Значит, ряд не сходится равномерно на E_2 по Критерию Коши.

3). Исследуем на равномерную сходимость на $E_1 = (0, 1)$

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \frac{x}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ сходится. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на E_1 по признаку Вейерштрасса.

Ответ: ряд сходится равномерно на E_1 и поточечно на E_2.

Пример 4. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx} sin(kx^2)}{xk}$.

1). Исследуем на поточечную сходимость. Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$. $|f_k(x_0) \leq \frac{1}{x_0} \frac{e^{-kx_0}}{k}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_0} \frac{e^{-kx_0}}{k}$ сходится. Значит, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится по признаку сравнения. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2). Исследуем на равномерную сходимость на E_1. Докажем, что не сходится равномерно с помощью критерия Коши. Возьмем $m = N$, $n = 2N$. Возьмем $x_N = \frac{1}{N}$. В неравенствах ниже используем неравенство $|sinx| \geq \frac{2}{\pi}|x|$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Если взять $x_N = 1/N$, то выражение под синусом будет k/N^2. Оно $\in (0; \pi/2)$ при всех $k \in [N, 2N]$, кроме случая, когда $N = 1$, тогда при $k = 2N$ под синусом стоит 2. Поэтому возьмем $x_N = 1/2N$, чтобы выражение под синусом всегда $\in (0; \pi/2)$.

$$|\sum_{k=N+1}^{2N} f_k(x_N)| = |\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{e^{-k/2N} sin\frac{k}{4N^2}}{\frac{k}{2N}}| \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{e^{-2N/2N}\frac{2}{\pi}\frac{N}{4N^2}}{\frac{2N}{2N}} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{\pi} \cdot \frac{1}{2N} \sum_{k=N+1}^{2N} 1 = \frac{e^{-1}}{2\pi} \not\to 0$$

Имеем:

$$\exists \varepsilon = \frac{e^{-1}}{2\pi} > 0 : \forall N \begin{cases} \exists n(N) = N \geq N \\ \exists m(N) = 2N \geq N : \\ \exists x_N = \frac{1}{N} \end{cases} \quad |\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x_N)| \geq \varepsilon$$

Значит, ряд не сходится равномерно на E_1 по Критерию Коши.

3). Исследуем на равномерную сходимость на E_2. Используем, что $|sinx| \leq 1$.

$$|f_k(x)| \leq \frac{e^{-kx^2}}{kx} \leq \frac{e^{-kx^2}}{k} \leq \frac{e^{-k}}{k}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}}{k}$ сходится. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на E_2 по признаку Вейерштрасса.

Ответ: ряд сходится равномерно на E_2 и поточечно на E_1.

Пример 5. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} xsin\frac{1}{(xk)^2}$.

1). Исследуем на поточечную сходимость. Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$. $|f_k(x_0)| \leq \frac{1}{x_0 k^2}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_0 k^2}$ сходится. Значит, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится по признаку сравнения. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2). Исследуем на равномерную сходимость на E_1. Докажем, что не сходится равномерно с помощью критерия Коши. Возьмем $m = N$, $n = 2N$. Возьмем $x_N = \frac{1}{N}$.

$$|\sum_{k=N+1}^{2N} f_k(x_N)| = |\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{N} sin \frac{1}{(\frac{1}{N}k)^2}| \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{N} sin \frac{1}{(\frac{2N}{N})^2} =$$

$$= sin\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{2N} 1 = sin\frac{1}{4} \not\to 0$$

Имеем:

$$\exists \varepsilon = sin\frac{1}{4} > 0 : \forall N \begin{cases} \exists n(N) = N \geq N \\ \exists m(N) = 2N \geq N : \\ \exists x_N = \frac{1}{N} \end{cases} \quad |\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x_N)| \geq \varepsilon$$

Значит, ряд не сходится равномерно на E_1 по Критерию Коши.

3). Исследуем на равномерную сходимость на E_2.

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{xk^2} < \frac{1}{k^2}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на E_2 по признаку Вейерштрасса.

Ответ: ряд сходится равномерно на E_2 и поточечно на E_1.

Пример 6. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = xsin\frac{1}{(xn)^2}$.

Данный пример приведен, потому что функциональная последовательность будет сходиться равномерно на обоих множествах, причем на одном из них доказательство равномерной сходимости довольно необычное. Ну и еще чтобы сравнить задачи на функциональные последовательности и ряды.

1. Исследуем на поточечную сходимость на $E_1 \cup E_2$. Зафиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0 = f(x_0)$$

Значит, $f_n(x)$ сходится к $f(x) = 0$ поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2. Исследуем на равномерную сходимость на E_2.

$$|f_n(x) - f(x)| = |xsin\frac{1}{(xn)^2}| \leq x\frac{1}{(xn)^2} = \frac{1}{xn^2} < \frac{1}{n^2} \to 0$$

Ограничили сверху для любого икса числовой последовательностью, стремящейся к нулю, и не зависящей от x. Значит, $f_n(x)$ сходится равномерно на E_2.

3. Исследуем на равномерную сходимость на E_1. Попробуем сделать аналогично пункту 2. Попробовали. Не получилось. Поэтому будем делать следующим хитрым образом: исследуем производную $f_n'(x)$, найдем точки экстремума. Покажем, что функциональная последовательность в точках экстремума будет стремиться к нулю. Значит, она во всех точках будет стремиться к нулю.

$$f_n'(x) = sin\frac{1}{(nx)^2} - \frac{2}{x^2n^2}cos\frac{1}{n^2x^2} = 0$$

$$\text{Замена: } t = \frac{1}{n^2x^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow tgt = 2t$$

Решением этого уравнения будет множество точек $t > 0$ ($t \leq 0$ нас не интересуют, потому что $\frac{1}{n^2x^2} > 0$) пересечения тангенса с линейной функцией. Их бесконечно много. Обзовем самую близкую к нулю t_1. Далее $t_2, t_3, ...$; $t_1 < t_2 < t_3 < ...$; $t_1 \approx 1$. По крайней мере, это константа, что важно. Найдем теперь значение $f_n(x)$ в точках экстремума: $f_n(x_i)$, где $x_i = \frac{1}{n\sqrt{t_i}}$.

$$|f_n(x_i)| = |\frac{1}{n\sqrt{t_i}}sint_i| \leq |\frac{1}{n\sqrt{t_i}}| \leq \frac{1}{n\sqrt{t_1}} \to 0$$

Значит, значение функциональной последовательности во всех точках экстремума $\to 0$. Значит вообще во всех точках $\to 0$, вне зависимости от икса. Значит, $f_n(x)$ сходится равномерно на E_1 (да и на E_2 тоже, это доказательство для обоих множеств сразу работает).

Ответ: $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E_1 \cup E_2$.

Замечание С помощью неравенства $sinx \leq \sqrt{x}$ этот пример решается гораздо проще, но метод через производные все равно полезный.

Пример 7. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} ln(1 + \frac{\sqrt{x}}{n+x})$ на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$.

1. Исследуем на поточечную сходимость. Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} ln(1+\frac{\sqrt{x_0}}{n+x_0}) \overset{\text{сх.}}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{x_0}}{n+x_0} \overset{\text{сх.}}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ - сходится}$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится по признаку сравнения. Значит, наш функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2. Чутье подсказывает нам, что неприятности с равномерной сходимостью возникнут на E_2. Но мы никак не можем подобрать последовательность, чтобы $n-$й член ряда не стремился к нулю. Значит, в ход нужно пустить критерий Коши. Возьмем, как обычно, $m = N$, $n = 2N$, а также $x_N = N \in E_2$. Получим

$$|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x_N)| = |\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{k}} ln(1 + \frac{\sqrt{N}}{N+k})| \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{N}} ln(1 + \frac{\sqrt{N}}{2N}) =$$

$$= N\frac{1}{\sqrt{N}} ln(1 + \frac{1}{2\sqrt{N}}) = \sqrt{N} ln(1 + \frac{1}{2\sqrt{N}}) = ln(1 + \frac{1}{2\sqrt{N}})^{\sqrt{N}} =$$

$$= \frac{1}{2} ln(1 + \frac{1}{2\sqrt{N}})^{2\sqrt{N}} \geq \frac{1}{2} ln(\frac{3}{2})^2 = ln\frac{3}{2}$$

Значит,

$$\exists \varepsilon = ln\frac{3}{2} > 0 : \forall N \begin{cases} \exists n(N) = 2N \geq N \\ \exists m(N) = N \geq N : \\ \exists x_N = N \in E_2 \end{cases} \quad |\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x_N)| \geq \varepsilon$$

Значит, функциональный ряд не сходится равномерно на E_2 по критерию Коши.

Покажу еще раз, как делать неверно. Неверно вместо $f_k(x_N)$ писать, например, $f_k(x_k)$ или $f_N(x_N)$. Так получится сделать оценки гораздо быстрее, но это, конечно же, не верно и не имеет ничего общего с критерием Коши, не делайте так!!! Иначе вам за задачу ноль поставят! Нужно делать аккуратно, как я показал, не пропуская никакие оценки.

3. На E_2 нет равномерной сходимости, значит, на E_1 скорее всего будет равномерная сходимость. В самом деле,

$$|f_n(x)| = |\frac{1}{\sqrt{n}} ln(1+\frac{\sqrt{x}}{n+x})| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} ln(1+\frac{\sqrt{1}}{n+0}) =: a_n$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{сх.}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ - сходится, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится по признаку сравнения. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_1 по признаку Вейерштрасса.

Ответ: на E_1 равномерно, на E_2 поточечно.

2 Теоремы о непрерывности, почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E к функции f, т.е. $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x)$. Если все функции f_n непрерывны в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, то и предельная функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Проще говоря, последовательность непрерывных функций может равномерно сходиться только к непрерывной функции.

По большому счету, функциональные последовательности и ряды - одно и то же, т.к. ряд сходится если сходится последовательность его частичных сумм. Поэтому аналогичная теорема есть для рядов:

Теорема 1'. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E. Если все члены ряда $f_n(x)$ непрерывны в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, то сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 по множеству E.

То есть сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций - непрерывная функция.

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((n+1)xe^{-(n+1)x}-nxe^{-nx})$ сходится неравномерно на $[0,1]$, но сумма ряда - непрерывная функция.

Эта задача - некое дополнение теоремы 1', говорит, что сумма ряда может быть непрерывной функцией порой, даже если ряд не сходится равномерно.

Рассмотрим последовательность частичных сумм нашего ряда.

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}((k+1)xe^{-(k+1)x}-kxe^{-kx})=$$

$$=2xe^{-2x}-xe^{-x}+3xe^{-3x}-2xe^{-2x}+...+(n+1)xe^{-(n+1)x}-nxe^{-nx}$$

Видим что соседние члены посокращаются, и останется только первый и последний:

$$S_n(x)=-xe^{-x}+(n+1)xe^{-(n+1)x}$$

Исследуем функциональную последовательность $S_n(x)$ на поточечную сходимость. Видно, что при фиксированном x

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-xe^{-x}=:S(x)$$

Эта функция и есть сумма ряда.

Исследуем ее на непрерывность. Она непрерывна в каждой точке как произведение непрерывных функций. чтд.

Докажем теперь, что функциональная последовательность $S_n(x)$ не сходится равномерно (а значит, и ряд не сходится равномерно). Распишем для начала $|S_n(x_n)-S(x_n)|$:

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=|(n+1)x_ne^{-(n+1)x_n}|.$$

Будем действовать по определению:

$$\exists\varepsilon=e^{-1}:\forall N\exists n=N,\ \exists x_N=\frac{1}{N+1}:|S_n(x_N)-S(x_N)|=\frac{N+1}{N+1}e^{-(N+1)/(N+1)}=e^{-1}.$$

Значит, функциональная последовательность $S_n(x)$ не сходится равномерно по определению. Значит, наш функциональный ряд тоже не сходится равномерно, т.к. не сходится равномерно последовательность его частичных сумм.

Теорема 2. Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\int\limits_a^x f_n(t)dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x f(t)dt \text{ при } n \to \infty$$

То есть если функциональная последовательность непрерывных функций сходится, то и последовательность интегралов от нее сходится, причем к интегралу от предельной функции.

Иначе говоря, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt \forall x \in [a, b]$$

Аналогичная теорема про ряды:

Теорема 2'.(о почленном интегрировании ряда). Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_n(t)dt$ равномерно сходится на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt \forall x \in [a, b]$$

Иначе говоря, равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать, т.е. менять местами значки суммы и интеграла. Но вы скажете: WTF??! у нас же есть свойство, что интеграл суммы это сумма интегралов, т.е. мы итак можем менять местами значки суммирования и интегрирования. Оказывается, не всегда, а только в том случае когда сумма конечная, читайте свойства внимательнее =) Когда бесконечная, надо уже проверять отдельно, можем ли. И так довольно часто: свойста, верные для конечных случаев не всегда верны для бесконечных.

Давайте применим эту теорему к следующей задаче:

Пример 2. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$. Найти $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$.

То есть надо сначала посчитать, чему равна сумма ряда, а потом от нее взять интеграл. Но мы поступим проще: сначала возьмем интеграл, а потом найдем сумму получившегося числового ряда. Сделать это можно с помощью теоремы 2', т.к. функции $f_n(x) = \frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$ непрерывны на $\mathbb{R}$, а функциональный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса:

$$|f_n(x)| = |\frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}| \le \frac{1}{n^2(n+1)^2}\text{-сходится}$$

Итак, имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = [\text{распишем несобственный интеграл по определению}] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2+t^2} dt = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{1}{n^2(n+1)^2+t^2} dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} arctg \frac{x}{n(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} arctg \frac{x}{n(n+1)} =$$

$$= [arctg(+\infty) \to \pi/2] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

$$= [\text{как и в предыдущей задаче соседние члены сократятся}] = \frac{\pi}{2}(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}) = \frac{\pi}{2}$$

Предел можем заносить под сумму, если ряд сходится равномерно (свойство, аналогичное теореме 1' про непрерывность). Эта теорема про занесение предела формулируется следующим образом:

Теорема. Пусть на множестве E заданы функции $f_n(x)$, a – предельная точка этого множества и $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$. Пусть также $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E. Тогда:

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Теперь сформулируем аналогичные теоремам 2 и 2' теоремы, только про почленное дифференцирование рядов.

Теорема 3. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций сходится в точке $c \in [a, b]$, а последовательность производных $\{f'_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции $\phi(x)$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ и $f'(x) = \phi(x)$, причем $(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n$ на $[a, b]$.

Аналогичная теорема про ряды:

Теорема 3'. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций сходится в точке $c \in [a, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, сумма его непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и

$$(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \forall x \in [a, b]$$

На эти 3 теоремы нет задач в письменном, да и в устном они затрагиваются как-то боком. Но они на самом деле капец какие важные, поэтому я вам очень советую их понять, запомнить и постараться оставить в голове после прохождения матана 1го курса =) Ну и, конечно же, сделать строчку из дз, связанную с этими задачами, она не сложная, пару задач оттуда я уже решил выше.