Опр. Пусть f определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ - предельная точка E. Тогда число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом ф-ии f в т. x_0 по мн-ву E, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) \cap E \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \qquad - \ \lim_{E \ni x \to x^0} f(x) = A$$

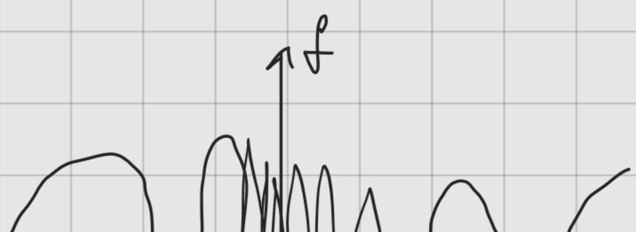
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\cap E$ - т.к. по мн-ву

Замечание: если $E = \mathbb{R}^n$, то назовём это „просто предел" или „предел ф-ии переменных"

Если при некотором δ_0 $\mathring{U}_{\delta_0}(x^{(0)}) \subset E$, то тогда предел по мн-ву E можем назвать просто пределом

• $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} 0, & x=0 \end{cases}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Функция 2 переменных →

→ 3-мерная

Опр. **Предел по направлению** l в точке x^0 - предел по мн-ву E, где в качестве E взят луч: $x = x^{(0)} + t\cdot l$, $t \geq 0$

Опр. (Предел по мн-ву, по Гейне)

Пусть f определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ - предельная точка E; число $A \in \mathbb{R}$ - предел ф-ции f в точке $x^{(0)}$ по мн-ву E, если

$$\forall \{x^{(m)}\} \in E: \begin{cases} x^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} x^{(0)} \\ x^{(m)} \neq x^0, \forall m \in \mathbb{N} \end{cases} \hookrightarrow \lim_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = A$$

Критерий Коши

Пусть f определена на E, $x^{(0)}$ — пред точка E.

Тогда ф-ия f имеет конечный предел в т. $x^{(0)}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \cap E \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Т16. Если в точке $x^{(0)}$ $\exists$ предел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в точке $x^{(0)}$ существуют и равные пределы по всем направлениям

Обратное неверно, то есть из существования и равенства пределов по всем направлениям в т. $x^{(0)}$ не следует существование предела

Пример $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \\ 0, & y \neq x^2 \end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует по опр-ю Гейне

Опр. Гейне:

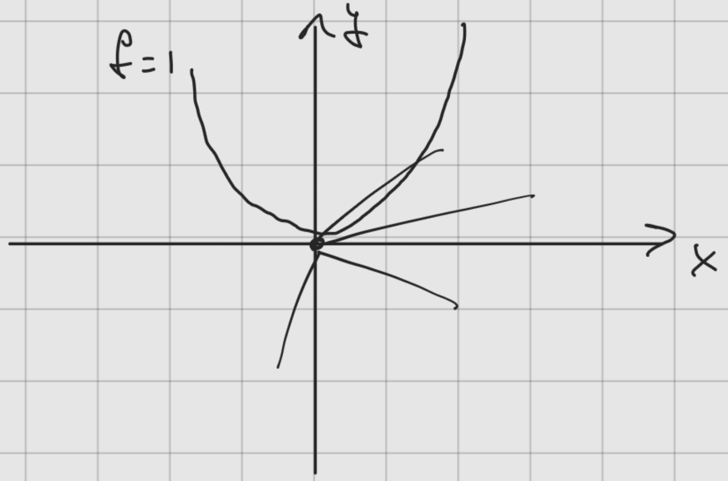
$$(x_m^{(1)}, y_m^{(1)}) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}\right) \xrightarrow{\not f} (0,0)$$

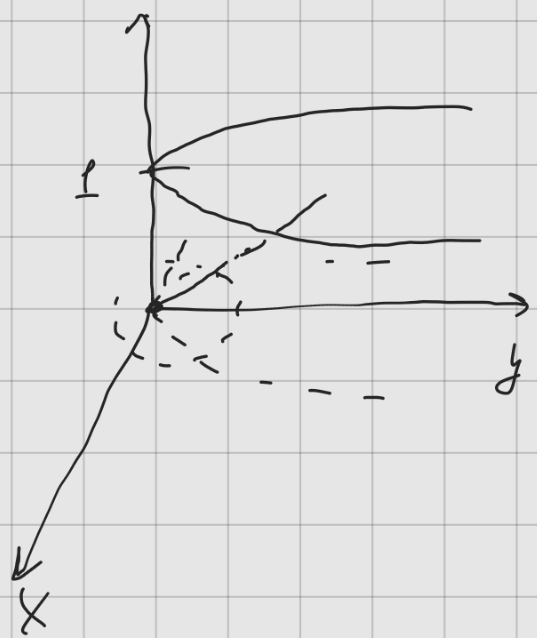
$$f(x_m^{(1)}, y_m^{(1)}) = 1$$

$$(x_m^{(2)}, y_m^{(2)}) = \left(0, \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{\not f} (0,0)$$

$$f(x_m^{(2)}, y_m^{(2)}) = 0$$

$\Bigg\}$ ЧТД





Луч выходит из $x^{(0)}$

Доказали, что предела не существует, но при этом пределы по всем направления $= 0$, $y = kx$ — направление