Семинар 0. Неопределенный интеграл.

Скубачевский Антон

24 ноября 2022 г.

Символом $\langle a, b\rangle$ будем обозначать промежуток, т.е. либо отрезок $[a, b]$, либо полуинтервал $[a, b)$, либо $(a, b]$, либо (a, b). При этом полуинтервал могут быть как конечными, так и бесконечными.

Определение (первообразная). Пусть функции f и F определены на $\langle a, b\rangle$. Функция F называется первообразной для f на $\langle a, b\rangle$, если $F' = f$ на $\langle a, b\rangle$. При этом в случае $a \in \langle a, b\rangle$ или $b \in \langle a, b\rangle$ производные $F'(a)$, $F'(b)$ понимаются как односторонние.

Свойство 1. Пусть F - первообразная для f на $\langle a, b\rangle$. Тогда $F+C$, где $C = const$, тоже является первообразной для f на $\langle a, b\rangle$. (Доказательство очевидно из определения первообразной.)

Свойство 2. Если F_1 и F_2 - две первообразные функции f на $\langle a, b\rangle$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$. (доказательство через теорему Лагранжа о среднем)

Определение. Неопределенный интеграл. Операция перехода от данной функции к ее первообразной называется неопределенным интегрированием. При этом функции f ставится в соответствие некоторая конкретная произвольно выбранная первообразная. Эта первообразная называется неопределенным интегралом функции f и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Свойства неопределенного интеграла:

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$
- Если f - дифференцируема, то $\int f'(x)dx = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
- Если $f(x)$ интегрируема, то и $af(x)$ интегрируема и выполняется: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx = \int f(x)d(ax)$, $a \in \mathbb{R}$. (Т.е. это свойство нам говорит, что константу можно как выносить за знак интеграла, так и вносить под знак дифференциала)

- Если $f(x)$ - интегрируема, то $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$ (т.е. под знаком дифференциала можно прибавлять любую константу)

- Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы, то и $f_1(x) + f_2(x)$ интегрируема и $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

- **Замена переменной в неопределенном интеграле.** Пусть $f(x)$ имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную; $\varphi(x)$: $\langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда на $\langle \alpha, \beta\rangle$

$$\exists \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx + C, \text{ где } x = \varphi(t); \quad C \in \mathbb{R}$$

  В самом деле, вспомнив определение дифференциала из первого семестра, можно записать: $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f(\varphi(t))d\varphi(t)$. Этот прием также называется "занесение под знак дифференциала". А потом заменить $x = \varphi(t)$.

- **Интегрирование по частям**: Пусть на некотором промежутке $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)dx$. Тогда на этом промежутке

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Ниже будут приведены основные табличные интегралы. Здесь и далее не буду писать $C \in \mathbb{R}$, это будет подразумеваться. Но вы в своих контрольных работах обязательно пишите $C \in \mathbb{R}$.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int sinxdx = -cosx + C$$

$$\int cosxdx = sinx + C$$

$$\int shxdx = chx + C$$

$$\int chxdx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad a \neq 0, \quad |x| > |a|$$

Далее будем решать примеры. Решение интеграла состоит из применения комбинации методов интегрирования и табличных интегралов. Ниже 2 примера будут на табличный интеграл $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Пример 1.

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Пример 2.

$$\int (3x+2)^2 dx = \int (9x^2+12x+4)dx = 3x^3+6x^2+4x+C$$

Решим вторым способом, с помощью занесения под знак дифференциала и замены. Но чтобы внести 3 под знак дифференциала, ее надо откуда-то взять. Умножим и поделим на 3. 3 занесем потом под знак дифференциала, а 1/3 вынесем из-под знака интеграла. Также потом воспользуемся тем, что под знаком дифференциала можно прибавлять любую константу (мы прибавим 2).

$$\int (3x+2)^2 dx = \int (3x+2)^2 \cdot \frac{3}{3} dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^2 d3x = \frac{1}{3}\int (3x+2)^2 d(3x+2) =$$

$$= [3x+2=t] = \frac{1}{3}\int t^2 dt = \frac{1}{9}t^3 + C = \frac{1}{9}(3x+2)^3 + C$$

Если раскрыть скобки, получится то же, что мы получили первым способом, с точностью до константы. Этот способ даже быстрее, я просто все расписывал пошагово.

Пример 3.

$$\int sin(5x+7)dx = \frac{1}{5}\int sin(5x+7)d(5x+7) = \frac{1}{5}cos(5x+7) + C$$

Пример 2. §113(10). Вычислить

$$I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx.$$

Решение. Внесем e^x под знак дифференциала и сделаем замену переменной $e^x = t$. Тогда

$$I = \int \frac{tdt}{\sqrt[4]{1+t}}.$$

Сделаем замену $u = t+1$:

$$I = \int \frac{u-1}{\sqrt[4]{u}} du = \int u^{3/4} du - \int u^{-1/4} du = \frac{4}{7}(t+1)^{7/4} - \frac{4}{3}(t+1)^{3/4} + C =$$

$$= \frac{4}{7}\sqrt[4]{(1+e^x)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(1+e^x)^3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $I = \frac{4}{7}\sqrt[4]{(1+e^x)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(1+e^x)^3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Пример 4.

В примере ниже вспомним, что $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ и занесем под знак дифференциала $sinx$. Вспомним, что значит занести под знак дифференциала не константу, а функцию: $f'(x)dx = d(f(x))$ по определению дифференциала. Получается, чтобы занести функцию под знак интеграла, ее надо проинтегрировать, ведь до занесения под знак дифференциала у нас была $f'(x)$, а после стала просто $f(x)$. Т.к. интеграл от синуса это минус косинус, получаем: $sinxdx = d(-cosx) = -dcosx$. Минус мы, конечно же, можем вынести из-под дифференциала, да и из-под интеграла, ведь минус - это просто домножение на (-1), т.е. на константу.

$$\int tgxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = \int \frac{1}{cosx}d(-cosx) = -\int \frac{1}{cosx}dcosx =$$

$$= [cosx = t] = -\int \frac{1}{t}dt = -ln|t| + C = -ln|cosx| + C$$

Пример 5.

В этом примере применим классическую тригонометрическую замену: $x = sint$. Ее можно использовать, если имеем в примере $\sqrt{1-x^2}$, чтобы избавиться от корня с помощью основного тригонометрического тождества (вместо корня получится $cost$).

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = [x = sint] = \int \sqrt{1-sin^2t}d(sint)$$

На этом этапе обратите внимание на то, что я не написал $.. = \int \sqrt{1-sin^2t}dt$, то есть нельзя бездумно заменять dx на dt, на этом многие ошибаются! Нужно по честному под знаком дифференциала тоже заменять x на $sint$. А потом этот синус можно будет вынести из-под знака дифференциала. Вынести из-под знака дифференциала - значит продифференцировать, ну просто по определению дифференциала (а внести, как мы помним, - проинтегрировать): $d(sint) = costdt$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = [x = sint] = \int \sqrt{1-sin^2t}d(sint) = \int \sqrt{1-sin^2t}costdt = \int cos^2tdt =$$

$$= \int \frac{1+cos2t}{2}dt = \int \frac{1}{2}dt + \int \frac{cos2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int 1dt + \frac{1}{2}\int cos2t \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int cos2td2t =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}sin2t + C = \frac{1}{2}arcsinx + \frac{1}{4}sin2arcsinx + C = \frac{1}{2}arcsinx + \frac{1}{2}sin(arcsinx)cos(arcsinx) + C =$$

$$= \frac{1}{2}arcsinx + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

Пример 6.

$$\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}dx = \int \sqrt[5]{5x^3+1}d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt[5]{5x^3+1}dx^3 = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}d(5x^3+1) =$$

$$= [t = 5x^3+1] = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{t}d(t) = \frac{1}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \frac{1}{18}\sqrt[5]{(5x^3+1)^6} + C$$

Пример 7.

В примере ниже будет использован табличный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \;\; a \neq 0$.

$$\int \frac{dx}{2+cos^2x} = [2(sin^2x + cos^2x) = 2] = \int \frac{dx}{2sin^2x + 3cos^2x} = \int \frac{1/cos^2x}{2tg^2x+3}dx =$$

$$= \int \frac{dtgx}{2tg^2x+3} = [tgx = t] = \int \frac{dt}{2t^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}tgx}{\sqrt{3}} + C$$

Пример 8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$

Сразу выделим полный квадрат в знаменателе: $-x^2+6x-8 = -(x-3)^2+1$.

Мы знаем, что есть табличный интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, \;\; |x| < a, \;\; a \neq 0$

Если в нашем интеграле выделить полный квадрат в знаменателе, то он станет смахивать на табличный. Но тому, чтобы он стал совсем табличным, мешает x в числителе. С ним придется поработать отдельно. Получается, придется интеграл разбить на 2: один будет равен арксинусу, а во втором останется x в числителе. С этим иксом справиться тоже очень просто: занести под знак дифференциала, чтобы получить там тоже $(x-3)^2$. Потом заменим $(x-3)$ на t и все.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = 3\int \frac{x-3}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx + 13\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x-3)^2}{\sqrt{1-(x-3^2)}} + 13\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}d(x-3) = [z=(x-3); t=(x-3^2)] =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} + 13\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{d(1-t)}{\sqrt{1-t}} + 13arcsinz = -\frac{3}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{1-(x-3)^2} + 13arcsin(x-3) + C$$

Пример 9. Как мы уже поняли, в случае $\sqrt{1-x^2}$ помогает замена $x = sint$. В случае же $\sqrt{1+x^2}$ замена $x = tgt$, ну или $x = sht$, т.к. $1+sh^2t = ch^2t$. Если же под корнем не $1+x^2$, а, например, $3+7x^2$, перед тангенсом в замене надо поставить нужный коэффициент:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3+7x^2}} = [x = \sqrt{\frac{3}{7}}tgt \;\Rightarrow\; dx = \sqrt{\frac{3}{7}}\frac{dt}{cos^2t};\quad \sqrt{3+7x^2} = \sqrt{3tg^2t+3} = \frac{\sqrt{3}}{cost}] =$$

$$= \int \sqrt{\frac{3}{7}}\frac{dt}{cos^2t\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}tgt\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cost}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3}sint} = \int \frac{sintdt}{\sqrt{3}sin^2t} = -\int \frac{dcost}{\sqrt{3}-\sqrt{3}cos^2t} =$$

$$= [cost = z] = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}ln|\frac{z-1}{z+1}| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}ln|\frac{cost-1}{cost+1}| + C,$$

где $t = arctg(\sqrt{\frac{7}{3}})x$.

Пример 10.

$$\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx = [x=3sint] = \int \frac{\sqrt{(9-9sin^2t)^3}}{3^6sint^6}3costdt = \int \frac{\sqrt{9^3cos^6t}}{3^6sin^6t}3costdt =$$

$$= \int \frac{cos^4t}{9sin^6t}dt = -\frac{1}{9}\int ctg^4tdctgt = -\frac{1}{9\cdot 5}ctg^5t + C = [t = arcsin(x/3)] =$$

$=$ [упростим с помощью знаний тригонометрии, хотя упрощать необязательно] $=$

$$= -\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C$$

Теперь будем разбираться в том, как интегрировать по частям.

Пример 11.

$$\int lnxdx = [u = lnx; \;\; dv = dx] = xlnx - \int xd(lnx) = xlnx - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = xlnx - x + C$$

По частям всегда берется интеграл типа многочлен умножить на e^x или $sinx$. В этом случае многочлен берем за u, а $e^x dx$ за dv. Интегрируем по частям столько раз, какая степень у многочлена. Чтобы, зная dv, найти v, надо, конечно же, проинтегрировать.

Пример 12.

$$\int x^2 e^x dx = [x^2 = u; \; e^x dx = dv \;\;\; \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x] = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - \int e^x 2x dx =$$

$$= [u = 2x, \; dv = e^x dx, \; v = e^x] = x^2 e^x - (2xe^x - \int e^x d(2x)) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

В следующем примере будет разобран еще один очень важный прием при интегрировании: что, если, пару раз проинтегрировав, получим исходным интеграл в правой части? Если со знаком $'+'$, то он сократится в правой и левой части. Значит, мы что-то делали не так. А если со знаком $'-'$ или каким-нибудь коэффициентом, то это уже интереснее, и с этим можно работать:

Пример 13.

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = [u = \sqrt{a^2 - x^2}, \;\; dv = dx] = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int xd\sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Получили уравнение:

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Отсюда получим ответ:

$$I = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{|a|} + C$$

Когда вообще полезно интегрирование по частям? Кроме случая многочлен на e^x или $sinx$? Например когда имеем под интегралом крокодила, которого можем обозначить за u, чтобы после интегрирования по частям он был под знаком дифференциала: du, а после вынесения из-по знака дифференциала, т.е. взятия производной, принял бы норм вид. Примером такого крокодила является $arcsinx$ или $arctgx$, т.к. производная от них - уже довольно простая дробь или корень.

Пример 14.

$$\int arccos^2 x dx = [arccos^2 x = u, \ \ dx = dv] = x arccos^2 x - \int x d arccos^2 x =$$

$$= x arccos^2 x + \int \frac{2x arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Далее еще раз по частям: $u = arccosx$, $dv = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Найдем, прежде, чем интегрировать по частям, v:

$$v = \int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = - \int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = - \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -2\sqrt{1 - x^2} + C$$

Проинтегрировав теперь по частям, имеем:

$$x arccos^2 x + \int \frac{2x arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x arccos^2 x - 2\sqrt{1 - x^2} arccos x - 2 \int (-\sqrt{1 - x^2} d(arccos x)) =$$

$$= x arccos^2 x - 2\sqrt{1 - x^2} arccos x - 2x + C$$

Пример 15. Часто, видя $arcsinx$, хочется сделать замену $t = sinx$. Такая замена также напрашивается, когда есть $\sqrt{1 - x^2}$.

$$\int \sqrt{1-x^2} arcsinx dx = [x = sint] = \int tcos^2 tdt = \int \frac{t}{2} dt + \int \frac{tcos2t}{2} dt =$$

$$= [u = t,\ dv = cos2tdt,\ v = \frac{sin2t}{2}] = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}(tsin2t - \frac{1}{2}\int sin2td2t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}tsin2t + \frac{1}{8}cos2t + C =$$

$$= \frac{arcsin^2 x}{4} + \frac{1}{4} arcsinx \cdot sin(2arcsinx) + \frac{1}{8} cos(2arcsinx) + C =$$

$$= \frac{arcsin^2 x}{4} + \frac{1}{2} arcsinx \cdot x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}(1-2x^2) + C = \frac{arcsin^2 x}{4} + \frac{1}{2} arcsinx \cdot x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{4} + C$$