**Опр.** Пусть $f$ - инт-ма на $[a,b]$. Тогда на $[a,b]$ определена ф-ия $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, где $a \le x \le b$

(Интеграл с переменным верхним пределом)

**Th.1** Пусть $f$ - инт на $[a,b]$, тогда $F$ - непр-на на $[a,b]$

**Док-во:**

1) $$|\Delta F(x_0)| = |F(x_0+\Delta x) - F(x_0)| = \left|\underbrace{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt}_{\int_a^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x}} - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt\right| \le \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|dt \underset{\text{огр}}{\le} M \cdot \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = M\Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = 0 \Rightarrow F\text{-непр. в т. } x_0$$

---

**Th 2** Пусть $f$-инт-ма на $[a,b]$ и непр-ва в т. $x_0 \in [a,b]$

Тогда $F(x)$ - дифф-ма в т. $x_0$; $F'(x_0) = f(x_0)$

Док-во:

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - \frac{f(x_0)^{\Delta x}}{\Delta x}\right| =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - f(x_0)\Delta x\right| =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - f(x_0)\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt\right| = \frac{1}{\Delta x}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left(f(t) - f(x_0)\right)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt$$

$f$ - непр. в т. $x_0$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \underset{x_0+\Delta x}{\overset{\shortparallel}{x}} \in U_\delta(x_0) \mapsto |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall t \in U_\delta(x_0) \mapsto |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0) \mapsto \left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,d < \ < \frac{\varepsilon}{\Delta x}\cdot\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \varepsilon \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \Rightarrow$$

=> ЧТД

**Замечание:** => $F(x)$ – первообразная непр. ф-ии $f(x)$

**Замечание:** $G(x) = \int_x^a f(t)dt \Rightarrow G'(x) = -f(x)$
(если $f$ – непр на $[a,b]$)

---

**Th 3.** Пусть $f$ – непр. на $[a,b]$. Тогда она имеет на $[a,b]$ первообразную $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, $x_0 \in [a,b]$

Док-во: См. предыдущее

---

**Th.4. (Формула Ньютона-Лейбница)**

Пусть $f$ – непр. на $[a,b]$. $\Phi$ – её первообразная.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

**Док-во:** $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная ф-ии $f(x)$

$\Rightarrow F(x) = \Phi(x) + C \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$

При $x = a$ : $\underbrace{\int\limits_a^a f(t)\,dt}_{0} = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a) \overset{\text{при } x = b}{\Rightarrow} \int\limits_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a) \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

---

**Замечание:** $f$ - инт. на $[a, b] \not\Leftrightarrow f$ - имеет первообр. на $[a, b]$

1) $f(x) = \text{sign}(x)$; $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ - инт-ма, но не имеет первообр.

2) $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = F' = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x^2} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f(x)$ не огр. на $[-1, 1]$ $\Rightarrow$ не инт-ма, но имеет перв.