Опр. Степенной ряд – ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (\omega-\omega_0)^k$, где c_k и ω_0 – комплексные числа, ω – комплексная переменная

Далее с помощью замены $z = \omega - \omega_0$ переходим к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, далее будем рассматривать именно его

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Опр. Радиус сходимости степенного ряда – $R_{cx} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, определяется по формуле Коши – Адамара: $\boxed{R_{cx} = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k}}}$ (A)

Th 1 (Округ сх-ти степенного ряда) Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$:

1) Абсолютно сх-ся внутри круга сх-ти (то есть при $z : |z| < R_{cx}$)

2) Расходится вне круга сх-ти

2) Расходится вне круга

3) На границе круга может как сх-ся, так и расх.

Док-во: Зафиксируем z; рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |C_k z^k|$

Определим число $q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = |z| \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|} =$

$= \dfrac{|z|}{R_{cx}}$

1) При $|z| < R_{cx}$: $q < 1 \Rightarrow$ ряд сх абсолютно по признаку Коши

2) При $|z| > R_{cx}$: $q > 1 \Rightarrow$ даже k-й член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k z^k|$ не стремится к $0 \Rightarrow$ k-й член $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k z^k \not\to 0 \Rightarrow$ ряд расх.

3) $|z| = R_{cx}$ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k}$;

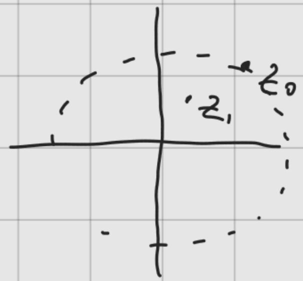
$$R_{cx} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \underline{1}$$

При $z = 1$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ – расх. гарм. ряд

При $z = -\underline{1}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ – сх. по признаку Лейбница

Th 2 (Абеля) Пусть степ. ряд сх в $z = z_0$. Тогда в точке z_1: $|z_1| < |z_0|$ – ряд сх. абсолютно.

Док-во:



1) Ряд сх. в $z_0 \Rightarrow |z_0| \le R_{сх}$ (Th 1)

(п предп. $z_0 > R \Rightarrow$ Th 1 (2) $\to$ ряд. расх – против.)

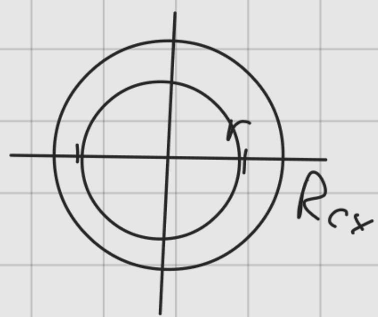
2) По усл $|z_1| < |z_0| \le R_{сх} \Rightarrow |z_1| < R_{сх} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд сх. абс в т. z_1

Th 3. (о равн. сх-ти) Пусть $R_{сх} > 0$ – радиус сх-ти степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Тогда для любого числа $r \in (0, R_{сх})$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ – сх. равномерно в круге $\{z : |z| \le r\}$

↳ зафиксировали

(Как сх. ряд Тейлора) стена посл-ть упрётся в нее



Док-во:

1) $|C_k z^k| \le |C_k| \cdot r^k$;

$r \le R_{сх} \Rightarrow$ ряд $\sum\limits^{\infty} |C_k| r^k$ – сх сх $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=0} |c_k| r^k$ – сх.

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ – сх. равномерно при $|z| \leq r$ по признаку Вейерштрасса