Опр. символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется числовым рядом, где $a_n \in \mathbb{R}$; a_k - его k-й член

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ - частичная сумма ряда

Опр. Числовой ряд называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$

Опр. Сумма ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (если сх-ся)

Тогда пишут $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n = S$ (символ $\rightleftarrows$ число)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ – расх

Th 1 (Необходимое условие сходимости числ. ряда)

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ -сх-ся. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} a_n = 0$

Док-во:

$\sum\limits^{\infty} a_n$ - сх $\Rightarrow \{ \lim S_n = S \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1} a_n \text{ сх.} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

ЧТД.

Th2 (Кр. Коши) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ - сх $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall m, n \geq N \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n \right| < \varepsilon \right) \quad V$$

Док-во: (2-я формулировка)

1) $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |S_{n+p} - S_n|$

2) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ - сх $\Leftrightarrow S_n$ - сх. $\overset{\text{кр. Коши для послед}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \begin{cases} \forall n \geq N \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{cases} \hookrightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Опр. Числовой ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_n$ - остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Th 3. (линейность) Пусть ряды $\sum\limits_{k=1} a_n$ и $\sum\limits_{k=1} b_n$ - сх-ся.

Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \hookrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ - сх-ся; и его сумма равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Док-во:

$$\sum_{n=1}^{n}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{k=1}^{n} b_n$$

Перейдём к $\lim\limits_{n\to\infty} \to$ ЧТД.