Семинар 0. Неопределенный интеграл. Интегралы от дробей и корней.

Скубачевский Антон

24 ноября 2022 г.

1 Интегрирование дробей

Предположим, у нас есть интеграл:

$$\int \frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}dx$$

Важно сказать, что СТЕПЕНЬ ЧИСЛИТЕЛЯ должна быть строго МЕНЬШЕ СТЕПЕНИ ЗНАМЕНАТЕЛЯ. Иначе нужно сначала поделить в столбик числитель на знаменатель (даже если их степени равны), а уже потом разбираться с тем, что получится в результате деления.

Будем брать такие интегралы следующим образом: разобьем дробь на сумму элементарных:

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}$$

Интеграл от дробей справа табличный, это логарифм. Единственная проблема-найти неопределенные коэффициенты A, B, C. Покажем, как их искать, на следующем примере:

Пример 1.

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

Получаем уравнение для нахождения неопределенных коэффициентов (числитель слева = числителю справа):

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2) =$$

$$= Ax^2 - Ax - 6A + Bx^2 - 2Bx - 3B + Cx^2 + 3Cx + 2C$$

Нам нужно, чтобы многочлен слева был равен многочлену справа. То есть для любого x. Это выполняется когда коэффициенты при каждой степени слева и справа равны.

$$\begin{cases} \text{при степени } x^2 : A + B + C = 0 \\ \text{при степени } x : -A - 2B + 3C = 1 \\ \text{при степени } 1 : -6A - 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем: $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{2}{5}$, $C = \frac{3}{20}$

Тогда исходный интеграл равен:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{20} \int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{1}{4} ln|x+1| - \frac{2}{5} ln|x+2| + \frac{3}{20} ln|x-3| + C$$

Лайфхак. При составлении и решении системы на неопределенные коэффициенты можно очень легко ошибиться. Есть способ сделать быстрее. Как я уже говорил, многочлены должны быть равны при любом иксе. Поэтому давайте для нахождения неопределенных коэффициентов не приравнивать коэффициенты при соответствующих степенях, а просто подставим 3 значения x в уравнение, те, которые наиболее удобны. В нашем случае удобны $x = -1$, $x = -2$, $x = 3$, т.к. при них скобки соответствующие занулятся.

Итак, имеем уравнение:

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)$$

$$\begin{cases} \text{при } x = -1 : -1 = A(-1+2)(-1-3) \Rightarrow A = \frac{1}{4} \\ \text{при } x = -2 : -2 = B(-2+1)(-2-3) \Rightarrow B = -\frac{2}{5} \\ \text{при } x = 3 : 3 = C(3+1)(3+2) \Rightarrow C = \frac{3}{20} \end{cases}$$

Как видите, так искать неопределенные коэффициенты гораздо проще.

Важное замечание. Ниже написано, как раскладывать дробь на элементарные, если в знаменателе какая-то скобка в степени старше, чем 1, или если какая-нибудь скобка-не одночлен, а, например, квадратный трехчлен без корней.

$$\frac{1}{(x-3)^3(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

$$\frac{1}{2x^3-x-1} = \frac{1}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

То есть если в знаменателе стоит не одночлен, а многочлен без корней степени n, в числителе должен стоять многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами. ($2x^2+2x+1$ это многочлен степени 2, поэтому в числителе $Bx+C$ (многочлен степени 2-1 = 1))

Таким образом, дробь ниже нужно разбить следующим образом:

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Как я уже говорил, чтобы применить метод неопределенных коэффициентов, нужно, чтобы степень числителя была строго меньше степени знаменателя. Давайте посмотрим пример, в котором это не так. В этом примере разделим числитель на знаменатель (выделим целую часть дроби), а уже потом будем применять метод неопределенных коэффициентов.

Пример 2.

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \int \frac{2x^4-x^2-x+x^2+x+5x^2-2}{2x^3-x-1} =$$
$$= \int \frac{x(2x^3-x-1)}{2x^3-x-1}dx + \int \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}dx$$

Разобьем теперь дробь справа на элементарные методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

Получаем уравнение для нахождение неопределенных коэффициентов:

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Подставив для начала $x=1$, получаем $A=1$

Тогда уравнение станет:

$$6x^2+x-2 = 1\cdot(2x^2+2x+1)+(Bx+C)(x-1) \Leftrightarrow 4x^2-x-3 = (Bx+C)(x-1) = Bx^2+Cx-Bx-C$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях, получаем:

$$4 = B$$

$$-3 = -C \Leftrightarrow C = 3$$

Значит,

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \int xdx + \int \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + ln|x-1| + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}d(2x^2+2x) + 2\int \frac{1}{(4x^2+4x+1)+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + ln|x-1| + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}d(2x^2+2x+1) + \int \frac{1}{(2x+1)^2+1}d(2x+1) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + ln|x-1| + ln|2x^2+2x+1| + arctg(2x+1) + C$$

Пример 3. §2 7(4) Вычислить

$$I = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} dx.$$

Решение. Представим дробь в виде суммы элементарных:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 2} =$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + x + 2) + (Cx + D)x^2}{x^2(x^2 + x + 2)} = \frac{Ax^3 + Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + Bx + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2 + x + 2)}.$$

Из равенства рациональных дробей следует равенство многочленов:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = Ax^3 + Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + Bx + Cx^3 + Dx^2.$$

При $x = 0$ получаем $2B = 4 \Rightarrow B = 2$. Тогда выражение для равенства многочленов примет вид:

$$x^3 + 2x^2 + 3x = x^3(A + C) + x^2(A + 2 + D) + x(2A + 2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} \text{при } x: & 2A + 2 = 3 \Leftrightarrow A = 0.5, \\ \text{при } x^3: & 0,5 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0.5, \\ \text{при } x^2: & 2.5 + D = 2 \Leftrightarrow D = -0.5. \end{cases}$$

Отсюда получим выражение для интеграла:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{2x + 1 - 2 - 1}{x^2 + x + 2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2 + x + 2)}{x^2 + x + 2} - \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 7/4}d(x + 1/2) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{1}{4}\ln|x^2 + x + 2| - \frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4 + x^3 + 2x^2) - \frac{2}{x} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + C \ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $I = \frac{1}{4}\ln(x^4 + x^3 + 2x^2) - \frac{2}{x} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C \ C \in \mathbb{R}.$

2 Интегрирование иррациональных функций.

Для решения примеров с корнями существует несколько методов-рецептов их решения. Для определенного вида задач свой метод.

Пример 3. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

В этой задаче напрашивается замена $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5$. С помощью этой замены мы избавимся сразу от всех корней.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}t^5dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt =$$

$$= \int 6t^3dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C$$

В этой задаче мы применили

Метод 1. Интеграл вида

$$\int R(x; (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1}; ...; (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_n})dx,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $p_1, ..., p_n \in \mathbb{Q}$; $m-$общий знаменатель чисел $p_1, ..., p_n$, решается с помощью замены:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

$R(...)$ - значит рациональная функция от аргументов, или, иначе говоря, дробь. В нашем случае это дробь, в числитель и знаменатель которой входит комбинация $(\frac{ax+b}{cx+d})^{p_i}$.

Заметим, что пример-3 как раз на этот метод $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, p_1 = 2/3, p_2 = 1/6)$. Общий знаменатель 2/3 и 1/6 - как раз $m = 6$. Вот мы и сделали замену $x = t^6$.

Перейдем теперь к следующему методу.

Метод 2. Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

где $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, решается с помощью любой из следующих замен, также называемых подстановкой Эйлера:

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, если $a > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)t$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)t$, где $x_{1,2}$ - корни ax^2+bx+c

Пример 4. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Применим подстановку Эйлера: $\sqrt{1+x+x^2} = tx+1$. Выразим отсюда t, x и dx, чтобы подставить в интеграл:

$$t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

Чтобы найти $x(t)$, возведем обе части уравнения $\sqrt{1+x+x^2} = tx+1$ в квадрат:

$$1+x+x^2 = t^2x^2+2tx+1$$

Отсюда получаем:

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}$$

$$dx = 2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}$$

Тогда интеграл равен:

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{1-\frac{1-t+t^2}{1-t^2}}{\frac{2t-1}{1-t^2}\cdot\frac{1-t+t^2}{1-t^2}}\cdot 2\cdot\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt =$$

$$= -\int \frac{2tdt}{1-t^2} = ln|1-t^2| + C = ln|1-(\frac{\sqrt{1+x+x^2-1}}{x})^2| + C$$

Метод 3 (метод Остроградского). Интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n, считаем по следующему алгоритму:

1). Записать интеграл в виде следующего выражения с неопределенными коэффициентами:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

где $Q(x)$ - многочлен с неопределенными коэффициентами степенью на 1 ниже, чем $P_n(x)$.

2). Взять производную от обеих частей выражения (1), помня, что производная от интеграла даст подынтегральную функцию.

3). Найти из получившегося уравнения неопределенные коэффициенты.

4). Записать снова (1), с найденными неопределенными коэффициентами.

5). Взять оставшийся интеграл в (1).

Пример 5. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$

1). Представим в виде выражения с неопределенными коэффициентами:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x-1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} \qquad (2)$$

2). Продифференцируем обе части (2):

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x-1} + \frac{(Ax^2+Bx+C)(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

3). Приведя к общему знаменателю, получим выражения для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$x^3+2x^2+x-1 = (2Ax+B)(x^2+2x-1) + (Ax^2+Bx+C)(x+1) + \lambda$$

$$x^3+2x^2+x-1 = 2Ax^3+4Ax^2-2Ax+Bx^2+2Bx-B+Ax^3+Bx^2+Cx+Ax^2+Bx+C+\lambda$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} \text{при степени } x^3 : 1 = 2A + A \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ \text{при степени } x^2 : 2 = 4A + B + B + A \Rightarrow B = \frac{1}{6} \\ \text{при степени } x : 1 = -2A + 2B + C + B \Rightarrow C = \frac{7}{6} \\ \text{при степени } 1 : -1 = -B + C + \lambda \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

4). Запишем (2) с найденными коэффициентами:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx = (\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6})\sqrt{x^2+2x-1}-2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-(\sqrt{2})^2}} =$$

$$= (\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6})\sqrt{x^2+2x-1} - 2ln|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-2}| + C$$

Метод 4. Интеграл вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$; $a, b, n, p \neq 0$, можно взять в одном из трех случаев:

1. $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Замена: $x = t^N$, где N - общий знаменатель дробей m и n.
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Замена: $ax^n + b = t^s$, где s - знаменатель дроби p.
3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + bx^{-n} = t^s$, где s - знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интеграл не берущийся (не может быть выражен в виде элементарных функций).

Пример 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

В данном примере $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$, $n = 4$, $p = -1/4$.

Случаи 1 и 2 не выполняются, если подставить в них эти числа. Случай же 3 подходит:

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Значит, делаем замену $1 + x^{-4} = t^4$. Тогда $t = (1+x^{-4})^{1/4}$; $x = (t^4 - 1)^{-1/4}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = t^{-1}(t^4-1)^{1/4}$; $dx = -t^3(t^4-1)^{-5/4}dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{t^2+1}) =$$

$$= \frac{1}{4}ln|\frac{1+t}{1-t}| - \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{4}ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C$$

3 Интегрирование тригонометрических функций.

В целом, выше мы уже работали с тригонометрическими функциями и знаем, как брать от них интегралы. В этом разделе я приведу только один очень полезный прием. В случае, если мы имеем интеграл:

$$\int R(sinx, cosx)dx,$$

можно сделать замену $t = tg\frac{x}{2}$. Почему такую? Потому что в школе мы узнали так называемые формулы универсальной тригонометрической подстановки:

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Тогда при такой замене получаем:

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Также можно найти dx, взяв, например, дифференциал от обеих частей выражения для синуса или косинуса, написанных выше:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{3sinx+4cosx+5}$

Сделав указанную выше замену, получаем:

$$\int \frac{dx}{3sinx+4cosx+5} = 2\int \frac{dt}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} =$$

$$= 2\int (t+3)^{-2}dt = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3+tg\frac{x}{2}} + C$$

Пример 8. §4 4(2). Вычислить

$$I = \int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

Решение. Занесем $\cos x$ под знак дифференциала и сделаем замену $t = \cos x$:

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)\cos^4 x d\cos x = -\int (t^4 - t^6)dt =$$

$$= \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ.

$$I = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Пример 9. §4 18(4). Вычислить

$$I = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^4 x$, занесем $\frac{1}{\cos^2 x}$ под знак дифференциала, а также воспользуемся формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$:

$$I = \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{1+\operatorname{tg}^4 x}dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^4 x} d\operatorname{tg} x.$$

Сделаем замену $t = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x - 1) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$