Th. (Остаточный член в форме Лагранжа)

Пусть при некотором $\delta > 0$ ф-ия n переменных

$f \in C^{k+1}(U_\delta(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}))$, где $k = 0, 1, 2 \dots$. Тогда для

$k+1$ непр. диф-ма

$\forall$ точки $(x_1, \dots, x_n) \in U_\delta(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ $\exists\, \Theta \in (0, 1)$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{j!} +$$

$$+ \frac{d^{k+1} f(x_1^{(0)} + \Theta \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Theta \Delta x_n)}{(k+1)!}, \text{ где } d^j f = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j f$$

$j = 1, \dots, k+1$

$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$

Док-во: (для $n = 2$, т.е $x_1 = x$, $x_2 = x$; $f(x, y)$).

а) $f \in C^{k+1}(U\delta(x_0, y_0))$

Рассмотрим ф-ю одной переменной

$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, где $\Delta x, \Delta y$ такие, что:

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, причём $(x_0 + t\Delta x; y_0 + t\Delta y) \in U\delta(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \sqrt{t^2 \Delta x^2 + t^2 \Delta y^2} < \delta \Rightarrow |t|\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta \Rightarrow |t| < \frac{\delta}{\rho}$

1) $F'(t) = f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\cdot\Delta y =$

$= df(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$

2) Покажем по индукции, что при $1\le j\le k+1$

$\forall t\in\left(-\frac{\delta}{\rho}, \frac{\delta}{\rho}\right)\ \exists F^{(j)}(t) = d^j f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$

База индукции: при $j=1$ OK

Предположим, ут-ие верно для некоторого $j\le k$.

Покажем, что верно для $j+1$

$$F^{(j+1)}(t) = \left(F^{(j)}(t)\right)' \overset{\text{по предп. инд-ии}}{=} \left(d^j f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\right)'_t =$$

$$= \left(d^j f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\right)'_x\cdot\Delta x + \left(d^j f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\right)'_y\cdot\Delta y$$

$$= d\left(d^j f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\right) = d^{j+1} f$$

3) $F(t)$ имеет $k+1$ производную (при $|t|<\frac{\delta}{\rho}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\Theta\in(0,t): F(t) = F(0) + \sum_{j=1}^{k}\frac{F^{(j)}(0)}{j!}\cdot t^j + \frac{F^{(k+1)}(\Theta)}{(k+1)!}\cdot t^{k+1}$$

При $t=1$ (тоже верно)

$F(1) = F(0)$

$$F^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \quad F(1) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_0, y_0)}{j!} + \frac{d^{k+1} f(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)}{(k+1)!},$$

где $\Theta \in (0,1)$

Th. (ФТ с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть при некотором $\delta>0$ ф-ия n переменных

$f \in C^k(U_\delta(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}))$, где $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{j!} + o(\rho^k),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$