$$\int_0^{+\infty} \ln^{\alpha}(e^x - x) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2+\ln^2 x}\right) dx$$

При $x \to 0$:

$$\sim \int_0^1 x^{2\alpha} \frac{x^2}{\ln^2 x} dx = \int_0^1 x^{\alpha+2} \ln^{-2} x \, dx \quad ; x = \frac{1}{t} ; dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$\sim \int_1^{+\infty} t^{-4-\alpha} \ln^{-2} t \, dt \qquad ; \begin{cases} -4-2\alpha < -1 \\ -4-2\alpha = -1, \ -2 < -1 \end{cases}$$

$$\alpha \geq -\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \ln^{\alpha} x^2 \cdot \frac{x^2}{2+\ln^2 x} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\alpha+2}}{2+\ln^2 x} \overset{cx}{\sim} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2\alpha+2}}{\ln^2 x} dx$$

а) Сх. при $2\alpha+3>0$

$\alpha > -\frac{3}{2}$

б) $\alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln^2 x} dx \ ; \ x = \frac{1}{t} ; t = \frac{1}{x}$

$$\int_{+\infty}^{2} \frac{t}{\ln^2(\frac{1}{t})} d\left(\frac{1}{t}\right) = \int_2^{+\infty} \frac{\ln^{-2} t}{t} dt = \int_2^{+\infty} t^{-1} \ln^{-2} t \, dt$$

$\alpha \geq -\frac{3}{2}$

$J_2 : x \to +\infty$

$$J_2 \sim \int_2^{+\infty} \ln^\alpha(e^x - \cancel{x}) \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2+\ln^2 x}\, dx \quad (cx)$$

$$\int_2^{+\infty} x^\alpha\, dx$$

Если $g \to 0$, но не монот?

$f(x) = \sin x$; $g(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 0$

непр, огр. первообр

непр. диф,

$g(x)$ – не монот

Опр.

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ – сх. абс., если $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ – сх.

Утв.

абс. сх-ть $\Rightarrow$ сх-ть

Опр. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ – сх-ся условно, если он сх-ся, но не абс-но

1) $|\sin x| \leq 1$; $|\sin x| \leq |x|$

2) $|\sin^2 x| \leq |\sin x|$

3) $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Пример $\int\limits_1^{+\infty} \underbrace{x^\alpha}_{g(x)} \underbrace{\sin x}_{f(x)} dx$ – исс-ть на сх-ть и абс. сх-ть

1) Исследовать на сх-ть по признаку Дирихле

$f(x)$ – непр., имеет ог. первообр. на $(1; +\infty)$

$g(x)$ – непр. диф и $\downarrow 0$ при $\alpha < 0$

$\Rightarrow$ При $\alpha < 0$ $\mathcal{J}$ – сх-ся по Дирихле

2) Докажем с помощью критерия Коши,

что $\mathcal{J}$ – расх при $\alpha \geq 0$:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \begin{cases} \exists b' \geq \delta \\ \exists b'' \geq \delta \end{cases} : \left| \int\limits_{b'}^{b''} x^\alpha \sin x \, dx \right| \geq \varepsilon$$

Заметим, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ при $\alpha > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 1$, при $\alpha = 0$

$\Rightarrow x^\alpha \geq 1$ начиная с некоторого X

$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$, начиная с некоторого x

$$\left| \int\limits_{b' = 2\pi n}^{b'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n} x^{\alpha} \sin x \, dx \right| \geq \frac{1}{2} \left| \int\limits_{2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \sin x \, dx \right| = \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall \delta > 0 \begin{cases} \exists b' = 2\pi[\delta] \\ \exists b'' = 2\pi[\delta] + \frac{\pi}{2} \end{cases} : \left| \int\limits_{b'}^{b''} x^{\alpha} \sin x \, dx \right| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ расх по Коши при $\alpha \geq 0$

3) Исследуем на абс. сх-ть:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} |x^{\alpha} \sin x| \, dx \leq \int\limits_{1}^{+\infty} x^{\alpha} \, dx$$

$\Rightarrow \int$ - сх. абс при $\alpha < -1$

4) Докажем