**Lem** Пусть $B_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k =$

$= a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$, где $B_k = B_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j$,

$1 \le k \le n$. **(преобразование Абеля)**

Док-во: 1) $b_k = B_k - B_{k-1}$

2) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} =$ ← сдвиг индексов

$= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k =$

$= a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=2}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \Rightarrow$ ЧТД.

**Аналог интегр. по частям**

---

**Th1 Признак Дирихле** Пусть $a_n \downarrow 0$; посл-ть

$\sum_{k=1}^{n} b_k$ (т.е. частичных сумм ряда) - ограничена

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх-ся.

**Док-во:** Применим преобразование Абеля;

$B_0 = 0$

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$, где $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$ – огр. по условию числом $M$

$\Rightarrow |a_n B_n| \le M \cdot |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) $\left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \right| \le \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| |B_k| \le$

$\le M \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \overset{\text{в силу монот.}}{=} M \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) =$

$= M (a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 + \ldots - a_n) \longrightarrow M a_1$

$\Rightarrow \exists$ предел правой части $(*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ предел левой части $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ – сх.

**Следствие (Признак Лейбница)** Пусть $a_k \downarrow 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_n$ – сх.

---

**Th₂ (Признак Абеля)** Пусть $\{a_n\}$ – монотонна и ограничена, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сх.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ – сх.

Док-во: Пусть $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0$. Тогда $\alpha_n = a_n - a_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k b_n}_{\text{Сх. по Дирихле}} + a_0 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{Сх. по усл}}$$