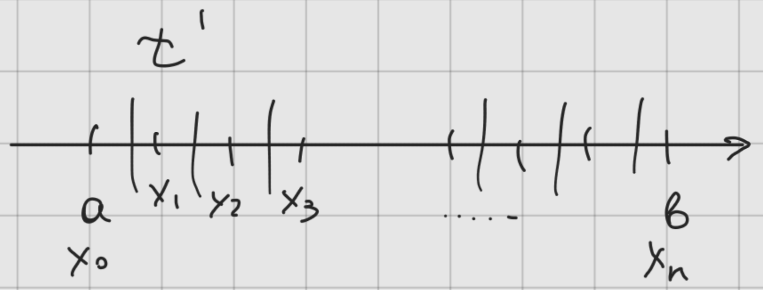
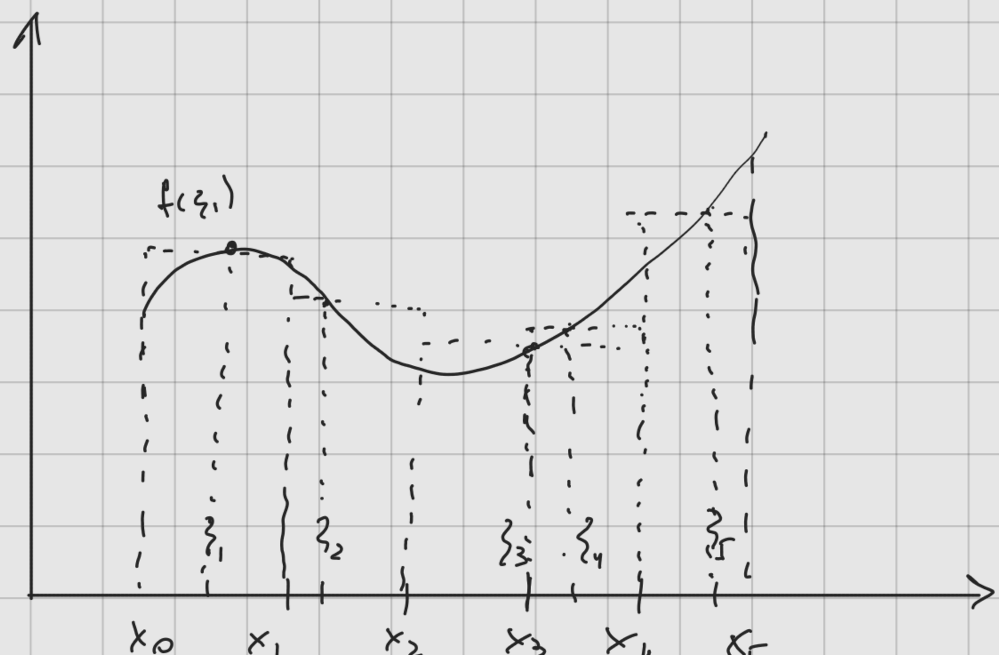


Опр. Разбиением τ отрезка $[a, b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$|\tau| = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ – мелкость разбиения

Будем говорить, что разбиение τ' является измельчением разбиения τ и будем писать $\tau' \succ \tau$, если каждая точка τ является точкой τ'



Опр. $S_\tau(f, \xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – интегральная сумма

Опр. Число $J \in \mathbb{R}$ называется определённым интегралом Римана ф-ии f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \begin{cases} \forall \tau : |\tau| < \delta \\ \forall \{\xi_i\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ \forall i = \overline{1,n} \end{cases} \hookrightarrow |S_\tau(f, \xi_1, \dots, \xi_n) - J| < \varepsilon$$

в этом случае f называют интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\tau \to 0} S_\tau(f, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

$(\forall \xi_1, \dots, \xi_n)$

Th. Ф-ия f, интегрируемая на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке

Док-во: Предположим, что f – не огр на $[a, b]$

1) $S_\tau(f) = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $[x_{k-1}, x_k]$ – отрезок,

на котором ф-ия f не огр.

2) Получим сумму неогранич. и огр. слагаемых $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ за счёт выбора ξ_k данная сумма может быть

сколь угодно большой $\Rightarrow \nexists$ конечного предела $S_t(f)$

$\Rightarrow f$ - не интегрируема $\Rightarrow$ противоречие

Контрпример f - огр., но не интегрируема

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

~~Оч~~, что f - огр.

Покажем, что f - не инт-ма

а) В качестве ξ_i будем брать $\xi_i \in \mathbb{Q}$

$$S_t(D, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a \xrightarrow[|t| \to 0]{} b-a$$

б) Теперь в качестве ξ_i будем брать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$

$$S_t(D, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0 \xrightarrow[|t| \to 0]{} 0$$

$b-a \neq 0 \Rightarrow f$ - не инт-ма