Семинар 4. Частные производные и дифференцируемость

Скубачевский Антон

1 сентября 2022 г.

Пару слов про обозначения. Мы имеем дело с $n-$мерным пространством. $x^{(0)}$ - некая точка в этом пространстве, в которой мы будем определять, что такое частная производная. Точка, т.е. элемент n-мерного пространства, имеет n координат:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Определение. Частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, ..., x_i^{(0)} + \Delta x_i, ..., x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, ..., x_i^{(0)}, ..., x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Видим, что определение эквивалентно определению производной в 1мере(предел приращения функции к приращению аргумента), но еще нужно добавить, что мы фиксируем все остальные переменные (считаем их константами), кроме той, по которой мы берем частную производную.

Частные производные обозначаются кучей способов: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} = f_{x_i}$

Дадим эквивалентное определение частной производной, в терминах не приращения аргумента, стремящегося к нулю, а в терминах разницы значений в двух очень близких точках (но то, что 2 точки близки, и значит, что приращение аргумента между ними стремится к нулю =)).

Определение'. Частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \lim_{x_i \to x_i^{(0)}} \frac{f(x_1^{(0)}, ..., x_i, ..., x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, ..., x_i^{(0)}, ..., x_n^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}}$$

Частные производные считаются так же просто, как и обычные: например, $\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2xy$, то есть мы фиксируем все переменные кроме той, по которой берем производную, и берем по методам, изученным еще в школе, в лоб производную по нужной переменной. Частная производная от функции, не зависящей от какой-то переменной, по этой переменной, равна нулю: $\frac{\partial ln(siny)}{\partial x} = 0$, так как это по сути производная от константы. Покажем на примере пожирнее, как считать частные производные, чтобы стало совсем понятно, что это как в школе.

Пример 0. Найти f'_x для функции $f(x,y) = (x^2+y^2)ln(sinx + e^y)$

$$f'_x(x,y) = 2xln(sinx + e^y) + \frac{(x^2+y^2)cosx}{sinx + e^y}$$

Пример 1. Найти частные производные в точке (0,0) функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

В случаях, когда функция задана таким сложным образом в некоторой точке, частную производную в ней приходится считать по определению: если мы посчитаем частную производную в лоб, по школьному, то, подставляя после этого в получившееся выражение точку (0,0), мы получим ноль в знаменателе.

В данном случае $x^{(0)} = (0,0)$. Также известно из условия, что $f(0,0) = 0$. Тогда производная по определению':

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x \cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

Замечу, что последний предел $(0/x)$ действительно равен нулю, это НЕ неопределенность вида $0/0$: ведь в числителе не что-то, стремящееся к нулю, а именно просто цифирка 0. А если мы 0 раз возьмем любое, даже сколь угодно большое выражение ($1/x$ при $x \to \infty$), все равно получим ноль.

Аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

Думаю, вы заметили, что считать частные производные по определению в противных точках (а это вам придется делать даже не письменном экзамене) очень просто!

Дадим определение дифференцируемости. Напомню, что даже в случае одной переменной сказать, что определение дифференцируемости: "ну это когда есть производная"неверно. Это не определение, это необходимое и достаточное условие для случая функции одной переменной, и к нему надо еще добавить, что эта производная должна быть конечной. Определение дается именно через приращение функции и o() малое:

Определение. Дифференцируемость. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда f называется дифференцируемой в этой точке, если ее приращение в этой точке (приращением называется $\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$) представимо в виде:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta x|),$$

где $A_i \in \mathbb{R}$, $|\Delta x| \to 0$.

Замечание 1. Сказать в конце определения строчку "где $A_i \in \mathbb{R}$, $|\Delta x| \to 0$"тоже важно.

Замечание 2. Δx это вектор из приращений: $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$. Соответственно, $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$

Замечание 3. $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x^{(0)}$ (очень важно, в окрестности какой точки мы смотрим, иначе определение o() малого лишено смысла), если $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Теорема. Функция, дифференцируемая в точке, имеет в это точке все частные производные, причем $f'_{x_i} = A_i$. В ОТЛИЧИЕ ОТ СЛУЧАЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ОБРАТНОЕ НЕВЕРНО!

Доказательство:

Зафиксируем все переменные, кроме $x_1^{(0)}$, то есть будем давать приращение только по ней. Тогда определение дифференцируемости (имеется в виду, что приращение Δf берется в точке $x^{(0)}$, в которой функция дифференцируема):

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + o(|\Delta x|) \Leftrightarrow \Delta f - A_1 \Delta x_1 = o(|\Delta x|)$$

По определению o() малого это значит, что

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f - A_1 \Delta x_1}{\Delta x_1} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = A_1$$

Но $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ по определению частной производной. Значит, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ существует и равна A_1. Про производные по остальным переменным доказывается аналогично. Ч.т.д.

Теорема. Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

По определению функция непрерывна, когда приращение функции в точке $x^{(0)}$ $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Устремив в определении дифференцируемости $\Delta x \to 0$, получим, что $\Delta f \to 0$. Значит, f-непрерывна в точке $x^{(0)}$, ч.т.д.

Замечание. Но из непрерывности и существования частных производных не следует дифференцируемость. Рассмотрим пример 1:

Пример 1(продолжение).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Мы уже доказали, что у этой функции есть в точке (0,0) производные. Покажем, что она непрерывна. Покажем также, что при этом она не дифференцируема.

Функция f будет непрерывна в точке $(0, 0)$, если

$$\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(0, 0) = 0$$

Сделаем полярную замену координат:

$$\begin{cases} x = \rho cos\phi \\ y = \rho sin\phi \end{cases}$$

Тогда:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \lim_{\rho\to 0} |\frac{2\rho^2 cos\phi sin\phi}{\rho}| \le \lim_{\rho\to 0} |2\rho| = 0 = f(0,0)$$

Предел модуля функции существует и равен 0, значит, предел функции существует и равен 0.

Значит, функция непрерывна, ч.т.д.

Исследуем на дифференцируемость. Определение дифференцируемости для функции 2 переменных в точке (0,0) (здесь Δx это вектор с координатами (x,y). $|\Delta x| = \sqrt{x^2+y^2}$):

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}), \text{ при } (x,y) \to (0,0)$$

По определению o() малого это значит, что:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad (1)$$

Будем в дальнейшем выражение (1) использовать для исследования на дифференцируемость. Если предел равен нулю, то функция дифференцируема. Если не нулю, или его не существует, то не дифференцируема.

Итак, исследуем в точке $(0,0)$ функцию f на дифференцируемость:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Составим выражение (1), вспомнив, что у нас уже найдены производные: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. $f(0,0) = 0$ тоже.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} / \sqrt{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2 sin\phi cos\phi}{\rho^2} = sin2\phi = \sqrt{2}/2 \nrightarrow 0 \text{ например, при } \phi = \pi/8$$

Значит, функция не дифференцируема в нуле. Получили важный пример,доказывающий, что из существования производных и непрерывности не следует дифференцируемость. Советую его запомнить к экзамену.

Замечание. Из непрерывности не следует существование частных производных. Например, $f(x, y) = |x|$ непрерывна в точке $(0, 0)$, но не имеет в ней производной $f'_x(0, 0)$, доказывается это аналогично 1му семестру: односторонние производные не равны, значит, производной нет.

Замечание. Из существования частных производных не следует непрерывность.

Пример 2. Доказать, что у функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ существуют частные производные, но она не непрерывна в этой точке:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \neq 0 \\ 0 & x \neq y \; or \; x = y = 0 \end{cases}$$

Эта функция не непрерывна по направлению $x = y$ в точке $(0, 0)$: предел по этому направлению равен 1 (т.к. значение функции $= 1$ в каждой точке этого направления), а значение $f(0, 0) = 0 \neq \underset{x\to 0}{lim} f(x, x) = 1$. Следовательно, функция не может быть непрерывной в (0,0), т.к. она не непрерывна в этой точке по одному из направлений.

Посчитаем производный по определению:

$$f_x(0,0) = \underset{x\to 0}{lim} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \underset{x\to 0}{lim} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

Аналогично,

$$f_y(0,0) = 0$$

Таким образом, у функции в точке (0,0) существуют обе частных производных, но она не непрерывна.

С3 §4 4. Вычислить в точке $(0; 0)$ частные производные f''_{xy}, f''_{yx} функции

$$f = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Данная задача демонстрируем, что смешанные частные производные не всегда равны.

Вычислим первые частные производные при $x^2+y^2\neq 0$:

$$f'_x(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

При $x^2+y^2=0$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4\cdot x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4\cdot y}=0.$$

Вычислим $f''_{xy}(0,0)$:

$$f''_{xy}(0,0)=(f'_x)'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^5}{y^4\cdot y}=-1.$$

Вычислим $f''_{yx}(0,0)$:

$$f''_{yx}(0,0)=(f'_y)'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{x^5}{x^4\cdot x}=1.$$

Определение. Непрерывная дифференцируемость. Функция называется непрерывно дифференцируемой в точке, если у нее существуют и непрерывны частные производные по всем переменным в этой точке.

Таким образом, чтобы доказать, что функция непрерывно дифференцируема в точке, нужно сначала найти по-школьному все ее производные как функции x, и потом сверить их предел в данной точке со значением в этой точке. Для примера рассмотрим, как исследовать функцию на непрерывность, дифференцируемость и непрерывную дифференцируемость в случае функции одной переменной (задача из прошлого семестра):

Пример 4. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

исследовать на непрерывность, дифференцируемость и непрерывную дифференцируемость при всех α.

Решение:

Во-первых, очевидно, что при всех альфа при всех $x \neq 0$ наша функция непрерывно дифференцируема как композиция непрерывно дифференцируемых функций (ну и, следовательно, дифференцируема и, следовательно, непрерывна).

Значит нам нужно исследовать поведение функции только в точке 0.

1) Исследуем на непрерывность в нуле. То есть по определению непрерывности нужно найти альфа, при которых

$$\underset{x\to 0}{lim} f(x) = f(0) = 0$$

.

Очевидно, что при $\alpha > 0$ этот предел равен нулю, т.к. $0 \leq \underset{x\to 0}{lim}|f(x)| \leq \underset{x\to 0}{lim}|x|^\alpha = 0$ при $\alpha > 0$, следовательно, по теореме о двух милиционерах, предел есть и равен нулю.

Теперь осталось доказать отсутствие непрерывности при $\alpha \leq 0$, то есть что $\neq \underset{x\to 0}{lim} f(x)$ (ну или что этот предел не равен f(0)). Мы докажем, что его не существует, пользуясь определением предела по Гейне. Нужно доказать, что $\exists x'_n, x''_n$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x''_n).$$

Возьмем $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$, обе$\to 0$ при $n \to \infty$.

$$sin(x'_n) = 0$$

$$sin(x''_n) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \begin{cases} 1, \alpha = 0 \\ \infty, \alpha < 0 \end{cases}$$

Следовательно, предела нет в нуле по определению Гейне.

Итак, функция непрерывна в нуле при $\alpha > 0$, а в остальных точках при всех α

2) Дифференцируемость: в случае таких странно заданных функций следует действовать по определению:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} signx = 0 \text{ при } \alpha > 1,$$

т.к. $sin\frac{1}{x}$ - функция ограниченная, а $|x|^{\alpha-1}$ - бесконечно малая. $signx$ взялся при делении модуля икса на икс, т.к. ($|x| = xsignx$). Итак, мы доказали, что при $\alpha > 1$ функция дифференцируема в нуле (ну и значит в каждой точке, т.к. в остальных точках, как мы уже заметили, она дифференцируема).

Но из этого не следует, что при $\alpha \leq 1$ функция не дифференцируемая в нуле. Это надо показать. Т.е. надо показать, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} signx$ при $\alpha \leq 1$. Показывается отсутствие предела обычно с помощью определения по Гейне: возьмем 2 последовательности $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, обе$\to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда при таких последовательностях:

$$\lim_{n\to\infty} |x'_n|^{\alpha-1} sin\frac{1}{x'_n} signx'_n = 0,$$

т.к. $sin(2\pi n) = 0$;

$$\lim_{n\to\infty} |x''_n|^{\alpha-1} sin\frac{1}{x''_n} signx''_n = \lim_{n\to\infty} |x''_n|^{\alpha-1} signx''_n \neq 0,$$

т.к. $sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} |x''_n|^{\alpha-1} = \begin{cases} 1, \alpha = 1 \\ \infty, \alpha < 1 \end{cases}$

Т.о., мы получили, что по определению предела функции по Гейне не существует предела $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} g(x)$ при $\alpha \leq 1$, где $g(x) = |x|^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} signx$, т.к $\exists x'_n, x''_n$:

$$\lim_{n\to\infty} g(x'_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(x''_n)$$

(Один равен нулю, а второй единице или бесконечности).

Резюме исследования на дифференцируемость: при $\alpha > 1$ функция дифференцируема во всех точках. При $\alpha \leq 1$ функция дифференцируема во всех точках кроме $x = 0$.

3). Исследуем на непрерывную дифференцируемость в точке $x = 0$. Для этого возьмем производную и исследуем производную на непрерывность в нуле (напомню, что непрерывная дифференцируемость - непрерывность производной как функции).

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} signx - |x|^{\alpha} x^{-2} cos\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} signx - |x|^{\alpha-2} cos\frac{1}{x}$$

.

Аналогично предыдущим двум пунктам убеждаемся, что производная будет непрерывна в нуле при $\alpha > 2$:

$$0 \leq \underset{x\to 0}{lim}|f'(x)| \leq \underset{x\to 0}{lim}(\alpha|x|^{\alpha-1} + |x|^{\alpha-2}) = 0, \alpha > 2$$

(Тут использовалось, что модуль суммы меньше суммы модулей.)

Далее убеждаемся с помощью определения предела по Гейне в том, что при $\alpha \leq 2$ производная не будет непрерывна. Аналогично берем те же последовательности.

Задача решена.

Теорема. Из непрерывной дифференцируемости в точке следует дифференцируемость в этой точке.

Но из дифференцируемости не следует непрерывная дифференцируемость. Докажем это с помощью следующего примера (его стоит тоже к экзамену запомнить).

Пример 5.Исследовать на дифференцируемость и непрерывную дифференцируемость в точке (0,0) функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Для исследования на дифференцируемость найдем по определению частные производные в (0,0):

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}(x^2 sin\frac{1}{x^2}-0)/(x-0) = \lim_{x\to 0} x sin\frac{1}{x^2} = 0$$

(предел равен нулю как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Аналогично найдем производную по y:

$$f'_y(0,0) = 0$$

Чтобы доказать, что функция дифференцируема, запишем выражение (1):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2 sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho sin\frac{1}{\rho^2} = 0$$

Значит, функция дифференцируема в точке (0,0).

Покажем, что не непрерывно дифференцируема в (0,0). Для этого найдем "по-школьному"частные производные при $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x(x,y) = 2x(sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{cos\frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2})$$

Докажем теперь, что эта частная производная как функция не является непрерывной в точке (0,0), то есть либо у нее нет предела в этой точке, либо этот предел не равен ее значению в этой точке $f'_x(0,0)$. Оказывается, предела нет. Докажем, что предела не существует, по Гейне.

Возьмем $(x_n,y_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},0)$ - последовательность Гейне в точке (0,0).

$$f'_x(x_n,y_n) = 2x_n(sin(2\pi n) - 2\pi n\cdot cos(2\pi n)) = -2\sqrt{2\pi n}cos(2\pi n) = -2\sqrt{2\pi n}(-1)^n \nrightarrow$$

Значит, предела нет по Гейне. Значит, эта производная в нуле не непрерывна. Значит, f - не непрерывно дифференцируема в нуле (т.к. по крайней мере одна производная не непрерывна).

Примеры типа "исследовать на дифференцируемость типичные в экзаменационной работе. Давайте решим пару таких номеров из экзаменов прошлых лет.

Пример 6. Исследовать на дифференцируемость в точке (0,0) функцию $f(x,y) = y + ln(3 + \sqrt[3]{x^2y})$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y+ln3-ln3}{y} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y+ln(3+\sqrt[3]{x^2y})-ln3-y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ln(1+\sqrt[3]{x^2y}/3)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{ln(1+\frac{\rho\sqrt[3]{cos^2\phi sin\phi}}{3})}{\rho} =$$

$$= [\text{ разложим логарифм по формуле Тейлора до 1го порядка}] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\rho\sqrt[3]{cos^2\phi sin\phi}}{3}+o(\rho)}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{cos^2\phi sin\phi}}{3}$$

При $\phi = \pi/4$, например, это выражение равно $\frac{1}{3\sqrt{2}} \neq 0$. Следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0;0)$. На примере этого примера мы видим, что производные, посчитанные в нуле по определению, не всегда равны нулю =).

Пример 7. Исследовать на дифференцируемость в точке (0;0) функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xln(1+y)-yln(1+x)+\frac{xy}{2}(y-x)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & else \\ 0 & (0,0) \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0+0+0}{x(x^2+0)^{3/2}} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

В этом примере придется раскладывать по формуле Тейлора аж до 3го порядка малости. До 3го, чтобы члены второго порядка сократились с выражением $\frac{xy}{2}(y-x)$. А если разложим только до 2го, в числителе останется лишь o() малое - верный признак того, что мы недоразложили. Будем сразу писать $o(\rho^3)$, а не от x и y для удобства. Также в знаменателе сразу сделаем замену $x^2+y^2=\rho$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(\rho^3))-y(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(\rho^3))+\frac{xy}{2}(y-x)}{\rho^4}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy^3-yx^3}{3}}{\rho^4}=\lim_{\rho\to0}\frac{\frac{\rho^4}{3}(cos\phi sin^3\phi-sin\phi cos^3\phi)}{\rho^4}=cos\phi sin^3\phi-sin\phi cos^3\phi\not\equiv0$$

Значит, функция не дифференцируема в точке (0,0).

Пример 7. Исследовать на дифференцируемость в точке (2;0) функцию:

$$f(x,y)=(x^2+xy-4)\sqrt{x^2+y^2+xy-4x-2y+4}$$

Чтобы исследовать в привычной точке (0,0), сразу сделаем замену $z=x-2$:

$$f(z,y)=(z^2+4z+zy+2y)\sqrt{z^2+y^2+yz}$$

$$f(0,0)=0$$

$$f'_z(0,0)=\lim_{z\to0}\frac{((z+2)^2-4)\sqrt{z^2}}{z}=0$$

$$f'_y(0,0)=0 \text{ аналогично}$$

Для того, чтобы было удобно оценивать сверху, предел выражения (1) будем от модуля искать. Также сделаем замену $z=\rho cos\phi$; $y=\rho sin\phi$

$$\lim_{(z,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(z,y)-f(0,0)-f'_z(0,0)z-f'_y(0,0)y}{\sqrt{z^2+y^2}}\right|=\lim_{(z,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(z,y)}{\sqrt{z^2+y^2}}\right|=$$

$$=\lim_{(z,y)\to(0,0)}\left|\frac{(z^2+4z+zy+2y)\sqrt{z^2+y^2+yz}}{\sqrt{z^2+y^2}}\right|=$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \left| \frac{(\rho^2 cos^2\phi + 4\rho cos\phi + \rho^2 cos\phi sin\phi + 2\rho sin\phi)\rho\sqrt{1+cos\phi sin\phi}}{\rho} \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} |\rho(\rho cos^2\phi + 4cos\phi + \rho cos\phi sin\phi + 2sin\phi)| \leq$$

$$\leq \lim_{\rho\to 0} |\rho^2 cos^2\phi| + \lim_{\rho\to 0} |4\rho cos\phi| + \lim_{\rho\to 0} |\rho^2 cos\phi sin\phi| + \lim_{\rho\to 0} |2\rho sin\phi| \leq$$

$$\leq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 + 4\lim_{\rho\to 0} \rho + \lim_{\rho\to 0} \rho^2 + 2\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

Значит, функция дифференцируема в исследуемой точке.

Определение. Дифференциал. Линейная функция

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

называется дифференциалом функции f в точке $x^{(0)}$. Для симметричности записи вместо Δx_i пишут dx_i и называют их дифференциалами независимых переменных.

Например, дифференциал функции 3 переменных в точке $x^{(0)}$ с координатами (x_0, y_0, z_0) имеет вид:

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)dz$$

В записи дифференциала справа всегда должны стоять дифференциалы независимых переменных (кроме случая, когда все производные = 0, тогда 0). Т.е. если у вас записано $df(x^{(0)}) = 47$ - это заведомо неверно. Вы значит посеяли где-то дифференциал независимой переменной.

Пример 8. Найти первый дифференциал в точке(1;0;1) функции $f = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$

Найдем для этого частные производные:

$$f'_x = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0 \text{ при x=1, y=0, z=1}$$

Аналогично,

$$f'_y(1, 0, 1) = 0$$

$$f'_z(1, 0, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$df(1,0,1) = f'_x(1,0,1)dx + f'_y(1,0,1)dy + f'_z(1,0,1)dz = -\frac{1}{2}dz$$

Второй дифференциал обозначается d^2f ("дэ два эф") и является по опрееленению дифференциалом от первого дифференциала. Второй и старшие дифференциалы от независимой переменной равны 0. Дифференциал в квадрате обозначается $(dx)^2 = dx^2$ ("дэ икс квадрат"), и он, разумеется, не совпадает с d^2x.

Формула для вычисления второго дифференциала:

$$d^2f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)})dx_i dx_j$$

Здесь $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ - вторая частная производная: начала берется по x_i, потом по x_j. Обозначается также $f''_{x_i x_j}$. Например, $(lnx \cdot y^2)''_{xy} = (\frac{y^2}{x})'_y = \frac{2y}{x}$. Если вторая производная берется по 2 разным переменным (а не по xx или yy), то такую вторую производную называют смешанной.

Теорема. Пусть у функции f двух переменных x, y частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда $f''_{xy} = f''_{yx}$

В большинстве задач эти производные будут равны.

Второй дифференциал для случая функции 2 переменных:

$$d^2f(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)dx^2 + f_{xy}(x_0,y_0)dxdy + f_{yx}(x_0,y_0)dydx + f_{yy}(x_0,y_0)dy^2 =$$

$$= [\text{ если вторые смешанные производные непрерывны}] =$$

$$= f_{xx}(x_0,y_0)dx^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)dxdy + f_{yy}(x_0,y_0)dy^2$$

Пример 9. Посчитать второй дифференциал в точке $u(2,0) = 1$ от функции $u(x,y)$, неявно заданной уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + u^2 - 8xu - u + 8 = 0 \qquad (2)$$

Первый способ. Найдем первые производные от обеих частей (2).

$$(2)'_x: \quad 4x + 2uu_x - 8u - 8xu_x - u_x = 0 \qquad (3)$$

Подставим в (3) $u(2,0) = 1$:

$$8 + 2u_x - 8 - 16u_x - u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x(2,0,1) = 0$$

$$(2)'_y : \quad 4y + 2uu_y - 8xu_y - u_y = 0 \tag{4}$$

Подставим в (4) $u(2,0) = 1$:

$$2u_y + 2uu_y - 8xu_y - u_y = 0 \quad \Rightarrow \quad u_y(2,0,1) = 0$$

Тогда первый дифференциал

$$du(2,0,1) = u_x(2,0,1)dx + u_y(2,0,1)dy$$

Вторые производные будем искать аналогично, беря производные от обеих частей (3) и (4). (именно (3) и (4), а не от $u_x(2,0,1) = 0$!)

$$(3)'_x : \quad 4 + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 8u_x - 8u_x - 8xu_{xx} - u_{xx} = 0$$

Подставим сюда $u(2,0) = 1$; $u_x(2,0,1) = 0$; $u_y(2,0,1) = 0$:

$$4 + 2u_{xx} - 16u_{xx} - u_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{xx}(2,0,1) = \frac{4}{15}$$

$$(3)'_y : \quad 2u_y u_x + 2uu_{xy} - 8u_y - 8xu_{xy} - u_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{xy}(2,0,1) = 0$$

$$(4)'_y : \quad 4 + 2u_y^2 + 2uu_{yy} - 8xu_{yy} - u_{yy} = 0$$

$$4 - 15u_{yy}(2,0,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{yy}(2,0,1) = \frac{4}{15}$$

Тогда по формуле для второго дифференциала имеем:

$$d^2u(2,0,1) = u_{xx}(2,0,1)dx^2 + 2u_{xy}(2,0,1)dxdy + u_{yy}(2,0,1)dy^2 = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2$$

Второй способ. Будем сразу искать дифференциалы от обеих частей:

$$d(2) : \quad 4xdx + 4ydy + 2udu - 8udx - 8xdu - du = 0 \tag{5}$$

Подставим $u(2,0)=1$:

$$8dx + 2du - 8dx - 16du - du = 0 \quad \Rightarrow \quad du(2,0,1) = 0$$

Видим, что первые дифференциалы в обоих случаях совпали. Возьмем теперь второй дифференциал от обеих частей (5). Когда его будем брать, учтем, что вторые дифференциалы от независимых переменных равны 0: $d^2x = d^2y = 0$, а также что записывают $(dx)^2 = dx^2$; $(dy)^2 = dy^2$; $(du)^2 = du^2$

$$d(5): 4dx^2+4xd^2x+4dy^2+4yd^2y+2du^2+2ud^2u-8dudx-8ud^2x-8dxdu-8xd^2u-d^2u = 0$$

Подставим сюда $u(2,0)=1$; $du(2,0,1)=0$ и учтем, что вторые дифференциалы независимых переменных $=0$:

$$4dx^2 + 4dy^2 + 2du^2 + 2d^2u - 16d^2u - d^2u = 0$$

Имеем:

$$d^2u(2,0,1) = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2$$

Формула Тейлора. Для случая функции 2 переменных разложение по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) до $o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)$ (при условии, что все частные производные до второго порядка включительно существуют и непрерывны):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(y-y_0)^2)+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$$

Запомнить эту формулу очень просто: $f(x,y) =$ f(точке)$+$первый дифференциал, где вместо dx и dy стоят приращения $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$ $+$ $1/2$*(второй дифференциал, где вместо дифференциалов независимых переменных соответствующие приращения) $+$ o(). Не забудьте главное заменить dx и dy на $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$, иначе получится полный бред.

Пример 9.(продолжение) Разложить $u(x,y)$ по формуле Тейлора до $o((x-2)^2 + (y)^2)$:

$$u(x,y) = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(\frac{4}{15}(x-2)^2 + \frac{4}{15}(y)^2) + o((x-2)^2 + (y)^2)$$

1 Дифференцирование неявной функции.

Теорема. Пусть каждая из m функций $f_1, ..., f_m$ от n переменных дифференцируема в точке $x^{(0)} \in R^n$. Пусть функция g m переменных дифференцируема в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), ..., f_m(x^{(0)}))$. Тогда сложная функция $h(x) := g(f_1(x), ..., f_m(x))$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и для ее частных производных справедливы равенства

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, ..., n$$

А теперь простыми словами=)

Вот у нас есть функция g. Она сложная: зависит от функций $f_1, ..., f_m$, каждая из которых в свою очередь зависит от n переменных $x_1, ..., x_n$: $g(f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$. Заметим, что m и n - в общем случае разные числа, то есть g зависит от m аргументов, а f - от n аргументов. Тогда встает вопрос: как взять производную $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ (j - некоторое число от 1 до n)? То есть как найти производную сложной функции. От x_j зависит каждая из функций $f_1, ..., f_m$. Значит логично, что надо сначала взять производную от g по этим функциям по очереди, а потом от этих функций по конкретной переменной x_j. Ну и оказывается, все это добро надо еще сложить. Получается

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \text{ справедливо } \forall j = 1, ..., n$$

Чтобы глаза не разбегались от двух индексов, и было понятно, какой из них фиксированный, возьмем производную по x_2:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_2}$$

Если у нас только 2 переменных, то есть $x_1 = x$, $x_2 = y$, а функций f 3 штуки: f_1, f_2, f_3, то, например,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f_3} \frac{\partial f_3}{\partial x}$$

Пример 10.

Решить с помощью перехода к полярной системе координат. Задача очень важная: понадобится в дальнейшем и будет на экзамене:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Выразим для начала новые координаты через старые:

$$\begin{cases} \phi = arcctg(\frac{x}{y}) \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x\sqrt{y^2}}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r}$$

По формуле производной сложной функции:

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Подставим все полученное в исходное уравнение:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$r\cos\phi\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\cos\phi}{r}\right) - r\sin\phi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi - \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\sin\phi}{r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} r\cos\phi\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cos^2\phi - \frac{\partial u}{\partial r} r\cos\phi\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\sin^2\phi = 0$$

$u_\phi = 0 \Rightarrow u$ не зависист от $\phi \quad \Rightarrow u = u(r) = u(\sqrt{x^2+y^2}) = u(x^2+y^2)$
Ответ: $u = f(x^2+y^2)$ где функция f любая.

Пример 11. Переписать $z_{tt}(t,x)$ в координатах $u = x - at$; $v = x + at$

$$z_t = z_u u_t + z_v v_t = z_u \cdot (-a) + a z_v$$

Когда ниже будем выражать производную, применим при дифференцировании по t функций z_u и z_v то же правило, что и при дифференцировании функции z по t строчкой выше.

$$z_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(z_u \cdot (-a) + a z_v) = -a z_{uu} u_t + z_{uv}(-a) v_t + a z_{vv} v_t + a z_{vu} u_t = a^2 z_{uu} - a^2 z_{uv} - a^2 z_{vu} + a^2 z_{vv}$$