Производная по направлению. Градиент

Опр. $\operatorname{grad} f(x^0) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(x^0) \\ \vdots \\ f'_{x_n}(x^0) \end{pmatrix}$

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

Утв. f - диф-ма в т. $x^{(0)}$, если

$$\Delta f(x^0) = \underbrace{(\operatorname{grad} f(x^0), \Delta x)}_{\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \Delta x_i} + o(|\Delta x|)$$

$$f = x^2 y, \quad \left.\begin{aligned} f'_x &= 2xy \\ f'_y &= x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Опр. Производная по напр-ю $\bar{l}$ в т. x^0:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x^0) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x^0 + t\bar{l}) - f(x^0)}{t}$$

Утв. Если f - диф-ма в т. x^0, то у неё в этой точке существует производная по любому направлению, которая равна: $\frac{\partial f}{\partial l}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \bar{l})$

Док-во:

1) f – диф-ма в т. x^0 =>

$$\Rightarrow f(x^0+t\bar{e})-f(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \overset{\Delta x}{\overset{\parallel}{t\bar{e}}}) + o(t)$$

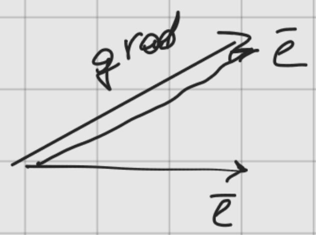
$o(|te|)$

но $t \geq 0$, $|e| = 1$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \bar{e}} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x^0+t\bar{e})-f(x^0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\cancel{t}(\operatorname{grad} f(x^0), \bar{e}) + o(\overset{1}{\cancel{t}})}{\cancel{t}} = (\operatorname{grad} f(x^0), \bar{e})$$

$\left|\frac{\partial f}{\partial e}\right|$ наибольшее, если $\bar{e} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$



=> геом смысл grad – направление наибыстрейшего роста функции