Кривая: $\bar{r}(t)$ (если непр.)

Рассмотрим $\bar{r}(u, v)$

Опр. Вектор $\bar{a}$ называется **предельным вектор-функции** $\bar{r}(u, v)$ в т. (u_0, v_0) по мн-ву E (где (u_0, v_0) – предельная точка E), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (u, v) \in E \cap \mathring{U}_\delta(u_0, v_0) \mapsto |\bar{r}(u, v) - \bar{a}| < \varepsilon$$

Пишут $\lim\limits_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \bar{r}(u, v) = \bar{a}$

Опр. Вектор-ф-ию $\bar{r}(u, v)$ называют непрерывной в предельной точке (u_0, v_0) мн-ва E, если $\lim\limits_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \bar{r}(u, v) = \bar{r}(u_0, v_0)$

Опр. $$r'_u(u_0, v_0) = \left.\frac{dr(u, v_0)}{du}\right|_{u = u_0}$$ $$r'_v(u_0, v_0) = \left.\frac{dr}{dv}(u_0, v)\right|_{v = v_0}$$

Опр. **Мн-во точек $S \subset \mathbb{R}^3$**: $S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v))

$(u, v) \in \bar{D}\}$, где замкнутая обл-ть $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$, а

x, y, z – непр. диф-мы на $\bar{D}$,

$\boxed{\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2}$ на $\bar{D}$, будем

называть гладкой поверхностью.

$$\bar{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

т.е. r'_u и r'_v – не коллинеарны

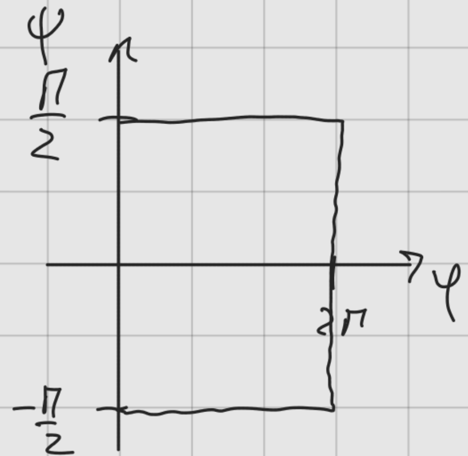
Пример: S: сфера радиуса 1

$x = \cos\varphi \cos\psi \qquad \varphi \in [0; 2\pi)$

$y = \sin\varphi \cos\psi \qquad \psi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$z = \sin\psi$

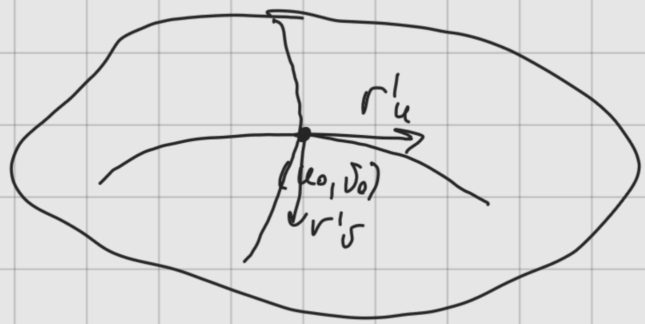
$$S: \ \bar{r}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\psi \\ \sin\varphi \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$



Опр. Мн-во $\{\bar{r}(u, v_0)$, где $(u, v_0) \in \bar{D}\}$ — **координатная линия** $v = v_0$, а

r'_u — **её касательный вектор**

(т.е. зафикс. одну перемен., получим линию $\bar{r}(u, v_0)$ на пов-ти $\bar{r}(u, v)$)



$$[r'_u \times r'_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k},$$

где $A = \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $B = \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, $C = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

Т.О. для гладкой пов-ти: $A^2 + B^2 + C^2 > 0 \Leftrightarrow$

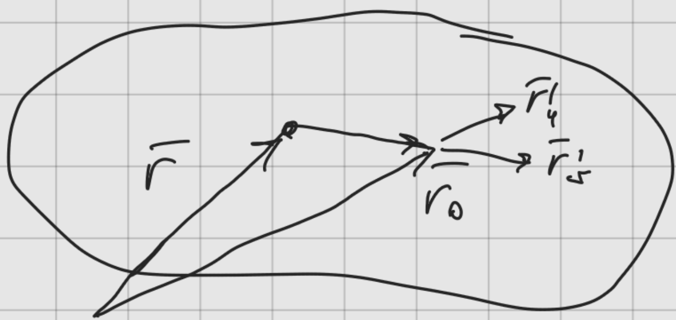
$\Updownarrow$

$rg\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ хотя один минор 2×2 не 0.

$\Rightarrow r'_u \times r'_v \neq \bar{0}$ для гладкой поверхности

Опр. Пл-ть, проходящая через точку $\bar{r}(u_0, v_0)$ и вектора $\bar{r}'_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}'_v(u_0, v_0)$, назовём касательной плоскостью к S в точке (u_0, v_0)

её ур-е: $(\bar{r}-\bar{r}_0, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v) = 0$



Опр. Прямая, которая проходит через точку касания касательной плос-ти с пов-ью S и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к S в данной точке.

$r'_u \times r'_v \parallel$ этой прямой