Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа
бизнеса высоких технологий
(ФБВТ)

для студентов 2 курса
на осенний семестр
2023–2024 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2023

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на осенний семестр 2023–2024 учебного года. Физтех-школа бизнеса высоких технологий (ФБВТ). – Москва : МФТИ, 2023. – 32 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: электромагнетизм**
по направлениям подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
38.03.01 «Экономика»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»

физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 3

лекции – 20 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 40 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90

Экзамен – 3 семестр

Диф. зачёт – 3 семестр

Самостоятельная работа:
теор. курс – 55 часов
физ. практикум – 50 часов

Программу и задание составили:
к.ф.-м.н., доц. Лапушкин Г.И.
к.ф.-м.н., доц. Попов П.В.
к.ф.-м.н., доц. Юдин И.С.

Программа принята на заседании кафедры общей физики 12 мая 2023 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
А. В. Максимычев

Электричество и магнетизм, Оптика

1. Электростатика. Общий вид уравнений Максвелла, различие систем единиц СИ и СГС. Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя. Теорема Гаусса для электрического поля в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей. Потенциальный характер электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия на заряженной поверхности. Уравнения Пуассона и Лапласа. Единственность решения электростатической задачи. Метод «изображений».

2. Электрический ток. Проводники в электрическом поле. Постоянный ток. Сила тока. Объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и дифференциальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Электродвижущая сила. Правила Кирхгофа. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца. Токи в объёмных средах. Граничные условия на поверхности проводника и на границе двух диэлектриков. Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия диполя в электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле.

3. Магнитостатика. Магнитное поле постоянных токов в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био–Савара. Магнитное поле равномерно движущегося точечного заряда. Рамка с током в магнитном поле. Магнитный момент тока. Теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме и её применение к расчету магнитных полей. Магнитное поле тороидальной катушки и соленоида. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции.

4. Уравнения Максвелла, магнитное и электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков, свободные и связанные заряды, связь векторов E и D в общем случае. Вектор поляризации среды, поляризуемость среды. Электреты, доменная структура сегнетоэлектриков. Вектор намагниченности. Связь полей B и H в общем случае. Токи проводимости и молекулярные токи. Варианты магнитного поведения вещества - диамагнетизм, парамагнетизм, ферромагнетизм. Доменная структура магнетиков. Гистерезис магнетиков.

5. Электромагнитная индукция. Поток магнитного поля. ЭДС индукции в движущихся проводниках. Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах. Индуктивность. Индуктивность соленоида. Генерация магнитного поля в переменном электрическом поле, ток смещения. Уравнения Максвелла в дифференциальном и интегральном виде, поля E, D, B, H. Ток смещения. Материальные уравнения. Граничные условия для векторов E, D, B, H.

6. Электромагнитные колебания и волны. Колебательный контур. Свободные затухающие колебания. Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность. Энергетический смысл добротности. Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс. Процесс установления стационарных колебаний. Обратная связь. Условие самовозбуждения. Флуктуационный предел измерения слабых сигналов. Комплексная форма представления колебаний. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс). Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока. Амплитудная и фазовая модуляции.

7. Взаимодействия электромагнитных волн со средой. Волновое уравнение. Электромагнитные волны в однородном диэлектрике, их поперечность и скорость распространения. Поток энергии в электромагнитной волне. Закон сохранения энергии и теорема Пойнтинга. Электромагнитная природа света. Монохроматические волны. Комплексная амплитуда. Плоские и сферические волны Давление излучения. Электромагнитный импульс. Излучение диполя (без вывода). Понятие о линиях передачи энергии. Двухпроводная линия. Скин-эффект.

8. Электромагнитные волны на границе раздела двух диэлектриков. Формулы Френеля. Явление Брюстера. Явление полного внутреннего отражения. Классическая теория дисперсии электромагнитных волн. Поглощение электромагнитной волны в среде, комплексный показатель преломления. Затухающие волны, закон Бугера. Нормальная и аномальная дисперсии. Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы. Проникновение электромагнитных волн в плазму. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь.

9. Понятие о спектральном разложении. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов. Соотношение неопределённостей. Спектральный анализ линейных систем. Частотная характеристика и импульсный отклик системы. Колебательный контур как спектральный прибор. Интегрирующая и дифференцирующая цепочки как высокочастотный и низкочастотный фильтры. Модуляция и детектирование сигналов. Амплитудная и фазовая модуляции.

10. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Способы наблюдения интерференции.

11. Временная когерентность. Функция временной когерентности, видность интерференции. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределённостей.

12. Интерференция при использовании протяжённых источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности. Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах. Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

Литература

Основная литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. — М.: Физматлит, 2003.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 4. Оптика. — М.: Физматлит, 2003.
3. *Кириченко Н.А.*, Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011.
4. *Кириченко _Н._А._* _Принципы оптики: учебное пособие. – М. : МФТИ, 2016
5. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001.
6. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 3. Электричество / под ред. А.Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2012.
7. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 4. Оптика / под ред. А.Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2012.
8. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 2 / под ред. В.А. Овчинкина. — М.: Физматкнига, 2017.

3. Дополнительная литература

1. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — М.: Лаборатория знаний, 2017.
2. *Ландсберг Г.С.* Оптика._– М.: Физматлит, 2003.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — Москва : Наука, 1997.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. — Москва : Физматлит, 2003.
5. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — Москва : Наука, 1983.
6. *Фейнман Р.П.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуски 5, 6, 7. — Москва : Мир, 1977.
7. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — Москва : Физматлит, 2006.
8. *Мешков И.Н., Чириков Б.В.* – Электромагнитное поле. – Новосибирск : Наука, 1987.

Электронные ресурсы: http://physics.mipt.ru/S_III/

ЗАДАНИЕ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

для студентов 2-го курса ФБВТ
на осенний семестр 2023/24 учебного года

	№ нед	Темы семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
9–14 окт.	**1**	Электростатическое поле в вакууме. Поле диполя. Теорема Гаусса. Закон Кулона.	$^{0}1$ $^{0}2$ 1.20 1.7	1.10 1.14 1.22 1.23	1.9 1.11 1.24 1.21
16–21 окт.	**2**	Потенциал. Проводники в электрическом поле. Ёмкость.	$^{0}3$ $^{0}4$ $^{0}5$ 2.23	2.4 2.11 2.48 2.22	2.7 2.15 2.20 2.9
16–21 окт.	**3**	Энергия и силы в электрическом поле. Электрический ток. Токи в неограниченных средах.	3.50 4.2 4.31	1.5 3.67 4.23 4.33	3.73 3.84 4.2 4.36
23–28 окт.	**4**	Магнитное поле тока, магнитный диполь. Индуктивность.	$^{0}6$ $^{0}7$ $^{0}8$	5.5 5.18 5.26 5.28 5.29	5.21 5.22 5.10 5.30
30 окт. – 4 нояб.	**5**	Электромагнитная индукция. Уравнения Максвелла. Вектор Пойнтинга.	7.1 $^{0}9$ $^{0}10$	Т1 7.58 12.5 12.9	12.22 7.31 7.64 12.8
30 окт.– 4 нояб.	**6**	Электрическое и магнитное поле в среде	$^{0}11$ 3.1 6.1 6.3/6.4 $^{0}12$	3.8 3.65 6.5 6.15	3.26 3.79 6.7 6.18

6–11 нояб.	**7**	Переходные процессы и свободные колебания в электрических цепях.	^{0}13 9.4 9.33	9.8 9.15 9.44 9.53	9.7 9.33 9.36 9.27
13–18 нояб.	**8**	Вынужденные колебания. Метод комплексных амплитуд. Цепи переменного тока.	^{0}14 ^{0}15 ^{0}16	10.1 10.3 10.19 10.39	10.16 10.19 10.72 10.92
13–18 нояб.	**9**	Контрольная работа.			
20–25 нояб.	**10**	Разбор контрольной работы, сдача 1-го задания			
27 нояб. – 2 дек.	**11**	Электромагнитные волны. Взаимодействие с веществом, формулы Френеля. Поляризация.	^{0}17 2.8* 11.7* 2.3*	12.43 12.95 2.45* 11.12*	12.96 11.10* 2.20* 2.44*
27 нояб. – 2 дек.	**12**	Спектральный анализ электрических сигналов. Дисперсия. Фазовая и групповая скорости.	10.2* 10.5* ^{0}18 10.47	11.3 11.10 11.19 10.67*	11.14 11.16 10.25* 10.35*
4–9 дек.	**13**	Интерференция монохроматических волн, схема Юнга	^{0}19 ^{0}20 3.3*	3.18* 3.32* 3.16* 11.9*	3.14* 3.20* 3.12* 3.28*
11–16 дек.	**14**	Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность	^{0}22 4.2 5.3 ^{0}23	4.10* 4.11* 5.14* 5.18*	4.12* 5.13* 5.23* 5.30*
18–21 дек.	**15**	Сдача 2-го задания (8-15 недели)			

Примечания

Номера задач указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. “Электричество и магнетизм” / под ред. В.А. Овчинкина (**4-е изд.**). — М.: Физматкнига, 2016.

Номера задач со звездочкой указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. “Оптика” / под ред. В.А. Овчинкина (**4-е изд.**). — М.: Физматкнига, 2016.

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

0 — задачи, которые студент должен решать заранее для подготовки к семинару;

I — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения.

Задачи 0 группы

^{0}1. Вычислить поле бесконечной пластины, заряженной с плотностью σ.

^{0}2. Вычислить поле на произвольном расстоянии от центра равномерно заряженного шара радиуса r , окруженного шарообразным слоем диэлектрика радиуса R с диэлектрической проницаемостью среды ε. Плотность заряда ρ.

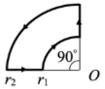
^{0}3. В опытах Резерфорда золотая фольга бомбардировалась α-частицами с кинетической энергией 5 МэВ. На какое минимальное расстояние может приблизиться α-частица к ядру золота?

^{0}4. Напряжённость электрического поля Земли $E_0 = 130$ В/м, причём вектор $\overrightarrow{E_0} \uparrow\uparrow \vec{g}$. Какой заряд приобретёт горизонтально расположенный короткозамкнутый плоский конденсатор с площадью пластин S = 1 м^2?

^{0}5. Вычислить емкость цилиндрического конденсатора, радиус внутренней обкладки r, радиус внешней обкладки R, диэлектрическая проницаемость среды ε, длина конденсатора L.

^{0}6. Определите индукцию магнитного поля в центре крайнего витка длинного соленоида с плотностью намотки n витков/см. По виткам соленоида протекает постоянный ток I.

[0]7. Проводящий контур, по которому течёт постоянный ток I, состоит из отрезков дуг и радиусов (см. рис.). Определите индукцию магнитного поля в точке O

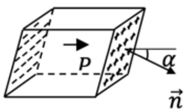


[0]8. Плоский конденсатор с обкладками в виде круглых дисков радиуса R заполнен немагнитной слабо проводящей средой. Через конденсатор протекает постоянный ток I. Найдите индукцию магнитного поля на расстоянии $r \leq R$ от оси конденсатора.

[0]9. Определить давление магнитного поля на стенки длинного соленоида кругового сечения, в котором создано магнитное поле B = 10 Тл. Какова при этом должна быть поверхностная плотность тока i?

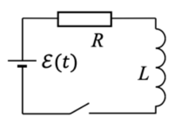
[0]10. Напряжение в плоском конденсаторе меняется по гармоническому закону $U = U_0 \sin \omega t$. Пластины имеют форму дисков радиуса R , расстояние между которыми $h \ll R$, между пластин – среда с проницаемостью ε. Пре- небрегая краевыми искажениями поля, найдите магнитное поле на краю конденсатора (на расстоянии R от оси). Частоту считать малой: $\omega \ll c/R$. Найдите полный поток электромагнитной энергии из конденсатора и сравните его с выражением для скорости изменения энергии, запасённой в конденсаторе dW/dt.

[0]11. Найдите плотность поляризационных зарядов на торцах однородно поляризованного параллелепипеда.



[0]12. Постоянный магнит длиной L с однородной намагниченностью I согнут в кольцо так, что между полюсами остался маленький зазор $l \ll L$. Определите магнитную индукцию в зазоре.

[0]13. Найти зависимость тока в цепи $I(t)$ от времени в схеме на рис., если после замыкания ключа в момент $t = 0$ напряжение источника меняется по закону $\mathrm{E}(t) = At$. Рассмотреть случай $t \ll L/R$.



[0]14. К последовательно соединенным конденсатору C = 1.0 мкФ и резистору R = 3.2 кОм (дифференцирующая цепочка) приложено сетевое напряжение f = 50 Гц. Найти сдвиг фаз между напряжением в сети и напряжением на резисторе.

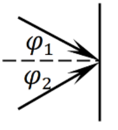
[0]15. К последовательно соединенным резистору R = 3.2 кОм и конденсатору C = 1.0 мкФ (интегрирующая цепочка) приложено переменное синусоидальное напряжение. Вывести формулу для проходной характеристики цепочки (отношение выходного напряжения на конденсаторе ко входному напряжению) в зависимости от частоты ω, а также сдвиг фазы выходного напряжения по отношению ко входному. Построить графики в логарифмическом масштабе.

⁰16. Импеданс двухполюсника, включенного в цепь переменного тока равен $Z = 3 + i\sqrt{3}$ [Ом]. Найдите отношение амплитуд напряжения и тока U/I на этом двухполюснике и фазовый сдвиг между ними.

⁰17. Получить уравнения, которым подчиняются векторы E и B в плоской электромагнитной волне, бегущей вдоль оси z; найти связь между E_x и B_y при движении волны вдоль оси z и против оси z.

⁰18. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ см$^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

⁰19. На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0{,}01$ рад. Длина волны λ=500 нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см. на экране. Определите ширину интерференционных полос.



⁰20. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{мин}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Текстовые задачи

T1. Вдоль бесконечно длинной тонкой полосы ширины $2h$ течёт ток с линейной плотностью i. Вычислить магнитное поле над средней линией полосы на высоте z над плоскостью.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 52 часа
практические (семинарские) занятия — 52 часа
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 104

Самостоятельная работа:
теор. курс — 46 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент И. В. Козицин

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений.
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теорема о продолжении решения. Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений.
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
   Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для ли-

нейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем.

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков.

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2022, 2016, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.

10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–20 ноября)

I. Простейшие типы уравнений 1–го порядка

С. 1: 5.

С. 2: <u>4</u>; 10; 17; 36; <u>46</u> .

Ф. <u>62</u>.

С. 2: 59; 73.

Ф. 128^*.

С. 3: 25; <u>35</u>; 59; <u>64</u>; <u>94</u>.

Ф. <u>150</u>; 181^*.

С. 4: 10; 20; <u>59</u>.

Ф. 149.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 1; 5; <u>28</u>; 46; 59; 65(б).

1. Решить задачу Коши

$$x^4y'' - xy'y + 2(y - x^2)y = 0, y(1) = 6, y'(1) = 12.$$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 229; 230; <u>231</u>; <u>234</u>.

2. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти непродолжаемое решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y' = -y^2, \quad y(1) = -1;$

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(-4) = -1, \quad y(2) = 1.$

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

3*. Доказать, что решение задачи Коши $y' = x - y^2, \quad y(1) = 0$ можно продолжить на интервал $(1, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278; 287 (в этих задачах решить уравнение, исследовать особые решения, построить интегральные кривые); 288.

С. 6: 7; 45; 55.

4. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1-y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

V. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 3; 7; 12; 22; 31; 36; 47; 56; 165; 193.

Ф. 593, 614; 618; 618 610*.

5. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение;

б) имеет ровно одно периодическое решение?

VI. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 1; 5; 12; 17; 27; 46; 68; 79; 88; 152; 158; 183.

Ф. 824*.

VII. Матричная экспонента

С. 11: 119; 123; 128; 95*. (также для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 1$).

6. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A в базисе $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \overline{h_4}, \overline{h_5}$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

7*. Доказать формулу: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–18 декабря)

I. Элементы вариационного исчисления

С. §19: 5; 19; 36; <u>102</u>.
С. §20.1: 3; 9.
С. §20.2: 4.
С. §20.3: 4.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: <u>667</u>; 668; 679.
С. §9: 10; 24; 52; 74 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

<u>1</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu=\mathrm{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 971; 972; 973; 974; 975; 978*.
С. §13: 39; 44; 57.
Ф. §25: 166.

IV. Устойчивость по Ляпунову

Ф.: 897; 915; 889*.

V. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 1; <u>12</u>.
Ф.: <u>1164</u>.

<u>2</u>. Проверить, что функция $u=y+xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=-x(2xz^2+2y+3z), \\ \dot{y}=xz^3, \\ \dot{z}=z(xz^2+y+z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

3. Найти первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, в пунктах а), б) и в) исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$;

б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$;

в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

г)* $\begin{cases} \dot{x} = u, \quad \dot{u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dot{y} = v, \quad \dot{v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \dot{z} = w, \quad \dot{w} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$

где $\varphi(x, y, z)$ — всюду дифференцируемая функция.

С. §16: 5; 26.

4*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1, 1)/T(2, 2)$.

VI. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; 14; 24; 42; 91.

5. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

6*. Для всех $t \geq 0$ и $y \geq 0$ найти решение следующей задачи:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

при условии, что

$$f(0, x, y, u, v) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^{-b(u^2+v^2)}$$

и для $v \geq 0$,

$$f(t, x, 0, u, v) = \frac{1 + 0.5\sin \Omega t}{x^2} e^{-b(u^2+v^2)}.$$

$\boxed{105+11^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент И. В. Козицин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., ст. преп. А. А. Скубачевский

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, их якобиан. Теорема о неявном отображении (о системе неявных функций, доказательство на усмотрение лектора). Локальная обратимость отображения с ненулевым якобианом.
2. Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.
3. Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла по множеству. Сведение кратного интеграла к повторному.
4. Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения конечномерных (двумерных) пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство на усмотрение лектора).
5. Криволинейный интеграл первого рода. Криволинейный интеграл второго рода. Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
6. Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость интеграла от параметризации поверхности при допустимой замене параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.
7. Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля.
8. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.
9. Оператор «набла» и действия с ним. Основные соотношения, содержащие вектор «набла».

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2009.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2013, 2018.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2007.
6. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2. — Москва : Дрофа, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
9. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. — 2-е изд. — Москва : Высш. шк., 2000.
10. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т3. Функции нескольких переменных: учеб. пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 ноября)

I. Неявные функции

Т.1. Дано уравнение $x^2 = y^2$.

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

в) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

г) Сколько непрерывных функций $y : [1;2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

§3: 60(1); 64(<u>2 б</u>); 72; <u>75</u>; 106.
§4: 44(3); 46(2).

II. Замена переменных

<u>Т.2</u>. Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f.

<u>Т.3</u>. Отображение $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r > 0.$$

а) В какой круговой окрестности точки $A(1,1)$ существует обратное отображение?

б) Выразить частные производные $r,\ \varphi$ по переменным $x,\ y$ как функции $r,\ \varphi$.

§3: 86; 88(2); <u>90</u>.
§4: 51(1); 52(4).

III. Экстремумы функций многих переменных

§5: 2(3); <u>9</u>; 10*; 13(2); <u>18(3)</u>.
§5: <u>21(2)</u>; 25(3); 26(3); <u>31(3)</u>; 36*.

IV. Двойные интегралы

§8: 80(<u>6</u>); 83(<u>6</u>); 85(2); 91(3), 91(<u>6</u>).
§8: 100(5); <u>110(1-3)</u>; 124(1,4).
§9: 6(3); 10.

V. Тройные и n-кратные интегралы

§8: 133(5а, 5б); 135(1)*; 139(4).
§8: 144(<u>6</u>); 146(3); 148(3).
§9: 13(3); 15(1); 16(5); <u>21</u>; 63(2).
§8: 175(1); 176(1, 2); 181*.

(54+4*)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Криволинейные интегралы. Формула Грина

§10: 2(1); 9; 19(3); 34(1); 28(2); 43, 45.

§10: 17; 85(2); 37; 44; 48; 104(1).

Т.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

II. Поверхностные интегралы

§9: 29; 39; 51.

§11: 2(1, 2); 33; 39; 40.

Т.2. Вычислить площадь части сферы радиуса R, заключенной между двумя параллельными плоскостями, пересекающими сферу; расстояние между плоскостями равно h. Убедиться, что ответ зависит только от параметров R и h.

III. Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса

§11: 46(1); 52(1); 57(2)*; 62; 63(2); 64.

§10: 43.

IV. Элементы теории поля

§3: 44(2); 49(1).

§12: 13; 19; 15(2, 6); 37(2); 40(2); 41(4, 5, 7); 42(1); 49(4, 6)(проверять векторные равенства в координатной форме не обязательно); 50(3); 54(1); 70(3); 93(1); 94(4); 104(1, 2); 112(1, 2) (соленоидальность исследовать в в случаях области r>0 и области x>0).

(52+1*)

Задания составили: д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский

к. ф.-м. н., ст. преп. А. А. Скубачевский

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 38.03.01 «Экономика»
физтех-школа: **ФБВТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теоретико-множественная модель событий. Понятие вероятности. Элементы комбинаторики. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Алгебры множеств и разбиения. Простейшие свойства вероятности на конечной алгебре событий.
2. Теорема сложения. Условная вероятность. Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Определения независимости событий и классов событий. Теорема о независимости алгебр, порожденных разбиениями.
3. Последовательности независимых испытаний. Схема Бернулли и полиномиальная схема. Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа в схеме Бернулли.
4. Случайные величины. Функция распределения и её свойства.
5. Дискретные случайные величины. Индикаторы событий и их свойства. Законы распределения дискретных случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия дискретных случайных величин. Основные распределения (Бернулли, биномиальное, Пуассона, геометрическое). Целочисленные случайные величины и производящие функции.
6. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных случайных величин. Основные распределения (равномерное, показательное, нормальное, Лапласа).
7. Совместное распределение и независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии, связанные с понятием независимости. Ковариация и коэффициент корреляции, ковариационная матрица. Многомерное нормальное распределение.
8. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли и форме Чебышева.
9. Определение и свойства характеристических функций. Характеристические функции некоторых распределений. Формула обращения и теорема сходимости.
10. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Центральная предельная теорема. Закон больших чисел в форме Хинчина.

Литература

Основная

1. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. — 6-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2003. — 272 с.
2. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — Москва : Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 272 с.

3. *Ширяев А. Н.* Вероятность – 1. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004. — 520 с.
4. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. — Москва : Изд-во МГУ, 1992. — 400 с.
5. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 320 с.
6. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах / пер. с англ. Т. 1. — Москва : Мир, 1984. — 528 с.
7. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Эдиториал УРСС, 1999. — 472 с.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–9 ноября)

I. Комбинация событий. Вероятностное пространство. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность

1. Среди студентов, пришедших на лекцию, наудачу выбирают одного. Пусть события A, B и C состоят соответственно в том, что выбранный человек:

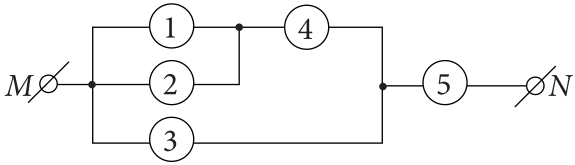
а) юноша, б) не курит, в) живет в общежитии.

а) Описать событие $A \cap B \cap \overline{C}$.
б) При каком условии $A \cap B \cap C = A$?
в) Когда $\overline{C} \subseteq B$?

2. Пусть A, B и C – произвольные события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:

а) произошли события A и C, но событие B не произошло;
б) произошло хотя бы одно из этих событий;
в) произошло два и только два события;
г) ни одно событие не произошло;
д) произошло не более одного события.

3. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке:



Событие A_i состоит в том, что вышел из строя участок a_i. Записать выражение для события C, заключающегося в том, что цепь разомкнута.

4. Упростить:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;
b) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$;
c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$.

5. Сколькими способами 12 монет можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен остаться пустым?

6. Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если можно выбирать из 6 маляров и 8 штукатуров?

7. а) Доказать, что число всевозможных подмножеств конечного множества, содержащего n элементов, равно 2^n.

б) В множестве из n элементов выбираются подмножества A и B так, что $A \subset B$ и $A \neq B$. Доказать, что количество таких пар (A, B) равно $3^n - 2^n$.

8. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что он случайно составит слово МАТЕМАТИКА?

9. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

10. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?

11. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (не обязательно рядом).

12. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти p_n — вероятность того, что хотя бы одно письмо дойдет до своего адресата. Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

13. Стержень длины l разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность того, что из полученных кусков можно составить треугольник?

14. (Парадокс Бертрана). В круге наудачу выбирается хорда. Найти вероятность того, что её длина больше длины стороны правильного вписанного треугольника.

Рассмотреть следующие варианты случайного выбора хорды:

а) в круге наудачу выбирается середина хорды;
б) задано направление хорды, и на диаметре, перпендикулярном этому направлению, наудачу выбирается середина хорды;
в) один конец хорды закреплён, а другой наудачу выбирается на окружности.

II. Условная вероятность. Формула умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий

15. В первом ящике 2 белых и 4 черных шара, а во втором — 3 белых и 1 черный шар. Из первого ящика переложили во второй два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второго ящика после перекладывания, окажется белым.

16. Подводная лодка последовательно выпускает n торпед, каждая из которых независимо от других с вероятностью p попадает в атакуемый корабль. При попадании с вероятностью $\frac{1}{N}$ затопляется один из N отсеков корабля. Найти вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

17. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ.

а) Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он признан больным при обследовании;
б) Найти условную вероятность того, что человек болен, если он признан при обследовании здоровым;
в) Вычислить найденные в первых двух пунктах условные вероятности при следующих числовых значениях: $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.001$.

18. По каналу связи с вероятностью, равной соответственно 0.3, 0.4 или 0.3, может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью 0.6, а с вероятностями 0.2 и 0.2 вместо нее принимаются две другие. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–14 декабря)

I. Случайные величины и их характеристики

1. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров, извлекают с возвращением шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

2. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0 и 1 с вероятностями $1/3$, $1/6$ и $1/2$ соответственно. Найти:

a) распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2$;

b) совместное распределение и ковариацию случайных величин η и ξ.

3. Двумерное распределение случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

$\eta \setminus \xi$	–1	0	2
–1	1/5	0	1/5
1	0	1/5	1/5
2	1/10	1/10	0

Выяснить, зависимы или нет случайные величины ξ и η. Найти:

а) $E\xi, E\eta, D\xi, D\eta, \operatorname{cov}(\xi, \eta)$, коэффициент корреляции и ковариационную матрицу;

б) закон распределения и функцию распределения произведения $\xi\eta$.

4. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найти:

а) $\mathsf{P}(\xi = \eta)$;   б) $\mathsf{P}(\xi > \eta)$;   в) $\mathsf{P}(\xi + \eta = k)$;   г) $\mathsf{P}(\xi = l | \xi + \eta = k)$;
д) $\mathsf{P}(\xi = k | \xi = \eta)$.

5. Пусть ξ_k, $k = 1, 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

6. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geq k).$$

7. Длина круга равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

8. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между точками.

9. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

10. Плотность совместного распределения $p(x, y)$ величин ξ и η определяется равенствами $p(x, y) = c(x+y)$ при $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$ и $p(x, y) = 0$ в остальных случаях. Найти:

а) постоянную c;
б) плотности распределения ξ и η;
в) $E\xi, E\eta, D\xi, D\eta, \operatorname{cov}(\xi, \eta)$, коэффициент корреляции и ковариационную матрицу.

11. Случайные величины ξ_1, ξ_2 принимают значения -1, 0, 1. Совместное распределение ξ_1, ξ_2 определяется условиями $\mathrm{P}\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$, $\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2$. Найти $\mathrm{E}\xi_1$, $\mathrm{E}\xi_2$, $\mathrm{D}\xi_1$, $\mathrm{D}\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

12. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, и она является непрерывной и строго возрастающей. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $\eta = F(\xi)$.

II. Неравенство Чебышева. Предельные теоремы. Характеристические функции

13. Случайная величина ξ имеет распределение, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Сравнить точное значение вероятности $\mathsf{P}(|\xi| \ge 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

14. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \quad \epsilon > 0.$$

15. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|\geqslant 0,1\right)\leqslant 0,1.$$

16. Пусть в книге из 500 страниц содержится 10 опечаток. Используя биномиальный закон распределения и его наилучшее в данном случае приближение, оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице будет не менее 2 опечаток.

17. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0.515.

18. Найти характеристические функции:

a) равномерного распределения на $[0,a]$;

b) распределения Пуассона $p(n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ n=0,1,2,3,...$

19. Найти распределение случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

a) $\chi(t)=e^{it}\cos t$;

b) $\chi(t)=\frac{1}{2-e^{it}}$.

20. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

a) $\chi(t)=4t^{-2}\cos t\sin^2(t/2)$;

b) $\chi(t)=(1-it)^{-p}(1+it)^{-q}\quad p,q>0$.

21. Пусть $\xi_{m,n}(m=1,2,...,n)$ — независимые случайные величины с функциями распределения

$$F_n(x)=P(\xi_{m,n}\le x)=\begin{cases}1-\exp(-\alpha_n x), & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad \alpha_n=\lambda n,\ \lambda>0.$$

Найти предельное распределение при $n\to+\infty$ случайной величины $\xi_n=\xi_{1,n}+\xi_{2,n}+...+\xi_{n,n}$.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа бизнеса высоких технологий
(ФБВТ)

для студентов 2 курса
на осенний семестр
2023–2024 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова, Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 01.08.2023. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 33 экз. Заказ № 119.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru