1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Теорема о системе неявных функций (без доказательства).

Теорема 18.1. *Пусть функция двух переменных $F(x,y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причём $F(x_0,y_0)=0$, а $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда существует прямоугольник $\Pi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x_0-a<x<x_0+a,\ y_0-b<y<y_0+b\}$, в котором уравнение $F(x,y)=0$ равносильно некоторому уравнению вида $y=f(x)$. Функция f непрерывно дифференцируема на $(x_0-a;x_0+a)$, причём на этом интервале*

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}. \qquad (18.2)$$

□ Пусть для определённости $F'_y(x_0,y_0)>0$ (иначе сначала докажем теорему для функции $-F$). Напомним, что функция F непрерывно дифференцируема в $U_\delta(x_0,y_0)$, $\delta>0$. Так как F'_y непрерывна в точке (x_0,y_0), то, по лемме о сохранении знака, найдётся окрестность точки (x_0,y_0), в которой $F'_y(x,y)>0$. Эта окрестность является кругом радиуса δ_1 с центром в точке (x_0,y_0), поэтому она содержит некоторый замкнутый прямоугольник

$$\widetilde{\Pi}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x_0-a_1\leqslant x\leqslant x_0+a_1,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$$

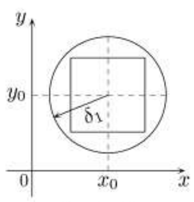

Рис. 18.1

(например, квадрат со стороной меньшей, чем $\delta_1\sqrt{2}$ (см. рис. 18.1)). Поэтому $F'_y(x,y)>0$ во всех точках $\widetilde{\Pi}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $\psi(y)=F(x_0,y)$, $y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b$. Из условия следует, что эта функция непрерывна на $[y_0-b;y_0+b]$ и $\psi'(y)>0$ на $[y_0-b;y_0+b]$, поэтому функция ψ строго возрастает на $[y_0-b;y_0+b]$. Так как $\psi(y_0)=0$, то $\psi(y_0-b)<0$, $\psi(y_0+b)>0$. Значит, $F(x_0,y_0-b)<0$, $F(x_0,y_0+b)>0$. По лемме о сохранении знака

$$\exists a\in(0;a_1) : \forall x\in[x_0-a;x_0+a] \longrightarrow \longrightarrow (F(x,y_0-b)<0)\wedge(F(x,y_0+b)>0)$$

(см. рис. 18.2).

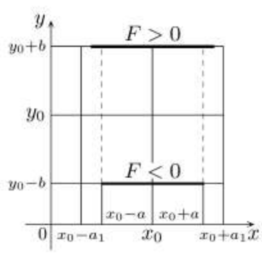

Рис. 18.2

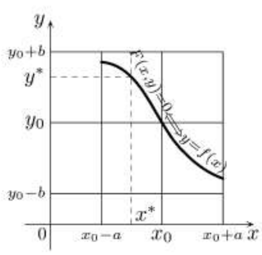

Рис. 18.3

Рассмотрим произвольную точку $x^*\in[x_0-a;x_0+a]$. Для непрерывной функции одной переменной $\varphi(y)=F(x^*,y)$ выполняются неравенства $\varphi(y_0-b)<0$, $\varphi(y_0+b)>0$. Следовательно, по теореме Больцано–Коши 3.13, $\exists\, y^*\in(y_0-b;y_0+b)$: $\varphi(y^*)=0$, т.е. $F(x^*,y^*)=0$. Так как $\varphi'(y)=F'_y(x^*,y)>0$, то функция φ строго возрастает на $[y_0-b;y_0+b]$ и не может обращаться в нуль более чем в одной точке. Итак, для любого $x^*\in[x_0-a;x_0+a]$ существует единственное значение $y^*\in[y_0-b;y_0+b]$ такое, что $F(x^*,y^*)=0$. Таким образом, определена функция $y^*=f(x^*)$, и на замкнутом прямоугольнике $\overline{\Pi}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ уравнение $F(x,y)=0$ равносильно уравнению $y=f(x)$ (см. рис. 18.3); в частности, это верно на открытом прямоугольнике

$$\Pi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x_0-a<x<x_0+a,\ y_0-b<y<y_0+b\}.$$

Докажем, что функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0-a;x_0+a)$. Так как функция F'_y непрерывна на компакте $\overline{\Pi}$, то она достигает на $\overline{\Pi}$ своей точной нижней грани:

$$\alpha=\inf_{\overline{\Pi}}F'_y(x,y)=F'_y(\tilde{x},\tilde{y})>0, \quad \text{где} \quad (\tilde{x},\tilde{y})\in\overline{\Pi}, \quad \text{т.е.}$$

$F'_y(x,y)\geqslant\alpha>0$ при всех $(x,y)\in\overline{\Pi}$. Так как функция F'_x непрерывна на компакте $\overline{\Pi}$, то она ограничена на нём, т.е. $|F'_x(x,y)|\leqslant\beta$ при всех $(x,y)\in\overline{\Pi}$.

Пусть $(x,y)\in\Pi$, причём $F(x,y)=0$; значит, $y=f(x)$. Если Δx — приращение аргумента x такое, что $x+\Delta x\in(x_0-a;x_0+a)$, а Δy — соответствующее ему приращение функции $f(x)$, то $F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0$. По теореме Лагранжа для функций двух переменных (следствие из теоремы 10.8 при $n=2$) имеем

$$0=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=$$
$$=F'_x(x+\xi\Delta x,y+\xi\Delta y)\cdot\Delta x+F'_y(x+\xi\Delta x,y+\xi\Delta y)\cdot\Delta y, \quad \text{т.е.}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\xi\Delta x,y+\xi\Delta y)}{F'_y(x+\xi\Delta x,y+\xi\Delta y)}, \quad 0<\xi<1.$$

Следовательно, $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\leqslant\frac{\beta}{\alpha}=M$, т.е. $|\Delta y|\leqslant M|\Delta x|$. Поэтому

$$\forall\varepsilon>0\longrightarrow\exists\,\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0 :$$
$$\forall x,\ x+\Delta x\in(x_0-a;x_0+a), |\Delta x|<\delta\longrightarrow|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon,$$

и функция f равномерно непрерывна на интервале $(x_0-a;x_0+a)$; во всяком случае, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Далее, $\xi=\xi(\Delta x,\Delta y)$, где $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y(\Delta x)$. Рассмотрим функции $\tilde{x}(\Delta x)=x+\xi\Delta x$, $\tilde{y}(\Delta x)=y+\xi\Delta y$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\tilde{x}(\Delta x)=x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\tilde{y}(\Delta x)=y=f(x)$. Доопределив $\tilde{x}(0)=x$, $\tilde{y}(0)=f(x)$, получим функции, непрерывные в точке $\Delta x=0$. Тогда по теореме 9.5 о непрерывности суперпозиции непрерывных функций (внешняя — двух переменных, внутренние — одной переменной)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}.$$

Поскольку $F'_y\neq 0$ на Π, то при всех $x\in(x_0-a;x_0+a)$ существует $f'(x)$ и выполняется равенство (18.2); ясно, что функция f' непрерывна на $(x_0-a;x_0+a)$. ■

Пример 18.1. Пусть $F(x,y)=x^2+y^2-1$; графиком уравнения $F(x,y)=0$ является окружность. Так как $F'_y=2y\neq 0$ во всех точках окружности, кроме точек $(1,0)$ и $(-1,0)$, то для каждой такой точки существует окрестность в виде прямоугольника, пересечение окружности с которой является графиком некоторой функции $y=f(x)$ (см. рис. 18.4); об этом говорилось перед формулировкой теоремы 18.1, теорема подтвердила эти выводы. При этом $f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{x}{y}$ (см. также пример 4.9).

Пример 18.2. Пусть $F(x,y)=x+\sin x-2y-\sin y$. Но $F'_y=-2-\cos y<0$ всюду, поэтому для любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению $x+\sin x=2y+\sin y$, существует окрестность в виде прямоугольника такая, что пересечение графика уравнения с этой окрестностью является графиком некоторой функции $y=f(x)$. На самом деле уравнение $F(x,y)=0$ задаёт непрерывно дифференцируемую на всей числовой прямой функцию $y=f(x)$. В самом деле, $\lim\limits_{y\to+\infty}(2y+\sin y)=+\infty$, а $\lim\limits_{y\to-\infty}(2y+\sin y)=-\infty$, поэтому

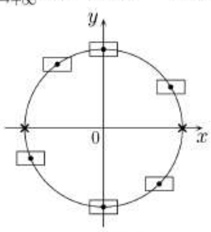

Рис. 18.4

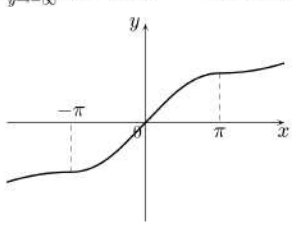

Рис. 18.5

множеством значений непрерывной функции $\varphi(y)=2y+\sin y$ является неограниченный сверху и снизу промежуток, т.е. вся числовая прямая. Поэтому при любом x существует значение y такое, что $x+\sin x=2y+\sin y$. Так как $\varphi'(y)=2+\cos y>0$, то функция φ строго возрастает, и это значение y единственно. Итак, уравнение $F(x,y)=0$ задаёт однозначную функцию $y=f(x)$ на всей числовой прямой (см. рис. 18.5). По теореме 18.1 она непрерывно дифференцируема в каждой точке, и $f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{1+\cos x}{2+\cos y}$. Функция f не может быть выражена через элементарные функции (в отличие от примера 18.1, где верхняя и нижняя полуокружности задаются в отдельности уравнениями $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;1]$).

Теорема 18.2. *Пусть функция $n+1$ переменной $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$, причём $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$, а $F'_y(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0$. Тогда существует параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n, y) \,:\, x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i,\ i = 1, \ldots, n; \quad y^0 - b < y < y^0 + b\},$$

в котором уравнение $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ равносильно некоторому уравнению вида $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Функция f непре-

□ Доказательство существования параллелепипеда, в котором $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n)$, повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 18.1, если считать x_0 и x точками $\mathbb{R}^n$. При применении леммы о сохранении знака нужно заметить, что для сферической окрестности точки $\mathbb{R}^{n+1}$ или $\mathbb{R}^n$ существует замкнутый параллелепипед соответствующей размерности с центром в данной точке, целиком лежащий в данной окрестности. Таковым является, например, куб с ребром, меньшим, чем $2\dfrac{R}{\sqrt{n+1}}$ (или $2\dfrac{R}{\sqrt{n}}$), где R — радиус окрестности (в двумерном случае это очевидно из рис. 18.1).

Доказательство непрерывной дифференцируемости функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в Π' несколько усложняется. Аналогично доказательству теоремы 18.1, для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \overline{\Pi}$

$$F'_y \geqslant \alpha > 0; \quad |F'_{x_i}| \leqslant \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \Pi$, причём $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$; значит, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ — приращения аргументов $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \in \Pi'$, а Δy — соответствующее им приращение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, то $F(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) = 0$. По теореме Лагранжа для функций нескольких переменных имеем

$$\begin{aligned}
0 &= F(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - F(x_1, \ldots, x_n, y) = \\
&= F'_{x_1}(x_1 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta x_1 + \\
&+ \ldots + F'_{x_n}(x_1 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta x_n + \\
&+ F'_y(x_1 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta y, \quad 0 < \xi < 1.
\end{aligned}$$

Пусть $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Тогда $|\Delta x_i| \leqslant \rho$, $i = 1, \ldots, n$, и $|\Delta y| \leqslant \dfrac{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{\alpha}\rho = M\rho$. Аналогично доказательству теоремы 18.1 функция f равномерно непрерывна на параллелепипеде Π'. Далее, для приращений аргументов таких, что $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \xi\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n, y + \xi\Delta y)}{F'_y(x_1 + \xi\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n, y + \xi\Delta y)},$$

и, как в доказательстве теоремы 18.1, существует

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))},$$

непрерывная на Π'. Такое же рассуждение проводится для частных производных по другим переменным. ■

Теорема 18.3 (о системе неявных функций). *Пусть функции $n+m$ переменных $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $j = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, причём $F_j(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, а*

$$\left.\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)} \neq 0.$$

Тогда существует параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \,:\, x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \quad i = 1, \ldots, n; \quad y_j^0 - b_j < y_j < y_j^0 + b_j,\ j = 1, \ldots, m\},$$

в котором система уравнений

$$F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{18.3}$$

равносильна системе вида

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{18.4}$$

причём функции f_j, $j = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде

$$\Pi' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

2. Необходимые условия локального экстремума, достаточные условия локального экстремума.

Теорема 18.5 (необходимое условие точки локального экстремума). *Если функция f дифференцируема в точке локального экстремума x^0, то x^0 — стационарная точка f.*

□ Зафиксируем $i = 1, \ldots, n$. Если $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка локального экстремума функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, то x_i^0 — точка локального экстремума того же характера для функции одной переменной $\varphi(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$, где все переменные, кроме x_i, зафиксированы. Тогда $\varphi'(x_i^0) = 0$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0) = 0$. Это верно для всех $i = 1, \ldots, n$, поэтому x^0 — стационарная точка. ■

Напомним, что квадратичной формой от вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ называется числовая функция

$$K(x) = K(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j,$$

где $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметричная квадратная матрица ($b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $b_{ij} \in \mathbb{R}$). Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $K(\alpha x) = \alpha^2 K(x)$. Квадратичная форма называется:

1) положительно определённой, если $\forall\, x \neq 0 \longrightarrow K(x) > 0$;
2) отрицательно определённой, если $\forall\, x \neq 0 \longrightarrow K(x) < 0$;
3) неопределённой, если $\exists\, x', x''$: $K(x') > 0$, $K(x'') < 0$;
4) положительно полуопределённой, если $\forall\, x \longrightarrow K(x) \geqslant 0$, но $\exists\, x \neq 0$: $K(x) = 0$;
5) отрицательно полуопределённой, если $\forall\, x \longrightarrow K(x) \leqslant 0$, но $\exists\, x \neq 0$: $K(x) = 0$.

Теорема 18.6 (достаточные условия точки локального экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x^0. Тогда:*

1) *если $d^2f(x^0)$ — положительно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого локального минимума;*
2) *если $d^2f(x^0)$ — отрицательно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого локального максимума;*
3) *если $d^2f(x^0)$ — неопределённая квадратичная форма, то x^0 не является точкой локального экстремума.*

Лемма 18.4. *Если квадратичная форма $K(x)$ положительно определена, то $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \longrightarrow K(x) \geqslant C|x|^2$, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Если квадратичная форма $K(x)$ отрицательно определена, то $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \longrightarrow K(x) \leqslant -C|x|^2$.*

□ Доказательство достаточно провести для положительно определённой квадратичной формы, затем заменить $K(x)$ на $-K(x)$. Отметим, что квадратичную форму можно рассматривать на $\mathbb{R}^n$ как на точечном пространстве (не обязательно на векторном). Значение $K(x)$ в точке x — это значение её на векторе с соответствующими координатами.

Рассмотрим положительно определённую квадратичную форму K на единичной сфере $S = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = 1\}$. Это множество является компактом (замкнуто и ограничено), поэтому K достигает на S своей точной нижней грани C. Так как $K(x) > 0$ на S, то $C > 0$. Итак, $\forall\, x \in S \longrightarrow K(x) \geqslant C > 0$. Пусть теперь $x \neq 0$ — любая точка из $\mathbb{R}^n$. Тогда $z = \frac{x}{|x|} \in S$, поэтому $K(z) \geqslant C$. Но $x = |x|z$, значит, $K(x) = |x|^2K(z) \geqslant C|x|^2$. При $x = 0$ последнее неравенство очевидно. ■

□ 1) Применим формулу Тейлора для функций n переменных с остаточным членом в форме Пеано (теорема 10.10). Так как $f \in C^2(U_\delta(x^0))$, то

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2}d^2f(x^0) + o(\rho^2),$$
$$(dx_1, \ldots, dx_n) \to (0, \ldots, 0),$$
$$\rho = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}, \quad dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\overrightarrow{dx} = (dx_1, \ldots, dx_n)^T, \quad \rho^2 = |\overrightarrow{dx}|^2,$$
$$o(\rho^2) = \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n)|\overrightarrow{dx}|^2,$$

где $\lim\limits_{\substack{dx_1\to 0\\ \ldots\\ dx_n\to 0}} \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) = 0$. В стационарной точке $df(x^0) = 0$, поэтому

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2}d^2f(x^0) + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n)|\overrightarrow{dx}|^2.$$

Если $d^2f(x^0)$ — положительно определённая квадратичная форма от вектора $\overrightarrow{dx}$, то по лемме 18.4 $d^2f(x^0) \geqslant C|\overrightarrow{dx}|^2$. Тогда $\Delta f(x^0) \geqslant \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n)\right)|\overrightarrow{dx}|^2$. Так как $\lim \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) = 0$ при $dx_1 \to 0, \ldots, dx_n \to 0$, то

$$\exists\, \delta > 0 : \forall\, \overrightarrow{dx}, \quad 0 < |\overrightarrow{dx}| < \delta \longrightarrow \frac{C}{2} + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) > 0.$$

Значит, $\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x^0)$ выполняется неравенство $\Delta f(x^0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x^0)$. Поэтому x^0 — точка строгого локального минимума.

2) Доказывается аналогично.

3) Пусть теперь $K(\overrightarrow{dx}) = d^2f(x^0)$ — неопределённая квадратичная форма. Тогда существует вектор $\vec{z} \neq \vec{0}$ такой, что $K(\vec{z}) > 0$. Рассмотрим всевозможные векторы вида $dx = \lambda\vec{z}$, $\lambda > 0$ (приращения, сонаправленные с $\vec{z}$). Получим

$$d^2f(x^0) = K(\overrightarrow{dx}) = K(\lambda\vec{z}) = \lambda^2K(\vec{z}) = \lambda^2\beta|\vec{z}|^2,$$

где $\beta = \frac{K(\vec{z})}{|\vec{z}|^2}$ — фиксированное положительное число, так как $\vec{z}$ — фиксированный вектор. В соответствующей точке $x = x^0 + \lambda\vec{z}$ (вектор $\lambda\vec{z}$ отложен из точки x^0):

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2}d^2f(x^0) + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n)\cdot|\overrightarrow{dx}|^2 =$$
$$= \frac{\lambda^2\beta|\vec{z}|^2}{2} + \varepsilon(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)\cdot|\lambda\vec{z}|^2 = \lambda^2|\vec{z}|^2\left(\frac{\beta}{2} + \varepsilon(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)\right).$$

Так как $\lim \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) = 0$ при $dx_1 \to 0, \ldots, dx_n \to 0$, то

$$\exists\, \delta > 0 : \forall\, \overrightarrow{dx}, \quad 0 < |\overrightarrow{dx}| < \delta \to \frac{\beta}{2} + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) > 0.$$

Векторы вида $\overrightarrow{dx} = \lambda\vec{z}$ удовлетворяют условию $0 < |\overrightarrow{dx}| < \delta$ при $0 < \lambda < \frac{\delta}{|\vec{z}|}$; для них $\Delta f(x^0) > 0$. Значит, найдутся сколь угодно малые по модулю векторы $\overrightarrow{dx}$ такие, что $f(x) > f(x^0)$.

Аналогично, из существования вектора $\vec{z}^* \neq \vec{0}$ такого, что $K(\vec{z}^*) < 0$, следует, что существуют сколь угодно малые по модулю векторы $\overrightarrow{dx}$ такие, что $f(x) < f(x^0)$. Точка x^0 не является точкой локального экстремума. ■

3. Условный экстремум. Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума: необходимые условия, достаточные условия.

Функцию n переменных $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ считаем определённой в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. При этом значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ не являются произвольными; считаем, что на них наложены дополнительные ограничения:

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad m < n \quad (18.13)$$

— так называемые условия связи.

Определение 18.6. Точка x^0, координаты которой удовлетворяют уравнениям (18.13), называется точкой условного (относительного) строгого максимума функции f при выполнении условий (18.13), если найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x^0)$, удовлетворяющих этим условиям, выполняется неравенство $f(x) < f(x^0)$. Аналогично определяются точки условного строгого минимума, нестрогого максимума и минимума.

На практике такое явное разрешение условий связи с выражением одних переменных через другие далеко не всегда осуществимо. В общем случае рассматривается функция Лагранжа:

$$L(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R},$$

т.е. $L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Так как при всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ при выполнении условий связи $L(x) = f(x)$, то условные экстремумы функции Лагранжа совпадают с условными экстремумами f при любых λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Оказывается, что можно подобрать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, что условные экстремумы f совпадут с обычными локальными экстремумами L.

Теорема 18.7 (необходимое условие относительного экстремума). *Пусть функции f и φ_i, $i = 1, \ldots, m$ ($m < n$), непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, причём в точке x^0 ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен m. Пусть далее x^0 — точка относительного экстремума функции f при выполнении условий связи $\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_m(x) = 0$. Тогда найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ такие, что точка x^0 является стационарной точкой функции Лагранжа $L(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x)$.

□ В матрице Якоби m строк, n столбцов ($m < n$). Так как ранг её равен m, то найдётся минор порядка m, отличный от нуля. Не уменьшая общности, этот минор лежит на пересечении первых m столбцов с m строками матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0$$

в точке x^0 (если это не так, то можно перенумеровать переменные $x_1, \ldots, x_n$). Так как $\varphi_1(x^0) = 0, \ldots, \varphi_m(x^0) = 0$, то по теореме 18.3 существует параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x^0, в котором система уравнений связи (18.13) равносильна системе вида

$$x_1 = g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m = g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad (18.14)$$

причём функции $g_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в соответствующем параллелепипеде в $\mathbb{R}^{n-m}$ с центром в точке $\tilde{x}^0 = (x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$. При этом

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}}\, dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\, dx_n, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad (18.15) \\ dx_m &= \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}}\, dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\, dx_n. \end{aligned}$$

Переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ будем называть независимыми, $x_1, \ldots, x_m$ — зависимыми; соответственно $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ — независимые дифференциалы, $dx_1, \ldots, dx_m$ — зависимые.

Точку $\mathbb{R}^{n-m}$, соответствующую независимым переменным, будем обозначать волной: $\tilde{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$. При выполнении условий связи (18.13) (или (18.14), что всё равно)

$$\begin{aligned} f(x)\Big|_{\text{св}} &= f(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ &\qquad g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv f_0(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f_0(\tilde{x}); \\ L(x)\Big|_{\text{св}} &= L(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ &\qquad g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv L_0(x_{m+1}, \ldots, x_n) = L_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}), \end{aligned}$$

так как $\varphi_i(x)|_{\text{св}} = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Функция f_0 дифференцируема в точке $\tilde{x}^0$ по теореме о дифференцируемости сложной функции.

Но $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка условного экстремума функции f при выполнении условий связи, поэтому $\tilde{x}^0 = (x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ — точка локального экстремума того же характера функции f_0, следовательно, $df_0(\tilde{x}^0) = 0$. А так как $L_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x})$, то $dL_0(\tilde{x}^0) = 0$ при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

В силу инвариантности первого дифференциала относительно замены переменных

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_m}\, dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}\, dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n}\, dx_n, \quad (18.16)$$

рассматриваем ли мы L как функцию от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ или как $L_0(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, считая выполненными условия связи, т.е.

$$dL_0(\tilde{x}) = dL(x)\Big|_{(18.15)}.$$

При этом $dL_0(\tilde{x})$ означает дифференциал функции $n - m$ независимых переменных, полученной при подстановке в $L(x)$ условий (18.14), а $dL(x)|_{(18.15)}$ — дифференциал функции n переменных (18.16), в который вместо $dx_1, \ldots, dx_m$ подставлены их выражения через $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ по формулам (18.15).

Подберём теперь коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в функции Лагранжа так, чтобы

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^0) = 0. \quad (18.17)$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^0) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^0) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^0) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^0) = 0. \end{aligned}$$

Так как определитель этой линейной системы относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равен $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\Big|_{x=x^0} \neq 0$, то такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ существуют и определены единственным образом. Тогда при найденных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в силу (18.16) и (18.17)

$$\begin{aligned} dL_0(\tilde{x}_0) &= \frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0)\, dx_1 + \ldots + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^0)\, dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^0)\, dx_{m+1} + \ldots + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0)\, dx_n = \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^0)\, dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0)\, dx_n. \end{aligned}$$

Но $dL_0(\tilde{x}^0) = 0$ при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, а $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимы и принимают любые значения. Поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^0) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0) = 0.$$

Учитывая (18.17), мы видим, что при найденных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ точка x^0 является стационарной точкой функции Лагранжа. ■

Теорема 18.8 (достаточные условия относительного экстремума). *Пусть функции f и φ_i, $i = 1, \ldots, m$ $(m < n)$, дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, причём координаты её и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют системе (18.18), а в точке x^0 ранг матрицы Якоби* $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *равен m. Пусть $L_0(\tilde{x})$ — функция $n-m$ независимых переменных, полученная после подстановки в функцию Лагранжа $L(x)$ условий связи (18.13), разрешённых относительно остальных m зависимых переменных, а $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — второй дифференциал функции $L_0(\tilde{x})$ в соответствующей точке $\tilde{x}^0$, рассматриваемый как квадратичная форма от $n-m$ независимых дифференциалов (см. обозначения и рассуждения в доказательстве теоремы 18.7). Тогда*

1) *если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — положительно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого условного минимума f при выполнении условий (18.13);*
2) *если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — отрицательно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого условного максимума f при выполнении условий (18.13);*
3) *если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — неопределённая квадратичная форма, то x^0 не является точкой условного экстремума f при выполнении условий (18.13).*

□ Как и в доказательстве теоремы 18.7, можно считать, что существует параллелепипед в $\mathbb{R}^n$

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

в котором система уравнений связи (18.13) равносильна системе вида (18.14), причём функции g_i, $i = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде в $\mathbb{R}^{n-m}$:

$$\Pi' = \{(x_{m+1}, \ldots, x_n) : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \ i = m+1, \ldots, n\}.$$

Дифференцируя тождества

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

по x_j, $m+1 \leqslant j \leqslant n$, имеем

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (18.19)$$

При фиксированном j получается система m уравнений с m неизвестными $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$. Её определитель равен $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$, причём производные $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ рассматриваются как сложные функции

$$F_{ij}(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

По следствию из теоремы 9.5 эти сложные функции непрерывны в Π'.

Дифференцируя функции F_{ij} по x_k, $m+1 \leqslant k \leqslant n$, получим

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j\partial x_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j\partial x_m}\cdot\frac{\partial g_m}{\partial x_k} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j\partial x_k},$$

где производные $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j\partial x_k}$ рассматриваются как сложные функции

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j\partial x_k}\,(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n);$$

аналогично они непрерывны в Π'. Таким образом, функции F_{ij} непрерывно дифференцируемы в Π'. Определитель системы (18.19), равный $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$, рассматриваемый как сложная функция от $x_{m+1}, \ldots, x_n$, отличен от нуля в точке $\tilde{x}^0$, а в силу непрерывности и в некоторой окрестности этой точки, принадлежащей Π'. Тогда решения системы (18.19) $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\tilde{x}^0$, а сами функции g_i дважды непрерывно дифференцируемы в этой окрестности.

Напомним, что второй дифференциал не обладает инвариантностью формы относительно замены переменных. Приведём выкладки в случае, когда внутренние функции $u_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_k)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$, а внешняя функция $f(u_1, \ldots, u_n)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(u_1^0, \ldots, u_n^0)$, где $u_j^0 = u_j(x_1^0, \ldots, x_k^0)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда второй дифференциал сложной функции $F(x_1, \ldots, x_k) = f(u_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_k))$ в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$ равен

$$d^2F = d(dF) = d\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial x_i}\,dx_i\right) = d\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}\,du_j\right).$$

Здесь мы воспользовались инвариантностью формы первого дифференциала относительно замены переменных; $du_1, \ldots, du_n$ — дифференциалы функций от k переменных. Далее,

$$d^2F = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\,du_j\right) = \sum_{j=1}^{n} du_j\, d\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}\,d(du_j).$$

Снова воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала, получим

$$d^2F = \sum_{j=1}^{n} du_j \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_k\partial u_j}\,du_k + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}\,d^2u_j = \\ = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_k\partial u_j}\,du_k\,du_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}\,d^2u_j.$$

Частный случай этой формулы при $n = 2$ был получен в § 4 главы X (см. (10.14)).

Так как в условии теоремы 18.8 функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0, то таковой же является и функция Лагранжа $L = f + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$. Далее, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — независимые переменные, а $x_1, \ldots, x_m$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $x_{m+1}, \ldots, x_n$ в окрестности точки $\tilde{x}^0$. Поэтому сложная функция

$$L_0(\tilde{x}) = L(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

(см. обозначения в доказательстве теоремы 18.7) дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\tilde{x}^0$, и

$$d^2L_0(\tilde{x}) = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_j}\,dx_k\,dx_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_j}\,d^2x_j.$$

При этом $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ — независимые дифференциалы, а $dx_1, \ldots, dx_m$ выражаются через них по формулам (18.15); полученное выражение — функция от $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Частные производные $\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_j}$ и $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ рассматриваются как сложные функции от $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Так как x^0 — стационарная точка функции Лагранжа при найденных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, то $\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$; равны нулю и соответствующие сложные функции от $x_{m+1}, \ldots, x_n$ в точке $\tilde{x}^0$. Поэтому

$$d^2L_0(\tilde{x}^0) = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_j}\,dx_k\,dx_j$$

(«квазиинвариантность формы второго дифференциала в стационарной точке относительно замены переменных»); частные производные второго порядка берутся от сложных функций от $x_{m+1}, \ldots, x_n$ в точке $\tilde{x}^0$.

Но $L_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x})$ (см. обозначения в доказательстве теоремы 18.7), поэтому

$$d^2f_0(\tilde{x}^0) = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_j}\,dx_k\,dx_j$$

— квадратичная форма от $n-m$ независимых дифференциалов $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ ($dx_1, \ldots, dx_m$ выражаются через них по формулам (18.15)). Так как $df_0(\tilde{x}^0) = dL_0(\tilde{x}^0) = 0$, то $\tilde{x}^0$ — стационарная точка функции $f_0(\tilde{x})$, и характер локального экстремума функции f_0 (или его отсутствие) определяется знакоопределённостью (или неопределённостью) квадратичной формы $d^2f_0(\tilde{x}^0) = d^2L_0(\tilde{x}^0)$. А этот локальный экстремум (или его отсутствие) соответствует относительному экстремуму того же характера (или его отсутствию) функции f при выполнении условий связи (18.13). ■

4. Критерий Дарбу интегрируемости нескольких переменных.

Лемма 19.4. *Если F_1 и F_2 — непустые компакты в $\mathbb{R}^n$, причём $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\rho(F_1, F_2) > 0$.*

Лемма 19.5. *Пусть G, F_1, $\ldots$, F_N — множества в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\rho(F_i, F_j) = \rho_{ij}$, $\rho = \min\limits_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$, $\operatorname{diam} G < \rho$. Тогда если $G \subset \bigcup_{j=1}^{N} F_j$, то найдётся j такое, что $G \subset F_j$.*

Лемма 19.6. *Если G — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует открытое клеточное множество $S \supset G$ такое, что $mS < \mu^* G + \varepsilon$.*

Лемма 19.7. *Пусть G и F — измеримые множества в $\mathbb{R}^n$, $\mu F < \varepsilon$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G на множества G_i такого, что $|R| < \delta$, выполняется неравенство $\sum\limits_{G_i \cap F \neq \varnothing} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \varepsilon$.*

□ По лемме 19.6 существует открытое клеточное множество $S \supset F$ такое, что $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$. Множество S состоит из клеток ранга k, т.е. n-мерных кубиков Q_j с ребром $\delta = \frac{1}{2^k}$, и точек общих границ этих клеток. Так как $\delta = \delta(\varepsilon)$, то $k = k(\varepsilon)$. Пусть R — разбиение G такое, что $|R| < \delta$. При этом $G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$;

$$\mu(G_i \cap G_j) = 0, \quad i \neq j; \quad \operatorname{diam} G_i < \delta, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Для фиксированной клетки $Q_j \subset S$ имеем

$$\sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \varnothing} \mu G_i < (3\delta)^n = 3^n mQ_j$$

(см. рис. 19.4; в двумерном случае все G_i, имеющие общие точки с $\overline{Q}_j$, принадлежат множеству, состоящему из пяти квадратов, равных $\overline{Q}_j$, и четырёх секторов радиуса δ с центральным углом $90°$). Так как $F \subset S \subset \bigcup_{j=1}^{N} \overline{Q}_j$, то

$$\sum_{G_i \cap F \neq \varnothing} \mu G_i \leqslant \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \varnothing} \mu G_i$$

(здесь учтено, что одно и то же множество G_i может пересекаться с разными клетками $\overline{Q}_j$); последняя сумма меньше, чем

$$\sum_{j=1}^{N} 3^n \cdot mQ_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon. \qquad ■$$

Теорема 19.1 (критерий интегрируемости Дарбу). *Для ограниченной функции f на измеримом множестве G равносильны следующие три условия.*

1°. *Функция f интегрируема по Риману на G.*

2°. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R множества G такое, что $\omega_R < \varepsilon$.*

3°. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G, мелкость которого меньше δ, выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$.*

□ $3° \Rightarrow 2°$ — очевидно.

$2° \Rightarrow 1°$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R такое, что $\omega_R = S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $S_R^* \geqslant I^* \geqslant I_* \geqslant S_{*R}$, то $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — произвольно, поэтому $I^* - I_* = 0$ и функция интегрируема по Риману на $[a; b]$.

$1° \Rightarrow 2°$. Так как $I^* = I_* = I = \sup\limits_R S_{*R}$, то $\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_1$: $S_{*R_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}$. Также $I = \inf\limits_R S_R^*$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_2$: $S_{R_2}^* < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение $R = \max(R_1, R_2)$. Из леммы 12.1 следует, что

$$S_{*R} \geqslant S_{*R_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}; \quad S_R^* \leqslant S_{R_2}^* < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $\omega_R = S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству утверждения $2° \Rightarrow 3°$ в теореме 19.1.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и существует разбиение R_0 множества G:

$$G = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^0; \quad \mu(G_i^0 \cap G_j^0) = 0, \quad i \neq j,$$

такое, что $\omega_{R_0} = \sum\limits_{j=1}^{N_0} \omega_j^0 \mu G_j^0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G, удовлетворяющего условию $|R| < \delta$, выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$.

Так как множества G_j^0 измеримы, то $\mu(\partial G_j^0) = 0$, $j = 1, \ldots, N_0$. Если $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_0} \partial G_j^0$, то, в силу конечной аддитивности меры Жордана, $\mu\Gamma = 0$. По лемме 19.6 существует открытое клеточное множество $S \supset \Gamma$ такое, что $mS < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n}$, где $M = \sup\limits_G |f(x)|$ (если $M = 0$, то $f(x) \equiv 0$, и доказывать нечего; поэтому естественно считать, что $M > 0$).

Так как $\Gamma \subset S$, то при всех j имеет место включение $\partial G_j^0 \subset S$. Рассмотрим множества $F_j = G_j^0 \setminus S = \overline{G}_j^0 \setminus S$ (последнее равенство выполняется потому, что $\partial G_j^0 \subset S$). Так как $\overline{G}_j^0$ — замкнутое, а S — открытое множества, то множества F_j, $j = 1, \ldots, N_0$, — замкнуты. Не уменьшая общности, можно считать, что $G_i^0 \cap G_j^0 = \varnothing$, $i \neq j$. Если это не так, то рассмотрим разбиение R_0', составленное из всевозможных непустых разностей и пересечений множеств G_i^0, которые попарно не пересекаются; при $N_0 = 3$, например, это множества $G_1^0 \setminus (G_2^0 \cup G_3^0)$, $G_2^0 \setminus (G_1^0 \cup G_3^0)$, $G_3^0 \setminus (G_1^0 \cup G_2^0)$, $(G_1^0 \cap G_2^0) \setminus G_3^0$, $(G_2^0 \cap G_3^0) \setminus G_1^0$, $(G_1^0 \cap G_3^0) \setminus G_2^0$, $G_1^0 \cap G_2^0 \cap G_3^0$ (см. рис. 19.6). Так как $R_0' > R_0$, то $\omega_{R_0'} \leqslant \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, и разбиение R_0 можно заменить на R_0'. Так как $G_i^0 \cap G_j^0 = \varnothing$, то и $(G_i^0 \setminus S) \cap (G_j^0 \setminus S) = \varnothing$, т.е. $F_i \cap F_j = \varnothing$, $i \neq j$. Легко видеть, что $G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} (G_j^0 \setminus S) = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$ (здесь используется известное теоретико-множественное соотношение

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C,$$

Некоторые из множеств F_j могут быть пустыми; считаем пока, что среди F_j есть непустые и оставим в сумме $G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$ только их. По лемме 19.4 $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$ при $i \neq j$. Тогда $\rho = \min\limits_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$. По лемме 19.7, так как $\mu S < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n}$, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G ($G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$; $\mu(G_i \cap G_j) = 0$, $i \neq j$), удовлетворяющего условию $|R| < \delta_1$, выполняется неравенство

$$\sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n} \cdot 2 \cdot 3^n = \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \rho)$. Тогда рассмотрим любое разбиение R множества G такое, что $|R| < \delta$, и фиксированное множество этого разбиения $G_i \subset (G \setminus S) = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$. Так как $\operatorname{diam} G_i \leqslant |R| < \delta \leqslant \rho$, а $\rho_{ij} \geqslant \rho$ при $i \neq j$, то по лемме 19.5 найдётся j такое, что $G_i \subset F_j \subset G_j^0$.

Рассмотрим разбиение $R_1 = \max(R, R_0)$. Если множество G_i разбиения R таково, что $G_i \cap S = \varnothing$, то $G_i \subset (G \setminus S)$, и по только что доказанному $G_i \subset G_j^0$ при некотором j, значит, G_i является одним из множеств разбиения R_1. Поэтому $\sum\limits_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i \leqslant \omega_{R_1} \leqslant \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого разбиения R множества G такого, что $|R| < \delta$, выполняются неравенства

$$\omega_R = \sum_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \omega_i \mu G_i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Остаётся разобрать случай, когда все $F_i = \varnothing$. Но тогда $G \setminus S = \varnothing$, поэтому $G \subset S$ и первая сумма отсутствует, что упрощает доказательство. ■

5. Мера графика интегрируемой функции. Мера подграфика неотрицательно интегрируемой функции.

Определение 19.4. Графиком функции $y = f(x)$, $x \in \in G \subset \mathbb{R}^n$, называется множество точек из $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \,:\, y = f(x),\ x \in G\}.$$

Если функция f неотрицательна на множестве G, то её подграфиком называется множество точек из $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Pi_f = \{(x, y) \,:\, 0 \leqslant y \leqslant f(x),\ x \in G\}.$$

Теорема 19.4. 1) *Если функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то её график Γ_f измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu\Gamma_f = 0$.*
2) *Если неотрицательная функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то её подграфик Π_f измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu\Pi_f = = \int_G f(x)\,dx$.*

□ Повторяется доказательство теоремы 12.25 с заменой $[a;b]$ на G, Δx_i на μG_i, $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, $\int_a^b f(x)\,dx$ на $\int_G f(x)\,dx$. Фигуры Π^*, Π_* и Γ являются объединениями цилиндров с основаниями G_i. Они пересекаются по цилиндрам с основаниями $G_i \cap G_j$, $i \neq j$, имеющими нулевую меру в $\mathbb{R}^n$, поэтому пересечения этих цилиндров имеют нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$. ■

□ 2) По пункту 2° критерия Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega_R = S_R^* - S_{*R} < < \varepsilon$. Но $S_R^* = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$, $S_{*R} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i$ — это площади ступенчатых фигур Π^* и Π_*, являющихся объединениями нескольких прямоугольников, которые имеют общие точки разве что по прямолинейным отрезкам, следовательно, пересечения этих прямоугольников имеют нулевую меру (см. следствие 1 из теоремы 11.8 и теорему 11.10).

Так как $\Pi_* \subset \Pi_f \subset \Pi^*$ (см. рис. 12.1), а множества Π_* и Π^* измеримы, то $\mu\Pi_* \leqslant \mu_*\Pi_f \leqslant \mu^*\Pi_f \leqslant \mu\Pi^*$. Тогда $0 \leqslant \mu^*\Pi_f - - \mu_*\Pi_f \leqslant \mu\Pi^* - \mu\Pi_* = S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\mu^*\Pi_f = \mu_*\Pi_f$, т.е. Π_f измерим в $\mathbb{R}^2$. Далее, $S_{*R} = = \mu\Pi_* \leqslant \mu\Pi_f \leqslant \mu\Pi^* = S_R^*$, а также $S_{*R} \leqslant I \leqslant S_R^*$, где $I = = \int_a^b f(x)\,dx$. Поэтому $|\mu\Pi_f - I| \leqslant S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\mu\Pi_f = I$.

1) До сих пор мы считали, что f — неотрицательная интегрируемая функция на $[a;b]$. Если отказаться от неотрицательности, то всё равно $\Gamma_f \subset \Gamma$, где Γ — ступенчатая фигура, являющаяся объединением закрашенных прямоугольников на рис. 12.1; $\mu\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\Delta x_i = \omega_R$ (аналогично рассуждению в предыдущей части доказательства). Так как для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega_R < \varepsilon$, то $\mu^*\Gamma_f \leqslant \mu\Gamma = \omega_R < \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — любое, поэтому $\mu^*\Gamma_f = 0$; по лемме 11.9, Γ_f измерим в $\mathbb{R}^2$, и $\mu\Gamma_f = 0$. ■

6. Линейность интеграла. Аддитивность по множеству. Теорема о среднем. Непрерывность интеграла.

Теорема 19.10 (линейность интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на G, причём*

$$\int_G (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_G f(x)\,dx + \beta \int_G g(x)\,dx.$$

□ Повторяется доказательство теоремы 12.10 с заменой $[a;b]$ и $[x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$ соответственно на G и $G_i^{(n)}$. ■

□ Рассмотрим произвольную последовательность разбиений R_n отрезка $[a;b]$, лишь бы $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, и выберем произвольным образом точки $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$, $i = 1, \ \ldots, N_n$. Тогда

$$\sigma_{R_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_{R_n}(f) + \beta \sigma_{R_n}(g). \qquad (12.4)$$

Так как f и g интегрируемы на $[a;b]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \equiv I_1; \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n}(g) = \int_a^b g(x)\,dx \equiv I_2.$$

Переходя в равенстве (12.4) к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha I_1 + \beta I_2. \qquad (12.5)$$

Так как R_n — произвольная последовательность разбиений $[a;b]$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, и равенство (12.5) выполняется при любом выборе промежуточных точек $\xi_i^{(n)}$, то из критерия Римана следует, что функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha I_1 + \beta I_2. \qquad ■$$

Теорема 19.7 (аддитивность интеграла по множествам). *Если функция f интегрируема на множествах G_1 и G_2 из $\mathbb{R}^n$ таких, что $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то f интегрируема на $G_1 \cup G_2$, причём $\int_{G_1 \cup G_2} f(x)\,dx = \int_{G_1} f(x)\,dx + \int_{G_2} f(x)\,dx$.*

□ Повторяется доказательство теорем 12.4 и 12.13 с заменой отрезков $[a;c]$, $[c;b]$, $[a;b]$ соответственно на множества G_1, G_2, $G_1 \cup G_2$. Разбиение R (а затем R_n) отрезка $[a;b]$ состоит из всех множеств разбиений R_1 и R_2 (соответственно $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$). ■

□ Существование интегралов в правой части последнего равенства следует из теоремы 12.5. Рассмотрим последовательности разбиений $R_n^{(1)}$ отрезка $[a;c]$ и $R_n^{(2)}$ отрезка $[c;b]$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n^{(1)}| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n^{(2)}| = 0$. Тогда при любом выборе промежуточных точек для этих разбиений

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n^{(1)}} = \int_a^c f(x)\,dx \equiv I_1; \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n^{(2)}} = \int_c^b f(x)\,dx \equiv I_2.$$

Рассмотрим при фиксированном $n = 1, 2, \ \ldots$ разбиение R_n отрезка $[a;b]$, включающее все точки $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$, с соответствующими промежуточными точками для этих разбиений. Тогда $\sigma_{R_n} = \sigma_{R_n^{(1)}} + \sigma_{R_n^{(2)}}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = I_1 + I_2$. Так как $|R_n| = \max(|R_n^{(1)}|, |R_n^{(2)}|)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, и по критерию Римана $\int_a^b f(x)\,dx = I_1 + I_2$. ■

Теорема 19.15 (о среднем). *Если функции f и g интегрируемы на множестве $F \subset \mathbb{R}^n$, причём g сохраняет знак (т.е. $g(x) \geqslant 0$ на F или $g(x) \leqslant 0$ на F), то:*

1) $\int_F f(x)g(x)\,dx = \mu \int_F g(x)\,dx$, где $\mu \in [m; M]$, $m = \inf\limits_F f(x)$, $M = \sup\limits_F f(x)$;

2) если при этом F — измеримый связный компакт и f непрерывна на F, то $\int_F f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_F g(x)\,dx$, где $\xi \in F$.

□ 1) Повторяется доказательство первой части теоремы 12.18 с заменой $[a;b]$ на F.

2) Так как F — компакт, то по теореме Вейерштрасса 9.7 $\exists\, x_1, x_2 \in F$: $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$. Так как $\mu \in [m; M]$, то по теореме 9.6 о промежуточных значениях функции, непрерывной на связном множестве, $\exists\, \xi \in F$: $\mu = f(\xi)$. ■

□ 1) Не уменьшая общности, считаем, что $g(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$ (иначе заменим $g(x)$ на $-g(x)$). Так как для всех $x \in [a;b]$ выполняются неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. Применяя теорему 12.14, получим

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (12.6)$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то из (12.6) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и нужное равенство выполняется для любого числа μ. Если $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (а отрицательным он быть не может в силу неотрицательности функции g), то разделим неравенство (12.6) на $\int_a^b g(x)\,dx$, получим

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu \in [m; M].$$

2) Если функция f непрерывна на $[a;b]$, то для числа $\mu \in [m; M]$ существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$ (это следует из теоремы 3.15); требуемое утверждение доказано. ■

Теорема 19.16 (непрерывность интеграла по множеству). *Пусть G_k, $k = 1, 2, \ \ldots,$ — последовательность измеримых подмножеств измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $G_1 \subset G_2 \subset \ \ldots \subset G_k \subset \ \ldots \subset G$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \mu G_k = \mu G$. Если функция f ограничена на G и интегрируема на любом G_k, $k = 1, 2, \ \ldots$, то f интегрируема на G и $\int_G f(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)\,dx$.*

□ Так как $\mu(G \setminus G_k) = \mu G - \mu G_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, k$: $\mu(G \setminus G_k) < \frac{\varepsilon}{4M}$, где $M = \sup\limits_G |f(x)|$ (можно считать, что $M > 0$). Но функция f интегрируема на G_k при этом фиксированном k, поэтому найдётся разбиение R_k множества G_k такое, что $\omega_{R_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение R множества G такое, что к R_k добавляется множество $G \setminus G_k$. В этом случае $\omega_R = \omega_{R_k} + \omega \cdot \mu(G \setminus G_k)$, где ω — колебание функции f на множестве $G \setminus G_k$. Тогда $\omega \leqslant 2M$ и $\omega_R < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$. По пункту 2° критерия Дарбу функция f интегрируема на G.

По теоремам 19.8 и 19.7 функция f интегрируема на любом множестве $G \setminus G_k$ и $\int_G f(x)\,dx = \int_{G_k} f(x)\,dx + \int_{G \setminus G_k} f(x)\,dx$. При всех $k = 1, 2, \ \ldots$ по следствию 3 из теоремы 19.13

$$\left| \int_G f(x)\,dx - \int_{G_k} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{G \setminus G_k} f(x)\,dx \right| \leqslant \leqslant M \cdot \int_{G \setminus G_k} dx = M \cdot \mu(G \setminus G_k).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(G \setminus G_k) = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx$. ■

7. Интегрируемость функции непрерывной на измеримом компакте. Интегрируемость функции непрерывной на открытом и измеримом множестве.

Теорема 19.5. *Если функция f непрерывна на измеримом компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то эта функция интегрируема на F.*

З а м е ч а н и е. Напомним, что замкнутые или открытые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$ не обязаны быть измеримыми (см., например, упражнение 11.20).

$\square$ Считаем, что $\mu F > 0$ (иначе сразу $\int_F f(x)\,dx = 0$). Непрерывная на компакте функция ограничена и равномерно непрерывна. Значит, $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0$: $\forall\,x, y \in F$, $\rho(x, y) < \delta \longrightarrow \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$. Тогда если R — разбиение F на множества F_i, $i = 1, \ \ldots, N$, такое, что $|R| < \delta$, то $\forall\,x, y \in \in F_i \longrightarrow \rho(x, y) \leqslant \operatorname{diam} F_i < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$. Если $f(x) \geqslant f(y)$, то $0 \leqslant f(x) - f(y) < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$. Переходя к точной верхней грани по $x \in F_i$ и к точной нижней грани по $y \in F_i$, получим: $\omega_i = M_i - m_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu F} < \frac{\varepsilon}{\mu F}$. Тогда

$$\omega_R = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu F_i < \frac{\varepsilon}{\mu F} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mu F_i = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0$: $\forall\,R$, $|R| < \delta \longrightarrow \omega_R < \varepsilon$. По пункту 3° критерия Дарбу функция f интегрируема на F. $\blacksquare$

Теорема 19.9. *Если функция f ограничена и непрерывна на измеримом открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема на G.*

$\square$ Так как множество G измеримо, то $\mu \partial G = 0$. Определим $f(x) = 0$ на ∂G. Полученная функция ограничена на $\overline{G} = G \cup \cup \partial G$, причём $G \cap \partial G = \varnothing$. Так как $\overline{G}$ — измеримый компакт, а множество точек разрыва f на $\overline{G}$ принадлежит ∂G, то оно имеет меру нуль. По теореме 19.6 функция f интегрируема на $\overline{G}$, следовательно, и на G. $\blacksquare$

8. Сведение кратного интеграла к повторному.

Определение 19.5. Простым множеством (цилиндроидом) относительно оси x_{n+1} в $\mathbb{R}^{n+1}$ называется множество

$$\text{Ц}(G, \psi(x), \varphi(x)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x \in G,\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x)\},$$

где G — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ — ограниченные функции на G такие, что $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ при всех $x \in G$.

Теорема 19.19 (о сведении кратного интеграла к повторному). *Пусть функция f интегрируема на цилиндроиде $G^* = \text{Ц}(G, \psi(x), \varphi(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где функции φ и ψ интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, и при всех $x \in G$ существует интеграл по отрезку $\Phi(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy$. Тогда функция Φ интегрируема на G и $\int_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy = \int_G \Phi(x)\,dx$, т.е.*

$$\int_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy = \int_G \left\{ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

□ Измеримость G в $\mathbb{R}^n$ и G^* в $\mathbb{R}^{n+1}$ следует из интегрируемости соответствующих функций. Впрочем, измеримость G^* следует и из измеримости G. В самом деле, если $\psi(x) \geqslant 0$, то $G^* = (\Pi_\varphi \setminus \Pi_\psi) \cup \Gamma_\psi$, а множества Π_φ, Π_ψ, Γ_ψ измеримы в $\mathbb{R}^{n+1}$ по теореме 19.4. Если же ограниченная функция ψ принимает отрицательные значения, то найдётся натуральное N такое, что $\psi(x) \geqslant -N$ при всех $x \in G$; при параллельном переносе системы координат на N вниз по оси x_{n+1} функция $\psi_1(x) = \psi(x) + N$ станет неотрицательной, а клеточные множества и их мера не изменятся, значит, сохранятся измеримость и мера множеств (см. также рассуждение при доказательстве теоремы 12.26).

Так как функции ψ и φ ограничены, то (см. рис. 19.13)

$$\exists\, A, B \,:\, \forall x \in G \longrightarrow A \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant B.$$

Доопределим $f(x, y)$ на цилиндре $\widetilde{G} = \text{Ц}(G, A, B)$ нулём вне G^*. Тогда функция f интегрируема на $\widetilde{G}$ и

$$I_1 = \int_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Далее, при всех $x \in G$ функция f интегрируема по y на $[\psi(x); \varphi(x)]$, значит, она интегрируема по y на $[A; B]$ и

$$\Phi(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy = \int_A^B f(x, y)\,dy.$$

Таким образом, теорему достаточно доказать для цилиндра $\widetilde{G}$.

Докажем сначала, что функция Φ интегрируема на G. Рассмотрим разбиение R множества G:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i; \quad \mu(G_i \cap G_j) = 0, \quad i \neq j,$$

а также разбиение R_0 отрезка $[A; B]$ на отрезки $[\alpha_{j-1}; \alpha_j]$, $j = 1, \ldots, p$. Тогда всевозможные цилиндры $\text{Ц}_{ij} = \text{Ц}(G_i, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$ образуют разбиение $\widetilde{R}$ множества $\widetilde{G}$, так как они имеют общие точки только на основаниях и боковых поверхностях, т.е. на множествах меры нуль в $\mathbb{R}^{n+1}$ (боковая поверхность цилиндра — цилиндр с основанием меры нуль в $\mathbb{R}^n$).

Пусть $M_{ij} = \sup\limits_{\text{Ц}_{ij}} f(x, y)$, $m_{ij} = \inf\limits_{\text{Ц}_{ij}} f(x, y)$. Тогда

$$\forall x \in G_i \longrightarrow m_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \leqslant \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x, y)\,dy \leqslant M_{ij} \cdot \Delta\alpha_j,\ j = 1, \ldots, p$$

(это — неравенство для интеграла по отрезку; $\Delta\alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$).

Суммируем последние неравенства по j от 1 до p:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \leqslant \int_A^B f(x, y)\,dy = \Phi(x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \qquad (19.1)$$

при всех $x \in G_i$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть $M_i = \sup\limits_{x \in G_i} \Phi(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in G_i} \Phi(x)$, $\omega_i = M_i - m_i$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \cdot \Delta\alpha_j,$$

откуда

$$\omega_i \leqslant \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta\alpha_j, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Умножим последнее неравенство на μG_i и просуммируем по i:

$$\omega_R(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu G_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta\alpha_j \cdot \mu G_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij}) \mu \text{Ц}_{ij} = \omega_{\widetilde{R}}(f).$$

Так как функция f интегрируема на G, то по пункту 3° критерия Дарбу $\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta > 0$: $\forall \widetilde{R}$ (разбиения $\widetilde{G}$), $|\widetilde{R}| < \delta \longrightarrow \omega_{\widetilde{R}}(f) < \varepsilon$. Рассмотрим какое-нибудь одно такое разбиение на цилиндры $\text{Ц}_{ij} = \text{Ц}(G_i, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$. Тогда их основания G_i образуют разбиение R множества G такое, что $\omega_R(\Phi) \leqslant \omega_{\widetilde{R}}(f) < \varepsilon$. По пункту 2° критерия Дарбу функция Φ интегрируема на G.

Проинтегрируем неравенства (19.1) по множеству G_i, $i = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \Delta\alpha_j \mu G_i \leqslant \int_{G_i} \Phi(x)\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \Delta\alpha_j \mu G_i,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \mu \text{Ц}_{ij} \leqslant \int_{G_i} \Phi(x)\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \mu \text{Ц}_{ij}.$$

Суммируем последние неравенства по i от 1 до N:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \mu \text{Ц}_{ij} \leqslant \int_G \Phi(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \mu \text{Ц}_{ij},$$

т.е. $S_{*\widetilde{R}} \leqslant I_2 \leqslant S^*_{\widetilde{R}}$, где $I_2 = \int_G \Phi(x)\,dx$, а сумма Дарбу берётся для функции f и разбиения $\widetilde{R}$ множества $\widetilde{G}$.

Также по определению кратного интеграла

$$S_{*\widetilde{R}} \leqslant I_1 \leqslant S^*_{\widetilde{R}}, \quad \text{где} \quad I_1 = \int_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

откуда $|I_1 - I_2| \leqslant \omega_{\widetilde{R}}$. Но так как функция f интегрируема на $\widetilde{G}$, то $\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta > 0$: $\forall \widetilde{R}$, $|\widetilde{R}| < \delta \longrightarrow \omega_{\widetilde{R}} < \varepsilon$. Но разбиение с мелкостью, меньшей δ, можно взять в таком виде, как в нашем рассуждении (на цилиндры Ц_{ij}), поэтому $\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow |I_1 - I_2| < \varepsilon$, значит, $I_1 = I_2$. ■

9. Формула Грина.

Определение 19.8. Плоская область G называется канонической, если она одновременно задаётся как неравенствами

$$a < x < b, \quad \psi(x) < y < \varphi(x),$$

где функции ψ и φ непрерывны на $[a;b]$, так и неравенствами

$$c < y < d, \quad \xi(y) < x < \eta(y),$$

где функции ξ и η непрерывны на $[c;d]$.

Замыкание канонической области является одновременно простым множеством как относительно оси y, так и относительно оси x.

Теорема 19.20 (формула Грина). *Пусть G — каноническая область на плоскости, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}$. Тогда*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial G^+} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy).$$

☐ Каноническая область на плоскости имеет вид, изображённый на рис. 19.19. Кривая $D_2A_1A_2B_1$ — график функции $y = \varphi(x)$, кривая $D_1C_2C_1B_2$ — график функции $y = \psi(x)$. Так как $\psi(x) < \varphi(x)$ при $x \in (a;b)$, а функции ψ и φ непрерывны на $[a;b]$, то $\psi(a) \leqslant \varphi(a)$, $\psi(b) \leqslant \varphi(b)$. Точка D_2 расположена выше D_1 или совпадает с ней, точка B_1 расположена выше B_2 или совпадает с ней. Если точка D_2 выше D_1, то отрезок D_1D_2 целиком принадлежит границе области G, если точка B_1 выше B_2, то отрезок B_1B_2 целиком принадлежит границе G. Таким образом, ∂G состоит из графиков непрерывных функций $D_2A_1A_2B_1$ и $D_1C_2C_1B_2$ и отрезков D_1D_2 и B_1B_2, т.е. ∂G имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, область G измерима в $\mathbb{R}^2$. Пока мы учли только то, что $\overline{G}$ — простое множество относительно оси y. Если учесть то же самое относительно оси x, то мы увидим, что границе G принадлежат отрезки A_1A_2 и C_1C_2.

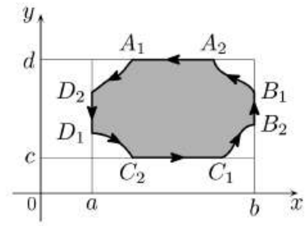

Рис. 19.19

Рассмотрим $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. Он существует по теореме 19.5 (в более общем случае по теореме 19.9). Так как $\mu\partial G = 0$, то, применяя сведение двойного интеграла к повторному, имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{\overline{G}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy.$$

При фиксированном $x \in (a;b)$ функция $P(x,y)$ непрерывна по y на отрезке $[\psi(x);\varphi(x)]$, непрерывно дифференцируема на интервале $(\psi(x);\varphi(x))$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ имеет конечные пределы в концах интервала. С учётом теоремы 4.16 эта функция непрерывно дифференцируема на $[\psi(x);\varphi(x)]$, и по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x)).$$

Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx =$$
$$= \int_{\overline{D_2A_1A_2B_1}} P(x,y)\,dx - \int_{\overline{D_1C_2C_1B_2}} P(x,y)\,dx =$$
$$= -\left(\int_{\overline{B_1A_2A_1D_2}} P\,dx + \int_{\overline{D_1C_2C_1B_2}} P\,dx\right)$$

(см. определение 19.6). Так как

$$\int_{\overline{D_2D_1}} P\,dx = \int_{\overline{B_2B_1}} P\,dx = 0$$

(по лемме 19.8), то в сумме имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial G^+} P\,dx.$$

Аналогично, $\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \iint_{\partial G^+} Q\,dy$. Смена знака обусловлена тем, что «при замене x на y меняется ориентация плоскости»; аккуратно это можно проследить, проводя соответствующие выкладки. Сложив два последних равенства, получим: $\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial G^+}(P\,dx + Q\,dy)$. ■

10. Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения при n = 2.

Лемма 19.9 (вариант теоремы 19.21 при $n = 2$ и $f \equiv 1$). *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ и $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ — области, к которым применима формула Грина, границы ∂D и ∂G которых являются простыми замкнутыми кусочно-гладкими кривыми. Пусть далее отображение Φ:*

1) *дважды непрерывно дифференцируемо в области $D_0 \supset \overline{D}$;*
2) *биективно отображает D на G и ∂D на ∂G;*
3) *имеет якобиан $J(u, v) \neq 0$ в D.*

Тогда

$$\mu G = \iint_D |J(u, v)|\, du\, dv.$$

□ Параметризуем кусочно-гладкую границу области D: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; считаем, что возрастание t соответствует положительному направлению обхода ∂D. Отрезок $[\alpha; \beta]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы; за счёт сдвига по t на каждом следующем отрезке разбиения можно добиться того, чтобы функции u и v были непрерывны на $[\alpha; \beta]$. Тогда к криволинейному интегралу по ∂D можно применить формулы §3 гл. XIV, выражающие криволинейный интеграл второго рода через определённый интеграл по отрезку.

В силу биективности соответствия границ граница области G параметризуется при помощи сложных функций:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Введём параметр λ, равный $+1$, если возрастание t соответствует положительному направлению обхода ∂G, и равный -1 в противоположном случае. Применяя формулу Грина для области G, имеем

$$\mu G = \iint_G dx\, dy = -\int_{\partial G^+} y\, dx = -\lambda \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'_t\, dt$$

(криволинейный интеграл второго рода сведён к интегралу по отрезку). Здесь $x'_t = \dfrac{\partial x}{\partial u} u'_t + \dfrac{\partial x}{\partial v} v'_t$ — производная сложной функции $x(u(t), v(t))$. Тогда последний интеграл равен

$$-\lambda \int_\alpha^\beta \left(y(t) \frac{\partial x}{\partial u} u'_t + y(t) \frac{\partial x}{\partial v} v'_t \right) dt = -\lambda \int_{\partial D^+} \left(y \frac{\partial x}{\partial u}\, du + y \frac{\partial x}{\partial v}\, dv \right)$$

(интеграл по отрезку сведён к криволинейному интегралу второго рода уже по границе области $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$). Так как к области D можно применить формулу Грина, то интеграл равен

$$-\lambda \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(y \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) du\, dv =$$

$$= -\lambda \iint_D \left(y \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - y \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du\, dv =$$

$$= \lambda \iint_D J(u, v)\, du\, dv$$

(в силу дважды непрерывной дифференцируемости функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в области D смешанные частные производные, взятые в разном порядке, равны; для применения формулы Грина нужно также, чтобы функции $y \frac{\partial x}{\partial v}$ и $y \frac{\partial x}{\partial u}$ были непре-

Так как якобиан $J(u, v)$ непрерывен и отличен от нуля в области D, то по теореме 9.6 он сохраняет знак в D (если бы он принимал значения разных знаков, то обратился бы в нуль в какой-то точке D).

Но $\lambda \iint_D J(u, v)\, du\, dv = \mu G > 0$; поэтому если $\lambda = 1$, то $J(u, v) > 0$ в D, а если $\lambda = -1$, то $J(u, v) < 0$ в D. Поэтому $\lambda = \operatorname{sign} J(u, v)$ и $\mu G = \iint_D |J(u, v)|\, du\, dv$. ■

Отсюда очевиден *геометрический смысл знака якобиана отображения* в двумерном случае. Так как в качестве ∂D и ∂G можно брать любые простые замкнутые кривые в соответствующих областях, лишь бы они удовлетворяли условиям леммы 19.9, то отображение с положительным якобианом сохраняет направление обхода простой замкнутой кривой на плоскости, с отрицательным якобианом — меняет направление обхода.

Геометрический смысл модуля якобиана отображения в двумерном случае. Будем считать, что при выполнении условий леммы 19.9 отображение Φ является правильным в области D. Рассмотрим в области D последовательность клеток $Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset \ldots \ni (u_0, v_0)$ такую, что $\operatorname{diam} Q_k \to 0$. Пусть $G_k = \Phi(Q_k)$. Тогда по лемме 19.9

$$\mu G_k = \iint_{Q_k} |J(u, v)|\, du\, dv = \iint_{\overline{Q}_k} |J(u, v)|\, du\, dv = |J(\xi_k, \eta_k)| \cdot \mu \overline{Q}_k;$$

здесь $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{Q}_k$ (применена теорема о среднем 19.15). Так как $\operatorname{diam} Q_k \to 0$, то $\rho((\xi_k, \eta_k), (u_0, v_0)) \leqslant \operatorname{diam} \overline{Q}_k = \operatorname{diam} Q_k \to 0$ и $(\xi_k, \eta_k) \to (u_0, v_0)$. Поэтому в силу непрерывности якобиана в любой точке области D

$$|J(u_0, v_0)| = \lim_{k \to \infty} \frac{\mu \Phi(Q_k)}{\mu Q_k}.$$

Таким образом, модуль якобиана в фиксированной точке области — это «коэффициент изменения площади» в этой точке.

11. Оценка меры образа измеримого открытого множества через верхнюю границу модуля якобиана отображения и меру самого множества.

Лемма 19.10. *Пусть отображение Φ:*

1) *биективно отображает измеримое открытое множество $D \subset \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на измеримое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, причём обратное отображение Φ^{-1} является правильным в G;*
2) *дважды непрерывно дифференцируемо в D;*
3) *имеет отличный от нуля якобиан, ограниченный в D, т.е. $\exists C > 0$: $\forall (u,v) \in D \longrightarrow |J(u,v)| \leqslant C$.*

Тогда $\mu G \leqslant C \cdot \mu D$.

□ Так как отображение Φ непрерывно дифференцируемо в D с ненулевым якобианом и биективно отображает D на G, то с учётом теоремы 18.4 обратное отображение непрерывно дифференцируемо в G (уже не только локально, но на всём множестве G). Так как Φ и Φ^{-1} непрерывны, то по лемме 18.3 для любого открытого множества Q, такого, что $\overline{Q} \subset G$, выполняется равенство $\Phi^{-1}(\partial Q) = \partial\Phi^{-1}(Q)$.

Если множества D и G пусты, то доказывать нечего. Если непусты, то они имеют положительную меру (так как открыты). Пусть S — произвольное клеточное множество положительной меры, принадлежащее G. Может быть так, что $\overline{S}$ имеет общие точки с ∂G, но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое клеточное множество S_ε такое, что $\overline{S}_\varepsilon \subset G$ и $mS_\varepsilon > mS - \varepsilon$.

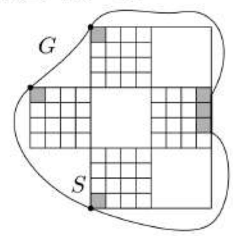

Рис. 19.22

В самом деле, если $\overline{S} \cap \partial G \neq \varnothing$, то можно представить S как клеточное множество более высокого ранга и удалить из него клетки, замыкания которых имеют общие точки с ∂G (закрашены на рис. 19.22); за счёт увеличения ранга можно добиться того, что сумма мер закрашенных клеток будет меньше ε. Внутренность оставшегося клеточного множества и есть S_ε.

Пусть Q — некоторая клетка, входящая в S_ε. К ней применима формула Грина и граница её — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Так как Φ^{-1} — правильное отображение, то $P = \Phi^{-1}(Q)$ также область, к которой применима формула Грина, и $\partial P = \Phi^{-1}(\partial Q)$ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Но отображение Φ дважды непрерывно дифференцируемо в D, а

$$\overline{P} = P \cup \partial P = \Phi^{-1}(Q) \cup \Phi^{-1}(\partial Q) = \Phi^{-1}(\overline{Q}) \subset \Phi^{-1}(G) = D,$$

поэтому по лемме 19.9

$$\mu Q = \iint_P |J(u,v)|\, du\, dv \leqslant C \cdot \mu P.$$

Так как сумма мер всех таких клеток Q равна μS_ε, а сумма мер их прообразов при отображении Φ равна $\mu(\Phi^{-1}(S_\varepsilon))$, то $\mu S_\varepsilon \leqslant C \cdot \mu(\Phi^{-1}(S_\varepsilon)) \leqslant C \cdot \mu D$. Тогда $mS < mS_\varepsilon + \varepsilon \leqslant C \cdot \mu D + \varepsilon$. Если $mS = 0$, то последнее неравенство также выполнено при любом $\varepsilon > 0$. Поскольку S — произвольное клеточное множество, принадлежащее G, то $\mu G \leqslant C \cdot \mu D + \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — произвольно, поэтому $\mu G \leqslant C \cdot \mu D$. ■

12. Теорема о замене переменной в кратном интеграле при n = 2.

Теорема 19.21′. *Пусть Φ — биективное отображение измеримой области $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на измеримую область $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, действующее по формулам $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, дважды непрерывно дифференцируемое в D, якобиан которого отличен от нуля и ограничен в D, причём Φ — правильное отображение в области D, а Φ^{-1} — правильное отображение в области G. Пусть далее функция f ограничена и непрерывна в области G. Тогда*

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|\,du\,dv.$$

□ Так как $\mu\partial D = 0$, то по лемме 19.6 для любого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$ найдётся открытое клеточное множество S такое, что $\partial D \subset S$ и $mS < \frac{1}{n}$.

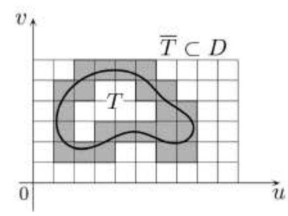

Рис. 19.23

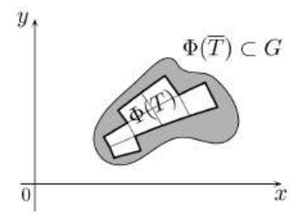

Рис. 19.24

Пусть это множество имеет ранг k_0. Из клеток ранга k_0, не входящих в S, часть лежит внутри D, остальные — внутри дополнения $\hat{D}$. Ясно, что $T = D \setminus \overline{S}$ — открытое клеточное множество ранга k_0 (см. рис. 19.23); $\overline{T} \subset D$, $D \setminus \overline{T} \subset S$, поэтому $\mu(D \setminus \overline{T}) \leqslant mS < \frac{1}{n}$. Множество $\overline{T}$ можно рассматривать как замкнутое клеточное множество любого ранга $k \geqslant k_0$. При этом $\overline{T} = \bigcup_{i=1}^N \overline{Q}_i^{(k)}$, где $\overline{Q}_i^{(k)}$ — замыкания клеток ранга k, образующие разбиение R_k множества $\overline{T}$. Тогда в силу биективности отображения Φ в D

$$\Phi(\overline{T}) = \bigcup_{i=1}^N \Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$$

(см. рис. 19.24), следовательно, множества $\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$, $i = 1, \ldots, N$, образуют разбиение R_k^* множества $\Phi(\overline{T})$. В самом деле, при правильном отображении $\Phi(Q_i)$ — области, к которым применима формула Грина, следовательно, множества $\partial\Phi(Q_i)$ имеют нулевую меру, а в силу биективности отображения при $i \neq j$

$$\Phi(\overline{Q}_i) \cap \Phi(\overline{Q}_j) = \Phi(\overline{Q}_i \cap \overline{Q}_j) \subset \Phi(\partial Q_i) = \partial\Phi(Q_i);$$

здесь использована лемма 18.3 и применяется рассуждение, аналогичное началу доказательства леммы 19.10. Поэтому множества $\Phi(\overline{Q}_i)$ пересекаются по множествам нулевой меры и образуют разбиение множества $\Phi(\overline{T})$. Ясно, что $|R_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Докажем, что $|R_k^*| \to 0$.

Так как функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$, задающие отображение Φ, непрерывны на компакте $\overline{T}$, то они равномерно непрерывны, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0 \,:\, \forall\,(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \overline{T},$$
$$\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \leqslant \delta \longrightarrow$$
$$\longrightarrow |x(u_2, v_2) - x(u_1, v_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y(u_2, v_2) - y(u_1, v_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

(можно употребить нестрогие неравенства вместо строгих). Значит,

$$\sqrt{(x(u_2, v_2) - x(u_1, v_1))^2 + (y(u_2, v_2) - y(u_1, v_1))^2} \leqslant \varepsilon,$$

и $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0$: $\forall\,X \subset \overline{T}$, $\operatorname{diam} X \leqslant \delta \longrightarrow \operatorname{diam}\Phi(X) \leqslant \varepsilon$. Поэтому если мелкость разбиения R_k множества $\overline{T}$ на множества $\overline{Q}_i^{(k)}$ не превосходит δ, то мелкость соответствующего разбиения R_k^* множества $\Phi(\overline{T})$ на множества $\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$ не превосходит ε. Так как $|R_k| \to 0$, то для данного $\delta(\varepsilon)$ найдётся k_1 такое, что $\forall\,k \geqslant k_1 \longrightarrow |R_k| \leqslant \delta$, значит, $|R_k^*| \leqslant \varepsilon$. Окончательно, $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,k_1$: $\forall\,k \geqslant k_1 \longrightarrow |R_k^*| \leqslant \varepsilon$, т.е. $|R_k^*| \to 0$ при $k \to \infty$.

Функция f непрерывна и ограничена в измеримой области G. По теореме 19.9 функция f интегрируема на G. Таким образом, интеграл в левой части равенства в формулировке теоремы 19.21′ (и теоремы 19.21) существует. Аналогично существует и интеграл в правой части этого равенства (функция $f(x(u, v), y(u, v))$ непрерывна в D по теореме 9.5). Естественно, что существуют интегралы от таких же функций по любым измеримым подмножествам G и D.

Докажем теперь, что

$$I_1 \equiv \iint_{\Phi(\overline{T})} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\overline{T}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|\,du\,dv \equiv I_2.$$

В силу биективности отображения и леммы 18.3

$$\Phi(\overline{Q}_i) = \Phi(Q_i \cup \partial Q_i) = \Phi(Q_i) \cup \Phi(\partial Q_i) = \Phi(Q_i) \cup \partial\Phi(Q_i),$$

а $\mu(\partial\Phi(Q_i)) = 0$, поэтому $\mu(\Phi(\overline{Q}_i)) = \mu(\Phi(Q_i))$. По лемме 19.9 римановская сумма для интеграла I_1

$$\sigma_{R_k^*} = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \cdot \mu(\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i)\mu(\Phi(Q_i^{(k)})) =$$
$$= \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \iint_{Q_i^{(k)}} |J(u, v)|\,du\,dv =$$
$$= \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \iint_{\overline{Q}_i^{(k)}} |J(u, v)|\,du\,dv = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) |J(\xi_i, \eta_i)| \cdot \mu\overline{Q}_i^{(k)},$$

где $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{Q}_i^{(k)}$ — здесь применена теорема 19.15 (о среднем) для множества $\overline{Q}_i^{(k)}$.

До сих пор (x_i, y_i) была произвольной точкой множества $\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$. Возьмём теперь $x_i = x(\xi_i, \eta_i)$, $y_i = y(\xi_i, \eta_i)$. Тогда $\sigma_{R_k^*}$ совпадает с некоторой римановской суммой σ_{R_k} интеграла I_2. Так как $(\sigma_{R_k^*})_{I_1} = (\sigma_{R_k})_{I_2}$ при всех $k \geqslant k_0$, а $|R_k| \to 0$ и $|R_k^*| \to 0$, то в пределе получим равенство $I_1 = I_2$.

Вспомним, что множество T строилось в зависимости от $n = 1, 2, \ldots$, поэтому при всех n

$$\iint_{\Phi(\overline{T}_n)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\overline{T}_n} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|\,du\,dv. \quad (19.4)$$

Можно считать, что $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$, поэтому $\overline{T}_1 \subset \overline{T}_2 \subset \ldots \subset \overline{T}_n \subset \ldots \subset D$ (см. рис. 19.23) и $\Phi(\overline{T}_1) \subset \Phi(\overline{T}_2) \subset \ldots \subset \Phi(\overline{T}_n) \subset \ldots \subset G$ (см. рис. 19.24). Но $\mu(D \setminus \overline{T}_n) < \frac{1}{n}$, значит, $\mu D - \mu\overline{T}_n = \mu(D \setminus \overline{T}_n) \to 0$, и $\mu\overline{T}_n \to \mu D$.

Если $|J(u, v)| \leqslant C$ в области D, то из леммы 19.10 следует, что $\mu(\Phi(D \setminus \overline{T}_n)) \leqslant C \cdot \mu(D \setminus \overline{T}_n) \to 0$; так как $\mu(\Phi(D \setminus \overline{T}_n)) = \mu(G \setminus \Phi(\overline{T}_n)) = \mu G - \mu\Phi(\overline{T}_n)$, то $\mu\Phi(\overline{T}_n) \to \mu G$.

Так как все функции в интеграле справа в (19.4) ограничены на D, то по теореме 19.16 о непрерывности интеграла по множеству

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\overline{T}_n} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|\,du\,dv = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|\,du\,dv. \quad (19.5)$$

Аналогично, так как функция f ограничена на G, то по теореме 19.16

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Phi(\overline{T}_n)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_G f(x, y)\,dx\,dy. \quad (19.6)$$

Из (19.4), (19.5) и (19.6) следует, что

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|\,du\,dv. \quad ■$$

13. Простые гладкие поверхности. Касательная к плоскости, нормаль. Ориентация простой гладкой поверхности.

Определение 20.1. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2_{uv}$. Отображение F из $\overline{G}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, заданное векторным равенством $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, называется гладким в $\overline{G}$, если оно непрерывно дифференцируемо в $\overline{G}$, причём $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$ в $\overline{G}$ (т.е. векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны в $\overline{G}$).

Определение 20.2. Пусть отображение F биективно отображает замыкание $\overline{G}$ ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на множество $S \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$, причём это отображение является гладким в $\overline{G}$. Тогда множество точек S называется простой гладкой поверхностью (ПГП) в $\mathbb{R}^3$.

Определение 20.3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2_{st}$ и $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ — плоские ограниченные области. Рассмотрим отображение Φ, биективно отображающее D на G и ∂D на ∂G (т.е. в целом $\overline{D}$ на $\overline{G}$), действующее по формулам $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$, непрерывно дифференцируемое с ненулевым якобианом в $\overline{D}$. Если ПГП S задаётся отображением F, действующим по формулам $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, то отображение Φ называется допустимой заменой параметров (ДЗП) на S.

Определение 20.4. Пусть S — ПГП, заданная отображением F замыкания ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Тогда образ ∂G при отображении F называется краем поверхности S (обозначается δS), а оставшееся множество $S \setminus \delta S$ — внутренней областью поверхности S.

Лемма 20.1. *При допустимой замене параметров (см. обозначения определения 20.3) имеют место равенства:*
1) $\vec{r}_s = u_s\vec{r}_u + v_s\vec{r}_v$, $\vec{r}_t = u_t\vec{r}_u + v_t\vec{r}_v$, $(s,t) \in \overline{D}$, *$\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ рассматриваются в точке $(u(s,t), v(s,t))$;*
2) $[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = \dfrac{D(u,v)}{D(s,t)}[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, $(s,t) \in \overline{D}$, *$\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ рассматриваются в точке $(u(s,t), v(s,t))$.*

□ 1) Так как функции u и v дифференцируемы в D, а функции x, y, z дифференцируемы в G, то по теореме о дифференцировании сложной функции имеют место равенства:

$$x_s = x_u \cdot u_s + x_v \cdot v_s, \quad y_s = y_u \cdot u_s + y_v \cdot v_s,$$
$$z_s = z_u \cdot u_s + z_v \cdot v_s, \quad (s,t) \in D.$$

Эти три равенства можно записать в виде одного векторного $\vec{r}_s = u_s\vec{r}_u + v_s\vec{r}_v$, аналогично $\vec{r}_t = u_t\vec{r}_u + v_t\vec{r}_v$. В силу непрерывности всех этих функций, равенства сохраняются при $(s,t) \in \overline{D}$.

2) $[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = [u_s\vec{r}_u + v_s\vec{r}_v,\ u_t\vec{r}_u + v_t\vec{r}_v]$. Так как $[\vec{r}_u, \vec{r}_u] = [\vec{r}_v, \vec{r}_v] = \vec{0}$, а $[\vec{r}_v, \vec{r}_u] = -[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ (известные из аналитической геометрии свойства векторного произведения), то

$$[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = (u_s v_t - v_s u_t) \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{D(u,v)}{D(s,t)} \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v]. \quad \blacksquare$$

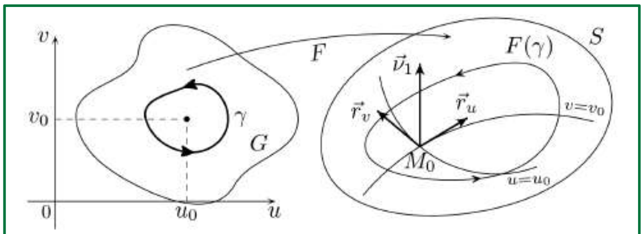

Рис. 20.9

Следствие 1. *Если на ПГП в параметризации u, v произвести ДЗП по формулам $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$, $(s,t) \in \overline{D}$ (см. обозначения определения 20.3), то в параметризации s, t поверхность также является ПГП.*

□ Так как функции x, y, z непрерывны в $\overline{G}$ и все их частные производные продолжаются до функций, непрерывных в $\overline{G}$ (определение 20.2 ПГП), а функции u и v непрерывны в $\overline{D}$ и все их частные производные продолжаются до функций, непрерывных в $\overline{D}$, то сложные функции $x(u(s,t), v(s,t))$, $y(u(s,t), v(s,t))$, $z(u(s,t), v(s,t))$ непрерывны в $\overline{D}$ и их частные производные, определяемые по первой части леммы 20.1, продолжаются до функций, непрерывных в $\overline{D}$. Так как $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$, $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} \neq 0$ в $\overline{G}$ и $\overline{D}$ соответственно, то по второй части леммы 20.1 также $[\vec{r}_s, \vec{r}_t] \neq \vec{0}$ в $\overline{D}$, т.е. поверхность S является ПГП в параметризации s, t. ■

Определение 20.5. Плоскость, проходящая через точку M_0, лежащую на ПГП S, с координатами $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$, $z_0 = z(u_0,v_0)$ (см. обозначения определения 20.2) с парой направляющих векторов $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0,v_0)$, называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0. Два вектора $\vec{\nu}_1 = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$ и $\vec{\nu}_2 = -\vec{\nu}_1$ (векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ рассматриваются при $u = u_0$, $v = v_0$) называются векторами единичной нормали к ПГП S в точке M_0.

Определение 20.9. ПГП S, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2_{uv}$, называется ориентированной, если задан вектор единичной нормали как непрерывная вектор-функция на $\overline{G}$ (т.е. сделан выбор знака в равенстве $\vec{\nu} = \pm\dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$; геометрически выбор этого знака соответствует выбору одной из двух сторон ПГП).

Рассмотрим другой подход к определению ориентации ПГП. Пусть плоскость $\mathbb{R}^2_{uv}$ «естественно положительно ориентирована», т.е. кратчайший поворот от базисного вектора $\vec{e}_u$ к базисному вектору $\vec{e}_v$ происходит на $90°$ против часовой стрелки. Напомним, что простая замкнутая гладкая кривая γ в области G считается положительно ориентированной, если обход её осуществляется против часовой стрелки. Пусть ПГП S — образ $\overline{G}$ при отображении F; $S = F(\overline{G})$. Как было доказано в § 1 этой главы, образ $F(\gamma)$ кривой γ также является гладкой кривой, которая является простой замкнутой в силу биективности отображения F.

Пусть точка (u_0,v_0) лежит внутри кривой γ. Рассмотрим соответствующую точку M_0 на поверхности и координатные кривые $u = u_0$, $v = v_0$ (см. рис. 20.9).

Из конца вектора $\vec{\nu}_1$ кратчайший поворот от $\vec{r}_u$ к $\vec{r}_v$ виден против часовой стрелки, поэтому обход $F(\gamma)$ виден также против часовой стрелки. Итак, выбор нормали $\vec{\nu}_1$ (т.е. знака «+» в формуле $\vec{\nu} = \pm\dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$) соответствует выбору стороны поверхности, на которой направление обхода образа простой замкнутой гладкой кривой то же, что и направление обхода самой кривой в области G; выбор знака «−» соответствует изменению направления обхода образа простой замкнутой кривой по сравнению с самой кривой (строгих формулировок и рассуждений мы здесь не приводим).

14. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Независимость определения от ДЗП.

Определение 20.7. Пусть S — ПГП, заданная уравнениями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ (в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$), где G — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{uv}$; f — непрерывная функция от x, y, z на множестве S. Тогда поверхностным интегралом первого рода $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ называется двойной интеграл

$$\iint_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv. \tag{20.1}$$

Корректность определения 20.7. Пусть отображение Φ, задающее ДЗП на ПГП S, удовлетворяет также условиям теоремы 19.21′ о замене переменной в двойном интеграле (дважды непрерывно дифференцируемо в D с ограниченным якобианом, причём Φ — правильное отображение в D, а Φ^{-1} — правильное отображение в области G); здесь применяются обозначения определений 20.3 и 20.7. Докажем, что значение $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ не изменится при ДЗП на поверхности S (области D и G считаем измеримыми).

☐ По теореме 19.21′

$$\iint_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv =$$
$$= \iint_D f(x(u(s,t),v(s,t)), y(u(s,t),v(s,t)), z(u(s,t),v(s,t)))\times$$
$$\times|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \cdot \left|\frac{D(u,v)}{D(s,t)}\right| ds\,dt =$$
$$= \iint_D f(x(u(s,t),v(s,t)), y(u(s,t),v(s,t)), z(u(s,t),v(s,t)))\times$$
$$\times|[\vec{r}_s, \vec{r}_t]|\,ds\,dt$$

(здесь использована вторая часть леммы 20.1). Поэтому значение $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ не изменится после ДЗП $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$. ■

Определение 20.8. Площадью ПГП S, полученной при отображении замыкания измеримой области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, называется

$$\iint_S dS = \iint_G |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv.$$

Определение 20.10. Пусть S — ориентированная ПГП, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, где G — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{uv}$; $\vec{\nu}$ — вектор единичной нормали к S, соответствующий её данной ориентации; $\vec{a} = (P,Q,R)^T$ — непрерывная вектор-функция от переменных x, y, z на множестве S. Тогда поверхностным интегралом второго рода $\iint_S (\vec{a}, d\vec{S})$ называется поверхностный интеграл первого рода $\iint_S (\vec{a}, \vec{\nu})\,dS$.

Так как $\vec{\nu} = \pm\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$, где знак определяется выбором стороны поверхности, а $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \ne \vec{0}$ в точке S, то вектор-функция $\vec{\nu}$, а вместе с ней и скалярная функция $(\vec{a}, \vec{\nu})$, непрерывна на множестве S. Согласно определению 20.7 поверхностного интеграла первого рода,

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_S \left(\vec{a},\ \pm\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\right) dS =$$
$$= \pm\iint_G \left(\vec{a},\ \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\right) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv = \pm\iint_G (\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\,du\,dv.$$

Для поверхностного интеграла второго рода принят также координатный символ

$$\iint_S (P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy);$$

таким образом, $d\vec{S}$ — это символический вектор $(dy\,dz,\ dz\,dx,\ dx\,dy)^T$, причём порядок умножения символических дифференциалов существенен: именно $dz\,dx$, а не $dx\,dz$, и т.д. Смысл этого станет понятен чуть позже. Преобразуя выражение $\iint_G (\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\,du\,dv$ по формуле, выражающей смешанное произведение через координаты векторов в правом ортонормированном базисе, получим

$$\iint_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\,dv =$$
$$= \iint_G \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) du\,dv.$$

Здесь P, Q, R — сложные функции ($P(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ и т.д.). Таким образом,

$$\iint_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) =$$
$$= \pm\iint_G \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) du\,dv,$$

а в якобиане порядок функций существенен; это — одно из объяснений некоммутативности формального умножения символических дифференциалов. Напомним, что знак «+» или «−» в этой формуле определяется знаком в формуле $\vec{\nu} = \pm\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$, соответствующим выбранной стороне поверхности. При смене стороны поверхности ($\vec{\nu} \to -\vec{\nu}$) поверхностный интеграл второго рода изменяет знак.

15. Теорема Остроградского-Гаусса.

Теорема 21.1 (формула Остроградского–Гаусса). *Пусть G — каноническая область в пространстве $\mathbb{R}^3$, векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = (P,Q,R)^T$ непрерывно дифференцируемо в $\overline{G}$. Тогда*

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} (\vec{a}, d\vec{S}), \quad \text{т.е.}$$

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\ = \iint_{\partial G} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

(граница области ориентирована внешней нормалью).

Поверхностный интеграл второго рода в теории поля называют потоком векторного поля через выбранную сторону поверхности. Таким образом, поток непрерывно дифференцируемого векторного поля через внешнюю сторону границы канонической области в $\mathbb{R}^3$ равен тройному интегралу от дивергенции поля по всей области.

☐ По теореме о сведении кратного интеграла к повторному, применённой к $\overline{G}$ как к простому множеству относительно оси z,

$$\iiint_{\overline{G}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\overline{G}_1} dx\,dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz.$$

Тройной интеграл существует по теореме 19.5 (в более общем случае по теореме 19.9). Так как граница области G состоит из графиков непрерывных функций $z = \varphi(x,y)$ и $z = \psi(x,y)$ на измеримом компакте $\overline{G}_1$, а также части цилиндрической поверхности, то $\mu\partial G = 0$. Тройной интеграл по множеству G такой же, как и по множеству $\overline{G}$.

При фиксированных $(x,y) \in G_1$ функция $R(x,y,z)$ непрерывна по z на отрезке $[\psi(x,y);\varphi(x,y)]$, непрерывно дифференцируема на интервале $(\psi(x,y);\varphi(x,y))$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ имеет конечные пределы в концах интервала. С учётом теоремы 4.16 эта функция непрерывно дифференцируема на $[\psi(x,y);\varphi(x,y)]$, и по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz = R(x,y,\varphi(x,y)) - R(x,y,\psi(x,y)).$$

Применяя сведение тройного интеграла к повторному, имеем

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\overline{G}_1} dx\,dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz = \\ = \iint_{\overline{G}_1} R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy - \iint_{\overline{G}_1} R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy = \\ = \iint_{\Gamma_\varphi\uparrow} R(x,y,z)\,dx\,dy - \iint_{\Gamma_\psi\uparrow} R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

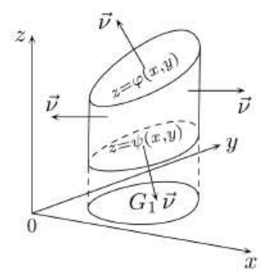

Рис. 21.1

где последние два поверхностных интеграла второго рода берутся по верхним сторонам графиков соответствующих непрерывных функций на компакте $\overline{G}_1$ (см. определение 20.17). Внешняя сторона ∂G соответствует верхней стороне графика функции φ и нижней стороне графика функции ψ, поэтому в последнее выражение интегралы по внешним сторонам соответствующих кусков ∂G войдут со знаком «+» (см. рис. 21.1).

Остался нерассмотренным интеграл $\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy$, где S — часть цилиндрической поверхности, входящая в ∂G (см. рис. 21.1). Но для этого интеграла соответствующая векторфункция $\vec{a} = (0,0,R)^T$, а вектор $\vec{\nu}$ нормали к S ортогонален оси z, поэтому $(\vec{a},\vec{\nu}) = 0$, и $\iint_S R\,dx\,dy = \iint_S (\vec{a},\vec{\nu})dS = 0$. Окончательно имеем

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

где поверхностный интеграл второго рода берётся по внешней стороне ∂G. Аналогично, рассматривая $\overline{G}$ как простое множество относительно осей x и y, получим

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} P(x,y,z)\,dy\,dz,$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} Q(x,y,z)\,dz\,dx.$$

Складывая полученные три равенства, придём к нужной формуле. ■

16. Теорема Стокса.

Теорема 21.3 (формула Стокса). *Пусть*

1°. *Вектор-функция* $\vec{a} = (P, Q, R)^T$ *непрерывно дифференцируема в области* $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$;

2°. S — *дважды непрерывно дифференцируемая ПГП, заданная уравнением* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, *где к области* D *применима формула Грина, а граница* D — *простая замкнутая кусочно-гладкая кривая* γ, *причём* $S \subset G$;

3°. *ориентация* S *согласована с ориентацией её края* Γ.

Тогда $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S})$.

З а м е ч а н и е. Под дважды непрерывной дифференцируемостью S понимается дважды непрерывная дифференцируемость вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ в $\overline{D}$.

□ Параметризуем кривую γ: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, так, что при возрастании t от α к β кривая γ обходится в положительном направлении в плоскости $\mathbb{R}^2_{uv}$. Функции u и v непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$ и отрезок этот разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых они непрерывно дифференцируемы. Так как Γ является образом γ при биективном отображении вектор-функцией $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, то Γ также параметризуется параметром $t \in [\alpha, \beta]$:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)).$$

При этом, как отмечалось в § 3 главы XX, со стороны поверхности, ориентированной нормалью $\vec{\nu} = +\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$, обход Γ, соответствующий возрастанию t, также осуществляется против часовой стрелки (т.е. эта ориентация S согласована с ориентацией Γ, соответствующей возрастанию t). Из равенства $\vec{r}'(t) = u'(t) \cdot \vec{r}_u + v'(t)\vec{r}_v$ следует, что кривая Γ является гладкой на всех промежутках изменения t, на которых является гладкой кривая γ (см. конец § 1 главы XX), и, следовательно, в целом, в силу биективности отображения, Γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx = \int_\alpha^\beta P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))x'(t)\, dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \times (x_u \cdot u'(t) + x_v \cdot v'(t))\, dt = \int_\gamma (P \cdot x_u\, du + P \cdot x_v\, dv)$$

(при преобразовании криволинейного интеграла второго рода в $\mathbb{R}^3_{xyz}$ в интеграл по отрезку и затем при преобразовании интеграла по отрезку в криволинейный интеграл второго рода в $\mathbb{R}^2_{uv}$ учтено, что направление обхода кривой в обоих случаях соответствует возрастанию t).

Последний интеграл по формуле Грина преобразуем в двойной интеграл по области D, получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P \frac{\partial x}{\partial u}\right) \right) du\, dv.$$

Здесь использовано то, что функции x_u и x_v непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ в силу дважды непрерывной дифференцируемости $x(u, v)$. Преобразуем этот двойной интеграл:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) du\, dv.$$

Смешанные частные производные, взятые в разном порядке, равны (это следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $x(u, v)$ в D). Преобразуя $\frac{\partial P}{\partial u}$ и $\frac{\partial P}{\partial v}$ как частные производные сложных функций, приведём интеграл к виду

$$\iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right)\frac{\partial x}{\partial u} \right) du\, dv =$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) du\, dv = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \right)$$

(здесь использованы формула для вычисления поверхностного интеграла второго рода из § 4 главы XX и соответствие данной ориентации S знаку «+» в формуле для $\vec{\nu}$).

Аналогично

$$\int_\Gamma Q(x, y, z)\, dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz \right),$$
$$\int_\Gamma R(x, y, z)\, dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dz\, dx \right).$$

Складывая полученные три равенства, имеем

$$\int_\Gamma (P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy \right),$$

т.е.

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S}). \qquad \blacksquare$$

17. Потенциальные векторные поля. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути.

Определение 21.5. Непрерывно дифференцируемая скалярная функция u называется потенциалом непрерывного векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)^T$ в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ (т.е. $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$). Аналогичное определение даётся для области $G \subset \mathbb{R}^2$; там $\vec{a} = (P, Q)^T$, $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Определение 21.6. Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным в области $G \subset \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$), если оно имеет потенциал в этой области.

Теорема 21.5. *Пусть вектор-функция $\vec{a}$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$). Тогда следующие 3 утверждения равносильны.*

1°. *$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$.*

2°. *$\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ по кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset G$ зависит только от начальной и конечной точек кривой, но не зависит от самой кривой.*

3°. *Векторное поле $\vec{a}$ имеет потенциал.*

При выполнении каждого из этих условий $\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$, где A — начальная, B — конечная точка кривой, u — потенциал.

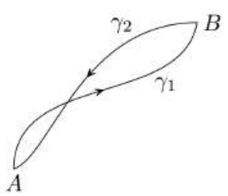

Рис. 21.3

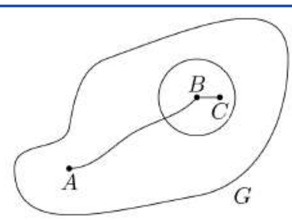

Рис. 21.4

□ Рассмотрим случай $\mathbb{R}^3$ (случай $\mathbb{R}^2$ разбирается аналогично).

$1° \Rightarrow 2°$ (см. рис. 21.3). Рассмотрим две кусочно-гладкие кривые γ_1 и γ_2 с общим началом A и концом B. Они образуют замкнутую ориентированную кусочно-гладкую кривую Γ (сначала из точки A движемся к точке B по кривой γ_1, затем обратно из B в A по кривой γ_2). Тогда

$$0 = \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{A\gamma_1 B} + \int_{B\gamma_2 A} = \int_{A\gamma_1 B} - \int_{A\gamma_2 B}, \quad \text{т.е.} \quad \int_{A\gamma_1 B} = \int_{A\gamma_2 B}$$

(интегралы по кривым γ_1 и γ_2 с общими началом A и концом B совпадают). Отметим, что кривая Γ может иметь точки самопересечения, т.е. не обязана являться простой замкнутой.

$2° \Rightarrow 3°$. Пусть $A = (x_0, y_0, z_0) \in G$ — фиксированная точка, $B = (x, y, z) \in G$ — произвольная точка. Так как $\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ зависит только от начальной и конечной точек кривой, то выражение $u(x, y, z) = \int_A^B (\vec{a}, d\vec{r})$ определяет однозначную функцию точки B, не зависящую от кусочно-гладкой кривой γ с началом в A и концом в B. Докажем, что u — потенциал векторного поля $\vec{a}$.

Так как G — область, то точка B входит в G вместе с некоторой окрестностью, и для достаточно малых τ точка $C(x + \tau, y, z)$ и весь отрезок BC целиком принадлежат G (см. рис. 21.4). Тогда

$$u(x+\tau, y, z) - u(x, y, z) = \int_A^C (\vec{a}, d\vec{r}) - \int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_B^C (\vec{a}, d\vec{r}) =$$
$$= \int_B^C P(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi + Q(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta + R(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta.$$

Этот интеграл не зависит от кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки B и C, его можно брать по отрезку BC. Параметризуем отрезок BC: $\xi = t$, $\eta = y$, $\zeta = z$, $t \in [x; x+\tau]$ (x, y, z — фиксированные числа, координаты точки B; t — параметр). Если $\tau < 0$, то отрезок BC всё равно пробегается от B к C; в этом случае ориентация отрезка соответствует убыванию t. Тогда

$$u(x+\tau, y, z) - u(x, y, z) = \int_x^{x+\tau} P(t, y, z)\, dt = P(\tau_0, y, z) \cdot \tau,$$

где $\tau_0 = \tau_0(\tau) \in [x; x+\tau]$; здесь применена теорема о среднем для определённого интеграла по отрезку.

Так как $\lim\limits_{\tau\to 0} \tau_0(\tau) = x$, а функция P непрерывна по первому аргументу, то $\lim\limits_{\tau\to 0} P(\tau_0, y, z) = P(x, y, z)$ и существует $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = \lim\limits_{\tau\to 0} \frac{u(x+\tau, y, z) - u(x, y, z)}{\tau} = \lim\limits_{\tau\to 0} P(\tau_0, y, z) = P(x, y, z)$. Аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. Значит, функция u непрерывно дифференцируема в области G и является потенциалом поля $\vec{a}$.

$3° \Rightarrow 1°$. Пусть $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ в области G; γ — произвольная кусочно-гладкая кривая в G, параметризуемая параметром t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$; $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ — начало, $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ — конец кривой. Тогда

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t) \right) dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} \left(u(x(t), y(t), z(t)) \right) dt =$$
$$= u(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - u(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = u(B) - u(A).$$

Для замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$ начало и конец совпадают, т.е. $A = B$ и $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$.

Попутно доказано, что при наличии потенциала для кривой γ с началом A и концом B интеграл равен $u(B) - u(A)$. Равенство $\int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$ является аналогом формулы Ньютона–Лейбница для потенциальных полей. ■

18. Геометрическое определение ротора. Связь потенциальность и безвихревости векторного поля.

Теорема 21.4 (геометрический смысл проекции ротора на произвольное направление). *Пусть вектор-функция $\vec{a}(x,y,z)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$; $\vec{\nu}$ — произвольный единичный вектор. Тогда*
$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_{\Gamma_k}(\vec{a}, d\vec{r})}{\mu S_k},$$
где Γ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность окружностей, лежащих в плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{\nu}$, центры которых — точка M_0, а радиусы стремятся к нулю; μS_k — площади кругов S_k, ограниченных этими окружностями; направление обхода Γ_k из конца вектора $\vec{\nu}$ видно против часовой стрелки.

□ Применим формулу Стокса к кривой Γ_k и поверхности S_k:
$$\int_{\Gamma_k}(\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{S_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_{S_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\, dS$$

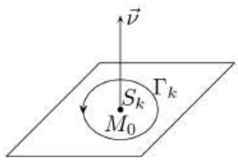

Рис. 21.2

(ориентации Γ_k и S_k такие, как на рис. 21.2, поверхностный интеграл в формуле Стокса приведён к интегралу первого рода). Здесь S_k — круг как ПГП, являющаяся частью плоскости; если внутренность этого круга рассмотреть как область $G_k \subset \mathbb{R}^2_{uv}$, то ПГП S_k может быть параметризована так:
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}_1 u + \vec{e}_2 v, \quad (u,v) \in \overline{G}_k,$$
где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2_{uv}$. Тогда поверхностный интеграл первого рода приводится к двойному интегралу
$$\iint_{\overline{G}_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu}) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv = \iint_{\overline{G}_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\,du\,dv,$$
так как $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = |[\vec{e}_1, \vec{e}_2]| = 1$. В последнем интеграле подынтегральное выражение — функция от u и v. По теореме о среднем 19.15 этот интеграл равен
$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) \cdot \iint_{\overline{G}_k} du\,dv = \\ = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) \cdot \mu\overline{G}_k = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) \cdot \mu S_k,$$
где $M_k \in \overline{G}_k$ или, если M_k рассматривать как точку поверхности S_k, $M_k \in S_k$. Так $\rho(M_k, M_0) \to 0$ (это расстояние не превосходит радиуса круга S_k), то $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M_0$. В силу непрерывности функции $(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})$ в точке M_0
$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_0) = \lim_{k\to\infty}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{\int_{\Gamma_k}(\vec{a}, d\vec{r})}{\mu S_k}. \quad \blacksquare$$

Теорема 21.7. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = (P,Q)^T$ потенциально в области $G \subset \mathbb{R}^2$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ в области G. Обратно, если в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = (P,Q)^T$ выполняется равенство $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, то поле $\vec{a}$ потенциально в G.*

□ Если поле потенциально, то найдётся непрерывно дифференцируемая функция u такая, что $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ (так как P и Q — непрерывно дифференцируемые функции, то u — дважды непрерывно дифференцируемая функция в G). Тогда
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Обратно, пусть $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области G, а Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в G. В силу односвязности G кривая Γ является границей ограниченного открытого множества $D \subset G$. По формуле Грина (мы приняли без доказательства, что формула Грина справедлива в этом общем случае)
$$\int_\Gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$
(граница считается положительно ориентированной). Так как $\int_\Gamma(\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой в G, то поле $\vec{a}$ потенциально в области G. ■

Условие односвязности области G во второй части теоремы 21.7 существенно. В неодносвязной области условие $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ не является достаточным для потенциальности поля.

Теорема 21.8. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ потенциально в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в области G. Обратно, если в поверхностно односвязной области $G \subset \mathbb{R}^3$ для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ выполняется равенство $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, то поле $\vec{a}$ потенциально в G.*

□ Если поле потенциально, то найдётся непрерывно дифференцируемая вектор-функция u такая, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ (так как $\vec{a}$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, то функция u дважды непрерывно дифференцируема в G). Тогда $\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}$ в G (свойство 6° в § 1 этой главы).

Обратно, пусть $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ в поверхностно односвязной области G, а Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в G. В силу поверхностной односвязности G кривая Γ является краем КГП $S \subset G$. Будем считать, что можно применить формулу Стокса (то, что поверхность S разбивается на дважды непрерывно дифференцируемые ПГП, в теореме Стокса несущественно, но очень упрощает доказательство). Из общего варианта формулы Грина, принятого нами без доказательства, следует, что эта формула применима к плоским областям, образами замыканий которых при отображении на S являются ПГП, входящие в S. Тогда по теореме Стокса
$$\int_\Gamma(\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S(\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S}) = 0.$$
Так как $\int_\Gamma(\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой в области G, то поле $\vec{a}$ потенциально в G. ■

19. Геометрическое определение дивергенции. Соленоидальные векторные поля.

Теорема 21.2 (геометрический смысл дивергенции). *Пусть вектор-функция $\vec{a}(x,y,z)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S})}{\mu G_k},$$

где $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset \ldots \ni M_0$ — последовательность канонических областей таких, что вектор-функция $\vec{a}$ непрерывно дифференцируема в $\overline{G}_1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} G_k = 0$ (например, последовательность окрестностей точки M_0, радиусы которых стремятся к нулю); интегралы берутся по внешней стороне ∂G_k.

□ По теореме Остроградского–Гаусса

$$\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S}) = \iiint_{G_k} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz \equiv \iiint_{\overline{G}_k} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$

По теореме 19.15 о среднем последний интеграл равен

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_k)\cdot\iiint_{\overline{G}_k} dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\vec{a}(M_k)\cdot\mu G_k,$$

где $M_k \in \overline{G}_k$ (здесь использовано то, что функция $\operatorname{div}\vec{a}$ непрерывна в замыкании измеримой области G_k).

Легко показать, что всегда $\operatorname{diam}\overline{X} = \operatorname{diam} X$, где $X \subset \mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть $\operatorname{diam} X = d$, и точки $A, B \in \overline{X}$. Тогда существуют последовательности точек $A_k \in X$, $B_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$. Значит,

$$\forall\varepsilon > 0 \to \exists k_0 : \forall k \geqslant k_0 \longrightarrow \rho(A_k, A) < \varepsilon, \quad \rho(B_k, B) < \varepsilon;$$

$$\rho(A,B) \leqslant \rho(A,A_k) + \rho(A_k,B_k) + \rho(B_k,B) < \operatorname{diam} X + 2\varepsilon = d + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\rho(A,B) \leqslant d$; следовательно, $\operatorname{diam}\overline{X} \leqslant d$. Но $\operatorname{diam}\overline{X} \geqslant \operatorname{diam} X = d$, значит, $\operatorname{diam}\overline{X} = d$.

Возвращаясь к доказательству теоремы 21.2, имеем

$$\rho(M_k, M_0) \leqslant \operatorname{diam}\overline{G}_k = \operatorname{diam} G_k \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

и $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M_0$. В силу непрерывности функции $\operatorname{div}\vec{a}$ в точке M_0,

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{k\to\infty}\operatorname{div}\vec{a}(M_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S})}{\mu G_k}. \qquad ■$$

Определение 21.12. Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если поток этого поля через любую замкнутую КГП $S \subset G$ равен нулю.

Теорема 21.9. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ соленоидально в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в области G. Обратно, если в объёмно односвязной области $G \subset \mathbb{R}^3$ для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ выполняется равенство $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то поле $\vec{a}$ соленоидально в G.*

□ Если точка $M_0 \in G$, то по теореме 21.2 о геометрическом смысле дивергенции

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{k\to\infty}\frac{\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S})}{\mu G_k},$$

где в качестве G_k можно взять последовательность окрестностей точки M_0, радиусы которых стремятся к нулю. Так как все интегралы в этом равенстве равны нулю при $G_k \subset G$ (т.е. при $k \geqslant k_0$), то $\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = 0$, а M_0 — произвольная точка G. Первая часть теоремы доказана.

Обратно, пусть $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в объёмно односвязной области G, а S — замкнутая КГП в G. В силу объёмной односвязности G поверхность S является границей ограниченного открытого множества $D \subset G$. По формуле Остроградского–Гаусса (мы приняли без доказательства, что формула Остроградского–Гаусса справедлива в этом общем случае)

$$\iint_S(\vec{a}, d\vec{S}) = \iiint_D \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = 0$$

(поверхность S ориентирована внешней нормалью). Так как $\iint_S(\vec{a}, d\vec{S}) = 0$ по любой замкнутой КГП в G, то поле $\vec{a}$ соленоидально в области G. ■