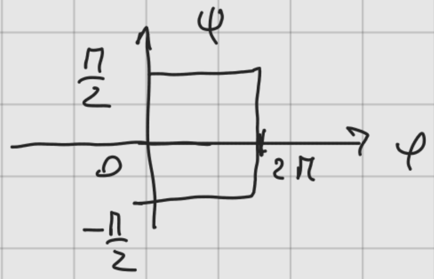
Опр. Пусть в трёхмерном евкл. пр-ве задана гладкая пов-ть $S=\{\bar r(u,v):(u,v)\in\bar D\}$, где D - плоская, измеримая обл-ть. Пусть на S опр-на числовая ф-ия f. Тогда

ПИ I рода это

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS := \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|\bar r'_u\times r'_v|\,du\,dv$$

обозначение

$$\begin{cases} x=\cos\varphi\,\cos\psi \\ y=\sin\varphi\,\cos\psi \\ z=\sin\psi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi\in[0;2\pi] \\ \psi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \end{array}$$



Св-ва:

1. Для существования интеграла $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS \Longleftrightarrow$, чтобы f была инт-ма на D

2. ПИ I рода не зависит от смены пара-

метризации (f - непр. и ог.)

Док-во: В главе 21 была формула:

$$|\bar\rho'_{u_1}\times\bar\rho'_{v_1}| = |\bar r'_u\times\bar r'_v|\cdot\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\right|,\ \text{где}$$

$$S=\{\bar\rho(u_1,v_1),\ \text{где}\ (u_1,v_1)\in\bar D_1\}=\{\bar r(u,v);(u,v)\in\bar D\}$$

$$\begin{cases} u=u(u_1,v_1)\\ v=v(u_1,v_1)\end{cases} \Bigg| \text{— непр. диф}, \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\right|\neq 0, \text{ взаимно-однозначн.}$$

$$\iint\limits_{D_1} f(\overset{x,y,z}{\bar\rho(u_1,v_1)})\cdot|\bar\rho_{u_1}\times\bar\rho_{v_1}|\,du_1dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f(\bar\rho(u_1,v_1))\cdot|\bar r'_u\times r'_v|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\right|du_1dv_1$$

$$\underset{\uparrow}{=} \iint\limits_{D} f(\bar r(u,v))|\bar r'_u\times r'_v|\,du\,dv$$

Th. о замене переменных в $\iint$

Опр. Площадь гладкой пов-ти $S=\{\bar r(u,v): (u,v)\in\bar D\}$ это число $\mu_S := \iint\limits_S 1\cdot dS$