Th. (Формула Стокса)

Пусть на обл-ти G задано непр. диф-е векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$. Пусть пов-ть $S \subset G$, где $S = \{\bar{r}(u, v) ; (u, v) \in \bar{D}\}$, – гладкий кусок

$\bar{r}$ - дважды непр. диф-ма на $\bar{D}$, D - плоская, ограниченная обл-ть с границей ∂D, где ∂D – простой кусочно-гладкий контур, ориентация S и ∂D - согласованы. Тогда

$$\boxed{\iint\limits_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{n})\, dS = \int\limits_{\partial S} (\bar{a}, d\bar{r})}$$

Док-во:

1) $$\bar{n} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \frac{1}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} =$$

$$= \bar{i}\, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{1}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} + \bar{j} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \frac{1}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} + \bar{k}\, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{1}{|\ \ |}$$

$$=: \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$$ (Так назвали)

2) Будем доказывать Стокса для случая $\bar{a} = (P, 0, 0)$

Рассмотрим $\int\limits_{\partial S} P\,dx = \int\limits_a^b P\cdot(x'_u u'_t + x'_v v'_t)\,dt =$

$x(u(t), v(t))$

$x'_t = x'_u u'_t + x'_v v'_t$

$$= \int\limits_{\partial D} P x'_u\,du + P x'_v\,dv \underset{\text{Грина для } D}{=}$$

$$= \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial u}(P x'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P x'_u)\;du\,dv$$

непр $\Rightarrow$ равны

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial u} x'_v + \cancel{P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}} - \frac{\partial P}{\partial v} x'_u - \cancel{P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}}\right) du\,dv$$

$$= \iint\limits_D (\cancel{P'_x x'_u} + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v - (\cancel{P'_x x'_v} + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u\,du\,dv$$

$$= \iint\limits_D \left(P'_z \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - P'_y \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\,dv \overset{(*)}{=}$$

$$= \iint_S \left(P'_z \cos\beta - P'_y \cos\gamma\right) dS = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n})\, dS$$

- $$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z}\bar{j} - \bar{k}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$(\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n}) = P'_z \cos\beta - P'_y \cos\gamma$$

- $$(*):\ \iint_S (\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n})\, dS = \iint_D \begin{vmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\, dv$$