Th 1. Касательная пл-ть и нормаль к гладкой пов-ти S в точке $\bar{r}_0 \in S$ не зависит от параметризации S.

Док-во: 1) Пусть $S = \{\bar{r}(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$, $\overset{\in \mathbb{R}^2}{D}$-обл-ть, где $\bar{r}(u, v)$ — непр. диф-ма, $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq 0$ (гладкая)

$S = \{\bar{\rho}(u_1, v_1) : (u_1, v_1) \in \bar{D}_1\}$, $\overset{\subset \mathbb{R}^2}{D_1}$ - обл-ть, где $\bar{\rho}$ → непр. диф., $\bar{\rho}'_u \times \bar{\rho}'_v \neq \bar{0}$

2) Тогда $F = \begin{cases} u = \varphi(u_1, v_1) \\ v = \psi(u_1, v_1) \end{cases} : \bar{D}_1 \leftrightarrow \bar{D}$

F - взаимнооднозначно, непр. диф-мо на $\bar{D}_1$,

$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \neq 0$ на D_1. $\bar{\rho}(u_1, v_1) = r(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1))$

3) $\begin{cases} \rho'_{u_1} = \bar{r}'_u \varphi'_{u_1} + r'_v \psi'_{u_1} \\ \rho'_{v_1} = r'_u \varphi'_{v_1} + r'_v \psi'_{v_1} \end{cases}$

$r'_u \times r'_u = r'_v \times r'_v = 0$

4) $[\rho'_{u_1} \times \rho'_{v_1}] = [r'_u \varphi'_{u_1} + r'_v \psi'_{u_1}, r'_u \varphi'_{v_1} + r'_v \psi'_{v_1}] \overset{*}{=}$

$$= [r'_u \times r'_v]\varphi'_{u_1}\psi'_{v_1} + [r'_v \times r'_u]\psi'_{u_1}\varphi'_{v_1}$$

$$= [r'_u \times r'_v](\varphi'_{u_1}\psi'_{v_1} - \psi'_{u_1}\varphi'_{v_1}) =$$

$$= [r'_u \times r'_v] \cdot \underbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}}^{\neq 0} \quad (*)$$

Нормаль не поменяла направление,

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \neq 0$ (т.е. единичная нормаль не $\frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$ остаётся $\parallel$ сама себе)

Плоскость тоже

Опр. (ориентация пов-ти) Пусть S – гладкая, параметрически заданная пов-ть, тогда единичный нормальный вектор $\overline{n}$

$\overline{n} = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$ – непрерывная ф-ия на $\overline{D}$

(или и $(-\bar{n})$). Вектор-ф-ии $\bar{n}$ и $-\bar{n}$ назы-
вают непрерывным полем нормалей
пов-ти S. Всякое непрерывное поле
единичных нормалей назовём ориентацией
S.