Опр. Фун-я вида $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$ — тригонометрический многочлен степени n.

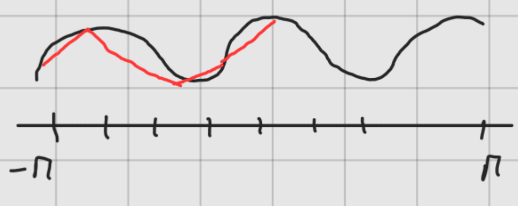
$(A_n^2 + B_n^2 \neq 0)$

Th 1. (Вейерштрасса)

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая и непр. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригоном. многочлен $T: \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$

Док-во:

1) Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{J}$ — разбиение отрезка $[-\pi; \pi]$. $x_j = -\pi + j\frac{2\pi}{J}$

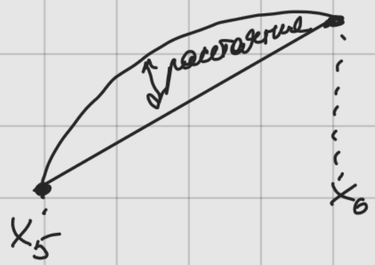


2) Построим ломаную, соединив точки $(x_j, f(x_j))$ отрезками. Λ_J — 2π-период. ф-ия, которая является продолжением ломанной на всё $\mathbb{R}$. Заметим, что Λ_J — непр., кусочно непр. диф.

3) f – непр. $\Rightarrow$ равномерно непр. на каждом отрезке

Значит при $|x'-x''| < \frac{2\pi}{J}$ $\hookrightarrow$ $|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ (J такими выбрали)

$$\Rightarrow \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-\Lambda_J(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$



4) Λ_J – 2π-период, непр., кусочно непр. дифф. $\Rightarrow$ её РФ

сх. к ней равномерно.

Т.е. $\max_{x\in\mathbb{R}} |\Lambda_J - S_n(x, \Lambda_J)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

кинуть ноль

5) из (1) и (2) $\Rightarrow$ $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x, \Lambda_J)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow T = S_n(x, \Lambda_J)$