Непр-ть, дифф-ть, инт-ть

Th 1. (Непр-ть несоб. инт-ла по параметру)

Пусть $f(x,y)$ – непр. на $[a,b)\times[y_1,y_2]$ и

$\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ – сх. равномерно на $[y_1,y_2]$. Тогда

$J(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ – непр. на $[y_1,y_2]$

Док-во:

1) $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ – сх. равномерно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists b'\in[a,b): \forall y\in[y_1,y_2] \hookrightarrow \left|\int\limits_{b'}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}$

2) Рассмотрим $\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx$ – собственный интеграл;

Возьмём $y_0\in[y_1,y_2]$

По условию $f(x,y)$ – непр $\Rightarrow \int\limits^{b'} f(x,y)\,dx$ – непр по условию $f(x,y)$ непр. $\int\limits_a f(x,y)\,dx$ непр.

(в том числе в т. y_0

Опр-е непр-ти:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \begin{cases} \forall y \in [y_1, y_2] \\ |y - y_0| < \delta \end{cases} \hookrightarrow \left| \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

3) Обозначим $J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$

$$|J(y) - J(y_0)| = \left| \int\limits_a^b f(x,y)\,dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx \right| =$$

$$= \left| \underline{\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx} + \int\limits_{b'}^{b} f(x,y)\,dx - \underline{\int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx} - \int\limits_{b'}^{b} f(x,y_0)\,dx \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_a^{b'} (f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx \right| + \left| \int\limits_{b'}^{b} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int\limits_{b'}^{b} f(x,y_0)\,dx \right|$$

$$< \underset{(2)}{\frac{\varepsilon}{2}} + \underset{(1)}{\frac{\varepsilon}{4}} + \underset{(1)}{\frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon \Rightarrow J(y) \text{ - непр. } \forall y_0 \in [y_1, y_2]$$

$$\int\limits_a^b f(x,y) \text{ - сх. р.} \Rightarrow \lim_{b_1 \to b - 0} \underbrace{\sup_y \left| \int\limits_{b_1}^{b} f(x,y)\,dx \right|}_{g(b_1)} = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in [a, b) : \forall b_1 \in [b', b) \hookrightarrow \sup_{y} \left| \int_{b'}^{b_1} f(x,y)\,dx \right| \le \varepsilon$$

Th 2. (Интегрирование по параметру)

Пусть $f(x,y)$ – непр. на $[a, b) \times [y_1, y_2]$ и $\int_a^b f(x,y)\,dx$ – сх. равномерно на $[y_1, y_2]$. Тогда

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Док-во: