Опр. Скалярным произведением в действительном линейном пр-ве E называется вещественная функ-я (x, y), определенная для каждой пары $x, y \in E$ и удовлетворяющая условиям:

1) $(x, x) \geqslant 0$; $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $(x, y) = (y, x)$

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

4) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Опр. Действительное линейное пр-во со скалярным произведением называется евклидовым пространством

Утв. Во всяком евклидовом пр-ве можно ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Утв. (Неравенство Коши-Буняковского)

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$$

Док-во:

1) Будем считать $\|x\|>0$.

2) $(tx+y,\ tx+y) = t^2(x,x)+2t(x,y)+(y,y)$
$t \in \mathbb{R}$

$= \|x\|^2 t^2 + 2(x,y)t + \|y\|^2 \geq 0$ - квадр. трехчлен

от-но t, который ≥ 0 $\forall t$

Парабола, ветви вверх $\Rightarrow D \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$ ЧТД.

Утв. (Нер-во Минковского):

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

Док-во:

1) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ЧТД.

Утв. В евклидовом пр-ве для нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $\mapsto$ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ — тождество пар-ма

Сумма квадратов диагоналей = сумме квадратов сторон

Примеры евкл. пр-в:

1) $\mathbb{R}^n$: $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

2) CL_2 : $(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt}$$