Равенство Парсеваля

Пусть $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2}$$

Дано: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$

Найти: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{x^3}{3\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Th (О почленном интегрировании ряда Ф.)

f – $q-1$ раз непр дифф-ма на $[-\pi, \pi]$;

$f^{(p)}(-\pi) = f^{(p)}(\pi)$, $\forall p = 0, 1, \dots, q-1$. Пусть f имеет q-ю кусочно-непр-ю производную. Тогда

$$|a_n| + |b_n| = O\left(\frac{1}{k^q}\right)$$

---

1) $f = x^{2023}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Найти порядок убывания коэф-в Фурье

$$f^{(0)}(-\pi) = -\pi^{2023}, \quad f^{(0)} = \pi^{2023} \Rightarrow |a_k| + |b_k| = O(1)$$

2) $f = x^{2024}$

$$f^{(0)}(-\pi) = f^{(0)}(\pi) = \pi^{2024}$$

$$f'(-\pi) = -2024\pi^{2023} \neq f'(\pi) = 2024\pi^{2023}$$

$$\Rightarrow |a_n| + |b_n| = O\left(\frac{1}{k}\right)$$