Опр. Пусть $f(x)$ – абс. инт-ма на $(-\infty;+\infty)$.

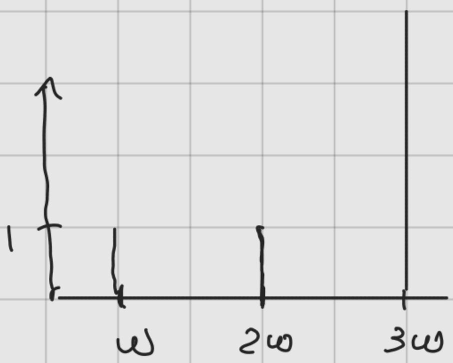
Тогда **интеграл Фурье** это:

$$I(x) = \int_0^{+\infty} (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\,d\omega,$$ где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

$\sin\omega t + \sin 2\omega t + 4\sin 3\omega t \rightarrow$



$$\boxed{I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\right)d\omega}$$

Th. 1. Пусть $f(x)$ – абс. инт-ма на конечном или бесконечном (a,b), а $\varphi(x,y)$ – непр. и огр. на $(a,b)\times[c,d]$. Тогда

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)\varphi(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x)\varphi(x,y)\,dx \right) dy$$

Th 2. (О сход-ти интеграла Фурье).

Пусть $f(x)$ - абс. инт-ма на $(-\infty; +\infty)$.

Пусть x_0 - почти регулярная (т.е. $\exists\, f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$). Тогда интеграл Фурье ф-ии $f(x)$ сх-ся в т. x_0 и $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ и

$$I(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$$

Док-во:

1) Обозначим $\mathcal{I}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x_0-t)\,dt \right) d\omega$

$I(x_0) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{I}(\lambda) \circleddash$: хотим доказать, что

$\circleddash\ \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$

Сделаем замену: $u = t - x_0$, тогда:

$$\int_{-\infty} f(t)\cos\omega(x_0-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x_0)\cos\omega u\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x_0+u)\cos\omega u\,du + \int_{0}^{+\infty} f(x_0+u)\cos\omega u\,du =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \big(f(x_0+u)+f(x_0-u)\big)\cos\omega u\,du$$

$$\Rightarrow J(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty}\big(f(x_0+u)+f(x_0-u)\big)\cos\omega u\,du\right)d\omega$$

2) $$J(\lambda) \overset{Th\,1}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{\lambda}\cos\omega u\,d\omega\cdot\big(f(x_0+u)+f(x_0-u)\big)\right]du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\lambda u}{u}\cdot\big(f(x_0+u)+f(x_0-u)\big)\right)du$$

3) $$J(\lambda) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$ – инт-л Дирихле

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int^{+\infty}\big(f(x_0+u)-f(x_0+0)\big)\sin\lambda u \ldots$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(f(x_0+u)-f(x_0+0)\right)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du}_{J_1}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(f(x_0-u)-f(x_0-0)\right)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du}_{J_2}$$

Рассмотрим J_1 : он $\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ по Lem. Римана об осц., т.к. $\exists\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{u\to 0+0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ =>

=> $\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ – огр. δ-окр-ти т. 0 =>

=> представим J_1 в виде:

$$\int_0^{\delta}\underbrace{\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}}_{\le M}\sin\lambda u\,du+\int_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\sin\lambda u\,du$$

абс. инт-ма

огр. непр

т.к. абс. инт-ма, по опр-ю $\to$ 0 (по Lem. Римана)

значит всё абс. инт-мо

$\Downarrow$

$\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ – абс. инт-ма

$$\Rightarrow \int_{\delta}^{+\infty}\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0$$ (по Lem Римана об осц.)