Опр. Фун-я вида $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$ —

тригонометрический многочлен степени n.

$(A_n^2 + B_n^2 \neq 0)$

Th 1. (Вейерштрасса)

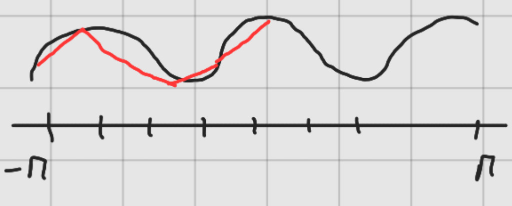
Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая и непр. Тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ тригоном. многочлен $T: \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$

Док-во:

1) Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{J}$ – разбиение отрезка

$[-\pi; \pi]$. $x_j = -\pi + j \cdot \frac{2\pi}{J}$



2) Построим ломаную, соединив точки

$(x_j, f(x_j))$ отрезками. Λ_J – 2π-период. ф-ия,

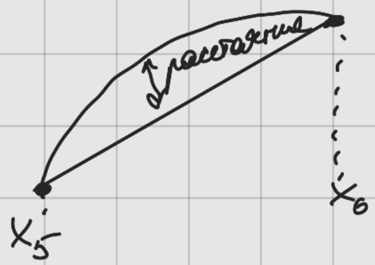
которая является продолжением ломаной на всё

$\mathbb{R}$. Заметим, что Λ_J – непр., кусочно непр. диф.

3) f – непр. => равномерно непр. на каждом отрезке

Значит при $|x'-x''| < \frac{2\pi}{\delta}$ $\hookrightarrow$ $|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ (δ такими выбрали)

=> $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \Lambda_\delta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)



4) Λ_δ – 2π-период, непр., кусочно непр. дифф. => её РФ сх. к ней равномерно.

Т.е. $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\Lambda_\delta - S_n(x, \Lambda_\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

жирный ноль

5) из (1) и (2) => $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x, \Lambda_\delta)| < \varepsilon$ =>

=> $T = S_n(x, \Lambda_\delta)$

Th. 2 (Фейера) !

Пусть f – 2π-периодическая непр. фун-я. Тогда

$\sigma_n(x,f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$, где $\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\dots+S_n(x,f)}{n+1}$

- сумма Фейера.

Th. 3 (Вейерштрасса)

Пусть f - непр. на $[a, b]$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ алгебр. многоч. P : $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

Док-во:

1) Отрезок $[0, \pi]$ отобразим $\overleftrightarrow{\text{линейно}}$ на $[a, b]$: $x = a + \frac{(b-a)}{\pi} t$; $t \in [0, \pi]$, $x \in [a; b]$

2) Назовём $f^*(t) = f(a + \frac{(b-a)}{\pi} t)$; $t \in [0; \pi]$

3) Продолжим $f^*(t)$ чётно (так лучше) на отрезок $[-\pi, 0]$, а затем 2π-периодически на всю ось

4) По Th 1 $\exists$ тригонометрический многочлен $T(t)$:

$\max\limits_{t \in [0, \pi]} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Можно всюду на $\mathbb{R}$

5) Приблизим $T(t)$ многочленом Тейлора $P_n(t)$:

$$\max_{t\in[0,\pi]} |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

(можно, т.к. $\sin kx$ и $\cos kx$ разложимы в ряд Тейлора с $R = \infty$)

6) Из (2) и (3) $\Rightarrow \max\limits_{t\in[0,\pi]} |f^*(t) - P_n(t)| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - P_n\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon$$ ЧТД.