Вопрос по выбору. Первый и третий законы Кеплера

Семён Касьянов

Общие сведения о законах

Законы, которые будут приведены дальше, представляют собой эмпирические соотношения, полученные Иоганном Кеплером на основе многолетних наблюдений Тихо Браге. Данные соотношения позволили Исааку Ньютону постулировать закон всемирного тяготения, а заетм математически показать, что они являются его следствием. Стоит отметить, что Законы Кеплера являются решением задачи двух тел в случае пренебрежимо малой массы планеты.

Необходимая теория

$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ - момент импульса. $\vec{p} = m\vec{v}$. Вектор $\vec{v}$ можно разложить на две составляющие: одна параллельна $\vec{r}$, а другая перпендикулярна - $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_r$. Подставляя полученное выражение в формулу для момента импульса, получим, что $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{v}_n]$.

$E = -\frac{GMm}{r}$ - потенциальная энергия тела массой m.

Закон сохранения энергии: в замкнутой системе E=const.

Закон сохранения момента импульса: в замкнутой системе $\vec{L} = const$

Первый закон Кеплера (Закон эллипсов)

Формулировка: Все планеты Солнечной системы двигаются по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов эллипса расположено Солнце.

Вывод: $v_r = \dot{r}; v_n = r\dot{\phi}$

Закон сохранения энергии и момента импульса выглядит следующим образом:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\phi})^2}{2} - \frac{GMm}{r} = const \ (1)$$

$$L = mr^2\dot{\phi} = const \ (2)$$

В данных двух равенствах G - гравитационная постоянная, M - масса Солнца (может быть любое другое тело, вокруг которого происходит вращение), m - масса спутника, E - полная механическая энергия спутника. Теперь выразим $\dot{\phi}(2)(1)$.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \ (3)$$

Перепишем в другом виде:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r})}} \, (4)$$

Из (2) получаем: $d\phi = \frac{L}{mr^2}dt$. Подставим вместо dt выражение (4).

$$d\phi = \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r})}} \, (5)$$

Перепишем выражение под корнем следующим образом:

$$E - ((\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L})^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}) + (\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L})^2 =$$

$$= E - (\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L} - \frac{L}{r\sqrt{2m}})^2 + (\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L})^2 =$$

$$= \frac{L^2}{2m}(\frac{2mE}{L^2} + (\frac{GMm^2}{L^2})^2 - (\frac{GMm^2}{L^2} - \frac{1}{r})^2)$$

Введём обозначение: $p = \frac{L^2}{GMm^2}$. Тогда выражение принимает следующий вид:

$$\frac{L^2}{2m}(\frac{2mE}{L^2} + \frac{1}{p^2} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})^2) =$$

$$\frac{L^2}{2m}(\frac{1}{p^2}(1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}) - (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})^2)$$

Введём следующее обозначение: $e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}$. Тогда получаем:

$$\frac{L^2e^2}{2mp^2}(1 - (\frac{p}{e}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}))^2)$$

Введём замену для удобства интегрирования:

$$z = \frac{p}{e}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$$

Таким образом выражение (5) приобретает следующий вид:

$$d\phi = \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{L^2e^2}{p^2}(1-z^2)}} = \frac{p}{er^2}\frac{dr}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\phi + \phi_0 = -\arccos z$$

$$z = \frac{p}{e}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) = \cos{(\phi + \phi_0)}$$

$$r(\phi) = \frac{p}{1 - ecos(\phi + \phi_0)}$$

Выражение $r = \frac{p}{1-ecos\phi}$ задаёт уравнение кривых второго порядка в полярных координатах (эллипса, пароболлы и гиперболы), также получены выражения $p = \frac{L^2}{GMm^2}$ - постоянный параметр и $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}}$ - эксцентриситет. В случае $E < 0$, $0 < e < 1$, поэтому тело будет вращаться по эллиптической орбите, если $E = 0$, тогда тело движется по пароболле, и если $E > 0$, то орбита представляет собой ветвь гиперболы.

Второй закон Кеплера (Закон площадей)

За равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади. $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$

Третий закон Кеплера (Гармонический закон)

Формулировка: Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Вывод:

Рассмотрим планету массой m в двух точках на эллиптической орбите: в перигелии с радиус-вектором $r_1 = a - c$ и в афелии с радиус-вектором $r_2 = a + c$. Запишем законы сохранения момента импульса и энергии для двух этих точек.

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GmM}{r_2}$$

Решим данную систему уравнений относительно υ_1, получим:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$$

Согласно второму закону Кеплера, секторная скорость является постоянной величиной, $\frac{dS}{dt} = V_s = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}\upsilon_1 r_1 = \sqrt{\frac{GMr_2 r_1}{2(r_1+r_2)}}$. Таким образом, для площади эллипса получаем следующее равенство:

$$S = \pi ab = TV_s = T\sqrt{\frac{GMr_2 r_1}{2(r_1 + r_2)}}$$

Воспользуемся следующими свойствами эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a$$
$$a^2 - b^2 = c^2$$
$$r_1 r_2 = b^2$$

Преобразуя данное выражение, можно получить:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = const$$

Недостатки

В своих работах Иоганн Кеплер учитывал лишь Солнце, как притягивающий объект. Доказательства, полученные выше, приведены из соображений сферической симметрии гравитационного поля. В действительности это не так из-за гравитационного воздействия не только со стороны Солнца, но и со стороны других планет. Всё это вызывает возмущения орбит планет, которые имеют не переодический характер.

Впоследствии третий закон Кеплера был уточнён Ньютоном:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

где m - масса планеты. Но даже в случае самой массивной планеты Солнечной системы Юпитер $\frac{M_{\text{Ю}}}{M_{\text{С}}} \approx 10^{-3}$, так что $M + m \approx M$. Так как массы всех планет малы по сравнению с массой Солнца, формула Кеплера достаточно хорошо согласуется с наблюдениями.

Применение

Законы, открытые Кеплером, объясняют неравномерность движения планет по орбитам. Первый закон описывает геометрию траекторий планетарных орбит. Второй закон описывает изменение скорости движения планет вокруг Солнца. Третий закон Кеплера позволяет сравнить орбиты планет между собой, показать то, как они гармонируют между собой и вычислить продолжительность года (времени полного оборота вокруг Солнца) любой планеты, если известно ее расстояние до Солнца в афелии.