Андрей Чумаков

Вопрос по выбору: Движение тела в поле центральных гравитационный сил. Вывод законов кеплера

1 Введение: минутка истории

Законы, которые будут приведены дальше, представляют собой эмпирические соотношения, полученные Иоганном Кеплером на основе многолетних наблюдений Тихо Браге. Данные соотношения позволили Исааку Ньютону постулировать закон всемирного тяготения, а заетм математически показать, что они являются его следствием. Что мы сегодня и проделаем. Исторические формулировки законов:

1. Все планеты Солнечной системы двигаются по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов эллипса расположено Солнце.

2. За равные помежутки времени радиус-векторы планет, проведенные от Солнца, заметают равные площади

3. Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам их больших полуосей

Стоит отметить, что мы будем подразумевать под Солнцем (Звездой) - центральное тело с большой массой, а планетой - тело с пренебрежимо малой массой по сравнению с центральным. В общем случае конечно уравнения работают не только на связке Звезда - Планета (Например Планета - Спутник)

2 Теория, предварительные действия и расчеты

Закон всемирного тяготения:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{|R|}\vec{R}$$

Задача двух тел в приближении $m \ll M$:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r},\ \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1},\ \mu = \frac{mM}{M+m} \to m\ (m \ll M)$$

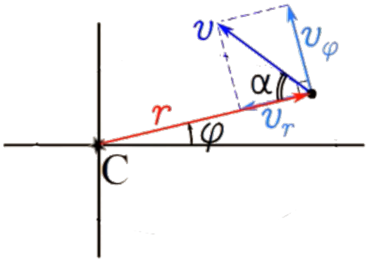

Рис. 1: Движение маломассивного тела, вокруг центарльного

Потенциальная энергия в поле тяготения:

$$(r) = -\int (\vec{F}\cdot d\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{r}$$

Момент импульса сохраняется т.к:

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \ \rightarrow \ \vec{F}\times\vec{r} = 0 \ \rightarrow \ \vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = const$$

Закон сохранения энергии выплняется, так как нет неконсервативных сил (центральная сила притяжения - потенциальна):

$$E = K + \ = const = \frac{mv^2}{2} + \frac{GMm}{r}$$

Скорость можно разложить на две компоненты. На перпендикулярную радиус-вектору и коллениарную ему:

$$v^2 = v_r^2 + v_\phi$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}\times\vec{v_\phi} \Rightarrow L = mrv_\phi \Rightarrow v_\phi = r\dot{\phi}$$

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

Тогда можем переписать выражение для энергии, как:

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\phi^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = const$$

3 Вывод Первого закона Кеплера

Формулировка: Все планеты Солнечной системы двигаются по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов эллипса расположено Солнце.

Перепишем приведенный нами выше ЗСЭ:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}} \tag{1}$$

Учитывая, что $d\phi = \frac{L}{mr^2}dt$. Подставим вместо dt, выразив выражение через $d\phi$:

$$d\phi = \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}} \tag{2}$$

Теперь будем работать с выржаением под корнем в скобках:

$$\begin{aligned} E+&\frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} - \left(\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L}\right)^2 + \left(\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L}\right)^2 = \\ =&E - \left(\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L} - \frac{L}{r\sqrt{2m}}\right)^2 + \left(\frac{GMm^{3/2}}{\sqrt{2}L}\right)^2 = \\ =& \frac{L^2}{2m}\left(\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 - \left(\frac{GMm^2}{L^2} - \frac{1}{r}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Сейчас для простоты и удобства вычислений (интегрирования) мы будем обозначать сложные выражения буквами. Введем обозначение $p = \frac{L^2}{GMm^2}$:

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{2mE}{L^2}+\frac{1}{p^2}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)^2\right)=$$
$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{p^2}\left(1+\frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}\right)-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)^2\right) \quad (4)$$

Теперь введем обозначение $e^2=1+\frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}$, тогда:

$$\frac{L^2e^2}{2mp^2}\left(1-\left(\frac{p}{e}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\right)^2\right) \quad (5)$$

Произведем еще одну замену $k=\frac{p}{e}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})$, тогда можем переписать выражение (2) следующим образом:

$$d\phi=\frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{L^2e^2}{p^2}\left(1-k^2\right)}}=\frac{p}{er^2}\frac{dr}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} \quad (6)$$

Проинтегрировав получим:

$$\phi+\phi_0=-\arccos z\Rightarrow z=\frac{p}{e}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)=\cos\left(\phi+\phi_0\right)\Rightarrow(\phi)=\frac{p}{1-e\cos\left(\phi+\phi_0\right)} \quad (7)$$

Мы получили формулу, которая задает кривые второго порядка в полярных координатах, тоесть элипса, параболы или гиперболы.

$$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}},\ p=\frac{L^2}{GMm^2}$$

Но это просто какие-то обозначения, которые вылезли из формулы для удобства интегрирования, хоть и из выражения, мы знаем, что они значат, давайте получим их напрямую

4 Вывод параметров орбиты

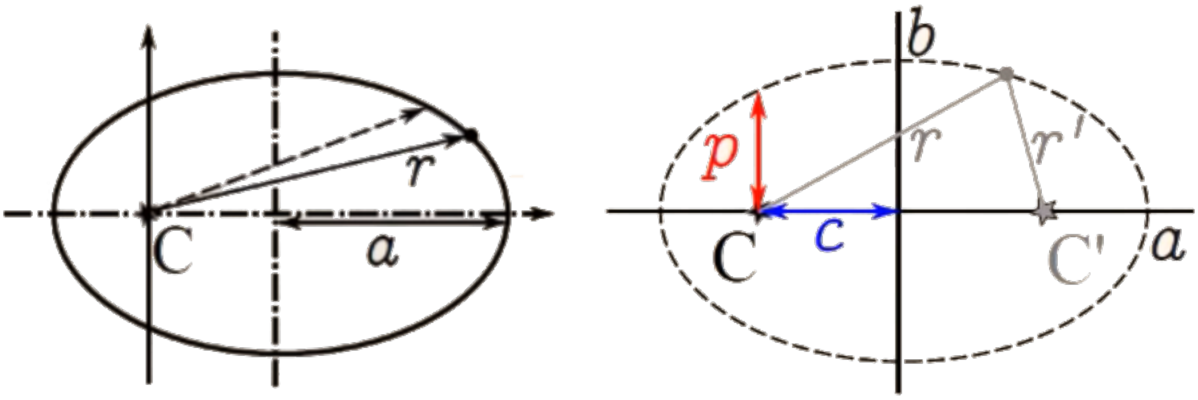

Рис. 2: Параметры эллипса

$$2a=r_q+r_Q$$

В точках апоцентра и перецентра орбиты есть только тангенциальная составляющая скорости, поэтому можем переписать ЗСЭ в виде уравнения и r_q и r_Q будут решениями:

$$\epsilon r^2 + GMr - \frac{1}{2}l^2 = 0$$

$$2a = r_q + r_Q = -\frac{GM}{E}$$

Теперь найдем малую полуось исходя из геометрический свойст эллипса:

$$r + r' = const = 2a \to r_b = a \to \epsilon = \frac{1}{2}v_b^2 - \frac{GM}{a},\ \frac{GM}{a} = -2\epsilon, l = v_b b$$

Получаем:

$$b = \frac{l}{\sqrt{-2\epsilon}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

Из геометрических соображений:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{2GMm^2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}}$$

Что действительно совпадает с обозначениями введенными ранее

5 Вывод формулы для скорости в произвольной точке орбиты

Теперь посмотрим, как же мы все-таки можем легко вычислить скорость в заданной точке обиты. Запишем ЗСЭ и проведем некоторые преобразования:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2} \tag{8}$$

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}, R = a \Rightarrow \frac{m}{2} * \frac{GM}{a} - \frac{GMm}{a} = \frac{mv_\Pi^2}{2} - \frac{GMm}{a*(1-e)}\Bigg| * \frac{2}{m}$$
$$\frac{GM}{a} - \frac{2GM}{a} = v_\Pi^2 - \frac{2GM}{a*(1-e)} \Rightarrow v_2^2 = \frac{2GM}{a*(1-e)} - \frac{GM}{a} \tag{9}$$
$$v_\Pi^2 = \frac{2GM}{a*(1-e)} - \frac{GM*(1\pm e)}{a*(1\pm e)} = GM * \frac{2-(1-e)}{a*(1-e)}$$

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{10}$$

6 Вывод второго закона Кеплера

Формулировка: за равные помежутки времени радиус-векторы планет, проведенные от Солнца, заметают равные площади Заметаемая ветором площадь:

$$dS = \frac{1}{2}|d\vec{r} \times \vec{r}|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{r}| = \frac{L}{2m} = const \Rightarrow S = \frac{L}{2m}t \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

7 Вывод 3 закона Кеплера

Формулировка: Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Рассмотрим планету массой m в двух точках на эллиптической орбите: в перигелии с радиус-вектором $r_1 = a - c$ и в афелии с радиус-вектором $r_2 = a + c$. Запишем законы сохранения момента импульса и энергии для двух этих точек.

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$
$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GmM}{r_2}$$

Решим данную систему уравнений относительно v_1, получим:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1\left(r_1 + r_2\right)}}$$

Согласно второму закону Кеплера, секторная скорость является постоянной величиной, $\frac{dS}{dt} = V_s = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}v_1r_1 = \sqrt{\frac{GMr_2r_1}{2(r_1+r_2)}}$. Таким образом, для площади эллипса получаем следующее равенство:

$$S = \pi ab = TV_s = T\sqrt{\frac{GMr_2r_1}{2\left(r_1 + r_2\right)}}$$

Воспользуемся следующими свойствами эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a,\ a^2 - b^2 = c^2,\ r_1r_2 = b^2$$

Преобразуя данное выражение, можно получить:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}$$

8 Движение тел с сопоставимымы массами (Двойные системы)

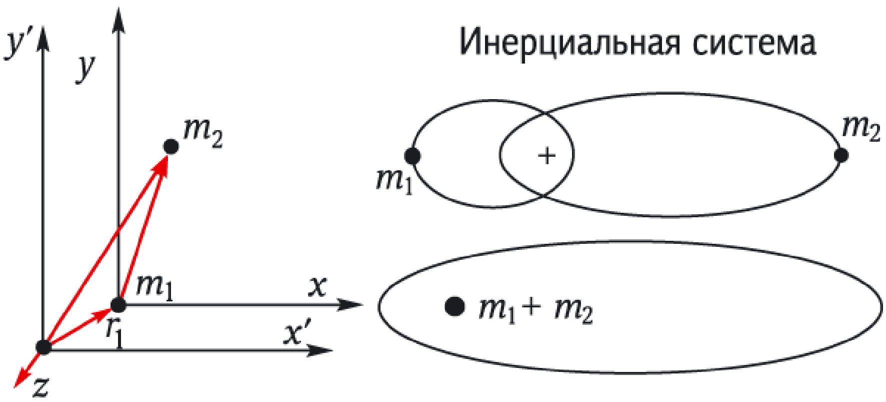

Рис. 3: Двойная звездная система

Двойная звездная система – гравитационно связанные звезды, вращающиеся вокруг центра масс системы. В некоторых случаях расстояние между компонентами двойной звезды составляет сотни и тысячи астрономических единиц (а.е.) и они движутся по обычным эллиптическим орбитам. В других случаях звезды близки или касаются друг друга (расстояние между ними сравнимо с размерами звезд) и их орбиты оказываются намного сложнее, а приливные эффекты искажают формы звезд. В случае а » R*, движение звезд в системе подчиняется законам Кеплера, являющимся следствиями закона Всемирного тяготения:

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{V_1}}{dt} \equiv \frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{и } m_2 \frac{d\boldsymbol{V_2}}{dt} \equiv \frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}; \frac{d\left(\boldsymbol{V_2} - \boldsymbol{V_1}\right)}{dt} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{r^3}\boldsymbol{r}; \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{GM}{r^3}r. \tag{11}$$

Таким образом, при переносе системы координат в одно из тел гравитационно связанной пары все законы небесной механики (тоесть и фсе законы Кеплера) сохраняются и прекрасно работают, но только при допущении, что в этом теле сосредоточена суммарная масса обоих тел, и именно эту суммарную величину мы из наблюдений можем рассчитать по форме относительной орбиты.

9 Бонус пункт: Анализ диаграм двойных звезд

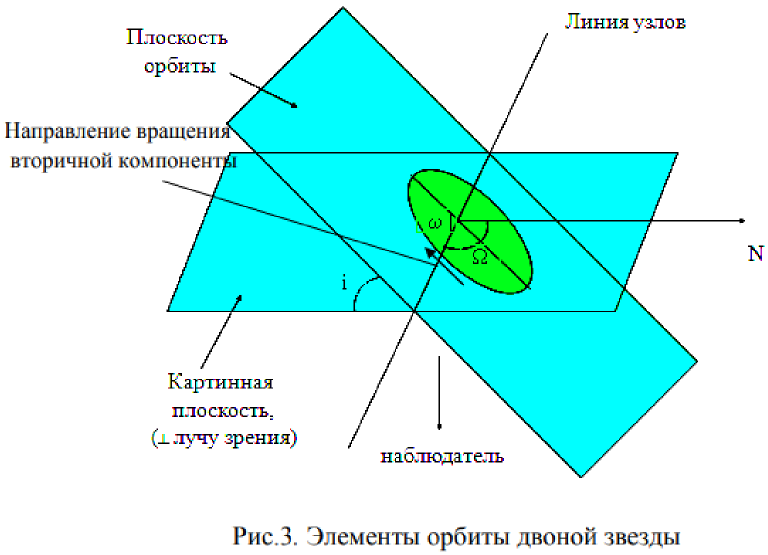

Рис. 4: Ориентация орбиты относительно наблюдателя

По методу наблюдений двойные подразделяются на визуальные, спектральные и затменные. Визуальные двойные системы отличаются тем, что мы наблюдаем обе компоненты и, чаще всего, измеряем их положение в относительной системе координат. В качестве примера приведены наблюдения Сириуса.

Истинная орбита проецируется на картинную плоскость также в виде эллипса, у которого, однако, яркая звезда находится не на большой оси видимого эллипса. Необходима редукция наблюдаемой орбиты к истинной

Спектральная двойная звезда выявляется по движению линий в спектре с орбитальным периодом. Формально смещение линий наблюдается во всех случаях кроме i = 0 (смещение

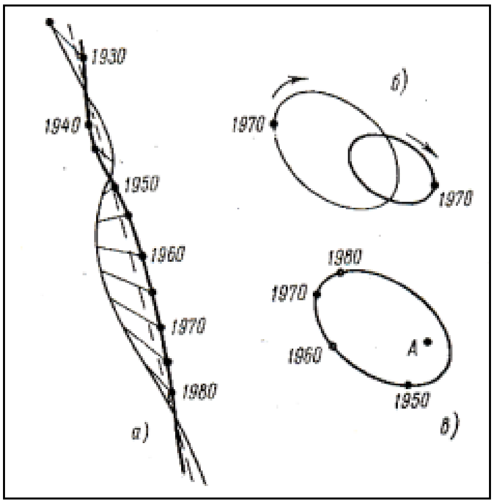

Рис. 5: Слева представлены положения двойной звезды Сириус на небесной сфере за период 1930-1980 гг (а). Справа показаны относительная орбита (в, яркая звезда А в начале координат) и абсолютные орбиты (б) компонент относительно центра масс.

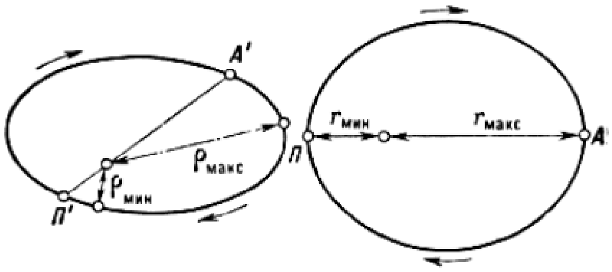

Рис. 6: Преобразование видимого эллипса (слева) в истинный

линий обусловлено эффектом Доплера – $(\lambda_H \breve{} \lambda_0)/\lambda_0 = V_r/$, где λ_H, λ_0 – наблюдаемая и лабораторная длины волн, V_r – лучевая скорость звезды и c – скорость света)

В результате измерения лучевых скоростей мы получаем зависимость лучевых скоростей звезд от времени – «кривую лучевых скоростей», RVC. Разные формы орбит и разная их ориентация относительно наблюдателя дают сильно отличающиеся RVC (рис.9)

В случае i ≈ 0 в двойной системе могут наблюдаться затмения, которые проявятся в изменениях блеска

Массы компонент визуальной двойной звезды вычисляются по 3 закону Кеплера, зная размеры орбиты a и период вращения спутника T относительно главной компоненты (относительная орбита). Как уже указывалось, наблюдаемая орбита является проекцией истинной на картинную плоскость (проекция также является эллипсом, у которого смещены фокусы). Математическое преобразование наблюдаемой орбиты в истинную дает нам угол наклона орбиты i. В этом случае мы можем по формуле вычислить сумму масс звезд; при этом необхолимо знать расстояние до двойной.

Однако только из спектральных наблюдений не удается определить угол наклона орбиты двойной системы. Применив 3 закон Кеплера, мы получим массы звезд, отягощенные $sin^3(i)$

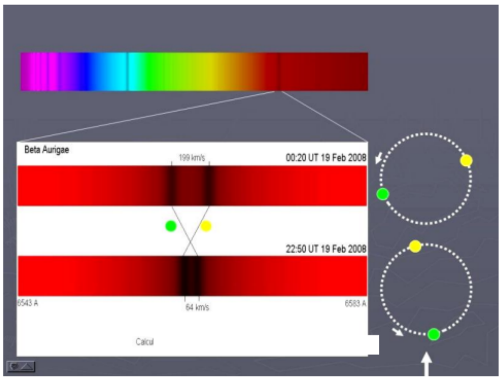

Рис. 7: Реальное смещение спектральных линий $H\alpha$ двойной AurAB с приблизительно равными компонентами и периодом 3.96d

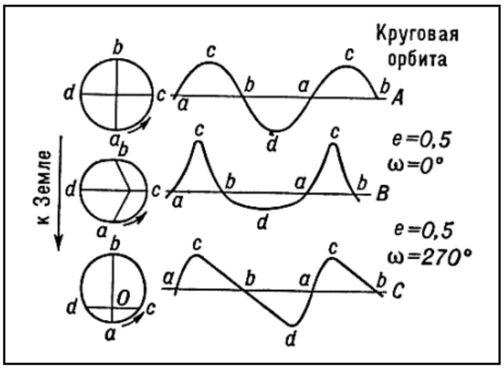

Рис. 8: Вид кривых лучевых скоростей в зависимости от параметров орбиты $a, e\omega$. Показано схематически для случая i = 90$^{\text{o}}$ и одной компоненты. $V_y = 0$

Наличие затмений в двойной системе позволяет надежно определить угол наклона орбиты: если спектральные наблюдения дополняются фотометрическими, в которых присутствуют затмения, свидетельствующие о том, что $i \approx 90$, мы имеем возможность получения точных значений масс звезд. Кроме определения масс, затменные двойные звезды позволяют определять радиусы компонентов.

10 Итог

Мы вывели законы Кеплера из закона всемирного тяготения, а также обсудили вопрос определения масс двойных систем с помощью этих законов

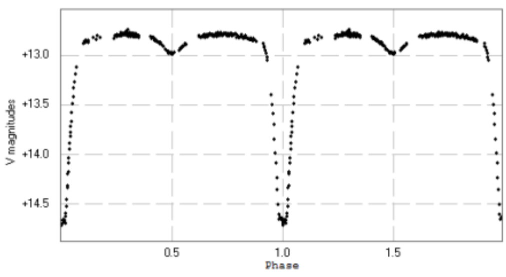

Рис. 9: Кривая блеска затменной типа Алголя