# Вопрос по выбору
# Задача о брахистохроне и элементы вариационного исчисления

Курсов Максим

11 января 2024 г.

# 1 Формулировка задачи

Брахистохрона кривая скорейшего спуска. Задача о её нахождении была поставлена в июне 1696 года Иоганном Бернулли следующим образом:

> Среди плоских кривых, соединяющих две данные точки A и B, лежащих в одной вертикальной плоскости (B ниже A), найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной отрицательной полуоси OY, материальная точка из A достигнет B за кратчайшее время.

На эту задачу откликнулось множество математиков и физиков того времени, включая самого сэра Исаака Ньютона, чей метод решения лёг в основу вариационного исчисления.

# 2 Основы вариационного исчисления

## 2.1 Уравнение Эйлера-Лагранжа

Пусть задан функционал

$$J = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx$$

$$f(x) \in C^2[a;b],\ f(a) = c,\ f(b) = d$$

Тогда для функции f, дающей его экстремум справедливо равенство

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0$$

**Доказательство**
Если f даёт экстремум J, то любое слабое возмущение f, сохраняющее граничные условия увеличивает (уменьшает) J. Возьмём любую дифференцируемую на [a;b] функцию h(x): h(a)=h(b)=0. Определим

$$J(\varepsilon) = \int_a^b L(x, f(x) + \varepsilon h(x), f'(x) + \varepsilon h'(x))dx$$

Функция f даёт экстремум для J(0) $\Rightarrow J'(0) = 0$

$$J'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} h + \frac{\partial L}{\partial f'} h'\right) dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f} h\, dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'} h' dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f} h\, dx +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial f'} h \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} h\, dx = \Big[h(a) = h(b) = 0\Big] \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} h - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} h\right) dx =$$

$$= \int_a^b h \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right) dx = 0 \Rightarrow \Big[h(x) - \text{любая}\Big] \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \text{ ЧТД}$$

## 2.2 Интеграл энергии

Уравнение Эйлера с не зависящей напрямую от времени функцией Лагранжа имеет интеграл Якоби

$$\frac{\partial L}{\partial f'} f' - L = const.$$

**Доказательство**
Пусть задана функция Лагранжа

$$L = L(x, f(x), f'(x)),\ x - \text{время}$$

L напрямую не зависит от x, поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Также из уравнения Эйлера следует

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial f} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} \tag{2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial f} f' + \frac{\partial L}{\partial f'} f'' + \frac{\partial L}{\partial x} = \Big[(1)\Big] \frac{\partial L}{\partial f} f' + \frac{\partial L}{\partial f'} f'' = \Big[(2)\Big] \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} f' + \frac{\partial L}{\partial f'} f'' =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'} f'\right) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'} f' - L\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial f'} f' - L = const. \text{ ЧТД}$$

# 3 Поиск брахистохроны

Перенесём начало системы координат в точку A и направим ось OY вертикально вниз. Нас интересует минимальное значение

$$\tau = \int_0^{x_0} \frac{dx}{v_x} \to min,\ y(0) = 0,\ y(x_0) = y_0$$

Из ЗСЭ следует, что

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = E(0) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$v_x = v\cos\theta = v\,\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{v}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \sqrt{\frac{2gy}{1+\dot{y}^2}}$$

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{v_x} = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}}dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}}dx \to min$$

Функционал не зависит напрямую от x, поэтому можно воспользоваться интегралом энергии для его минимизации

$$const. = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} - L = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\dot{y} - \sqrt{\frac{1+\dot{y}}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}}\left(\dot{y}^2 - (1+\dot{y}^2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}} \Rightarrow y(1+\dot{y}) = const. = C$$

Теперь решим дифференциальное уравнение

$$y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = C \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{\frac{C}{y}-1}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C}{y}-1}} = \int \sqrt{\frac{y}{C-y}}dy = \begin{bmatrix} z = \sqrt{y} \\ dy = 2zdz \end{bmatrix} \int \frac{2z^2}{\sqrt{C-z^2}}dz =$$

$$= \begin{bmatrix} z = \sqrt{C}\sin t \\ dz = \sqrt{C}\cos t dt \end{bmatrix} \int \frac{2C\sqrt{C}\sin^2 t\cos t}{\sqrt{C}\cos t}dt = \int 2C\sin^2 t dt =$$

$$= \int C(1-\cos 2t)dt = C(t - \frac{\sin 2t}{2}) + C'$$

$$t = 0 \hookrightarrow x = 0,\ y = 0 \Rightarrow C' = 0$$

Решение – циклоида $\begin{cases} x = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t) \\ y = \frac{C}{2}(1-\cos 2t) \end{cases}$