Вопрос по выбору. Скин-эффект

Семен Касьянов

Введение. Распространение волн в пространстве

Рассмотрим волну E, которая распространяется в пространстве в положительном направлении оси X, зададим уравнение:

$$E = f(x - vt)$$

Вид функции f в плоской бегущей электромагнитной волне зависит от начальных условий и может быть каким угодно. Для нас особенное значение имеют синусоидальные, или монохроматические, волны, которые могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t - x/v),$$

где $\mathbf{E}_0$ - амплитуда волны. Если ввести обозначение:

$$k = \omega/v,$$

то формула приобретает следующий вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$

Величина k называется **волновым числом**.

Основная часть. Поле в среде и показатель преломления

Теперь рассмотрим среду, на которую падает электромагнитная волна. Её характеристики меняются при проникновении вглубь среды. Этот эффект связан с тем, что в среде содержатся частицы, с положительными ядрами и отрицательными электронами. Они могут быть как связанными друг с другом, так и свободными. Электромагниное поле волны действует на эти заряженные частицы, что приводит к их движению, которое вызывает излучение новых электромагнитных волн. В результате, в среде наблюдается интерференция первоначальной и вторичных волн. Попробуем определить, как задается показатель преломления среды. Для этого рассмотрим отдельный атом среды. Он имеет тяжелоё положительно заряженое ядро и лёгкий отрицательно заряженый электрон. Внешнее электрическое поле может быть задано следующей формулой:

$$E = E_0 \cdot e^{-i(\omega t - kz)}$$

Поле E действует на обе части атома, но в силу отличия масс на несколько порядков, ядро остаётся относительно неповижным в то время, как электрон смещается под его действием. Будем считать ядро неподвижным и запишем второй закон Ньютона для электрона:

$$m\ddot{z} = -kz - \beta\dot{z} + E_0 \cdot e^{-i(\omega t - kz)}$$

Дадим некоторые пояснения к записе выше. Первое слагаемое представляет собой возвращающую силу, действующую на электрон. Второе же слагаемое является силой трения: при возвращении в положение равновесия электрон теряет энергию путём излучения фотона или каким-либо другим способом. Данное равенство может быть переписано по-другому при введении дипольного момента, который возникает при действии внешнего поля:

$$p = e \cdot z, \quad \ddot{p} + 2\delta\dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{eE_0}{m} \cdot e^{-i(\omega t - kz)} \quad (1)$$

$$\delta = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Таким образом, в правой части полученного равенства мы имеем выражение для вынуждающей силы, поэтому мы будем искать решение в следующем виде:

$$p = p_0 e^{-i\omega t}$$

Также мы предполагаем, что смещение электрона мало, а значит, $kz \approx const$. В таком случае решение уравнения (1) будет иметь следующий вид:

$$p = \frac{eE_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega \cdot i} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2)$$

Теперь вспомним про связь векторов D и E:

$$D = E + 4\pi N \cdot p \quad (3),$$

где N - количество электронов в единице объёма среды, то есть концентрация. Таким образом, из (2) и (3) мы получаем:

$$D = \underbrace{\left(1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega \cdot i}\right)}_{\varepsilon} \cdot E \quad (4)$$

То, что получено в скобках, есть диэлектрическая проницаемость среды ε. Также известно, что показатель преломления среды зависит от диэлектрической и магнитной проницаемостей среды следующим образом:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Магнитная проницаемость близка к единице в большинстве веществ, поэтому последнюю формулу иногда упрощают до $n = \sqrt{\varepsilon}$. Из приведенного соотношения мы получаем следующее:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega \cdot i} \quad (5)$$

Теперь перейдём к рассмотрению случая проводника. Необходимо внести в полученные выражения некоторые изменения, вызванные несвязанностью электронов с ядром, то есть нет возвращающей силы. Получаем $\omega_0 = 0$. Также введём следующее обозначение:

$$2\delta = \frac{1}{\tau} \quad \tau - \quad \text{характерное время затухания}$$

В проводнике физический смысл времени затухания непосредственно связан со временем свободного пробега электрона в проводнике. Выразим его через ряд известных нам формул:

$$j = \sigma E \quad j = Ne \cdot v \quad v = \frac{eE}{m} \cdot \tau \quad \to \quad \tau = \frac{m\sigma}{Ne^2}$$

Если внести изменения в выражение (5) с проведёнными рассуждениями, то оно приобретает следующий вид:

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi\sigma}{\omega \cdot i \cdot (1 - i\omega\tau)} \quad (6)$$

Скин-эффект

Рассмотрим случай, когда $\omega\tau \ll 1$. Учитывая, что ω мала, выражение (6) приобретает следующий вид:

$$n^2 \approx i \cdot \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \cdot (1+i)$$

Теперь обратимся к формулам, которые были приведены ранее:

$$E = E_0 \cdot e^{-i(\omega t - kz)} \quad k = \frac{n\omega}{c}$$

Получаем:

$$E = E_0 \cdot e^{-i\omega\left(t - \frac{n}{c}z\right)} = E_0 \cdot \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \cdot z) \cdot \exp(-\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \cdot z) \quad (7)$$

В данном выражении первая экспонента отвечает за колебательную составляющую, вторая - за фазу колебаний, а третья - вносит вклад в уменьшение амплитуды колебаний, связанное с прохождением волны вглудь среды. Таким образом, мы определили характерную глубину проникновения волны в среду:

$$z_0 = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}} (8)$$

Согласно полученному выражению, чем выше проводимость среды и частота колебаний волны, тем на меньшее расстояние проникает волна.

В начале данного пункта мы говорили, что ω мала. Действительно, например, в случае меди при частоте 50 Гц $z_0 = 0.7$ см. Вообще, приведённые рассуждения и формулы имеют ограничения в использовании, так как $\omega\tau \ll 1$. Характерное время пробега электрона в металле при комнатной температуре составляет 10^{-13}с, поэтому $\omega \ll 10^{13}\ c^{-1}$. То есть частоты $\nu \lesssim 10^{12}$ подходят для данных формул.

Дополнительный случай

Теперь рассмотрим случай, когда $\omega\tau \gg 1$. Подставляя это в формулу (6), мы получаем:

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi\sigma}{\omega \cdot i \cdot (1 - i\omega\tau)} \approx 1 - \frac{4\pi\sigma}{\omega^2 \cdot \tau} = 1 - \frac{4\pi N e^2}{\omega^2 m} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где $\omega_p = \frac{4\pi N e^2}{\omega^2}$. В случае, когда $\omega < \omega_p$ коэффициент преломления становится мнимым. Это значит, что волна при попадании в среду как бы отражается от неё, быстро затухает. Если же $\omega > \omega_p$, то среда прозрачна для волны и преломляет её. Так, например натрий становится прозрачным, начиная с длины волны примерно равной 210 нм.

Скин-эффект на практике

В первую очередь, скин-эффект учитывается при проектировке линий электропередач, которые способны передавать ток под напряжением в сотни киловольт. Производство многожильных проводов обусловлено также скин-эффектом. Данное явление в некоторых случаях приводит к тому, что ток бежит по внешней части провода, не поподая внутрь. Это может приводить к возрастанию сопротивления проводника. Для борьбы с этим в некоторых приборах детали покрывают тонким слоем серебра, что приводит к уменьшению сопротивления, которое обусловлено лишь внешним слоем.