Задача 1

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

- $\langle (n,a)\, n \rangle = \langle n_i a^i n_j \rangle = \frac{1}{3} a^i \delta_i^{\ j} = \frac{1}{3} a^j \to \frac{1}{3}\vec{a}$

- $\langle ([n,a],[n,b]) \rangle =$

$$= \langle \epsilon^{ijk} n_j a_k \, \epsilon_{ilm} n^l b^m \rangle = \epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm} a_k b^m \langle n_j n_l \rangle$$

$$= (\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j)\, a_k b^m \, \frac{1}{3}\delta_{jl} =$$

$$= \frac{(3\delta_{km} - \delta_{km})}{3} a_k b^m = \frac{2}{3}(a,b)$$

- $\langle (n,a)[n,b] \rangle = \langle n_i a^i \epsilon^{jkl} n_k b_l \rangle$

$$= \frac{\epsilon^{jkl} a^i b_l \delta_{ik}}{3} = \frac{[a,b]}{3}$$

Задача 2

В таком случае $\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - h_i h_j)$, где

h_i - составляющие нормали к окр-ти

- $\langle (n,a) n \rangle = \frac{1}{2} a^i (\delta_{ij} - h_i h_j) = \frac{1}{2}(a_j - (a,h) h_j)$

$$\frac{1}{2}(\vec{a} - (\vec{a},\vec{h})\vec{h})$$

- $\langle ([n,a],[n,b]) \rangle = \epsilon^{ijk} \epsilon_{ilm} a_k b^m \langle n_j n_l \rangle =$

$$= (\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j) a_k b^m \frac{1}{2}(\delta_{jl} - h_j h_l)$$

$$= -\frac{1}{2}(\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j) a_k b^m h_j h_l + (a,b)$$

$$= \frac{1}{2} a_k b_m (h_m h_k - h_l h_l \delta_m^k) + (a,b)$$

$$= \frac{1}{2}(a,h)(b,h) - h^2 \delta_{mk} + (a,b)$$

- $\langle (n,a)[n,b] \rangle = \epsilon_{jkl} a_i b_l \langle n_i n_k \rangle =$

$$= \epsilon_{jkl} a_i b_l \frac{1}{2}(\delta_{ik} - h_i h_k) =$$

$$= \frac{[a,b]}{2} - (h,a)\cdot[h,b]$$

Задача 3.

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{2} h_i^k h_j^k\right),\ \text{где}$$

k – номер нормали к окр-ти