Контрольная работа по второй половине курса теории поля

Задача 1

Поток энергии в единичный телесный угол вычисляется через напряженности ЭМ полей в волновой зоне следующим образом:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\Big[\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\mathbf{v}/c)\times\dot{\mathbf{v}}]\Big]^2}{4\pi c^3(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}/c)^6},$$

где все величины в правой части берутся в момент времени $t_r = t - R/c$.

Произвести анализ данного углового распределения, рассмотрев подробно три случая:

1) излучение *нерелятивистской* частицы, $v \ll c$;

2) излучение *ультрарелятивистской* частицы, $\gamma \gg 1$, при $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$;

3) излучение *ультрарелятивистской* частицы, $\gamma \gg 1$, при $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$.

В последних двух случаях представить интенсивность излучения в направлении, составляющем *малый угол* θ со скоростью частицы, в упрощенной форме, произведя разложение по θ. Исходя из полученного выражения, *в каком углу сосредоточено излучение ультрарелятивистской частицы*?

Задача 2

Найти вид остаточных калибровочных преобразований, т.е. условия на функцию f для каждой из калибровок:

1) $\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, калибровка Лоренца;

2) $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, калибровка Кулона;

3) $\phi = 0$, калибровка Вейля;

4) $n_\mu A^\mu = 0$, калибровка с произвольным вектором n^μ.

Задача 3

Доказать, что для нерелятивистского электрона (заряд $-e$, масса m), движущегося в поле ядра (заряд $-Ze$, масса M) сохраняется вектор Рунге-Ленца

$$\mathbf{W} = Ze^2\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{\mu}[\mathbf{p}\times\mathbf{L}], \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}].$$

Задача 4

Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью с уравнением

$$R(\theta) = R_0\big[1 + \beta P_2(\cos\theta)\big]$$

заряжено с постоянной плотностью. Полный заряд равен q. Малый параметр $\beta \ll 1$ гармонически меняется во времени с частотой ω по закону $\beta = \beta_0\cos\omega t$. Удерживая низшие члены разложения по β, вычислить в длинноволновом приближении полную мощность излучения, ответ усреднить по времени.

Hint: Вы находили квадрупольный момент (достаточно было найти Q_{zz}) такой системы при постоянном β в последнем листочке. Теперь β еще и зависит от времени. Полная интенсивность излучения для квадрупольного момента равна

$$I_Q = \frac{\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}}{180c^5}.$$

Квадрат синуса при усреднении по времени равен одной второй. P_2 это полином Лежандра, выражение для него написано в последнем листочке.

Задача 5

Найти квадрупольный момент следующих систем:

1) Равномерно заряженная нить длиной l с полным зарядом q. Поместить начало координат в середину нити.

2) Система из четырех зарядов, два с зарядами $-q$ помещены в точки $(a,-a,0)$ и $(-a,a,0)$ и два с зарядами $+q$ помещены в точки $(a,a,0)$ и $(-a,-a,0)$. Найти систему координат, в которой квадрупольный момент имеет диагональный вид.

Задача 6

Определить энергию взаимодействия магнитного диполя μ, движущегося со скоростью $v \ll c$ с неподвижным ядром с зарядом Ze.

Hint: Можно перейти через преобразование Лоренца в систему отсчета, где магнитный диполь покоится. Электрическое поле от ядра будет магнитным полем в такой системе, откуда можно найти энергию взаимодействия. Это все справедливо, так как случай нерелятивистский.

Задача 6

Найти тензор энергии-импульса для плоской монохроматической волны, бегущей вдоль оси z.

Hint: Монохроматическая волна (волна с одним импульсом k) выглядит следующим образом:

$$A^{\mu}(x) = \mathrm{Re}(\zeta^{\mu}(k)e^{ik(ct-z)}),$$

где $\zeta(k)$ есть вектор поляризации, перпендикулярный вектору распространения волны k.

Симметричный ТЭИ для ЭМ поля мы получали на занятии в виде

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\Big(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big).$$