Вводные задачи

Задача 1

1) Приведите пример эксперимента, в котором независимо бы измерялось ускорение тела, его масса и сила, действующая на него. А затем явно бы проверялся второй закон Ньютона.

2) Как бы выглядели преобразования Галилея, если бы вместо второго закона Ньютона мы имели бы $m\dot{\vec{a}} = \vec{F}$, где $\dot{\vec{a}} = \dddot{\vec{x}}$? Как бы при этом изменился первый закон Ньютона? Какое движение было бы относительным, какое абсолютным?

Задача 2

1) Записать, как будет выглядеть буст Лоренца вдоль оси y и вдоль оси z в виде четырехмерной матрицы. Также записать в виде четырехмерной матрицы повороты в плоскости (x,z) и в плоскости (y,z). Как во всех четырех случаях выглядит обратное преобразование?

2) Проверить, что результатом композиции двух бустов с гиперболическими углами α_1 и α_2 является буст с гиперболическим углом $\alpha - \alpha_1 + \alpha_2$.

Задача 3

1) Пусть один из братьев близнецов, Кирилл, полетел на ближайшую звезду и вернулся обратно на землю, где все это время оставался второй близнец, Мефодий. Какой из братьев окажется старше/младше, если с одной стороны в системе отсчета Мефодия двигался Кирилл, и происходило сокращение его собственного времени, а с другой стороны в системе отсчета Кирилла двигался Мефодий и наоборот должно было сокращаться его собственное время.

2) Подводная лодка начинает движение под водой с релятивистской скоростью. Как вследствие этого измениться сила Архимеда, действуюшая на лодку? Тяжелее или легче при таком движении будет подводной лодке всплыть на поверхность? С одной стороны в системе отсчета воды длина лодки сокращается, следовательно плотность лодки становится больше и лодка должна начать тонуть. С другой стороны в системе отсчета капитана сжимается объем воды по ходу движения лодки, при этом уже плотность жидкости возрастает, а значит лодка должна всплывать.

Задачи на тензоры

Задача 1

В размерности d=4 записать следующие выражения в тензорном виде:

$$\partial_\mu x^\nu =$$

$$\partial_\mu x_\nu =$$

$$\partial_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} =$$

$$\partial_\mu |x| = \partial_\mu \sqrt{x_\alpha x^\alpha} =$$

$$\partial_\mu \frac{1}{|x|} =$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\mu \Big(\frac{x^\alpha x^\beta}{|x|} \Big) =$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\rho\theta}\partial_\rho \partial^\nu \Big(\frac{x^\mu |x|}{k_\gamma x^\gamma} \Big) =$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\rho\theta}\partial_\rho \partial^\nu \Big(\frac{|x|}{(k_\gamma x^\gamma)^2} \Big) =$$

$$\partial_\nu \partial^\beta \Big(x_\alpha f(x) e^{ik_\rho x^\rho} \Big) =$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha \partial^\beta \Big(\frac{x^\mu f(x)}{|x|^3} \Big) =$$

Задача 2

Для функции

$$f(x^\mu + a^\mu) = \frac{1}{[k_\mu(x^\mu + a^\mu)]^2}, \quad a = \mathrm{const}$$

записать в тензорном виде первое и второе слагаемые в ее разложении в ряд Тейлора по параметру a.

Задача 3

В размерности d=3 записать в привычном виде следующие выражения:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{kpq}\varepsilon_{nwq}A_jA_lB_pC_w =$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{kqn}\varepsilon_{pwn}A_jA_mB_iB_lC_qC_w =$$