

Задача 1

Выразить следующие величины через поля E и B :

$$Tr F = F^\mu_\mu, \quad Tr F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad Tr F^3 = F^\mu_\nu F^\nu_\alpha F^\alpha_\mu, \quad F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}.$$

Найти собственные значения матрицы F и выразить их через инварианты $I_1 = (EB)$ и $I_2 = B^2 - E^2$.

Как через собственные значения выражаются величины $Tr F^n$, $n \geq 4$?

Задача 2

Вообще говоря, действие для электро-магнитного поля можно записать в общем виде

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + k \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right],$$

где k является константой. Показать, что второе слагаемое в действии является полной производной.

Hint: То есть второе слагаемое можно записать в виде $\partial_\mu(\dots)$. Для этого нужно использовать свойства антисимметричного тензора, а также определение $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Задача 3

Получить обычные уравнения Максвелла в общей физике из их четырехмерного представления:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \\ \partial_\mu F_{\rho\sigma} - \partial_\rho F_{\mu\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0. \end{cases}$$

Hint: Каждое из двух четырехмерных уравнений дает пару обычных уравнений при подстановке временного или пространственного индексов.

Задача 4

Найти уравнения движения для следующего действия нелинейной электродинамики:

$$S = \int d^4x \left[a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b F^\mu_\nu F^\nu_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\mu \right],$$

где a и b есть некоторые размерные константы.

Задача 5

Аналогично стандартной процедуре записать уравнения Лагранжа-Эйлера и необходимые граничные условия в случае зависимости действия от второй производной:

$$S = \int dt L(z, \dot{z}, \ddot{z}).$$

Задача 6

Запишем действие, описывающее взаимодействие точечной частицы со скалярным полем:

$$S = - \int_1^2 ds \left\{ mc + q\phi[z(s)] \right\},$$

где $ds \equiv \sqrt{\eta_{\mu\nu}} dz^\mu dz^\nu$, $z^\mu(s)$ есть мировая линия частицы, m —ее масса и q —заряд частицы по отношению к скалярному полю. Найти уравнения движения в данной теории. Похоже ли полученное уравнение на уравнение Мещерского с переменной массой $m + \frac{q}{c}\phi$?

Задача 7

На занятии мы рассмотрели поля \vec{E} и \vec{B} , перпендикулярные друг другу. Можно ли проводить аналогичные вычисления (занулить какое-либо из двух полей), если угол между векторами \vec{E} и \vec{B} не прямой? Что изменится в данном случае и как теперь можно действовать?

Задача 8

Узнать, что такое магнитное зеркало, как происходит отражение частиц от сильного магнитного поля и при чем тут инвариант $\frac{v_\perp^2}{H} = const$. Как происходит взаимодействие частиц из космического излучения с магнитным полем Земли? Имеет ли феномен магнитного зеркала отношение к движению частиц между южным и северным магнитными полюсами? Описать процесс движения и отражения частицы в неоднородном магнитном поле.