Задача на два буста

На семинаре было показано, что матрицу преобразования Лоренца в плоскости (t,x), гиперболического поворота, можно представить в виде матричной экспоненты:

$$\Lambda_{tx} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{matrix} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} = e^{K_x \theta},$$

причем мы нашли, что матрица K_x должна иметь следующий вид:

$$K_x = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

Говорят, что Λ_{tx} является элементом группы Лоренца $SO(1,3)$, а K_x является соответствующим генератором данной группы и принадлежит алгебре $so(1,3)$.

Аналогично найти генераторы поворотов в плоскостях (t,y), (t,z) K_y и K_z соответственно.

Также найти матрицы для генераторов тригонометрических поворотов R_x, R_y, R_z. Например, для генератора R_z поворота вокруг оси z справедливо

$$\Lambda_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{iR_z\phi}.$$

Убедитесь в правильности тождеств Бейкера-Хаусдорфа:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{[A,B]},$$

откуда мы получаем

$$e^{-A} e^{-B} e^A e^B = e^{[A,B]},$$

где $[.,.]$ обозначает коммутатор двух матриц, т.е. $[A,B] = AB - BA$.

Теперь нужно увидеть, что

$$[K_x, K_y] = R_z.$$

Что означает данное равенство с точки зрения физики, будут ли два последовательных буста равны тригонометрическому повороту?

Проверить, что в общем виде мы можем записать коммутационное соотношение:

$$[K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} R_k,$$

а также последующие коммутационные соотношения, вместе с предыдущим составляющие алгебру $so(1,3)$:

$$[R_i, K_j] = -\varepsilon_{ijm} K_m,$$

$$[R_i, R_j] = -\varepsilon_{ijk} R_k.$$

Последнее коммутационное соотношение задает подалгебру тригонометрических поворотов $so(3) \subset so(1,3)$.