

Задача 1

Из формул

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

и

$$F^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F^{\mu\nu}$$

вывести преобразования компонент вектор-потенциала и преобразование магнитного и электрического полей соответственно при бусте вдоль координаты z .

Задача 2

Проведем следующий мысленный эксперимент: рассмотрим два ускоряющихся в одном и том же направлении космических корабля и соединяющую их натянутую до предела веревку (один корабль летит строго впереди другого, т. е. ускорение направлено вдоль веревки). Разорвется ли в какой-то момент веревка, соединяющая эти два корабля? Описать, что происходит с веревкой в сопутствующей системе отсчета кораблей и в системе внешнего наблюдателя, увидеть, что все согласовано.

Hint: Задача носит название псевдопарадокса Белла, который формулируется следующим образом: если корабли начнут синхронно ускоряться, то в сопутствующей кораблям системе отсчета расстояние между ними начнет увеличиваться и веревка разорвется. С другой стороны, в системе отсчета, в которой корабли сначала покоились, расстояние между ними не увеличивается, и поэтому веревка разорваться не должна. Нужно разрешить данное противоречие.

Задача 3

В размерности $d = 4$ записать в тензорном виде следующие выражения:

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\nu \left(\frac{g(x^3) x_\beta x_\mu}{(k \cdot x)} \right)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\gamma\rho} \partial_\mu \partial^\gamma \left(\frac{(k \cdot x)}{|x|} \right)$$

Задача 4

Написать аналоги уравнений Максвелла для следующего действия нелинейной электродинамики:

$$S = \int d^4x \sqrt{1 + \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}},$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Проверить, что в пределе $\alpha \rightarrow 0$ данная теория и уравнения переходят в обычную теорию Максвелла.

Hint: Вторая пара уравнений - уравнения движения для этой теории. Изменится ли первая пара уравнений?

Задача 5

Посчитать матричную экспоненту $e^{\theta A}$ для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача на допбалл

Взять следующий интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{\sqrt{2}}(x)}$$

Hint: Задача именно на сообразительность.