Начало и ямы

Задача 1

Могут ли конечномерные матрицы A и B удовлетворять следующему тождеству:

$$\Big[A, B\Big] = i\hbar\mathbb{1}?$$

Что можно сказать про бесконечномерные матрицы?

Hint: След.

Задача 2

Доказать соотношение

$$\det e^{A} = e^{trA}$$

для эрмитовой матрицы, верно ли данное равенство для любой матрицы?

Задача 3

Найти эрмитово сопряженные и обратные операторы для операторов пространственной инверсии I и трансляции T_a. Также найти собственные значения и собственные функции данных операторов I и T_a.

Задача 4

Вычислить действие на волновую функцию оператора $e^{iI\phi}$, где I- оператор пространственной инверсии.

Задача 5

Найти среднее значение дипольного момента для состояния с определенной четностью.

Задача 6

Найти вид следующей волновой функции:

$$\psi(x) = \exp\Big(-\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\Big).$$

в импульсном представлении.

Задача 7

Вычислить коммутаторы

$$[\hat{x}, \hat{p}], \quad [\hat{x}, \hat{p}^2], \quad [\hat{x}^2, \hat{p}], \quad [g(\hat{x}), \hat{p}], \quad [g(\hat{x}), \hat{p}^2], \quad [\hat{x}, \hat{p}^n], \quad [\hat{x}, f(\hat{p})].$$

Задача 8

Вычислить коммутатор

$$[a, f(a^\dagger)],$$

где a и $a^\dagger$ - осцилляторные операторы.

Задача 9

Упростить следующее выражение:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}} U(r) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}},$$

где **a**-постоянный вектор, воспользовавшись, а перед этим еще раз убедившись в справедливости знакомой формулы

$$e^{\zeta\hat{A}}\hat{B}e^{-\zeta\hat{A}} = \hat{B} + \zeta[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}\zeta^2[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

Задача 10

Вычислить коммутатор

$$[a, f(a^\dagger)],$$

где a и $a^\dagger$ - осцилляторные операторы.

Задача 11

Найти коммутатор $[\hat{p}(t_1), \hat{x}(t_2)]$ для осциллятора, где операторы $\hat{p}(t)$ и $\hat{x}(t)$ взяты в представлении Гейзенберга.

Hint: Нужно найти, как от зависит от времени, например, $\hat{x}(t)$ через представление Гейзенберга $\hat{x}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{x}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$, где $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$. То же самое проделать для $\hat{p}$ и найти их коммутатор.

Задача 12

Смотря на сооношения

$$\hbar\omega = kT = \frac{\hbar c}{\lambda} = eV$$

определить какая температура, частота и длина волны соответствует энергии 1 эВ.

Задача 13

Найти уровни энергии и волновую функцию связанного состояния частицы в поле δ-ямы через импульсное представление, то есть изначально беря Фурье от уравнения Шредингера в данном потенциале.

Задача 14

В прямоугольной яме с бесконечными стенками шириной a, частица имеет следующую волновую функцию:

$$\psi(x) = Ax(x-a).$$

Найдите коэффициент A. Также найдите вероятность, с которой частица, чье состояние описывается данной волновой функцией, находится на первом энергетическом уровне данной ямы.

Hint: Как видите, данная волновая функция удовлетворяет граничным условиям в яме. Нужно знать волновые функции основных состояний ямы с бесконечными стенками и правильно найти коэффициент нормировки для функции в условии. Ответ для вероятности не будет зависеть от ширины ямы, как это можно объяснить?

Задача 15

Мимо дельта-ямы, в которой находится частица, очень медленно пролетает другая пустая дельта-яма, в процессе подходя к ней бесконечно близко. С какой вероятностью частица окажется в итоге в пролетающей дельта-яме? Как изменится ответ, если дельта-яма пролетает очень быстро? Если дельта-яма пролетает не бесконечно близко, а на каком-то расстоянии, как будет зависеть ответ от этого расстояния?

Hint: Первая часть задачи подразумевает простой ответ.

Задача 16

Частица массы m движется в одномерном потенциале вида

$$U(x) = \begin{cases} A\delta(x), & |x| < a, \\ +\infty, & |x| > a, \end{cases} \tag{1}$$

где $A > 0$. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний. В случае, когда $\frac{maA}{\hbar^2} \gg 1$, исследуйте положения уровней в нижней части спектра.

Задача 17

Частица массы m движется в одномерном потенциале вида

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -A\delta(x-a), & x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $A > 0$. Найти зависимость числа связанных состояний от параметров a и A.