1.Дз

Задача 1

Задача 1
Могут ли конечномерные матрицы A и B удовлетворять следующему тождеству:

$$\Big[A, B\Big] = i\hbar\mathbb{1}?$$

Что можно сказать про бесконечномерные матрицы?
Hint: След.

$[A, B] = AB - BA$

$\operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr}AB - \operatorname{tr}BA = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}b_{ji} - \sum\limits_i \sum\limits_j b_{ij}a_{ji} = 0$

$\operatorname{tr} i\hbar\mathbb{1} = i\hbar n$

Для конечномерных матриц такого быть не может

Бесконечномерные матрицы ни разу в жизни не видел. На вики пишут, $\hat{x}$ и $\hat{p}$ можно задать такими, поэтому получается что бывает?

Задача 2

Задача 2
Доказать соотношение

$$\det e^{A} = e^{trA}$$

для эрмитовой матрицы, верно ли данное равенство для любой матрицы?

$A = SBS^{\dagger}$, где B — диагональная

$\det e^{A} = \det Se^{B}S^{\dagger} = \det e^{B} = \prod\limits_i e^{b_i}$

$e^{\operatorname{tr}A} = e^{\operatorname{tr}B} = e^{\sum b_i} = \prod e^{b_i}$

Ч.т.д.

Доказательство для недиагонализируемых матриц тоже есть, но оно раз в 10 больше

Задача 3

Задача 3
Найти эрмитово сопряженные и обратные операторы для операторов пространственной инверсии I и трансляции T_a. Также найти собственные значения и собственные функции данных операторов I и T_a.

$(I\psi)(x) = \psi(-x)$

$II = \mathbb{1} \implies I = I^{-1}$

$I^{\dagger} = I^{-1} = I$

$\langle\varphi|I|\psi\rangle = \int \varphi^*(x)\psi(-x)dx \xlongequal{x\to -x} \int \varphi^*(-x)\psi(x)dx = (\langle\psi|I|\varphi\rangle)^* \implies I = I^{\dagger}$

$I\varphi(x) = \lambda\psi(x)$

$II\psi(x) = \lambda^2\psi(x) = \psi(x)$

$\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1$

Собственные функции — чётные и нечётные

$(T_a\psi)(x) = \psi(x - a)$

$T_{-a} = T_a^{-1}$ — очев

$\langle\varphi|T_a|\psi\rangle = \int \varphi^*(x)\psi(x-a)dx \xlongequal{x\to x+a} \int \varphi^*(x+a)\psi(x)dx = (\langle\psi|T_{-a}|\varphi\rangle)^* \implies T_a^\dagger = T_a^{-1}$

$T_a\psi = \lambda\psi$-

Что-то что-то унитарный оператор, интеграл квадрата волновой функции всегда 1, значит

$|\lambda| = 1 \implies \lambda = e^{-ika}$

Значит ψ периодичная значит $\psi = e^{-ikx}g(x)$ где g периодичная или типо того

Задача 4

Задача 4

Вычислить действие на волновую функцию оператора $e^{iI\phi}$, где I- оператор пространственной инверсии.

$A\psi \equiv e^{iI\varphi}\psi$

А это само по себе не ответ?

2 нейронки сказали, что нужно сделать так:

$$e^{iI\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iI\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iI\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iI\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi^{2n}}{(2n)!}\mathbb{1} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}I =$$

$$= \cos\varphi\cdot\mathbb{1} + i\sin\varphi I$$

Задача 5

Задача 5

Найти среднее значение дипольного момента для состояния с определенной четностью.

$\hat{d} = q\hat{x}$ — дипольный момент

$\psi(x) = \pm\psi(-x) \implies |\psi(x)|^2$ — чётная

$$\langle\hat{d}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)qx\psi(x)d^3x = q\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)x|\psi(x)|^2d^3x =$$

$$= q\left(-\int_0^{+\infty}x|\psi(x)|^2d^3x + \int_0^{+\infty}x|\psi(-x)|^2d^3x\right) = 0$$

Задача 6

Задача 6

Найти вид следующей волновой функции:

$$\psi(x) = \exp\Big(-\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\Big).$$

в импульсном представлении.

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right)$$

$$\psi(p) = F[\psi(x)](p) \xlongequal{\text{Wolfram Alpha}} \frac{\sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{(p_0+\hbar p)(2ix_0\hbar + a^2(p_0+\hbar p))}{2\hbar^2}\right)}{\sqrt{a^{-2}}} =$$

$$= \sqrt{2\pi}|a|\exp\left(-\frac{a^2(p_0+\hbar p)^2}{2\hbar^2} + \frac{ix_0(p_0+\hbar p)}{\hbar}\right)$$

Задача 7

Задача 7

Вычислить коммутаторы

$$[\hat{x},\hat{p}],\quad [\hat{x},\hat{p}^2],\quad [\hat{x}^2,\hat{p}],\quad [g(\hat{x}),\hat{p}],\quad [g(\hat{x}),\hat{p}^2],\quad [\hat{x},\hat{p}^n],\quad [\hat{x},f(\hat{p})].$$

$\hat{x} = x\cdot$

$\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$

$[\hat{x},\hat{p}]|\rangle = \hat{x}\hat{p}|\rangle - \hat{p}\hat{x}|\rangle = \hat{x}\hat{p}|\rangle - \hat{p}(x|\rangle) = x\hat{p}|\rangle + i\hbar|\rangle - x\hat{p}|\rangle = i\hbar|\rangle$

$[\hat{x},\hat{p}^2] = \hat{x}\hat{p}^2 - \hat{p}^2\hat{x} = x\hat{p}^2 - \hat{p}(-i\hbar + x\hat{p}) = x\hat{p}^2 + i\hbar\hat{p} + i\hbar\hat{p} - x\hat{p}^2 = 2i\hbar\hat{p}$

$[\hat{x}^2,\hat{p}] = \hat{x}^2\hat{p} - \hat{p}\hat{x}^2 = x^2\hat{p} + 2i\hbar x - x^2\hat{p} = 2i\hbar\hat{x}$

$[g(\hat{x}),\hat{p}] = i\hbar g'(\hat{x})\hat{p}$

$[g(\hat{x}),\hat{p}^2] = g(\hat{x})\hat{p}^2 - \hat{p}(-i\hbar g'(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{p}) = g(\hat{x})\hat{p}^2 - i^2\hbar^2 g''(\hat{x}) + i\hbar g'(x)\hat{p} + i\hbar g'(\hat{x})\hat{p} - g(\hat{x})\hat{p}^2 =$
$= \hbar^2 g''(\hat{x}) + 2i\hbar g'(x)\hat{p}$

$$[\hat{x},\hat{p}^n] = x\hat{p}^n - \hat{p}^n(\hat{x}) = x\hat{p}^n - \sum_{k=0}^{n} C_n^k\hat{p}^k x\hat{p}^{n-k} = -\sum_{k=1}^{1} C_n^k\hat{p}^k x\hat{p}^{n-k} = ni\hbar\hat{p}^{n-1} = i\hbar(\hat{p}^n)'$$

$$[\hat{x},f(\hat{p})] = [\hat{x},\sum_{n=0}^{\infty} c_n\hat{p}^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\hat{x},\hat{p}^n] = i\hbar\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\hat{p}^n)' = i\hbar\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\hat{p}^n\Big)' = ihf'(\hat{p})$$

Задача 8

Задача 8

Вычислить коммутатор

$$[a, f(a^\dagger)],$$

где a и $a^\dagger$ - осцилляторные операторы.

$[A,BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = [A,B]C + B[A,C]$

$[a,a^\dagger] = 1$

Индукция $[a,(a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$

$[a,(a^\dagger)^1] = 1(a^\dagger)^0 = 1$ — верно

$[a,(a^\dagger)^n] = [a,(a^\dagger)^{n-1}a^\dagger] = [a,(a^\dagger)^{n-1}]a^\dagger + (a^\dagger)^{n-1}[a,a^\dagger] =$
$= (n-1)(a^\dagger)^{n-2}a^\dagger + (a^\dagger)^{n-1}1 = n(a^\dagger)^{n-1} = ((a^\dagger)^n)'$

ЧТД

Аналогично №7 через Тейлора

$[a,f(a^\dagger)] = f'(a^\dagger)$

Задача 9

Задача 9

Упростить следующее выражение:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}}U(r)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}},$$

где **a**-постоянный вектор, воспользовавшись, а перед этим еще раз убедившись в справедливости знакомой формулы

$$e^{\zeta\hat{A}}\hat{B}e^{-\zeta\hat{A}} = \hat{B} + \zeta[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}\zeta^2[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \dots$$

$e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}U(r)e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}$

Убеждаемся в справедливости незнакомой формулы

Пусть $\hat{B}(\zeta) = e^{\zeta\hat{A}}\hat{B}e^{-\zeta\hat{A}}$

$$\hat{B}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{B}^{(n)}(0)}{n!}\zeta^n$$

$\hat{B}(0) = \hat{B}$

$\hat{B}'(0) = \hat{A}e^{\zeta\hat{A}}\hat{B}e^{-\zeta\hat{A}} + e^{\zeta\hat{A}}\hat{B}(-\hat{A})e^{-\zeta\hat{A}} = e^{\zeta\hat{A}}[\hat{A},\hat{B}]e^{-\zeta\hat{A}}\Big|_{\zeta=0} = [\hat{A},\hat{B}]$

Аналогично

$\hat{B}^{(n)}(0) = [\hat{A},\hat{B}^{(n-1)}(0)]$

ЧТД

Теперь к задаче

$$\hat{A} = \frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}$$

$\zeta = 1$

$\hat{B} = \bar{r}$ — пока так для удобства

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \sum_k \frac{i}{\hbar} a_k [p_k, r_l] = \sum_k a_k \delta_{kl} = \bar{a}$$

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{A}, \bar{a}] = 0$$

$$[\hat{A}, [\dots]] = 0$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}}\hat{\bar{r}}e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}} = \hat{\bar{r}} + \bar{a}$$

Простой случай посчитали, теперь

$$e^{\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}}\hat{\bar{r}}^n e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}} = \left(e^{\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}}\hat{\bar{r}}e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}}\right)^n = (\hat{\bar{r}} + \bar{a})^n$$

Через Тейлора получаем

$$e^{\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}}U(\hat{\bar{r}})e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{a}\hat{\bar{p}}} = U(\hat{\bar{r}} + \bar{a})$$

Задача 10

см. задачу 8

Задача 11

Задача 11

Найти коммутатор $[\hat{p}(t_1), \hat{x}(t_2)]$ для осциллятора, где операторы $\hat{p}(t)$ и $\hat{x}(t)$ взяты в представлении Гейзенберга.

Hint: Нужно найти, как от зависит от времени, например, $\hat{x}(t)$ через представление Гейзенберга $\hat{x}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{x}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$, где $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$. То же самое проделать для $\hat{p}$ и найти их коммутатор.

$[\hat{p}(t_1), \hat{x}(t_2)]$ — ?

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

$$\hat{x}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{x}_0 e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \implies \dot{\hat{x}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}(t)]$$

$$[\hat{H}, \hat{x}] = \frac{[\hat{p}^2, \hat{x}]}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\underbrace{[\hat{x}^2, \hat{x}]}_{0} = -i\hbar\frac{\hat{p}}{m}$$

$$\hat{p}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{p}_0 e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \implies \dot{\hat{p}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}]$$

$$[\hat{H}, \hat{p}] = \frac{1}{2m}\underbrace{[\hat{p}^2, \hat{p}]}_{0} + \frac{m\omega^2}{2}[\hat{x}^2, \hat{p}] = i\hbar m\omega^2\hat{x}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \frac{\hat{p}}{m} \\ \dot{\hat{p}} = -m\omega^2\hat{x} \end{cases}$$

$$\ddot{\hat{x}} = -\omega^2\hat{x}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{A}\cos(\omega t) + \hat{B}\sin(\omega t) \\ \hat{p} = m\dot{\hat{x}} = m\hat{B}\omega\cos(\omega t) - m\hat{A}\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{x}_0 \\ \hat{B} = \frac{\hat{p}_0}{m\omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{x}_0\cos(\omega t) + \frac{\hat{p}_0}{m\omega}\sin(\omega t) \\ \hat{p} = \hat{p}_0\cos(\omega t) - m\omega\hat{x}_0\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$[\hat{p}(t_1), \hat{x}(t_2)] = [\hat{p}_0 \cos(\omega t_1), \hat{x}_0 \cos(\omega t_2)] + [-m\omega \hat{x}_0 \sin(\omega t_1), \frac{\hat{p}_0}{m\omega} \sin(\omega t_2)] =$$

$$= \cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)[\hat{p}_0, \hat{x}_0] + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)[\hat{p}_0, \hat{x}_0] = -i\hbar\cos(\omega(t_2 - t_1))$$

Задача 12

Смотря на сооношения

$$\hbar\omega = kT = \frac{\hbar c}{\lambda} = eV$$

определить какая температура, частота и длина волны соответствует энергии 1 эВ.

$$E = \hbar\omega = kT = \hbar\frac{c}{\lambda} = eV$$

Пусть $\hbar = k = c = 1$

Тогда $\nu = T = \lambda = 1эВ$

В СИ:

$$h = 4.1 \cdot 10^{-15} эВ \cdot с$$

$$\nu = \frac{eV}{h} = 2.4 \cdot 10^{14} с^{-1} = 244 ТГц$$

$$k = 8.6 \cdot 10^{-5} эВ \cdot К^{-1}$$

$$T = \frac{eV}{k} = 1.16 \cdot 10^{4} К$$

$$c = 299,792,458 \frac{м}{с}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1.249 \cdot 10^{-6} м = 1249 нм$$

Задача 13

Задача 13

Найти уровни энергии и волновую функцию связанного состояния частицы в поле δ-ямы через импульсное представление, то есть изначально беря Фурье от уравнения Шредингера в данном потенциале.

$$u(x) = -\alpha\delta(x)$$

СУШ

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + u = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \alpha\delta(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \alpha\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Фурье

$$(\hat{p}^2\psi)(p) = \int e^{-\frac{ipx}{\hbar}}(-\hbar^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)dx = 0 + \hbar^2\int \frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx = 0 - \hbar^2\int \frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\psi(x)dx =$$

$$= \int p^2 e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\psi(x)dx = p^2\psi(p)$$

$$(\delta\psi)(p) = \int e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\delta(x)\psi(x)dx = \psi_0$$

$$\psi_0 = \psi(x=0) \xlongequal{\text{обр. Фурье}} \frac{1}{2\pi\hbar}\int \psi(p)dp$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) - \alpha\psi_0 = E\psi(p)$$

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)\psi(p) = \alpha\psi_0$$

$$\boxed{\psi(p) = \frac{\alpha\psi_0}{\frac{p^2}{2m} - E}}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \frac{\alpha\psi_0}{\frac{p^2}{2m} - E}dp$$

$$1 = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \frac{\alpha\psi_0}{\frac{p^2}{2m} - E}dp \overset{\text{Wolfram}}{=\!=\!=} -\frac{\alpha m}{2\hbar}\sqrt{-\frac{2}{mE}} \overset{1.\text{Дз}}{=} \frac{i\alpha}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2}$$

$$\boxed{\psi(p) = \frac{\alpha\psi_0}{\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha^2 m}{\hbar^2}}}$$

Я не буду это нормировать

Задача 14

Задача 14

В прямоугольной яме с бесконечными стенками шириной a, частица имеет следующую волновую функцию:

$$\psi(x) = Ax(x-a).$$

Найдите коэффициент A. Также найдите вероятность, с которой частица, чье состояние описывается данной волновой функцией, находится на первом энергетическом уровне данной ямы.

Hint: Как видите, данная волновая функция удовлетворяет граничным условиям в яме. Нужно знать волновые функции основных состояний ямы с бесконечными стенками и правильно найти коэффициент нормировки для функции в условии. Ответ для вероятности не будет зависеть от ширины ямы, как это можно объяснить?

$$\psi(x) = Ax(x-a)$$

Нормировка

$$\int |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$A^2\int_0^a x^2(x-a)^2 = A^2\int_0^a (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2)dx = A^2\left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^5}{2} + \frac{a^5}{3}\right) = \frac{6-15+10}{30}A^2a^5 =$$

$$= \frac{1}{30}A^2a^5 = 1$$

$$A = \sqrt{30}a^{-2.5}$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$W_1 = |\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1\psi(x)dx\right|^2 = \left|\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sqrt{30a^{-5}}x(x-a)dx\right|^2 =$$

$$= 60a^{-6}\left|\int_0^a x^2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - ax\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\right|^2 \overset{\text{Wolfram}}{=\!=\!=} \frac{960}{\pi^6} \approx \frac{960}{961} \approx 99.7\%$$

Конечно не зависит. У нас же и базис и волна одинаково линейно растягиваются при изменении a. Так как всё нормировано, вертикальные коэффициенты тоже не вылезают.

Задача 15

Задача 15

Мимо дельта-ямы, в которой находится частица, очень медленно пролетает другая пустая дельта-яма, в процессе подходя к ней бесконечно близко. С какой вероятностью частица окажется в итоге в пролетающей дельта-яме? Как изменится ответ, если дельта-яма пролетает очень быстро? Если дельта-яма пролетает не бесконечно близко, а на каком-то расстоянии, как будет зависеть ответ от этого расстояния?

Hint: Первая часть задачи подразумевает простой ответ.

Если представить, что они были одной единой ямой, которая совершила митоз, то частица очевидно оказажется в одной из них с шансом 50%

Если ямы движутся медленно, то при правильно выбранном t_0, примерно это и происходит.

Так как энергия частицы определена довольно точно, то при времени "взаимодействия" меньше Δt по Гейзенбергу, частица может и не понять что произошло

Так же