№21.9

Решение:

1) Найдём ур-е движения маятника

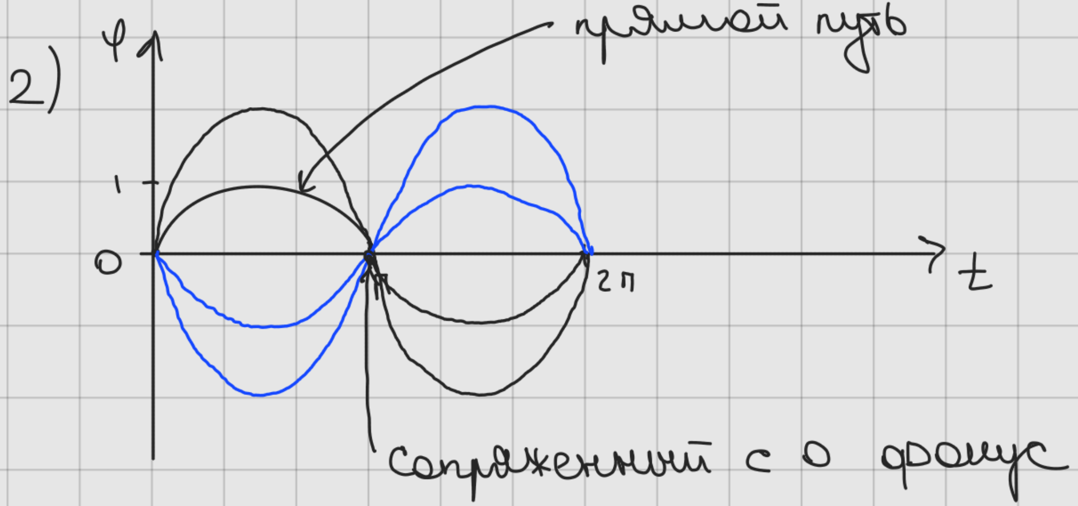
$T = \frac{ml^2\dot\varphi^2}{2}$; $A = ml^2$

$\Pi = -mgl\cos\varphi$; $\left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = mgl = C$

$\cancel{m}gl - \cancel{m}l^2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi = C\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha_0\right)}$

2)



3) Найдём кинетические фокусы и прямые пути:

а) $\exists\ \varphi(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \Rightarrow \varphi = C\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$

$\varphi(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \forall C \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все пути прямые

$\exists$ прямые пути: $\varphi_1 = C_1 \sin(\omega t)$
$\varphi_2 = C_2 \sin(\omega t)$

$\varphi_1(t') = \varphi_2(t') \Longleftrightarrow \sin(\omega t') = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega t' = \pi k \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t' = \pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow (0, \pi k)$ – сопряженный с $(0, 0)$ кинетический фокус.

б) $\exists\, \varphi(0) = \varphi_0 \Rightarrow \alpha = 0,\ C = 1 \Rightarrow$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right) = 1$ $\Rightarrow \varphi = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)$ – прямой путь

в) Если $\varphi(0) = 1 \rightarrow$ решений нет.

№21.23

Дано: $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \dot{q}_i^2 + b_i^2 q_i^2$; $a_i, b_i = const$

Док-ть: Действие по Гамильтону на прямом пути имеет глобальный минимум

Док-во:

1) $W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\, dt$

2) $\exists\ \hat{\bar{q}}(t)$ – прямой путь, рассмотрим

его вариацию $\hat{\bar{q}} + \bar{\delta q}$

3) $W(\hat{\bar{q}} + \bar{\delta q}) - W(\hat{\bar{q}}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \cdot \left[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \delta\dot{q}_i^2 + b_i^2 \delta q_i^2 \right] dt$

Данное выражение больше 0 при $\forall \bar{\delta q}$,

при их увеличении оно только возрастает

$\Rightarrow$ на $\hat{\bar{q}}$ достигается глобальный минимум

№ 21.12

Док-ть: показать, что действие по Гамиль-

тону на прямом пути $z_{пр} = g\frac{t^2}{2}$ меньше действия на опальных путях $z_{оп} = at^n (n \geq 1)$

Решение:

1) $L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz$

2) $W = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$

3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

$m\ddot{z} - mg = 0 \Rightarrow \ddot{z} = g \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{z}(t) = \frac{gt^2}{2}$ (т.к. рассматриваем пути вида $a_n t^n$)

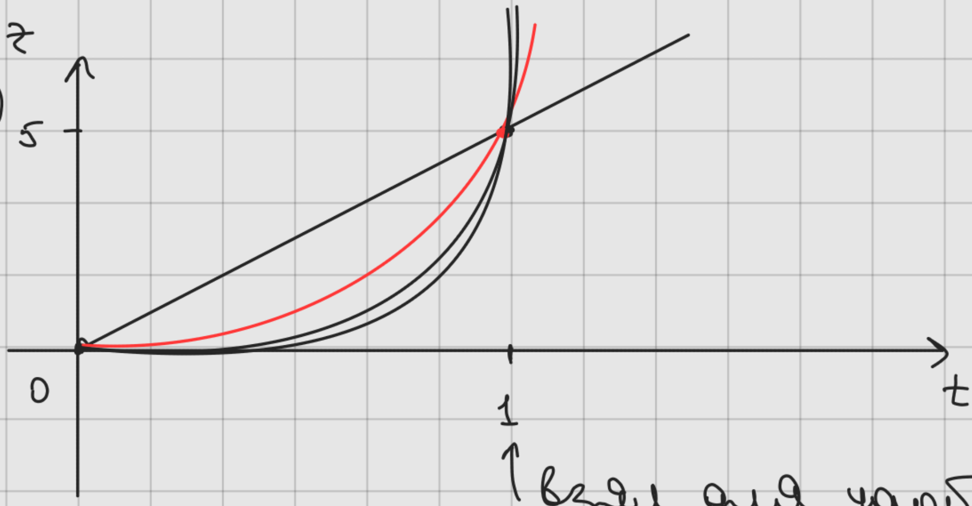
4) Покажем что на $\hat{z}(t)$ достигается min

W:

$W(\hat{z}+h) - W(\hat{z}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{h}^2}{2}\,dt > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $\hat{z}$ достигается min.

5)



взял для удобства

Если взять, к примеру, $t=2$, то

$z(2) = 20 \Rightarrow a_n = \frac{20}{2^n}$ и т.д.