Николай Комаров ДЗ №5

Задача 1

Постройте схему полиномиального (от n) размера для функции maj_n, которая выдает 1 тогда и только тогда, когда единице равны большинство из ее n аргументов. (Можно использовать сортировку.)

Решение

Будем считать, что количество аргументов нечетно, чтобы можно было выявить явное большинство элементов. Раз можно использовать сортировку, то тогда ей и воспользуемся. Сначала отсортируем аргументы функции maj_n, например, чтобы сначала шли единицы (хотя в целом неважно).

Пусть получили вход: $x_1 x_2 ... x_n$, где первые k аргументов единицы.

Суть схемы в том, что мы будем брать дезъюнкцию пар элементов сначала и с конца списка, а затем брать конъюнкцию этих пар, для элемента в середине возьмем дезъюнкцию с самим собой. Если единиц больше, чем 0, то в каждом дезъюнкте будет хотя бы по одной 1, и значит все в месте даст 1, если 0 больше, чем 1, то найдется хотя бы один дезъюнкт, где пара 0, что занулит всю формулу.

Схема получается следующая:

Сначала вычисляем дезъюнкты $t_i := x_i \vee x_{n-i+1}$, где $1 \leqslant i \leqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Округление вверх, чтобы точно перемахнуть через середину).

Потом считаем конъюкцию всех дезъюнктов:

$t_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} := t_1$

$t_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + j} := t_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + j - 1} \wedge t_j$, где $2 \leqslant j \leqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Данная схема имеет размер порядка $O(n)$ ($\lceil \frac{n}{2} \rceil$ дезъюнктов + $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ их конъюнкций). Учтем сортировку, которая, очевидно, полиномиальная. Таким образом, совокупная схема с сортировкой не будет превышать полином по размеру.

Задача 2

Укажите булеву функцию, не представимую никакой 3-КНФ.

Решение

Ответ: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

Обоснование: Пусть смогли построить 3-КНФ представление. Формула выдает 0 только в случае, когда все аргументы равны 0. При этом, если эту функцию выражать через 3-КНФ, так как в каждом дезъюнкте по 3 литерала, найдется такая комбинация из трех аргументов, которая занулит какой-то из дезъюнктов, и по скольку эта комбинация состоит из 3х аргументов, пусть это будут x_1, x_2, x_3, она независима от 4го, таким образом мы можем получить 2 набора аргументов, которе обращают наше 3-КНФ представление в 0, – $(x_1, x_2, x_3, 0)$ и $(x_1, x_2, x_3, 1)$, но, мы значем, что для нашей функции существеут только один такой набор $\Rightarrow$ противоречие.

Задача 3

Докажите, что всякую функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ можно вычислить схемой размера $O(2^n)$ (Рассмотрите тождество $f(y, \vec{x}) = (y \wedge f(1, \vec{x})) \vee (\neg y \wedge f(0, \vec{x}))$).

Доказательство

□ Докажем по индукции.

База:

n=1 – очевидно, любую фунцию одного аргумента можно вычислить схемой размера $2^1 = 2$, так как она может состоять максимум из 2х литералов ($\neg x$ operator x)

Шаг

Пусть можем вычислить любую функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ за $O(2^n)$. Рассмотрим функцию $f' : \{0,1\}^{n+1} \to \{0,1\}$. Для этого представим ее в виде:

$$f'(y, \vec{x}) = (y \wedge f(1, \vec{x})) \vee (\neg y \wedge f(0, \vec{x}))$$

Размер вычисляющей ее схемы: $S_{n+1} = 2S_n + 4$

То есть пордок размера схемы $2 * O(2^n) + 4 = O(2^{n+1})$, следовательно шаг индукции выполнен и утверждение верно.

■