

Николай Комаров ДЗ 1

Задача 1

Постройте1 машину Тьюринга, вычисляющую функцию $n \mapsto (\text{остаток от деления } n \text{ на } 5)$ в унарной кодировке аргументов. Оцените время вычислений на вашей машине в зависимости от n .

Решение:

Машина едет по числу и по очереди меняет состояния в диапазоне $\{q_1, \dots, q_5\}$ и единички на меченые числа в диапазоне $\{1', \dots, 5'\}$. После достижения конца числа машина откатывается до ближайшей $5'$ или $\#$, по дороге заменяя меченые числа нормальными единичками. После достижения $\#$ алгоритм завершается, после достижения $5'$, все символы начиная с этого $5'$ заменяются на $\#$ и затем алгоритм завершается. Суммарно два прохода по числу - назад и вперед, сложность $O(n)$.

$$\Sigma = \{1\}$$

$$\Gamma = \{1, \#, 1', 2', 3', 4', 5'\}$$

$$Q = \{q_0, q_{0'}, q_1, \dots, q_5, q_{\text{back}}, q_{\text{del}}, q_f\}$$

δ :

- $q_0 \# \rightarrow q_{0'} \# +1$
- $q_{0'} \# \rightarrow q_f \# 0$ – если пустой вход, то выходим
- $q_{0'} 1 \rightarrow q_1 1 0$ – если вход не пустой, то меняем состояние для прохода по числу
- $q_1 1 \rightarrow q_2 1' +1$ – проходим по числу, меняя состояния
- $q_2 1 \rightarrow q_3 2' +1$
- $q_3 1 \rightarrow q_4 3' +1$
- $q_4 1 \rightarrow q_5 4' +1$
- $q_5 1 \rightarrow q_1 5' +1$
- $q_1 \# \rightarrow q_{\text{back}} \# -1$ – когда дошли до конца числа, условия прерывания
- $q_2 \# \rightarrow q_{\text{back}} \# -1$
- $q_3 \# \rightarrow q_{\text{back}} \# -1$
- $q_4 \# \rightarrow q_{\text{back}} \# -1$
- $q_5 \# \rightarrow q_{\text{back}} \# -1$
- $q_{\text{back}} \begin{pmatrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{pmatrix} \rightarrow q_{\text{back}} 1 -1$ – едем назад до ближайшей $5'$ или $\#$, ставим нормальные 1
- $q_{\text{back}} \begin{pmatrix} 5' \\ \# \end{pmatrix} \rightarrow q_{\text{del}} \# -1$ – начиная с $5'$ переключается на удаление
- $q_{\text{del}} \begin{pmatrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \end{pmatrix} \rightarrow q_{\text{del}} \# -1$
- $q_{\text{del}} \# \rightarrow q_f \# 0$ – когда все удалили, завершаемся

Задача 2

Опишите машину Тьюринга, вычисляющую функцию $n, m \mapsto n * m$ в унарной кодировке аргументов. Аргументы разделяются специальным символом $\$ \in \Gamma \setminus \Sigma$. Оцените время вычислений на вашей машине в зависимости от длины входа.

Описание:

Начальная конфигурация: $\#11..1\$11..1\#$. Пусть первое число n , а второе m . Алгоритм машины:

0. Проверка на пустой вход.
1. Меняем единицу первого числа на $\#$, переходим в режим записи второго числа.
2. Машина копирует число m и приписывает результат справа, алгоритм копирования такой же как и алгоритм умножения на 2 разобранный на занятии, символы, которые скопированы, помечаются, чтобы на следующей итерации число не удваивалось целиком, а копировался только хвост.
3. После копирования машина переходит в новое состояние и возвращается в начало числа n .
4. Цикл повторяется, пока от числа n ничего не останется.
5. Затем машина приводит все технически меченные символы к 1, убирает разделитель и завершается.

Для копирования числа используем алгоритм умного умножения из задачи 3 со сложностью $O(m \log m)$. Таких копирований n штук, плюс на каждой итерации копирования надо доехать до правого хвоста единичек, так как в левой части правого числа будет поле “отработавших” уже скопированных меченых единичек, максимальная длина поля меченых единичек $m * (n - 2)$. Таким образом общая сложность $O(n * (m \log m + m * n))$.

Задача 3

Опишите машину Тьюринга, за время $O(n \log n)$:

- а) преобразующую унарную запись числа n в бинарную;
- б) преобразующую бинарную запись числа n в унарную;
- с) вычисляющую функцию $n \mapsto 2n$ в унарной кодировке.

Решение а):

(разбирали на занятии)

1. Головка едет по унарной записи числа и удаляет каждую вторую встретившуюся единицу и имеет два состояния, которые характеризуют четность удаленной единицы.
2. Через какой-нибудь разделитель, головка записывает слева от унарной записи числа 1 или 0 в зависимости от четности последней удаленной единицы перед встречей с $\#$ (1 если нечетное состояние, 0 если четное состояние).
3. После записи, машина возвращается удалять каждые вторые единички, на последующих итерациях записывая ответ слева от строящейся бинарной записи числа. Повторяются наши 1-3 пока не пропадут все вторые единички в числе.
4. После окончания бинарной записи, алгоритм зачищает унарную.

Сложность: удаление единичек – $O(n)$, запись бинарной части – $O(\log n)$, таким образом общая сложность $O(n \log n)$.

Решение б)

1. Вычитаем 1 из записи бинарного числа.
2. Записываем 1 перед бинарным числом слева через спец разделитель.

3. Двигаем бинарную запись числа вправо. Повторяем шаги 1-3 пока бинарное число не превратиться в нули.
4. После обнуления бинарного числа, очищаем лишнее и завершаем.

Сложность: вычитание единицы - $O(\log n)$, запись перед бинарником единицы - константа, сдвиг бинарной записи - $O(\log n)$, итераций n штук, таким образом общая сложность $O(n \log n)$.

Решение с)

1. Перегоняем унарную запись в бинарную.
2. Дописываем 0 справа от бинарной записи.
3. Перегоняем бинарь обратно в унар. Profit!

Общая сложность $O(n \log n)$.