Николай Комаров ДЗ №5

Задача 1

Класс NP замкнут относительно операций ∪, ∩, умножения языков и звездочки Клини.

Доказательство

1. Замыкание относительно ∪

□

Если класс замкнут относительно операции ∪, то любое объединение элементов этого класса должно оставаться в самом классе, покажем это.

По определению $L \in \mathrm{NP} \Leftrightarrow \exists$ полином. 0-1 м.т. M и $\exists$ многочлен q: $\forall \vec{x} \in \{0,1\}^*$ ($\vec{x} \in L \Leftrightarrow \exists \vec{y} : |\vec{y}| \leqslant q(|\vec{x}|)$ $M(\vec{y}, \vec{x}) = 1$), то есть существует подсказка полиномиальной длины с помощью которой за полиномиальное время можно распознавать слова из языка из NP.

Возьмем два случайных языка из NP, обозначим их за L и K, покажем, что $L \cup K \in \mathrm{NP}$. Пусть у нас есть 0-1 полином. м.т. M распознающая L с подсказкой $\vec{y}$ и 0-1 полином. м.т. D распознающая K с подсказкой $\vec{r}$. Соберем с их помощью общую 0-1 машину M' распознающую $L \cup K$. Машина M' будет принимать на вход элементы принадлежащие либо L, либо K и некоторую посказку полиномиальной длины, затем последовательно применять к ним каждый из алгоритмов машин M и D с подсказкой, при этом мы знаем, что полиномиальная подсказка позволяющая определить принадлежность к языку точно найдется (это либо $\vec{y}$, либо $\vec{r}$, которые точно существуют исходя из того, что языки по отдельности лежат в NP). У нас имеется 4 комбинации алгоритмов машин и подсказок (2 на 2), такми образом у худшем случае машине потребуется константное замедление, чтобы проверить все комбинации алгоритмов с подсказками и показать принадлежность входа языку.

Подобная машина M' выдаст 1, если какая-либо из комбинаций алгоритмов и подсказок дала 1, то есть вход принадлежит одному из языков L или K, и 0, если никакая из 4 комбинаций не дала 1, то есть когда вход не принадлежит ни одному из языков. Машина M' состоит из полиномиальных 0-1 машин, которые в худшем случае запускаются 4 раза, поэтому и сама является полиномиальной 0-1 м.т., а также имеет подсказку полиномиальной длины, позволяющую определить относится ли слово к $L \cup K$.

Отсюда следует, что $L \cup K \in \mathrm{NP}$, так как существует 0-1 полином. м.т. M' распознающая слова из $L \cup K$ с полиномиальной подсказкой. А из этого следует, что класс NP замкнут относительно операции объединения, так как объединение любых двух элементов из него лежит в нем самом.

■

2. Замыкание относительно ∩

□

Идейно то же самое, что и в предыдущем пункте, только тут на вход составной машины будет прилетать элемент, принадлежащий обоим языкам сразу и надо смотреть не на то, что хотя бы одна комбинация алгоритма и подсказки выдаст 1, а чтобы оба лгоритма с какой-то из подсказок выдавали 1. В остальном доказательство такое же, как и в предыдущем пункте:

Берем два случайных языка из NP, так как каждый пренадлежит NP, то для каждого найдется 0-1 полином. м.т. распознающая этот язык с полиномиальной подсказкой.

Из с помощью этих машин конструируем составную 0-1 полином. м.т., которая уже может распознавать пересечение этих языков.

Таким образом, можем составить 0-1 полином. м.т. распознающую пересечение двух языков из NP с полиномиальной подсказкой, значит и само пересечение этих языков лежит в NP, значит класс NP замкнут относительно операции пересечения.

■

3. Замыкание относительно умножения языков

□

Аналогично

Берем два случайных языка из NP, так как каждый пренадлежит NP, то для каждого найдется 0-1 полином. м.т. распознающая этот язык с полиномиальной подсказкой.

Из с помощью этих машин конструируем составную 0-1 полином. м.т., которая уже может распознавать умножение этих языков. В данном случае логика составной машины следующая: нужно применять алгоритм первой машины пока она не распознает свою часть слова, таким образом найдем "стык", и от него уже применем алгоритм второй машины. Подобная операция замедлит общую сложность не более чем полином, значит составная машина, состоящая из двух полиномиальных, тоже останется полиномиальной и будет распознавать конкатенацию слов из двух языков.

Таким образом, можем составить 0-1 полином. м.т., распознающую умножение двух языков из NP с полиномиальной подсказкой, значит и сам результат умножения этих языков лежит в NP, значит класс NP замкнут относительно операции умножения языков.

■

4. Замыкание относительно звездочки Клини

□

В предыдущем пункте доказали замкнутость для конкатенации двух строк, теперь распространим это конечное количетво, чтобы получить звуздочку Клини.

Звездочка Клини - по сути конкатенация конечного числа слов из языка, покажем, что результат этой операции тоже лежит в NP.

Из предыдущего пункта конкатенация двух слов из языка из NP лежит в NP. Возьмем этот результат, он сам по себе является словом из языка из NP и сконкатенируем со следующем в последовательности конкатенаций словом, рельутат этой операции тоже будет лежать в NP. Будем продолжать так пока пока все слова в последовательности не кончаться, а это случится ведь звездочка Клини - конкатенация **конечного** числа элементов, в конце получим, что результат последней конкатенации по свойству из п.3 тоже лежит в NP, то есть результат всей операции лежит в NP.

■

Задача 2

Если P = NP, то NP = coNP.

Доказательство

□

Пусть P = NP, тогда возьмем язык L, который лежит в P и соответсвенно в NP. Раз $L \in$ NP, тогда по определению $\overline{L} \in$ coNP. Также имеем, что раз язык $L \in P$, то (из дз №3) и $\overline{L} \in P$. По условию имеем, что P = NP, значит получили, что $\overline{L} \in$ NP. Таким образом $\overline{L} \in$ NP и $\overline{L} \in$ coNP одновременно, значит NP = coNP.

■