Николай Комаров ДЗ 2

Задача 1

Постройте (многоленточную) машину Тьюринга, возвращающую 1, если входное слово x_1 x_2 . . . $x_n \in \{0, 1\}^*$ является палиндромом (т. е. x_1 x_2 . . . x_n = x_n x_{n-1} . . . x_1), и 0 в противном случае. Машина должна работать за время $O(n)$.

Решение:

Машина переписывает входное слово на рабочую ленту, потом один курсор остатеся в конце переписанного слова на рабочей ленте, а на входной возвращается в начало, затем оба курсора начинают синхронное движение - на входной ленте сначала, на рабочей с конца слова, - сравнивая символы по одному, таким образом движентся через все слово, если путь пройден, то слово полиндром, если на каком-то шаге символы не совпадают, то выводи 0. Сложность - 3 полных прохода по слову в худшем случае (туда обратно при копировании и один проход при сравнении) - $O(n)$.

Пусть у нашей машины 3 ленты: входная, рабочая и выходная, куда просто запишем результат.

$\sum = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{\triangleright, \triangleleft, \#, 1, 0\}$

$Q = \{q_0, q_{\text{copy}}, q_{\text{go\_back}}, q_{\text{compare}}, q_f\}$

δ :

- $q_0 \begin{pmatrix} \triangleright \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{copy}} \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{copy}} \begin{pmatrix} x_i \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{copy}} \begin{pmatrix} x_i \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – копируем слово на рабочую ленту; x_i - i входной символ
- $q_{\text{copy}} \begin{pmatrix} \triangleleft \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{go\_back}} \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – когда дошли до конца, возвращается
- $q_{\text{go\_back}} \begin{pmatrix} x_i \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{go\_back}} \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{go\_back}} \begin{pmatrix} \triangleright \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – когда вернулись в начало, начинаем сравнение
- $q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} 0 \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} 1 \\ \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \# \end{pmatrix} \to q_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – если символы разные, то записываем 0 в выходную ленту и завершаемся
- $q_{\text{compare}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \# \end{pmatrix} \to q_f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $q_{\text{compare}}\begin{pmatrix} \lhd \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – если дошли до конца, то записываем 1 в выходную ленту и завершаемся.

Задача 2

Докажите, что множество вычислимых на одноленточных машинах Тьюринга функций не изменится, если разрешить машине любые целочисленные сдвиги (т. е. инструкции вида $qa \mapsto q'a'n$, где n — произвольное целое число; при этом «программа» δ остается конечной). Достаточно описать, как эмулируется шаг «расширенной» машины на обыкновенной.

Описание эмуляции:

Длина эмулируемого шага - своего рода параметр машины, он заранее задан для конкретной машины и конечен. Тогда мы можем перебрать n шагов через n внутренних состояний машины в качестве счетчика и шагнуть нужное количество раз.

Например, пусть n = 5 и мы делаем шаг $qa_i \mapsto q'a_i'n$, его эмуляция будет выглядеть следующим образом:

- $qa_i \to q_1a_i'$ +1
- $q_1a_{i+1} \to q_2a_{i+1}$ +1 – здесь a_{i+1} - любой следующий символ на ленте, в том числе и #
- $q_2a_{i+2} \to q_3a_{i+2}$ +1
- $q_3a_{i+3} \to q_4a_{i+3}$ +1
- $q_4a_{i+4} \to q_5a_{i+4}$ +1
- $q_5a_{i+5} \to q'a_{i+5}$ 0 – останавливаемся на n символе и переходим в требуемое состояние.