

Лабораторной работе №2. Задача о погоне

Вариант № 19

Коне Сирики. НФИбд-01-20

Содержание

1	Цель лабораторной работы:	5
2	Задача лабораторной работы:	6
3	Ход работы:	7
4	Ход работы:	8
5	Ход работы:	9
5.1	Условие задачи:	10
5.2	Произведение теоретических расчетов:	10
5.2.1	Теоретические расчеты и вывод дифференциальных уравнений в соответствии с условием задачи	10
5.3	Код программы:	11
5.4	Результаты работы программы	12
5.5	Результаты работы программы	13
6	Выводы	15
7	Список литературы	16

Список иллюстраций

5.1	Код программы 1	11
5.2	Код программы 2	11
5.3	Код программы 3	12
5.4	Код программы 4	12
5.5	Результат с julia 5	13
5.6	траектории для первого случая	13
5.7	траектории для второго случая	14

Список таблиц

1 Цель лабораторной работы:

Цель работы - разобраться в алгоритме построения математической модели на примере задачи о погоне. Нам необходимо провести теоритические рассуждение и вывести дифференциальные уравнения, с помощью которых мы сможем определить точку пересечения лодки и катера из задачи. Для более наглядного примера нам были выданы варианты, с помощью которых можно будет смоделировать траектории движения лодки и катера. Условия задачи: “На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раза больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.”

2 Задача лабораторной работы:

1.Изучить условия задачи. Провести теоритические рассуждения используя данные из варианта 2.Вывести дифференциальное уравнение, соответствующее условиям задачи 3.Написать программу для расчета траетории движения катера и лодки. 4.Построить модели. 5.Определить по моделям точку пересечения катера и лодки.

3 Ход работы:

Начнем с теоритических рассуждений: Принимаем за $t_0 = 0$, $X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент, когда их обнаруживают катера береговой охраны. Также $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки браконьеров. После введем полярные координаты. Будем считать, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0=0(\theta=x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса, а за это время лодка пройдет x , в то время как катер $x-k$ (или $x + k$ в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы.

4 Ход работы:

Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае. Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2 , задачу будем решать для двух случаев :

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \text{при}(\theta = 0)$$

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \text{при}(\theta = -\pi)$$

5 Ход работы:

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $v_t = r \frac{d\theta}{dt}$. Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r \frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{(nv_r)^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна $v_r = \sqrt{(nv)^2 - v^2}$, то тангенциальную скорость находим из уравнения. Следовательно, $v_t = v\sqrt{(n)^2 - 1}$

Тогда получаем :

$$r \frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{(n)^2 - 1}$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений, которые будут описаны в коде программы.

$$\frac{dr}{dt} = v; r \frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{(10,56)}$$
 Начало условие : -

$$\theta_0 = 0, r_0 = \frac{k}{4,4}$$

$$\theta_0 = 0, r_0 = \frac{k}{2,4}$$

$$\text{Тогда: } \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{10,56}}$$

5.1 Условие задачи:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 10 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3.4 раза больше скорости браконьерской лодки.

5.2 Произведение теоретических расчетов:

5.2.1 Теоретические расчеты и вывод дифференциальных уравнений

в соответствии с условием задачи

$$k = 10\text{km}, t_0 = 0, x_0 = 0, x_k = k$$

$$t_n = \frac{x_1}{v}, t_k = \frac{k-x_1}{3,4*v}$$

Первый способ:

$$\frac{x_1}{v} = \frac{k-x_1}{3,4*v} \Rightarrow 3,4 * v * x_1 = v * (k - x_1) \Rightarrow 3,4 * x_1 = k - x_1 \Rightarrow 4,4 * x_1 = k \Rightarrow x_1 = \frac{k}{4,4}$$

Второе способ:

$$\frac{x_2}{v} = \frac{k+x_2}{3,4*v} \Rightarrow 3,4 * v * x_2 = v * (k + x_2) \Rightarrow 3,4 * x_1 = k + x_2 \Rightarrow 2,4 * x_2 = k \Rightarrow x_2 = \frac{k}{2,4}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v; v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_\tau = -\sqrt{(3,4 * v)^2 - v^2} = \sqrt{11,56v^2 - v^2} = \sqrt{(10,56v^2)}; r \frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{10,56}$$

Начало условие : -

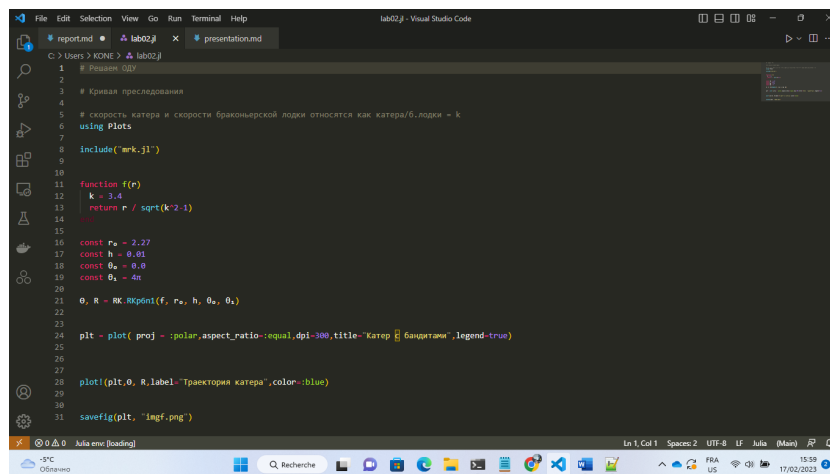
$$\theta_0 = 0, r_0 = \frac{k}{4,4}$$

$$\theta_0 = -\pi, r_0 = \frac{k}{2,4}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{10,56}}$$

5.3 Код программы:

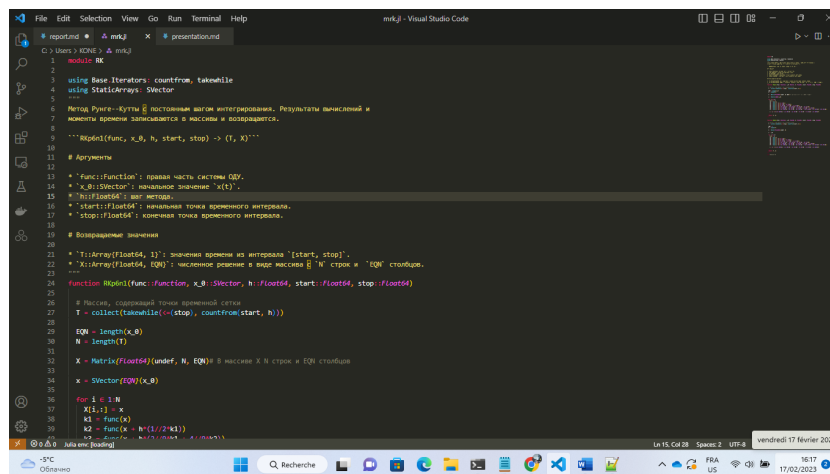
(рис. 5.1).



```
1 # Problem 0.01
2
3 # Кривая преломления
4
5 # скорость катера и скорости браконьерской лодки относятся как катера/б.лодки = k
6 using Plots
7
8 include("mk.jl")
9
10
11 function f(r)
12     k = 3.4
13     return r / sqrt(k^2 - 1)
14 end
15
16 const r_0 = 2.27
17 const h = 0.01
18 const theta_0 = 0.0
19 const theta_1 = 4pi
20
21 theta, R = RK45(f, r_0, h, theta_0, theta_1)
22
23
24 plt = plot(proj = :polar, aspect_ratio=:equal, dpi=300, title="Катер [ ] браконьер", legend=true)
25
26
27
28 plot!(plt, theta, R, label="Траектория катера", color=:blue)
29
30
31 savefig(plt, "imgf.png")
```

Рис. 5.1: Код программы 1

(рис. 5.2).



```
1 module RK
2
3 using Base.Iterators: countfrom, takewhile
4 using StaticArrays: SVector
5
6 """ RK45: Runge-Kutta 5th order method. Results are stored in a matrix and returned as a vector. """
7 RK45(f::Function, x::SVector, h::Float64, start::Float64, stop::Float64)
8
9 # Arguments
10
11 * f::Function: правая часть системы ODE.
12 * x::SVector: начальное значение "x(0)".
13 * h::Float64: шаг метода.
14 * start::Float64: начальная точка временного интервала.
15 * stop::Float64: конечная точка временного интервала.
16
17 # Возвращаемые значения
18
19 * t::Vector{Float64, 1}: массив времени от start до stop.
20 * X::Matrix{Float64, 2, N}: массив значений в виде массива [N] строк и [2] столбцов.
21
22 function RK45(f::Function, x::SVector, h::Float64, start::Float64, stop::Float64)
23
24     @assert stop > start "stop must be greater than start"
25     T = collect(takewhile(x -> stop, countfrom(start, h)))
26     N = length(T)
27     X = Matrix{Float64}(undef, N, 2) # N массив X N строк и 2 столбцов
28     x = SVector{2, Float64}(X[1, :])
29
30     for i in 2:N
31         X[i, :] = x
32         x = f(x)
33     end
34
35     return T, X
36 end
```

Рис. 5.2: Код программы 2

(рис. 5.3).

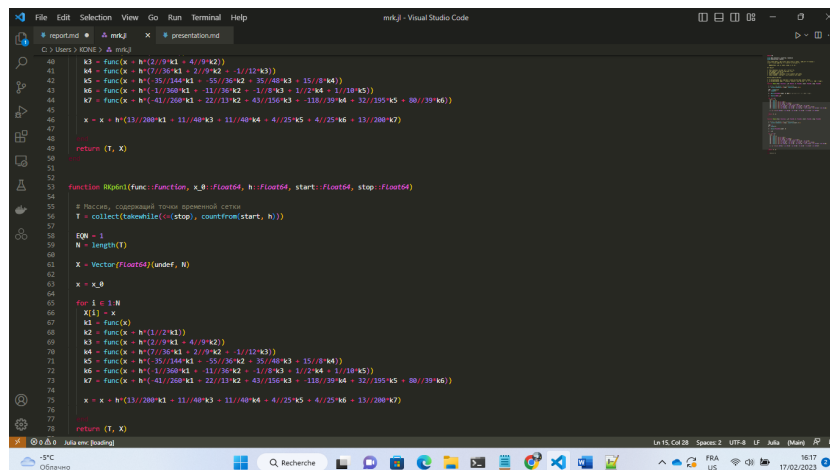


Рис. 5.3: Код программы 3

(рис. 5.4).

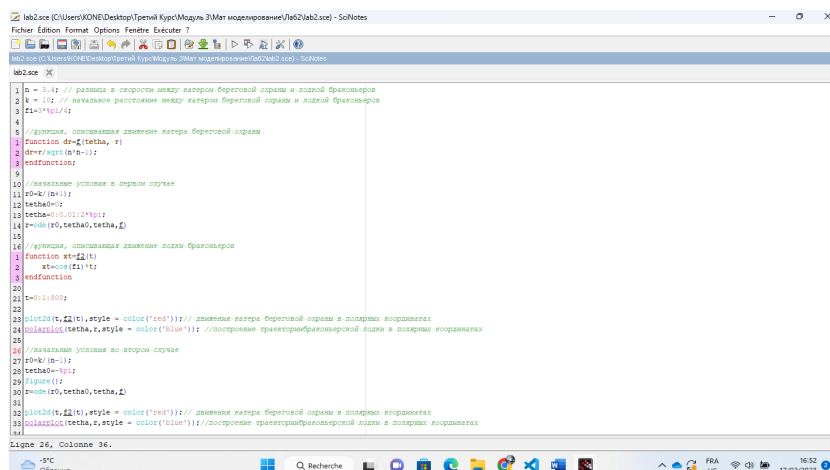


Рис. 5.4: Код программы 4

5.4 Результаты работы программы

Точка пересечения красного и зеленого графиков является точкой пересечения катера береговой охраны и лодки браконьеров. Исходя из этого графика, мы имеем координаты: Координаты точки пересечения - (10.616 , -7.507)

(рис. 5.5).



Рис. 5.5: Результат с julia 5

(рис. 5.6).

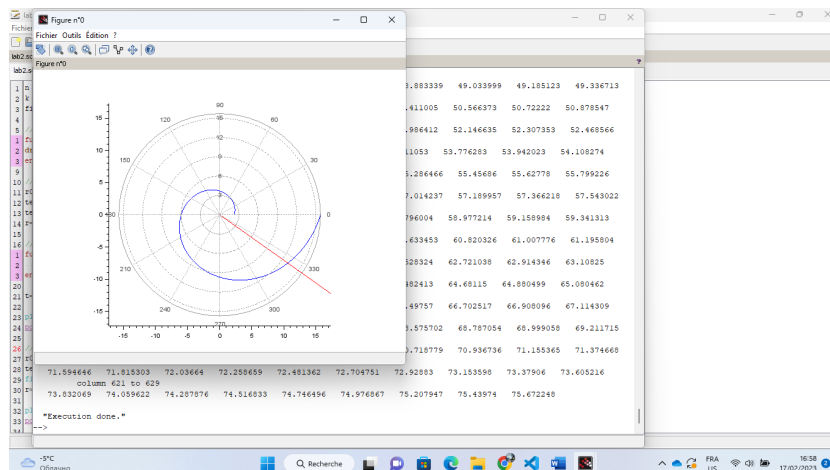


Рис. 5.6: траектории для первого случая

5.5 Результаты работы программы

Точка пересечения красного и зеленого графиков является точкой пересечения катера береговой охраны и лодки браконьеров. Исходя из этого графика, мы

имеем координаты: Координаты точки пересечения - (51.175 , -36.186)
рис. 5.7).

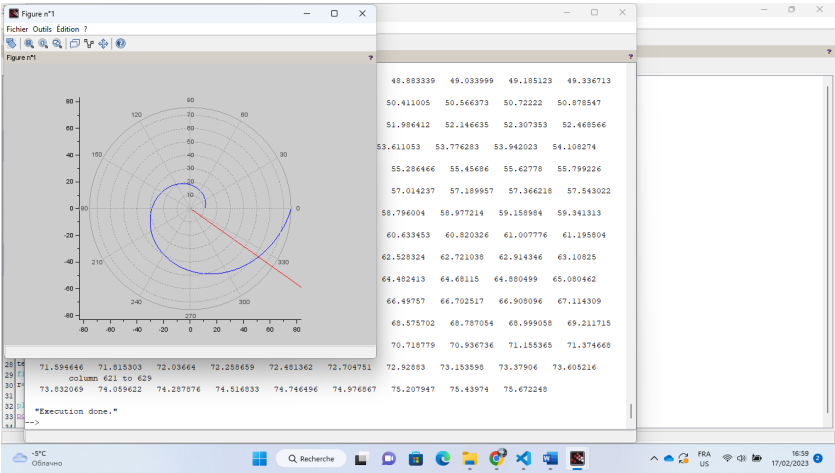


Рис. 5.7: траектории для второго случая

6 Выводы

Мы рассмотрели задачу о погоне, также провели анализ с помощью данных которые нам были даны, составили и решили дифференциальные уравнения. Смоделировали ситуацию и сделали вывод, что в первом случае погоня завершится раньше.

7 Список литературы

::: Julia 1.8 Documentation :::