Шаблон отчёта по лабораторной работе №4

Вычисление наибольшего общего делителя

Коне Сирики

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Целью данной лабораторной работы является ознакомление с двумя алгоритмами нахождения наибольшего общего делителя: алгоритмом Евклида и бинарным алгоритмом Евклида, – и их расширениями для нахождения линейного представления наибольшего общего делителя, а также их последующая программная реализация.

2 Задание

Рассмотреть и реализовать на языке программирования Python:

1. Алгоритм Евклида;
2. Бинарный алгоритм Евклида;
3. Расширенный алгоритм Евклида;
4. Расширенный бинарный алгоритм Евклида.

3 Теоретическое введение

3.1 Основные понятия теории чисел

Опр. 3.1. Пусть x и y – целые числа. Говорят, что x *делит* y (или y *делится на* x), если существует такое целое число k, что $y = kx$. Обозначение: $x \mid y$ [1].

Опр. 3.2. Если $x \mid y$ и $y \mid x$, говорят, что числа x и y *ассоциированы*. По сути это означает, что $y = x$ или $y = -x$.

Теорема 3.1. (О делении с остатком). *Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Тогда существуют единственные целые числа q (неполное частное) и r (остаток) такие, что $a = bq + r$ и $0 \leq r \leq |b| - 1$.*

Опр. 3.3. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Говорят, что целое число d является *общим делителем* a и b, если $d \mid a$ и $d \mid b$.

Опр. 3.4. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Целое число d называется *наибольшим общим делителем (НОД)* чисел a и b, если:

- d – общий делитель a и b;
- если d' – общий делитель a и b, то $d' \mid d$.

Пример. НОД(12345, 24690) = 12345;

НОД(12345, 54321) = 3;

НОД(12345, 12541) = 1.

Теорема 3.2. *Наибольший общий делитель двух целых чисел a, b существует и представляется в виде $d = au_0 + bv_0$ для некоторых целых u_0, v_0.*

Опр. 3.5. Выражение $d = au_0 + bv_0$ из теоремы 3.2 называется *линейным представлением НОД*.

Свойства НОД:

1. НОД$(x, y) = x \Leftrightarrow x \mid y$.
2. НОД(НОД$(x, y), z)$ = НОД$(x,$ НОД$(y, z))$.
3. НОД$(zx, zy) = z \cdot$ НОД(x, y).

Опр. 3.6. Числа a, b называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b) = 1$.

3.2 Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя основывается на следующем простом результате [2]:

Если $a = bq + r$, то НОД(a, b) = НОД(b, r). (1)

Алгоритм 1. Алгоритм Евклида [3]

Вход. Целые числа a, b; $0 < b \leq a$.

Выход. $d =$ НОД(a, b)

1. Положить $r_0 \leftarrow a, r_1 \leftarrow b, i \leftarrow 1$.
2. Найти остаток r_{i+1} от деления r_{i-1} на r_i.
3. Если $r_{i+1} = 0$, то положить $d \leftarrow r_i$. В противном случае положить $i \leftarrow i + 1$ и вернуться на шаг 2.
4. Результат: d.

Теорема 3.3. Для любых $a, b > 0$ алгоритм Евклида останавливается, и выдаваемое им число d является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Доказательство По теореме 3.1 для любого $i \geq 1$ имеем $r_{i-1} = q_i r_r + r_{i+1}$, где $0 \leq r_{i+1} \leq r_i$. Получаем монотонно убывающую последовательность неотрицательных целых чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > ... > r_n >\geq 0$, ограниченную снизу. Такая последовательность не может быть бесконечной, следовательно, алгоритм Евклида останавливается. Тогда, по результату (1), получаем НОД$(a, b) =$ НОД$(b, r_1) =$ НОД$(r_1, r_2) = ... =$ НОД$(r_{n-1}, r_n) =$ НОД$(r_n, 0) = r_n$.

3.3 Бинарный алгоритм Евклида

Бинарный алгоритм Евклида вычисления НОД оказывается более быстрым при реализации этого алгоритма на компьютере, поскольку использует двоичное представление чисел и b. Бинарный алгоритм Евклида основан на следующих свойствах наибольшего общего делителя (считаем, что $0 < b \leq a$)

[3]:

- если оба числа a и b чётные, то НОД$(a, b) = 2 \cdot$ НОД$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$;
- если число a – нечётное, число b – чётное, то НОД$(a, b) =$ НОД$(a, \frac{b}{2})$;
- если оба числа a и b нечётные, то НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$
- если $a = b$, то НОД$(a, b) = a$

Алгоритм 2. Бинарный алгоритм Евклида [3]

Вход. Целые числа a, b; $0 < b \leq a$.

Выход. $d =$ НОД(a, b)

1. Положить $g \leftarrow 1$.
2. Пока оба числа a и b чётные, выполнять $a \leftarrow \frac{a}{2}, b \leftarrow \frac{b}{2}, g \leftarrow 2g$ до получения хотя бы одного нечётного значения a или b.
3. Положить $u \leftarrow a, v \leftarrow b$.

4. Пока $u \neq 0$ выполнять следующие действия:

   4.1. Пока u чётное, полагать $u \leftarrow \frac{u}{2}$.

   4.2. Пока v чётное, полагать $v \leftarrow \frac{v}{2}$.

   4.3. При $u >= v$ положить $u \leftarrow u - v$. В противном случае положить $v \leftarrow v - u$.

5. Положить $d \leftarrow gv$.

6. Результат: d.

3.4 Расширенный алгоритм Евклида

Помимо наибольшего общего делителя d чисел a и b расширенный алгоритм Евклида также находит его линейное представление, т.е. целые числа x и y, для которых $ax + by = d$.

Алгоритм 3. Расширенный алгоритм Евклида [3]

Вход. Целые числа a, b; $0 < b \leq a$.

Выход. $d =$ НОД(a, b); такие целые числа x, y, что $ax + by = d$.

1. Положить $r_0 \leftarrow a, r_1 \leftarrow b, x_0 \leftarrow 1, x_1 \leftarrow 0, y_0 \leftarrow 0, y_1 \leftarrow 1, i \leftarrow 1$.
2. Разделить с остатком r_{i-1} на r_i: $r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$.
3. Если $r_{i+1} = 0$, то положить $d \leftarrow r_i, x \leftarrow x_i, y \leftarrow y_i$. В противном случае положить $x_{i+1} \leftarrow x_{i-1} - q_i x_i, y_{i+1} \leftarrow y_{i-1} - q_i y_i, i \leftarrow i + 1$ и вернуться на шаг 2.
4. Результат: d, x, y.

Теорема 3.4. На каждой итерации алгоритма выполняется равенство $ax_i + by_i = r_i$ при $i \geq 0$.

Доказательство Воспользуемся методом математической индукции. Для $i = 0$ и $i = 1$ требуемое равенство имеет место в силу шага 1. Допустим, что оно справедливо для $i-1$ и для i. Тогда на шаге 3 получаем: $x_{i+1} = x_{i-1} - q_i x_i$ и $y_{i+1} = y_{i-1} - q_i y_i$. Следовательно, $ax_{i+1} + by_{i+1} = a(x_{i-1} - q_i x_i) + b(y_{i-1} - q_i y_i) = ax_{i-1} + by_{i-1} - q_i(ax_i + by_i) = r_{i-1} - q_i r_i = r_{i+1}$.

3.5 Расширенный бинарный алгоритм Евклида

Алгоритм 4. Расширенный бинарный алгоритм Евклида [3]

Вход. Целые числа a, b; $0 < b \leq a$.

Выход. $d = \text{НОД}(a, b)$; такие целые числа x, y, что $ax + by = d$.

1. Положить $g \leftarrow 1$.
2. Пока числа a и b чётные, выполнять $a \leftarrow \frac{a}{2}, b \leftarrow \frac{b}{2}, g \leftarrow 2g$ до получения хотя бы одного нечётного значения a или b.
3. Положить $u \leftarrow a, v \leftarrow b, A \leftarrow 1, B \leftarrow 0, C \leftarrow 0, D \leftarrow 1$.
4. Пока $u \neq 0$ выполнять следующие действия:

   4.1. Пока u чётное:

   4.1.1. Положить $u \leftarrow \frac{u}{2}$.

   4.1.2. Если оба числа A и B чётные, то положить $A \leftarrow \frac{A}{2}$, $B \leftarrow \frac{B}{2}$. В противном случае положить $A \leftarrow \frac{A+b}{2}, B \leftarrow \frac{B-a}{2}$.

   4.2. Пока v чётное:

   4.2.1. Положить $v \leftarrow \frac{v}{2}$.

   4.2.2. Если оба числа C и D чётные, то положить $C \leftarrow \frac{C}{2}$, $D \leftarrow \frac{D}{2}$. В противном случае положить $C \leftarrow \frac{C+b}{2}, D \leftarrow \frac{D-a}{2}$.

   4.3. При $u \geq v$ положить $u \leftarrow u - v, A \leftarrow A - C, B \leftarrow B - D$. В противном случае положить $v \leftarrow v - u, C \leftarrow C - A, D \leftarrow D - B$.
5. Положить $d \leftarrow gv, x \leftarrow C, y \leftarrow D$.
6. Результат: d, x, y.

4 Выполнение лабораторной работы

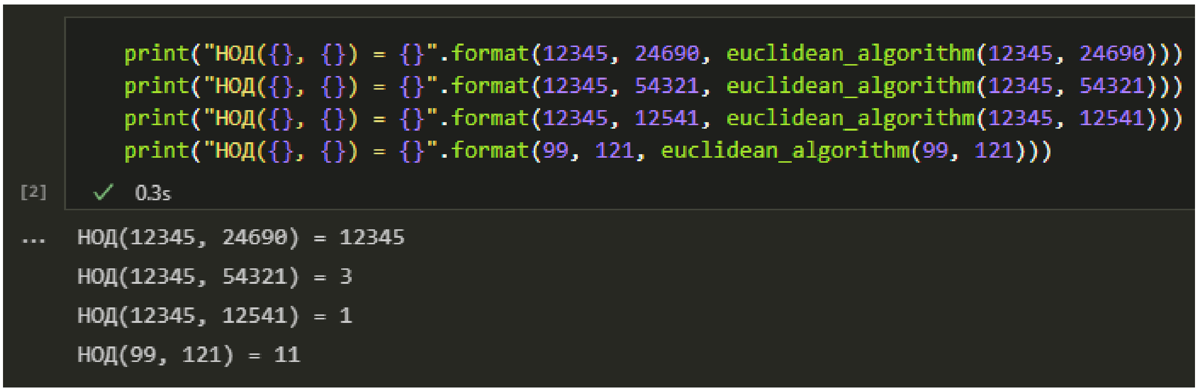
4.1 Алгоритм Евклида

Реализуем вышеописанные алгоритмы на языке **Python** в среде Jupyter Notebook. Начнём с алгоритма Евклида: создадим функцию `euclidean_algorithm(a, b)` следующего вида:

```
def euclidean_algorithm(a, b):
    """
    Находит НОД чисел a и b с помощью алгоритма Евклида
    """
    # убеждаемся, что числа - целые и положительные
    (a, b) = (abs(int(a)), abs(int(b)))

    # по условию 0 < b <= a, поэтому
    if b > a: # если оно не выполняется
        (a, b) = (b, a) # меняем a и b местами

    # поскольку на каждом шаге мы используем только два значения,
    # сохранять будем только их
    r = [a, b] # шаг 1; задаем r0 и r1

    # шаги 2-3
    while r[1] != 0: # пока r_{i+1} не равно нулю
```

```
        # находим очередной остаток от деления и
        # имитируем увеличение индекса, сдвигая значения
        (r[0], r[1]) = (r[1], r[0] % r[1])

    return r[0] # шаг 4; d = r_i
```

Теперь с помощью данной функции найдём наибольший общий делитель для нескольких пар чисел (см. Рис. 4.1).



```
print("НОД({}, {}) = {}".format(12345, 24690, euclidean_algorithm(12345, 24690)))
print("НОД({}, {}) = {}".format(12345, 54321, euclidean_algorithm(12345, 54321)))
print("НОД({}, {}) = {}".format(12345, 12541, euclidean_algorithm(12345, 12541)))
print("НОД({}, {}) = {}".format(99, 121, euclidean_algorithm(99, 121)))
[2] ✓ 0.3s
... НОД(12345, 24690) = 12345
    НОД(12345, 54321) = 3
    НОД(12345, 12541) = 1
    НОД(99, 121) = 11
```

Рис. 4.1: Примеры нахождения НОД двух чисел с помощью программной реализации алгоритма Евклида

4.2 Бинарный алгоритм Евклида

Реализуем бинарный алгоритм Евклида: создадим две функции – is_even(a) для проверки чётности числа и euclidean_algorithm_binary(a, b):

```
def is_even(a):
    """
    Проверяет чётность числа a
    """
    return (True if a % 2 == 0 else False)

def euclidean_algorithm_binary(a, b):
    """
```

```
Находит НОД чисел a и b с помощью бинарного алгоритма Евклида
"""
# убеждаемся, что числа - целые и положительные
(a, b) = (abs(int(a)), abs(int(b)))

# убеждаемся, что выполняется условие 0 < b <= a
if b > a:
    (a, b) = (b, a)

g = 1 # шаг 1

# шаг 2; пока числа a и b чётные
while is_even(a) and is_even(b):
    (a, b, g) = (int(a / 2), int(b / 2), 2 * g)

(u, v) = (a, b) # шаг 3

# шаг 4
while u != 0:
    # шаг 4.1
    while is_even(u): # пока u - чётное
        u = int(u / 2)

    # шаг 4.2
    while is_even(v): # пока v - чётное
        v = int(v / 2)

    # шаг 4.3
    if u >= v:
```

```
            u -= v
        else:
            v -= u

    return g * v # шаги 5-6
```

Теперь с помощью данной функции найдём наибольший общий делитель для нескольких пар чисел (см. Рис. 4.2).

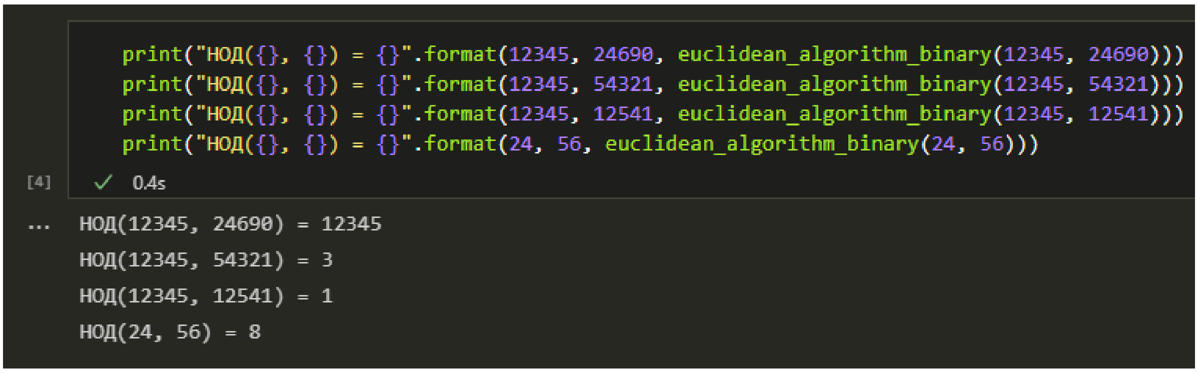

```
print("НОД({}, {}) = {}".format(12345, 24690, euclidean_algorithm_binary(12345, 24690)))
print("НОД({}, {}) = {}".format(12345, 54321, euclidean_algorithm_binary(12345, 54321)))
print("НОД({}, {}) = {}".format(12345, 12541, euclidean_algorithm_binary(12345, 12541)))
print("НОД({}, {}) = {}".format(24, 56, euclidean_algorithm_binary(24, 56)))
[4] ✓ 0.4s
... НОД(12345, 24690) = 12345
    НОД(12345, 54321) = 3
    НОД(12345, 12541) = 1
    НОД(24, 56) = 8
```

Рис. 4.2: Примеры нахождения НОД двух чисел с помощью программной реализации бинарного алгоритма Евклида

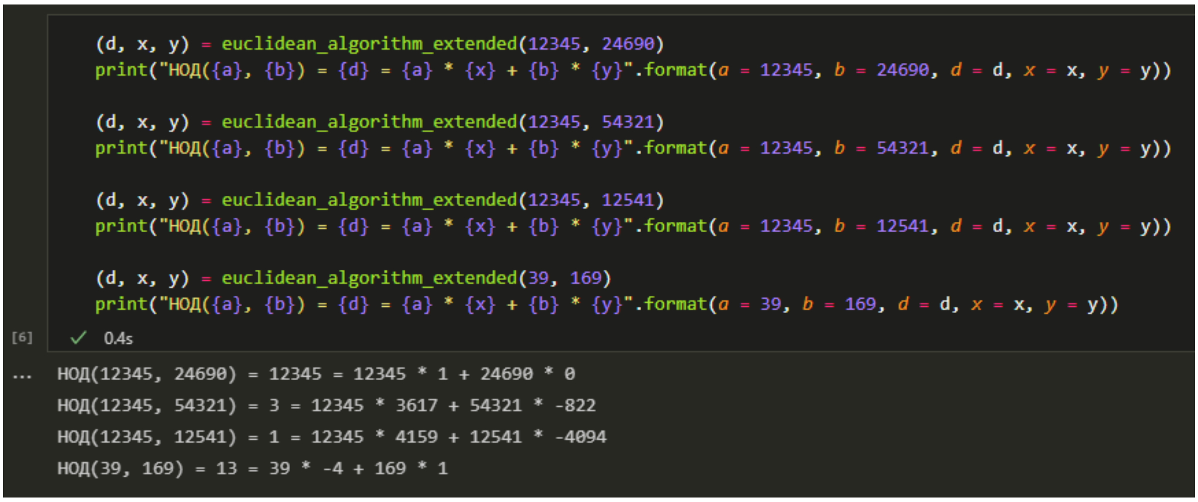
4.3 Расширенный алгоритм Евклида

Создадим функцию `euclidean_algorithm_extended(a, b)`, реализующую расширенный алгоритм Евклида:

```
def euclidean_algorithm_extended(a, b):
    """
    Находит d = НОД(a, b), а также такие целые числа x и y,
    что ax + by = d, с помощью расширенного алгоритма Евклида
    """
    # убеждаемся, что числа - целые и положительные
    (a, b) = (abs(int(a)), abs(int(b)))
```

```python
    # убеждаемся, что выполняется условие 0 < b <= a
    reversed = True if b > a else False # флаг
    (a, b) = (b, a) if reversed else (a, b) # меняем местами a и b, если нужно

    (r, x, y) = ([a, b], [1, 0], [0, 1]) # шаг 1

    # шаги 2-3
    # r[0] ~ r_{i}, r[1] ~ r_{i+1}
    while r[1] != 0:
        # r_{i-1} = qi * ri + r_{i+1}
        (r[0], r[1], q) = (r[1], r[0] % r[1], r[0] // r[1])

        if r[1] != 0: # если остаток ещё не нулевой..
            (x[0], x[1]) = (x[1], x[0] - q * x[1])
            (y[0], y[1]) = (y[1], y[0] - q * y[1])

    (d, x_r, y_r) = (r[0], x[1], y[1])

    if reversed: # если a и b были в неправильном порядке
        (x_r, y_r) = (y_r, x_r) # меняем найденные коэффициенты местами

    return (d, x_r, y_r)
```

Теперь с помощью данной функции найдём наибольший общий делитель и его линейное представление для нескольких пар чисел (см. Рис. 4.3).



```
(d, x, y) = euclidean_algorithm_extended(12345, 24690)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 12345, b = 24690, d = d, x = x, y = y))

(d, x, y) = euclidean_algorithm_extended(12345, 54321)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 12345, b = 54321, d = d, x = x, y = y))

(d, x, y) = euclidean_algorithm_extended(12345, 12541)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 12345, b = 12541, d = d, x = x, y = y))

(d, x, y) = euclidean_algorithm_extended(39, 169)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 39, b = 169, d = d, x = x, y = y))
[6] ✓ 0.4s
... НОД(12345, 24690) = 12345 = 12345 * 1 + 24690 * 0
НОД(12345, 54321) = 3 = 12345 * 3617 + 54321 * -822
НОД(12345, 12541) = 1 = 12345 * 4159 + 12541 * -4094
НОД(39, 169) = 13 = 39 * -4 + 169 * 1
```

Рис. 4.3: Примеры нахождения НОД двух чисел и его линейного представления с помощью программной реализации расширенного алгоритма Евклида

4.4 Расширенный бинарный алгоритм Евклида

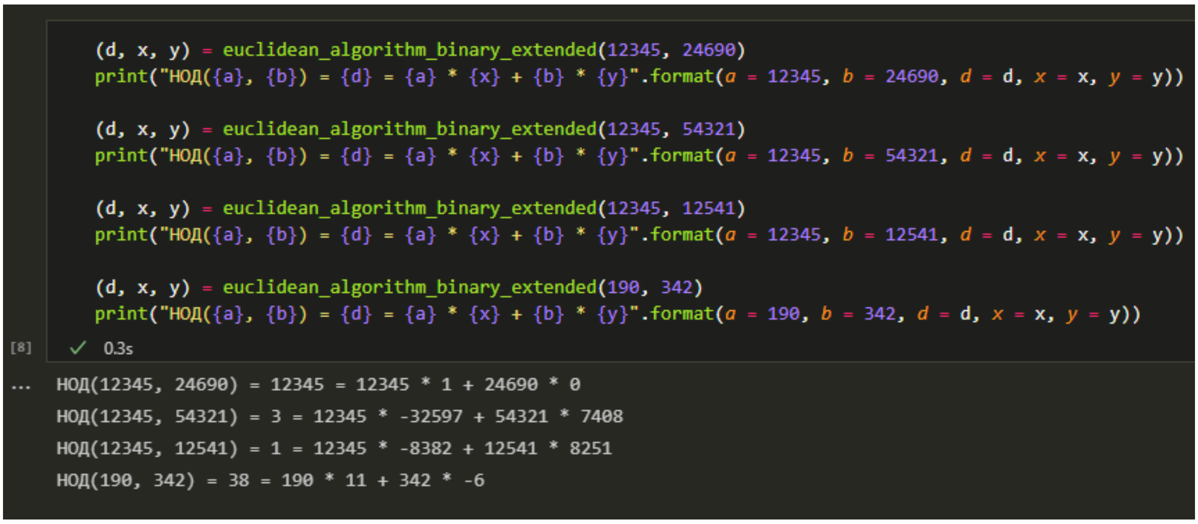
Реализуем расширенный бинарный алгоритм Евклида, создав функцию `euclidean_algorithm_binary_extended(a, b)` следующего вида:

```
def euclidean_algorithm_binary_extended(a, b):
    """
    Находит d = НОД(a, b), а также такие целые числа x и y,
    что ax + by = d, с помощью расширенного бинарного алгоритма Евклида
    """
    # убеждаемся, что числа - целые и положительные
    (a, b) = (abs(int(a)), abs(int(b)))

    # убеждаемся, что выполняется условие 0 < b <= a
    reversed = True if b > a else False # флаг
    (a, b) = (b, a) if reversed else (a, b) # меняем местами a и b, если нужно

    g = 1 # шаг 1
```

```python
# шаг 2; пока числа a и b чётные
while is_even(a) and is_even(b):
    (a, b, g) = (int(a / 2), int(b / 2), 2 * g)

# шаг 3; задаем начальные значения
(u, v, A, B, C, D) = (a, b, 1, 0, 0, 1)

# шаг 4; пока u не равно нулю
while u != 0:
    # шаг 4.1
    while is_even(u):
        u = int(u / 2) # шаг 4.1.1

        # шаг 4.1.2
        if is_even(A) and is_even(B):
            (A, B) = (int(A / 2), int(B / 2))
        else:
            (A, B) = (int((A + b) / 2), int((B - a) / 2))

    # шаг 4.2
    while is_even(v):
        v = int(v / 2) # шаг 4.2.1

        # шаг 4.2.2
        if is_even(C) and is_even(D):
            (C, D) = (int(C / 2), int(D / 2))
        else:
            (C, D) = (int((C + b) / 2), int((D - a) / 2))
```

```
        # шаг 4.3
        if u >= v:
            (u, A, B) = (u - v, A - C, B - D)
        else:
            (v, C, D) = (v - u, C - A, D - B)

    # шаг 5
    (d, x, y) = (g * v, C, D)

    # если a и b были в неправильном порядке
    if reversed:
        (x, y) = (y, x) # меняем найденные коэффициенты местами

    return (d, x, y)
```

Теперь с помощью данной функции найдём наибольший общий делитель и его линейное представление для нескольких пар чисел (см. Рис. 4.4).



```
(d, x, y) = euclidean_algorithm_binary_extended(12345, 24690)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 12345, b = 24690, d = d, x = x, y = y))

(d, x, y) = euclidean_algorithm_binary_extended(12345, 54321)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 12345, b = 54321, d = d, x = x, y = y))

(d, x, y) = euclidean_algorithm_binary_extended(12345, 12541)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 12345, b = 12541, d = d, x = x, y = y))

(d, x, y) = euclidean_algorithm_binary_extended(190, 342)
print("НОД({a}, {b}) = {d} = {a} * {x} + {b} * {y}".format(a = 190, b = 342, d = d, x = x, y = y))
```
[8] ✓ 0.3s

```
НОД(12345, 24690) = 12345 = 12345 * 1 + 24690 * 0
НОД(12345, 54321) = 3 = 12345 * -32597 + 54321 * 7408
НОД(12345, 12541) = 1 = 12345 * -8382 + 12541 * 8251
НОД(190, 342) = 38 = 190 * 11 + 342 * -6
```

Рис. 4.4: Примеры нахождения НОД двух чисел и его линейного представления с помощью программной реализации расширенного бинарного алгоритма Евклида

5 Выводы

Таким образом, была достигнута цель, поставленная в начале лабораторной работы: было проведено краткое знакомство с двумя алгоритмами нахождения наибольшего общего делителя – алгоритмом Евклида, бинарным алгоритмом Евклида, – и их расширенными версиями для нахождения линейного представления этого делителя, после чего все четыре алгоритма были успешно реализованы на языке программирования **Python**.

Список литературы

1. Лузгарев А. Алгебра и теория чисел: конспекты лекций. https://mahalex.net/151-153/algebra.pdf, 2014-2016.
2. Илларионов А.А. Теория чисел: учебное пособие. http://www.iam.khv.ru/articles/Illarionov/mainNumberTheory.pdf, 2016.
3. Шитов Ю.А. Теоретико-численные методы в криптографии. Лекция 2. Вычисление наибольшего общего делителя. Институт космических и информационных технологий СФУ http://ikit.edu.sfu-kras.ru/drupal/node/68, 2014.