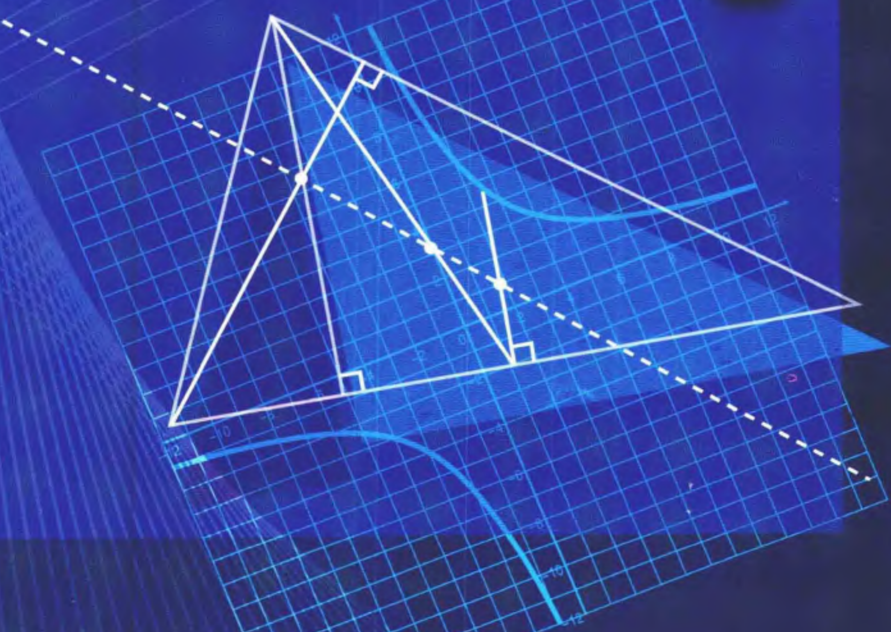
BÙI VĂN TUYÊN

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN 7



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÙI VĂN TUYÊN

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ

TOÁN 7

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Phần

ĐẠI SỐ

Chương I

SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

Kiến thức cơ bản :

1. Số hữu tỉ là số viết dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với a, b $\in \mathbf{Z}$; $b \neq 0$.

   Các phân số bằng nhau biểu diễn cùng một số hữu tỉ. Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là **Q**.

2. Để so sánh hai số hữu tỉ x và y ta làm như sau :

   – Viết x, y dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương $x = \frac{a}{m}$; $y = \frac{b}{m}$ $(m > 0)$

   – So sánh các tử : Nếu $a < b$ thì $x < y$
   Nếu $a = b$ thì $x = y$
   Nếu $a > b$ thì $x > y$

Bổ sung :

Cho $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$ (a, b, c, d $\in \mathbf{Z}$; b, d > 0)

$$x = y \Leftrightarrow ad = bc$$

$$x < y \Leftrightarrow ad < bc$$

$$x > y \Leftrightarrow ad > bc$$

Thí dụ 1 :

Cho các số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$; $z = \frac{a+c}{b+d}$ (a, b, c, d $\in \mathbf{Z}$; b, d > 0)

Chứng minh rằng nếu $x < y$ thì $x < z < y$

Giải :

Vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

Xét tích $\quad a(b + d) = ab + ad \qquad (2)$

$\qquad\qquad b(a + c) = ba + bc \qquad (3)$

Từ (1) ; (2) ; (3) suy ra $\quad a(b + d) < b(a + c)$ do đó $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} \qquad (4)$

Tương tự ta có $\dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d} \qquad (5)$

Kết hợp (4) và (5) ta được $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

hay $\;x < z < y$

Nhận xét :

– Áp dụng kết quả trên, với $\dfrac{-1}{4} < \dfrac{5}{6}$ ta có thể viết ra một loạt số hữu tỉ lớn hơn $\dfrac{-1}{4}$ nhưng nhỏ hơn $\dfrac{5}{6}$ theo sơ đồ sau đây :

$$\frac{-1}{4} < \frac{5}{6}$$

$$\boxed{\frac{-1}{4}} < \frac{4}{10} < \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\boxed{\frac{-1}{4}} < \frac{3}{14} < \boxed{\frac{4}{10}} < \frac{9}{16} < \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\boxed{\frac{-1}{4}} < \frac{2}{18} < \boxed{\frac{3}{14}} < \frac{7}{24} < \boxed{\frac{4}{10}} < \frac{13}{26} < \boxed{\frac{9}{16}} < \frac{14}{22} < \boxed{\frac{5}{6}}$$

....

– Qua thí dụ này, ta thấy trên trục số, giữa hai điểm hữu tỉ x và y khác nhau bao giờ cũng có ít nhất một điểm hữu tỉ z, từ đó suy ra có vô số điểm hữu tỉ.

Thí dụ 2 :

Cho $x = \dfrac{12}{b - 15}$ với $b \in \mathbf{Z}$. Xác định b để :

a) x là một số hữu tỉ

b) x là số hữu tỉ dương

c) x là số hữu tỉ âm

d) $x = -1$

e) $x > 1$

f) $0 < x < 1$

Giải :

a) x là một số hữu tỉ $\Leftrightarrow$ $b - 15 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 15$.

b) x là số hữu tỉ dương $\Leftrightarrow$ $b - 15 > 0 \Leftrightarrow b > 15$

c) x là số hữu tỉ âm $\Leftrightarrow$ $b - 15 < 0 \Leftrightarrow b < 15$

d) $x = -1 \Leftrightarrow b - 15 = -12$ $\Leftrightarrow$ $b = 15 - 12 = 3$

e) $x > 1 \Leftrightarrow 0 < b - 15 < 12$ $\Leftrightarrow$ $15 < b < 27$

f) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b - 15 > 0 \\ b - 15 > 12 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $b > 27$

BÀI TẬP

1. Cho các số hữu tỉ $x = \dfrac{-5}{7}$; $y = \dfrac{-2}{3}$. Các số hữu tỉ này còn được biểu diễn bởi phân số nào trong các phân số sau :

$$\frac{9}{11}\ ;\ \frac{4}{-6}\ ;\ \frac{15}{-21}\ ;\ \frac{-35}{49}\ ;\ \frac{-10}{15}\ ;\ \frac{-6}{-9}$$

2. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\dfrac{19}{33}$; $\dfrac{6}{11}$; $\dfrac{13}{22}$; b) $\dfrac{-18}{12}$; $\dfrac{-10}{7}$; $\dfrac{-8}{5}$

3. So sánh các số hữu tỉ sau bằng cách nhanh nhất :

a) -5 và $\dfrac{1}{63}$; b) $\dfrac{-18}{17}$ và $\dfrac{-999}{1000}$

c) $\dfrac{-17}{35}$ và $\dfrac{-43}{85}$; d) $-0{,}76$ và $\dfrac{-19}{28}$

4. Tìm phân số có mẫu bằng 10, lớn hơn $\dfrac{-7}{13}$ nhưng nhỏ hơn $\dfrac{-4}{13}$

5. Hãy dùng 4 chữ số 1 và dấu – (nếu cần thiết) để biểu diễn :

a) Các số nguyên -1 ; -111

b) Số hữu tỉ âm lớn nhất.

c) Số hữu tỉ âm nhỏ nhất.

6. Cho các số hữu tỉ x, y, z.

$$x = \frac{a}{b}\ ;\ y = \frac{c}{d}\ ;\ z = \frac{m}{n} \text{ trong đó } m = \frac{a+c}{2}$$

$n = \dfrac{b+d}{2}$. Cho biết $x \neq y$, hãy so sánh x với z ; y với z.

7*. Cho các số hữu tỉ $x = \dfrac{a}{b}$; $y = \dfrac{c}{d}$ và $z = \dfrac{m}{n}$. Biết $ad - bc = 1$; $cn - dm = 1$; $b, d, n > 0$

a) Hãy so sánh các số x, y, z

b) So sánh y với t biết $t = \dfrac{a+m}{b+n}$ với $b + n \neq 0$

8*. Cho 6 số nguyên dương $a < b < c < d < m < n$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a+c+m}{a+b+c+d+m+n} < \dfrac{1}{2}$

§2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ.
GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Kiến thức cơ bản :

1. Cộng, trừ số hữu tỉ : Nếu $x = \dfrac{a}{m}$; $y = \dfrac{b}{m}$ ($a, b, m \in \mathbf{Z}, m > 0$)

thì
$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$
$$x - y = x + (-y) = \frac{a}{m} + \left(-\frac{b}{m}\right) = \frac{a-b}{m}$$

2. Phép cộng trong **Q** cũng có các tính chất cơ bản như phép cộng trong **Z** ; cũng có quy tắc "dấu ngoặc" như đối với tổng đại số trong **Z**.

3. Quy tắc chuyển vế : Với $x, y, z, t \in \mathbf{Q}$

$$x + y - z = t \Leftrightarrow x - t = -y + z$$

4. Với $x \in \mathbf{Q}$ thì :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Bổ sung :

Cho $x, y \in \mathbf{Q}$

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (dấu = xảy ra $\Leftrightarrow xy \geq 0$)
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$ (dấu = $\Leftrightarrow x \geq y \geq 0$ hoặc $x \leq y \leq 0$)
3. $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$

   $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$

   $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$
4. Tính chất của đẳng thức và quy tắc "chuyển vế" vẫn đúng đối với bất đẳng thức.
5. Với $m > 0$ thì :

$$|x| < m \Leftrightarrow -m < x < m$$

$$|x| > m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > m \\ x < -m \end{array}\right.$$

Thí dụ 3 :

Thực hiện các phép tính bằng cách hợp lý (nếu có thể)

a) $-\dfrac{5}{18} + \dfrac{32}{45} - \dfrac{9}{10}$; b) $\left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{33} - \dfrac{5}{3}\right) - \left(-\dfrac{15}{12} + \dfrac{6}{11} - \dfrac{48}{49}\right)$

Giải :

a) $-\dfrac{5}{18} + \dfrac{32}{45} - \dfrac{9}{10} = \dfrac{-25}{90} + \dfrac{64}{90} + \dfrac{-81}{90} = \dfrac{-42}{90} = -\dfrac{7}{15}$

b) $\left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{33} - \dfrac{5}{3}\right) - \left(-\dfrac{15}{12} + \dfrac{6}{11} - \dfrac{48}{49}\right)$

$= \dfrac{-1}{4} + \dfrac{7}{33} + \dfrac{-5}{3} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{-6}{11} + \dfrac{48}{49} = \left(\dfrac{-1}{4} + \dfrac{5}{4}\right) - \left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{6}{11} + \dfrac{-7}{33}\right) + \dfrac{48}{49}$

$= 1 - 2 + \dfrac{48}{49} = -\dfrac{1}{49}$

Nhận xét :

Ở phần b của thí dụ này, ta đã dùng quy tắc "bỏ dấu ngoặc" để đưa biểu thức đã cho thành một tổng đại số, sau đó lại dùng quy tắc "dấu ngoặc" để nhóm các số hạng một cách thích hợp : các số hạng có tổng là một số nguyên được nhóm với nhau, từ đó có được kết quả một cách nhanh chóng.

Thí dụ 4 :

Cho $A = \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{1}{4}$. Hãy so sánh A với $\frac{1}{5}$

Giải :

$\left|x - \frac{1}{3}\right| \geq 0$ (dấu $= \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$)

Suy ra $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

Vậy $A > \frac{1}{5}$

BÀI TẬP

9. Thực hiện các phép tính bằng cách hợp lí.

a) $\frac{11}{125} - \frac{17}{18} - \frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{17}{14}$;

b) $1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} + 3 - \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{4} - 3 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2} - 1$

10. Tìm x biết :

a) $\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x\right) = -\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13}\right)$; b) $\left|x + \frac{4}{15}\right| - |-3,75| = -|-2,15|$

11. Tìm x, y biết :

a) $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + x\right| = -\frac{1}{4} - |y|$; b) $|x - y| + \left|y + \frac{9}{25}\right| = 0$

12. Tìm x biết :

a) $\left|x - \frac{5}{3}\right| < \frac{1}{3}$; b) $\left|x + \frac{11}{2}\right| > |-5,5|$; c*) $\frac{2}{5} < \left|x - \frac{7}{5}\right| < \frac{3}{5}$

13. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức :

a) $M = \left|x + \frac{15}{19}\right|$; b) $N = \left|x - \frac{4}{7}\right| - \frac{1}{2}$

14. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức :

a) $P = -\left|\frac{5}{3} - x\right|$; b) $Q = 9 - \left|x - \frac{1}{10}\right|$

15. Cho 31 số hữu tỉ sao cho bất kì 3 số nào trong chúng cũng có tổng là một số âm. Chứng minh rằng tổng của 31 số đó là một số âm.

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

Kiến thức cơ bản :

1. Nếu $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$ thì $x \,.\, y = \frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

2. Nếu $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$ $(y \neq 0)$ thì $x : y = x \,.\, \frac{1}{y} = \frac{a}{b} \,.\, \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

   Thương x : y còn gọi là tỉ số của hai số x và y, ký hiệu $\frac{x}{y}$ (hay x : y).

3. Phép nhân trong **Q** có các tính chất cơ bản như phép nhân trong **Z**.

Bổ sung :

1. Ta cũng có tính chất phân phối của phép chia đối với phép cộng và phép trừ, nghĩa là :

$$\frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \;; \qquad \frac{x - y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z} \qquad \text{với } z \neq 0$$

2. $x \,.\, y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

3. $-(x \,.\, y) = (-x) \,.\, y = x\,(-y)$

4. $|x \,.\, y \ldots z| = |x| \,.\, |y| \ldots |z|$

5. $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$ với $z > 0$

   $x \geq y \Leftrightarrow xz \leq yz$ với $z < 0$

Thí dụ 5 :

Tìm x biết $\left|\frac{5}{6}x - 10\right| \le 0$

Giải :

Ta có $\left|\frac{5}{6}x - 10\right| \ge 0$ mà đề bài cho $\left|\frac{5}{6}x - 10\right| \le 0$

suy ra $\left|\frac{5}{6}x - 10\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6}x - 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6}x = 10 \Leftrightarrow x = 10 : \frac{5}{6} = 10.\frac{6}{5} \Leftrightarrow x = 12$

Thí dụ 6 :

Tìm các giá trị của x để cho biểu thức sau có giá trị dương

$$M = (x + 5)(x + 9)$$

Giải :

$M > 0 \Leftrightarrow x + 5$ và $x + 9$ *cùng dấu*. Dễ thấy $x + 5 < x + 9$ nên chỉ có hai trường hợp :

$$M > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 5 \text{ và } x + 9 \text{ cùng dương} \\ x + 5 \text{ và } x + 9 \text{ cùng âm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 5 > 0 \\ x + 9 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -5 \\ x < -9 \end{array}\right.$$

Nhận xét :

Trong thí dụ này ta đã dùng phương pháp tìm điều kiện để tích của hai thừa số có giá trị dương là hai thừa số đó phải *cùng dấu* (cùng dấu dương hoặc cùng dấu âm). Ngoài cách sắp xếp thứ tự hai thừa số và số 0 như cách giải trên ta còn một phương pháp khác đó là phương pháp "lập bảng xét dấu".

Dễ thấy $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; $x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$; $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

$x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -9$; $x + 9 < 0 \Leftrightarrow x < -9$; $x + 9 > 0 \Leftrightarrow x > -9$

Ta phải tìm xem với giá trị nào của x thì cả hai thừa số $x + 5$ và $x + 9$ cùng lớn hơn 0 hoặc cùng nhỏ hơn 0. Ta lập bảng xét dấu sau đây :

x		−9		−5	
x + 5	−	|	−	0	+
x + 9	−	0	+	|	+
M	+	0	−	0	+

Vậy $M > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -9 \\ x > -5 \end{array}\right.$

BÀI TẬP

16. So sánh các tích sau bằng cách hợp lý nhất :

$$P_1 = \left(-\frac{43}{51}\right).\left(-\frac{19}{80}\right) \;;\quad P_2 = \left(-\frac{7}{13}\right).\left(-\frac{4}{65}\right).\left(-\frac{8}{31}\right) \;;$$

$$P_3 = \frac{-5}{10}.\frac{-4}{10}.\frac{-3}{10}...\frac{3}{10}.\frac{4}{10}.\frac{5}{10}$$

17. Tìm x biết :

a) $\left(\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}\right)\left(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 0$; b) $\frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x - \frac{4}{15}x + 1 = 0$

18. Thực hiện các phép tính sau bằng cách hợp lý nhất :

a) $\left(-\frac{40}{51}.0,32.\frac{17}{20}\right):\frac{64}{75}$; b) $-\frac{10}{11}.\frac{8}{9} + \frac{7}{18}.\frac{10}{11}$

c) $\frac{3}{14}:\frac{1}{28} - \frac{13}{21}:\frac{1}{28} + \frac{29}{42}:\frac{1}{28} - 8$;

d) $-1\frac{5}{7}.15 + \frac{2}{7}.(-15) + (-105).\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}\right)$.

19. Tính giá trị các biểu thức sau :

a) $A = 7x - 2x - \frac{2}{3}y + \frac{7}{9}y$ với $x = -\frac{1}{10}$; $y = 4,8$

b) $B = x + \dfrac{0,2 - 0,375 + \frac{5}{11}}{-0,3 + \frac{9}{16} - \frac{15}{22}}$ với $x = -\frac{1}{3}$

20. Tìm x biết :

a) $\left|\frac{5}{3}x\right| = \left|-\frac{1}{6}\right|$; b) $\left|\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right| - \frac{3}{4} = \left|-\frac{3}{4}\right|$; c) $\left|x + \frac{3}{5}\right| - \left|x - \frac{7}{3}\right| = 0$

21. Ta đặt $x.x = x^2$. Hãy khai triển các tích (nghĩa là làm phép nhân và bỏ dấu ngoặc)

a) $(x + y)(x + y)$; b) $(x - y)(x - y)$

c) $(x + y)(x - y)$; d) $(x + 5)(x - 1)$

22. Đặt thành thừa số chung :

a) $xy + x + 8y + 8$; b) $x^2 - x - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

c*) $x^2 - 1$ (gợi ý : Thêm bớt cùng một số x để làm xuất hiện thừa số chung)

23. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có giá trị dương.

a) $A = x^2 + 4x$; b) $B = (x - 3)(x + 7)$; c) $C = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right)$

24. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có giá trị âm :

a) $D = x^2 - \frac{2}{5}x$; b) $E = \frac{x - 2}{x - 6}$; c) $F = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

25. Tìm x biết :

a) $|x| + |x + 2| = 0$; b*) $\left|x\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)\right| = x$

26. Chứng minh rằng không tồn tại hai số hữu tỉ x và y trái dấu, không đối nhau thoả mãn đẳng thức :

$$\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

27*. Tìm hai số hữu tỉ x và y ($y \neq 0$) biết rằng :

$$x - y = xy = x : y$$

28*. Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng :

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Chuyên đề 1

PHẦN NGUYÊN, PHẦN LẺ CỦA SỐ HỮU TỈ

1. Bạn hẳn nhớ ngày, tháng, năm sinh của mình nhưng bạn có biết đó là ngày nào trong tuần lễ không ? Chắc hẳn bạn cũng muốn biết một ngày quan trọng nào đó trong quá khứ hoặc trong tương lai vào ngày thứ mấy ? Ta có công thức tính mà không dùng đến lịch. Công thức này liên quan đến "phần nguyên" của một số hữu tỉ.

Muốn biết tích 1. 2. 3 ... n ($n \in \mathbf{N}^*$) tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0, nếu ta tính trực tiếp tích đó thì mất nhiều thời gian và công sức. Có thể có cách nào đơn giản hơn không ? Câu trả lời là có, nếu ta biết khái niệm "phần nguyên" của một số hữu tỉ.

2. Phần nguyên của một số hữu tỉ x, kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Như vậy [x] là một số nguyên sao cho :

$$[x] \le x < [x] + 1 \text{ hay } 0 \le x - [x] < 1$$

Khi $x \in \mathbf{Z}$ thì $[x] = x$

Chẳng hạn $[8{,}9] = 8$; $[-3{,}2] = -4$; $[-2] = -2$

3. Phần lẻ của một số hữu tỉ x kí hiệu là $\{x\}$ là hiệu $x - [x]$.

$$\{x\} = x - [x]$$

Như vậy $\{x\}$ là một số hữu tỉ sao cho $0 \le \{x\} < 1$

Khi $x \in \mathbf{Z}$ thì $\{x\} = 0$

Chẳng hạn : $\{8{,}9\} = 8{,}9 - [8{,}9] = 8{,}9 - 8 = 0{,}9$

$\{-3{,}2\} = -3{,}2 - [-3{,}2] = -3{,}2 - (-4) = 0{,}8$

$\{-2\} = -2 - [-2] = -2 - (-2) = 0$

4. Khi làm bài về phần nguyên cần chú ý thêm :

1) Vì $0 \le \{x\} < 1$ nên với $a \in \mathbf{Z}$ thì $[a + \{x\}] = a$

Chẳng hạn $[3 + 0{,}15] = 3$; $[-5 + 0{,}8] = -5$

2) Nếu số hữu tỉ x bị "kẹp giữa" hai số nguyên liền nhau thì [x] đúng bằng số nhỏ trong hai số nguyên đó.

Nếu $a \le x < a + 1$ ($a \in \mathbf{Z}$) thì $[x] = a$.

5. Ở lớp 6 ta đã làm quen với nguyên lí "Điriclê" còn gọi là nguyên lý "thỏ và lồng" : Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 chiếc lồng thì ít nhất có một lồng nhốt nhiều hơn 2 con thỏ.

Bây giờ với khái niệm phần nguyên, ta có thể trình bày nguyên lý Điriclê một cách tổng quát như sau :

Nếu nhốt a con thỏ vào b chiếc lồng mà phép chia $\frac{a}{b}$ còn dư thì tồn tại một lồng nhốt $\left[\frac{a}{b}\right] + 1$ con thỏ trở lên.

Thí dụ 7 : Tìm [x] biết $x < 9 < x + 0,4$

Giải : Vì $x + 0,4 > 9$ nên $x > 9 - 0,4 = 8,6 > 8$

Kết hợp với điều kiện $x < 9$ ta được $8 < x < 9$ suy ra $[x] = 8$

Nhận xét : Trong cách giải trên ta đã giảm 8,6 thành 8 để số hữu tỉ x bị "kẹp giữa" hai số nguyên liền nhau là 8 và 9.

$$8 < x < 9$$

Sau đó vận dụng chú ý 2 ở trên để suy ra $[x] = 8$

Thí dụ 8 : Tìm x biết $\left[\frac{x}{3}\right] = -5$

Giải :

$$\left[\frac{x}{3}\right] = -5 \quad \Leftrightarrow -5 \le \frac{x}{3} < -4$$

$$\Leftrightarrow -15 \le x < -12$$

Nhận xét :

Bài toán trong thí dụ 8 là bài toán ngược với bài toán trong thí dụ 7. Phương pháp giải vẫn giống nhau, đó là dựa vào chú ý 2 ở trên.

Thí dụ 9 : Tích A = 1.2.3…1000 có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố ?

Giải :

Kể từ 1, cứ 3 số lại có một bội của 3 ; cứ $9 = 3^2$ số lại có một bội của 9 ; cứ $27 = 3^3$ số lại có một bội của 27…do đó số thừa số 3 khi phân tích 1.2.3…1000 ra thừa số nguyên tố bằng :

$$\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{3^2}\right]+\left[\frac{1000}{3^3}\right]+\left[\frac{1000}{3^4}\right]+\left[\frac{1000}{3^5}\right]+\left[\frac{1000}{3^6}\right]+\left[\frac{1000}{3^7}\right]$$

$= 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 + 0 = 498$

Nhận xét :

1. Số $\frac{1000}{3^7}$ có phần nguyên bằng 0, do đó ta không tiếp tục tìm phần nguyên của những số tiếp theo.

2. Tổng quát, số thừa số nguyên tố p khi phân tích số $A = 1.2.3\ldots n = n!$ ra thừa số nguyên tố là :

$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]$ với k là số mũ lớn nhất sao cho $p^k \le n$

BÀI TẬP

29. Tìm phần nguyên, phần lẻ của các số hữu tỉ x biết :

a) $x = -3$; b) $x = 6{,}1$; c) $x = -\frac{6}{5}$; d) $x = \frac{1}{8}$

30. Tìm phần nguyên của số hữu tỉ x biết :

a) $13 < x < 13{,}4$; b) $-9{,}2 < x < -9$

31. So sánh phần nguyên của các số hữu tỉ sau :

a) $x = \frac{25}{8}$; $y = \frac{24}{6}$; $z = \frac{23}{7}$

b) $x = -3\frac{1}{9}$; $y = -3\frac{8}{9}$; $z = -4$

32. Cho $x \in \mathbf{Z}$ và $y \in \mathbf{Q}$, hãy so sánh $\{x\}$ với $\{y\}$.

33. Tìm phần nguyên của số hữu tỉ x biết.

a) $x - 0{,}7 < 8 < x$; b) $x < -5 < x + \frac{1}{3}$

34. Tính :

a) $\left[\frac{12}{2}\right]+\left[\frac{13}{2}\right]$; b) $\left[\frac{12}{3}\right]+\left[\frac{13}{3}\right]+\left[\frac{14}{3}\right]$; c) $\left[\frac{-12}{3}\right]+\left[\frac{-13}{3}\right]+\left[\frac{-14}{3}\right]$

35. Cho $A = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right]$; $B = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right]$

Với giá trị nào của $n \in \mathbf{Z}$ thì :

a) $A \vdots 2$; b) $B \vdots 3$

36. Tìm x biết :

a) $[2x] = -1$; b) $[x + 0,4] = 3$; c) $\left[\frac{2}{3}x - 5\right] = 3$

37. Chứng minh rằng :

a) Với $x, y \in \mathbf{Z}$ thì $[x + y] = [x] + [y]$

b) Với $x \in \mathbf{Z}$; $y \in \mathbf{Q}$ thì $[x + y] = x + [y]$

38*. Tìm x biết :

a) $[3x - 4] = x$; b) $[x + 8] = -3x$; c) $[5x - 3] = 2x + 1$

39. Tích $C = 201.202.203\ldots600$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố ?

40*. Số 300! có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

41. Một lớp học có 44 học sinh làm bài kiểm tra toán. Điểm là một số tự nhiên từ 6 đến 10. Biết cả lớp có 6 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 10 học sinh có cùng một loại điểm.

42. Một tổ 11 học sinh thảo luận về học tập. Có 1 học sinh phát biểu 4 lần, các học sinh khác đều phát biểu nhưng có số lần phát biểu ít hơn. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 4 học sinh có số lần phát biểu như nhau.

43. Có 50 quyển vở chia cho 11 học sinh. Chứng minh rằng :

a) ít nhất cũng có 1 học sinh được 5 quyển trở lên.

b) Với mọi cách chia (kể cả trường hợp, có học sinh không được quyển nào), bao giờ cũng có ít nhất là hai học sinh được một số vở như nhau.

§4. LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Kiến thức cơ bản :

1. Luỹ thừa với số mũ tự nhiên.

$$x^n = \underbrace{x.x.x...x}_{n \text{ thừa số}} \qquad (x \in \mathbf{Q} ; n \in \mathbf{N}, n > 1)$$

Nếu $x = \dfrac{a}{b}$ thì $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\qquad (a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0)$

Quy ước : $x^0 = 1$ $(x \in \mathbf{Q} ; x \neq 0)$; $x^1 = x$

2. Với $x, y \in \mathbf{Q}$; $\quad m, n \in \mathbf{N}^*$

thì $\quad x^m . x^n = x^{m+n}$

$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)$

$(x^m)^n = x^{mn}$

$(xy)^n = x^n.y^n$

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$

Nâng cao :

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên âm

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (x \neq 0 ; n \in \mathbf{N}^*)$$

2. So sánh hai luỹ thừa :

a) Cùng cơ số : Với $m > n > 0$ thì :

$x > 1 \Rightarrow x^m > x^n$

$x = 1 \Rightarrow x^m = x^n$

$0 < x < 1 \Rightarrow x^m < x^n$

b) Cùng số mũ : $n \in \mathbf{N}^*$

* Với $x, y > 0$, nếu $x > y$ thì $x^n > y^n$
* $x > y \Leftrightarrow x^{2n+1} > y^{2n+1}$
* $|x| > |y| \Leftrightarrow x^{2n} > y^{2n}$
* $(-x)^{2n} = x^{2n}$
* $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$

Thí dụ 10 :

Chứng minh rằng không tồn tại ba số hữu tỉ x, y, z sao cho :

$xy = \frac{13}{15}$; $yz = \frac{11}{3}$; $zx = -\frac{3}{13}$

Giải :

Nhân từng vế của ba đẳng thức đã cho ta được :

$$xy \,.\, yz \,.\, zx = \frac{13}{15}.\frac{11}{3}.\left(-\frac{3}{13}\right)$$

$$\Leftrightarrow (xyz)^2 = -\frac{11}{15} \qquad (1)$$

Đẳng thức (1) không thể xảy ra vì $(xyz)^2 > 0$. Vậy không tồn tại ba số hữu tỉ x, y, z thoả mãn các điều kiện của đề bài.

Nhận xét :

– Phương pháp giải trong thí dụ trên là dùng định nghĩa của luỹ thừa để viết gọn tích (xy . yz . zx), sau đó dùng tính chất luỹ thừa bậc chẵn của một số hữu tỉ (khác 0) là một số dương.

– Ta cũng có thể giải thí dụ trên bằng một cách khác.

Vì $xy > 0$ nên x và y cùng dấu

$yz > 0$ nên y và z cùng dấu

Suy ra x và z cùng dấu, do đó tích $xz > 0$, không thể là một số âm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Thí dụ 11 : Tìm x biết $(3^x)^2 : 3^3 = \frac{1}{243}$

Giải :

$$3^{2x} : 3^3 = \frac{1}{3^5}$$

$$3^{2x-3} = 3^{-5}$$

Suy ra $2x - 3 = -5$; $x = -1$

Nhận xét : Phương pháp giải ở trên dựa vào tính chất :

Trong hai luỹ thừa bằng nhau, nếu cơ số bằng nhau (cơ số khác 0 và khác 1) thì hai số mũ cũng bằng nhau.

Thí dụ 12 :

Tìm x biết $(3x^2 - 51)^{2n} = (-24)^{2n}$ $\qquad (n \in \mathbf{N}^*)$

Giải :

Vì $n \in \mathbf{N}^*$ nên 2n là số chẵn khác 0

Từ đề bài suy ra :

$$\left[\begin{array}{lll} 3x^2 - 51 & = & -24 \quad (1) \\ 3x^2 - 51 & = & 24 \quad (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) được $3x^2 = 27$; $x^2 = 9$; $x = \pm 3$

Giải (2) được $3x^2 = 75$; $x^2 = 25$; $x = \pm 5$

Vậy $x \in \{\pm 3 \; ; \; \pm 5\}$

Nhận xét :

Phương pháp giải trong thí dụ 12 dựa vào tính chất : Trong hai luỹ thừa chẵn bằng nhau, nếu số mũ bằng nhau thì cơ số bằng nhau hoặc đối nhau.

BÀI TẬP

44. Viết các số sau dưới dạng một luỹ thừa với số mũ tự nhiên lớn hơn 1.

a) 64 ; 81 ; –216

b) $-\dfrac{1}{27}$; $\dfrac{8}{729}$; $\dfrac{16}{625}$

45. Dùng luỹ thừa với số mũ nguyên âm để viết các số sau :

a) Đường kính của nguyên tử cỡ 0,000 000 001 m

b) Đường kính của hạt nhân nguyên tử cỡ 0,000 000 000 000 001 m

c) Khối lượng của hạt nhân nguyên tử cỡ $0,\underbrace{000...00}_{\text{23 chữ số 0}}1$ gam

46. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số nguyên

a) $12^3 : (3^{-4} . 64)$; $\qquad$ b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^5 . \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-1} . \left(\dfrac{5}{3}\right)^6 : \left(\dfrac{343}{625}\right)^{-2}$

c) $5^4 . 125 . (2,5)^{-5} . 0,04$

47. Cho $A = (ax + by)^2$; $B = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

So sánh giá trị hai biểu thức A và B biết :

$a = 2$; $b = -1$; $x = \dfrac{8}{11}$; $y = \dfrac{-5}{11}$

48. Tính :

a) $\dfrac{3^6.45^4 - 15^{13}.5^{-9}}{27^4.25^3 + 45^6}$; b) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^7.5^7 + \left(\dfrac{9}{4}\right)^3 : \left(\dfrac{3}{16}\right)^3}{2^7.5^2 + 512}$

49. Tìm x,y biết rằng :

$$x + \left(-\frac{31}{12}\right)^2 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 - x = y^2$$

50. Tìm x biết :

a) $5^x.(5^3)^2 = 625$;   b) $\left(\dfrac{12}{25}\right)^x = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2} - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^4$

c) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{3x-1} = \dfrac{256}{81}$; d) $172x^2 - 7^9 : 98^3 = 2^{-3}$.

51. Tìm $x \in \mathbf{N}$ biết :

a) $8 < 2^x \le 2^9.2^{-5}$; b) $27 < 81^3 : 3^x < 243$; c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x > \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-3}.\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2$

52. Tìm x biết :

a) $(5x + 1)^2 = \dfrac{36}{49}$;   b) $\left(x - \dfrac{2}{9}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6$;

c) $(8x - 1)^{2n+1} = 5^{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$

53. Tìm x, y biết :

a) $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{10}\right)^4 = 0$;   b) $\left(\dfrac{1}{2}x - 5\right)^{20} + \left(y^2 - \dfrac{1}{4}\right)^{10} \le 0$.

54. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ biết :

$$(x - 7)^{x+1} - (x - 7)^{x+11} = 0$$

55. a) Tìm GTNN của biểu thức $A = \left(2x + \frac{1}{3}\right)^4 - 1$

b) Tìm GTLN của biểu thức $B = -\left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{15}\right)^6 + 3$

56. Tìm x, y biết : $x(x - y) = \frac{3}{10}$ và $y(x - y) = -\frac{3}{50}$

57. Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng $xy \leq 1$

§5. TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA NÓ. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Kiến thức cơ bản :

1. Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số.

   Dạng tổng quát $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc a : b = c : d

   Các số hạng a và d gọi là ngoại tỉ ; b và c gọi là trung tỉ

2. Tính chất : a) Tính chất cơ bản :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc} \qquad (b, d \neq 0)$$

   b) Tính chất hoán vị : Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (a, b, c, d ≠ 0) ta có thể suy ra ba tỉ lệ thức khác bằng cách :

   – Đổi chỗ ngoại tỉ cho nhau ;

   – Đổi chỗ trung tỉ cho nhau ;

   – Đổi chỗ ngoại tỉ cho nhau và đổi chỗ trung tỉ cho nhau.

   c) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau :

   Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ thì $\frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = k$ (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

3. Chú ý : Các số x, y, z tỉ lệ với các số a, b, c $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

   Ta còn viết x : y : z = a : b : c

Nâng cao :

1. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ thì $\frac{k_1a + k_2c + k_3e}{k_1b + k_2d + k_3f} = k$

2.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

$$\boxed{\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}} \qquad \boxed{\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}}$$

(Tính chất này gọi là tính chất tổng hoặc hiệu tỉ lệ)

Thí dụ 13 :

Cho tỉ lệ thức $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - 2b}{c - 2d}$ với b, d $\neq$ 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Giải : Từ $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - 2b}{c - 2d}$ suy ra (a + b) (c – 2d) = (c + d) (a – 2b)

$\Rightarrow$ ac – 2ad + bc – 2bd = ac – 2bc + ad – 2bd

$\Rightarrow$ –3ad = –3bc

$\Rightarrow$ ad = bc $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Nhận xét : Có nhiều phương pháp chứng minh một tỉ lệ thức (xem Chuyên đề 2).

Trong cách giải trên, để chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta chứng tỏ hai tích ad và bc bằng nhau. Muốn vậy, từ tỉ lệ thức đã cho ta dùng tính chất cơ bản biến đổi dần để được đẳng thức ad = bc, từ đó suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Thí dụ 14 : Tìm x, y, z biết $\frac{x}{y} = \frac{10}{9}$; $\frac{y}{z} = \frac{3}{4}$ và x – y + z = 78

Giải :

$\frac{x}{y} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9}$ (1)

$$\frac{y}{z} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 9 + 12} = \frac{78}{13} = 6$

do đó $x = 6.10 = 60$; $y = 6 . 9 = 54$; $z = 6 . 12 = 72$

Nhận xét :

Trong cách giải trên ta đã vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau. Mấu chốt nhất chính là tìm ra tỉ số trung gian $\frac{y}{9}$ bằng cách biến đổi $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ sau đó dùng tính chất bắc cầu để lập ra dãy ba tỉ số bằng nhau.

Thí dụ 15 : Cho bốn số a, b, c, d sao cho $a + b + c + d \neq 0$

Biết $$\frac{b + c + d}{a} = \frac{c + d + a}{b} = \frac{d + a + b}{c} = \frac{a + b + c}{d} = k$$

Tính giá trị của k.

Giải : Cộng thêm 1 vào mỗi tỉ số đã cho ta được :

$$\frac{b + c + d}{a} + 1 = \frac{c + d + a}{b} + 1 = \frac{d + a + b}{c} + 1 = \frac{a + b + c}{d} + 1$$

$$\frac{a + b + c + d}{a} = \frac{a + b + c + d}{b} = \frac{a + b + c + d}{c} = \frac{a + b + c + d}{d}$$

Vì $a + b + c + d \neq 0$ nên $a = b = c = d$

Suy ra $k = \frac{3a}{a} = 3$

Nhận xét : Trong một dãy tỉ số bằng nhau, nếu các tử bằng nhau (nhưng khác 0) thì các mẫu bằng nhau và ngược lại nếu các mẫu bằng nhau thì các tử bằng nhau.

BÀI TẬP

58. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{x - 3}{x + 5} = \frac{5}{7}$; b) $\frac{7}{x - 1} = \frac{x + 1}{9}$

c) $\frac{x + 4}{20} = \frac{5}{x + 4}$; d) $\frac{x - 1}{x + 2} = \frac{x - 2}{x + 3}$

59. Cho $\dfrac{a+5}{a-5} = \dfrac{b+6}{b-6}$ $(a \neq 5 ; b \neq 6)$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{6}$

60. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \dfrac{ab}{cd}$

61. Cho $P = \dfrac{x+2y-3z}{x-2y+3z}$. Tính giá trị của P biết các số x, y, z tỉ lệ với các số 5 ; 4 ; 3

62. Cho các số A, B, C tỉ lệ với các số a, b, c. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$Q = \dfrac{Ax+By+C}{ax+by+c}$ không phụ thuộc vào giá trị của x và y

63. Tìm các số x, y, z biết :

a) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{9}$ và $x - 3y + 4z = 62$;

b) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{7}$; $\dfrac{y}{z} = \dfrac{7}{3}$ và $x - y + z = -15$

c) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{20}$; $\dfrac{y}{z} = \dfrac{5}{8}$ và $2x + 5y - 2z = 100$

64. Tìm các số x, y, z biết :

a) $5x = 8y = 20z$ và $x - y - z = 3$; b) $\dfrac{6}{11}x = \dfrac{9}{2}y = \dfrac{18}{5}z$ và $-x + y + z = -120$

65. Ba kho có tất cả 710 tấn thóc. Sau khi chuyển đi $\dfrac{1}{5}$ số thóc ở kho I, $\dfrac{1}{6}$ số thóc ở kho II và $\dfrac{1}{11}$ số thóc ở kho III thì số thóc còn lại ở ba kho bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi kho có bao nhiêu tấn thóc ?

66. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích là $300m^2$, hai cạnh tỉ lệ với 4 và 3. Tính chiều dài, chiều rộng khu vườn.

67. Tìm x, y, z biết : $\dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z}{5}$ và $xyz = 20$

68. Tìm x, y, z biết $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - z^2 = 585$

69. Tìm hai phân số tối giản biết hiệu của chúng là $\frac{3}{196}$, các tử tỉ lệ với 3 và 5 ; các mẫu tương ứng tỉ lệ với 4 và 7.

70. Tìm x, y, z biết $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$ và $x + y + z = 48$

71*. Cho dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{2a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2d}{d}$$

Tìm giá trị của biểu thức M, biết $M = \frac{a + b}{c + d} + \frac{b + c}{d + a} + \frac{c + d}{a + b} + \frac{d + a}{b + c}$

Chuyên đề 2

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TỈ LỆ THỨC

1. Học về tỉ lệ thức có nhiều lợi ích.

Từ một tỉ lệ thức ta có thể chuyển thành một đẳng thức giữa hai tích. Trong một tỉ lệ thức nếu biết 3 số hạng ta có thể tìm được số hạng thứ tư. Trong chương II, khi học về đại lượng tỉ lệ thuận, tỉ lệ nghịch ta sẽ thấy tỉ lệ thức là một phương tiện quan trọng giúp ta giải toán. Trong hình học, để học được định lý Ta–let, tam giác đồng dạng (lớp 8) thì không thể thiếu kiến thức về tỉ lệ thức.

2. Có nhiều phương pháp chứng minh tỉ lệ thức. Ta hãy bắt đầu bằng một thí dụ đơn giản.

Thí dụ 16 : Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$ với $a, b, c, d \neq 0$

Chứng minh rằng : $\frac{a - b}{a} = \frac{c - d}{c}$

Giải : Cách 1 : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

Xét tích $(a-b).c = ac - bc = ac - ad = a(c-d)$

Vậy $(a-b).c = a(c-d) \Rightarrow \frac{a - b}{a} = \frac{c - d}{c}$

Trong cách này, để chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ ta chứng minh $(a-b).c = a(c-d)$

Cách 2 : Ta đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb\,;\, c = kd$

Thế thì $\frac{a-b}{a} = \frac{kb-b}{kb} = \frac{b(k-1)}{kb} = \frac{k-1}{k}$ (1)

$\frac{c-d}{c} = \frac{kd-d}{kd} = \frac{d(k-1)}{kd} = \frac{k-1}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Trong cách giải này, để chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ ta chứng minh hai tỉ số ở hai vế cùng bằng một tỉ số thứ ba. Để làm được điều đó ta đã đặt giá trị chung của các tỉ số ở tỉ lệ thức đã cho là k, từ đó tính giá trị của mỗi tỉ số ở tỉ lệ thức phải chứng minh theo k.

Cách 3 : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$

Vậy $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Trong cách giải này, sau khi hoán vị các trung tỉ của tỉ lệ thức đã cho, ta dùng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau. Cuối cùng lại hoán vị các trung tỉ của tỉ lệ thức mới được tạo ra để đi đến tỉ lệ thức phải chứng minh.

Cách 4 : Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Ta có $\frac{a-b}{a} = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} = \frac{c-d}{c}$

Vậy $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Trong cách giải này, ta đã biến đổi tỉ số ở vế trái (của tỉ lệ thức cần chứng minh) thành vế phải. Đó cũng là cách thường dùng để chứng minh một đẳng thức nói chung.

Cách 5 : Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Trong cách giải này, từ tỉ lệ thức đã cho ta đã biến đổi dần thành tỉ lệ thức phải chứng minh bằng cách dùng các tính chất hoán vị, tính chất của đẳng thức v.v...

Thí dụ 17 : Cho $a + d = b + c$ và $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ $(b, d \neq 0)$. Chứng minh rằng 4 số a, b, c, d có thể lập thành một tỉ lệ thức.

Giải :

$a + d = b + c \Rightarrow (a+d)^2 = (b+c)^2 \Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + 2bc + c^2 \quad (1)$

Vì $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ nên từ (1) suy ra $2ad = 2bc$

hay $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Nhận xét : Cách giải như trên dựa vào tính chất : Nếu có 4 số mà tích của hai số này bằng tích của hai số kia thì 4 số đó lập thành một tỉ lệ thức.

BÀI TẬP

72. Cho $\frac{a}{k} = \frac{x}{a}$; $\frac{b}{k} = \frac{y}{b}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b^2} = \frac{x}{y}$

73. Cho $a = b + c$ và $c = \frac{bd}{b-d}$ $\qquad (b \neq 0 ; d \neq 0)$

Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

74. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq \pm 1$ và $c \neq 0$. Chứng minh rằng :

a) $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}$; b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3 - b^3}{c^3 - d^3}$

75. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(c \neq \pm\frac{3}{5}d)$. Chứng minh rằng $\frac{5a+3b}{5c+3d} = \frac{5a-3b}{5c-3d}$

76. Cho $b^2 = ac$; $c^2 = bd$. Với $b, c, d \neq 0$; $b + c \neq d$; $b^3 + c^3 \neq d^3$

Chứng minh rằng $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$

77. Chứng minh rằng nếu : $2(x + y) = 5(y + z) = 3(z + x)$ thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$.

78. Cho $b^2 = ac$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

79. Cho $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$. Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c đều khác 0 thì từ ba số a, b, c (có một số được dùng 2 lần) có thể lập thành một tỉ lệ thức.

80. Cho biểu thức $M = \frac{ax + by}{cx + dy}$ $(c, d \neq 0)$

Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào x và y thì 4 số a, b, c, d lập thành một tỉ lệ thức.

81*. Cho $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$ với $a, b, c, d \neq 0$; $c \neq \pm d$. Chứng minh rằng hoặc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

§6. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. LÀM TRÒN SỐ

Kiến thức cơ bản :

1. Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không chứa thừa số nguyên tố nào khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

   – Nếu một phân số tối giản với mẫu dương có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

2. Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

Nâng cao :

1. Ta có $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots = 0{,}(1)$

$\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots = 0{,}(01)$

$\frac{1}{999} = 0{,}001001\ldots = 0{,}(001)$

2. Ta thừa nhận các kết quả sau : $0{,}(1) = \frac{1}{9}$; $0{,}(01) = \frac{1}{99}$; $0{,}(001) = \frac{1}{999}$

Thí dụ 18 : Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản :

a) 0,555 ; b) 0,555... ; c) 0,25454...

Giải :

a) $0{,}555 = \frac{555}{1000} = \frac{111}{200}$

b) $0{,}555\ldots = 5.\ 0{,}111\ \ldots = 5.\frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

c) $0{,}25454\ldots = \frac{1}{10}.2{,}5454\ldots = \frac{1}{10}.(2 + 0{,}5454\ldots)$

$= \frac{1}{10}(2 + 54.\ 0{,}0101\ldots) = \frac{1}{10}.\left(2 + 54.\frac{1}{99}\right) = \frac{14}{55}$

Nhận xét : – Số 0,555... = 0,(5) là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì ngay sau dấu phẩy, ta gọi đó là số thập phân vô hạn tuần hoàn *đơn*.

– Số 0,25454... = 0,2(54) là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì không bắt đầu từ ngay sau dấu phẩy, ta gọi đó là số thập phân vô hạn tuần hoàn *tạp*. Để viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn *tạp* dưới dạng phân số tối giản trước hết phải đưa chúng về dạng tuần hoàn *đơn*.

Thí dụ 19 : Thực hiện các phép tính 1,(6) . 2,(3) : 0,(7)

Giải : $1{,}(6)\ .\ 2{,}(3)\ :\ 0{,}(7) = [1 + 0{,}(6)]\ .\ [2 + 0{,}(3)]\ :\ 0{,}(7)$

$= \left(1 + \frac{6}{9}\right).\left(2 + \frac{3}{9}\right) : \frac{7}{9} = \frac{5}{3}.\frac{7}{3}.\frac{9}{7} = 5$

Nhận xét : Để thực hiện các phép tính về số thập phân vô hạn tuần hoàn trước hết ta viết chúng dưới dạng phân số tối giản rồi thực hiện các phép tính với phân số.

Thí dụ 20 :

Để tính số năm tăng gấp đôi tổng sản phẩm quốc nội (GDP) của một quốc gia ta có thể dùng công thức $n = \dfrac{72}{g}$ trong đó :

* g% là tốc độ tăng trưởng GDP trong giai đoạn đang xét.

* n là số năm để tăng gấp đôi GDP.

a) Nếu tốc độ tăng trưởng trong giai đoạn hiện nay của Việt Nam khoảng 7,1% thì sau bao nhiêu năm nữa GDP của nước ta tăng gấp đôi ? (Làm tròn đến hàng đơn vị).

b) Nếu muốn sau 7 năm, GDP tăng gấp đôi thì tốc độ tăng trưởng hàng năm là mấy phần trăm (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải : a) Với g = 7,1% thì $n = \dfrac{72}{g} = \dfrac{72}{7,1} = 10,14\ \ldots \approx 10$ (năm)

b) Với n = 7 thì $g = \dfrac{72}{n} = \dfrac{72}{7} = 10,285\ldots \approx 10,3$ (%)

BÀI TẬP

82. Cho x và y là các số nguyên tố có một chữ số. Tìm x và y để các phân số sau viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

a) $P = \dfrac{x}{3.5.y}$; b) $Q = \dfrac{15x}{14y}$

83. Không làm phép chia, hãy cho biết trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ? Giải thích ?

$\dfrac{7}{32}$; $\dfrac{2}{35}$; $\dfrac{6}{75}$; $\dfrac{-35}{42}$; $\dfrac{3^2}{11^2 - 1}$

84. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số tối giản :

a) 0,333… ; b) 0,454545…

c) 0,162162… ; d) 5,272727…

85. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số tối giản :

a) 0,7666... ; b) 0,50757575... ; c) 1,2148148...

86. Thực hiện các phép tính :

a) 0,2777... + 0,3555...

b) 1,5454... – 0,8181... – 0,75

c) 1 : 10,2(6) : 0,41(6) . 0,42(7)

87. Tìm một phân số dương tối giản nhỏ hơn 1 biết rằng khi chia tử cho mẫu ta được một số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn chu kỳ có 3 chữ số và phân số này bằng lập phương của một phân số khác.

88. Số $\pi = 3,14159...$ Hãy làm tròn số π chính xác đến :

– Hàng đơn vị

– Hai chữ số thập phân.

– Bốn chữ số thập phân.

89. Điểm thi tốt nghiệp THCS của bạn An như sau :

Văn : 8 ; Vật lý : 7,5 ; Toán : 9,5 ; Ngoại ngữ : 6

a) Em hãy tính điểm trung bình 4 môn thi của bạn An (mỗi môn đều có hệ số 1).

b) Để xét tuyển vào lớp 10 THPT thì hai môn Văn và Toán được tính với hệ số 2 ; hai môn Vật lý và Ngoại ngữ tính với hệ số 1. Hỏi bạn An có được tuyển vào lớp 10 hệ A không nếu điểm chuẩn là 8,0 ?

§7. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI. SỐ VÔ TỈ. SỐ THỰC

Kiến thức cơ bản :

1. Căn bậc hai của một số a không âm là một số x sao cho $x^2 = a$.

   Mỗi số a > 0 có đúng hai căn bậc hai của nó, một số dương ký hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm ký hiệu là $-\sqrt{a}$.

2. Với a > 0 ; b > 0

   Nếu a = b thì $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

   Nếu a < b thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

3. Số vô tỉ là số có thể viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
4. Số hữu tỉ và số vô tỉ gọi chung là số thực. Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số. Ngược lại, mỗi điểm trên trục số biểu diễn một số thực.
5. Các phép toán trong tập hợp các số thực cũng có các tính chất tương tự các phép toán trong tập hợp số hữu tỉ.

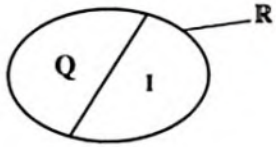
Bổ sung :

Tập hợp các số hữu tỉ ký hiệu là **Q**. Tập hợp các số vô tỉ ký hiệu là **I**. Ta có $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$.

Điều này có nghĩa là :

Nếu $x \in \mathbf{Q}$ thì $x \notin \mathbf{I}$

Nếu $x \in \mathbf{I}$ thì $x \notin \mathbf{Q}$



Thí dụ 21:

Tính độ dài mỗi cạnh của một sân hình vuông có diện tích lần lượt là $16m^2$; $6{,}25m^2$; $6m^2$. Trong mỗi trường hợp, hãy cho biết độ dài mỗi cạnh được biểu diễn bằng số hữu tỉ hay vô tỉ.

Giải : Gọi độ dài mỗi cạnh của sân là x (x > 0)

Ta lần lượt có : a) $x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4(m)$; $4 \in \mathbf{Q}$

b) $x^2 = 6{,}25 \Rightarrow x = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ (m) ; $2{,}5 \in \mathbf{Q}$

c) $x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} \approx 2{,}45$ (m) ; $\sqrt{6} \in \mathbf{I}$

Nhận xét : Độ dài của một đoạn thẳng hoặc là một số hữu tỉ dương, hoặc là một số vô tỉ dương.

Thí dụ 22 : Cho $A = \dfrac{5}{\sqrt{x} - 3}$. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ để biểu thức A có giá trị nguyên.

Giải : A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \in Ư(5)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \in \{\pm 1 ; \pm 5\}$

$\sqrt{x} - 3$	-1	1	-5	5
$\sqrt{x}$	2	4	-2	8
x	4	16		64

Nhận xét :

– Ký hiệu $\sqrt{x}$ chỉ giá trị không âm của căn bậc hai của x. Vì thế $\sqrt{x}$ không thể có giá trị là –2. Do đó không có x để $\sqrt{x} = -2$.

– Từ $\sqrt{x} = 2$ suy ra $x = 2^2 = 4$ hoặc từ $\sqrt{x} = 4$ suy ra $x = 4^2 = 16$ là dựa vào đâu ? Câu trả lời : chính là dựa vào định nghĩa của căn bậc hai của một số.

Thí dụ 23 : Không dùng bảng số hay máy tính, hãy so sánh

$$\sqrt{50+2} \text{ với } \sqrt{50} + \sqrt{2}$$

Giải :

$$\sqrt{50+2} = \sqrt{52} < \sqrt{64} = 8 \qquad (1)$$

$$\sqrt{50} + \sqrt{2} > \sqrt{49} + \sqrt{1} = 7 + 1 = 8 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{50+2} < \sqrt{50} + \sqrt{2}$

Nhận xét : Một cách tổng quát, người ta chứng minh được rằng căn bậc hai của một tổng hai số dương thì nhỏ hơn tổng các căn bậc hai của hai số đó.

BÀI TẬP

90. Tính giá trị các biểu thức :

a) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{5^2} - \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{3^2}$; b) $\left[\sqrt{4^2} + \sqrt{(-4)^2}\right].\sqrt{4^{-3}} - \sqrt{3^{-4}}$

91. Tìm x biết : a) $4x^2 - 1 = 0$; b) $2x^2 + 0,82 = 1$

92. Tìm x biết :

a) $7 - \sqrt{x} = 0$; b) $3\sqrt{x} + 1 = 40$

c) $\dfrac{5}{12}\sqrt{x} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$; d) $\sqrt{x+1} + 2 = 0$

93. So sánh : a) $4\dfrac{8}{33}$ với $3.\sqrt{2}$; b) $5.\sqrt{(-10)^2}$ và $10.\sqrt{(-5)^2}$

94. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh :

a) $\sqrt{26} + \sqrt{17}$ với 9 ; b) $\sqrt{8} - \sqrt{5}$ với 1 ; c) $\sqrt{63-27}$ với $\sqrt{63} - \sqrt{27}$

95. Hãy so sánh A với B biết : $A = \sqrt{225} - \frac{1}{\sqrt{5}} - 1$; $B = \sqrt{196} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

96. Cho $P = \frac{1}{2} + \sqrt{x}$; $Q = 7 - 2\sqrt{x-1}$. Hãy tìm :

a) GTNN của P ; b) GTLN của Q

97. Cho $M = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ và $x < 50$ để cho M có giá trị nguyên.

98. Cho $N = \frac{9}{\sqrt{x} - 5}$. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ để N có giá trị nguyên.

99*. Xét xem các số x và y có thể là số vô tỉ không nếu biết :

a) $x + y$ và $x - y$ đều là số hữu tỉ.

b) $x + y$ và $\frac{x}{y}$ đều là số hữu tỉ.

100*. Bên trong một hình vuông cạnh 5 có 76 điểm. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm trong các điểm đó thuộc một hình tròn có bán kính $\frac{3}{4}$.

§8. ÔN TẬP CHƯƠNG I

Thí dụ 24 : Cho $A = \left|x - \frac{1}{2}\right| - \left|x - \frac{3}{2}\right|$

Trong khoảng giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào x ?

Giải : Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức $x - \frac{1}{2}$ và $x - \frac{3}{2}$

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$x - \frac{1}{2}$	−	0	+	|	+
$x - \frac{3}{2}$	−	|	−	0	+

Trường hợp $x < \frac{1}{2}$ thì $A = \left(\frac{1}{2} - x\right) - \left(\frac{3}{2} - x\right) = -1$

Trường hợp $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ thì $A = \left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} - x\right) = 2x - 2$

Trường hợp $x > \frac{3}{2}$ thì $A = \left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{3}{2}\right) = 1$

Vậy với $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > \frac{3}{2}$ thì giá trị của biểu thức A không phụ thuộc x.

Nhận xét : Muốn biết trong khoảng giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức A không phụ thuộc x, trước tiên ta rút gọn A. Vì biểu thức A có chứa dấu giá trị tuyệt đối nên phải khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét các khoảng giá trị của biến.

Sau khi rút gọn A, khi nào ở kết quả không còn x thì khi ấy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc x.

Thí dụ 25 : Cho $\frac{k}{x} = \frac{a}{c}$; $\frac{k}{y} = \frac{b}{d}$ trong đó $c + d = k$

Chứng minh rằng $ax + by = k^2$

Giải : $\frac{k}{x} = \frac{a}{c} \Rightarrow ax = kc$; $\frac{k}{y} = \frac{b}{d} \Rightarrow by = kd$

Vậy $ax + by = kc + kd = k(c+d) = k.k = k^2$

Thí dụ 26 :

Sai ở đâu ?

Ta có tỉ lệ thức đúng $10 : 5 = 12 : 6$ (1)

Ở vế trái đặt 5 làm thừa số chung

Ở vế phải đặt 6 làm thừa số chung ta được :

$5.(2 : 1) = 6. (2 :1)$ (2)

hay $5 . 2 = 6.2$ (3)

Suy ra $5 = 6$ (!) (4)

Vậy sai ở đâu ?

Giải :

Từ (1) biến đổi thành (2) là sai.

Thực vậy, xét vế trái của (1) ta có :

$$10 : 5 = \frac{10}{5} = 5.\frac{2}{5} = 5 . (2 : 5) \text{ chứ không phải là } 5 . (2 : 1)$$

Xét vế phải của (1) ta có :

$$12 : 6 = \frac{12}{6} = 6.\frac{2}{6} = 6. (2 : 6) \text{ chứ không phải là } 6. (2 : 1)$$

Nhận xét :

Sở dĩ có sai lầm trên là do đã áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng không đúng chỗ.

BÀI TẬP

101. Thực hiện các phép tính :

a) $9,6 . \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)^2$; b) $6.\left(-\frac{2}{3}\right) + 12.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 18.\left(-\frac{2}{3}\right)^3$;

c) $\left[\dfrac{\frac{17}{24}.9\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}.\frac{17}{24}}{3\frac{1}{2}.2\frac{13}{36} + 2\frac{13}{36}.2\frac{3}{4}} - \frac{1}{5}\right]^{-2}$

102. Tìm x sao cho $(x - 3)(x + 4) > 0$

103. Tìm x sao cho $\left|\frac{5}{7}x - 4\right| < \frac{2}{7}$

104*. Tìm số hữu tỉ $x \neq 0$ sao cho $[x] = 4\{x\}$.

105. Bạn muốn biết ngày.....tháng.....năm.....nào đó là ngày thứ mấy, cứ làm theo hai bước sau :

Bước 1 : Tính S theo công thức :

$$S = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4}\right] - \left[\frac{x-1}{100}\right] + \left[\frac{x-1}{400}\right] + C$$

Trong đó x là năm dương lịch ; C là số ngày từ mồng một tháng giêng năm đó đến ngày cần tìm (kể cả ngày đầu tiên).

Bước 2 : Tìm số dư trong phép chia $\frac{S}{7}$ rồi đối chiếu với bảng sau :

Thứ	Chủ nhật	Hai	Ba	Tư	Năm	Sáu	Bảy
Số dư	0	1	2	3	4	5	6

Bây giờ bạn hãy tìm xem :

a) Ngày 01/01/2001 là ngày thứ mấy ?

b) Ngày 03/02/2030 là ngày thứ mấy ?

106. Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

Chứng minh rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

107. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ trong đó $a + b + c + d \neq 0$

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2a-b}{c+d} + \frac{2b-c}{d+a} + \frac{2c-d}{a+b} + \frac{2d-a}{b+c}$

108. Tìm x, y biết : $\frac{3}{5}x = \frac{2}{3}y$ và $x^2 - y^2 = 38$

109. Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính $x + y + z$

110. Cho $(x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \ldots + (x_mp - y_mq)^{2n} \leq 0$ với $m, n \in \mathbf{N}^*$

Chứng minh rằng $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m} = \frac{q}{p}$

111. Tìm 3 phân số tối giản biết tổng của chúng là $3\frac{7}{60}$, tử của chúng tỉ lệ với 2, 3, 5 còn mẫu tỉ lệ với 5, 4, 6.

112. Trong đợt thi đua chào mừng ngày Quốc Khánh 2–9, ba đội xe được giao vận chuyển ít nhất là 3030 tấn hàng. Cuối đợt, đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5%, đội III vượt mức 8% định mức của mỗi đội, nên khối lượng hàng mà ba đội đã vận chuyển được đều bằng nhau. Tính định mức vận chuyển của mỗi đội xe.

Chương II

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Kiến thức cơ bản :

1. Định nghĩa : Nếu hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức y = kx với k là hằng số khác 0 thì y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.
2. Tính chất : Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k thì :

$$* \ \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = ... = \frac{y_n}{x_n} = k$$

$$* \ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Bổ sung :

1. Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k \neq 0$ thì x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.

2. Nếu z tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k_1 ; y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k_2 thì z tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k_1 . k_2$ *(Bạn đọc tự chứng minh).*

Thí dụ 27 :

Cho y tỉ lệ thuận với x với hệ số tỉ lệ là một số âm. Biết tổng các bình phương hai giá trị của y là 18 ; tổng các bình phương hai giá trị tương ứng của x là 2. Viết công thức liên hệ giữa y và x.

Giải :

Gọi hai giá trị của y là y_1, y_2 ; hai giá trị tương ứng của x là x_1, x_2.

Vì y tỉ lệ thuận với x nên $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$

Suy ra : $k^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} = \frac{y_2^2}{x_2^2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{18}{2} = 9$; $k = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Nhưng theo đề bài $k < 0$ nên $k = -3$

Do đó ta có công thức $y = -3x$.

Nhận xét :

Vì y tỉ lệ thuận với x nên muốn viết được công thức liên hệ giữa y và x ta phải xác định được hệ số tỉ lệ k. Ta tính được hệ số k nhờ áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

Thí dụ 28 :

Một xe tải chạy từ A đến B mất 6 giờ trong khi đó một xe con chạy từ B đến A chỉ mất có 3 giờ. Nếu hai xe đó khởi hành cùng một lúc thì sau bao lâu sẽ gặp nhau ?

Giải :

Gọi quãng đường xe tải và xe con đã đi cho đến khi gặp nhau lần lượt là s_1 và s_2 ; vận tốc của chúng theo thứ tự là v_1 và v_2.

Trong cùng một thời gian, quãng đường đi được tỉ lệ thuận với vận tốc nên :

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t \text{ (t chính là thời gian cần tìm)}$$

Coi quãng đường AB là đơn vị quy ước thì :

$$s_1 + s_2 = 1 \text{ ; } v_1 = \frac{1}{6} \text{ ; } v_2 = \frac{1}{3} \text{ do đó } t = \frac{s_1}{\frac{1}{6}} = \frac{s_2}{\frac{1}{3}} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{6}} = 2$$

Vậy sau khi khởi hành 2 giờ thì hai xe gặp nhau.

Nhận xét :

Bạn có thấy lạ không ? Quãng đường AB không biết dài bao nhiêu, vận tốc của mỗi xe cũng không biết, thế mà ta vẫn tính được thời gian hai xe phải đi để gặp nhau. Bí quyết nằm ở chỗ nào ?

Đó chính là trong cùng một thời gian thì quãng đường đi và vận tốc đi là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Nhờ đó ta tính được thời gian t theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Thí dụ 29 :

Mức nước sinh hoạt của nhà bạn Thuỷ được thống kê trong bảng sau :

Thời điểm	Cuối tháng 6	Cuối tháng 7	Cuối tháng 8	Cuối tháng 9
Chỉ số đồng hồ đo nước (m^3)	204	220	237	250

Biết tổng số tiền nước nhà bạn Thuỷ phải trả trong quý III là 92 000đồng. Tính tiền nước phải trả trong mỗi tháng 7, 8, 9.

Giải :

Số mét khối nước đã dùng trong các tháng 7, 8, 9 lần lượt là :

$$220 - 204 = 16\ (m^3)\ ;\quad 237 - 220 = 17\ (m^3)\ ;\quad 250 - 237 = 13\ (m^3)$$

Gọi số tiền nước trong các tháng 7, 8, 9 lần lượt là x, y, z. Ta phải chia 92000 đồng thành ba phần tỉ lệ thuận với 16, 17 và 13. Ta có.

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{17} = \frac{z}{13} = \frac{x+y+z}{16+17+13} = \frac{92\,000}{46} = 2000$$

Suy ra $x = 2000.16 = 32\,000$; $y = 2000.17 = 34\,000$; $z = 2000.13 = 26\,000$

Vậy số tiền nước trong ba tháng 7, 8, 9 lần lượt là 32 000 đồng, 34 000 đồng, 26 000 đồng.

Nhận xét : Trong cách giải trên ta đã chia 92 000 thành ba phần tỉ lệ thuận với 16, 17, 13. Sở dĩ như vậy vì số tiền nước và số nước dùng là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

BÀI TẬP

113. Một số M được chia làm 3 phần sao cho phần thứ nhất và phần thứ hai tỉ lệ (thuận) với 5 và 6 ; phần thứ hai và phần thứ ba tỉ lệ (thuận) với 8 và 9. Biết phần thứ ba hơn phần thứ hai là 150. Tìm số M.

114. Một đội thuỷ lợi có 10 người làm trong 8 ngày đào đắp được $200m^3$ đất. Một đội khác có 12 người làm trong 7 ngày thì đào đắp được bao nhiêu mét khối đất ? (Giả thiết năng suất của mỗi người đều như nhau).

115. Hai bể nước hình hộp chữ nhật có diện tích đáy bằng nhau. Biết hiệu thể tích nước trong hai bể là $1,8m^3$; hiệu chiều cao nước trong hai bể là 0,6m. Tính diện tích đáy của mỗi bể.

116. Vận tốc riêng của một ca nô là 21km/h, vận tốc dòng sông là 3km/h. Hỏi với thời gian để ca nô chạy ngược dòng được 30km thì ca nô chạy xuôi dòng được bao nhiêu kilômét ?

117*. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 65km/h, cùng lúc đó một xe máy chạy từ B đến A với vận tốc 40km/h. Biết khoảng cách AB là 540km và M là trung điểm của AB. Hỏi sau khi khởi hành bao lâu thì ô tô cách M một khoảng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ xe máy đến M.

118. Đúng hay sai ?

Người ta trồng cây ở một bên của đoạn đường dài 30m với khoảng cách 5m một cây. Nếu cả hai đầu đường đều trồng cây thì số cây là $\frac{30}{5} + 1 = 7$ (cây).

Nếu đoạn đường dài 300m, gấp 10 lần đoạn đường 30m thì số cây trồng phải gấp 10 lần tức là phải trồng 7.10 = 70 (cây). Lập luận đó đúng hay sai ?

§2. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Kiến thức cơ bản :

1. Định nghĩa : Nếu hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức $y = \frac{a}{x}$ với a là một hằng số khác 0 thì y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.
2. Tính chất : Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a thì :
   - $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = ... = x_ny_n = a$
   - $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

Bổ sung :

1. Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a thì x tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ a.

2. Nếu z tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ a_1 ; y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a_2 thì z tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $\frac{a_1}{a_2}$ (Bạn đọc tự chứng minh).

Thí dụ 30 :

Hai ô tô cùng khởi hành từ A để đến B. Vận tốc của ô tô I là 50km/h, vận tốc ô tô II là 60km/h. Ô tô I đến B sau ô tô II là 36 phút. Tính quãng đường AB.

Giải :

Xe	Vận tốc	Thời gian đi
Ô tô I	50km/h $\downarrow$	$\uparrow$ t_1 giờ
Ô tô II	60km/h	t_2 giờ

Trong đó $t_1 - t_2 = 36$ phút $= \dfrac{3}{5}$ giờ

Với cùng quãng đường AB thì vận tốc và thời gian đi tỉ lệ nghịch với nhau nên theo tính chất ta có :

$$\frac{50}{60} = \frac{t_2}{t_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1}{60} = \frac{t_2}{50} = \frac{t_1 - t_2}{60 - 50} = \frac{\frac{3}{5}}{10} = \frac{3}{50}$$

suy ra $t_2 = 3$

Vậy thời gian ô tô II đi hết quãng đường AB là 3 giờ.

Quãng đường AB dài $60 \times 3 = 180$(km).

Nhận xét : Bài toán chuyển động có ba đại lượng là quãng đường, vận tốc, thời gian. Ở đây, quãng đường không thay đổi nên thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc.

Từ đó ta áp dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, tính chất của tỉ lệ thức, của dãy tỉ số bằng nhau để tìm ra được đáp số của bài toán.

Thí dụ 31 : Một số A được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 5 ; 2 ; 4. Biết tổng các lập phương của ba phần đó là 9512. Hãy tìm A.

Giải : Gọi ba phần là x, y, z

Ta có $x : y : z = \dfrac{1}{5} : \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{4} = 4 : 10 : 5$ hay $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{z}{5} = k$

Suy ra $k^3 = \dfrac{x^3}{64} = \dfrac{y^3}{1000} = \dfrac{z^3}{125} = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{64 + 1000 + 125} = \dfrac{9512}{1189} = 8$

Do đó $k = 2$

Vậy $\dfrac{x + y + z}{4 + 10 + 5} = 2$ suy ra $x + y + z = 2.19$ hay $A = 38$

Nhận xét :

Sau khi tìm được $k = 2$, ta có thể tính được $x = 2.4 = 8$; $y = 2 . 10 = 20$; $z = 2. 5 = 10$

Từ đó tính $A = x + y + z = 8 + 20 + 10 = 38$. Rõ ràng không gọn bằng cách giải trên.

BÀI TẬP

119. Hai bà mua gạo hết cùng một số tiền. Bà thứ nhất mua loại 4000 đồng/kg, bà thứ hai mua loại 4800đồng/kg. Biết bà thứ nhất mua nhiều hơn bà thứ hai là 2kg. Hỏi mỗi bà mua bao nhiêu kilôgam gạo ?

120. Hai cạnh của một tam giác dài 25cm và 36cm. Tổng độ dài hai đường cao tương ứng là 48,8cm. Tính độ dài của mỗi đường cao nói trên.

121. Một xe ô tô chạy từ A đến B gồm 3 chặng đường dài bằng nhau nhưng chất lượng mặt đường tốt xấu khác nhau. Vận tốc trên mỗi chặng lần lượt là 72km/h ; 60km/h ; 40km/h. Biết tổng thời gian xe chạy từ A đến B là 4 giờ. Tính quãng đường AB.

122. Một ô tô dự định chạy từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 54km/h thì đến nơi sớm được 1 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 63km/h thì đến nơi sớm được 2 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi.

123. Để làm xong một công việc thì 21 công nhân cần làm trong 15 ngày. Do cải tiến công cụ lao động nên năng suất lao động của mỗi người tăng thêm 25%. Hỏi 18 công nhân phải làm bao lâu mới xong công việc đó.

124. Đúng hay sai ?

Để làm xong một công việc, một số công nhân cần làm trong một số ngày.

Một bạn học sinh lập luận rằng nếu số công nhân tăng thêm $\frac{1}{3}$ thì thời gian sẽ giảm đi $\frac{1}{3}$. Điều đó đúng hay sai ?

§3. HÀM SỐ

Kiến thức cơ bản :

1. Nếu với mỗi giá trị của x ta xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

   Kí hiệu y = f(x)

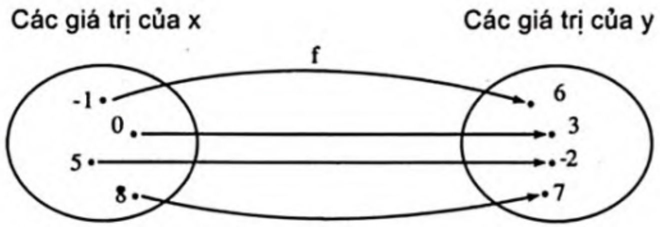
2. Cách cho làm số :

   Cách 1 : Hàm số y = f(x) được cho bằng bảng :

x	–1	0	5	8
y = f(x)	6	3	–2	7

Rõ ràng với mỗi giá trị của x ta xác định được chỉ một giá trị của y. Cụ thể là $f(-1) = 6$; $f(0) = 3$; $f(5) = -2$; $f(8) = 7$

Cách 2 : Hàm số y = f(x) được cho bằng sơ đồ mũi tên (hình 1)



Hình 1

Cách 3 : Hàm số y = f(x) được cho bằng công thức :

Chẳng hạn $y = f(x) = 3x$; $x \in \{-2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 5\}$

Thế thì $f(-2) = -6$; $f(0) = 0$; $f(1) = 3$; $f(3) = 9$; $f(5) = 15$

Cách 4 : Hàm số y = f(x) được cho bằng cách liệt kê tất cả các cặp số (x ; y)

Chẳng hạn (– 2 ; – 6) ; (0 ; 0) ; (1 ; 3) ; (3 ; 9) ; (5 ; 15)

Cách 5 : Hàm số y = f(x) được cho bằng đồ thị (xem §4)

Bổ sung :

1. Theo định nghĩa của hàm số y = f(x) thì mỗi giá trị của x bắt buộc phải được tương ứng với một giá trị của y nhưng ngược lại có thể có những giá trị của y không tương ứng với một giá trị nào của x.

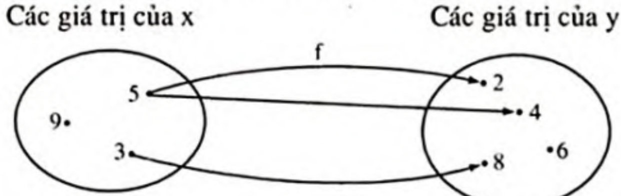
2. Có thể có hai giá trị khác nhau của x tương ứng với cùng một giá trị của y, nhưng ngược lại *không thể có* một giá trị của x tương ứng với hai giá trị khác nhau của y.

3. Có thể với mỗi giá trị bất kỳ của x đều tương ứng với một giá trị duy nhất của y, chẳng hạn y = k (k là hằng số) thì lúc đó ta được một *hàm hằng*.

$$y = f(x) = k$$

Thí dụ 32 :

Tương ứng f được xác định bởi *sơ đồ mũi tên* như hình 2. Hãy giải thích vì sao tương ứng này không xác định một hàm số.



Hình 2

Giải :

Tương ứng f không xác định một hàm số vì giá trị x = 5 được tương ứng với hai giá trị khác nhau của y là y = 2 ; y = 4.

Nhận xét : Sơ đồ mũi tên giúp ta nhận biết một sự tương ứng f nào đó có phải là một hàm số hay không dễ dàng hơn là được cho bằng bảng hay được cho bằng cách liệt kê tất cả các cặp số (x ; y)

Thí dụ 33 :

Cho bảng sau :

x	–1	0	1	2	3
y	2	0	– 2	– 4	– 6

a) Giải thích vì sao bảng này xác định y là một hàm số của x.

b) Vẽ sơ đồ mũi tên của hàm số đó.

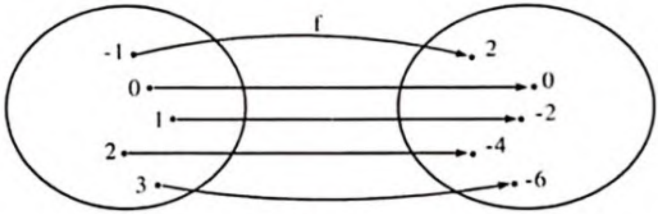
c) Hãy liệt kê tất cả các cặp số (x, y) của hàm số trên.

d) Hàm số đó có thể được cho bởi công thức nào ?

Giải :

a) Bảng đã cho xác định một hàm số vì với mỗi giá trị của x ta xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y.

b) (Xem hình 3)



Hình 3

c) Các cặp số (x, y) của hàm số trên là : (–1 ; 2) ; (0 ; 0) ; (1 ; –2) ; (2 ; – 4) ; (3 ; – 6)

d) Hàm số có thể được cho bởi công thức $y = -2x$ với $x \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

Nhận xét : Hàm số được cho bởi bảng trên có thể được viết bởi công thức $y = -2x$ nhưng x chỉ lấy 5 giá trị khác nhau là –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.

Điều này hoàn toàn khác với hàm số được cho bởi công thức $y = -2x$ mà không nói thêm gì về x. Lúc đó ta hiểu x lấy bất cứ giá trị nào thuộc tập hợp số thực R.

BÀI TẬP

125. Một chiếc tàu ngầm chạy với vận tốc không đổi là 37km/h ở độ sâu 100m so với mực nước biển.

a) Viết hàm số f mô tả sự phụ thuộc giữa quãng đường s (tính bằng kilômét) và thời gian t (tính bằng giờ) mà tàu ngầm đã đi.

b) Viết hàm số g mô tả sự phụ thuộc giữa độ sâu h (tính bằng mét) của tàu ngầm so với mực nước biển và thời gian t (tính bằng giờ). Tính g(2) ; g(3,5).

126. Hàm số y = f(x) được xác định bởi các cặp số (x, y) như sau : (– 6 ; – 4) ; (–3 ; –2) ; (0 ;0) ; (1,5 ; 1) ; (9 ; 6)

a) Vẽ sơ đồ mũi tên của hàm số đó.

b) Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức nào ?

127. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 5$

a) Tính $f(3)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

b) Tìm x để $f(x) = -1$

c) Chứng tỏ rằng với $x \in \mathbf{R}$ thì $f(x) = f(-x)$

128. Cho hàm số $y = f(x) = [x]$ với $x \in \mathbf{Q}$

a) Tìm $f(5)$; $f\left(2\dfrac{1}{6}\right)$; $f(-7,4)$

b) Tìm x để $f(x) = 4$

129. Cho hàm số $y = f(x) = \{x\}$ với $x \in \mathbf{Q}$

a) Tìm $f(5)$; $f\left(2\dfrac{1}{6}\right)$; $f(-7,4)$

b) Tìm x để $f(x) = 0$

130. Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết rằng y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $\dfrac{1}{2}$.

a) Tìm x để $f(x) = -5$

b) Chứng tỏ rằng nếu $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$

131. Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết rằng y tỉ lệ nghịch với x theo hệ sô $a = 12$.

a) Tìm x để $f(x) = 4$; $f(x) = 0$

b) Chứng tỏ rằng $f(-x) = -f(x)$

132*. Cho hàm số $y = f(x) = kx$ (k là hằng số, $k \neq 0$). Chứng minh rằng :

a) $f(10x) = 10f(x)$

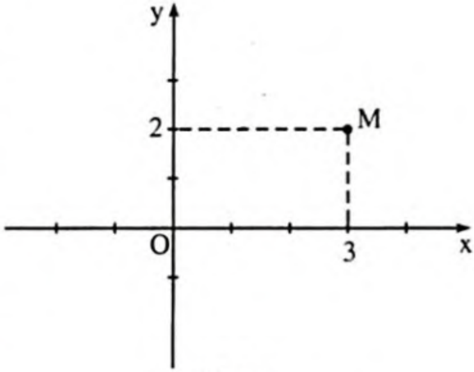
b) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

c) $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$

§4. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ
ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$; $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Kiến thức cơ bản :

1. Mặt phẳng toạ độ Oxy gồm hai trục số Ox, Oy vuông góc với nhau. Trục Ox gọi là trục hoành ; trục Oy gọi là trục tung ; O gọi là gốc toạ độ.Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi điểm M được xác định bởi một cặp số duy nhất. Ngược lại, mỗi cặp số (x, y) được biểu diễn bởi một điểm M duy nhất.

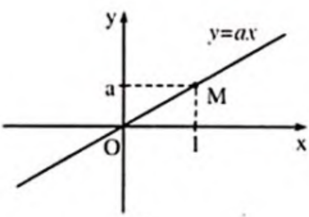


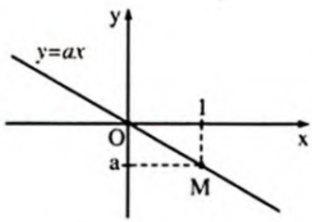
Hình 4

Điểm M trong *hình 4* có toạ độ là (3 ; 2). Số 3 (viết trước) gọi là hoành độ của M ; số 2 (viết sau) gọi là tung độ của M.

2. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x ; y) trên mặt phẳng toạ độ.

* Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ *(hình 5)*.

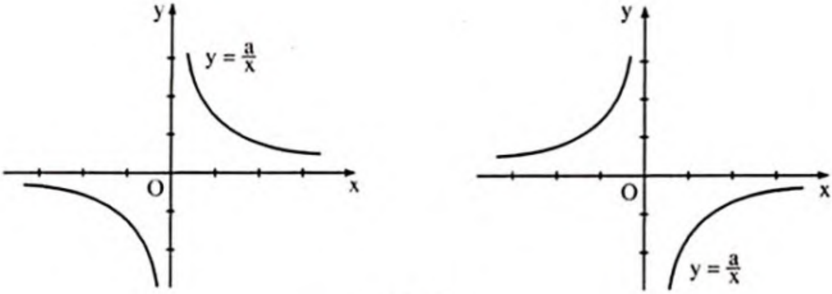




Hình 5

a > 0 a < 0

* Đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ là đường cong (gọi là hypebol) gồm hai nhánh *(hình 6)*.



Hình 6

a > 0 a < 0

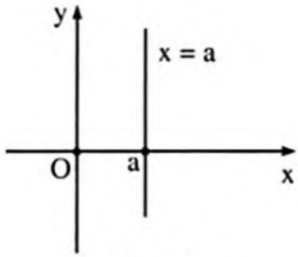
Nâng cao :

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

– Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 0 chính là trục tung Oy.

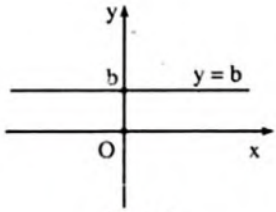
– Tập hợp các điểm có tung độ bằng 0 chính là trục hoành Ox.

– Tập hợp các điểm có hoành độ bằng a là đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm a *(Hình 7)*



Hình 7

– Tập hợp các điểm có tung độ bằng b là đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm b *(Hình 8)*



Hình 8

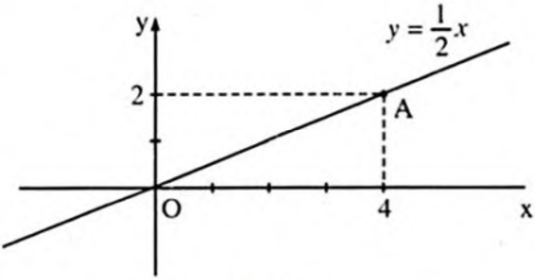
Thí dụ 34 :

Đồ thị hàm số y = ax đi qua điểm A (4 ; 2)

a) Xác định hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số đó.

b) Cho B (–2 ; –1) ; C (5 ; 3).

Không cần biểu diễn B và C trên mặt phẳng toạ độ, hãy cho biết ba điểm A, B, C có thẳng hàng không ?



Hình 9

Giải : a) Đồ thị hàm số y = ax đi qua A (4 ; 2) nên cặp số (4 ; 2) phải thoả mãn hàm số, tức là a . 4 = 2 suy ra $a = \frac{1}{2}$.

Hàm số đã cho là $y = \frac{1}{2}x$.

Để vẽ đồ thị của nó, ta vẽ điểm A (4 ; 2). Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$ *(Hình 9).*

b) Thay toạ độ của điểm B vào đẳng thức $y = \frac{1}{2}x$ ta thấy thoả mãn vì $-1 = \frac{1}{2}.(-2)$; vậy điểm B thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$. Thay toạ độ của điểm C vào đẳng thức $y = \frac{1}{2}x$ ta thấy không thoả mãn vì $3 \neq \frac{1}{2}.5$; vậy điểm C không thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$, suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Nhận xét : Một điểm thuộc đồ thị của hàm số khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn hàm số đã cho.

Thí dụ 35 :

Cho các hàm số y = f(x) = 2x và $y = g(x) = \frac{18}{x}$. Không vẽ đồ thị của chúng, em hãy tính toạ độ giao điểm của hai đồ thị.

Giải : Toạ độ giao điểm của hai đồ thị phải thoả mãn đồng thời cả hai hàm số, tức là $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{18}{x} \end{cases}$ suy ra $2x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Với x = 3 thì y = 6. Với x = −3 thì y = −6

Vậy hai đồ thị có hai giao điểm là M (3 ; 6) và N (−3 ; −6).

Nhận xét : Phương pháp chung để tìm toạ độ giao điểm hai đồ thị của hai hàm số là tìm hoành độ trước. Để tìm được hoành độ của giao điểm ta cho hai biểu thức ở vế phải của công thức xác định hai hàm số ấy bằng nhau, từ đó tìm được hoành độ x rồi suy ra tung độ y.

BÀI TẬP

133. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x$.

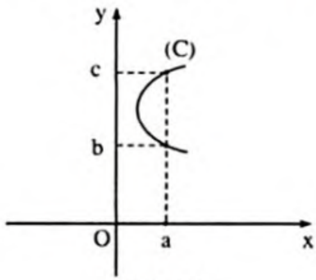
a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Trong các điểm M $(-3 ; 1)$; N$(6 ; 2)$; P$(9 ; -3)$ điểm nào thuộc đồ thị (không vẽ các điểm đó)

134. Điểm M$(2 ; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$. Không vẽ đồ thị của hàm số này, hãy cho biết trong các điểm A$(1 ; 5)$; B $(-3 ; 2)$; C$(6 ; 1)$ điểm nào thuộc đồ thị của hàm số đó.

135. Cho hàm số $y = f(x) = 0{,}5x$ với $-2 \le x \le 6$. Vẽ đồ thị của hàm số đó rồi dùng đồ thị tìm GTNN, GTLN của hàm số này.

136. Xét đường cong (C) trong hình 10. Giải thích vì sao đường cong này không thể là đồ thị của một hàm số $y = f(x)$ nào cả.

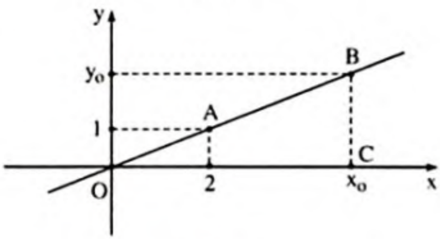


Hình 10

137. Trong *hình 11*, đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = f(x) = ax$

a) Tính tỉ số $\frac{y_o - 2}{x_o - 4}$

b) Giả sử $x_o = 5$. Tính diện tích tam giác OBC



Hình 11

138. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -3x$ rồi xác định điểm A (x, y) thuộc đồ thị đó biết :

a) $x + y = -4$;   b) $|x - y| = 4$

139. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x|$

140. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{|x|}{x}$

141. Cho hai hàm số $y = f(x) = |2x|$ và $y = g(x) = 3$.

a) Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của hai hàm số đó.

b) Dùng đồ thị tìm các giá trị của x sao cho $|2x| < 3$

§5. ÔN TẬP CHƯƠNG II

Thí dụ 36 :

Ba công nhân được lĩnh tổng cộng 1850000 đồng tiền thưởng. Số tiền thưởng của mỗi người tỉ lệ nghịch với số ngày nghỉ của họ. Biết số ngày nghỉ lần lượt là 5, 4, 6 ngày. Tính số tiền thưởng của mỗi người.

Giải :

Gọi số tiền thưởng của mỗi người lần lượt là x, y, z (đồng). Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với 5, 4, 6 nên ta có :

$$5x = 4y = 6z$$

Do đó $\dfrac{5x}{60} = \dfrac{4y}{60} = \dfrac{6z}{60}$ (60 là BCNN (5, 4, 6)).

hay $\dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{15} = \dfrac{z}{10} = \dfrac{x+y+z}{12+15+10} = \dfrac{1850000}{37} = 50000.$

Suy ra x = 600000 ; y = 750000, z = 500000.

Vậy số tiền thưởng của ba công nhân lần lượt là : 600000 đồng ; 750000 đồng ; 500000 đồng.

Nhận xét : Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với 5 ; 4 ; 6 nên ta còn có thể viết

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$$

hay $x : y : z = \dfrac{12}{60} : \dfrac{15}{60} : \dfrac{10}{60}$

$$x : y : z = 12 : 15 : 10$$

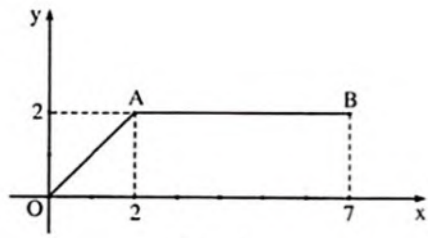
Do đó $\dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{15} = \dfrac{z}{10}.$

Ta lại được kết quả như trên.

Thí dụ 37 :

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hàm số y = f(x) có đồ thị là hai đoạn thẳng OA và AB *(hình 12)*

a) Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức nào ?



Hình 12

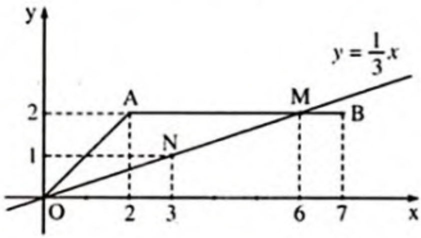
b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy nói trên vẽ đồ thị của hàm số $y = g(x) = \frac{1}{3}x$

c) Dùng đồ thị hãy cho biết với giá trị nào của x thì $f(x) = g(x)$

Giải :

a) Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức :

$$y = \begin{cases} x & \text{với } 0 \le x \le 2 \\ 2 & \text{với } 2 < x \le 7 \end{cases}$$



Hình 13

b) Xét hàm số $y = g(x) = \frac{1}{3}x$

Cho $x = 3$ thì $y = 1$

Vẽ điểm N (3 ; 1) rồi vẽ đường thẳng ON đó là đồ thị của hàm số $y = g(x) = \frac{1}{3}x$ *(hình 13)*

c) Đồ thị của hàm số $y = g(x)$ và $y = f(x)$ cắt nhau tại O (0 ; 0) và M(6 ; 2).

Với $x = 0$ thì $f(x) = g(x) = 0$

Với $x = 6$ thì $f(x) = g(x) = 2$

Nhận xét :

– Hàm số g được cho bởi một công thức $g(x) = \frac{1}{3}x$; còn hàm số f được cho bởi hai công thức : ứng với $0 \le x \le 2$ thì $f(x) = x$, ứng với $2 < x \le 7$ thì $f(x) = 2$.

– Trên cùng một hệ trục toạ độ, giao điểm của hai đồ thị có toạ độ giống nhau, điều đó có nghĩa là với cùng một giá trị của biến số thì hai hàm số có cùng một giá trị.

BÀI TẬP

142. Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng bằng $5\frac{25}{63}$, tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20 ; 4 ; 5 ; mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1 ; 3 ; 7.

143. Chu vi một tam giác là 60cm. Các đường cao có độ dài là 12cm ; 15cm ; 20cm. Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

144. Nếu ta cộng từng hai cạnh của một tam giác thì ba tổng tỉ lệ với 5, 6, 7. Chứng tỏ rằng tam giác này có một đường cao dài gấp hai lần một đường cao khác.

145. Một xe ô tô khởi hành từ A, dự định chạy với vận tốc 60km/h thì sẽ tới B lúc 11giờ. Sau khi chạy được nửa đường thì vì đường hẹp và xấu nên vận tốc ô tô giảm xuống còn 40km/h do đó đến 11 giờ xe vẫn còn cách B là 40km.

a) Tính khoảng cách AB.

b) Xe khởi hành lúc mấy giờ ?

146. Một đơn vị làm đường, lúc đầu đặt kế hoạch giao cho ba đội I, II, III, mỗi đội làm một đoạn đường có chiều dài tỉ lệ (thuận) với 7, 8, 9. Nhưng về sau do thiết bị máy móc và nhân lực của các đội thay đổi nên kế hoạch đã được điều chỉnh, mỗi đội làm một đoạn đường có chiều dài tỉ lệ (thuận) với 6, 7, 8. Như vậy đội III phải làm hơn so với kế hoạch ban đầu là 0,5km đường. Tính chiều dài đoạn đường mà mỗi đội phải làm theo kế hoạch mới.

147. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}.\left(2x + |x|\right)$.

148*. Vẽ đồ thị của hàm số $y = [x]$ với $-2 \le x < 3$

149*. Cho hàm số $y = f(x) = -5x$. Chứng minh rằng :

a) Với $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$

b) $f(x_1+4x_2) = f(x_1) + 4f(x_2)$.

c) $-f(x) = f(-x)$.

Chương III

THỐNG KÊ

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ, TẦN SỐ. BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU. BIỂU ĐỒ

Kiến thức cơ bản :

1. Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu X gọi là số liệu thống kê. Mỗi số liệu gọi là một giá trị của dấu hiệu X.
   Số các giá trị của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (ký hiệu là N).
2. Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy các giá trị của dấu hiệu gọi là tần số của giá trị đó (kí hiệu là n).
3. Tần suất của một giá trị của dấu hiệu được tính theo công thức $f = \frac{n}{N}$. Tần suất f thường được tính dưới dạng tỉ số phần trăm.
4. Các loại biểu đồ thường dùng : biểu đồ đoạn thẳng ; biểu đồ hình chữ nhật ; biểu đồ hình quạt.

Nâng cao :

Trong trường hợp dấu hiệu X lấy nhiều giá trị khác nhau song lại khá gần nhau thì người ta nhóm các giá trị đó thành từng lớp (xem thí dụ 40).

Thí dụ 38 : Số đại biểu Quốc hội khoá XI của các tỉnh thành trong cả nước được cho trong *bảng 1*.

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị.

21	26	10	6	6	6	6	6	6	7	6	6
7	6	8	7	8	6	7	13	6	9	7	10
9	6	6	17	15	8	5	6	8	8	7	8
6	8	6	7	6	7	10	8	6	6	7	10
6	8	9	10	9	8	7	7	10	7	8	6
7											

Bảng 1

Giải : a) Dấu hiệu X ở *bảng 1* là số đại biểu Quốc hội của mỗi tỉnh thành. *Bảng 1* có tất cả 61 giá trị.

b) Bảng "tần số", tần suất (xem *bảng 2*).

Giá trị (x)	5	6	7	8	9	10	13	15	17	21	26	
Tần số (n)	1	21	13	11	4	6	1	1	1	1	1	N=61
Tần suất (f)	$\frac{1}{61}$ (1,64%)	$\frac{21}{61}$ (34,43%)	$\frac{13}{61}$ (21,31%)	$\frac{11}{61}$ (18,03%)	$\frac{4}{61}$ (6,56%)	$\frac{6}{61}$ (9,84%)	$\frac{1}{61}$ (1,64%)	$\frac{1}{61}$ (1,64%)	$\frac{1}{61}$ (1,64%)	$\frac{1}{61}$ (1,64%)	$\frac{1}{61}$ (1,64%)	100%

Bảng 2

Nhận xét : Nhìn vào các số liệu ở *bảng 1* ta rất khó phát hiện có bao nhiêu sự khác nhau về số lượng đại biểu Quốc hội của các tỉnh, thành ; rất khó nắm được bao nhiêu tỉnh, thành có số đại biểu như nhau.

Các số liệu trong *bảng 2* (bảng "tần số") chính là các số liệu trong *bảng 1* đã được sắp xếp lại.

Nhìn vào dòng 1 ta thấy dấu hiệu X chỉ có 11 giá trị khác nhau, tỉnh ít nhất có 5 đại biểu, thành phố nhiều nhất có 26 đại biểu.

Nhìn vào dòng 2 (dòng "tần số") ta thấy số lượng 5 đại biểu, 13, 15, 17, 21, 26 đại biểu, mỗi loại chỉ có một tỉnh thành. Số lượng 6 đại biểu có nhiều tỉnh thành nhất (có tới 21 tỉnh thành).

Nhìn vào dòng 3 (dòng tần suất) ta còn biết thêm số tỉnh thành có 6 đại biểu chiếm tỉ lệ cao nhất (trên 34%).

Thí dụ 39 : Tổng số điểm 4 môn thi của các học sinh trong một phòng thi được cho trong *bảng 3*.

32	30	22	30	30	22	31	35
35	19	28	22	30	39	32	30
30	30	31	28	35	30	22	28

Bảng 3

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng tần số.

c) Từ bảng "tần số" hãy biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật.

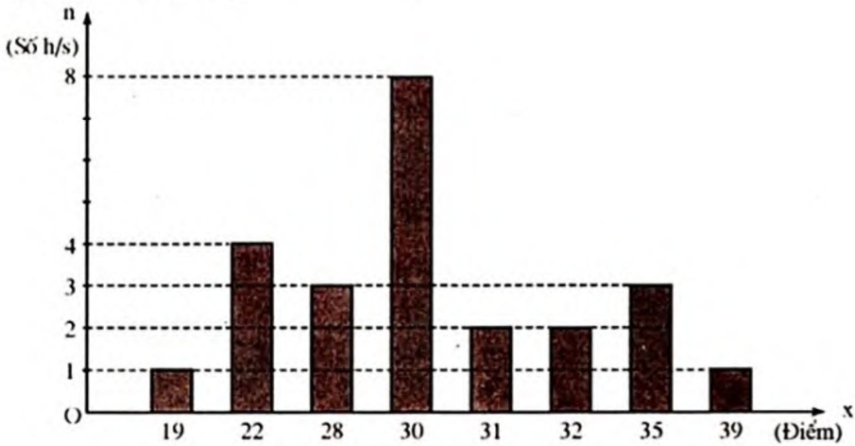
Giải : a) Dấu hiệu X ở *bảng 3* là tổng số điểm thi của mỗi học sinh. *Bảng 3* có tất cả 24 giá trị.

b) Bảng "tần số" (xem *bảng 4*).

Điểm số (x)	19	22	28	30	31	32	35	39	
Số học sinh (n)	1	4	3	8	2	2	3	1	N = 24

Bảng 4

c) Biểu đồ *(hình 14)*.



Hình14

Nhận xét : Nhìn vào bảng "tần số" ta có thể thấy sự tương ứng giữa một giá trị của dấu hiệu với tần số của giá trị đó. Tuy nhiên nhìn vào biểu đồ ta có một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số. Vì dễ dàng so sánh chiều cao của các hình chữ nhật nên việc so sánh các giá trị lớn nhỏ của tần số được thuận lợi và trực quan.

Thí dụ 40 : Chiều cao của 40 học sinh lớp 7C được ghi trong *bảng 5* (đơn vị đo : cm)

140	143	135	152	136	144	146	133	142	144
145	136	144	139	141	135	149	152	154	136
131	152	134	148	143	136	144	139	155	134
137	144	142	152	135	147	139	133	136	144

Bảng 5

Ta nhận thấy dấu hiệu X lấy rất nhiều giá trị khác nhau nhưng các giá trị này lại khá gần nhau do đó ta nhóm các giá trị này thành từng lớp. Hãy lập bảng *"tần số ghép lớp"* theo các cột sau :

Cột 1 : Chiều cao (theo các lớp sau : Trên 130cm – 135cm ; trên 135cm – 140cm ; trên 140cm – 145cm ; trên 145cm – 150cm ; trên 150cm – 155cm).

Cột 2 : Giá trị trung tâm của lớp (là trung bình cộng của hai giá trị xác định lớp).

Cột 3 : Tần số của lớp.

Cột 4 : Tần suất tương ứng.

Giải : Xem *bảng 6 :*

Chiều cao (cm)	Giá trị trung tâm	Tần số	Tần suất
Trên 130–135	132,5	8	20%
Trên 135–140	137,5	10	25%
Trên 140–145	142,5	12	30%
Trên 145–150	147,5	4	10%
Trên 150–155	152,5	6	15%
		N = 40	100%

Bảng 6

BÀI TẬP

150. Lớp 7A góp tiền ủng hộ đồng bào bị thiên tai. Số tiền góp của mỗi bạn được thống kê trong *bảng 7* (đơn vị là nghìn đồng)

1	2	1	4	2	5	2	3	4	1	5	2
3	5	2	2	4	1	3	3	2	4	2	3
4	2	3	10	5	3	2	1	5	3	2	2

Bảng 7

a) Dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Lập bảng "tần số"

151. Số bàn thắng trong mỗi trận đấu ở vòng đấu bảng vòng chung kết World Cup 2002 được ghi trong *bảng 8*.

1	2	3	8	2	4	1	4	1	3	2	2
4	2	2	5	2	2	1	2	3	4	1	1
3	4	3	2	1	2	2	4	0	6	2	3
2	0	5	4	7	3	2	1	2	5	1	4

Bảng 8

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Có bao nhiêu trận đấu ở vòng đấu bảng.

b) Lập bảng "tần số" và rút ra một vài nhận xét về vòng đấu bảng.

152*. Khi chơi cá ngựa, thay vì gieo một con súc sắc, ta gieo cả hai con súc sắc cùng một lúc thì điểm thấp nhất là 2, cao nhất là 12. Các điểm khác là 3, 4, 5..., 11. Hãy lập bảng "tần số" về khả năng xuất hiện mỗi loại điểm nói trên ? Tính tần suất của mỗi loại điểm đó.

153. Mức lương cơ bản (khu vực hành chính) được ghi lại trong *bảng 9* (đơn vị là nghìn đồng).

Năm	1993	1997	2000	2001	2003
Mức lương (nghìn đồng)	120	144	180	210	290

Bảng 9

a) Hãy biểu diễn bảng trên bằng biểu đồ hình chữ nhật.

b) Mức lương năm 2000 tăng lên bao nhiêu phần trăm so với các năm 1997, 1993.

154. Để khuyến khích dùng Internet người ta quy định rằng hàng tháng, nếu thời gian truy nhập Internet càng nhiều thì mức cước càng rẻ. *Bảng 10* dưới đây cho giá cước như thế.

Thời gian dùng	0–5giờ	Trên 5 giờ đến 15 giờ	Trên 15 giờ đến 30 giờ	Trên 30 giờ đến 50 giờ	Trên 50 giờ
Mức cước	150đ/phút	130đ/phút	100đ/phút	70đ/phút	40đ/phút

Bảng 10

Hãy biểu diễn *bảng 10* bằng biểu đồ hình chữ nhật.

§2. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. MỐT

Kiến thức cơ bản :

1. Số trung bình cộng của một dấu hiệu (ký hiệu $\overline{X}$) được tính từ bảng "tần số" theo các bước sau :
   Bước 1 : Nhân từng giá trị x với tần số n tương ứng.
   Bước 2 : Cộng các tích vừa tìm được ở bước 1.
   Bước 3 : Chia tổng ở bước 2 cho N (N là tổng các tần số).
2. Số trung bình cộng $\overline{X}$ dùng làm đại diện cho dấu hiệu X khi phân tích hoặc so sánh nó với các dấu hiệu cùng loại. Nếu các giá trị của dấu hiệu có sự chênh lệch quá lớn thì không nên lấy số trung bình cộng làm đại diện cho các giá trị của dấu hiệu.
3. Mốt là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng "tần số". Mốt kí hiệu là M_0.

Nâng cao :

Số trung bình cộng của một dấu hiệu được tính từ bảng "*tần số ghép lớp*" cũng có 3 bước như trên, trong đó ở bước 1 ta lấy giá trị trung tâm của lớp nhân với tần số n tương ứng.

Thí dụ 41 : Tính số trung bình cộng và tìm mốt qua các số liệu trong *bảng 4*.

Giải : Ta ghi lại bảng "tần số" (*bảng 4*) từ bảng *"ngang"* thành bảng *"dọc"* và thêm 2 cột để tính điểm trung bình (xem *bảng 11*).

Điểm số (x)	Tần số (n)	Tích x . n	
19	1	19	
22	4	88	
28	3	84	
30	8	240	
31	2	62	
32	2	64	
35	3	105	
39	1	39	
	N = 24	701	$\overline{X} = \dfrac{701}{24} = 29,2$

Bảng 11

Trả lời : – Số trung bình cộng là 29,2
– Mốt $M_0 = 30$

Nhận xét : Tính trung bình cộng qua bảng "tần số" rõ ràng là tiện lợi hơn nhiều so với việc tính trực tiếp trung bình cộng từ bảng số liệu thống kê ban đầu *(bảng 3).*

Thí dụ 42 : Tiền lương tháng của nhân viên trong một công ti được thống kê trong *bảng 12* với đơn vị là nghìn đồng. Hãy điền tiếp vào các cột 2, 4 và tính số trung bình cộng.

Mức lương (x) (1)	Giá trị trung tâm (2)	Tần số n (3)	Tích (2) × (3) (4)	(5)
Trên 1200 – 1400		6		
Trên 1400 – 1600		5		
Trên 1600 – 1800		7		
Trên 1800 – 2000		14		
Trên 2000 – 2200		18		
Trên 2200 – 2400		15		
Trên 2400 – 2600		6		
Trên 2600 – 2800		3		
3800		1		
		N = 75		$\overline{X} =$

Bảng 12

Giải : (Xem *bảng 13*)

Mức lương (x) (1)	Giá trị trung tâm (2)	Tần số n (3)	Tích (2) × (3) (4)	(5)
Trên 1200 – 1400	1300	6	7800	
Trên 1400 – 1600	1500	5	7500	
Trên 1600 – 1800	1700	7	11900	
Trên 1800 – 2000	1900	14	26600	
Trên 2000 – 2200	2100	18	37800	
Trên 2200 – 2400	2300	15	34500	
Trên 2400 – 2600	2500	6	15000	
Trên 2600 – 2800	2700	3	8100	
3800	3800	1	3800	$\overline{X} = \frac{153000}{75}$
		N = 75	153000	$\overline{X} = 2040$(nghìn)

Bảng 13

Nhận xét : Thí dụ 42 là thí dụ tính số trung bình cộng qua bảng "*tần số ghép lớp*". Trong mỗi lớp, dấu hiệu X có thể lấy nhiều giá trị khác nhau, vì vậy ta phải lấy giá trị trung tâm của lớp làm đại diện cho lớp đó để tính toán.

BÀI TẬP

155. Dùng các số liệu trong *bài 184* để :

a) Tìm mốt.

b) Tính xem trung bình mỗi học sinh 7A ủng hộ bao nhiêu tiền ?

156. Dùng các số liệu về vòng đấu bảng vòng chung kết World Cup 2002 trong *bài 185* để :

a) Tìm mốt.

b) Tính xem trung bình mỗi trận có bao nhiêu bàn thắng ?

157. Một xe ô tô chạy từ A đến B gồm 4 chặng :

Chặng 1, xe chạy với vận tốc 45km/h trong 2 giờ ; chặng 2, xe chạy với vận tốc 60km/h trong 1 giờ 45phút ; chặng 3, xe chạy với vận tốc 50km/h trong $\frac{1}{2}$ giờ ; chặng 4, xe chạy với vận tốc 40km/h trong 45 phút.

Tính vận tốc trung bình trên cả quãng đường AB

158. Khối lượng mỗi học sinh lớp 7C được ghi trong *bảng 14* (đơn vị là kg).

Tính số trung bình cộng.

Khối lượng (x) (1)	Giá trị trung tâm (2)	Tần số (3)	Tích (2)×(3) (4)	(5)
Trên 24–28		2		
Trên 28–32		8		
Trên 32–36		12		
Trên 36–40		9		
Trên 40–44		5		
Trên 44–48		3		
Trên 48–52		1		
		____	____	

Bảng 14

159. Dùng các số liệu trong *bảng 6*, tính xem mỗi học sinh lớp 7C có chiều cao trung bình là bao nhiêu ?

160. Theo dõi khách lên xuống trên một chuyến xe buýt ta có bảng thống kê dưới đây (*bảng 15*). Hỏi khi xe chạy, trung bình trên xe có bao nhiêu khách ?

Điểm đỗ (bến xe)	Khách lên	Khách xuống
Số 1	30	0
2	4	0
3	6	0
4	2	1
5	0	1
6	1	5
7	6	1
8	3	4
9	2	6
10	5	0
11	0	7
12	3	1
13	4	0
14	3	0
...	...	...

Bảng 15

§3. ÔN TẬP CHƯƠNG III

Thí dụ 43 : Số cơn bão hàng năm đổ bộ vào lãnh thổ Việt Nam trong 20 năm cuối cùng của thế kỷ XX được ghi lại trong bảng sau :

3	3	6	6	3	5	4	3	9	8
2	4	3	4	3	4	3	5	2	2

a) Dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Lập bảng "tần số" và tính xem trong vòng 20 năm, mỗi năm trung bình có bao nhiêu cơn bão đổ bộ vào nước ta ? Tìm mốt.

c) Biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng bảng tần số nói trên.

Giải :

a) Dấu hiệu ở đây là số cơn bão hàng năm đổ bộ vào nước ta (trong vòng 20 năm).

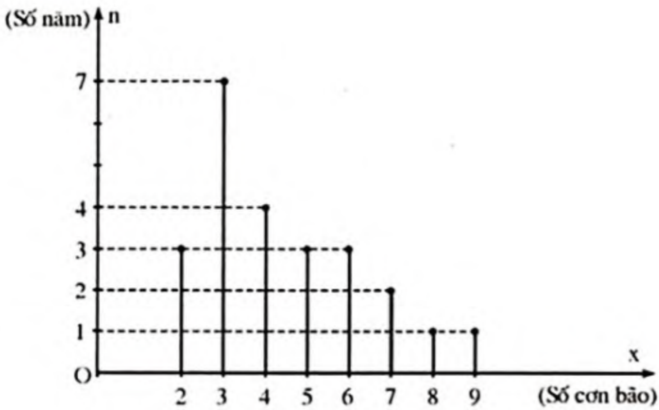
b) Bảng tần số (xem *bảng 16*)

Giá trị (x)	Tần số n	Tích x.n	
2	3	6	
3	7	21	
4	4	16	
5	2	10	
6	2	12	
8	1	8	
9	1	9	
	N = 20	82	$\overline{X} = \frac{82}{20} = 4,1$

Bảng 16

Trung bình mỗi năm có 4,1 cơn bão đổ bộ vào nước ta. $M_0 = 3$

c) Biểu diễn bằng biểu đồ *(hình 15)*



Hình 15

Nhận xét : Qua thí dụ trên ta thấy mốt và số trung bình cộng có thể có giá trị khác nhau. Mốt không thể làm đại diện cho dấu hiệu X. Số trung bình cộng $\overline{X}$ có thể dùng làm đại diện cho dấu hiệu X khi so sánh nó với các dấu hiệu cùng loại.

BÀI TẬP

161. Dưới trăng quyên đã gọi hè
Đầu tường lửa lựu lập loè đâm bông
(Nguyễn Du)

Em hãy :

a) Lập bảng "tần số" của mỗi chữ cái có mặt trong hai câu thơ.

b) Lập bảng "tần số" về số chữ cái trong mỗi chữ.

162. Diện tích nhà ở của các hộ gia đình trong một khu chung cư được thống kê trong *bảng 17* (đơn vị : m^2). Hãy điền vào các cột 2, 4 và tính số trung bình cộng.

Diện tích (x) (1)	Giá trị trung tâm (2)	Tần số (n) (3)	Tích (2) × (3) (4)	(5)
Trên 25–30		6		
Trên 30–35		8		
Trên 35–40		11		
Trên 40–45		20		
Trên 45–50		15		
Trên 50–55		12		
Trên 55–60		12		
Trên 60–65		10		
Trên 65–70		6		
		N = 100		

Bảng 17

163. Người ta đếm số hạt thóc trên mỗi bông lúa lấy từ khu trồng thí nghiệm, kết quả ghi trong *bảng 18*.

a) Dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Lập bảng "*tần số ghép lớp*" và tính số trung bình cộng

(Chia các lớp : Trên 100 – 120 ; trên 120 – 140 ; trên 140 – 160 ; … ; trên 240 – 260)

102	175	127	185	181	246	180	216
165	184	170	132	143	188	170	232
150	159	235	105	190	218	153	123

Bảng 18

164. Cho bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu X *(bảng 19)*

Giá trị (x)	Tần số (n)
x_1	n_1
x_2	n_2
x_3	n_3
…	…
x_k	n_k

Bảng 19

a) Tính số trung bình cộng

b) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu đều tăng lên 2 lần thì số trung bình cộng thay đổi thế nào ?

c) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu tăng thêm 5 đơn vị thì số trung bình cộng thay đổi thế nào ?

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Kiến thức cơ bản :

1. Biểu thức đại số là biểu thức trong đó chứa các số hoặc các chữ và các phép toán giữa các số, các chữ đó.
2. Những chữ trong biểu thức đại số có thể là *hằng số* (thường dùng các chữ a, b, c,...) có thể là *biến số* (thường dùng các chữ x, y, z,...)
3. Muốn tính giá trị của một biểu thức đại số khi biết giá trị của các biến trong biểu thức đã cho, ta thay giá trị của các biến vào rồi thực hiện các phép tính.

Bổ sung :

Quy ước đọc và viết một biểu thức đại số có nhiều phép tính :

Phép tính nào làm sau cùng thì đọc trước tiên. Phép tính nào làm trước thì đọc sau :

Biểu thức	Thứ tự thực hiện các phép tính	Cách đọc
$(x-y)^2$	1. Tính hiệu 2. Tính bình phương	Bình phương của hiệu hai số x và y
$x^2 - y^2$	1. Tính bình phương của x, của y 2. Tính hiệu	Hiệu các bình phương của hai số x và y
$(x+y)(x-y)$	1. Tính tổng và hiệu 2. Tính tích	Tích của tổng hai số x và y, với hiệu của chúng

Thí dụ 44 : Tính giá trị của biểu thức.

$$A = x^2 + 4xy - 3y^3 \text{ với } |x| = 5 \,;\, |y| = 1$$

Giải : $|x| = 5$ nên $x = \pm 5$; $|y| = 1$ nên $y = \pm 1$

Với $x = 5$; $y = 1$ thì $A = 5^2 + 4.5.1 - 3.1^3 = 42$

Với $x = -5$; $y = -1$ thì $A = (-5)^2 + 4.(-5).(-1) - 3.(-1)^3 = 48$

Với $x = 5$; $y = -1$ thì $A = 5^2 + 4.5.(-1) - 3(-1)^3 = 8$

Với $x = -5$; $y = 1$ thì $A = (-5)^2 + 4.(-5).1 - 3.1^3 = 2$

Nhận xét : Biểu thức A có chứa 2 biến x và y. Biến x nhận 2 giá trị, biến y nhận 2 giá trị do đó ta phải xét đủ 4 trường hợp các cặp giá trị của x và y, dẫn tới biểu thức A có 4 giá trị khác nhau.

Thí dụ 45 : Cho $x - y = 9$, tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{4x - 9}{3x + y} - \frac{4y + 9}{3y + x} \qquad (x \neq -3y \text{ ; } y \neq -3x)$$

Giải : Thay $9 = x - y$ vào biểu thức B ta được.

$$B = \frac{4x - (x - y)}{3x + y} - \frac{4y + (x - y)}{3y + x} = \frac{3x + y}{3x + y} - \frac{3y + x}{3y + x}$$

$$B = 1 - 1 = 0$$

Nhận xét : Bình thường, để tính giá trị của biểu thức ta thay các biến bằng giá trị số của chúng. Tuy nhiên trong cách giải của thí dụ trên ta đã làm ngược lại : thay giá trị số bởi các biến.

Ta cũng có thể giải bằng cách khác :

Vì $x - y = 9 \Rightarrow x = 9 + y$

Thay $x = 9 + y$ vào biểu thức B ta cũng tính được $B = 0$

BÀI TẬP

165. Cho A là tổng lập phương các số tự nhiên từ 1 đến n và B là bình phương của tổng các số tự nhiên từ 1 đến n. Người ta đã chứng minh được rằng $A = B$. Bạn hãy kiểm nghiệm lại bằng cách cho $n = 4$; $n = 5$; $n = 6$

166. Tính giá trị của các biểu thức sau với $x = \sqrt{2}$:

a) $(x + 1)(x^2 - 2)$; b) $(x - 1)(x^2 + 1) + 3$.

167. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$ tại : a) $x = -1$; b) $|x| = 3$

168. Tính giá trị của biểu thức $N = \dfrac{6x^2 + x - 3}{2x - 1}$ với $|x| = \dfrac{1}{2}$

169. Tính giá trị của biểu thức $P = 9x^2 - 7x\,|y| - \frac{1}{4}y^3$ tại $x = \frac{1}{3}$; $y = -6$

170. Tìm các giá trị của biến để :

a) Biểu thức $(x + 1)(y^2 - 6)$ có giá trị bằng 0.

b) Biểu thức $x^2 - 12x + 7$ có giá trị lớn hơn 7.

171. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$ với $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$

172. Cho x, y, z $\neq 0$ và $x - y - z = 0$, tính giá trị của biểu thức

$$B = \left(1 - \frac{z}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)$$

173. a) Tìm GTNN của biểu thức $C = (x + 2)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 - 10$

b) Tìm GTLN của biểu thức $D = \frac{4}{(2x - 3)^2 + 5}$

174. Cho biểu thức $E = \frac{5 - x}{x - 2}$. Tìm các giá trị nguyên của x để :

a) E có giá trị nguyên.

b*) E có giá trị nhỏ nhất.

175*. Cho $f(x) = ax + b$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng không thể đồng thời có $f(17) = 71$ và $f(12) = 35$

§2. ĐƠN THỨC. TÍCH CÁC ĐƠN THỨC

Kiến thức cơ bản :

1. Đơn thức là một biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.
2. Muốn tìm tích của hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau ; nhân phần biến với nhau rồi thu gọn phần biến số.
3. Bậc của đơn thức đã được thu gọn.

   – Bậc của đơn thức đối với một biến là số mũ của biến đó.

– Bậc của đơn thức với hệ số khác 0 là tổng các số mũ của các biến có mặt trong đơn thức.

Đặc biệt : Mỗi số thực khác 0 là đơn thức bậc 0.

Số 0 là đơn thức không có bậc.

Chẳng hạn, đơn thức $-5a^2x^3y^4z$ (a là hằng số) có hệ số là $-5a^2$; có phần biến là x^3y^4z. Đơn thức có bậc 3 đối với x, bậc 4 đối với y ; bậc 1 đối với z. Bậc của đơn thức là 8.

Bổ sung :

Luỹ thừa của một đơn thức :

Khi nâng đơn thức lên luỹ thừa bậc n ($n \in \mathbf{N}$) thì hệ số của đơn thức được nâng lên luỹ thừa bậc n còn số mũ của mỗi biến được nhân lên với n.

Thí dụ 46 : Cho biểu thức $A = \dfrac{-4ax^2y^5}{(b+1)^3}$

Trong các trường hợp sau, trường hợp nào biểu thức A là đơn thức ? Trong trường hợp đó hãy cho biết hệ số và bậc của đơn thức đối với mỗi biến số và đối với tập hợp các biến số.

a) a, b là hằng ;

b) a là hằng ;

c) b là hằng.

Giải : a) Nếu a, b là hằng thì A là đơn thức.

Đơn thức A có hệ số $\dfrac{-4a}{(b+1)^3}$; có bậc 2 đối với x, có bậc 5 đối với y và có bậc 7 đối với tập hợp các biến.

b) Nếu chỉ có a là hằng thì A không phải là đơn thức vì A có chứa phép chia, phép cộng đối với biến b.

c) Nếu b là hằng thì A là đơn thức.

Đơn thức A có hệ số là $\dfrac{-4}{(b+1)^3}$, có bậc 1 đối với a ; bậc 2 đối với x ; bậc 5 đối với y và có bậc 8 đối với tập hợp các biến.

Nhận xét : Cùng là biểu thức A, có lúc A là đơn thức, có lúc A không phải là đơn thức tuỳ thuộc vào các chữ có mặt trong A là biến hay là hằng.

Thí dụ 47 : Cho các đơn thức $A = -\frac{4}{9}x^3y$; $B = \frac{3}{8}x^5y^3$.

Có các cặp giá trị nào của x và y làm cho A và B cùng có giá trị âm không ?

Giải : Xét tích $A.B = \left(-\frac{4}{9}x^3y\right).\left(\frac{3}{8}x^5y^3\right) = -\frac{1}{6}x^8y^4 \leq 0$ với mọi x, y do đó A và B phải trái dấu (hoặc có một thừa số bằng 0). Suy ra không có cặp giá trị nào của x và y làm cho A và B cùng có giá trị âm.

Nhận xét : Phương pháp giải trong thí dụ trên là dựa vào quy tắc về dấu của phép nhân : Tích hai số *cùng dấu* là một *số dương*. Ta xét tích A. B và thấy rằng tích này không phải là một số dương nên A và B không thể cùng có giá trị âm.

BÀI TẬP

176. Cho đơn thức $A = (2a^3b^2x^4y)^3 . \left(-\frac{3}{10}b^5x^2y^2z^3\right)$.

Xác định xem chữ nào là hằng, chữ nào là biến để đơn thức A có bậc là :

a) 22 ; b) 31 ; c) 8

177. Thu gọn các đơn thức trong biểu thức đại số.

a) $C = \frac{7}{9}x^3y^2.\left(\frac{6}{11}axy^3\right) + \left(-5bx^2y^4\right)\left(-\frac{1}{2}axz\right) + ax\left(x^2y\right)^3$

b) $D = \dfrac{\left(3x^4y^3\right)^2.\left(\frac{1}{6}x^2y\right) + \left(8x^{n-9}\right).\left(-2x^{9-n}\right)}{15x^3y^2(0,4ax^2y^2z^2)}$

178. Tính tích các đơn thức rồi cho biết hệ số và bậc của đơn thức (a, b, c là hằng)

a) $\left[-\frac{1}{2}(a-1)x^3y^4z^2\right]^5$; b) $(a^5b^2xy^2z^{n-1})(-b^3cx^4z^{7-n})$

c) $\left(-\frac{9}{10}a^3x^2y\right).\left(-\frac{5}{3}ax^5y^2z\right)^3$

179. Viết đơn thức $B = 64x^6y^{12}$ dưới dạng luỹ thừa của một đơn thức.

180. Cho ba đơn thức $M = -5xy$; $N = 11xy^2$; $P = \frac{7}{5}x^2y^3$. Chứng minh rằng ba đơn thức này không thể cùng có giá trị dương.

§3. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG. TỔNG VÀ HIỆU CÁC ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Kiến thức cơ bản :

1. Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.
   Đặc biệt : Mọi số thực đều là các đơn thức đồng dạng với nhau.
2. Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Bổ sung :

Khi cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng mà có chứa các chữ là hằng thì ta đặt phần biến ra ngoài dấu ngoặc, trong ngoặc là tổng (hay hiệu) các hệ số.

Thí dụ 48 : Cho các đơn thức $A = 3m^2x^2y^3z$ và $B = 12x^2y^3z$

a) Hai đơn thức đó có đồng dạng không nếu m là biến ? m là hằng ?

b) Tính hiệu H của chúng trong trường hợp m là hằng.

c) Xác định m để giá trị của hiệu H luôn luôn bằng 0 với mọi x, y, z.

Giải : a) Nếu m là biến thì A và B không đồng dạng (vì có phần biến khác nhau).

Nếu m là hằng khác 0 thì A và B đồng dạng (vì có phần biến giống nhau).

b) $H = 3m^2x^2y^3z - 12x^2y^3z = (3m^2 - 12)x^2y^3z$

c) Để hiệu H luôn luôn có giá trị bằng 0 với mọi x, y, z thì hệ số của đơn thức H phải bằng 0, tức là $3m^2 - 12 = 0$; $m^2 = 4$; $m = \pm 2$.

Nhận xét : Nếu hệ số của đơn thức khác 0 thì giá trị của đơn thức chỉ bằng 0 khi một trong các biến có giá trị bằng 0. Còn nếu muốn cho giá trị của đơn thức luôn luôn bằng 0 với mọi giá trị của biến thì hệ số của đơn thức phải bằng 0.

BÀI TẬP

181. Cho ba đơn thức $A = ab^2x^4y^3$; $B = ax^4y^3$; $C = b^2x^4y^3$

Những đơn thức nào đồng dạng với nhau nếu :

a) a, b là hằng $\neq 0$; x, y là biến.

b) a là hằng $\neq 0$; b, x, y là biến

c) b là hằng $\neq 0$; a, x, y là biến.

182. Cho đơn thức $A = 5m(x^2y^3)^2$; $B = -\dfrac{2}{m}x^4y^6$ trong đó m là hằng số dương.

a) Hai đơn thức A và B có đồng dạng không ?

b) Tính hiệu A – B

c) Tính GTNN của hiệu A – B.

183. Cho $A = 8x^5y^3$; $B = -2x^6y^3$; $C = -6x^7y^3$

Chứng minh rằng $Ax^2 + Bx + C = 0$.

184. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$

a) $8.2^n + 2^{n+1}$ có tận cùng bằng chữ số 0

b) $3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n$ chia hết cho 25

c) $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300.

185*. Viết tích 31.5^2 thành tổng của ba luỹ thừa cơ số 5 với số mũ là ba số tự nhiên liên tiếp.

186. Cho $A = (-3x^5y^3)^4$; $B = (2x^2z^4)^5$. Tìm x, y, z biết A + B = 0

§4. ĐA THỨC. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

Kiến thức cơ bản :

1. Đa thức là tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức.

   Đặc biệt : Mỗi đơn thức cũng là một đa thức (chỉ có một hạng tử).

2. Nếu đa thức có chứa các hạng tử đồng dạng, ta thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng đó thì kết quả là một *đa thức thu gọn*.

3. Muốn cộng (hay trừ) các đa thức, ta lần lượt thực hiện các bước :

Bước 1 : Viết các đa thức vào trong ngoặc rồi nối chúng với nhau bằng dấu + (hay dấu –).

Bước 2 : Bỏ dấu ngoặc (theo quy tắc "dấu ngoặc").

Bước 3 : Thu gọn các hạng tử đồng dạng (nếu có).

4. Xét đa thức đã được thu gọn.

Bậc của một đa thức đối với một biến là số mũ lớn nhất của biến đó trong đa thức.

Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Bổ sung :

1. Đa thức *thuần nhất* là đa thức trong đó mọi hạng tử đều có cùng một bậc.

2. Hai đa thức P và Q gọi là *đồng nhất* nếu chúng có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến, kí hiệu $P \equiv Q$.

Hai đa thức (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất $\Rightarrow$ mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong hai đa thức đó phải bằng nhau.

Thí dụ 49 : Cho đa thức :

$$A = (a-2)x^2 + 3x(x-y) - 8y(x+y) \qquad \text{(a là hằng)}$$

a) Hãy viết A dưới dạng tổng của các đơn thức rồi thu gọn.

b) Đa thức A sau khi thu gọn có phải là đa thức thuần nhất không ?

Giải :

a) $A = (a-2)x^2 + 3x^2 - 3xy - 8xy - 8y^2$

$A = (a+1)x^2 - 11xy - 8y^2$

b) Đa thức A là đa thức thuần nhất vì mọi hạng tử đều có cùng bậc 2.

Nhận xét : Nếu một đa thức được cho dưới dạng chưa thu gọn thì ta cần thu gọn đa thức. Trên cơ sở đó ta xác định được bậc của các hạng tử, bậc của đa thức, từ đó biết được đa thức có phải là đa thức thuần nhất hay không ?

Thí dụ 50 :

Cho các đa thức $A = 8a - 9b$; $B = 5b - c$; $C = 3c - 2a$ trong đó $a, b, c \in N$

Không cần thực hiện phép nhân, em hãy cho biết tích A.B.C có giá trị là một số chẵn hay lẻ ?

Giải :

Xét tổng $A + B + C = (8a - 9b) + (5b - c) + (3c - 2a)$

$$= 8a - 9b + 5b - c + 3c - 2a = 6a - 4b + 2c$$

$$= 2(3a - 2b + c) \vdots 2$$

Vì tổng $A + B + C$ chia hết cho 2, suy ra ít nhất cũng có một hạng tử chia hết cho 2, do đó tích A.B.C có giá trị là một số chẵn.

Nhận xét : Phương pháp giải trong thí dụ trên dựa vào nhận xét sau :

Trong phép nhân các số tự nhiên, tích sẽ là một số lẻ nếu tất cả các thừa số đều là số lẻ ; tích sẽ là số chẵn nếu có một thừa số là số chẵn. Vì vậy, muốn biết tích A.B.C có giá trị là số chẵn hay không thì ta phải xem có thừa số nào là số chẵn hay không ? Muốn biết trong ba thừa số A,B, C có thừa số nào chẵn hay không ta lại xét tổng của chúng (vì đề bài yêu cầu không làm phép nhân).

Nếu tổng là số lẻ thì ta chưa thể khẳng định được điều gì, còn nếu tổng là một số chẵn thì ít nhất cũng có một hạng tử là chẵn (vì nếu cả ba hạng tử đều lẻ thì tổng phải là một số lẻ).

BÀI TẬP

187. Hãy viết các đa thức sau dưới dạng tổng của các đơn thức rồi thu gọn.

a) $D = 4x(x + y) - 5y(x - y) - 4x^2$

b) $E = (a-1)(x^2 + 1) - x(y + 1) + (x + y^2 - a + 1)$. (a là hằng).

188. Viết các số tự nhiên sau dưới dạng một đa thức có hai biến x và y.

a) $\overline{xyx}$; b) $\overline{yxy5}$

189. Cho đa thức $P = ax^4y^3 + 10xy^2 + 4y^3 - 2x^4y^3 - 3xy^2 + bx^3y^4$

Biết rằng a, b là hằng và đa thức P có bậc 3 ; hãy tìm a và b.

190. Xác định a, b và c để hai đa thức sau là hai đa thức *đồng nhất*.

$A = ax^2 - 5x + 4 + 2x^2 - 6$

$B = 8x^2 + 2bx + c - 1 - 7x$

191. Tính tổng $S = \overline{ab} + \overline{abc} + \overline{ba} - \overline{bac}$

192. Chứng minh rằng tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.

193. Cho đa thức $P = 3x^4 - 7x^3y + 10xy^2 - 14xy^3 - y^3 - 5$

Tìm đa thức Q có ít hạng tử nhất sao cho tổng P + Q là đa thức thuần nhất có :

a) Bậc 4 b) Bậc 3

194. Cho các đa thức :

$A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$

$B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$

$C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$

Chứng minh rằng ít nhất một trong 3 đa thức này có giá trị dương với mọi x, y.

195*. Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$

a) Thu gọn A

b) Tìm x để $A = 2$

196. Tính giá trị của các đa thức sau biết $x - y = 0$

a) $M = 7x - 7y + 4ax - 4ay - 5$

b) $N = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) + 3$

197. Cho các đa thức $A = xyz - xy^2 - xz^2$

$B = y^3 + z^3$

Chứng minh rằng nếu $x - y - z = 0$ thì A và B là hai đa thức đối nhau.

198. Tính giá trị của đa thức $A = 4x^4 + 7x^2y^2 + 3y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$

§5. ĐA THỨC MỘT BIẾN
CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

Kiến thức cơ bản :

1. Đa thức một biến là đa thức chỉ chứa một biến số. Đa thức một biến được viết dưới dạng tổng của các đơn thức của cùng một biến.

   Đặc biệt, mỗi số cũng có thể coi là một đa thức của một biến nào đó. Đa thức có biến x, kí hiệu là f(x). Giá trị của đa thức f(x) tại x = a được kí hiệu là f(a). Đa thức một biến thường được sắp xếp theo luỹ thừa giảm (hay tăng) của biến đó.

2. Cộng hay trừ đa thức một biến :

Cách 1 : Tương tự như cộng hay trừ đa thức nhiều biến.

Cách 2 : Sắp xếp các đa thức theo luỹ thừa giảm (hay tăng) của biến, đặt phép tính như trong trường hợp cộng (hay trừ) các số sao cho các đơn thức đồng dạng ở trong cùng một cột rồi cộng (hay trừ) theo từng cột.

3. Bậc của đa thức một biến đã được thu gọn (khác đa thức 0) là số mũ lớn nhất của biến đó.

Nâng cao :

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ các hệ số của các luỹ thừa cùng bậc bằng nhau.

2. Đa thức một biến bậc n có dạng thu gọn là

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

khi $x = 1$ thì $f(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$

Điều này có nghĩa là tổng các hệ số của đa thức f(x) chính là giá trị của đa thức tại x=1.

Thí dụ 51 : Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a,b,c \in \mathbb{Z})$ chia hết cho 3 với mọi x nguyên thì các hệ số a, b, c đều chia hết cho 3.

Giải : $f(0) = c \,\vdots\, 3$ (1)

$f(1) = a + b + c \,\vdots\, 3$ (2)

$f(-1) = a - b + c \,\vdots\, 3$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b \,\vdots\, 3$ (4)

Từ (2) và (3) suy ra $b \,\vdots\, 3$ (5) (bằng cách lấy $f(1) - f(-1)$)

Từ (4) và (5) suy ra $a \,\vdots\, 3$

Vậy các hệ số a, b, c đều chia hết cho 3.

Nhận xét : Vì f(x) chia hết cho 3 với mọi x nguyên nên khi ta gán cho x bất cứ giá trị $x = x_0$ nào thì $f(x_0)$ đều chia hết cho 3. Trong cách giải trên ta đã lần lượt gán cho x các giá trị $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$.

Với $x = 0$ thì $f(0)$ = hệ số tự do

Với $x = 1$ thì $f(1)$ = tổng các hệ số

Với $x = -1$ thì $f(-1)$ = tổng các hệ số bậc chẵn – tổng các hệ số bậc lẻ.

Thí dụ 52 : Cho $f(x) + g(x) = 6x^4 - 3x^2 - 5$

$$f(x) - g(x) = 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 8x - 9$$

Hãy tìm các đa thức f(x) ; g(x)

Giải :

$$f(x) = \frac{(6x^4 - 3x^2 - 5) + (4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 8x - 9)}{2}$$

$$= \frac{10x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 14}{2} = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 7$$

$$g(x) = (6x^4 - 3x^2 - 5) - (5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 7)$$

$$= x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 2$$

Nhận xét : Đây là một bài toán tìm hai đại lượng biết tổng và hiệu. Để thực hiện phép cộng (hay trừ) đa thức ta có thể bỏ dấu ngoặc rồi thu gọn các hạng tử đồng dạng. Cũng có thể viết đa thức nọ dưới đa thức kia, các hạng tử đồng dạng cùng trong một cột. Trong trường hợp có một đa thức bị khuyết vài hạng tử thì ta phải bỏ trống những vị trí đó.

Trong thí dụ trên, ta đặt như sau :

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{rrrrr} 6x^4 & & -3x^2 & & -5 \\ 5x^4 & -3x^3 & +2x^2 & +4x & -7 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrrr} x^4 & +3x^3 & -5x^2 & -4x & +2 \end{array} \end{array}$$

BÀI TẬP

199. Viết các biểu thức nguyên sau dưới dạng tổng của các đơn thức rồi sắp xếp theo luỹ thừa giảm (m là hằng).

$A = (x + m)^2$; $B = (x - m)^2$; $C = (x - m)(x + m)$

200. Cho f(x) là một đa thức bậc hai. Biết $f(5) = f(-5)$, chứng minh rằng $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

201. Cho f(x) là một đa thức bậc 4. Biết $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, chứng minh rằng các hệ số của luỹ thừa lẻ đều bằng 0.

202. Cho $\quad f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + x^2 - x + 1 \qquad (x \in \mathbf{N})$

$\quad g(x) = -x^{2n+1} + x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + x^2 - x + 1 \qquad (n \in \mathbf{N})$

Tính giá trị của hiệu $f(x) - g(x)$ tại $x = \dfrac{1}{10}$

203*. Cho $f(x) = x^8 - 101x^7 + 101x^6 - 101x^5 + \ldots + 101x^2 - 101x + 25$

Tính f(100).

204. Cho $f(x) = (8x^2 + 5x - 14)^{49}.(3x^3 - 10x^2 + 6x + 2)^{50}$. Sau khi thu gọn thì tổng các hệ số của f(x) là bao nhiêu ?

205*. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $7a + b = 0$, hỏi $f(10) . f(-3)$ có thể là số âm không ?

206. Nhị thức bậc nhất là đa thức có dạng $f(x) = ax + b$ với a, b là hằng, $a \neq 0$. Hãy xác định các hệ số a, b biết $f(1) = 2$; $f(3) = 8$.

207. Tam thức bậc hai là đa thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là hằng ($a \neq 0$). Hãy xác định các hệ số biết $f(1) = 4$; $f(-1) = 8$ và $a - c = -4$.

208. Cho $\quad f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$

$\quad g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$

trong đó a, b, c là hằng.

Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

209. Cho $\quad f(x) = 2x^2 + ax + 4 \qquad$ (a là hằng)

$\quad g(x) = x^2 - 5x - b \qquad$ (b là hằng)

Tìm các hệ số a, b sao cho $f(1) = g(2)$ và $f(-1) = g(5)$.

§6. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

Kiến thức cơ bản :

1. Nếu tại x = a, đa thức f(x) có giá trị bằng 0 thì ta nói a là một nghiệm của f(x).
   a là một nghiệm của f(x) $\Leftrightarrow$ f(a) = 0
2. Một đa thức có thể có một hay nhiều nghiệm hoặc không có nghiệm nào.

Nâng cao :

1. Một đa thức bậc n có nhiều nhất là n nghiệm phân biệt. Đa thức bậc 0 thì không có nghiệm. *Đa thức 0 (không có bậc) thì có vô số nghiệm.*

2. Nếu đa thức f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì $x = 1$ là một nghiệm.

Nếu đa thức f(x) có tổng các hệ số của luỹ thừa chẵn bằng tổng các hệ số của luỹ thừa lẻ thì $x = -1$ là một nghiệm.

Thí dụ 53 : Cho hai đa thức $f(x) = 5x - 7$; $g(x) = 3x + 1$.

a) Tìm nghiệm của f(x) ; g(x).

b) Tìm nghiệm của đa thức $H(x) = f(x) - g(x)$

c) Từ kết quả câu b suy ra với giá trị nào của a thì $f(a) = g(a)$?

Giải : a) Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{5}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Vậy f(x) có nghiệm là $x = \dfrac{7}{5}$; g(x) có nghiệm là $x = -\dfrac{1}{3}$

b) $H = f(x) - g(x) = (5x - 7) - (3x + 1) = 2x - 8$

$H(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy nghiệm của đa thức H(x) là $x = 4$.

c) Khi $a = 4$ thì $f(a) - g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = g(a)$

Vậy khi $a = 4$ thì $f(a) = g(a)$

Nhận xét :

– Để tìm nghiệm của đa thức f(x) ta chỉ việc tìm giá trị của x sao cho $f(x) = 0$.

– Nghiệm của đa thức $f(x) - g(x)$ chính là giá trị của biến làm cho $f(x) = g(x)$.

Thí dụ 54 : Cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x - 5$

a) Số -5 có phải là nghiệm của f(x) không ?

b) Viết tập hợp S tất cả các nghiệm của f(x).

Giải :

a) $f(-5) = (-5)^2 + 4(-5) - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$

Vậy số -5 là nghiệm của đa thức f(x).

b) f(x) là đa thức bậc hai ; có nhiều nhất hai nghiệm. Đa thức đã có một nghiệm là -5 (theo câu a), lại có một nghiệm là 1 (vì tổng các hệ số bằng 0). Vậy tập hợp nghiệm của đa thức f(x) là $S = \{1 ; -5\}$

Nhận xét : Ta có thể tìm tất cả các nghiệm của đa thức f(x) trong thí dụ trên bằng cách viết f(x) dưới dạng tích các đa thức có bậc thấp hơn.

$$f(x) = x^2 + 4x - 5 = x^2 - x + 5x - 5$$
$$= x(x - 1) + 5(x - 1)$$
$$= (x - 1)(x + 5)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các nghiệm của f(x) là $S = \{1 ; -5\}$

BÀI TẬP

210. Tìm nghiệm của các đa thức :

a) $(x - 3)(4 - 5x)$; b) $x^2 - 2$; c) $x^2 + \sqrt{3}$;

d) $x^2 + 2x$; e) $x^2 + 2x - 3$

211. Thu gọn rồi tìm nghiệm của các đa thức sau :

a) $f(x) = x(1 - 2x) + (2x^2 - x + 4)$;

b) $g(x) = x(x - 5) - x(x + 2) + 7x$

c*) $h(x) = x(x - 1) + 1$

212. Xác định hệ số m để các đa thức sau nhận 1 làm một nghiệm.

a) $mx^2 + 2x + 8$; b) $7x^2 + mx - 1$; c) $x^5 - 3x^2 + m$

213. Cho đa thức $f(x) = x^2 + mx + 2$

a) Xác định m để f(x) nhận -2 làm một nghiệm.

b) Tìm tập hợp các nghiệm của f(x) ứng với giá trị vừa tìm được của m.

214. Cho các nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ và $g(x) = bx + a$.

Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của f(x) thì $\dfrac{1}{x_0}$ là nghiệm của g(x).

215*. Cho biết $(x - 1) . f(x) = (x + 4) . f(x + 8)$ với mọi x. Chứng minh rằng f(x) có ít nhất hai nghiệm.

Chuyên đề 3

TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ XẢY RA ĐẲNG THỨC HOẶC BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Phương pháp chung để tìm giá trị của biến trong đẳng thức hoặc bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối là xét các khoảng giá trị của biến để lập bảng xét dấu (xem thí dụ 6) rồi khử dấu giá trị tuyệt đối.

Thí dụ 55 : Tìm x biết rằng :

$$|x-1|+|x-3|=6 \qquad (1)$$

Giải :

Xét $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$; $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $x-3<0 \Leftrightarrow x<3$; $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

Ta có bảng xét dấu các đa thức $x-1$; $x-3$ dưới đây :

x		1		3	
x − 1	−	0	+		+
x − 3	−		−	0	+

– Xét khoảng $x<1$ ta có (1) $\Leftrightarrow (1-x)+(3-x)=6$

$\Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$ (giá trị này thuộc khoảng đang xét)

– Xét khoảng $1 \le x \le 3$ ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)+(3-x)=6$

$\Leftrightarrow 0x=4$ (không có giá trị nào của x thoả mãn đẳng thức trên).

– Xét khoảng $x>3$ ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)+(x-3)=6$

$\Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$ (giá trị này thuộc khoảng đang xét).

Kết luận : Vậy $x_1=-1$; $x_2=5$

Thí dụ 56 :

Tìm x biết rằng :

$$|x-1|+|x-3|<x+1 \qquad (2)$$

– Xét khoảng $x<1$ ta có (2) $\Leftrightarrow (1-x)+(3-x)<x+1 \Leftrightarrow -3x<-3$

$\Leftrightarrow x>1$ (giá trị này không thuộc khoảng đang xét)

– Xét khoảng $1 \le x \le 3$ ta có $(2) \Leftrightarrow (x-1)+(3-x) < x+1 \Leftrightarrow 2 < x+1$

$\Leftrightarrow x > 1$. Ta được các giá trị $1 < x \le 3$ (3)

– Xét khoảng $x > 3$ ta có $(2) \Leftrightarrow (x-1)+(x-3) < x+1$

$\Leftrightarrow 2x-4 < x+1 \Leftrightarrow x < 5$. Ta được các giá trị $3 < x < 5$ (4)

Kết luận : Kết hợp (3) và (4), ta được các giá trị cần tìm của x là $1 < x < 5$.

2. Sau đây ta xét một số dạng đặc biệt. Trong những dạng này, để tìm x, ngoài phương pháp chung đã nêu ở trên ta còn có thể giải bằng cách khác đơn giản hơn.

Dạng 1 : $|f(x)| = a$ (a là hằng số dương)

Dạng 2 : $|f(x)| = g(x)$

Dạng 3 : $|f(x)| - |g(x)| = 0$ hay $|f(x)| = |g(x)|$

Dạng 4 : $|f(x)| + |g(x)| = 0$

Dạng 5 : $|f(x)| < a$ (a là hằng số dương)

Dạng 6 : $|f(x)| > a$ (a là hằng số dương)

Cách giải của những dạng này như sau :

Dạng 1 : $|f(x)| = a$ (a là hằng số dương)

Ta lần lượt xét $f(x) = a$ và $f(x) = -a$

Mỗi lần tìm được một giá trị của x ta được một đáp số.

Dạng 2 : $|f(x)| = g(x)$

Ta phải tìm x thoả mãn cả hai điều kiện :

1/ $g(x) \ge 0$

2/ $f(x) = g(x)$ hoặc $f(x) = -g(x)$

Dạng 3 : $|f(x)| = |g(x)|$

Ta phải tìm x thoả mãn một trong hai điều kiện : $f(x) = g(x)$ hoặc $f(x) = -g(x)$

Dạng 4 : $|f(x)| + |g(x)| = 0$

Ta tìm x thoả mãn cả hai điều kiện :

$f(x) = 0$ và $g(x) = 0$

Dạng 5 : $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$ (a là hằng số dương)

Dạng 6 : $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$

Thí dụ 57 :

Tìm x biết $|x - 1| = 2x - 5$

Xét điều kiện thứ nhất $\quad 2x - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 2,5 \qquad (1)$

Xét điều kiện thứ hai $\quad \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2x - 5 \\ x - 1 = -(2x - 5) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 & \text{(Thoả mãn điều kiện (1))} \\ x = 2 & \text{(Không thoả mãn điều kiện (1))} \end{array}\right.$$

Kết luận : Vậy x = 4

Thí dụ 58 :

Tìm x biết $|3x - 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 3x - 1 < 5$

$$-4 < 3x < 6$$

$$-\frac{4}{3} < x < 2$$

BÀI TẬP

216. Tìm x biết :

a) $|5x + 4| + 7 = 26$; b) $3\,|9 - 2x| - 17 = 16$

c) $3 - 4\,|5 - 6x| = 7$; d) $||x+5| - 4\,| = 3$

217. Tìm x biết :

a) $|9 - 7x| = 5x - 3$; b) $8x - |4x + 1| = x + 2$

218. Tìm x biết :

a) $|17x - 5| - |17x + 5| = 0$; b) $|3x + 4| = 2\,|2x - 9|$

219. Tìm x biết : $|x^2 - 3x| + |(x + 1)(x - 3)| = 0$

220. Tìm x biết : a) $|10x + 7| < 37$; b) $|3 - 8x| \leq 19$

221. Tìm x biết : a) $|15x - 1| > 31$; b) $|2x - 5| + 4 \geq 25$

222. Tìm x biết : a) $|x + 2| + |x - 5| = 7$; b) $|x + 3| - 2x = |x - 4|$

223. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x ; y) thoả mãn điều kiện sau :

a) $|x| + |y| = 4$; b) $|x| + |y| < 4$

§7. ÔN TẬP CHƯƠNG IV VÀ ÔN TẬP CUỐI NĂM

Thí dụ 59 :

Tìm đa thức f(x) rồi tìm nghiệm của f(x) biết rằng :

$x^3 + 2x^2(4y - 1) - 4xy^2 - 9y^3 - f(x) = -5x^3 + 8x^2y - 4xy^2 - 9y^3$

Giải :

$f(x) = (x^3 + 8x^2y - 2x^2 - 4xy^2 - 9y^3) - (-5x^3 + 8x^2y - 4x^2y - 9y^3)$

$f(x) = x^3 + 8x^2y - 2x^2 - 4xy^2 - 9y^3 + 5x^3 - 8x^2y + 4xy^2 + 9y^3$

$f(x) = 6x^3 - 2x^2$

Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(3x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của đa thức f(x) là $x_1 = 0 ; x_2 = \dfrac{1}{3}$

Nhận xét : Để tìm nghiệm của đa thức f(x) có bậc cao ta viết f(x) dưới dạng tích các đa thức có bậc thấp hơn.Mỗi nhị thức bậc nhất ax + b cho một nghiệm là $x = \dfrac{-b}{a}$

Thí dụ 60 : Cho $a = 3^{n+1} + 3^n - 1$

$b = 2.3^{n+1} - 3^n + 1$ trong đó $n \in \mathbf{N}$

Chứng minh rằng trong hai số a và b ít nhất cũng có một số không chia hết cho 7.

Giải :

Xét tổng $a + b = (3^{n+1} + 3^n - 1) + (2.3^{n+1} - 3^n + 1)$

$a + b = 3 . 3^{n+1} = 3^{n+2} \not\vdots\, 7$

Nếu cả hai số a và b đều chia hết cho 7 thì $a + b \,\vdots\, 7$ (mâu thuẫn với kết quả trên).

Do đó trong hai số a và b ít nhất cũng có một số không chia hết cho 7.

BÀI TẬP

224. Cho đa thức $P = 2x(x + y - 1) + y^2 + 1$

a) Tính giá trị của P với $x = -5$; $y = 3$

b) Chứng minh rằng P luôn luôn nhận giá trị không âm với mọi x, y.

225. Cho $g(x) = 4x^2 + 3x + 1$; $h(x) = 3x^2 - 2x - 3$

a) Tính $f(x) = g(x) - h(x)$

b) Chứng tỏ rằng -4 là nghiệm của $f(x)$

c) Tìm tập hợp nghiệm của $f(x)$.

226. Đa thức f(x) với hệ số nguyên có tính chất là :

Nếu f(x) có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của hệ số tự do. Em hãy vận dụng để tìm tập hợp các nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

227. Cho $f(x) = x^2 + px + q$; $g(x) = x^2 + p'x + q'$

Chứng minh rằng nếu có hai giá trị $x_1 \neq x_2$ của x sao cho $f(x_1) = g(x_1)$; $f(x_2) = g(x_2)$ thì $f(x) = g(x)\ \forall x$.

228. Cho đa thức f(x) thoả mãn điều kiện

$2f(x) - xf(-x) = x + 10$ (1) với mọi $x \in \mathbf{R}$. Tính f(2)

229. a) Tính tổng của 5 số nguyên liên tiếp trong đó số ở giữa là a ($a \in \mathbf{Z}$). Có thể khẳng định tổng này chia hết cho số nào ?

b) Tính tổng của 5 số chẵn liên tiếp trong đó số đầu là 2a ($a \in \mathbf{Z}$). Có thể khẳng định tổng này chia hết cho số nào ?

230*. Cho $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

231. Chứng minh rằng các biểu thức sau, luôn luôn có giá trị là một số chẵn với mọi $x, y, z \in \mathbf{Z}$

a) $A = (x - y) + |x + y|$

b) $B = (x - y) - |x - y|$

c) $C = (x - y - z) + ||x + y| + z|$

232*. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Áp dụng : Cho $A = (a + 1)(b + 1)$ trong đó $ab = 1$ ($a > 0$; $b > 0$). Chứng minh rằng $A \geq 4$

233. Cho $x - y = 2$, tìm GTNN của các đa thức :

a) $P = xy + 4$ b) $Q = x^2 + y^2 - xy$

234. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ để biểu thức

a) $P = 9 - 2|x - 3|$ đạt GTLN

b) $Q = |x - 2| + |x - 8|$ đạt GTNN.

235. Chứng minh rằng :

a) Nếu $x - y = 0$ thì $xy \geq 0$

b*) Nếu $x - y + z = 0$ thì $xy + yz - zx \geq 0$

236. Cho $f(x)$ là hàm số xác định với mọi x, thoả mãn điều kiện

$f(x_1 x_2) = f(x_1) . f(x_2) = 5$

và $f(2) = 5$. Tính $f(8)$.

237. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

a) Tìm giá trị của biến để cho vế phải có nghĩa.

b) Tính $f(7)$

c) Tìm x để $f(x) = \dfrac{1}{4}$

d) Tìm $x \in \mathbf{Z}$ để $f(x)$ có giá trị nguyên.

e) Tìm x để $f(x) > 1$

Phần

HÌNH HỌC

Chương I

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

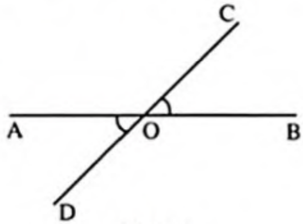
§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

Kiến thức cơ bản :

1. Định nghĩa : Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia
2. Tính chất : Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

   Trong hình 1 hai góc AOD và BOC là hai góc đối đỉnh

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$$



Hình 1

Bổ sung :

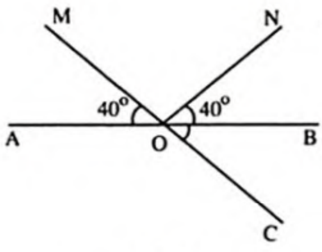
Mỗi góc chỉ có một góc đối đỉnh với nó.

Thí dụ 1 : Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB ta vẽ hai tia OM, ON sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = 40^o$.

a) Hai góc AOM và BON có phải là hai góc đối đỉnh không ?

b) Vẽ tia OC là tia đối của tia OM. Hỏi tia OB có phải là tia phân giác của góc CON không ?

Giải : (hình 2)



Hình 2

a) Hai góc AOM và BON có một cặp cạnh là hai tia đối nhau, cặp cạnh còn lại không đối nhau nên hai góc đó không phải là góc đối đỉnh.

b) Ta có $\widehat{BOC} = \widehat{AOM} = 40^o$ (đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{BON}$ (vì cùng bằng 40^o) (1).

Hai góc BOC và BON là hai góc kề, có tổng là $80^o < 180^o$ nên cạnh chung OB nằm giữa hai cạnh OC,ON (2).

Từ (1) và (2) suy ra OB là tia phân giác của góc CON.

Nhận xét : Bài toán trên vẫn đúng nếu ta thay số đo 40^{o} bằng một số đo bất kì khác nhỏ hơn 90^{o} (và lớn hơn 0^{o}).

Nếu các góc AOM và BON là các góc tù thì cũng chứng minh tương tự như trên ta được OA là tia phân giác của góc CON.

BÀI TẬP

1. a) Nếu có 3 đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì chúng tạo thành mấy cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt) ?

b*) Cũng hỏi như trên nếu thay 3 bởi n ($n \in \mathbf{N}$; $n \geq 2$).

2. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành 4 góc (không kể góc bẹt).

a) Chứng minh rằng trong các góc nói trên, tồn tại hai góc có số đo nhỏ hơn hoặc bằng 90^{o}.

b) Biết tổng của 3 trong 4 góc đó là 225^{o}, tính số đo của mỗi góc.

3. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

4. Cho hai góc đối đỉnh. Vẽ tia phân giác của một trong hai góc đó.

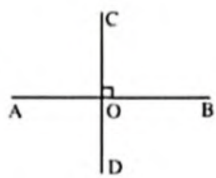
Chứng tỏ rằng tia đối của tia này là tia phân giác của góc còn lại.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

Kiến thức cơ bản :

1. Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông (*hình 3*)

   Kí hiệu : AB $\perp$ CD



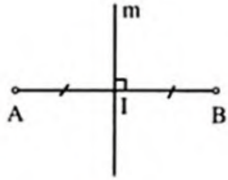
Hình 3

2. Tính chất duy nhất của đường thẳng vuông góc :

   Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

3. Đường trung trực m của đoạn thẳng AB là đường thẳng đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với đoạn thẳng ấy hình 4.

Bổ sung :



Hình 4

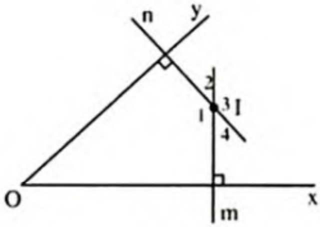
1. Mỗi đoạn thẳng chỉ có một đường trung trực.

2. Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc :

Hai góc gọi là có cạnh tương ứng vuông góc nếu đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng vuông góc với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.

Trong *hình 5* :

$\begin{cases} Im \perp Ox \\ In \perp Oy \end{cases} \Rightarrow$ Các góc I_1, I_2, I_3, I_4 đều là góc có cạnh tương ứng vuông góc với góc xOy

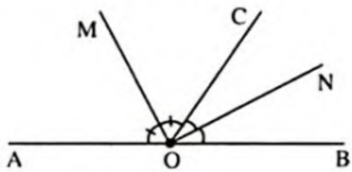


Hình 5

Thí dụ 2 : Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

Giải : (hình 6)

Gọi AOC và BOC là hai góc kề bù, các tia OM, ON thứ tự là các tia phân giác của chúng. Ta phải chứng tỏ rằng OM $\perp$ ON.



Hình 6

Thật vậy, hai góc AOC và BOC kề bù nên tia OC nằm giữa hai tia OA, OB (1) và $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^o$. Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên tia OM nằm giữa hai tia OA,OC (2) và $\widehat{MOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$. Tia ON là tia phân giác của góc BOC nên tia ON nằm giữa hai tia OB, OC (3) và $\widehat{CON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. Từ (1), (2), (3) suy ra tia OC nằm giữa hai tia OM, ON do đó

$\widehat{MON} = \widehat{MOC} + \widehat{CON} = \frac{\widehat{AOC} + \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$. Hai tia OM,ON cắt nhau tại O và $\widehat{MON} = 90^o$ nên OM $\perp$ ON.

Nhận xét :

1. Từ khái niệm hai đường thẳng vuông góc, ta cũng có khái niệm hai tia vuông góc, hai đoạn thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng v. v...

2. Trong cách giải trên, ta đã chứng tỏ tia OC nằm giữa hai tia OM, ON để tính góc MON bằng cách cộng hai góc MOC và CON. Ta cũng có thể chứng tỏ tia ON nằm giữa hai tia OB và OM để tính góc MON bằng cách lấy góc BOM trừ đi góc BON.

Do khuôn khổ của cuốn sách, từ nay trong nhiều trường hợp ta sẽ không trình bày chi tiết việc chứng minh một tia nằm giữa hai tia, cũng như một điểm nằm giữa hai điểm khác. Các quan hệ này được thể hiện trên hình vẽ, ta không nhắc lại chúng khi cộng trừ góc hay cộng trừ đoạn thẳng.

BÀI TẬP

5. Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB ta vẽ ba tia OM,ON và OC sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON} < 90^o$ và tia OC là tia phân giác của góc MON. Chứng tỏ rằng $OC \perp AB$.

6. Cho hai tia Ox,Oy vuông góc với nhau. Trong góc xOy ta vẽ hai tia OA,OB sao cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOy} = 30^o$. Vẽ tia OC sao cho tia Oy là tia phân giác của góc AOC. Chứng tỏ rằng :

a) Tia OA là tia phân giác của góc BOx

b) $OB \perp OC$

7. Cho góc MON có số đo 120^o. Vẽ các tia OA,OB ở trong góc đó sao cho $OA \perp OM$; $OB \perp ON$.

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$

b) Vẽ tia Ox và tia Oy thứ tự là các tia phân giác của các góc AON và BOM. Chứng tỏ rằng $Ox \perp Oy$

c) Kể tên những cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc.

§3. CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Kiến thức cơ bản

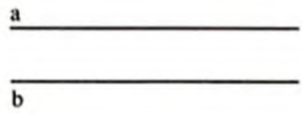
1. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung. Trong *hình 7* ta có a // b
2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song :

   a // b nếu có một trong các điều kiện sau :

   – Cặp góc so le trong bằng nhau ;

   – Cặp góc đồng vị bằng nhau ;

   – Cặp góc trong cùng phía bù nhau.



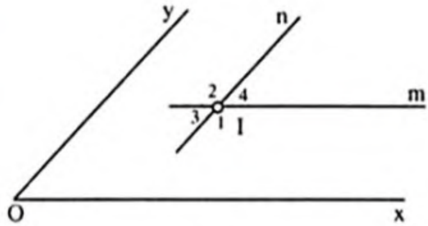
Hình 7

Bổ sung :

Hai góc gọi là có cạnh tương ứng song song nếu mỗi cạnh của góc này tương ứng song song với một cạnh của góc kia.

Trong *hình 8* :

$$\begin{cases} Im \ // Ox \\ In \ // \ Oy \end{cases} \Rightarrow \text{Các góc } I_1 \ ; I_2 \ ; I_3 \ ; I_4$$



Hình 8

đều là các góc có cạnh tương ứng song song với góc xOy.

Thí dụ 3 : Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^o$; $\widehat{C} = 50^o$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D. Vẽ góc CDE bằng và so le trong với góc C. Gọi AM là tia phân giác của $\widehat{BAD}$. Chứng tỏ rằng :

a) DE // AM

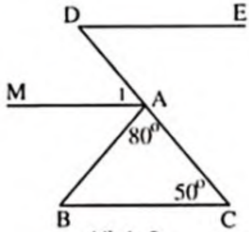
b) BC // AM

Giải : (hình 9)

a) $\widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^o$ (kề bù) mà $\widehat{BAC} = 80^o$ nên $\widehat{BAD} = 100^o$. Tia AM là tia phân giác của góc BAD nên $\widehat{A}_1 = 100^o : 2 = 50^o$. Ta có

$\widehat{A}_1 = \widehat{D} = 50^o$ suy ra DE // AM (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

b) Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{C} = 50^o$ suy ra BC // AM (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau)



Hình 9

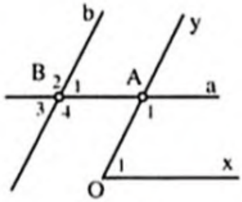
Nhận xét :

Trong thí dụ trên, để chứng minh hai đường thẳng song song ta chứng minh cặp góc so le trong hoặc cặp góc đồng vị của hai đường thẳng đó bằng nhau. Cũng có thể chứng minh cặp góc trong cùng phía bù nhau.

Tóm lại, ta phải chứng minh được quan hệ bằng nhau hoặc bù nhau của những cặp góc đặc biệt (so le trong, đồng vị hoặc trong cùng phía) của hai đường thẳng đó.

BÀI TẬP

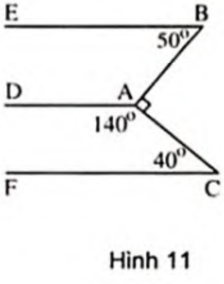
8. Xem *hình 10* rồi cho biết các góc có cạnh tương ứng song song với góc xOy biết $\widehat{O}_1 = 70^o$; $\widehat{A}_1 = 110^o$; $\widehat{B}_2 = 110^o$



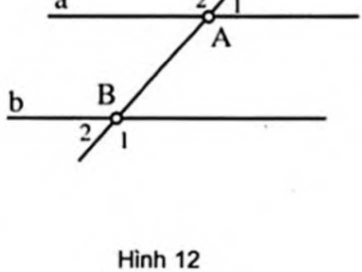
Hình 10

9. Trong *hình 11* biết AB ⊥ AC ; $\widehat{DAC} = 140^o$; $\widehat{B} = 50^o$; $\widehat{C} = 40^o$.

Chứng tỏ rằng : a) AD // CF b) AD // BE



Hình 11



Hình 12

10. Trong *hình12* biết $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = 288^o$ và $\widehat{A}_1 = \frac{2}{3}\widehat{A}_2$. Chứng tỏ rằng a // b

11. Cho góc xOy =60^o. Trên tia Ox lấy điểm C. Vẽ tia Ct.

a) Tính số đo của góc xCt để cho Ct // Oy

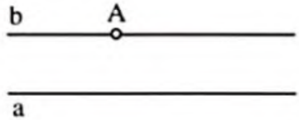
b) Cũng hỏi như trên nếu thay 60^o bởi a^o

§4. TIÊN ĐỀ Ơ-CLIT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG. TÍNH CHẤT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Kiến thức cơ bản :

1. Tiên đề Ơ-clit :

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó *(hình 13)*



Hình 13

Từ tiên đề này suy ra : Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

2. Tính chất của hai đường thẳng song song.

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

– Các cặp góc so le trong bằng nhau ;

– Các cặp góc đồng vị bằng nhau ;

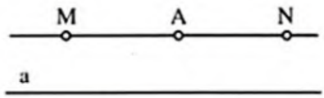
– Các cặp góc trong cùng phía bù nhau.

Bổ sung :

1. Có thể dùng tiên đề Ơ-clit để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Trong *hình 14* :

Nếu $\begin{cases} AM // a \\ AN // a \end{cases}$ thì A, M, N thẳng hàng



Hình 14

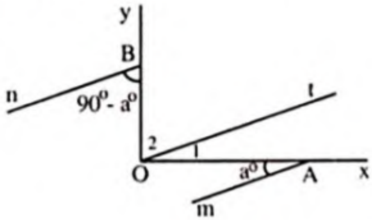
2. Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì :

– Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù ;

– Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù ;

– Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

Thí dụ 4 : Cho góc xOy. Lấy điểm A trên tia Ox, điểm B trên tia Oy. Vẽ ra ngoài góc xOy các tia Am và Bn song song với nhau. Giả sử $\widehat{OAm} = a^o$ $(0 < a < 90)$; $\widehat{OBn} = 90^o - a^o$, chứng tỏ rằng $Ox \perp Oy$.



Hình 15

Giải : (Hình 15)

Trong góc xOy ta vẽ tia Ot // Am mà Bn // Am (đề bài) nên Ot // Bn (cùng song song với Am).

Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{OAm}$; $\widehat{O}_2 = \widehat{OBn}$ (cặp góc so le trong).

Tia Ot nằm giữa hai tia Ox,Oy nên $\widehat{xOy} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = a^o + (90^o - a^o) = 90^o$.

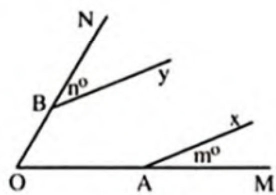
Suy ra $Ox \perp Oy$.

Nhận xét : Để bài cho Am // Bn nhưng chưa có một đường thẳng nào cắt chúng nên chưa vận dụng được tính chất của hai đường thẳng song song. Ta vẽ thêm đường phụ : Từ O vẽ tia Ot // Am. Vẽ như vậy có hai điều lợi : vừa tận dụng được đường thẳng Ox làm đường thẳng thứ ba cắt hai đường thẳng Am và Ot ; vừa tận dụng được đường thẳng Oy làm đường thẳng thứ ba cắt hai đường thẳng Bn và Ot.

Từ một điểm vẽ một đường thẳng song song với một đường thẳng khác là việc vẽ đường phụ thường gặp khi giải toán hình học.

BÀI TẬP

12. Trong *hình16*, góc MON có số đo bằng a^o $(0 < a < 180)$. Lấy $A \in OM$, $B \in ON$. Vẽ các tia Ax và By ở trong góc MON sao cho $\widehat{MAx} = m^o$; $\widehat{NBy} = n^o$ và $m + n = a$. Chứng tỏ rằng Ax // By.

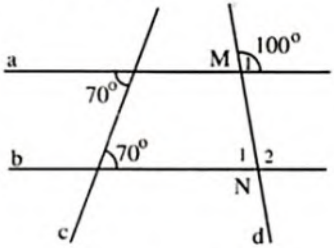


Hình 16

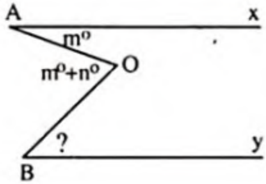
13. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ 11 đường thẳng phân biệt. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng có 10 đường thẳng cắt a.

14. Trong *hình 17*. Tính $\widehat{N}_1$

15. Trong *hình 18*. Cho biết Ax // By ; $\widehat{A} = m^o$; $\widehat{O} = m^o + n^o$ ($0 < m,n < 90$). Tính góc B



Hình 17



Hình 18

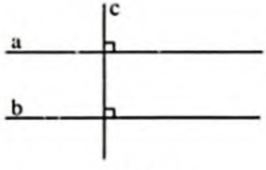
16. Cho hai đường thẳng AB và CD song song với nhau. Lấy $M \in AB$; $N \in CD$ sao cho hai tia MB và ND thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ MN. Vẽ tia Mx ở trong góc AMN, vẽ tia Ny trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa M sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{CNy}$. Chứng tỏ rằng Mx // Ny.

17. Cho tam giác ABC, điểm M trên cạnh BC. Vẽ ME // AB ($E \in AC$) ; MF // AC ($F \in AB$). Xác định vị trí của điểm M để tia MA là tia phân giác của góc EMF.

18. Cho hai góc O và I có cạnh tương ứng song song. Biết $\widehat{O} + \widehat{I} = a^o$ ($0 < a \le 180$). Hỏi có xác định được số đo của hai góc O và I không ?

§5. QUAN HỆ GIỮA TÍNH VUÔNG GÓC VÀ TÍNH SONG SONG

Kiến thức cơ bản :



Hình 19

1. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. (*hình 19*)
2. Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Bổ sung :

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì :

– Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù ;

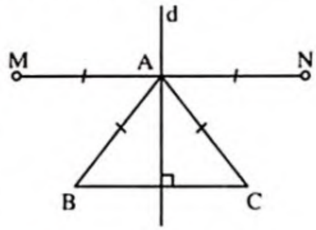
– Chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù ;

– Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

Thí dụ 5 :

Tam giác ABC có AB = AC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C lấy điểm M sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{B}$ và AM = AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy điểm N sao cho $\widehat{CAN} = \widehat{C}$ và AN = AC. Từ A vẽ đường thẳng $d \perp BC$. Chứng tỏ rằng đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Giải : (Hình 20)



Hình 20

Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{B}$; $\widehat{CAN} = \widehat{C}$ (đề bài), suy ra AM // BC ; AN // BC (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Suy ra ba điểm M, A, N thẳng hàng (vì qua điểm A chỉ vẽ được một đường thẳng song song với BC). Vậy MN // BC mà $d \perp BC$ nên $d \perp MN$ (1).

Có AM =AB ; AN =AC mà AB =AC (đề bài) nên AM = AN (2).

Từ (1) và (2) suy ra d là trung trực của MN.

Nhận xét :

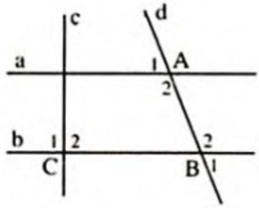
– Phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng trong thí dụ trên là phương pháp dùng tiên đề Ơclit để chứng minh hai đường thẳng trùng nhau từ đó suy ra ba điểm thẳng hàng.

– Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song của ba đường thẳng MN, BC, d được thể hiện rõ trong thí dụ đó : để chứng minh $MN \perp d$, ta chứng minh MN // BC.

BÀI TẬP

19. Cho đường thẳng a và hai điểm A, B không thuộc a. Vẽ $AH \perp a$; $BK \perp a$. Có thể khẳng định AH // BK không ?

20. Trong *hình 21*, cho biết $\widehat{A}_1 = \frac{5}{7}\widehat{A}_2$; $\widehat{B}_1$ nhỏ hơn $\widehat{B}_2$ là 30^o ; $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$. Chứng tỏ rằng $a \perp c$.



Hình 21

21. Cho góc nhọn xOy. Từ điểm A trên tia Oy vẽ $AB \perp Ox$; $BC \perp Oy$; $CD \perp Ox$; $DE \perp Oy$ ($B, D \in Ox$; $C, E \in Oy$)

a) Kể tên những cặp đường thẳng song song

b) Trong hình vẽ có những góc nhọn nào bằng nhau ?

22. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 90^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ các tia Bx và Cy vuông góc với BC. Tính $\widehat{ABx} + \widehat{ACy}$.

23. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một góc (khác góc bẹt) thì cắt nhau.

§6. ĐỊNH LÍ

Kiến thức cơ bản :

1. Một tính chất được khẳng định là đúng bằng suy luận gọi là một định lí.
   Dạng tổng quát của định lí : $\boxed{\text{Nếu có A thì có B}}$
   Phần A gọi là phần giả thiết.
   Phần B gọi là phần kết luận.
2. Chứng minh định lí là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.
3. Một định lí được suy ra trực tiếp từ một định lí hoặc một tính chất được thừa nhận gọi là hệ quả.

Nâng cao :

Định lí thuận, định lí đảo.

1. Nói chung trong một định lí, nếu đổi kết luận thành giả thiết và đổi giả thiết thành kết luận thì được một mệnh đề mới gọi là mệnh đề đảo của định lí đã cho. Nếu mệnh đề đảo này đúng thì nó được gọi là định lí đảo của định lí đã cho. Định lí cho trước gọi là định lí thuận.

Dạng tổng quát :

– Định lí thuận : Nếu có A thì có B

– Định lí đảo : Nếu có B thì có A

2. Một định lí có thể có phần giả thiết tương đối phức tạp. Chẳng hạn nếu có A_1 và A_2 thì có B.

Lúc này có nhiều cách lập mệnh đề đảo :

– Đảo toàn bộ : Nếu có B thì có A_1 và A_2

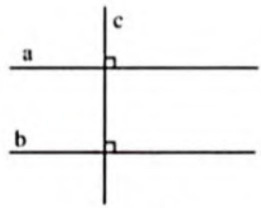
– Đảo bộ phận : Nếu có B và A_1 thì có A_2 hoặc nếu có B và A_2 thì có A_1.

• Các định lí về quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song của ba đường thẳng là những định lí thuận và đảo của nhau. (*Hình 22*)

Định lí thuận	Định lí đảo
$\boxed{\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a // b}$	$\boxed{\begin{cases} a \perp c \\ a // b \end{cases} \Rightarrow b \perp c}$

Viết gộp cả định lí thuận và đảo :

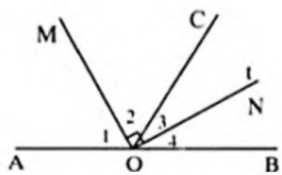
$$\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a // b$$



Hình 22

Thí dụ 6 :

Cho hai góc kề bù AOC và BOC. Tia OM là tia phân giác của góc AOC. Tia ON nằm trong góc BOC và ON $\perp$ OM. Chứng minh rằng tia ON là tia phân giác của góc BOC.



Hình 23

Giải : (Hình 23)

Có $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^o$ mà ON $\perp$ OM (gt) nên $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^o$ suy ra $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_4 = 90^o$.

Do đó $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_4 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3$. Vì $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (gt) nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (đpcm) (đpcm là viết tắt của điều phải chứng minh)

Nhận xét : – Bài toán này là định lí đảo của định lí "hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau".

– Ta cũng có thể dùng định lí thuận để chứng minh bài toán trên (định lí đảo) như sau (*hình 23*) : Vẽ tia Ot là tia phân giác của góc BOC. Như vậy hai tia Ot và OM là hai tia phân giác của hai góc kề bù, do đó Ot $\perp$ OM. Hai tia Ot và ON nằm trong góc BOC và cùng vuông góc với OM nên chúng phải trùng nhau. Suy ra tia ON là tia phân giác của góc BOC

BÀI TẬP

24. Điền vào các chỗ trống :

a) Cho $\widehat{M} = \widehat{O}$; $\widehat{N} = \widehat{O}$ suy ra... (vì...)

b) Cho $\widehat{M} + \widehat{O} = 90^o$; $\widehat{N} + \widehat{O} = 90^o$ suy ra... (vì...)

c) Cho $\widehat{O}_1$ và $\widehat{O}_2$ là hai góc kề bù. Nếu $\widehat{O}_1 = 90^O$ thì... (vì...)

d) Cho $\widehat{M} = \widehat{M}'$; $\widehat{N} = \widehat{N}'$ suy ra $\widehat{M} = \widehat{N} \Leftrightarrow$ ... (vì...)

25. Điền vào các chỗ trống :

Cho AB = A'B' và CD = C'D' suy ra AB + CD =... (vì...)

26. Cho I là trung điểm của AB

I' là trung điểm của A'B'

Hãy điền kí hiệu thích hợp vào ô trống :

IA $\square$ I'A' $\Leftrightarrow$ AB $\square$ A'B'

27. Cho điểm M nằm giữa A và B điểm M' nằm giữa A' và B'. Biết AB = A'B', hãy điền kí hiệu thích hợp vào ô trống :

Nếu MA > M'A' thì MB $\square$ M'B'

28. Lập và giải bài toán đảo của bài tập số 5.

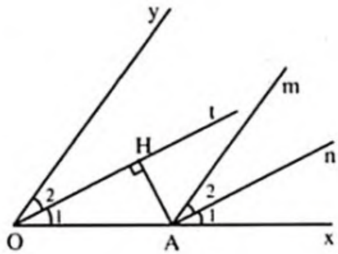
§7. ÔN TẬP CHƯƠNG I

Thí dụ 7 : Cho góc xOy khác góc bẹt, tia phân giác Ot. Từ một điểm A trên tia Ox vẽ tia Am // Oy (Tia Am thuộc miền trong của góc xOy). Vẽ tia phân giác An của góc xAm.

a) Chứng minh rằng An // Ot

b) Vẽ tia AH $\perp$ Ot. Có nhận xét gì về tia AH đối với góc OAm ?

Giải : (Hình 24)



Hình 24

a) Am // Oy (gt) $\Rightarrow \widehat{xAm} = \widehat{xOy}$ (cặp góc đồng vị) $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$; $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{O}_1$ (cùng bằng một nửa của hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow$ An//Ot (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau)

b) $AH \perp Ot$ (gt) $\Rightarrow AH \perp An$

(quan hệ giữa song song và vuông góc)

Hai góc OAm và xAm là hai góc kề bù, tia An là tia phân giác của góc xAm suy ra tia AH là tia phân giác của góc OAH (xem thí dụ 6)

Nhận xét : Nếu hai đường thẳng song song thì :

– Hai tia phân giác của cặp góc đồng vị song song với nhau ;

– Hai tia phân giác của cặp góc so le trong song song với nhau ;

– Hai tia phân giác của cặp góc trong cùng phía vuông góc với nhau.

BÀI TẬP

29. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm O ở ngoài phạm vi tờ giấy. Giả sử tia Ot là tia phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng đó (trên tờ giấy không có tia này). Từ một điểm A trên a hãy vẽ một đường thẳng :

a) Song song với Ot ; b) Vuông góc với Ot

30. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^o$. Tia Bx là tia đối của tia BA. Vẽ tia phân giác By của góc CBx. Vẽ $CH \perp By$ và $CK \perp CB$ (H,K thuộc tia By). Chứng minh rằng $\widehat{HCA} = \widehat{HCK}$.

31. Cho $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc. Biết $\widehat{A} - \widehat{B} = 40^o$, tính số đo các góc A và B

32. Cho góc xOy = m^o $(0 < m < 180)$. Tia Ot là tia phân giác của góc xOy. Lấy điểm A trên tia Ox (khác điểm O). Qua A vẽ đường thẳng $a \perp Ox$. Chứng minh rằng tia Ot và đường thẳng a cắt nhau.

33 *. Cho 9 đường thẳng trong đó không có 2 đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 đường thẳng mà góc nhọn giữa chúng không nhỏ hơn 20^o.

Chương II

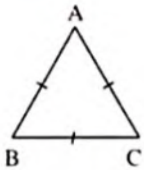
TAM GIÁC

MỞ ĐẦU

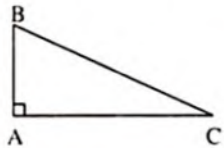
A. Một số dạng đặc biệt của tam giác :

1. Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau. (*hình 25*)
2. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau. (*hình 26*)
3. Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông. (*hình 27*)
4. Tam giác vuông cân là tam giác vuông và cân. (*hình 28*)

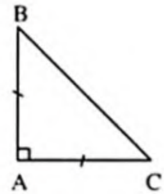
Hình 25



Hình 26



Hình 27

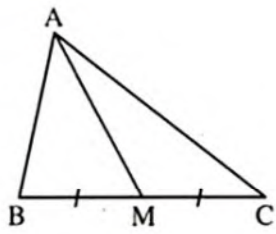


Hình 28

B. Các đường chủ yếu trong tam giác :

1. Đường thẳng AM nối đỉnh A với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC (gọi tắt là trung tuyến, *hình 29*).

Đoạn thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC.

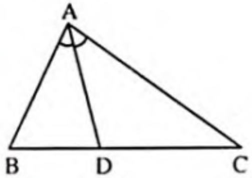


Hình 29

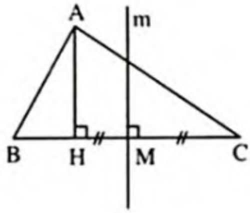
2. Đường thẳng AD chứa tia phân giác của góc A gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC (gọi tắt là phân giác).

Đoạn thẳng AD ($D \in BC$) cũng gọi là đường *phân giác* của tam giác ABC (*hình 30*).

3. Đường thẳng đi qua đỉnh A và vuông góc với đường thẳng BC tại H gọi là đường cao (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC. Đoạn thẳng AH cũng gọi là đường cao của tam giác (*hình 31*)



Hình 30



Hình 31

4. Đường thẳng m vuông góc với cạnh BC tại trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung trực ứng với cạnh BC của tam giác. (*hình 31*)

§1. TỔNG BA GÓC CỦA TAM GIÁC

Kiến thức cơ bản :

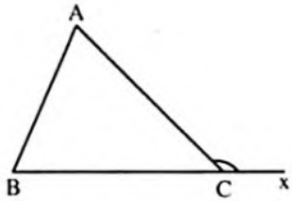
1. Định lí : Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^o.
2. Hệ quả.

a) Trong tam giác vuông tổng hai góc nhọn bằng 90^o

b) Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó (do đó lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó).

$\widehat{ACx} = \widehat{A} + \widehat{B}$; $\widehat{ACx} > \widehat{A}$; $\widehat{ACx} > \widehat{B}$ (hình 32)

c) Nếu hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau từng đôi một thì cặp góc còn lại cũng bằng nhau.

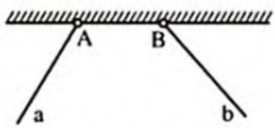


Hình 32

Bổ sung :

Một tam giác có thể có ba góc nhọn (gọi là *tam giác nhọn*) nhưng không thể có quá một góc tù. Tam giác có một góc tù gọi là *tam giác tù*.

Thí dụ 8 : Hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm ở ngoài mép tờ giấy (*hình 33*).



Hình 33

Trong tay chỉ có thước đo góc, làm thế nào để đo được góc nhọn giữa hai đường thẳng a, b (đoạn thẳng AB nằm trong góc đó).

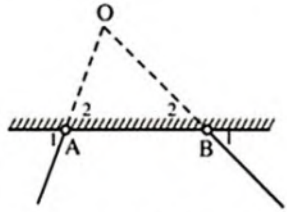
Giải : (hình 34)

Đo các góc $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ rồi lấy 180^o trừ đi tổng $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1$

Giải thích : Giả sử a và b cắt nhau tại O. Xét ΔAOB có

$\widehat{O} + \widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = 180^o \Rightarrow \widehat{O} = 180^o - (\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2)$

$= 180^o - ((\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1))$ (tính chất hai góc đối đỉnh)



Hình 34

Nhận xét : Trong một tam giác, để tính được số đo của một góc ta lấy 180^o trừ đi tổng số đo của hai góc còn lại.

Thí dụ 9 : Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = a^o$ $(0 < a < 180)$. Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại O. Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh B cắt tia CO tại M, tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh C cắt tia BO tại N.

a) Tính số đo góc BOC

b) Chứng minh rằng $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \dfrac{a^o}{2}$

c) Xác định giá trị của a để $\widehat{BDC} = \widehat{CEA}$

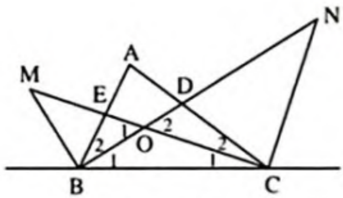
Giải : (hình 35)

a) Xét ΔABC có BD, CE là phân giác (gt) nên $\widehat{B}_1 = \dfrac{1}{2}\widehat{B}$; $\widehat{C}_1 = \dfrac{1}{2}\widehat{C}$. Vì $\widehat{A} = a^o$ nên

$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^o - a^o$. Xét ΔBOC có

$\widehat{BOC} = 180^o - (\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1)$

$$= 180^o - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^o - \frac{180^o - a^o}{2} = 90^o + \frac{a^o}{2}.$$



Hình 35

b) Ta có $BM \perp BN$; $CM \perp CN$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Xét hai tam giác vuông BOM và CON có cặp góc nhọn $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (đối đỉnh) nên cặp góc nhọn còn lại phải bằng nhau, do đó $\widehat{M} = \widehat{N}$.

$\widehat{BOC}$ là góc ngoài của tam giác BOM, suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{M} + \widehat{MBO}$.

Vậy $\widehat{M} = \widehat{BOC} - \widehat{MBO} = 90^o + \frac{1}{2}a^o - 90^o = \frac{a^o}{2}$. Do đó $\widehat{M} = \widehat{N} = \frac{a^o}{2}$

c) Ta có $\widehat{BDC}$ là góc ngoài của ΔBDA nên $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{B}_2$, $\widehat{CEA}$ là góc ngoài của ΔCEB nên $\widehat{CEA} = \widehat{B} + \widehat{C}_1$; $\widehat{BDC} = \widehat{CEA} \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B}_2 = \widehat{B} + \widehat{C}_1$

$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}_1 - \widehat{B}_2 \Leftrightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \Leftrightarrow a^o = \frac{180^o - a^o}{2} \Leftrightarrow a = 60.$

Nhận xét :

Qua cách giải trong thí dụ này, để tính số đo của một góc ta có thể :

– Lấy 180^o trừ đi tổng số đo của hai góc còn lại (câu a)

– Lấy số đo của góc ngoài ở một đỉnh khác trừ đi số đo của góc trong không kề với nó (câu b)

BÀI TẬP

34. Cho tam giác vuông ở A, $\widehat{C} = 40^o$. Vẽ đường phân giác AD, đường cao AH. Tính số đo góc HAD.

35. Chứng minh rằng với mỗi tam giác bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài không lớn hơn 120^o.

36. Cho tam giác ABC vuông góc tại A, phân giác CD.

a) Chứng minh rằng góc BDC là góc tù.

b) Giả sử $\widehat{BDC} = 105^o$, tính $\widehat{B}$.

37*. Cho tam giác ABC, O là một điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$

b) Biết $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o - \frac{\widehat{A}}{2}$ và tia BO là tia phân giác của góc B, chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của góc C.

38. Tam giác ABC có góc $\widehat{B} > \widehat{C}$. Vẽ phân giác AD.

a) Chứng minh rằng $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài ở đỉnh A của tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$

39. Tam giác ABC có $\hat{A} = 180^o - 3\hat{C}$

a) Chứng minh rằng $\hat{B} = 2\hat{C}$

b) Từ một điểm D trên cạnh AB vẽ DE // BC ($E \in AC$). Hãy xác định vị trí của D để cho tia ED là tia phân giác của góc AEB.

§2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CẠNH – CẠNH – CẠNH (C.C.C)

Kiến thức cơ bản :

1. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có ba cạnh lần lượt bằng nhau từng đôi một và ba góc đối diện với ba cạnh ấy cũng bằng nhau từng đôi một.

   Khi viết hệ thức bằng nhau giữa hai tam giác, các chữ cái chỉ tên các đỉnh tương ứng được viết theo cùng thứ tự.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \iff \begin{cases} AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \\ \hat{A} = \widehat{A'};\ \hat{B} = \widehat{B'}\ ;\hat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

2. Trường hợp bằng nhau cạnh – cạnh –cạnh (c.c.c)

   Nếu ba cạnh của tam giác này lần lượt bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Bổ sung :

Quan hệ bằng nhau của hai tam giác có tính chất bắc cầu.

Nếu $\Delta ABC = \Delta DEF$; $\Delta DEF = \Delta HIK$

Thì $\Delta ABC = \Delta HIK$

Thí dụ 10 :

Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ trung tuyến AM. Chứng minh rằng AM cũng là phân giác, đường cao, đường trung trực của tam giác ABC.

Giải : (hình 36) ΔABM và ΔACM có :

$AB = AC$ (gt)

$MB = MC$ (gt)

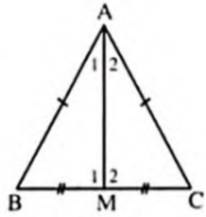
AM chung

Vậy $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c–c–c)

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ và $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

Ta có $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^o$ (hai góc kề bù)

Do đó $\widehat{M}_1 = 180^o : 2 = 90^o \Rightarrow AM \perp BC$.



Hình 36

Vậy AM là phân giác, đường cao của ΔABC. AM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên AM là đường trung trực (ứng với cạnh BC) của ΔABC.

Nhận xét : Trong thí dụ trên ta đã chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh – cạnh – cạnh.

Sau đó đã vận dụng định nghĩa của hai tam giác bằng nhau để suy ta các cặp góc tương ứng của chúng bằng nhau, từ đó chứng minh được AM cũng là phân giác, đường cao và đường trung trực.

BÀI TẬP

Hai tam giác bằng nhau :

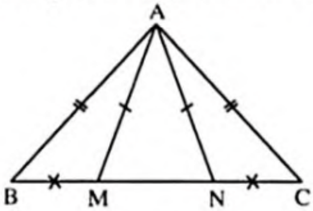
40. Cho biết $\Delta ABC = \Delta HIK$ và $\Delta ACB = \Delta HIK$.Chứng minh rằng ΔABC có hai góc bằng nhau.

41. Chứng minh rằng nếu $\Delta MNP = \Delta NPM$ thì ΔMNP là tam giác đều.

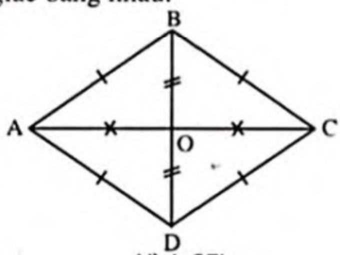
42. Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\Delta ABC = \Delta DEF$; $\Delta DEF = \Delta HIK$ và $AB = 2cm$; $DF = 2cm$. Chứng minh rằng ΔHIK là tam giác vuông cân.

Trường hợp cạnh – cạnh – cạnh :

43. Trong hình 37a, 37b các đoạn thẳng bằng nhau được đánh dấu như nhau. Bạn hãy tìm trong các hình đó các tam giác bằng nhau.



Hình 37a



Hình 37b

44. Cho hai đường tròn tâm I và K cùng có bán kính 1,5cm, chúng cắt nhau tại A và B. Vẽ dây AC của đường tròn tâm I sao cho AC = AB. Chứng minh rằng $\widehat{IAC} = \widehat{IAB} = \widehat{KAB}$.

45. Cho Δ ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B, vẽ Δ ACD sao cho AD = BC ; CD = AB. Chứng minh rằng $AB // CD$ và $AH \perp AD$.

§3. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CẠNH – GÓC – CẠNH (c.g.c)

Kiến thức cơ bản :

1. Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này lần lượt bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác này bằng nhau.
2. Đặc biệt : Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Nâng cao :

Trong trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh, cặp góc bằng nhau phải là cặp góc *xen giữa* hai cặp cạnh bằng nhau. Nếu không có điều kiện đó thì hai tam giác chưa chắc đã bằng nhau

Tuy nhiên, người ta đã chứng minh được rằng :

Nếu hai *tam giác nhọn* có hai cặp cạnh bằng nhau từng đôi một và một cặp góc tương ứng bằng nhau (không cần xen giữa) thì hai tam giác đó bằng nhau.

Thí dụ 11 : Chứng minh định lí : Trong tam giác vuông, trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền

Giải : (hình 38)

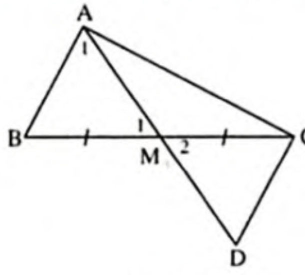
Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA

ΔAMB và ΔDMC có :

MB = MC (gt)

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh)

MA = MD (do cách vẽ)



Hình 38

Vậy $\Delta AMB = \Delta DMC$ (c–g–c)

Suy ra $AB = DC$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{D} \Rightarrow AB // CD$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

Vì $AC \perp AB$ (gt) nên $AC \perp CD$ (quan hệ giữa tính song song và vuông góc)

ΔABC và ΔCDA có

$AB = CD$ (chứng minh trên)

$\widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$

AC chung

Vậy $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c–g–c) suy ra $BC = AD$. Vì $AM = \frac{1}{2}AD$ nên $AM = \frac{1}{2}BC$.

Nhận xét : Trong cách giải của thí dụ trên, để chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$ ta đã vẽ thêm đoạn thẳng MD sao cho $MD = MA$, do đó $AM = \frac{1}{2}AD$. Như vậy chỉ còn phải chứng minh $AD = BC$. Trên một tia cho trước, đặt một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác là một trong những cách vẽ đường phụ để vận dụng trường hợp bằng nhau của tam giác.

BÀI TẬP

46. Cho tam giác đều ABC, phân giác BD và CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng :

a) $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$

b) $OA = OB = OC$

c) $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$ từ đó suy ra số đo của mỗi góc ấy.

47. Cho O là trung điểm của AB. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB, vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Lấy điểm M trên tia Ax, điểm N trên tia By sao cho $AM = BN$. Chứng minh rằng O là trung điểm của MN.

48. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Qua C vẽ một đường thẳng lần lượt cắt các đường trung trực của AC và BC tại E và F. Chứng minh rằng $AE // BF$.

49. Cho Δ ABC, các trung tuyến BD, CE. Trên tia BD lấy điểm M, trên tia CE lấy điểm N sao cho $BD = \frac{1}{2}BM$; $CE = \frac{1}{2}CN$. Chứng minh rằng $BC = \frac{1}{2}MN$.

50. Cho O là điểm thuộc đoạn thẳng AB (không trùng hai đầu mút). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ox và Oy sao cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOy} < 90^o$. Lấy điểm C trên tia Ox và điểm D trên tia Oy sao cho OC = OA và OD = OB. Chứng minh rặng AD = BC.

51. Cho ΔABC vuông tại A có $\widehat{C} = 45^o$. Vẽ phân giác AD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho AE = BC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho CF = AB.

Chứng minh rằng BE = BF và $BE \perp BF$.

52*. Chứng minh rằng nếu hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

§4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA GÓC – CẠNH – GÓC (G.C.G)

Kiến thức cơ bản :

1. Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này lần lượt bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.
2. Đặc biệt : Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này lần lượt bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau (gọi tắt là trường hợp cạnh huyền – góc nhọn)

Nâng cao :

Trong trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc, cặp cạnh bằng nhau phải là cặp *cạnh kề* với hai cặp góc bằng nhau. Nếu không có điều kiện đó thì hai tam giác chưa chắc đã bằng nhau.

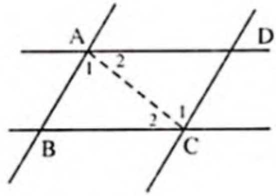
Tuy nhiên có thể thay điều kiện cặp *cạnh kề* bằng điều kiện khác như sau :

Nếu hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia và có một *cặp cạnh tương ứng bằng nhau* thì hai tam giác đó bằng nhau.

Thí dụ 12 : Chứng minh định lí : Hai đoạn thẳng song song bị chắn giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.

Giải : (hình 39)

gt	AB // CD BC // AD
KL	AB = CD BC = AD



Hình 39

Nối AC.

ΔABC và ΔCDA có :

$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (cặp góc so le trong của AB // CD)

AC chung

$\widehat{C}_2 = \widehat{A}_2$ (cặp góc so le trong của BC // AD)

Vậy $\Delta ABC = \Delta CDA$ (g.c.g)

Suy ra AB = CD và BC = AD.

Nhận xét : Việc nối AC làm xuất hiện trong hình vẽ hai tam giác có một cạnh chung là AC. Muốn chứng minh AB = CD và BC = AD ta chỉ cần chứng minh $\Delta ABC = \Delta CDA$. Do hai tam giác này đã có một cạnh bằng nhau (cạnh chung) nên chỉ cần chứng minh hai cặp góc kề cạnh đó bằng nhau là vận dụng được trường hợp bằng nhau góc–cạnh–góc. Điều này thực hiện được nhờ vận dụng tính chất của hai đường thẳng song song.

BÀI TẬP

53. Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm A ở trong góc đó. Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng qua A cắt Ox, Oy lần lượt tại B và C sao cho AB = AC.

54. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy ba điểm A, B, C sao cho OA = AB = BC. Từ A, B, C vẽ ba đường thẳng song song với nhau cắt tia Oy lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng OD = DE = EF.

55. Cho ΔABC. Các điểm D và M di động trên cạnh AB sao cho AD = BM. Qua D và M vẽ các đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC lần lượt tại E và N. Chứng minh rằng tổng DE + MN không đổi.

56. Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120^o$, phân giác BD và CE cắt nhau tại O. Trên cạnh BC lấy hai điểm I và K sao cho $\widehat{BOI} = \widehat{COK} = 30^o$. Chứng minh rằng :

a) $OI \perp OK$;   b) BE + CD < BC

57*. Cho Δ ABC.Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân ở A là ABE và ACF. Vẽ $AH \perp BC$. Đường thẳng AH cắt EF tại O. Chứng minh rằng O là trung điểm của EF.

Chuyên đề 4

PHƯƠNG PHÁP TAM GIÁC BẰNG NHAU

1. Ta đã biết nếu hai tam giác bằng nhau thì suy ra được các cặp cạnh tương ứng bằng nhau, các cặp góc tương ứng bằng nhau. Đó chính là lợi ích của việc chứng minh hai tam giác bằng nhau.

Vì vậy muốn chứng minh hai đoạn thẳng (hay hai góc) bằng nhau, ta thường làm theo các bước sau :

Bước 1 : Xét xem hai đoạn thẳng (hay hai góc) đó là hai cạnh (hay hai góc) thuộc hai tam giác nào.

Bước 2 : Chứng minh hai tam giác đó bằng nhau.

Bước 3 : Suy ra cặp cạnh (hay cặp góc) tương ứng bằng nhau.

2. Để tạo ra được hai tam giác bằng nhau, có thể ta phải vẽ thêm đường phụ bằng nhiều cách :

– Nối hai điểm có sẵn trong hình để tạo ra một cạnh chung của hai tam giác (thí dụ 12)

– Trên một tia cho trước, đặt một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác (thí dụ 11)

– Từ một điểm cho trước vẽ một đường thẳng song song với một đường thẳng (bài 54, 55)

– Từ một điểm cho trước vẽ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng (bài 57)

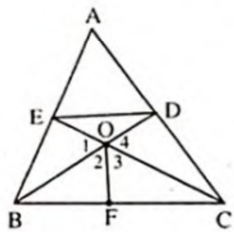
Ngoài ra còn nhiều cách khác mà bạn có thể tích luỹ được kinh nghiệm khi giải nhiều bài tập.

Thí dụ 13 : Cho ΔABC, $\widehat{A} = 60^o$. Phân giác BD, CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng :

a) ΔDOE cân.

b) $BE + CD = BC$.

Giải : (hình 40)



Hình 40

a) Ta có $\widehat{BOC} = 90^o + \dfrac{\widehat{A}}{2}$ (xem *thí dụ 9*).

Suy ra $\widehat{BOC} = 120^o$.

Vẽ phân giác OF của góc BOC ($F \in BC$), ta được $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = 60^o$.

$\Delta BOE = \Delta BOF$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OF$ và $BE = BF$

$\Delta COD = \Delta$ COF (g.c.g) $\Rightarrow OD = OF$ và $CD = CF$

Do đó $OE = OD$ (vì cùng bằng OF) $\Rightarrow$ ΔDOE là tam giác cân.

b) Ta có $BE + CD = BF + CF$ hay $BE + CD = BC$.

Nhận xét :

– Thí dụ trên cho ta thêm một cách vẽ đường phụ :

Vẽ phân giác OF của ΔBOC. Đoạn thẳng OF chính là một đoạn thẳng trung gian để so sánh OD với OE

– Ta cũng có thể vẽ đường phụ bằng cách khác :

Trên BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$, ta chỉ còn phải chứng minh $CD = CF$ (bạn đọc hãy chứng minh hai cặp tam giác bằng nhau)

Thí dụ 14 :

Cho hai điểm A, B trên cùng một nửa mặt phẳng bờ xy. Hãy xác định một điểm $O \in xy$ sao cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOy}$.

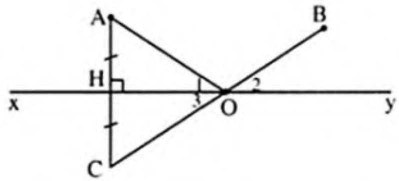
Giải : (hình 41)

– Vẽ $AH \perp xy$ ($H \in xy$) rồi kéo dài lấy một đoạn $HC = HA$

– Nối BC cắt xy tại O

– Nối OA ta được

$\widehat{AOx} = \widehat{BOy}$



Hình 41

Thật vậy, $\Delta AOH = \Delta COH$ (c. g. c)

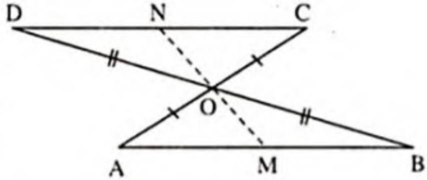
Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$; Có $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_3$ (đối đỉnh) nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

Nhận xét :

Cách vẽ đường phụ trong thí dụ này nhằm tạo ra góc thứ ba ($\widehat{O}_3$) làm góc trung gian để so sánh hai góc $\widehat{O}_1$ và $\widehat{O}_2$

BÀI TẬP

58. Trong *hình 42* có AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. M và N thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng O là trung điểm của MN.



Hình 42

59. Cho ΔABC, $\widehat{A}$ nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE. Trên tia đối của tia BD lấy điểm I, trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho BI = AC và CK = AB. Chứng minh rằng ΔAIK vuông cân.

60. Cho góc vuông xOy, điểm A trên tia Ox, điểm B trên tia Oy. Lấy điểm E trên tia đối của tia Ox, điểm F trên tia Oy sao cho OE = OB ; OF = OA.

a) Chứng minh rằng AB = EF và $AB \perp EF$.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và EF. Chứng minh rằng ΔOMN vuông cân.

61. Cho ΔABC. Qua A vẽ đường thẳng xy // BC. Từ điểm M trên cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AB, AC chúng cắt xy theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABC = \Delta MDE$.

b*) Ba đường thẳng AM, BD, CE cùng đi qua một điểm.

62. Tam giác ABC và tam giác A'B'C' có AB = A'B' ; AC = A'C'. Hai góc A và A' bù nhau. Vẽ trung tuyến AM rồi kéo dài một đoạn MD = MA. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABD} = \widehat{A'}$.

b) $AM = \frac{1}{2}B'C'$.

63. Cho tam giác ABC. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF.

a) Chứng minh BF = CE và $BF \perp CE$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}EF$.

§5. TAM GIÁC CÂN

Kiến thức cơ bản :

1. *Định nghĩa :* Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.
   – Hai cạnh bằng nhau là hai cạnh bên.
   – Cạnh còn lại gọi là cạnh đáy

   Đặc biệt : Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

2. *Tính chất :* Trong tam giác cân hai góc ở đáy bằng nhau.

   Đặc biệt : – Trong tam giác vuông cân, mỗi góc nhọn bằng 45^o.
   – Trong tam giác đều mỗi góc bằng 60^o.

3. *Dấu hiệu nhận biết :* Tam giác có hai góc bằng nhau là tam giác cân.

   Đặc biệt : – Tam giác có ba góc bằng nhau là tam giác đều.
   – Tam giác có hai góc bằng 60^o là tam giác đều.
   – Tam giác cân có một góc bằng 60^o là tam giác đều.

Bổ sung :

1. Trong một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30^o thì cạnh đối diện với góc ấy bằng nửa cạnh huyền.

2. Trong một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông ấy bằng 30^o.

3. Trong tam giác cân :

– Hai trung tuyến ứng với hai cạnh bên bằng nhau

– Hai phân giác ứng với hai cạnh bên bằng nhau

– Hai đường cao ứng với hai cạnh bên bằng nhau.

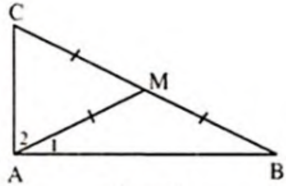
Dùng phương pháp tam giác bằng nhau bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng các tính chất trên.

Thí dụ 15 :

Chứng minh rằng nếu một tam giác có trung tuyến thuộc một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

Giải : (hình 43)

GT	ΔABC $MB = MC$ $AM = \frac{1}{2}BC$
KL	ΔABC vuông



Hình 43

Ta có MA = MB = MC (suy từ gt). Các tam giác MAB, MAC cân tại M.

Suy ra $\widehat{A_1} = \hat{B}$; $\widehat{A_2} = \hat{C}$ (hai góc ở đáy).

Vậy $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \hat{B} + \hat{C}$ hay $\widehat{A} = \hat{B} + \hat{C} = \frac{180^o}{2} = 90^o$. Vậy ΔABC vuông tại A.

Nhận xét : – Định lý trong thí dụ này là định lí đảo của định lí trong *thí dụ 11*

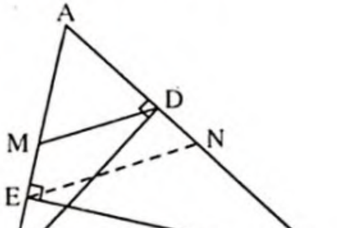
– Định lí này cho ta một dấu hiệu nhận biết tam giác vuông, từ đó chứng minh được hai đường thẳng vuông góc.

Thí dụ 16 : Cho tam giác nhọn ABC, $\widehat{A} = 60^o$, đường cao BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC

a) Xác định dạng của các tam giác BMD, AMD

b) Trên tia AB lấy điểm E sao cho AE = AN. Chứng minh $CE \perp AB$.

Giải : (Hình 44)



Hình 44

a) Xét tam giác vuông ABD có DM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên $MD = MA = MB$ $(= \frac{1}{2}AB)$.

Vậy ΔMBD, ΔMAD cân tại M ; thêm nữa $\widehat{A} = 60^o$ (gt) nên ΔMAD đều.

b) ΔAEN có AE = AN (gt) $\Rightarrow \Delta AEN$ cân ; lại có $\widehat{A} = 60^o$ (gt) $\Rightarrow \Delta AEN$ đều $\Rightarrow EN = NA = NC = \frac{1}{2}AC$. ΔEAC có trung tuyến $EN = \frac{1}{2}AC$ nên ΔEAC vuông tại E, tức là $CE \perp AB$.

Nhận xét : Dấu hiệu tam giác cân có một góc 60^o là tam giác đều là một dấu hiệu hay dùng để chứng minh tam giác đều. Góc 60^o đó có thể là góc ở đáy hoặc là góc ở đỉnh.

BÀI TẬP

64. Tính các góc còn lại của một tam giác cân biết tam giác cân này có một góc bằng :

a) 110^o ; b) a^o

65. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 36^o$. Vẽ phân giác BD. So sánh DA với DB

66. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ ra ngoài ΔABC tam giác cân BCM có đáy BC và góc ở đáy 15^o. Vẽ tam giác đều ABN (N thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C). Chứng minh rằng ba điểm B, M, N thẳng hàng.

67. Cho ΔABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho BM = BA ; CN = CA.Tính $\widehat{MAN}$.

68. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), phân giác AD. Từ D vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại M. Tính $\widehat{MBD}$

69. Tam giác ABC có đường cao AH và trung tuyến AM chia góc A thành ba góc bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông và ΔABM là tam giác đều.

70. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^o$; $\widehat{C} = 60^o$. Kéo dài BC một đoạn thẳng CD sao cho $CD = \frac{1}{2}$ BC. Tính $\widehat{ADB}$.

71*. Mặt phẳng được tô kín bởi hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm cùng màu cách nhau đúng một đơn vị.

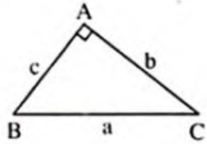
§6. ĐỊNH LÍ PY–TA–GO VÀ TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU ĐẶC BIỆT CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Kiến thức cơ bản :

1. Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.
2. Đảo lại, nếu một tam giác có bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông

Trong hình 45 :

$$\Delta ABC$$
$$\widehat{A} = 90^{o} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



Hình 45

3. Hệ quả : Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau (gọi tắt là trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Nâng cao :

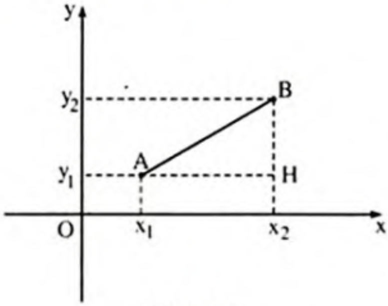
1. Tam giác vuông cân có cạnh bên bằng a thì cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

2. Khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng toạ độ (*Hình 46*)

$A(x_1 ; y_1)$; $B(x_2 ; y_2)$

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Hình 46

Thí dụ 17 : Tam giác ABC có AB = 24 ; AC = 32 ; BC = 40.

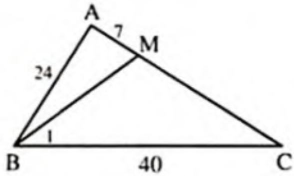
Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM = 7.

Chứng minh rằng :

a) Tam giác ABC vuông

b) $\widehat{AMB} = 2\widehat{C}$

Giải : (hình 47)



Hình 47

a) ΔABC có $AB^2 + AC^2 = 24^2 + 32^2 = 1600$;

$BC^2 = 1600$. Vậy $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Suy ra ΔABC vuông tại A (định lí Py–ta–go đảo)

b) Áp dụng định lí Py–ta–go vào tam giác vuông AMB ta có :

$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow BM = \sqrt{625} = 25$.

Mặt khác, MC = AC – AM = 32 – 7 = 25. Vậy MB = MC suy ra ΔMBC cân tại M do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{C}$.

$\widehat{AMB} = \widehat{B}_1 + \widehat{C}$ (tính chất góc ngoài của ΔMBC) hay $\widehat{AMB} = 2\widehat{C}$

Nhận xét : – Nhờ có định lí Py–ta–go mà ta có thể tính được một cạnh của tam giác vuông khi biết hai cạnh còn lại.

– Định lí Py–ta–go đảo cho ta thêm một cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

BÀI TẬP

• Định lí Py-ta-go

72. Tam giác ABC có góc A tù, $\widehat{C} = 30^o$; AB = 29, AC = 40. Vẽ đường cao AH, tính BH.

73. Tam giác ABC có AB = 25, AC = 26, đường cao AH = 24. Tính BC.

74. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH, trung tuyến AM. Biết AH = 40, AM = 41, tính tỉ số độ dài hai cạnh góc vuông AB và AC.

75. Độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông tỉ lệ với 8 và 15, cạnh huyền dài 51cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

76*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trên đó lấy điểm D. Trên tia đối của tia HA lấy một điểm E sao cho HE = AD. Đường thẳng vuông góc với AH tại D cắt AC tại F. Chứng minh rằng $EB \perp EF$.

77. Một cây tre cao 9m, bị gẫy ngang thân, ngọn cây chạm đất cách gốc 3m. Hỏi điểm gẫy cách gốc bao nhiêu ?

78*. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm A(5 ; 4) ; B (2 ;3) ; C (6 ;1). Tính các góc của ΔABC

• Trường hợp bằng nhau đặc biệt của tam giác vuông

79. Cho ΔABC, trung tuyến AM cũng là phân giác.

a) Chứng minh rằng ΔABC cân

b) Cho biết AB = 37, AM = 35, tính BC

80. Một tam giác có ba đường cao bằng nhau.

a) Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

b) Biết mỗi đường cao có độ dài là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, tính độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

81. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm M và N sao cho AM = BN. Gọi C là giao điểm của AN với BM. Chứng minh ΔABC cân.

Chuyên đề 5

MỘT CÁCH VẼ HÌNH PHỤ : "PHƯƠNG PHÁP TAM GIÁC ĐỀU"

Khi giải toán hình học, ta gặp một số bài toán mà nếu không vẽ thêm đường phụ thì có thể bế tắc. Nếu biết vẽ thêm đường phụ thích hợp tạo ra sự liên hệ giữa các yếu tố đã cho thì việc giải toán sẽ được thuận lợi. Thông thường vẽ đường phụ để tạo ra các tam giác bằng nhau. Ta đã dùng một số cách vẽ đường phụ như sau :

– Vẽ trung điểm của đoạn thẳng, vẽ tia phân giác của một góc.

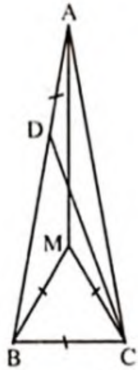
– Trên một tia cho trước, đặt một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.

– Từ một điểm vẽ một đường thẳng song song hay vuông góc với một đường thẳng cho trước.

– Có khi đơn giản chỉ là vẽ thêm đường thẳng đi qua hai điểm hoặc vẽ thêm giao điểm của hai đường thẳng.

Bây giờ, các bạn hãy làm quen với một cách vẽ đường phụ mới : "Phương pháp tam giác đều" Phương pháp này tạo thêm được vào trong hình vẽ các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau giúp cho việc giải toán được thuận lợi. Các bạn hãy bắt đầu bằng một bài toán điển hình dưới đây.

Thí dụ 18 : Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 20^o$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Chứng minh rằng $\widehat{DCA} = \frac{1}{2}\widehat{A}$.



Hình 48

Giải : (hình 48)

ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 20^o$ (gt)

suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^o - 20^o}{2} = 80^o$.

Vẽ tam giác đều BCM (M và A cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC), ta được AD = BC = CM.

$\Delta MAB = \Delta MAC$ (c. c. c)

Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MAC} = 20^o : 2 = 10^o$

$\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 80^o - 60^o = 20^o$

ΔCAD và Δ ACM có

AD = CM (chứng minh trên)

$\widehat{CAD} = \widehat{ACM}$ (= 20^o)

AC chung

Vậy $\Delta CAD = \Delta ACM$ (c. g. c) suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{MAC} = 10^o$, do đó $\widehat{DCA} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Nhận xét :

1. Đề bài cho tam giác cân ABC có góc ở đỉnh là 20^o, suy ra góc ở đáy là 80^o. Ta thấy $80^o - 20^o = 60^o$ là số đo mỗi góc của tam giác đều. Chính sự liên hệ này gợi ý cho ta vẽ tam giác đều BCM vào trong tam giác ABC. Với giả thiết AD = BC thì vẽ tam đều như vậy ta có mối quan hệ bằng nhau giữa AD với các cạnh của tam giác đều giúp cho việc chứng minh tam giác bằng nhau dễ dàng.

2. Ta cũng có thể giải thí dụ trên bằng cách vẽ tam giác đều kiểu khác :

– Vẽ tam giác đều ABM (M và C cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB)

– Vẽ tam giác đều ACM (M và B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AC)

– Vẽ tam giác đều ACM (M và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau qua bờ AC)

Ngoài ra còn những cách vẽ tam giác đều khác cũng giúp ta tính được góc DCA dẫn tới điều phải chứng minh. Bạn hãy thử xem.

Thí dụ 19 : Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 15^o$. Trên tia BA lấy điểm O sao cho BO = 2AC. Chứng minh rằng ΔOBC cân.

Giải (H.49)

ΔABC vuông tại A, $\widehat{C} = 15^o$ (gt)

suy ra $\widehat{B} = 75^o$

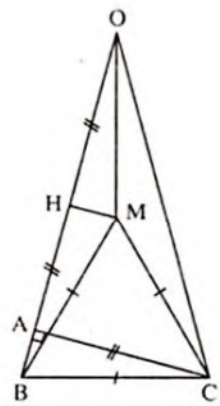
Vẽ tam giác đều BCM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC)

Ta được $\widehat{OBM} = 15^o$

Gọi H là trung điểm của OB thì $\Delta HMB = \Delta ABC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{H} = \widehat{A} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta MOB$ cân $\Rightarrow \widehat{BMO} = 150^o$



Hình 49

$\Rightarrow \widehat{CMO} = 360^o - (150^o + 60^o) = 150^o$

$\Delta MOB = \Delta MOC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OB = OC$. Vậy ΔOBC cân

Nhận xét : Ta thấy $75^o - 15^o = 60^o$ là số đo mỗi góc của tam giác đều. Điều này gợi ý cho ta vẽ tam giác đều BCM như trên. Nhờ có các cạnh của tam giác đều bằng nhau, các góc của tam giác đều là 60^o, ta chứng minh được $\Delta HMB = \Delta ABC$; $\Delta MOB = \Delta MOC$ dẫn tới ΔOBC cân, đó chính là tác dụng của "phương pháp tam giác đều".

BÀI TẬP

82. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 80^o$. Gọi O là một điểm ở trong tam giác sao cho $\widehat{OBC} = 30^o$; $\widehat{OCB} = 10^o$. Chứng minh rằng ΔCOA cân.

83. Cho ΔABC cân tại A, $A = 100^o$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $\widehat{CBO} = 30^o$. Tính $\widehat{CAO}$

84. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm O ở trong tam giác sao cho $\widehat{OBC} = 30^o$; $\widehat{OCB} = 15^o$. Chứng minh các tam giác AOC, AOB cân.

85. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 30^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tia $Bx \perp BA$. Trên tia Bx lấy điểm N sao cho BN = BA. Tính góc BCN.

86. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 100^o$. Trên tia AC lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính $\widehat{CBD}$.

87. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 108^o$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $\widehat{CBO} = 12^o$. Vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh rằng :

a) Ba điểm C,A, M thẳng hàng.

b) Tam giác AOB cân.

88*. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 80^o$. Trên cạnh BC lấy điểm I sao cho $\widehat{BAI} = 50^o$; trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $\widehat{ABK} = 30^o$. Hai đoạn thẳng AI và BK cắt nhau tại H. Chứng minh rằng ΔHIK cân.

§7.ÔN TẬP CHƯƠNG II

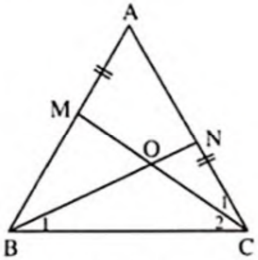
Thí dụ 20 :

Cho tam giác đều ABC. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho AM = CN. Gọi O là giao điểm của CM và BN. Chứng minh rằng :

a) CM = BN

b) Số đo của góc BOC không đổi khi M và N di động trên hai cạnh AB,AC thoả mãn điều kiện AM = CN.

Giải : (hình 50)



Hình 50

a) ΔACM và ΔCBN có :

AM = CN (gt)

$\widehat{A} = \widehat{C}$ $(= 60^o)$

AC = CB (gt)

Vậy $\Delta ACM = \Delta CBN$ (c. g.c)

Suy ra CM = BN và $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$

b) Ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 60^o$.

Xét ΔBOC có $\widehat{BOC} = 180^o - (\widehat{B}_1 + \widehat{C}_2) = 180^o - 60^o = 120^o$ (không đổi)

BÀI TẬP

89. Cho ΔABC, hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Cho biết AC = BH. Chứng minh rằng ΔABC có góc B hoặc bằng 45^o hoặc bằng 135^o.

90. Dùng thước và compa để chia góc vuông cho trước thành ba góc bằng nhau

91. Cho ΔABC vuông cân ở A. Qua A vẽ đường thẳng d thay đổi. Vẽ BD và CE cùng vuông góc với d ($D, E \in d$). Chứng minh rằng tổng $BD^2 + CE^2$ có giá trị không đổi.

92. Tam giác ABC có AB = 1 ; $\widehat{A} = 75^o$; $\widehat{B} = 60^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 15^o$. Từ A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB, cắt Bx tại D.

a) Chứng minh rằng $DC \perp BC$.

b) Tính tổng $BC^2 + CD^2$.

93. Tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AM. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\widehat{EMF} = 90^o$. Chứng minh rằng AE = CF.

94. Cho ΔABC cân tại A (AB > BC). Trên tia BC lấy điểm M sao cho MA = MB. Vẽ tia Bx //AM (Bx và AM cùng nằm trong nửa mặt phẳng bờ AB). Trên Bx lấy điểm N sao cho BN = CM. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$

b) ΔAMN cân.

95. Tam giác ABC có AB > AC.Từ trung điểm M của BC vẽ một đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc A, cắt tia phân giác tại H, cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng :

a) BE = CF ;

b) $AE = \dfrac{AB + AC}{2}$; $BE = \dfrac{AB - AC}{2}$

c) $\widehat{BME} = \dfrac{\widehat{ACB} - \hat{B}}{2}$

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

Kiến thức cơ bản :

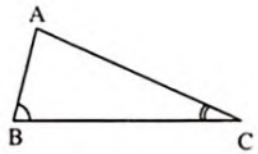
1. Trong một tam giác :

   – Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn ;

   – Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

   Trong *hình 51*

ΔABC
$AB < AC \Leftrightarrow \widehat{C} < \widehat{B}$



Hình 51

2. Hệ quả : Trong một tam giác :

   – Góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

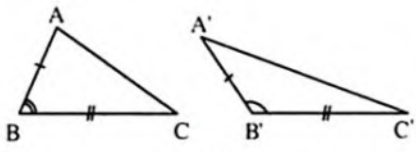
   – Cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

Bổ sung :

Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện chỉ đúng khi các góc (hoặc các cạnh) cùng thuộc một tam giác. Nếu hai góc (hoặc hai cạnh) mà ta cần so sánh thuộc hai tam giác khác nhau thì không vận dụng được các định lí đó.

Tuy nhiên, nếu hai tam giác có thêm điều kiện hai cặp cạnh bằng nhau từng đôi một thì quan hệ nói trên sẽ đúng. Ta có định lí sau (*hình 52*)

Δ ABC và Δ A'B'C' có :
$AB = A'B'$; $BC = B'C'$.
Khi đó $AC < A'C' \Leftrightarrow \widehat{B} < \widehat{B'}$



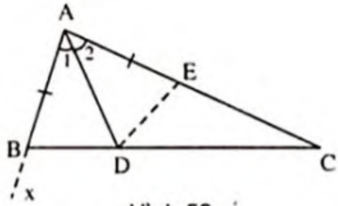
Hình 52

Thí dụ 21 : Cho ΔABC, $AB < AC$, phân giác AD. Chứng tỏ rằng :

a) Góc ADC là góc tù

b) $DC > DB$

Giải : (hình 53)



Hình 53

a) Tam giác ABC có $AB < AC$ (gt) nên $\widehat{C} < \widehat{B}$

Xét hai tam giác ABD và ACD có

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (gt)

$\widehat{B} > \widehat{C}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$, mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^o$ (kề bù)

Nên $\widehat{ADC} > \dfrac{180^0}{2} = 90^o$. Vậy $\widehat{ADC}$ là góc tù.

b) Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

$\Delta ADB = \Delta ADE$ (c.g.c) suy ra $DB = DE$ (1) và $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$ do đó $\widehat{CBx} = \widehat{CED}$ (cùng kề bù với hai góc bằng nhau).

$\widehat{CBx} > \widehat{C}$ (tính chất góc ngoài của tam giác ABC) suy ra $\widehat{CED} > \widehat{C}$, do đó $DC > DE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DC > DB$.

Nhận xét :

1. Ở câu b ta phải so sánh DC và DB, hai đoạn thẳng này không phải là hai cạnh của ***một tam giác*** nên không vận dụng được định lí về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác. Ta đã chuyển DB và DC về cùng một tam giác bằng cách vẽ đường phụ như trong bài giải. Lúc đó $DB = DE$, ta chỉ còn phải so sánh DC với DE ở cùng một tam giác CDE.

2. Trong cách giải của thí dụ này ta đã dùng hai cách để so sánh góc :

– Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác,

– Quan hệ giữa góc ngoài của tam giác với góc trong không kề.

BÀI TẬP

96. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} \geq 90^o$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N không trùng với các đỉnh của tam giác. Chứng minh rằng $BC > MN$.

97. Cho ΔABC, các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại O.

a) Trong ΔBOC, cạnh nào lớn nhất ?

b) Giả sử $OB < OC$ hãy so sánh AB với AC.

98. Cho ΔABC, trung tuyến AM. Biết $\widehat{BAM} > \widehat{CAM}$ hãy so sánh $\widehat{B}$ với $\widehat{C}$

99. Cho tam giác đều ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$.

Chứng minh rằng $\widehat{BAM} < 20^{o}$.

100*. Cho Δ ABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AM. Chứng minh rằng $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$.

101. Tam giác ABC có $AB < AC$. Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. So sánh MD với ME.

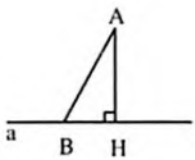
§2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, GIỮA ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

Kiến thức cơ bản :

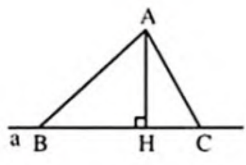
1. Nếu AH và AB lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng a thì $AH < AB$ (*hình 54a*)
2. Nếu AB, AC là hai đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng a ; HB và HC lần lượt là hai hình chiếu của AB và AC thì :

   $AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$ (*hình 54b*)

   $AB = AC \Leftrightarrow HB = HC$



Hình 54a



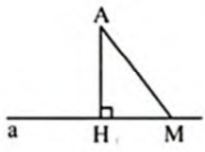
Hình 54b

Nâng cao :

Cho $A \notin a$, $M \in a$. Vẽ $AH \perp a$ (hình 55)

Ta luôn có $AM \geq AH$ (dấu = $\Leftrightarrow$ M trùng với H)

Suy ra AM ngắn nhất là bằng AH (khi và chỉ khi M trùng với H)



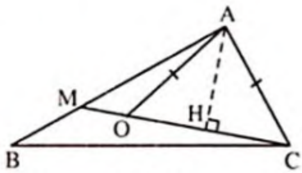
Hình 55

Thí dụ 22 :

Cho O là một điểm nằm trong ΔABC. Biết AO = AC, chứng minh rằng ΔABC không thể cân tại A

Giải : (hình 56)

Gọi M là giao điểm của tia CO với cạnh AB. Vì O nằm trong ΔABC nên điểm M nằm giữa A và B suy ra AM < AB (1).



Hình 56

Vẽ $AH \perp CM$ ($H \in CM$). Ta có AC = AO nên HC = HO (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu). Mặt khác HO < HM nên HC < HM suy ra AC < AM (2). Từ (1) và (2) suy ra AC < AB. Vậy ΔABC không thể cân tại A.

Nhận xét :

1. Việc vẽ thêm đường phụ $AH \perp CM$ làm xuất hiện trong hình vẽ đường vuông góc, các đường xiên và hình chiếu, giúp ta vận dụng được định lí về quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của chúng.

2. Trong cách giải của thí dụ trên, để chứng tỏ đoạn thẳng này nhỏ hơn đoạn thẳng khác ta đã dùng :

– Mối quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu.

– Mối quan hệ giữa một số hạng của tổng (là AM) với tổng của hai số hạng (là AB)

– Cũng có thể dùng quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong một tam giác (không cần vẽ $AH \perp CM$; bạn thử chứng minh xem)

BÀI TẬP

102. Cho $\widehat{xOy} = 45^o$. Trên tia Oy lấy hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài hình chiếu của đoạn thẳng AB trên Ox.

103. Cho Δ ABC, các góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d là tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng $d \leq BC$

b) Xác định vị trí của M trên BC sao cho d có giá trị lớn nhất.

104. Cho ΔABC cân tại A, trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho AM = AN. Chứng minh rằng :

a) Các hình chiếu của BM và CN trên BC bằng nhau.

b) $BN > \dfrac{BC + MN}{2}$

105. Cho ΔABC vuông tại B, phân giác AD. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AD tại E. Chứng minh rằng chu vi Δ ECD lớn hơn chu vi Δ ABD.

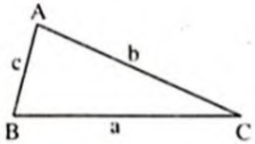
§3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Kiến thức cơ bản :

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong *hình 57* :

$$|b - c| < a < b + c$$



Hình 57

Nâng cao :

1. Muốn chứng tỏ ba đoạn thẳng a, b,c ($a \geq b \geq c$) là ba cạnh của một tam giác ta cần chứng minh $a < b + c$ là đủ

2. Với 3 điểm A, B, C bất kì, bao giờ ta cũng có :

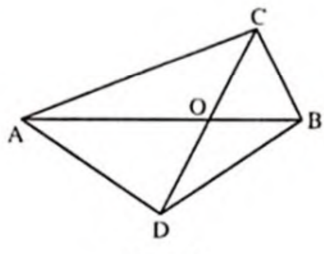
$AB \leq AC + CB$ (dấu = $\Leftrightarrow$ C nằm giữa A và B)

Thí dụ 23 : Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O ; AB = 6, CD = 4. Chứng minh rằng trong 4 đoạn thẳng AC, CB, BD, DA tồn tại hai đoạn thẳng nhỏ hơn 5.

Giải : (hình 58)

Xét ΔAOC có $AC < OA + OC$.

Xét ΔBOD có $BD < OB + OD$.



Hình 58

Vậy AC + BD < OA + OC + OB + OD

AC + BD < AB + CD = 6 + 4 = 10.

Suy ra một trong hai đoạn thẳng AC, BD nhỏ hơn 5.

Chứng minh tương tự ta được một trong hai đoạn thẳng AD, BC nhỏ hơn 5.

Như vậy trong 4 đoạn thẳng AC,CB, BD, DA tồn tại hai đoạn thẳng nhỏ hơn 5.

Nhận xét : Trong thí dụ trên, để chứng minh có một đoạn thẳng nhỏ hơn 5 (hoặc a), ta xét tổng của hai đoạn thẳng rồi chứng minh tổng đó nhỏ hơn 10 (hoặc 2a), khi đó tồn tại ít nhất một đoạn thẳng nhỏ hơn 5 (hoặc a)

Sử dụng bất đẳng thức tam giác là một trong những phương pháp thường dùng để chứng minh hai đoạn thẳng không bằng nhau.

BÀI TẬP

106. Chu vi một tam giác cân là 21cm. Biết một cạnh dài 4cm, cạnh đó là cạnh bên hay cạnh đáy ?

107. Chu vi một tam giác cân là 15cm, cạnh đáy bằng a. Biết độ dài mỗi cạnh là một số tự nhiên (cm). Tìm các giá trị của a.

108. Tam giác ABC có AB > AC, phân giác AD. Lấy điểm M thuộc AD (M không trùng với A). Chứng minh rằng AB – AC > MB – MC.

109. Cho tam giác đều ABC, O là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng 3 đoạn thẳng OA, OB, OC thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

110*. Cho ΔABC vuông cân tại A, cạnh bên bằng 5 và hai điểm M, N bất kì. Chứng minh rằng trên các cạnh của ΔABC tồn tại một điểm sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến M và N lớn hơn 7.

§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Kiến thức cơ bản :

Ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy tại một điểm (điểm này gọi là trọng tâm của tam giác).

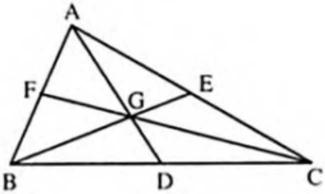
Trọng tâm cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Nâng cao :

1. Hai tam giác có chung một đỉnh và có chung một trung tuyến xuất phát từ đỉnh ấy thì có cùng một trọng tâm.

2. Trung tuyến của một tam giác chia tam giác thành hai tam giác có diện tích bằng nhau.

3. Ba trung tuyến của tam giác chia tam giác thành 6 tam giác nhỏ có diện tích bằng nhau.(*hình 59*)



Hình 59

Thí dụ 24 : Cho ΔABC, trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Cho biết BM = CN, chứng minh rằng AG $\perp$ BC

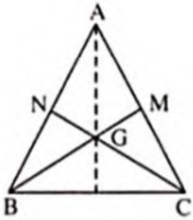
Giải : (hình 60)

G là trọng tâm của tam giác ABC nên BG $=\frac{2}{3}$BM ; CG = $\frac{2}{3}$CN mà BM = CN (gt) nên BG = CG và GM =GN.

ΔGBN = ΔGCM (c.g.c) suy ra BN = CM do đó AB = AC.

Vậy ΔABC cân tại A.

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên AG là đường trung tuyến, do đó AG $\perp$ BC (tính chất trung tuyến của tam giác cân)



Hình 60

Nhận xét : Từ tính chất ba trung tuyến cùng đi qua một điểm ta suy ra đường thẳng đi qua một đỉnh của tam giác và trọng tâm của nó cũng là đường trung tuyến. Ta đã vận dụng điều này để giải thí dụ trên.

Ta cũng có thể dùng tính chất của trọng tâm tam giác để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau hoặc đoạn thẳng này gấp đôi, gấp ba một đoạn thẳng khác.

BÀI TẬP

111. Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho HD = HA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = CB.

a) Chứng minh rằng C là trọng tâm của ΔADE

b) Tia AC cắt DE tại M. Chứng minh rằng AE // HM

112. Cho ΔABC. Trên cạnh AB lấy hai điểm D và E sao cho AD = BE. Trên cạnh AC lấy hai điểm F và H sao cho AF = CH. Chứng minh rằng các tam giác BFH và CDE có cùng một trọng tâm.

113. Tam giác ABC có AB < AC, hai trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) Ba điểm A, G, D thẳng hàng.

b) BE < CF

c) AD, BE, CF thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

114. Cho ΔABC, các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Chứng minh rằng :

a) $AD < \dfrac{AB + AC}{2}$; b) $BE + CF > \dfrac{3}{2}BC$.

c) $\dfrac{3}{4}$ chu vi $\Delta ABC < AD + BE + CF <$ chu vi ΔABC.

115. Cho ΔABC, O là một điểm nằm trong tam giác. Vẽ BH và CK vuông góc đường thẳng AO. Cho biết các tam giác AOB, BOC, COA có diện tích bằng nhau, chứng minh rằng :

a) BH = CK

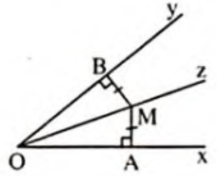
b) O là trọng tâm của ΔABC.

§5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

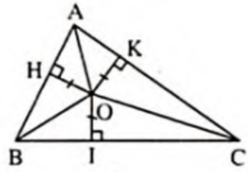
Kiến thức cơ bản :

1. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

   Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó (*hình 61*)



Hình 61

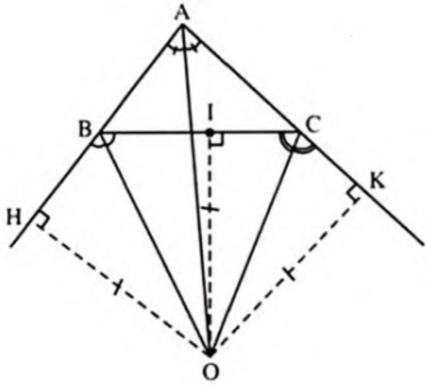


Hình 62

2. Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác (*hình 62*).

Bổ sung :

Trong một tam giác, các đường thẳng chứa tia phân giác của hai góc ngoài và tia phân giác của góc trong không kề cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác (*hình 63*)



Hình 63

Thí dụ 25 :

Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120^o$, các đường phân giác AD, BE, CF.

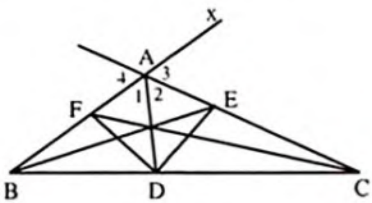
Tính chu vi ΔDEF biết DE = 21, DF = 20.

Giải : (hình 64)

Dễ thấy $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = 60^o$. Xét ΔABD có tia AC là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A ; tia BE là tia phân giác góc trong tại đỉnh B, hai tia phân giác này cắt nhau tại E, suy ra tia DE là tia phân giác ngoài tại đỉnh D.

Xét ΔADC, chứng minh tương tự ta được DF là tia phân giác ngoài tại đỉnh D.

Suy ra $DE \perp DF$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).



Hình 64

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông DEF ta được

$EF^2 = DE^2 + DF^2 = 21^2 + 20^2 = 841$; EF = 29.

Vậy chu vi $\Delta DEF = 21 + 20 + 29 = 70$

Nhận xét : Để chứng minh một tia là tia phân giác của một góc ta có thể :

– Dùng định nghĩa : Chứng minh tia này nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh đó hai góc bằng nhau.

– Dùng tính chất : Chứng minh một điểm trên tia này cách đều hai cạnh của góc.

– Dùng tính chất ba đường phân giác (hoặc hai tia phân giác ngoài và tia phân giác của góc trong không kề) của một tam giác cùng đi qua một điểm.

Phương pháp giải trong thí dụ trên chính là vận dụng cách thứ ba này.

BÀI TẬP

116. Cho góc vuông xOy. Lấy điểm A trên tia Ox, điểm B trên tia Oy. Vẽ tam giác vuông cân ABC sao cho AB là cạnh huyền, C và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Chứng minh rằng khi A và B di động trên hai tia Ox, Oy thì điểm C luôn luôn nằm trên một tia cố định.

117. Cho góc xOy. Lấy điểm A trên tia Ox, điểm B trên tia Oy. Vẽ các tia phân giác của các góc BAx và ABy cắt nhau tại M. Từ M vẽ một đường thẳng vuông góc với OM, cắt Ox, Oy lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng ΔOCD cân.

118. Cho ΔABC, $\widehat{B} = 120^o$, phân giác BD, CE. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài tại đỉnh A của ΔABC cắt đường thẳng BC tại F. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ADF} = \widehat{BDF}$;

b) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

119. Cho ΔABC, các tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại O. Từ A vẽ một đường thẳng vuông góc với OA, cắt các tia BO và CO lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng $BM \perp BN$ và $CM \perp CN$.

120. Cho ΔABC, $\widehat{B} = 45^o$, đường cao AH, phân giác BD. Cho biết $\widehat{BDA} = 45^o$, chứng minh rằng HD // AB.

121. Cho ΔABC vuông góc tại A, AB = 3 ; AC = 4. Phân giác góc B, góc C cắt nhau tại O. Vẽ $OE \perp AB$; $OF \perp AC$.

a) Chứng minh rằng AB + AC − BC = 2AE.

b) Tính khoảng cách từ O tới các cạnh của ΔABC.

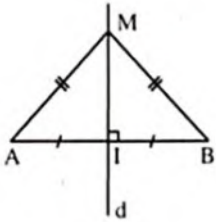
c) Tính OA, OB, OC.

§6. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Kiến thức cơ bản :

1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.
   Đảo lại, điểm cách đều hai mút của đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó *(hình 65)*

2. Ba đường trung trực của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác (*hình 66*).

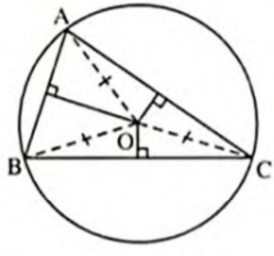


Hình 65

Bổ sung :

1. Có một đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác, gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm của đường tròn này là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác *(hình 66)*.

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền.



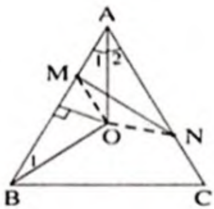
Hình 66

Thí dụ 26 : Cho Δ ABC cân tại A. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM + AN = AB.

a) Đường trung trực của AB cắt tia phân giác của góc A tại O. Chứng minh rằng ΔBOM = ΔAON.

b) Chứng minh rằng khi M và N di động trên hai cạnh AB và AC nhưng vẫn có AM + AN = AB thì đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải : (hình 67)



Hình 67

a) Ta có AM + AN = AB (gt) ; AM + MB = AB ; nên AN = MB.

Điểm O thuộc đường trung trực của AB nên OA = OB, suy ra

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$; mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$.

ΔBOM = ΔAON (c.g.c) suy ra OM = ON

b) Đường trung trực của AB và tia phân giác của góc A là cố định do đó giao điểm O của chúng cố định.

Ta có OM = ON (chứng minh trên) nên O nằm trên đường trung trực của MN. Suy ra đường trung trực của MN luôn luôn đi qua một điểm cố định là O.

Nhận xét : Câu a là câu gợi ý cho câu b. Nếu đề bài không cho câu a thì ta phải suy luận như thế nào để vẽ đường phụ làm xuất hiện điểm O cố định ?

Ta cho điểm M và N trùng với những điểm ở vị trí đặc biệt :

– Nếu điểm M trùng với B thì N sẽ trùng với A, đường trung trực của MN sẽ trùng với đường trung trực của AB.

– Nếu điểm M trùng với trung điểm của AB thì N trùng với trung điểm của AC, lúc đó đường trung trực của MN chính là đường phân giác của góc A và giao điểm của hai đường trên chính là điểm cố định cần tìm.

Cách làm như vậy gọi là phương pháp *đặc biệt hoá*.

BÀI TẬP

122. Cho góc xOy = a^o, A là một điểm di động ở trong góc đó. Vẽ các điểm M và N sao cho đường thẳng Ox là đường trung trực của AM, đường thẳng Oy là đường trung trực của AN.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định

b) Tính giá trị của a để O là trung điểm của MN.

123. Cho góc vuông xOy và A là một điểm cố định ở trong góc đó. Một góc vuông đỉnh A quay quanh A, có hai cạnh cắt Ox, Oy lần lượt tại B và C. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng M luôn di động trên một đường thẳng cố định.

124. Cho ΔABC không vuông. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O, cắt đường thẳng BC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng tia AO là tia phân giác của góc MAN.

125*. Cho ΔABC.Trên tia BA lấy một điểm M, trên tia CA lấy một điểm N sao cho BM + CN = BC.Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

126. Dựng ΔABC biết :

$\widehat{B} = 30^o$; AB = 5cm ; BC – AC = 2cm.

127. Dựng ΔABC biết $\widehat{B} = 60^o$; $\widehat{C} = 40^o$ và chu vi tam giác bằng 8cm.

§7.TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

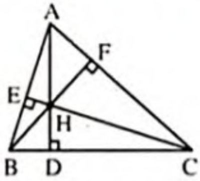
Kiến thức cơ bản :

Ba đường cao của một tam giác đồng quy tại một điểm.

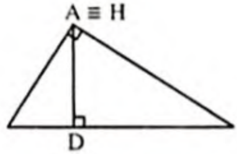
Điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

Nâng cao :

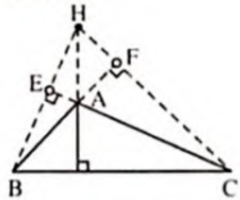
1. Trực tâm của tam giác nhọn nằm trong tam giác (*hình 68a*)
   Trực tâm của tam giác vuông nằm tại đỉnh góc vuông (*hình 68b*)
   Trực tâm của tam giác tù nằm ngoài tam giác (*hình 68c*)



Hình 68a



Hình 68b



Hình 68c

2. Nếu H là trực tâm của ΔABC thì mỗi một điểm trong 4 điểm H, A,B,C là trực tâm của tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm còn lại.

Thí dụ 27 :

Cho ΔABC vuông cân tại B. Trên cạnh AB lấy một điểm H sao cho $\widehat{ACH} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho BK = BH. Tính $\widehat{AKH}$.

Giải : (hình 69)

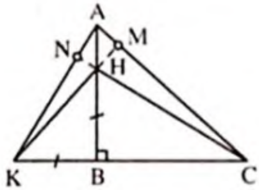
Gọi M là giao điểm của tia KH và AC ; gọi N là giao điểm của tia CH với AK.

ΔABC vuông cân tại B nên $\widehat{ACB} = 45^o$.

Δ HKB vuông cân tại B nên $\widehat{HKB} = 45^o$

Xét ΔKMC có $\widehat{KMC} = 180^o - (45^o + 45^o) = 90^o$.
Vậy $KM \perp AC$

Xét ΔAKC có AB và KM là 2 đường cao cắt nhau tại H, suy ra CH cũng là đường cao, $CH \perp AK$.



Hình 69

Ta có $\widehat{AKH} = \widehat{ACH}$ (2 góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{ACH} = \frac{1}{3}.45^o = 15^o$ nên $\widehat{AKH} = 15^o$.

Nhận xét : Từ tính chất 3 đường cao của tam giác gặp nhau tại một điểm (trực tâm) ta suy ra : Trong một tam giác, đường thẳng đi qua một đỉnh và trực tâm cũng là một đường cao. Đây là một cách mới để chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

BÀI TẬP

128. Cho Δ ABC cân tại A, trung tuyến AM, đường cao BE. Trên tia BA lấy điểm F sao cho BF = CE. Chứng minh rằng ba đường thẳng BE, CF và AM cùng đi qua một điểm.

129. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD, CE gặp nhau tại H. Vẽ điểm K sao cho AB là trung trực của HK. Chứng minh rằng $\widehat{KAB} = \widehat{KCB}$

130. Tam giác ABC có cạnh BC là cạnh lớn nhất. Trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho BD = BA và CE = CA. Tia phân giác của góc B cắt AE tại M ; tia phân giác của góc C cắt AD tại N. Chứng minh rằng tia phân giác của góc BAC vuông góc với MN.

§8. ÔN TẬP CHƯƠNG III VÀ ÔN TẬP CUỐI NĂM

Thí dụ 28 :

Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 30^o$; BC = 2. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \sqrt{2}$.

a) Tính góc ABD.

b) So sánh ba cạnh của ΔDBC.

Hình 70

Giải : (hình 70)

a) Trong ΔABC ta vẽ tam giác EBC vuông cân tại E ; $\widehat{EBC} = 45^o$.

Ta có $EB^2 + EC^2 = BC^2$

$2EB^2 = 4$; $EB^2 = 2$; $EB = \sqrt{2}$

Vậy $AD = EB = \sqrt{2}$.

$\Delta BAE = \Delta CAE$ (c.g.c) suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} = 15^o$

$\widehat{ABC} = (180^o - 30^o) : 2 = 75^o$; $\widehat{ABE} = 75^o - 45^o = 30^o$; Vậy $\widehat{ABE} = \widehat{BAD} = 30^o$.

$\Delta ABD = \Delta BAE$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{BAE} = 15^o$.

b) Δ DBC có $\widehat{DBC} = 75^o - 15^o = 60^o$; $\widehat{DCB} = 75^o$ và $\widehat{BDC} = 45^o$.

Suy ra $\widehat{BDC} < \widehat{DBC} < \widehat{DCB}$ ($45^o < 60^o < 75^o$). Do đó BC < CD < BD

(quan hệ giữa cạnh và góc đối diện)

Nhận xét :

Ở §8, chương II ta đã nghiên cứu một phương pháp vẽ hình phụ là "*phương pháp tam giác đều*". Trong thí dụ trên ta lại vẽ hình phụ bằng cách vẽ tam giác vuông cân EBC. Điều gì gợi ý cho ta vẽ như vậy ? Đó là vì trong đề bài cho BC = 2 ; AD = $\sqrt{2}$, theo định lí Pitago thì các độ dài $\sqrt{2}$ và 2 chính là độ dài của cạnh góc vuông và cạnh huyền của một tam giác vuông cân. Với cách vẽ như vậy ta dễ dàng chứng minh được các tam giác bằng nhau, từ đó ta tính được số đo của góc ABD.

BÀI TẬP

131. Cho tam giác đều ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy một điểm D. Tia DM cắt AC tại E. Chứng minh rằng MD < ME.

132. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 108^o$. Gọi O là giao điểm của các đường trung trực, I là giao điểm của các tia phân giác. Chứng minh rằng BC là đường trung trực của OI.

133. Cho Δ ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$, hai đường cao BD và CE. Chứng minh rằng AC − AB > CE − BD

134. Cho ΔABC cân tại A. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho AE + AF = AB. Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng M luôn nằm trên một đường thẳng cố định

135*. Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lần lượt lấy các điểm A và B sao cho OA + OB = 2a. Xác định vị trí của A và B để cho AB có độ dài nhỏ nhất.

136*. Cho đoạn thẳng MN = 4cm, điểm O nằm giữa M và N. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ MN vẽ các tam giác cân đỉnh O là OMA và OMB sao cho góc ở đỉnh O bằng 45^o. Tìm vị trí của O để AB có độ dài nhỏ nhất. Tính độ dài nhỏ nhất đó.

137. Một bông sen cách mặt hồ 2dm, sau khi bị gió thổi nghiêng đi, bông sen chạm mặt nước cách thân cây ở vị trí cũ là 8dm. Tính độ sâu của hồ nơi có bông sen đó.

(Theo một bài toán cổ Ấn Độ)

138. Cho ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^o$, phân giác AD. Trên AD lấy điểm O. Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng :

a) AM = AN.

b) ΔMON là tam giác đều.

139. Cho ΔABC cân tại A, cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên. Đường trung trực của AC cắt đường thẳng BC tại M. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho AN = BM.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$

b) Chứng minh rằng CM = CN

c) Muốn cho $CM \perp CN$ thì tam giác cân ABC cho trước phải có thêm điều kiện gì ?

LỜI GIẢI
CHỈ DẪN
ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I : SỐ HỮU TỈ – SỐ THỰC

1. x còn được biểu diễn bởi phân số $\frac{15}{-21}$; $\frac{-35}{49}$; y còn được biểu diễn bởi phân số $\frac{4}{-6}$; $\frac{-10}{15}$

2. Chỉ dẫn : Ngoài cách quy đồng mẫu, có thể áp dụng thí dụ 1.

a) $\frac{6}{11} < \frac{19}{33} < \frac{13}{22}$; b) $\frac{-8}{5} < \frac{-18}{12} < \frac{-10}{7}$

3. a) $-5 < \frac{1}{63}$ (Số hữu tỉ âm < số hữu tỉ dương)

b) $\frac{-18}{17} < \frac{-17}{17} = -1$; $\frac{-999}{1000} > \frac{-1000}{1000} = -1$; Vậy $\frac{-18}{17} < \frac{-999}{1000}$

c) $\frac{-17}{35} > \frac{-17}{34} = \frac{-1}{2}$; $\frac{-43}{85} < \frac{-43}{86} = \frac{-1}{2}$; Vậy $\frac{-17}{35} > \frac{-43}{85}$

d) $-0{,}76 < -0{,}75 = \frac{-3}{4} = \frac{-21}{28} < \frac{-19}{28}$; Vậy $-0{,}76 < \frac{-19}{28}$

4. Gọi phân số phải tìm là $\frac{x}{10}$. Ta có $\frac{-7}{13} < \frac{x}{10} < \frac{-4}{13}$.

Quy đồng mẫu ta được $\frac{-70}{130} < \frac{13x}{130} < \frac{-40}{130}$

Suy ra $-70 < 13x < -40$; $x \in \{-4 ; -5\}$.

Vậy $\frac{-7}{13} < \frac{-4}{10} < \frac{-4}{13}$; $\frac{-7}{13} < \frac{-5}{10} < \frac{-4}{13}$

5. a) Có thể viết $\frac{-11}{11} = -1$; $\frac{-111}{1} = -111$; b) $\frac{-1}{111}$; c) -11^{11}

6. Nếu x < y thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ hay $\frac{a}{b} < \frac{2m}{2n} < \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$, do đó $x < z < y$.

Tương tự, nếu x > y thì x > z > y.

7. a) $ad - bc = 1 \Rightarrow ad > bc \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (1) ;

$cn - dm = 1 \Rightarrow cn > dm \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{m}{n}$ (2) (vì b, d, n > 0)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{m}{n}$. Vậy $x > y > z$

b) $ad - bc = cn - dm = 1 \Rightarrow ad + dm = bc + cn$; $d(a + m) = c(b + n)$

Vậy $\frac{c}{d} = \frac{a+m}{b+n}$ suy ra $y = t$.

8. $a < b \Rightarrow 2a < a + b$; $c < d \Rightarrow 2c < c + d$; $m < n \Rightarrow 2m < m + n$

Suy ra $2(a + c + m) < (a + b + c + d + m + n)$ do đó

$$\frac{a+c+m}{a+b+c+d+m+n} < \frac{1}{2}$$

9. a) $\frac{11}{125} + \left(\frac{17}{14} - \frac{5}{7}\right) - \left(\frac{17}{18} - \frac{4}{9}\right) = \frac{11}{125} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{125}$

b) $(-1 + 1) + (-2 + 2) + (-3 + 3) + 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$= 4 - 1 - 1 - 1 = 1$.

10. a) $x = \frac{-5}{12}$; b) $x = \frac{4}{3}$ hoặc $x = \frac{-28}{15}$

11. a) Xét vế trái có $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + x\right| \geq 0$;

Xét vế phải có $-\frac{1}{4} - |y| < 0$.

Vậy không tồn tại x, y

b) $x = y = -\frac{9}{25}$

12. a) $\frac{4}{3} < x < 2$ b) $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -11 \end{array}\right.$ c) Đáp số $\left[\begin{array}{l} \frac{9}{5} < x < 2 \\ \frac{4}{5} < x < 1 \end{array}\right.$

13. a) GTNN của M = 0 (khi và chỉ khi $x = -\frac{15}{19}$)

b) GTNN của $N = -\frac{1}{2}$ (khi và chỉ khi $x = \frac{4}{7}$)

14. a) GTLN của P = 0 (khi và chỉ khi $x = \frac{5}{3}$)

b) GTLN của Q = 9 (khi và chỉ khi $x = \frac{1}{10}$)

15. Trong các số đã cho ít nhất cũng có một số âm (vì nếu không có số âm nào thì tổng của 3 số bất kì không thể là số âm). Ta tách riêng số âm đó ra, còn lại 30 số. Chia 30 số này thành 10 nhóm, mỗi nhóm 3 số. Vì tổng của 3 số bất kì là một số âm nên tổng các số trong mỗi nhóm là một số âm. Vậy tổng của 10 nhóm tức là tổng của 30 số là một số âm, cộng thêm với số âm đã tách riêng ra từ đầu sẽ được một số âm. Do đó tổng của 31 số đã cho là một số âm.

16. $P_1 > 0$; $P_2 < 0$; $P_3 = 0$ (vì có một thừa số bằng 0) nên $P_2 < P_3 < P_1$

17. a) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = -4$;

b) $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{4}{15}\right).x + 1 = 0 \Rightarrow 0x = -1 \Rightarrow$ Không tồn tại x

18. a) $\left(-\frac{40}{51}.\frac{17}{20}\right).\left(\frac{8}{25}.\frac{75}{64}\right) = -\frac{1}{4}$; b) $\frac{10}{11}.\left(\frac{-8}{9} + \frac{7}{18}\right) = \frac{10}{11}.\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{11}$

c) $\left(\frac{3}{14} - \frac{13}{21} + \frac{29}{42}\right) : \frac{1}{28} - 8 = 0$; d) $-15 . \left(\frac{12}{7} + \frac{2}{7}\right) - 70 + 84 - 15 = -31$

19. a) $A = 5x + \frac{1}{9}y = 5.\left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{9}.\frac{24}{5} = \frac{1}{30}$ b) $B = -\frac{1}{3} - \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -1$

20. a) $x = \pm\frac{1}{10}$; b) $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$; c) $x = \frac{13}{15}$

21. a) $x^2 + 2xy + y^2$; b) $x^2 - 2xy + y^2$; c) $x^2 - y^2$; d) $x^2 + 4x - 5$

Các câu a, b, c là những hằng đẳng thức quan trọng. Ta nên nhớ để vận dụng tính toán được nhanh chóng.

22. a) $x(y + 1) + 8(y + 1) = (y + 1)(x + 8)$;

b) $x(x-1)-\frac{2}{3}(x-1)=(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

c) $x^2-1=x^2-x+x-1=x(x-1)+(x-1)=(x-1)(x+1)$

23. a) $A=x(x+4)$

Do $x<x+4$ nên có hai trường hợp :

$$A>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \text{ và } x+4 \text{ cùng dương} \\ x \text{ và } x+4 \text{ cùng âm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x+4<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-4 \end{array}\right.$$

b) $$B>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ \ -3 \text{ và } x+7 \text{ cùng dương} \\ x\ \ -3 \text{ và } x+7 \text{ cùng âm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3>0 \\ x+7<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-7 \end{array}\right.$$

c) $$C>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}-x \text{ và } \frac{1}{3}-x \text{ cùng dương} \\ \frac{1}{2}-x \text{ và } \frac{1}{3}-x \text{ cùng âm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}-x>0 \\ \frac{1}{2}-x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{3} \\ x>\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

24. a) $D=x\left(x-\frac{2}{5}\right)$. Do $x>x-\frac{2}{5}$ nên chỉ có thể :

$$D<0 \Leftrightarrow x \text{ và } x-\frac{2}{5} \text{ khác dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x-\frac{2}{5}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{5}$$

b) $E<0 \Leftrightarrow x-2$ và $x-6$ khác dấu (chú ý rằng $x-2>x-6$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<6$$

c) $F<0 \Leftrightarrow x^2-1$ và x^2 khác dấu (chú ý rằng $x^2>x^2-1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<1 \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1 \text{ và } x\neq 0$$

25. a) Không tồn tại x.

b) Vì giá trị tuyệt đối của một số là một số không âm nên $x \geq 0$.

Ta có $x\left(x^2-\frac{5}{4}\right)=\pm x$ (1)

* $x=0$ là một giá trị thoả mãn (1)

* Nếu $x \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{4} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{3}{2} \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vì có điều kiện $x \geq 0$ nên ta có đáp số $x \in \left\{0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right\}$

26. Ta dùng phương pháp phản chứng :

Giả sử tồn tại hai số hữu tỉ x và y thoả mãn đẳng thức $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Suy ra $\frac{1}{x+y} = \frac{y+x}{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy$

Đẳng thức này không xảy ra vì $(x+y)^2 > 0$ còn $xy < 0$ (do x, y là hai số trái dấu, không đối nhau).

Vậy không tồn tại hai số hữu tỉ x và y trái dấu, không đối nhau thoả mãn đề bài.

27. Từ $x - y = xy \Rightarrow x = xy + y = y(x+1) \Rightarrow x : y = x + 1$ (do $y \neq 0$)

Theo đề bài thì $x : y = x - y$; suy ra $x + 1 = x - y \Rightarrow y = -1$

Thay $y = -1$ vào $x - y = xy$ được $x - (-1) = x(-1) \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy $x = -\frac{1}{2}$; $y = -1$

28. a) Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều không âm thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm). Ta tách riêng số âm đó ra. Chia 99 số còn lại thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số. Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm tức là của 99 số là một số âm. Nhân số âm này với số âm đã tách riêng ra từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương.

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{100}$. Các số này đều khác 0 (vì nếu có một thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái đề bài). Xét tích $a_{98}.\ a_{99}.\ a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0$; $a_{100} > 0$, tích của chúng không thể là một số âm). Vậy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}$ là các số âm. Ta sẽ chứng minh hai số cuối a_{99} và a_{100} cũng là số âm. Thực vậy, xét tích $a_1.a_2.a_{99} < 0$ mà $a_1a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$.

Xét tích $a_1.\ a_2.\ a_{100} < 0$ mà $a_1\ .\ a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$.

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

29. a) $[-3] = -3$; $\{-3\} = 0$; b) $[6,1] = 6$; $\{6,1\} = 0,1$

c) $\left[-\dfrac{6}{5}\right] = -2$; $\left\{-\dfrac{6}{5}\right\} = \dfrac{4}{5}$; d) $\left[\dfrac{1}{8}\right] = 0$; $\left\{\dfrac{1}{8}\right\} = \dfrac{1}{8}$

30. a) $13 < x < 13,4 \Rightarrow 13 < x < 14 \Rightarrow [x] = 13$

b) $-9,2 < x < -9 \Rightarrow -10 < x < -9 \Rightarrow [x] = -10$

31. a) $\left[\dfrac{25}{8}\right] = 3$; $\left[\dfrac{24}{6}\right] = 4$; $\left[\dfrac{23}{7}\right] = 3$. Vậy $[x] = [z] < [y]$

b) $\left[-3\dfrac{1}{9}\right] = -4$; $\left[-3\dfrac{8}{9}\right] = -4$; $[-4] = -4$. Vậy $[x] = [y] = [z]$

32. $x \in Z \Rightarrow \{x\} = 0$; $y \in Q \Rightarrow 0 \le \{y\} < 1$. Vậy $\{x\} \le \{y\}$

33. a) $x < 8,7 < 9$; mặt khác $x > 8$ nên $8 < x < 9 \Rightarrow [x] = 8$

b) $x > -5\dfrac{1}{3} > -6$; mặt khác $x < -5$ nên $-6 < x < -5 \Rightarrow [x] = -6$

34. a) 12 ; b) 12 ; c) -14

35. a) – Nếu $n = 2k$ ($k \in Z$) thì :

$$A = \left[\frac{2k}{2}\right] + \left[\frac{2k+1}{2}\right] = [k] + \left[k + \frac{1}{2}\right] = k + k = 2k \,\vdots\, 2$$

– Nếu $n = 2k + 1$ ($k \in Z$) thì :

$$A = \left[\frac{2k+1}{2}\right] + \left[\frac{2k+2}{2}\right] = \left[k + \frac{1}{2}\right] + [k+1] = k + k + 1 = 2k + 1 \not\vdots\, 2$$

Vậy $A \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow n \,\vdots\, 2$

b) – Nếu $n = 3k$ ($k \in Z$) thì

$$B = \left[\frac{3k}{3}\right] + \left[\frac{3k+1}{3}\right] + \left[\frac{3k+2}{3}\right] = [k] + \left[k + \frac{1}{3}\right] + \left[k + \frac{2}{3}\right]$$

$$B = k + k + k = 3k \,\vdots\, 3$$

– Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in Z$) thì

$$B = \left[\frac{3k+1}{3}\right] + \left[\frac{3k+2}{3}\right] + \left[\frac{3k+3}{3}\right] = \left[k + \frac{1}{3}\right] + \left[k + \frac{2}{3}\right] + [k+1]$$

$$= k + k + k + 1 = 3k + 1 \not\vdots\, 3$$

– Nếu $n = 3k + 2$, giải tương tự như trên ta được $B = 3k + 2 \not\vdots\, 3$

Vậy $B \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow n \,\vdots\, 3$

36. a) $[2x] = -1 \Leftrightarrow -1 \le 2x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < 0$

b) $[x + 0,4] = 3 \Leftrightarrow 3 \le x + 0,4 < 4 \Leftrightarrow 2,6 \le x < 3,6$

c) $\left[\frac{2}{3}x - 5\right] = 3 \Leftrightarrow 3 \le \frac{2}{3}x - 5 < 4 \Leftrightarrow 8 \le \frac{2}{3}x < 9 \Leftrightarrow 12 \le x < 13\frac{1}{2}$

37. a) Vì $x, y \in Z$ nên $x + y \in Z$

Suy ra $[x + y] = x + y$ (1) ; $[x] = x$; $[y] = y$

$[x] + [y] = x + y$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[x + y] = [x] + [y]$

b) Ta có $y = [y] + \{y\}$ trong đó $[y] \in Z$; $0 \le \{y\} < 1$

Suy ra $[x + y] = [x + [y] + \{y\}]$ (1)

Ta có $x \in Z$; $[y] \in Z$; $x + [y] \in Z$ nên từ (1) suy ra $[x + y] = [x + [y]] = x + [y]$

38. a) $[3x - 4] = x \Rightarrow x \in Z$.

$[3x - 4] = x \Leftrightarrow x \le 3x - 4 < x + 1$

Xét $3x - 4 \ge x \Leftrightarrow 2x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2$ (1)

Xét $3x - 4 < x + 1 \Leftrightarrow 2x < 5 \Leftrightarrow x < 2,5$ (2)

Vì $x \in Z$ nên từ (1) và (2) suy ra $x = 2$

b) $[x + 8] = -3x$ (1)

Ta đặt $-3x = t \in Z$ suy ra $x = -\frac{t}{3}$

Thay $x = -\frac{t}{3}$ vào (1) ta được $\left[-\frac{t}{3} + 8\right] = t \Leftrightarrow t \le \frac{-t + 24}{3} < t + 1$

$\Leftrightarrow 3t \le -t + 24 < 3t + 3 \Leftrightarrow 5\frac{1}{4} < t \le 6 \Leftrightarrow t = 6$ suy ra $x = -\frac{6}{3}$; $x = -2$

c) $[5x - 3] = 2x + 1$ (1)

Ta đặt $2x + 1 = t \in Z$ suy ra $x = \frac{t - 1}{2}$

Thay $x = \frac{t - 1}{2}$ vào (1) ta được $\left[\frac{5(t - 1)}{2} - 3\right] = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{5t - 11}{2}\right] = t \Leftrightarrow t \le \frac{5t - 11}{2} < t + 1$

$\Leftrightarrow 2t \le 5t - 11 < 2t + 2 \Leftrightarrow 3\frac{2}{3} \le t < 4\frac{1}{3} \Leftrightarrow t = 4$ suy ra $x = \frac{4-1}{2} = 1,5$

39. *Cách 1 :* Tính số thừa số 3 có trong tích 1. 2. 3… 600 rồi trừ đi số thừa số 3 có trong tích 1 . 2. 3 … 200 (khi phân tích ra thừa số nguyên tố).

Số thừa số 3 có trong tích 1. 2. 3 … 600 là

$$\left[\frac{600}{3}\right]+\left[\frac{600}{3^2}\right]+\left[\frac{600}{3^3}\right]+\left[\frac{600}{3^4}\right]+\left[\frac{600}{3^5}\right]=200+66+22+7+2=297$$

Số thừa số 3 có trong tích1.2.3…200 là

$$\left[\frac{200}{3}\right]+\left[\frac{200}{3^2}\right]+\left[\frac{200}{3^3}\right]+\left[\frac{200}{3^4}\right]=66+22+7+2=97$$

Vậy số thừa số 3 có trong tích 201.202.203…600 là 297 – 97 = 200

Cách 2 : C = 201.202.203… 600

$$= \frac{1.2.3...600}{1.2.3...200} = (1.4.7...598).(2.5.8...599).\frac{3.6.9...600}{1.2.3...200}$$

$$= (1.4.7...598).(2.5.8...599).\frac{3^{200}.(1.2.3...200)}{1.2.3...200} =$$

$$= (1.4.7...599).(2.5.8...599).3^{200}$$

Các thừa số trong dấu ngoặc thứ nhất chia cho 3 dư 1

Các thừa số trong dấu ngoặc thứ hai chia cho 3 dư 2 do đó C chứa đúng 200 thừa số 3

40. Tích 2.5 = 10 có tận cùng bằng 1 chữ số 0. Muốn biết số 300 ! = 1.2.3…300 tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 thì cần xem khi phân tích 300 ! ra thừa số nguyên tố có bao nhiêu thừa số 2, bao nhiêu thừa số 5. Dễ thấy số thừa số 5 ít hơn số thừa số 2 nên chỉ cần tính số thừa số 5 là đủ.

Ta có $\left[\frac{300}{5}\right]+\left[\frac{300}{5^2}\right]+\left[\frac{300}{5^3}\right]=60+12+2=74$

Vậy 300 ! có tận cùng bằng 74 chữ số 0.

41. Có 44 – 6 = 38 bài kiểm tra mà chỉ có 4 loại điểm (điểm 6, 7, 8, 9). Vậy theo nguyên lí Điriclê ít nhất cũng có $\left[\frac{38}{4}\right]+1=10$ học sinh cùng điểm.

42. Có 11 – 1= 10 học sinh mà chỉ có 3 loại số lần phát biểu khác nhau (phát biểu 1, 2, 3 lần). Vậy theo nguyên lí Điriclê ít nhất cũng có $\left[\frac{10}{3}\right]+1=4$ học sinh có số lần phát biểu như nhau.

43. a) 50 quyển vở chia cho 11 học sinh, theo nguyên lí Điriclê ít nhất cũng có 1 học sinh nhận được $\left[\frac{50}{11}\right] + 1 = 5$ quyển vở trở lên.

b) Nếu chia 50 quyển vở cho 11 học sinh mà mỗi người có số vở khác nhau thì 11 học sinh sẽ có 11 số vở khác nhau, lần lượt từ nhỏ đến lớn là :

$0, 1, 2, 3, \ldots, 10$. Tổng của 11 số này là

$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55 > 50$

Vậy ít nhất cũng có hai học sinh có số vở như nhau.

44. a) $64 = (\pm 8)^2 = (\pm 2)^6 = 4^3$; $81 = (\pm 9)^2 = (\pm 3)^4$; $-216 = (-6)^3$

b) $-\frac{1}{27} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$; $\frac{8}{729} = \left(\frac{2}{9}\right)^3$; $\frac{16}{625} = \left(\pm\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\pm\frac{4}{25}\right)^2$

45. a) 10^{-9}(m) ; b) 10^{-15}(m) ; c) 10^{-24}(gam)

46. a) 3^7 ; b) 5^{-2} ; c) 2^5

47. $A = \frac{441}{121}$; $B = \frac{445}{121}$ Suy ra $A < B$

48. a) ĐS : $\frac{3}{25}$; b) $\frac{1}{2}$

49. $x = 5$; $y = \pm\frac{41}{12}$

50. a) $5^x . 5^6 = 5^4$; $5^{x+6} = 5^4 \Rightarrow x + 6 = 4$; $x = -2$

b) $\left(\frac{12}{25}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{9}{25} - \frac{81}{625} = \frac{144}{625} = \left(\frac{12}{25}\right)^2$ suy ra $x = 2$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3x-1} = \left(-\frac{4}{3}\right)^4 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}$ suy ra $3x - 1 = -4$; $x = -1$

d) $x^2 = \frac{1}{4}$; $x = \pm\frac{1}{2}$

51. a) $2^3 < 2^x \leq 2^4 \Rightarrow 3 < x \leq 4 \Rightarrow x = 4$

b) $3^3 < 3^{12} : 3^x < 3^5$; $3^3 < 3^{12-x} < 3^5 \Rightarrow 3 < 12 - x < 5 \Rightarrow 7 < x < 9 \Rightarrow x = 8$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^3 . \left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^5$

Vì cơ số nhỏ hơn 1 nên $x < 5$, suy ra $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

52. a) $(5x+1)^2 = \left(\pm\frac{6}{7}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+1 = \frac{6}{7} \\ 5x+1 = -\frac{6}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{35} \\ x = -\frac{13}{35} \end{array}\right.$

b) $\left(x - \frac{2}{9}\right)^3 = \left(\frac{4}{9}\right)^3 \Leftrightarrow x - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

c) Với $n \in N$ thì $2n + 1$ là một số lẻ, do đó $(8x-1)^{2n+1} = 5^{2n+1}$

$\Leftrightarrow 8x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

53. a) $x^2 \geq 0$; $\left(y - \frac{1}{10}\right)^4 \geq 0$ nên $x^2 + \left(y - \frac{1}{10}\right)^4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \left(y - \frac{1}{10}\right)^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{10} \end{cases}$

b) $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^{20} + \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^{10} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 5 = 0 \\ y^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

54. $(x-7)^{x+1}.[1-(x-7)^{10}] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 7 = 0 \\ (x-7)^{10} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x - 7 = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{6; 7; 8\}$

55. a) GTNN của A là -1 khi $x = -\frac{1}{6}$

b) GTLN của B là 3 khi $x = \frac{3}{10}$

56. Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho ta được

$x(x-y) - y(x-y) = \frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{50}\right)$; $(x-y)(x-y) = \frac{9}{25}$; $(x-y)^2 = \left(\pm\frac{3}{5}\right)^2$

suy ra $x - y = \pm\frac{3}{5}$.

Thay $x - y = \frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta tính được $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{10}$

Thay $x - y = -\frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta tính được $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{10}$

57. Đặt $x = 1 + m$; $y = 1 - m$ thì $x + y = 2$.

Ta có $xy = (1 + m)(1 - m) = 1 - m^2 \le 1$ (vì $m^2 \ge 0$) (dấu $= \Leftrightarrow m = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$)

58. a) $x = 23$; b) $x = \pm 8$; c) $x = 6$; $x = -14$; d) $x = -\frac{1}{2}$

59. $\frac{a+5}{a-5} = \frac{b+6}{b-6} \Leftrightarrow (a+5)(b-6) = (a-5)(b+6) \Leftrightarrow 6a = 5b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{6}$

60. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

61. $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k$; $y = 4k$; $z = 3k$. Vậy $P = \frac{5k + 8k - 9k}{5k - 8k + 9k} = \frac{4k}{6k} = \frac{2}{3}$

62. Ta có $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \Rightarrow A = ka$; $B = kb$; $C = kc$

Vậy $Q = \frac{kax + kby + kc}{ax + by + c} = \frac{k(ax + by + c)}{ax + by + c} = k$.

Giá trị này của Q không phụ thuộc vào x và y

63. a) $\frac{x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{4z}{36} = \frac{x - 3y + 4z}{4 - 9 + 36} = \frac{62}{31} = 2$ suy ra $x = 8$; $y = 6$; $z = 18$

b) $\frac{x}{y} = \frac{9}{7} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$ (1) ; $\frac{y}{z} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{9} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} = \frac{x - y + z}{9 - 7 + 3} = \frac{-15}{5} = -3$.

Do đó $x = -27$; $y = -21$; $z = -9$

c) $\frac{x}{y} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{20}$ (1) ; $\frac{y}{z} = \frac{5}{8} = \frac{20}{32} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{32}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32}$

Do đó $\frac{2x}{14} = \frac{5y}{100} = \frac{2z}{64} = \frac{2x + 5y - 2z}{14 + 100 - 64} = \frac{100}{50} = 2$. Vậy $x = 14$; $y = 40$; $z = 64$.

64. a) $5x = 8y = 20z \Rightarrow \dfrac{5x}{40} = \dfrac{8y}{40} = \dfrac{20z}{40} \Rightarrow \dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{2} = \dfrac{x-y-z}{8-5-2} = \dfrac{3}{1} = 3$

suy ra $x = 24$; $y = 15$; $z = 6$.

b) $\dfrac{6}{11}x = \dfrac{9}{2}y = \dfrac{18}{5}z \Rightarrow \dfrac{6x}{11.18} = \dfrac{9y}{2.18} = \dfrac{18z}{5.18}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{33} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5} = \dfrac{-x+y+z}{-33+4+5} = \dfrac{-120}{-24} = 5$

Suy ra $x = 165$; $y = 20$; $z = 25$

65. Gọi số thóc lúc đầu ở kho I, kho II, kho III lần lượt là x, y, z (tấn). Sau khi chuyển bớt đi thì số thóc còn lại ở ba kho đó lần lượt là $\dfrac{4}{5}x$; $\dfrac{5}{6}y$; $\dfrac{10}{11}z$.

Theo đầu bài ta có $\dfrac{4}{5}x = \dfrac{5}{6}y = \dfrac{10}{11}z$.

$\Rightarrow \dfrac{4x}{5.20} = \dfrac{5y}{6.20} = \dfrac{10z}{11.20} \Rightarrow \dfrac{x}{25} = \dfrac{y}{24} = \dfrac{z}{22} = \dfrac{x+y+z}{25+24+22} = \dfrac{710}{71} = 10$

Suy ra $x = 250$; $y = 240$; $z = 220$

Ba kho thóc lúc đầu có 250 tấn ; 240 tấn ; 220 tấn.

66. Gọi chiều dài, chiều rộng của khu vườn lần lượt là x và y (mét).

Theo đề bài ta có $xy = 300$ và $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = k > 0$ suy ra $x = 4k$; $y = 3k$

Do đó $xy = 4k \,.\, 3k = 12k^2 = 300$; $k^2 = 25$

$k = 5$ (thoả mãn điều kiện) ; $k = -5$ (loại)

Vậy $x = 20$; $y = 15$.

Chiều dài khu vườn là 20m, chiều rộng là 15m.

67. Ta đặt $\dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z}{5} = k$ suy ra $x = 12k$; $y = 9k$; $z = 5k$.

Vì $xyz = 20$ nên $12k \,.\, 9k \,.\, 5k = 20$; $540k^3 = 20$; $k^3 = \dfrac{1}{27}$; $k = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $x = 12.\dfrac{1}{3} = 4$; $y = 9.\dfrac{1}{3} = 3$; $z = 5.\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$.

68. Ta đặt $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k$; $y = 7k$; $z = 3k$

Vì $x^2 + y^2 - z^2 = 585$ nên $25k^2 + 49k^2 - 9k^2 = 585$.

$65k^2 = 585$; $k^2 = 9$; $k = \pm 3$

Suy ra $x = \pm 15$; $y = \pm 21$; $z = \pm 9$

Bài toán có 2 đáp số $x = 15$; $y = 21$; $z = 9$ hoặc $x = -15$; $y = -21$; $z = -9$

69. Gọi x và y là hai phân số tối giản cần tìm. Vì các tử tỉ lệ với 3 và 5 ; các mẫu tỉ lệ với 4 và 7 nên $x : y = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = 21 : 20$

Suy ra $\frac{x}{21} = \frac{y}{20} = \frac{x-y}{21-20} = \frac{3}{196}$; $x = \frac{3}{196}.21 = \frac{9}{28}$; $y = \frac{3}{196}.20 = \frac{15}{49}$

70. Ta có $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11} =$

$$= \frac{12x - 15y + 20z - 12x + 15y - 20z}{7 + 9 + 11} = \frac{0}{27} = 0$$

Vậy $12x - 15y = 0 \Leftrightarrow 12x = 15y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$ (1)

$20z - 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = 20z \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{48}{12} = 4$

Suy ra $x = 20$; $y = 16$; $z = 12$

71. Mỗi tỉ số đã cho đều bớt đi 1 ta được :

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 =$$

$$= \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

– Nếu $a + b + c + d \neq 0$ thì $a = b = c = d$ lúc đó $M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

– Nếu $a + b + c + d = 0$ thì $a + b = -(c + d)$; $b + c = -(d + a)$;
$c + d = -(a + b)$; $d + a = -(b + c)$

Lúc đó $M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$

72. $\frac{a}{k} = \frac{x}{a} \Rightarrow a^2 = kx$; $\frac{b}{k} = \frac{y}{b} \Rightarrow b^2 = ky$. Vậy $\frac{a^2}{b^2} = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y}$

73. Vì $a = b + c$ nên $ad = (b + c)d = bd + cd$ (1)

Vì $c = \dfrac{bd}{b - d}$ nên $bd = c(b - d) = bc - cd$ hay $bc = bd + cd$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ad = bc \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

74. Vì $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ nên $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

a) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{a - b}{c - d} \Rightarrow \dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{d} = \dfrac{a - b}{c - d}.\dfrac{a - b}{c - d} \Rightarrow \dfrac{ab}{cd} = \left(\dfrac{a - b}{c - d}\right)^2$

b) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{a + b}{c + d}$ suy ra $\dfrac{a^3}{c^3} = \dfrac{b^3}{d^3} = \dfrac{(a + b)^3}{(c + d)^3}$ do đó $\dfrac{a^3 - b^3}{c^3 - d^3} = \left(\dfrac{a + b}{c + d}\right)^3$

75. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \Rightarrow \dfrac{5a}{5c} = \dfrac{3b}{3d} = \dfrac{5a + 3b}{5c + 3d} = \dfrac{5a - 3b}{5c - 3d}$

76. $b^2 = ac \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$; $c^2 = bd \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$

do đó $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a + b - c}{b + c - d} \Rightarrow \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{b^3}{c^3} = \dfrac{c^3}{d^3} = \dfrac{(a + b - c)^3}{(b + c - d)^3}$

Suy ra $\dfrac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\dfrac{a + b - c}{b + c - d}\right)^3$

77. $2(x + y) = 5(y + z) = 3(z + x)$

$\Rightarrow \dfrac{2(x + y)}{30} = \dfrac{5(y + z)}{30} = \dfrac{3(z + x)}{30} \Rightarrow \dfrac{x + y}{15} = \dfrac{y + z}{6} = \dfrac{z + x}{10}$

Ta có $\dfrac{z + x}{10} = \dfrac{y + z}{6} = \dfrac{(z + x) - (y + z)}{10 - 6} = \dfrac{x - y}{4}$ (1)

$\dfrac{x + y}{15} = \dfrac{z + x}{10} = \dfrac{(x + y) - (z + x)}{15 - 10} = \dfrac{y - z}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{x - y}{4} = \dfrac{y - z}{5}$

78. $b^2 = ac \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{c}$, do đó $\dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{a}{c}$

79. $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+a}{c-a}\Rightarrow\dfrac{a+b}{c+a}=\dfrac{a-b}{c-a}=\dfrac{(a+b)+(a-b)}{(c+a)+(c-a)}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{a}{c}$ (1)

Mặt khác $\dfrac{a+b}{c+a}=\dfrac{a-b}{c-a}=\dfrac{(a+b)-(a-b)}{(c+a)-(c-a)}=\dfrac{2b}{2a}=\dfrac{b}{a}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{a}$

80. Ta đặt $\dfrac{ax+by}{cx+dy}=k$ (không đổi). Chọn $x=0$, $y=1$ được $\dfrac{b}{d}=k$.

Chọn $x=1$, $y=0$ được $\dfrac{a}{c}=k$, suy ra $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

81. Ta có $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{ab}{cd}=\dfrac{2ab}{2cd}=\dfrac{a^2+b^2+2ab}{c^2+d^2+2cd}=\dfrac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^2$ (1)

$\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{2ab}{2cd}=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{c^2+d^2-2cd}=\dfrac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^2=\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^2$

Trường hợp 1 : $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{(a+b)+(a-b)}{(c+d)+(c-d)}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{a}{c}$ (3)

$\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{(a+b)-(a-b)}{(c+d)-(c-d)}=\dfrac{2b}{2d}=\dfrac{b}{d}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ hay $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

Trường hợp 2 : $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{b-a}{c-d}=\dfrac{2b}{2c}=\dfrac{b}{c}$ (5)

$\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{b-a}{c-d}=\dfrac{2a}{2d}=\dfrac{a}{d}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{d}$ hay $\dfrac{a}{b}=\dfrac{d}{c}$

Tóm lại, nếu $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{ab}{cd}$ thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\\[2mm] \dfrac{a}{b}=\dfrac{d}{c}\end{array}\right.$

82. a) $x=3$; $y\in\{2;5\}$; b) $x=7$; $y\in\{2;3;5\}$

83. $\dfrac{6}{75}=\dfrac{2}{25}$; $\dfrac{-35}{42}=\dfrac{-5}{6}$; $\dfrac{3^2}{11^2-1}=\dfrac{3}{40}$

– Các phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn là : $\dfrac{7}{32}$; $\dfrac{2}{25}$; $\dfrac{3}{40}$ vì mẫu của chúng chỉ chứa thừa số 2 hoặc 5.

– Các phân số $\dfrac{2}{35}$; $\dfrac{-5}{6}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn vì mẫu của chúng có chứa thừa số khác 2 và 5.

84. a) $0{,}333\ldots = 3.0{,}111\ldots = 3.\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$

b) $0{,}454545\ldots = 45.0{,}010101\ldots = 45.\dfrac{1}{99}=\dfrac{5}{11}$

c) $0{,}162162\ldots = 162.0{,}001001\ldots = 162.\dfrac{1}{999}=\dfrac{6}{37}$

d) $5{,}272727\ldots = 5+0{,}272727\ldots = 5+27.\dfrac{1}{99}=5\dfrac{3}{11}$

85. a) $0{,}7666\ldots=\dfrac{1}{10}.7{,}666\ldots=\dfrac{1}{10}.(7+6.0{,}111\ldots)=\dfrac{1}{10}.\left(7+6.\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{23}{30}$

b) $0{,}50757575\ldots=\dfrac{1}{100}.50{,}757575\ldots=\dfrac{1}{100}.\left(50+75.\dfrac{1}{99}\right)=\dfrac{67}{132}$

c) $1{,}2148148\ldots=\dfrac{1}{10}.12{,}148148\ldots=\dfrac{1}{10}.\left(12+148.\dfrac{1}{999}\right)=\dfrac{328}{270}$

86. a) $0{,}2777\ldots+0{,}3555\ldots=\dfrac{5}{18}+\dfrac{16}{45}=\dfrac{19}{30}$

b) $1{,}5454\ldots-0{,}8181\ldots-0{,}75=\dfrac{17}{11}-\dfrac{9}{11}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{44}$

c) $1:\dfrac{154}{15}:\dfrac{5}{12}.\dfrac{77}{180}=\dfrac{15}{154}.\dfrac{12}{5}.\dfrac{77}{180}=\dfrac{1}{10}$

87. Gọi $\overline{abc}$ là chu kì của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn ($0 < \overline{abc} < 999$) thì phân số phải tìm sẽ có dạng $\dfrac{\overline{abc}}{999}$.

Ta có $\dfrac{\overline{abc}}{999} = \dfrac{\overline{abc}}{3^3.37} = \dfrac{\overline{abc}.37^2}{3^3.37^3} = \dfrac{\overline{abc}.37^2}{(3.37)^3}$. Ta đặt $\dfrac{\overline{abc}.37^2}{(3.37)^3} = \dfrac{x^3.37^3}{3^3.37^3}$ với $x \in N^*$

Suy ra $\overline{abc}.37^2 = x^3 . 37^3$ hay $\overline{abc} = 37x^3 < 999$

Do đó $x^3 < 27$; $x < 3$ Vậy $x \in \{1 ; 2\}$

Với $x = 1$ thì $\overline{abc} = 037$; Với $x = 2$ thì $\overline{abc} = 296$

Phân số phải tìm là $\dfrac{037}{999} = \dfrac{1}{27}$; $\dfrac{296}{999} = \dfrac{8}{27}$

88. Đáp số : 3 ; 3,14 ; 3,1416

89. a) $(8 + 7,5 + 9,5 + 6) : 4 = 31 : 4 = 7,75 \approx 7,8$

b) $(16 + 7,5 + 19 + 6) : 6 = 48,5 : 6 = 8,083 \ldots \approx 8,1 > 8,0$

Vậy bạn An được tuyển vào lớp 10 hệ A.

90. a) 4 ; b) $\dfrac{8}{9}$

91. a) $x = \pm\dfrac{1}{2}$; b) $x = \pm 0,3$

92. a) $x = 49$; b) $= 169$; c) $x = 1,44$; d) Không tồn tại.

93. a) $4\dfrac{8}{33} = 4,242424\ldots$; $3.\sqrt{2} = 4,242640\ldots$. Vậy $4\dfrac{8}{33} < 3.\sqrt{2}$

b) $5.\sqrt{(-10)^2} = 5.10 = 50$; $10.\sqrt{(-5)^2} = 10.5 = 50$.

Vậy $5.\sqrt{(-10)^2} = 10.\sqrt{(-5)^2}$

94. a) $\sqrt{26} + \sqrt{17} > \sqrt{25} + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9$;

b) $\sqrt{8} - \sqrt{5} < \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

c) $\sqrt{63 - 27} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{63} - \sqrt{27} < \sqrt{64} - \sqrt{25} = 8 - 5 = 3$

Vậy $\sqrt{63 - 27} > \sqrt{63} - \sqrt{27}$

95. $A = 14 - \frac{1}{\sqrt{5}}$; $B = 14 - \frac{1}{\sqrt{6}}$

Ta thấy $\sqrt{5} < \sqrt{6}$ nên $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}}$ do đó A < B

96. a) GTNN của P là $\frac{1}{2}$ (khi x = 0)

b) GTLN của Q là 7 (khi x = 1)

97. $M = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1$ là số chẵn

$\Leftrightarrow \sqrt{x}$ là số lẻ $\Leftrightarrow$ x là số chính phương lẻ < 50 $\Leftrightarrow x \in \{1 ; 9 ; 25 ; 49\}$

98. $N = \frac{9}{\sqrt{x} - 5}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 \in Ư(9) \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 \in \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 9\}$

$\sqrt{x} - 5$	−1	1	−3	3	−9	9
$\sqrt{x}$	4	6	2	8	−4	14
x	16	36	4	64	/	196

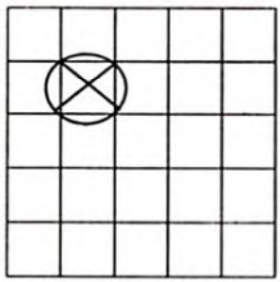
99. a) $x = \frac{(x + y) + (x - y)}{2}$; $y = \frac{(x + y) - (x - y)}{2}$

Tổng, hiệu của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ. Thương của một số hữu tỉ với một số hữu tỉ (khác 0) cũng là một số hữu tỉ. Vậy x, y đều là các số hữu tỉ, không thể là số vô tỉ.

b) x và y có thể là số vô tỉ. Chẳng hạn $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$ thì $x + y = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$;

$\frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

100. Chia hình vuông cạnh 5 thành 25 hình vuông nhỏ cạnh 1 (hình bên). Có 76 điểm chứa trong 25 hình vuông, theo nguyên lí Đirichlê tồn tại một hình vuông chứa ít nhất là $\left[\frac{76}{25}\right] + 1 = 4$ điểm



Đường chéo của hình vuông này có độ dài là $\sqrt{2}$. Nửa đường chéo dài

$$\sqrt{2} : 2 = 0{,}707\ldots < 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

Vẽ đường tròn có tâm là giao điểm hai đường chéo của hình vuông đó, bán kính bằng $\frac{3}{4}$ thì toàn bộ hình vuông này nằm trong hình tròn. Như vậy tồn tại 4 điểm trong các điểm đã cho thuộc một hình tròn có bán kính là $\frac{3}{4}$.

101. a) $\frac{1}{15}$; b) -4 ; c) 100

102.

x		-4		3	
$x-3$	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	|	$+$
$(x-3)(x+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy $(x-3)(x+4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > 3 \end{array}\right.$

103. $\left|\frac{5}{7}x - 4\right| < \frac{2}{7} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} < \frac{5}{7}x - 4 < \frac{2}{7} \Leftrightarrow 5\frac{1}{5} < x < 6$

104. Ta có $0 \le \{x\} < 1 \Leftrightarrow 0 \le 4\{x\} < 4 \Leftrightarrow 0 \le [x] < 4 \Leftrightarrow [x] \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

Vì $x \ne 0$ nên $x = 1{,}25$; $x = 2{,}5$; $x = 3{,}75$

105. a) $S = 2001 - 1 + \left[\frac{2001-1}{4}\right] - \left[\frac{2001-1}{100}\right] + \left[\frac{2001-1}{400}\right] + 1$

$S = 2001 - 1 + 500 - 20 + 5 + 1 = 2486$. Dư của $\frac{S}{7}$ = dư của phép chia $\frac{2486}{7}$ bằng 1

Vậy ngày 01/01/2001 là ngày Thứ hai.

b) $S = 2030 - 1 + \left[\frac{2030-1}{4}\right] - \left[\frac{2030-1}{100}\right] + \left[\frac{2030-1}{400}\right] + (31 + 3)$

$S = 2030 - 1 + 507 - 20 + 5 + 34 = 2555$. Dư của phép chia $\frac{S}{7}$ = dư của phép chia $\frac{2555}{7}$ bằng 0

Vậy ngày 03/02/2030 là ngày Chủ nhật.

106. Ta có $\dfrac{3x-2y}{4}=\dfrac{2z-4x}{3}=\dfrac{4y-3z}{2}$

suy ra $\dfrac{4(3x-2y)}{16}=\dfrac{3(2z-4x)}{9}=\dfrac{2(4y-3z)}{4}$

$=\dfrac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29}=0$

Vậy $\dfrac{3x-2y}{4}=0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$ (1)

$\dfrac{2z-4x}{3}=0 \Rightarrow 2z=4x \Rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{z}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$

107. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{a}=\dfrac{a+b+c+d}{b+c+d+a}=1$ suy ra $a=b=c=d$

Vậy $\dfrac{2a-b}{c+d}+\dfrac{2b-c}{d+a}+\dfrac{2c-d}{a+b}+\dfrac{2d-a}{b+c}=\dfrac{1}{2}.4=2$

108. $\dfrac{3}{5}x=\dfrac{2}{3}y$ suy ra $\dfrac{3x}{5.6}=\dfrac{2y}{3.6}$ hay $\dfrac{x}{10}=\dfrac{y}{9}=k$. Do đó $x=10k$; $y=9k$

Ta có $x^2-y^2=(10k)^2-(9k)^2=19k^2=38$; $k^2=2$; $k=\pm\sqrt{2}$

Suy ra $x=\pm 10.\sqrt{2}$; $y=\pm 9.\sqrt{2}$

Có 2 đáp số $(10\sqrt{2}\ ;\ 9\sqrt{2})$ hoặc $(-10\sqrt{2}\ ;\ -9\sqrt{2})$

109. $2x^3-1=15 \Rightarrow 2x^3=16$; $x^3=8$; $x=2$ suy ra $\dfrac{18}{9}=\dfrac{y-25}{16}=\dfrac{z+9}{25}$

$y-25=32 \Rightarrow y=57$; $z+9=50 \Rightarrow z=41$

Vậy $x+y+z=2+57+41=100$

110. $(x_1p-y_1q)^{2n}\ge 0$; $(x_2p-y_2q)^{2n}\ge 0$; … $(x_mp-y_mq)^{2n}\ge 0$

Vậy $(x_1p-y_1q)^{2n}+(x_2p-y_2q)^{2n}+\ldots+(x_mp-y_mq)^{2n}\ge 0$

mà $(x_1p-y_1q)^{2n}+(x_2p-y_2q)^{2n}+\ldots+(x_mp-y_mq)^{2n}\le 0$ (đề bài)

suy ra $x_1p-y_1q=x_2p-y_2q=\ldots=x_mp-y_mq=0$

do đó $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots \frac{x_m}{y_m} = \frac{q}{p}$ hay $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m} = \frac{q}{p}$

111. Gọi x, y, z là ba phân số tối giản cần tìm.

Vì các tử tỉ lệ với 2 ; 3 ; 5 và các mẫu tỉ lệ với 5 ; 4 ; 6

nên $x : y : z = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = 24 : 45 : 50$

Do đó $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{50} = \frac{x + y + z}{24 + 45 + 50} = \frac{3\frac{7}{60}}{119} = \frac{11}{420}$;

$$x = \frac{11}{420}.24 = \frac{22}{35} \; ; \; y = \frac{11}{420}.45 = \frac{33}{28} \; ; \; z = \frac{11}{420}.50 = \frac{55}{42}$$

112. Gọi định mức vận chuyển của đội I, đội II, đội III lần lượt là x, y, z (tấn)

Theo đầu bài ta có $x + y + z = 3030$

và $\frac{126.x}{100} = \frac{105y}{100} = \frac{108z}{100}$; $126x = 105y = 108z$

BCNN (126 ; 105 ; 108) = 3780

Suy ra $\frac{126x}{3780} = \frac{105y}{3780} = \frac{108z}{3780}$; $\frac{x}{30} = \frac{y}{36} = \frac{z}{35} = \frac{x + y + z}{30 + 36 + 35} = \frac{3030}{101} = 30$

Vậy $x = 30.30 = 900$ $y = 30.36 = 1080$ $z = 30.35 = 1050$

Vậy định mức vận chuyển của ba đội I, II, III lần lượt là 900 tấn ; 1080 tấn ; 1050 tấn.

CHƯƠNG II : HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

113. Gọi ba phần lần lượt là x, y, z.

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{24}$ (1) ; $\frac{y}{z} = \frac{8}{9} = \frac{24}{27} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{z}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{20} = \frac{y}{24} = \frac{z}{27} = \frac{z-y}{27-24} = \frac{150}{3} = 50$

suy ra $\frac{x+y+z}{20+24+27} = 50 \Rightarrow x + y + z = 71.50$; M = 3550

114. 10 người làm 8 ngày được 10.8 = 80 (công)

12 người làm 7 ngày được 12.7 = 84 (công)

Số ngày công	*Số đất đào đắp*
80	200
84	x

Với năng suất không đổi thì số đất đào đắp được tỉ lệ thuận với số ngày công, do đó :

$$\frac{80}{84} = \frac{200}{x} \Rightarrow x = \frac{84.200}{80} = 210 \text{. Đáp số } 210\text{m}^3$$

115. Gọi V_1 và V_2 là thể tích nước trong hai bể : h_1 và h_2 là chiều cao nước trong hai bể đó. Khi diện tích đáy như nhau thì thể tích và chiều cao tỉ lệ thuận với nhau, do đó :

$\frac{V_1}{h_1} = \frac{V_2}{h_2} = S$ (S chính là diện tích đáy bể) suy ra $S = \frac{V_1 - V_2}{h_1 - h_2} = \frac{1,8}{0,6} = 3\,(\text{m}^2)$

116. Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là 21 + 3 = 24 (km/h).

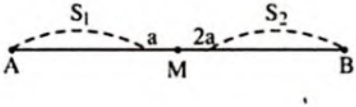
Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là 21 – 3 = 18 (km/h)

Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Vận tốc	*Quãng đường*
18km/h	30km
24km/h	x?

Ta có $\frac{18}{24} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 40$. Vậy ca nô xuôi dòng được 40km.

117. Quãng đường AB dài 540km ; nửa quãng đường AB dài 270km. Gọi quãng đường ô tô và xe máy đã đi là s_1, s_2. Trong cùng một thời gian thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc do đó $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t$ (t chính là thời gian cần tìm).



$$t = \frac{270 - a}{65} = \frac{270 - 2a}{40} \ ;$$

$$t = \frac{540 - 2a}{130} = \frac{270 - 2a}{40} = \frac{(540 - 2a) - (270 - 2a)}{130 - 40} = \frac{270}{90} = 3$$

Vậy sau khi khởi hành 3 giờ thì ô tô cách M một khoảng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ xe máy đến M.

118. Số cây trồng phải là $\frac{300}{5} + 1 = 61$ (cây). Sở dĩ lập luận trên sai vì nếu trồng cây cả hai đầu đường thì số cây không tỉ lệ thuận với độ dài đoạn đường. Thực vậy, gọi độ dài đoạn đường là x ($x \vdots 5$) ; số cây trồng là y thì số cây được tính theo công thức $y = \frac{1}{5}.x+1$, không có dạng y = kx. Nếu chỉ trồng cây ở một đầu đường thì $y = \frac{1}{5}x$, lúc đó số cây tỉ lệ thuận với độ dài đoạn đường.

119. Bà thứ nhất mua 12kg ; bà thứ hai mua 10kg.

120.

Cạnh			*Đường cao*
25cm	$\downarrow$	$\uparrow$	xcm
36cm			ycm

trong đó x + y = 48,8

Với diện tích tam giác không đổi thì cạnh đáy tỉ lệ nghịch với chiều cao tương ứng. Do đó $\frac{25}{36} = \frac{y}{x}$. Suy ra $\frac{x}{36} = \frac{y}{25} = \frac{x + y}{36 + 25} = \frac{48,8}{61} = 0,8$.

$x = 0,8 \,.\, 36 = 28,8$; $y = 0,8.25 = 20$

Độ dài hai đường cao là 28,8cm ; 20cm.

121. Với quãng đường như nhau thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian. Gọi thời gian đi trên mỗi chặng lần lượt là x, y, z ta có : $72x = 60y = 40z = s$

Suy ra $\dfrac{72x}{360} = \dfrac{60y}{360} = \dfrac{40z}{360} \Rightarrow \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{9} = \dfrac{x+y+z}{5+6+9} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

Do đó $x = \dfrac{1}{5}.5 = 1$. Mỗi chặng dài 72.1 = 72 (km). Quãng đường AB dài 72.3 = 216 (km)

122.

$$\begin{array}{lcl} \textit{Vận tốc} & & \textit{Thời gian} \\ 54\text{km/h} \downarrow & & \uparrow t_1 \text{ (giờ)} \\ 63\text{km/h} & & t_2 \text{ (giờ)} \end{array}$$

trong đó $t_1 - t_2 = 1$

Với cùng quãng đường AB thì vận tốc và thời gian tỉ lệ nghịch với nhau do đó $\dfrac{54}{63} = \dfrac{t_2}{t_1}$. Suy ra $\dfrac{t_1}{63} = \dfrac{t_2}{54} = \dfrac{t_1 - t_2}{63 - 54} = \dfrac{1}{9}$. Vậy $t_1 = \dfrac{1}{9}.63 = 7$

Quãng đường AB dài 54.7 = 378 (km).

Thời gian dự định đi là 7 + 1 = 8 (h)

123. Nếu năng suất lao động vẫn như cũ thì ta có

$$\begin{array}{lcl} \textit{Số công nhân} & & \textit{Số ngày làm} \\ 21 & \downarrow \quad \uparrow & 15 \\ 18 & & x? \end{array}$$

Với một công việc nhất định, năng suất lao động không đổi, số công nhân làm tỉ lệ nghịch với số ngày làm, suy ra $\dfrac{21}{18} = \dfrac{x}{15} \Rightarrow x = 17{,}5$ (ngày)

Giữ nguyên số công nhân là 18, ta có :

$$\begin{array}{lcl} \textit{Năng suất lao động} & & \textit{Số ngày làm} \\ 100\% \downarrow & & \uparrow 17{,}5 \\ 125\% & & y\ ? \end{array}$$

Với một công việc nhất định, số người làm không đổi thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động, suy ra $\dfrac{100\%}{125\%} = \dfrac{y}{17{,}5} \Rightarrow y = 14$.

Vậy 18 công nhân phải làm trong 14 ngày mới xong công việc.

124.

Số công nhân		*Số ngày làm*
a $\downarrow$		$\uparrow$ b
$a + \frac{1}{3}a$		x?

Với một công việc nhất định, số công nhân làm tỉ lệ nghịch với số ngày làm, do đó.

$$\frac{a}{\frac{4}{3}a} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{3}{4}b$$

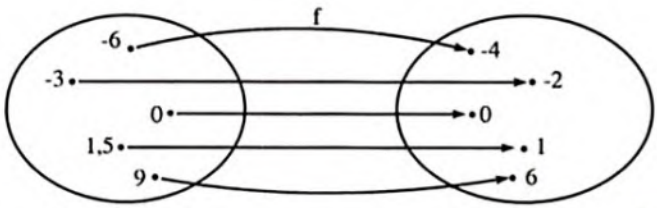
thời gian giảm được là $b - \frac{3}{4}b = \frac{1}{4}b$ tức là giảm $\frac{1}{4}$ số ngày cho trước, chứ không phải là $\frac{1}{3}$. Vậy lập luận của bạn học sinh đó sai.

125. a) $s = f(t) = 37t$

b) $h = g(t) = -100$ (đây là một hàm hằng)

$g(2) = -100$; $g(3{,}5) = -100$

126. a)



b) $y = f(x) = \frac{2}{3}x$ với $x \in \{-6 ; -3 ; 0 ; 1{,}5 ; 9\}$

127. a) $f(3) = 4.3^2 - 5 = 31$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 = -4$

b) $f(x) = -1 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 = -1 \Leftrightarrow 4x^2 = 4$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$

c) $f(-x) = 4.(-x)^2 - 5 = 4.x^2 - 5$ mà $f(x) = 4x^2 - 5$ nên $f(-x) = f(x)$

128. a) $f(5) = [5] = 5$; $f\left(2\frac{1}{6}\right) = \left[2\frac{1}{6}\right] = 2$; $f(-7{,}4) = [-7{,}4] = -8$

b) $f(x) = 4 \Leftrightarrow 4 \le x < 5$

129. a) $f(5) = \{5\} = 0$; $f\left(2\frac{1}{6}\right) = \left\{2\frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{6}$; $f(-7,4) = \{-7,4\} = 0,6$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Z$

130. $y = f(x) = \frac{1}{2}x$

a) $f(x) = -5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -5 \Leftrightarrow x = -10$;

b) $x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 > \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

131. $y = f(x) = \frac{12}{x}$

a) $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{12}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 3$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{x} = 0$; không tồn tại x.

b) $f(-x) = \frac{12}{-x} = -\frac{12}{x} = -f(x)$

132. a) $f(10x) = k.(10x) = 10.(kx) = 10.f(x)$

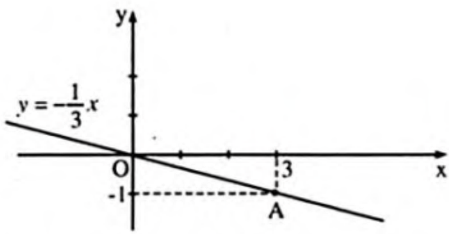
b) $f(x_1+x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

c) $f(x_1 - x_2) = k(x_1 - x_2) = kx_1 - kx_2 = f(x_1) - f(x_2)$

133. a) Cho $x = 3$ thì $y = -1$

Vẽ điểm $A(3 ; -1)$ rồi vẽ đường thẳng OA. (Hình 16)

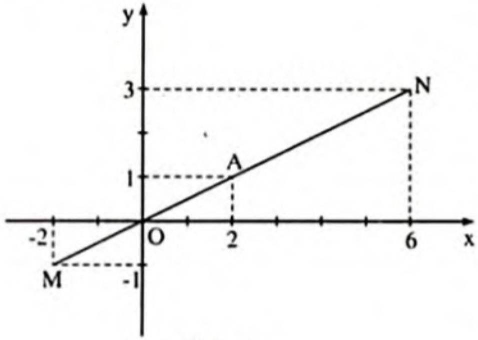
b) Điểm M, điểm P thuộc đồ thị vì toạ độ của chúng thoả mãn hàm số



Hình 16

134. $a = 2.3 = 6$. Hàm số đã cho là hàm số $y = \frac{6}{x}$. Trong các điểm A, B, C chỉ có điểm C thuộc đồ thị của hàm số này vì toạ độ $(6 ; 1)$ thoả mãn hàm số $y = \frac{6}{x}$.

135. (*Xem hình 17*)



Hình 17

Cho x = 2 thì y = 1. Vẽ điểm A(2 ; 1) rồi vẽ đường thẳng OA. Trên trục hoành tại điểm –2 và điểm 6 vẽ các đường thẳng vuông góc với trục hoành cắt đường thẳng OA lần lượt tại M và N. Đoạn thẳng MN là đồ thị cần vẽ. Nhìn vào đồ thị ta thấy với $-2 \le x \le 6$ thì GTNN của f(x) là –1 (khi x = –2) và GTLN của f(x) là 3 (khi x = 6)

136. Giá trị x = a được tương ứng với hai trị giá của y là b và c do đó y không phải là hàm số của x. Vậy đường cong (C) không thể là đồ thị của một hàm số y = f(x) nào cả.

137. *(Hình 11).*

a) Điểm A thuộc đồ thị của hàm số y = ax nên toạ độ (2, 1) của A phải thoả mãn hàm số y = ax. Do đó $1 = a.2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Hàm số được cho bởi công thức $y = \frac{1}{2}x$. Hai điểm A và B thuộc đồ thị của hàm số nên hoành độ và tung độ của chúng tỉ lệ thuận với nhau. Suy ra $\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{y_0 - 2}{x_0 - 4}$. Vậy

$$\frac{y_0 - 2}{x_0 - 4} = \frac{1}{2}$$

b) Nếu $x_0 = 5$ thì $y_0 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{5}{2}$.

Diện tích tam giác OBC là $S = \frac{1}{2}.5 \;.\; 2{,}5 = 6{,}25$.

138. Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

a) $x + y = -4 \Leftrightarrow x + (-3 \;.\; x) = -4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3.2 = -6$

Vậy A (2 ; –6)

b) $|x - y| = 4 \Rightarrow x - y = \pm 4$

Xét trường hợp $x - y = 4 \Leftrightarrow x - (-3x) = 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3.1 = -3$

Vậy A $(1 ; -3)$

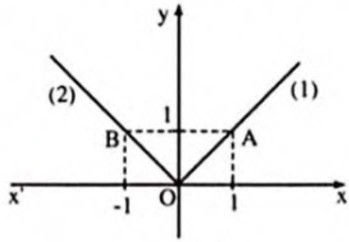
Xét trường hợp $x - y = -4 \Leftrightarrow x - (-3x) = -4 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3 . (-1) = 3$

Vậy A $(-1 ; 3)$

139. Ta khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét các khoảng giá trị của biến.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{với } x \geq 0 \quad (1) \\ -x & \text{với } x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

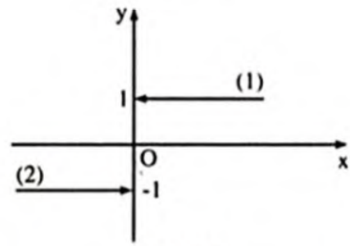
Đồ thị của hàm số $y = |x|$ là hai tia phân giác của các góc vuông xOy và x'Oy tạo thành hình chữ V (*hình 18*)



Hình 18

140. (*Hình 19*)

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{với } x > 0 \quad (1) \\ -1 & \text{với } x < 0 \quad (2) \end{cases}$$



Hình 19

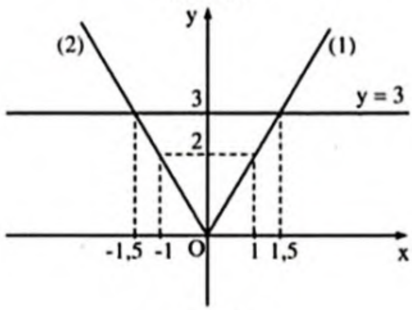
141. a) (*Hình 20*)

$$y = |2x| = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \quad (1) \\ -2x & \text{với } x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

b) Phần đồ thị của hàm số

$y = |2x|$ nằm bên dưới đường thẳng $y = 3$

cho ta $|2x| < 3 \Leftrightarrow -1,5 < x < 1,5$



Hình 20

142. Gọi 3 phân số tối giản cần tìm là x, y, z.

Tử số của chúng tỉ lệ nghịch với 20 ; 4 ; 5, tức là tỉ lệ thuận với $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$

hay tỉ lệ thuận với 1 : 5 : 7.

Vậy $x : y : z = \frac{1}{1} : \frac{5}{3} : \frac{4}{7} = 21 : 35 : 12$

Suy ra $\frac{x}{21} = \frac{y}{35} = \frac{z}{12} = \frac{x + y + z}{21 + 35 + 12} = \frac{5\frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$

Từ đó tính được $x = \frac{5}{3}$; $y = \frac{25}{9}$; $z = \frac{20}{21}$.

143. Gọi độ dài các cạnh của tam giác là x, y, z. Độ dài các cạnh tỉ lệ nghịch với độ dài các đường cao tương ứng nên $x : y : z = \frac{1}{12} : \frac{1}{15} : \frac{1}{20} = 5 : 4 : 3$.

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{60}{12} = 5$. Ta tính được $x = 25$; $y = 20$; $z = 15$

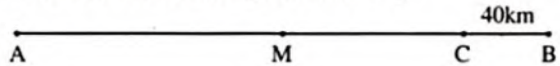
144. Gọi độ dài các cạnh của tam giác là x, y, z. Theo đầu bài ta có :

$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k$ suy ra $x + y = 5k$; $y + z = 6k$; $z + x = 7k$

$2(x + y + z) = 18k$; $x + y + z = 9k$. Từ đó ta được $x = 3k$; $y = 2k$; $z = 4k$.

Độ dài các cạnh của tam giác tỉ lệ nghịch với đường cao tương ứng nên từ $y = \frac{1}{2}z$ suy ra đường cao ứng với cạnh y gấp đôi đường cao ứng với cạnh z.

145. Gọi M là trung điểm của AB. Kể từ M, nếu vận tốc của xe là 60km/h thì lúc 11 giờ xe đã tới B nhưng do vận tốc giảm xuống còn 40km/h nên lúc 11 giờ xe mới tới C còn cách B là 40km (*xem hình 21*).



Hình 21

a) Trong cùng một thời gian thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc nên $\frac{MB}{60} = \frac{MC}{40} = \frac{MB - MC}{60 - 40} = \frac{40}{20} = 2$ suy ra $MB = 2.60 = 120$.

Vậy $AB = 120.2 = 240$ (km)

b) Xe khởi hành lúc $11 - \frac{240}{60} = 7$ (giờ)

146. Chiều dài đoạn đường giao cho ba đội I, II, III theo kế hoạch lúc đầu lần lượt là $\frac{7}{24}$; $\frac{8}{24}$; $\frac{9}{24}$ tổng số.

Chiều dài đoạn đường giao cho ba đội I, II, III theo kế hoạch mới lần lượt là $\frac{6}{21}$; $\frac{7}{21}$; $\frac{8}{21}$ tổng số.

Theo kế hoạch mới, đội III tăng hơn lúc đầu là :

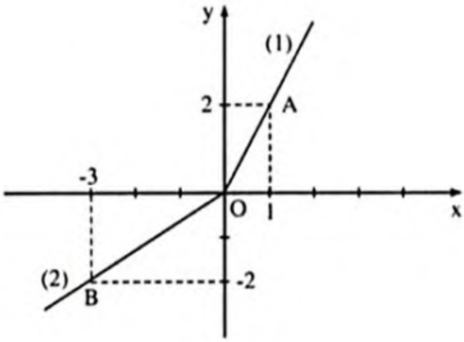
$$\frac{8}{21} - \frac{9}{24} = \frac{64}{168} - \frac{63}{168} = \frac{1}{168} \text{ (tổng số).}$$

Tổng chiều dài ba đoạn đường mà ba đội phải làm là : $0,5 : \frac{1}{168} = 84$ (km)

Chiều dài đoạn đường mà mỗi đội phải làm theo kế hoạch mới lần lượt là 24km ; 28km ; 32km.

147. $y = \frac{2}{3}(2x + |x|) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \geq 0 \quad (1) \\ \frac{2}{3}x & \text{nếu } x < 0 \quad (2) \end{cases}$

Đồ thị (*xem hình 22*).



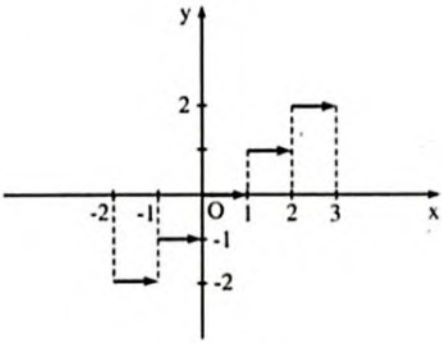
Hình 22

148. $y = [x]$ với $-2 \leq x < 3$.

Ta khử dấu phần nguyên bằng cách xét các khoảng giá trị của biến

$$y = \begin{cases} -2 & \text{với } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{với } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{với } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{với } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{với } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Đồ thị có dạng bậc thang như trên *hình 23*.



Hình 23

149. a) $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

b) $f(x_1 + 4x_2) = -5(x_1 + 4x_2) = = -5x_1 + 4(-5x_2) = f(x_1) + 4f(x_2)$

c) $-f(x) = -(-5x) = 5x$; $f(-x) = -5.(-x) = 5x$ suy ra $-f(x) = f(-x)$.

CHƯƠNG III : THỐNG KÊ

150. a) Dấu hiệu là số tiền góp của mỗi học sinh 7A.

b) Bảng "tần số" (xem *bảng 20*)

Mức góp (x)	1	2	3	4	5	10
Số học sinh (n)	5	12	8	5	5	1

Bảng 20

151. a) Dấu hiệu ở đây là số bàn thắng trong mỗi trận đấu. Có tất cả 48 trận đấu ở vòng đấu bảng.

b) Bảng "tần số" (xem *bảng 21*).

Số bàn thắng (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Số trận đấu (n)	2	9	16	7	8	3	1	1	1

Bảng 21

Vài nhận xét về số bàn thắng ở vòng đấu bảng : Có 1 trận đấu nhiều bàn thắng nhất (tới 8 bàn) ; có hai trận ít bàn thắng nhất (không có bàn thắng nào). Số trận đấu có 2 bàn thắng xảy ra là nhiều nhất (tới 16 trận).

152. Tổng số điểm ghi ở 2 mặt trên của 2 con súc sắc có thể là :

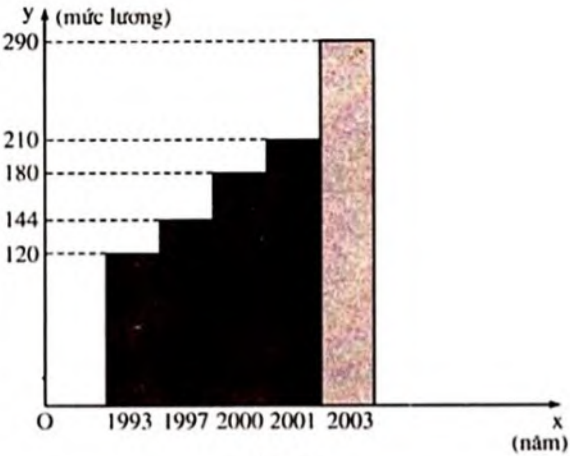
$2 = 1 + 1$
$3 = 1 + 2 = 2 + 1$
$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$
$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$
$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 1 + 5$
$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$
$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$
$9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$
$10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$
$11 = 5 + 6 = 6 + 5$
$12 = 6 + 6$

Điểm số (x)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tần số (n)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Tần suất (f)	2,8%	5,6%	8,3%	11,1%	13,9%	16,7%	13,9%	11,1%	8,3%	5,6%	2,8%

Như vậy tổng số 7 điểm có nhiều khả năng xảy ra nhất, tới 16,7%.

153. a) Xem *hình 24*

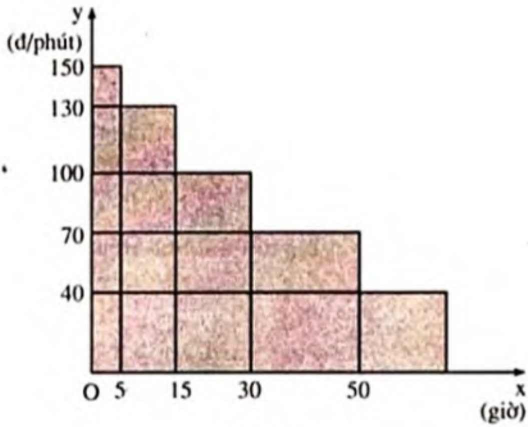
b) Mức lương năm 2000 so với năm 1997 tăng $\frac{36}{144} = 25\%$; so với năm 1993 tăng $\frac{60}{120} = 50\%$



Hình 24

154. (Xem *hình 25*)

155. Ta ghi lại *bảng 22* từ dạng bảng "ngang" sang dạng bảng "dọc" và thêm 2 cột để tính số trung bình cộng (*xem bảng 22*).



Hình 25

Mức góp (x)	Tần số (n)	Tích x.n	
1	5	5	
2	12	24	
3	8	24	
4	5	20	
5	5	25	
10	1	10	
	N = 36	108	$\overline{X} = \frac{108}{36} = 3$

Bảng 22

Trả lời : a) $M_0 = 2$

b) Trung bình mỗi học sinh góp 3 (nghìn đồng)

156. (Xem *bảng 23*)

Số bàn thắng (x)	Tần số n	Tích x.n	
0	2	0	
1	9	9	
2	16	32	
3	7	21	
4	8	32	
5	3	15	
6	1	6	
7	1	7	
8	1	8	
	N = 48	130	$\overline{X} = \frac{130}{48} \approx 2,7$

Bảng 23

Trả lời : a) $M_0 = 2$

b) Trung bình mỗi trận có 2,7 bàn thắng.

157. Đáp số : 50km/h

158. Hướng dẫn : Trước hết tính giá trị trung tâm ở cột 2 rồi tính cột 4.

$$\overline{X} = \frac{1440}{40} = 36$$

159. Đáp số 141cm

160. Khi xe chuyển bánh thì số khách trên xe lần lượt là :

30 ; 34 ; 40 ; 41 ; 40 ; 36 ; 41 ; 40 ; 36 ; 41 ; 34 ; 36 ; 40 ; 43

Ta lập bảng tần số để tính số trung bình cộng (xem *bảng 24*).

Giá trị (x)	Tần số n	Tích x.n	
30	1	30	
34	2	68	
36	3	108	
40	4	160	
41	3	123	
43	1	43	
	N = 14	532	$\overline{X} = \frac{532}{14} = 38$

Bảng 24

Vậy trên xe trung bình có 38 khách

161. a) Xem bảng 25.

b) Xem bảng 26.

Chữ cái	Tần số	Chữ cái	Tần số
A	2	N	4
Ă	1	O	2
Â	3	Ô	1
B	1	Ơ	2
Đ	4	P	1
E	2	Q	1
Ê	1	R	1
G	4	T	2
H	1	U	3
I	2	Ư	4
L	4	Y	1
M	1		N = 48

Bảng 25

Số chữ cái trong một chữ	Tần số
2	2
3	7
4	2
5	3
	N = 14

Bảng 26

162. Đáp số $47{,}5\text{m}^2$

163. a) Dấu hiệu ở đây là số hạt thóc trên mỗi bông lúa.

b) Xem *bảng 27*

Số hạt thóc (x) (1)	Giá trị trung tâm (2)	Tần số n (3)	Tích (2)×(3) (4)	(5)
Trên 100–120	110	2	220	
Trên 120–140	130	3	390	
Trên 140–160	150	6	900	
Trên 160–180	170	3	510	
Trên 180–200	190	5	950	
Trên 200–220	210	2	420	
Trên 220–240	230	2	460	
Trên 240–260	250	1	250	
		N = 24	4100	$\overline{X} = \frac{4100}{24} \approx 171$

Bảng 27

164. a) $\overline{X} = \dfrac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + ... + x_kn_k}{N}$

b) Gọi $\overline{X'}$ là số trung bình cộng mới

$$\overline{X'} = \frac{(2x_1)n_1 + (2x_2)n_2 + (2x_3)n_3 + ... + (2x_k)n_k}{N}$$

$$\overline{X'} = \frac{2(x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + ... + x_kn_k)}{N} = 2\overline{X}$$

Vậy số trung bình cộng mới tăng lên 2 lần.

c) Gọi $\overline{X'}$ là số trung bình cộng mới

$$\overline{X'} = \frac{(x_1 + 5).n_1 + (x_2 + 5).n_2 + (x_3 + 5).n_3 + ... + (x_k + 5).n_k}{N}$$

$$\overline{X'} = \frac{(x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + ... + x_kn_k) + 5(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k)}{N}$$

$$\overline{X'} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + ... + x_kn_k}{N} + \frac{5N}{N}$$

(Vì tổng các tần số $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = N$)

Do đó $\overline{X'} = \overline{X} + 5$

nghĩa là số trung bình cộng mới đã tăng thêm 5 đơn vị.

CHƯƠNG IV : BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

165. $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$; $B = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

Với $n = 4$ thì $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

$B = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$

Rõ ràng A = B

Bạn đọc tự thử tiếp với n = 5 ; n = 6.

166. a) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}^2 - 2)$

$= (\sqrt{2} + 1)(0 - 0)$

$= 0.$

b) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}^2 + 1) + 3$

$= (\sqrt{2} - 1)(2 + 1) + 3$

$= 3\sqrt{2}.$

167. a) $M = -3$; b) $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$

Với $x = 3$ thì $M = 5$; với $x = -3$ thì $M = -7$

168. $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$. Với $x = \frac{1}{2}$ thì mẫu $2x - 1 = 2.\frac{1}{2} - 1 = 0$

Ta không tính được giá trị của biểu thức N (ta nói biểu thức N không có nghĩa).

Với $x = -\frac{1}{2}$ thì $N = 1$

169. $P = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7.\frac{1}{3}.|-6| - \frac{1}{4}.(-6)^3 = 9.\frac{1}{9} - 7.\frac{1}{3}.6 - \frac{1}{4}.(-216) = 41$

170. a) $(x + 1)(y^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ y^2 - 6 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

b) $x^2 - 12x + 7 > 7 \Leftrightarrow x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow x(x - 12) > 0$

$\Leftrightarrow$ x và $x - 12$ cùng dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 12 \\ x < 0 \end{array}\right.$

171. $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{3y}{5}$. Thay vào biểu thức A ta được

$$A = \frac{5.\left(\frac{3y}{5}\right)^2 + 3y^2}{10.\left(\frac{3y}{5}\right)^2 - 3y^2} = \frac{\frac{9y^2 + 15y^2}{5}}{\frac{18y^2 - 15y^2}{5}} = \frac{24y^2}{3y^2} = 8$$

172. $B = \frac{x-z}{x}.\frac{y-x}{y}.\frac{z+y}{z}$ vì $x - y - z = 0$ nên $x - z = y$; $y - x = -z$; $z + y = x$

Suy ra $B = \frac{y}{x}.\frac{-z}{y}.\frac{x}{z} = -1$

173. a) GTNN của $C = -10$ (khi $x = -2$ và $y = \frac{1}{5}$)

b) Dễ thấy $D > 0$

D có GTLN $\Leftrightarrow (2x-3)^2 + 5$ có GTNN $\Leftrightarrow (2x-3)^2$ có GTNN $\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1,5$

GTLN của $D = \frac{4}{5}$ (khi $x = 1,5$)

174. a) $E = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3+2-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1$

E có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 2 \in Ư(3) \Leftrightarrow x - 2 \in \{-1 ; 1 ; -3 ; 3\}$

$x-2$	-1	1	-3	3
x	1	3	-1	5

b) Vì $E = \frac{3}{x-2} - 1$ nên E có GTNN $\Leftrightarrow \frac{3}{x-2}$ có GTNN

Với $x > 2$ thì $\frac{3}{x-2} > 0$; với $x < 2$ thì $\frac{3}{x-2} < 0$.

Vậy ta chỉ xét những giá trị $x < 2$

$\frac{3}{x-2}$ có GTNN $\Leftrightarrow \frac{3}{2-x}$ có GTLN $\Leftrightarrow 2 - x$ có GTNN (vì $\frac{3}{2-x} > 0$)

$\Leftrightarrow x$ lấy GTLN $\Leftrightarrow x = 1$ (vì $x \in \mathbf{Z}$; $x < 2$)

Lúc đó GTNN của $E = \frac{3}{1-2} - 1 = -4$ (khi $x = 1$)

175. Giả sử $f(17) = 71$ và $f(12) = 35$

Thế thì $a . 17 + b = 71$ (1) ; $a . 12 + b = 35$ (2)

Suy ra $(17a + b) - (12a + b) = 71 - 35$ hay $5a = 36$

Vì $a \in Z$ nên $5a \vdots 5$, còn $36 \not\vdots 5$

Do đó không thể đồng thời có $f(17) = 71$; $f(12) = 35$

176. $A = (8a^9b^6x^{12}y^3) . \left(-\frac{3}{10}b^5x^2y^2z^3\right) = -\frac{12}{5}a^9b^{11}x^{14}y^5z^3$.

Để A có bậc 22 thì a, b phải là hằng ; x, y, z là biến ;

Để A có bậc 31 thì b phải là hằng ; a, x, y, z là biến ;

Để A có bậc 8 thì a, b, x là hằng ; y, z là biến.

177. a) $C = \frac{14}{33}ax^4y^5 + \frac{5}{2}abx^3y^4z + ax^7y^3$; b) $D = \frac{3}{2}x^{10}y^7 - 16$

178. a) $-\frac{1}{32}(a-1)^5x^{15}y^{20}z^{10}$ có hệ số là $-\frac{1}{32}(a-1)^5$, có bậc là 45

b) $-a^5b^5cx^5y^2z^6$ có hệ số là $-a^5b^5c$, có bậc là 13

c) $\frac{25}{6}a^6x^{17}y^7z^3$ có hệ số là $\frac{25}{6}a^6$, có bậc là 27

179. $64x^6y^{12} = (\pm 8x^3y^6)^2 = (4x^2y^4)^3 = (\pm 2xy^2)^6$

180. Xét tích $M . N . P = -77x^4y^6 \le 0$

Suy ra ba đơn thức M, N, P không thể cùng dương

(vì nếu cùng dương thì tích của chúng phải dương).

181. a) Cả 3 đơn thức đồng dạng với nhau.

b) A và C đồng dạng.

c) A và B đồng dạng.

182. $A = 5mx^4y^6$; $B = -\frac{2}{m}x^4y^6$ với m là hằng số dương

a) A và B đồng dạng vì có phần biến giống nhau.

b) $A - B = 5mx^4y^6 - \left(-\frac{2}{m}x^4y^6\right) = \left(5m + \frac{2}{m}\right)x^4y^6$

c) Vì m > 0 nên $5m + \frac{2}{m} > 0$; $x^4 \geq 0$; $y^6 \geq 0$ suy ra $\left(5m + \frac{2}{m}\right)x^4y^6 \geq 0$

Vậy A − B ≥ 0 (dấu = ⇔ x = 0 hoặc y = 0)

Do đó GTNN của A − B là 0 khi x = 0 hoặc y = 0

183. $Ax^2 + Bx + C = 8x^5y^3 . x^2 + (-2x^6y^3).x + (-6x^7y^3) = 8x^7y^3 - 2x^7y^3 - 6x^7y^3 = 0$

184. a) $8.2^n + 2^{n+1} = 8.2^n + 2.2^n = 10.2^n \ \vdots\ 10$

Vậy $8.2^n + 2^{n+1}$ có tận cùng bằng chữ số 0.

b) $3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n$

$= 3^3 . 3^n - 2.3^n + 2^5.2^n - 7.2^n = 27.3^n - 2.3^n + 32.2^n - 7.2^n$

$= 25.3^n + 25.2^n = 25.(3^n + 2^n) \ \vdots\ 25$

c) $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n = 4^3.4^n + 4^2.4^n - 4.4^n - 4^n$

$= 64.4^n + 16.4^n - 4.4^n - 1.4^n = 75.4^n = 75.4 . 4^{n-1} = 300 . 4^{n-1} \ \vdots\ 300$

185. $31.5^2 = 1. 5^2 + 5.5^2 + 25.5^2 = 5^2 + 5^3 + 5^4$.

186. $A + B = 81x^{20}y^{12} + 32x^{10}z^{20}$; vì $81x^{20}y^{12} \geq 0$; $32x^{10}z^{20} \geq 0$

nên $A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{20}y^{12} = 0 \\ x^{10}z^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & ;\text{ y và z bất kì.} \\ y = z = 0 & ;\text{x bất kì.} \end{array}\right.$

187. a) $D = -xy + 5y^2$

b) $E = (a - 1)x^2 + a - 1 - xy - x + x + y^2 - a + 1 = (a-1)x^2 - xy + y^2$

188. a) $\overline{xyx} = 100x + 10y + x = 101x + 10y$

b) $\overline{yxy5} = 1000y + 100x + 10y + 5 = 1010y + 100x + 5$

189. $P = (a - 2)x^4y^3 + bx^3y^4 + 7xy^2 + 4y^3$. Vì P có bậc 3 nên a − 2 = 0 và b = 0 hay a = 2 ; b = 0

190. $A = (a + 2)x^2 - 5x - 2$;

$B = 8x^2 + (2b - 7)x + c - 1$

$$\underset{\text{(đồng nhất)}}{A \equiv B} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 8 \\ 2b - 7 = -5 \\ c - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

191. $S = (10a + b) + (100a + 10b + c) + (10b + a) - (100b + 10a + c)$

$S = 101a - 79b.$

192. Gọi 4 số lẻ liên tiếp là $2x - 3$; $2x - 1$; $2x + 1$; $2x + 3$ ($x \in Z$).

Tổng của chúng là $S = 8x \vdots 8$

193. a) $Q = -10xy^2 + y^3 + 5$; b) $Q = -3x^4 + 7x^3y + 14xy^3 + 5$

194. $A + B + C = x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4 + 1 > 0$

Suy ra ít nhất một trong 3 đa thức phải có giá trị dương với mọi x, y.

195. a) Với $7x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{7}$ thì $|7x - 1| = 7x - 1$

lúc đó $A = 2x^2 + (7x - 1) - 5 + x - 2x^2 = 8x - 6$

Với $7x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$ thì $|7x - 1| = 1 - 7x$

lúc đó $A = 2x^2 + (1 - 7x) - 5 + x - 2x^2 = -6x - 4$

b) Ta xét 2 trường hợp :

Với $x \geq \frac{1}{7}$ thì $8x - 6 = 2 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$ (thoả mãn $x \geq \frac{1}{7}$)

Với $x < \frac{1}{7}$ thì $-6x - 4 = 2 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$ (thoả mãn $x < \frac{1}{7}$)

196. a) $M = 7(x-y) + 4a(x-y) - 5 = 7 . 0 + 4a . 0 - 5 = -5$

b) $N = (x^2 + y^2)(x - y) + 3 = (x^2 + y^2) . 0 + 3 = 3$

197. Vì $x - y - z = 0$ nên $x = y + z$.

Xét tổng $A + B = xyz - xy^2 - xz^2 + y^3 + z^3 =$

$= (y + z) . yz - (y + z).y^2 - (y + z)z^2 + y^3 + z^3$

$= y^2z + yz^2 - y^3 - y^2z - yz^2 - z^3 + y^3 + z^3 = 0$

Vậy A và B là hai đa thức đối nhau.

198. $A = 4x^4 + 4x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3y^4 + 5y^2$; $A = 4x^2(x^2 + y^2) + 3y^2(x^2 + y^2) + 5y^2$

$A = 4x^2.5 + 3y^2 . 5 + 5y^2$; $A = 20x^2 + 15y^2 + 5y^2 = 20x^2 + 20y^2$

$A = 20(x^2 + y^2) = 20.5 = 100$

199. $A = x^2 + 2mx + m^2$; $B = x^2 - 2mx + m^2$; $C = x^2 - m^2$

200. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vì $f(5) = f(-5)$ nên $25a^2 + 5b + c = 25a^2 - 5b + c$

suy ra $5b = -5b$; $5b + 5b = 0$; $10b = 0$; $b = 0$.

Vậy $f(x) = ax^2 + c$. Ta có $f(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c$. Do đó $f(x) = f(-x)$

201. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Vì $f(x) = f(-x)$ nên $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e =$

$$= a(-x)^4 + b(-x)^3 + c(-x)^2 + d(-x) + e$$

hay $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$.

$bx^3 + dx = -bx^3 - dx$; $2bx^3 = -2dx$; $bx^3 = -dx$ với mọi x suy ra $b = d = 0$

tức là các hệ số của luỹ thừa lẻ đều bằng 0.

202. $f(x) - g(x) = x^{2n+1}$; $f\left(\frac{1}{10}\right) - g\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1} = \frac{1}{10^{2n+1}} = 10^{-(2n+1)}$

203. $f(x) = x^8 - 100x^7 - x^7 + 100x^6 + x^6 - 100x^5 - x^5 + \ldots + 100x^2 +$

$$+ x^2 - 100x - x + 25$$

$f(x) = x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + x^5(x-100) - \ldots + x(x - 100) - (x - 25)$

$f(100) = 100^7.(100 - 100) - 100^6(100 - 100) + \ldots + 100(100 - 100) - (100 - 25)$

$f(100) = -75$

204. Tổng các hệ số của $f(x)$ chính là $f(1)$.

$f(1) = (8 + 5 - 14)^{49} . (3 - 10 + 6 + 2)^{50} = (-1)^{49} . 1^{50} = -1$

205. Vì $7a + b = 0$ nên $b = -7a$.

Do đó $f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - 7ax + c$; $f(10) = 100a - 70a + c = 30a + c$

$f(-3) = 9a + 21a + c = 30a + c$

Vậy $f(10) . f(-3) = (30a + c)^2 \geq 0$. Tích này không thể là một số âm.

206. $f(x) = ax + b$.

$f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$ (1) ; $f(3) = 8 \Rightarrow 3a + b = 8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(3) - f(1) = (3a + b) - (a + b) = 6$; $a = 3$, dẫn tới $b = -1$.

207. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4 (1)$; $f(-1) = 8 \Rightarrow a - b + c = 8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + c = 6$; kết hợp với $a - c = -4$ ta được $a = 1$; $c = 5$, từ đó $b = -2$

208. $f(x) = (a + 4)x^3 - 4x + 8$; $g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4 = 1 \\ -4b = 0 \\ c - 3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 11 \end{cases}$$

209. Vì $f(1) = g(2)$ nên $2 + a + 4 = 4 - 10 - b \Leftrightarrow a + b = -12$;

$f(-1) = g(5)$ nên $2 - a + 4 = 25 - 25 - b \Leftrightarrow a - b = 6$.

Do đó $a = -3$; $b = -9$

210. a) $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{4}{5}$; b) $x = \pm\sqrt{2}$; c) Không có nghiệm ; d) $x_1 = 0$; $x_2 = -2$

e) $x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 3x - 3 = x(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x + 3)$

$$(x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

211. a) $f(x) = 4$ có bậc 0 nên không có nghiệm.

b) $f(x) = 0$ không có bậc nên có vô số nghiệm.

c) $h(x) = x^2 - x + 1 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Đa thức này không có nghiệm.

212. a) $m + 2 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -10$; b) $7 + m + (-1) = 0 \Leftrightarrow m = -6$

c) $1 + (-3) + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

213. a) $(-2)^2 + m.(-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$; b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

$f(x)$ có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ nên $f(x)$ nhận -1 làm một nghiệm. Như vậy $f(x)$ có 2 nghiệm là -2 (theo câu a) và -1 ngoài ra không còn nghiệm nào khác vì đa thức bậc hai có nhiều nhất là 2 nghiệm. Do đó tập hợp các nghiệm của $f(x)$ là $S = \{-1 ; -2\}$.

214. x_0 là nghiệm của f(x) nên $f(x) = ax_0 + b = 0$

Mặt khác $f(0) = a.0 + b \neq 0$ nên $x_0 \neq 0$; $\frac{1}{x_0}$ có nghĩa.

Xét $g\left(\frac{1}{x_0}\right) = b.\frac{1}{x_0} + a = \frac{b + ax_0}{x_0} = \frac{0}{x_0} = 0$ do đó $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của đa thức g(x)

215. Vì $(x - 1) . f(x) = (x + 4) . f(x + 8)$ với mọi x nên :

- Khi x = 1 thì $0. f(1) = 5.f(9) \Rightarrow f(9) = 0$. Vậy x = 9 là một nghiệm của f(x)
- Khi x = –4 thì $-5 . f(-4) = 0 . f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$

Vậy x = –4 là một nghiệm của f(x). Do đó f(x) có ít nhất hai nghiệm là 9 và –4.

216. a) $|5x + 4| = 19$; $x_1 = 3$; $x_2 = -4,6$; b) $|9 - 2x| = 11$; $x_1 = -1$; $x_2 = 10$

c) $|5 - 6x| = -1$; không có giá trị nào của x thoả mãn.

d) $|x + 5| - 4 = \pm 3$

Xét $|x + 5| - 4 = 3 \Leftrightarrow |x + 5| = 7 \Leftrightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -12$

Xét $|x + 5| - 4 = -3 \Leftrightarrow |x + 5| = 1 \Leftrightarrow x_3 = -4$; $x_4 = -6$

217. a) Xét điều kiện thứ nhất $5x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5}$ (1)

Xét điều kiện thứ hai $\left[\begin{array}{l} 9 - 7x = 5x - 3 \\ 9 - 7x = 3 - 5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (Thoả mãn điều kiện (1))} \\ x = 3 \text{ (Thoả mãn điều kiện (1))} \end{array}\right.$

Kết luận : Vậy $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

b) $|4x + 1| = 7x - 2$; $x = 1$

218. a) $|17x - 5| = |17x + 5|$; $x = 0$; b) $x_1 = 22$; $x_2 = 2$

219. $\begin{cases} x(x - 3) = 0 \\ (x + 1)(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{hoặc } x = 3 \\ x = -1 & \text{hoặc } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

220. a) $-37 < 10x + 7 < 37 \Leftrightarrow -4,4 < x < 3$

b) $-19 \leq 3 - 8x \leq 19$; $-2 \leq x \leq \frac{11}{4}$

221. a) $\left[\begin{array}{l} 15x - 1 > 31 \\ 15x - 1 < -31 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{32}{15} \\ x < -2 \end{array}\right.$; b) $\left[\begin{array}{l} 2x - 5 \geq 21 \\ 2x - 5 \leq -21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 13 \\ x \leq -8 \end{array}\right.$

222. a)

x		−2		5	
x + 2	–	0	+	|	+
x – 5	–	|	–	0	+

– Xét khoảng $x < -2$ ta được $-2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$ (loại)

– Xét khoảng $-2 \le x \le 5$ ta được $0x = 0$ đúng với mọi x trong khoảng đang xét.

Vậy $-2 \le x \le 5$

– Xét khoảng $x > 5$ ta được $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ (loại)

Kết luận : $-2 \le x \le 5$

b)

x		−3		4	
x + 3	–	0	+	|	+
x – 4	–	|	–	0	+

– Xét khoảng $x < -3$ ta được $-2x = 7 \Leftrightarrow x = -3{,}5$ (thuộc khoảng đang xét)

– Xét khoảng $-3 \le x \le 4$ ta được $0x = 1$ (không có giá trị nào của x được thoả mãn).

– Xét khoảng $x > 4$ ta được $-2x = -7 \Leftrightarrow x = 3{,}5$ (không thuộc khoảng đang xét).

Kết luận : Vậy $x = -3{,}5$

223. a) Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 4$ ta được 2 cặp số là $(0 ; 4) ; (0 ; -4)$

Nếu $x = \pm 1$ thì $y = \pm 3$, ta được 4 cặp số là $(1 ; 3) ; (-1 ; -3) ; (1 ; -3) ; (-1 ; 3)$

Nếu $x = \pm 2$ thì $y = \pm 2$, ta được 4 cặp số

Nếu $x = \pm 3$ thì $y = \pm 1$, ta được 4 cặp số

Nếu $x = \pm 4$ thì $y = 0$, ta được 2 cặp số

Tóm lại, có tất cả $2 + 4 + 4 + 4 + 2 = 16$ cặp số thoả mãn đẳng thức đã cho.

Có tất cả $7 + 10 + 6 + 2 = 25$ cặp số thoả mãn bất đẳng thức đã cho.

224. a) $P = 40$

b) $P = 2x^2 + 2xy - 2x + y^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1$

$P = (x + y)^2 + (x - 1)^2 \ge 0$ (dấu = $\Leftrightarrow x = 1 ; y = -1$)

225. a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$.

b) $f(-4) = (-4)^2 + 5(-4) + 4 = 0 \Rightarrow -4$ là nghiệm của f(x)

c) Vì tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ (1 + 4 = 5) nên f(x) có nghiệm là – 1. f(x) là đa thức bậc hai, có không quá hai nghiệm nên tập hợp các nghiệm của f(x) là $S = \{-4 ; -1\}$.

226. Hệ số tự do là –6 có các ước là ±1 ; ±2 ; ±3 ; ±6.

Thử với x = 1 ; x = 2 ; x = 3 ta thấy chúng đều là nghiệm của f(x).

Vậy $S = \{1 ; 2 ; 3\}$.

227. Vì $f(x_1) = g(x_1)$ nên $x_1^2 + px_1 + q = x_1^2 + p'x_1 + q'$ hay $px_1 + q = p'x_1 + q'$ (1)

Vì $f(x_2) = g(x_2)$ nên $x_2^2 + px_2 + q = x_2^2 + p'x_2 + q'$ hay $px_2 + q = p'x_2 + q'$ (2)

Trừ từng vế của hai đẳng thức (1) và (2) ta được

$p(x_1 - x_2) = p'(x_1 - x_2) \Rightarrow p = p'$ (3) (vì $x_1 \neq x_2$)

Từ (1) và (3) suy ra q = q'. Do đó f(x) = g(x) với mọi x.

228. Thay x = 2 vào (1) ta được 2.f(2) – 2.f(–2) = 12 (2)

Thay x = –2 vào (1) ta được 2.f(–2) + 2.f(2) = 8 (3).

Cộng từng vế của (2) và (3) ta được 4 f(2) = 20 ; f(2) = 5

229. $S_1 = 5a \,\vdots\, 5$ $(a \in Z)$; $S_2 = 10a + 20 \,\vdots\, 10$ $(a \in Z)$

230. S = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b)

S = 111(a + b + c) = 37.3(a + b + c).

Vì $0 < a + b + c \leq 27$ nên $a + b + c \not\vdots\, 37$.

Mặt khác (3 ; 37) = 1 nên $3(a + b + c) \not\vdots\, 37$

Suy ra S không thể là số chính phương .

231. a) Nếu $x + y \geq 0$ thì $A = (x - y) + (x + y) = 2x \,\vdots\, 2 \Rightarrow$ A chẵn

Nếu $x + y < 0$ thì $A = (x - y) - (x + y) = -2y \,\vdots\, 2 \Rightarrow$ A chẵn

b) Tương tự câu a.

c) Nếu $|x + y| + z \geq 0$ thì

$C = (x - y - z) + |x + y| + z = (x - y) + |x + y|$ là số chẵn (theo câu a).

Nếu $|x + y| + z < 0$ thì $C = (x - y - z) + (-|x + y| - z)$; $C = (x - y) - |x + y| - 2z$

Vì $(x - y) - |x + y|$ là số chẵn (theo câu b) nên C là số chẵn.

232. Ta có $(a - b)^2 \geq 0$ (dấu = $\Leftrightarrow$ a = b) hay $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Áp dụng : Nếu b = 1 thì ta có $a^2 + 1 \geq 2a$

A = (a + 1) (b + 1) = a(b + 1) + (b + 1) = ab + a + b + 1.

A = 1 + a + b + 1 = a + b + 2

Vì $ab = 1$ nên $b = \frac{1}{a}$ do đó $A = a + \frac{1}{a} + 2 = \frac{a^2+1}{a} + 2$; $A \geq \frac{2a}{a} + 2 = 2 + 2 = 4$

233. Vì $x - y = 2$ nên $x = y + 2$.

a) $P = xy + 4 = (y + 2) . y + 4 = y^2 + 2y + 4 = y^2 + 2y + 1 + 3$

$P = (y + 1)^2 + 3 \geq 3$ (dấu = $\Leftrightarrow y = -1$)

Do đó GTNN của P là 3 khi $y = -1$; $x = 1$

b) $Q = x^2 + y^2 - xy = x^2 - 2xy + y^2 + xy = (x - y)^2 + xy$

$Q = 4 + xy$. Theo câu a thì GTNN của Q là 3 (khi $x = 1$; $y = -1$)

234. a) Vì $|x - 3| \geq 0$ (dấu = $\Leftrightarrow x = 3$) nên $P = 9 - 2|x - 3| \leq 9$

$\Rightarrow$ GTLN của P là 9 (khi $x = 3$)

b) $Q = |x - 2| + |x - 8| = |x - 2| + |8 - x| \geq |x - 2 + 8 - x|$

$Q \geq |6| = 6$ (dấu = $\Leftrightarrow (x - 2).(8 - x) \geq 0$)

Vậy GTNN của Q là 6 (khi $2 \leq x \leq 8$)

235. a) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Ta có $xy = x.x = x^2 \geq 0$ (dấu = $\Leftrightarrow x = y = 0$)

b) $x - y + z = 0 \Rightarrow x = y - z$. Theo kết quả câu a ta có $x(y - z) \geq 0$

$\Rightarrow xy - xz \geq 0$ (1)

Tương tự : $x - y + z = 0 \Rightarrow y = x + z \Rightarrow y(x + z) \geq 0 \Rightarrow xy + yz \geq 0$ (2)

$x - y + z = 0 \Rightarrow z = y - x \Rightarrow z(y - x) \geq 0 \Rightarrow zy - zx \geq 0$ (3)

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức (1) ; (2) ; (3) ta được $2(xy + yz - zx) \geq 0$

Do đó $xy + yz - zx \geq 0$ (dấu = $\Leftrightarrow x = y = z = 0$)

236. Vì $f(x_1 . x_2) = f(x_1) . f(x_2)$ nên $f(4) = f(2.2) = f(2).f(2) = 5.5 = 25$.

$f(8) = f(4.2) = f(4) . f(2) = 25 . 5 = 125$

237. a) $x \neq 1$; b) $f(7) = \frac{3}{2}$; c) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(x + 2) = x - 1 \Leftrightarrow x = -3$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$

f(x) có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 1 \in$ Ư (3) $\Leftrightarrow x - 1 \in \{\pm 1 ; \pm 3\}$

x−1	−1	1	−3	3
x	0	2	−2	4

e) $f(x) > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

PHẦN HÌNH HỌC

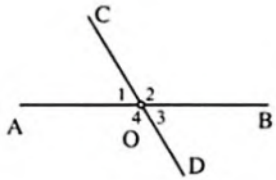
CHƯƠNG I : ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. a) 6 cặp góc đối đỉnh.

b) n đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo thành 2n tia chung gốc. Số góc tạo thành là $\frac{2n.(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ góc. Không kể n góc bẹt thì số góc còn lại là $n(2n-1) - n = 2n(n-1)$. Mỗi góc trong số những góc này đều có một góc đối đỉnh với nó. Vậy số cặp góc đối đỉnh là : $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$

2. *(Hình 71).*

a) Giả sử không có góc nào nhỏ hơn hoặc bằng 90^o thì tổng của 4 góc sẽ lớn hơn 360^o, đó là điều vô lí. Vậy ít nhất phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng 90^o. Góc này và góc đối đỉnh của nó phải bằng nhau, do đó tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 90^o.



Hình 71

b) Giả sử $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 255^o$, mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 180^o$

nên $\widehat{O}_3 = 255^o - 180^o = 75^o$, từ đó suy ra $\widehat{O}_1 = 75^o, \widehat{O}_2 = \widehat{O}_4 = 105^o$.

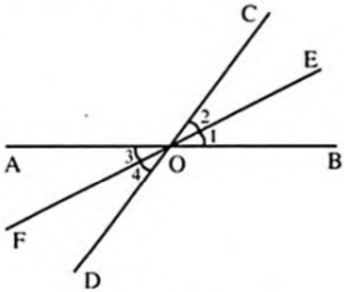
3. *(Hình 72)*

Gọi $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc đối đỉnh và OE, OF lần lượt là tia phân giác của hai góc này.

Suy ra $\widehat{O}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$; $\widehat{O}_3 = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$

mà $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$ (cùng bằng một nửa của hai góc bằng nhau)

Ta có $\widehat{O}_1 + \widehat{AOE} = 180^o$ (kề bù) suy ra $\widehat{O}_3 + \widehat{AOE} = 180^o$



Hình 72

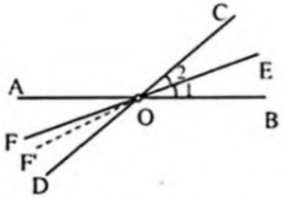
Hai góc $\widehat{O}_3$ và $\widehat{AOE}$ là *hai góc kề*, có tổng bằng 180^o nên hai cạnh OE, OF là hai tia đối nhau.

4. *(Hình 73)*

Gọi $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc đối đỉnh.

Tia OE là tia phân giác của góc BOC và tia OF là tia đối của tia OE.

Ta phải chứng minh tia OF là tia phân giác của góc AOD.



Hình 73

Giả sử tia OF không phải là tia phân giác của góc AOD.

Vẽ tia OF' là tia phân giác của góc AOD, thế thì tia OF' là tia đối của tia OE *(xem bài 3)*. Như vậy hai tia OF và OF' đều là tia đối của tia OE, đó là điều vô lý.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra tia OF là tia phân giác của góc AOD.

Nhận xét : Phương pháp giải bài này cũng như câu a của bài 2 là phương pháp phản chứng gồm 3 bước :

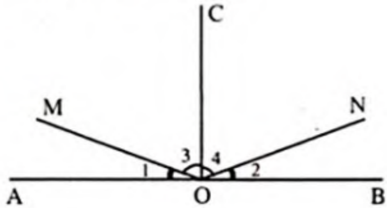
Bước 1 : Giả sử có điều trái với điều phải chứng minh.

Bước 2 : Từ đó suy luận ra một điều mâu thuẫn với các điều đã biết.

Bước 3 : Vậy điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

5. *(Hình 74)*

Tia OM nằm giữa hai tia OA và OC ; tia ON nằm giữa hai tia OB và OC do đó $\widehat{COA} = \widehat{O}_3 + \widehat{O}_1$ và $\widehat{COB} = \widehat{O}_4 + \widehat{O}_2$.



Hình 74

Vì $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (giả thiết) ; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (vì tia OC là tia phân giác của góc MON) nên $\widehat{COA} = \widehat{COB}$. $\widehat{COA}$ và $\widehat{COB}$ là hai góc kề bù bằng nhau nên $\widehat{COA} = 180^o : 2 = 90^o$ suy ra $OC \perp AB$

6. *(Hình 75)*

a) Tia OB nằm giữa hai tia Ox, Oy nên $\widehat{BOx} = \widehat{xOy} - \widehat{BOy} = 90^o - 30^o = 60^o$

Tia OA nằm giữa hai tia Ox, OB nên $\widehat{AOB} = \widehat{BOx} - \widehat{AOx} = 60^o - 30^o = 30^o$

Vậy $\widehat{AOB} = \widehat{AOx}$ $(= 30^o)$

do đó tia OA là phân giác của góc BOx

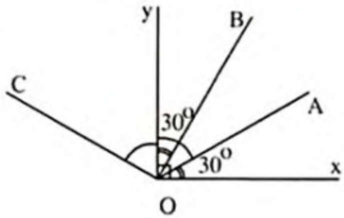
b) Tia Oy là tia phân giác của góc AOC (đề bài)

nên $\widehat{AOC} = 2\widehat{AOy} = 2 \,.\, 60^o = 120^o$.

Tia OB nằm giữa hai tia OA, OC

nên $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 120^o - 30^o = 90^o$.

Do đó $OB \perp OC$



Hình 75

7. *(Hình 76)*

a) $OA \perp OM \Rightarrow \widehat{AOM} = 90^o$; $OB \perp ON \Rightarrow \widehat{BON} = 90^o$.

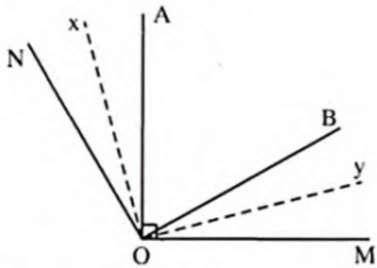
Các tia OA, OB ở trong góc MON

nên $\widehat{AON} = \widehat{MON} - \widehat{AOM} =$

$= 120^o - 90^o = 30^o$

$\widehat{BOM} = \widehat{MON} - \widehat{BON} = 120^o - 90^o = 30^o$.

Vậy $\widehat{AON} = \widehat{BOM} = 30^o$



Hình 76

b) Tia Ox là tia phân giác của góc AON

nên $\widehat{NOx} = 15^o$.

Tia Oy là tia phân giác của góc BOM nên $\widehat{MOy} = 15^o$

Tia Ox nằm giữa hai tia OM, ON nên $\widehat{MOx} = \widehat{MON} - \widehat{NOx} = 120^o - 15^o = 105^o$.

Tia Oy nằm giữa hai tia OM và Ox nên $\widehat{xOy} = \widehat{MOx} - \widehat{MOy} = 105^o - 15^o = 90^o$.

Vậy $Ox \perp Oy$

c) Những cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc là :

$\widehat{AON}$ và $\widehat{BOM}$; $\widehat{NOx}$ và $\widehat{BOy}$; $\widehat{AOx}$ và $\widehat{MOy}$

8. *(Xem hình 10)*

Bạn hãy chứng tỏ rằng a // Ox ; b // Oy

Trả lời : $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, $\hat{B}_3$, $\hat{B}_4$ có cạnh tương ứng song song với $\hat{O}_1$.

9. *(Xem hình 11)*

$\widehat{DAB} = 360^o - (140^o + 90^o) = 130^o$ sau đó dùng dấu hiệu cặp góc trong cùng phía bù nhau.

10. *(Xem hình 12)*

Tính được $\widehat{B}_2 = 72^o$; $\widehat{A}_1 = 72^o$, suy luận tiếp để được một cặp góc đồng vị bằng nhau, dẫn tới a // b

11. Nếu tia Ct nằm trong góc xOy thì phải có $\widehat{xCt} = 60^o$.

Nếu tia Ct nằm ngoài góc xOy thì phải có $\widehat{xCt} = 120^o$.

b) a^o hoặc $180^o - a^o$

12. *(Hình 77)*

Vẽ tia Ot ở trong góc MON sao cho $\widehat{MOt} = m^o$

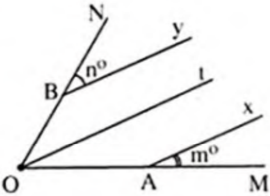
$\Rightarrow \widehat{NOt} = n^o$

Có $\widehat{MAx} = \widehat{MOt}\ (= m^o)$; $\widehat{NBy} = \widehat{NOt}\ (= n^o)$

suy ra Ax // Ot ; By // Ot

(vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Vậy Ax // By (vì cùng song song với Ot)



Hình 77

13. Giả sử trong số 11 đường thẳng vẽ qua điểm A có chứa đến 10 đường thẳng cắt a.

Suy ra ít nhất cũng còn hai đường thẳng không cắt a.

Như thế là có hai đường thẳng cùng đi qua A và cùng song song với a. Đó là điều vô lí vì trái với tiên đề Ơ-clit.

Vậy điều giả sử là sai. Do đó qua A có ít nhất 10 đường thẳng cắt a

14 *(Hình 17)*

Bạn hãy chứng tỏ rằng a // b. Từ đó tính $\widehat{N}_2$ rồi suy ra $\widehat{N}_1$. Đáp số = 80^o

15. *(Hình 78)*

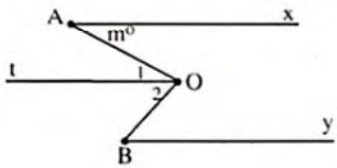
Trong góc AOB vẽ tia Ot sao cho Ot // Ax.

Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{A} = m^o$ (so le trong)

suy ra $\widehat{O}_2 = n^o$.

Ot // By (vì cùng song song với Ax)

do đó $\widehat{B} = \widehat{O}_2 = n^o$ (so le trong)



Hình 78

16. *(Hình 79)*

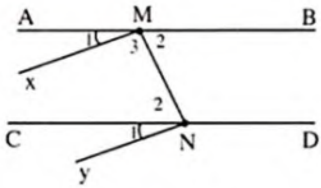
AB // CD (đề bài) $\Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{N}_2$

(cặp góc so le trong) ; $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$ (đề bài)

Do đó $\widehat{M}_3 + \widehat{MNy} = \widehat{M}_3 + \widehat{N}_2 + \widehat{N}_1$

$$= \widehat{M}_3 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_1 = 180^o.$$

Suy ra Mx // Ny (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau)



Hình 79

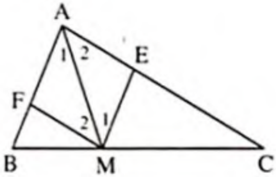
17. *(Hình 80)*

ME // AB, MF // AC (đề bài) suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_1$, $\widehat{M}_2 = \widehat{A}_2$ (cặp góc so le trong)

Tia MA là tia phân giác của góc EMF

$\Leftrightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \Leftrightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

$\Leftrightarrow$ Điểm M là giao điểm của tia phân giác của góc A với cạnh BC

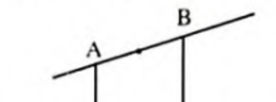


Hình 80

18. Nếu $0 < a < 180$ thì $\widehat{O} = \widehat{I} = \dfrac{a^0}{2}$

Nếu a = 180 thì không xác định được số đo của các góc $\widehat{O}$ và $\widehat{I}$

19. Nếu đường thẳng AB không vuông góc với đường thẳng a thì AH // BK *(hình 81a)*



Hình 81a

Hình 81b

Nếu đường thẳng AB $\perp$ a thì AH và BK trùng nhau *(hình 81b)*

20. *(Hình 81)*

$\widehat{A}_2 = 105^o$, $\widehat{B}_2 = 105^o \Rightarrow$ a// b

$C_2 = 90^o$, $\Rightarrow$ b $\perp$ c mà a// b nên a $\perp$ c

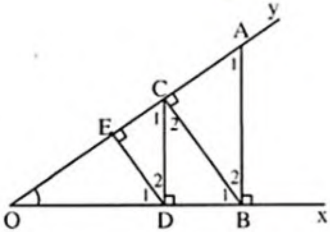
21. *(Hình 82)*

a) AB // CD (vì cùng vuông góc với Ox)

BC // DE (vì cùng vuông góc với Oy)

b) $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

$\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2 = \widehat{D}_2 = \widehat{O}$



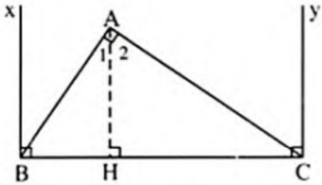
Hình 82

22. *(Hình 83)*

Vẽ AH ⊥ BC (H ∈ BC) thì AH // Bx và AH // Cy (vì cùng vuông góc với BC)

$\widehat{ABx} = \widehat{A}_1$; $\widehat{ACy} = \widehat{A}_2$ (cặp góc so le trong)

Do đó $\widehat{ABx} + \widehat{ACy} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^o$



Hình 83

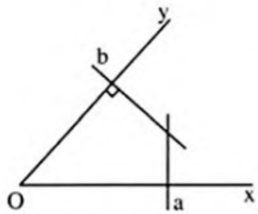
23. *(Hình 84)*

Cho a ⊥ Ox ; b ⊥ Oy. Ta phải chứng tỏ a và b cắt nhau.

Giả sử a và b không cắt nhau suy ra a và b phải trùng nhau hoặc song song.

– Nếu a trùng với b thì qua O có hai đường thẳng phân biệt là Ox, Oy cùng vuông góc với a, đó là điều vô lí.

– Nếu a // b thì Ox ⊥ b (vì Ox ⊥ a). Theo đề bài lại có Oy ⊥ b, như vậy qua O có hai đường thẳng phân biệt là Ox, Oy cùng vuông góc với b, đó là điều vô lí.



Hình 84

Vậy hai đường thẳng a, b phải cắt nhau.

24. a) $\widehat{M} = \widehat{N}$ (vì cùng bằng góc O)

b) $\widehat{M} = \widehat{N}$ (vì cùng phụ với góc O)

c) $\widehat{O}_2 = 90^o$ (vì $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 180^o$)

d) $\widehat{M'} = \widehat{N'}$ (vì cùng bằng hai góc bằng nhau)

25. A'B' + C'D' (vì là tổng của hai đoạn thẳng bằng nhau đôi một)

26. Có thể điền bất cứ kí hiệu nào trong 3 kí hiệu : = ; < ; > với điều kiện hai ô cùng một kí hiệu

27. Điền kí hiệu <

28. Có thể lập bài toán đảo như sau :

Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB ta vẽ ba tia OM, ON, và OC sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON} < 90^o$ và $OC \perp AB$. Chứng minh rằng tia OC là tia phân giác của góc MON.

Hướng dẫn : (Hình 85)

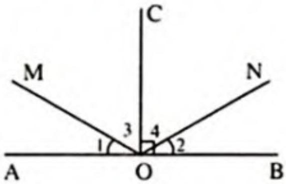
$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = \widehat{AOC}$

$\widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 = \widehat{BOC}$

$OC \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_4$

Vì $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (gt) nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (đpcm)



Hình 85

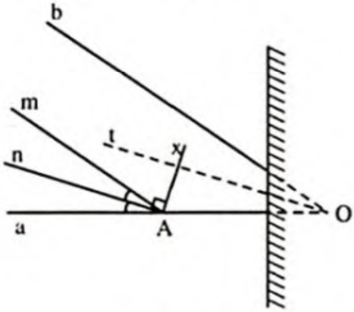
29. *(Hình 86)*

Từ A vẽ tia Am // b (tia Am ở trong góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng).

– Vẽ tia phân giác An của góc aAm thì An//Ot

– Vẽ tia $Ax \perp An$ thì $Ax \perp Ot$

Phần chứng minh dành cho bạn đọc (*xem thí dụ 7*)

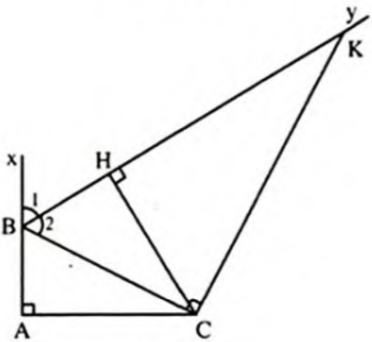


Hình 86

30. *(Hình 87)*

$\widehat{HCA} = \widehat{B}_1$; $\widehat{HCK} = \widehat{B}_2$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

Vì $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (gt) nên $\widehat{HCA} = \widehat{HCK}$



Hình 87

31. $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc nên chúng bằng nhau hoặc bù nhau.

Vì $\widehat{A} - \widehat{B} = 40^o$ (gt)

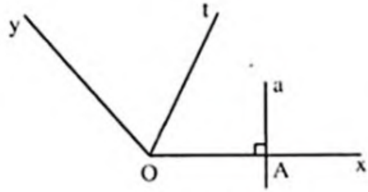
nên $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$ suy ra $\widehat{A} = 110^o$; $\widehat{B} = 70^o$

32. *(Hình 88)*

Giả sử a và Ot không cắt nhau suy ra a // Ot.

Vì a ⊥ Ox nên Ot ⊥ Ox $\Rightarrow \widehat{xOt} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{xOy} = 180^o$



Hình 88

điều này vô lí vì theo giả thiết $\widehat{xOy} < 180^o$.

Vậy a và Ot phải cắt nhau.

33. Lấy điểm O tuỳ ý. Qua O vẽ 9 đường thẳng lần lượt song song với 9 đường thẳng đã cho. 9 đường thẳng qua O tạo thành 18 góc không có điểm trong chung, mỗi góc này tương ứng bằng góc giữa hai đường thẳng trong số 9 đường thẳng đã cho. Tổng số đo của 18 góc đỉnh O là 360^o do đó ít nhất có một góc không nhỏ hơn $360^o : 18 = 20^o$, từ đó suy ra ít nhất cũng có hai đường thẳng mà góc nhọn giữa chúng không nhỏ hơn 20^o.

CHƯƠNGII : TAM GIÁC

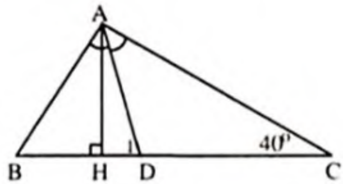
34. *(Hình 89)*

$\widehat{BAH} = \widehat{C} = 40^o$ (cùng phụ với $\widehat{B}$),

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 45^o$

(vì AD là phân giác của góc BAC)

$\widehat{BAH} < \widehat{BAD} \Rightarrow$ Tia AH nằm giữa hai tia AB, AD.



Hình 89

Xét tam giác DAC có D_1 là góc ngoài tại đỉnh D nên

$$\widehat{D}_1 = \widehat{C} + \widehat{CAD} = 40^o + 45^o = 85^o$$

Xét tam giác vuông HAD có $\widehat{HAD} = 90^o - \widehat{D}_1 = 90^o - 85^o = 5^o$

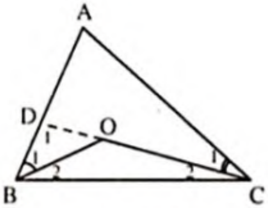
35. Giả sử cả ba góc ngoài ở ba đỉnh đều lớn hơn 120^o suy ra mỗi góc trong đều nhỏ hơn 60^o. Vậy tổng ba góc trong của tam giác nhỏ hơn 180^o, vô lí. Do đó tồn tại một góc ngoài có số đo không lớn hơn 120^o

36. a) $\widehat{BDC}$ là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác DAC nên $\widehat{BDC} > \widehat{A} = 90^o$;

$90^o < \widehat{BDC} < 180^o \Rightarrow \widehat{BDC}$ là góc tù

b) $\widehat{B} = 60^o$

37. *(Hình 90)*



Hình 90

a) Tia CO cắt AB tại D.

Xét Δ BOD có $\widehat{BOC}$ là góc ngoài nên

$\widehat{BOC} = \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1$

Xét Δ ADC có $\widehat{D}_1$ là góc ngoài nên

$\widehat{D}_1 = \widehat{A} + \widehat{C}_1$.

Vậy $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1$

b) Nếu $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2}$ thì $\widehat{BOC} = \widehat{A} + 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2} = 90^o + \dfrac{\widehat{A}}{2}$

Xét Δ BOC có $\widehat{C}_2 = 180^o - (\widehat{O} + \widehat{B}_2) = 180^o - (90^o + \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2})$;

$\widehat{C}_2 = 90^o - \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^o - \dfrac{180^o - \widehat{C}}{2} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$

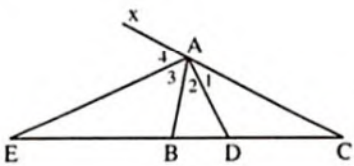
Suy ra tia CO là tia phân giác của góc C

38. *(Hình 91)*

a) $\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{A}_2$; $\widehat{ADB} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$ (tính chất góc ngoài tam giác), suy ra

$\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} + \widehat{A}_2 - \widehat{A}_1 - \widehat{C} = \widehat{B} - \widehat{C}$

(vì $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$)



Hình 91

b) Xét Δ AEB có $\widehat{ABC}$ là góc ngoài nên $\widehat{E} = \widehat{ABC} - \widehat{A}_3$ (1)

Xét Δ AEC có $\widehat{A}_4$ là góc ngoài nên $\widehat{E} = \widehat{A}_4 - \widehat{C}$ (2)

Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta được :

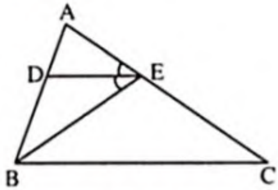
$2\hat{E} = \widehat{ABC} - \hat{A}_3 + \hat{A}_4 - \hat{C} = \hat{B} - \hat{C}$ (vì $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$). Vậy $\hat{E} = \dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$

39. *(Hình 92)*

a) Xét tam giác ABC có

$\hat{B} = 180^o - (\hat{A} + \hat{C})$

$\hat{B} = 180^o - (180^o - 3\hat{C} + \hat{C})$; $\hat{B} = 2\hat{C}$



Hình 92

b) Vẽ phân giác BE ; vẽ ED // BC (D ∈ AB). D là điểm cần xác định. Bạn đọc hãy chứng minh ED là tia phân giác của góc AEB.

40. Δ ABC = Δ HIK $\Rightarrow \hat{B} = \hat{I}$; Δ ACB = Δ HIK $\Rightarrow \hat{C} = \hat{I}$. Vậy Δ ABC có $\hat{B} = \hat{C}$ (vì cùng bằng $\hat{I}$)

41. ΔMNP = Δ NPM $\Rightarrow$ MN = NP ; NP = PM. Vậy MN = NP = PM $\Rightarrow$ ΔMNP là tam giác đều.

42. ΔABC = ΔDEF = ΔHIK (gt) ; Suy ra $\hat{A} = \hat{H} = 90^o$; AB = HI = 2 cm ; DF = HK = 2 cm

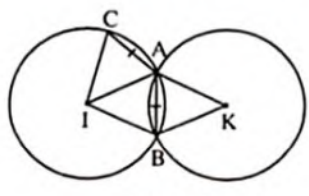
Δ HIK có $\hat{H} = 90^o$ và HI = HK (= 2 cm) nên là tam giác vuông cân

43. Trong hình 37a có Δ ABM = Δ ACN ; Δ ABN = Δ ACM.

Trong hình 37b, bạn hãy tìm 4 tam giác bằng nhau ngoài ra còn có hai cặp tam giác khác cũng bằng nhau.

44. *(Hình 93)*

Bạn hãy chứng minh ΔIAC = ΔIAB ; ΔIAB = ΔKAB theo trường hợp cạnh–cạnh–cạnh để suy ra $\widehat{IAC} = \widehat{IAB} = \widehat{KAB}$



Hình 93

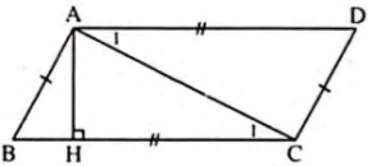
45. *(Hình 94)*

Δ ABC = Δ CDA (c.c.c)

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$; $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ (cặp góc tương ứng)

Do đó AB // CD ; AD //BC (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

Ta có AH $\perp$ BC (gt) nên AH $\perp$ AD (mối quan hệ song song và vuông góc)



Hình 94

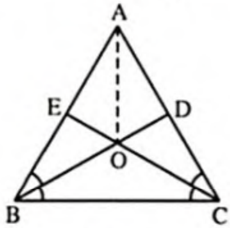
46. *(Hình 95)*

a) Bạn hãy chứng minh hai tam giác BDA và BDC bằng nhau suy ra $\widehat{BDA} = \widehat{BDC}$, dẫn tới BD $\perp$ AC. Chứng minh tương tự ta được CE $\perp$ AB

b) Bạn hãy chứng minh $\Delta BOC = \Delta BOA$; $\Delta COB = \Delta COA$

suy ra OC = OA và OB = OA ; dẫn tới đpcm.

c) Từ các tam giác bằng nhau ở câu b suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 360^o : 3 = 120^o$



Hình 95

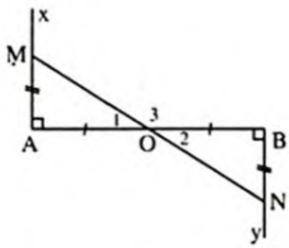
47. *(Hình 96)*

$\Delta AOM = \Delta BON$ (c.g.c)

Suy ra OM = ON và $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Ta có $\widehat{O}_3 + \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 + \widehat{O}_1 = 180^o$ nên ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Do đó O là trung điểm của MN.



Hình 96

48. *(Hình 97)*

– Giả sử C nằm giữa A và B.

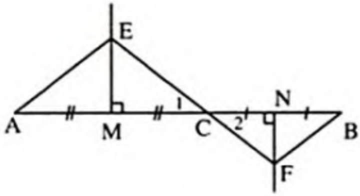
Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB với các đường trung trực của AC, BC.

$\Delta EMA = \Delta EMC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}_1$

$\Delta FNB = \Delta FNC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_2$

Mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (đối đỉnh) nên $\widehat{A} = \widehat{B} \Rightarrow AE // BF$

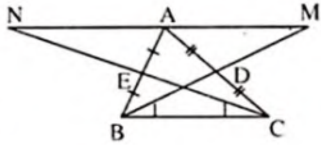
(vì có cặp góc so le trong bằng nhau)



Hình 97

Bạn đọc tự chứng minh trường hợp C nằm ngoài đoạn AB.

49. *(Hình 98)*



Hình 98

Δ DMA = Δ DBC (c.g.c) $\Rightarrow$ AM = BC và $\widehat{M} = \widehat{B}_1 \Rightarrow$ AM // BC (vì có cặp góc so le trong bằng nhau) (1)

Δ EAN = Δ EBC (c.g.c) $\Rightarrow$ AN = BC và $\widehat{N} = \widehat{C}_1 \Rightarrow$ AN // BC (vì có cặp góc so le trong bằng nhau) (2)

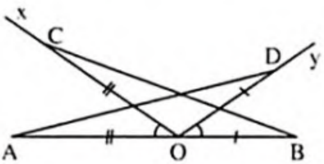
Từ (1) và (2) theo tiên đề Ơ–clit suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Ta có AM = AN = BC $\Rightarrow$ BC $= \dfrac{1}{2}$MN

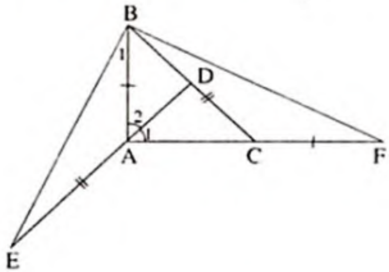
50. *(Hình 99)*

Trước hết bạn hãy chứng minh $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$ rồi chứng minh Δ AOD = Δ COB

51. *(Hình 100)*



Hình 99



Hình 100

$\widehat{A}_2 = 90^o : 2 = 45^o$. Suy ra $\widehat{A}_2 = \widehat{ACB}$ (= 45^o), do đó $\widehat{EAB} = \widehat{BCF}$ (kề bù với hai góc bằng nhau)

Δ EAB = Δ BCF (c.g.c) $\Rightarrow$ BE = BF và $\widehat{B}_1 = \widehat{F}$

Xét Δ ABF vuông tại A có $\widehat{ABF} + \widehat{F} = 90^o \Rightarrow \widehat{ABF} + \widehat{B}_1 = 90^o$ hay $\widehat{EBF} = 90^o$.

Vậy BE = BF và BE $\perp$ BF

52. *(Hình 101)*

ΔABC và ΔA'B'C' có

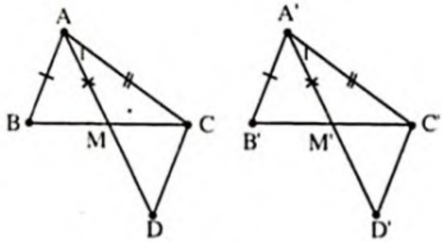
AB = A'B' ; AC = A'C' và trung tuyến AM = trung tuyến A'M'.

Ta phải chứng minh

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD.

Trên tia A'M' lấy điểm D' sao cho M' là trung điểm của A'D'.



Hình 101

Dễ thấy CD = AB ; C'D' = A'B'

$\Delta ACD = \Delta A'C'D'$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A'}_1$

$\Delta AMC = \Delta A'M'C'$ (c–g–c) $\Rightarrow CM = C'M' \Rightarrow BC = B'C'$.

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c–c–c)

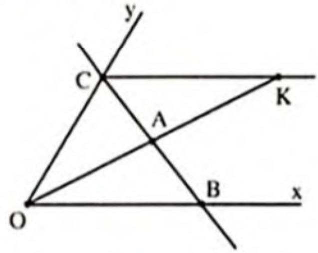
53. *(Hình 102)*

Trên tia OA lấy điểm K sao cho A là trung điểm của OK

Vẽ KC // Ox ($C \in Oy$)

Đường thẳng CA cắt Ox tại B. Đường thẳng BC là đường thẳng phải dựng.

Bạn đọc hãy chứng minh $\Delta AOB = \Delta AKC$ (g–c–g) để suy ra AB = AC .



Hình 102

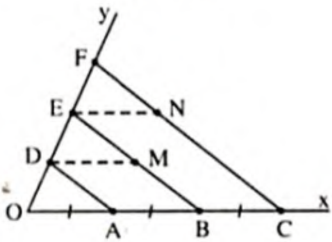
54. *(Hình 103)*

Vẽ DM // Ox ($M \in BE$); EN // Ox ($N \in CF$).

Ta được DM = AB (tính chất đoạn chắn)

Bạn đọc hãy chứng minh $\Delta DOA = \Delta EDM$ (g–c–g). Suy ra OD = DE.

Chứng minh tương tự ta được DE = EF.



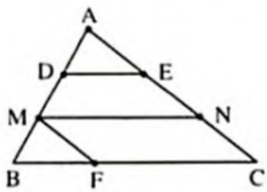
Hình 103

55. *(Hình 104)*

Vẽ MF // AC ($F \in BC$) ta được MN = FC (tính chất đoạn chắn). Bạn hãy chứng minh

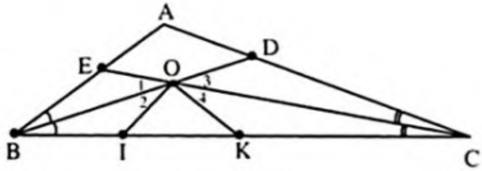
$\Delta ADE = \Delta MBF$ (g–c–g). Suy ra DE = BF.

Ta có DE + MN = BF + FC = BC (không đổi)



Hình 104

56. *(Hình 105)*



Hình 105

a) Ta chứng minh được

$\widehat{BOC} = 90^o + \dfrac{\widehat{A}}{2} = 150^o$

(xem thí dụ 9)

Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = 30^o$.

Vì $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4 = 30^o$

nên $\widehat{IOK} = \widehat{BOC} - (\widehat{O}_2 + \widehat{O}_4) = 150^o - (30^o + 30^o) = 90^o$

Suy ra $OI \perp OK$.

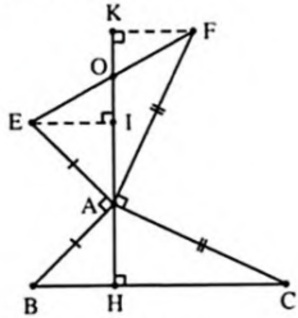
b) $\Delta EBO = \Delta IBO$ (g–c–g) $\Rightarrow BE = BI$ (1)

$\Delta DCO = \Delta KCO$ (g–c–g) $\Rightarrow CD = CK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE + CD = BI + CK < BI + CK + IK = BC$.

Vậy $BE + CD < BC$.

57. *(Hình 106)*



Hình 106

Vẽ $EI \perp AH$; $FK \perp AH$ ($I, K \in AH$).

$\Delta AEI = \Delta BAH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow EI = AH$ (1)

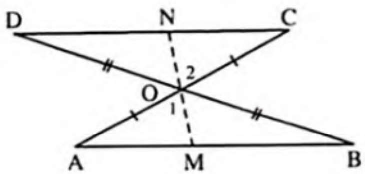
$\Delta AFK = \Delta CAH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow FK = AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EI = FK$

$\Delta OEI = \Delta OFK$ (c–g–c) $\Rightarrow OE = OF$.

58. *(Hình 107)*



Hình 107

$\Delta AOB = \Delta COD$ (c–g–c) $\Rightarrow AB = CD$

và $\widehat{A} = \widehat{C}$

$\Rightarrow AM = CN$ (một nửa của hai đoạn thẳng bằng nhau).

$\Delta AOM = \Delta CON$ (c–g–c) $\Rightarrow OM = ON$ (1) và $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

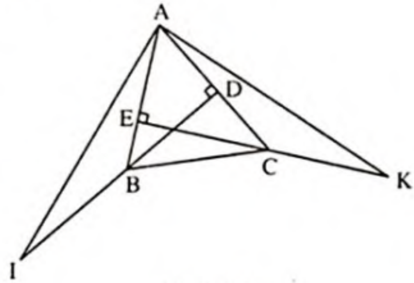
Ta có $\widehat{O}_1 + \widehat{MOC} = 180^o$ (kề bù)

Suy ra $\widehat{O}_2 + \widehat{MOC} = 180^\circ$ hay $\widehat{MON} = 180^\circ$

Do đó OM, ON là hai tia đối nhau. (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của MN.

59. *(Hình 108)*



Hình 108

$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

Suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{KCA}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau)

$\Delta ABI = \Delta KCA$(c–g–c).

Suy ra AI = AK (1) và $\widehat{BAI} = \widehat{K}$.

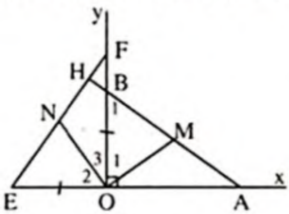
Xét ΔEAK vuông tại E có $\widehat{BAK} + \widehat{K} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{BAK} + \widehat{BAI} = 90^\circ$ hay $\widehat{IAK} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔAIK vuông cân tại A.

60. *(Hình 109)*

a) Δ AOB = Δ FOE(c–g–c) $\Rightarrow$ AB = EF và $\widehat{A} = \widehat{F}$

Xét Δ FOE vuông tại O có $\widehat{E} + \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow$ $AB \perp EF$.



Hình 109

b) M là trung điểm của AB $\Rightarrow BM = \dfrac{1}{2}AB$; N là trung điểm của EF $\Rightarrow EN = \dfrac{1}{2}EF$ mà AB = EF (chứng minh trên) nên BM = EN (1). Lại có $\widehat{E} = \widehat{B}_1 \Rightarrow \Delta BOM = \Delta EON$ (c–g–c) $\Rightarrow$ OM = ON và $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Ta có $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$ (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔMON vuông cân.

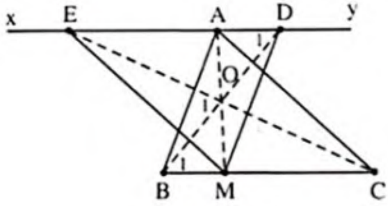
61. *(Hình 110)*

a) Theo tính chất đoạn chắn ta có AB = MD ;

AC = ME ; AD = BM ; AE = MC do đó DE = BC.

$\Delta ABC = \Delta MDE$ (c–c–c)

b) Gọi O là giao điểm của AM và BD.



Hình 110

$\Delta AOD = \Delta MOB$ (g–c–g)

$\Rightarrow OD = OB$ và $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$

$\Delta DOE = \Delta BOC$ (c–g–c)

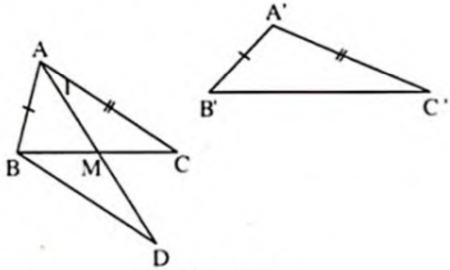
$\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{BOC}$

Ta có $\widehat{DOE} + \widehat{O}_1 = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BOC} + \widehat{O}_1 = 180^\circ$ hay $\widehat{COE} = 180^\circ$, ba điểm C, O, E thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng AM, BD, CE cùng đi qua một điểm (là điểm O)

62. *(Hình 111)*



Hình 111

$\Delta AMC = \Delta DMB$ (c–g–c)

$\Rightarrow AC = BD$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{D}$

do đó AC // BD (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

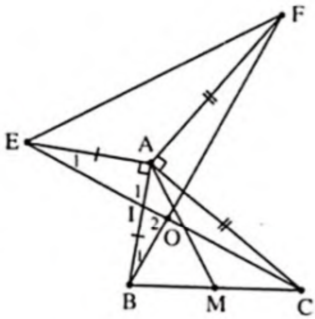
Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía)

mà $\widehat{BAC} + \widehat{A'} = 180^\circ$ (gt) nên $\widehat{ABD} = \widehat{A'}$.

$\Delta BAD = \Delta A'B'C'$ (c–g–c) $\Rightarrow AD = B'C'$

Vì $AM = \frac{1}{2}AD$ nên $AM = \frac{1}{2}B'C'$.

63. *(Hình 112)*



Hình 112

a) $\Delta ABF = \Delta AEC$ (c–g–c) $\Rightarrow BF = CE$ và $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$.

Gọi O và I lần lượt là giao điểm của CE với BF và AB.

Xét ΔAEI vuông tại A có

$\widehat{E}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{I}_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BOI} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp CE$.

b) Δ ABC và ΔAEF có 2 cặp cạnh bằng nhau, góc xen giữa chúng bù nhau nên trung tuyến

$AM = \frac{1}{2}EF$ *(theo bài 62).*

64. a) Góc 110^o không thể là góc ở đáy của tam giác cân vì nếu vậy thì tổng hai góc ở đáy lớn hơn 180^o. Vậy góc 110^o là góc ở đỉnh. Suy ra mỗi góc ở đáy là $(180^o - 110^o)/2 = 35^o$

b) Nếu $90 \leq a < 180$ thì góc ở đỉnh là a^o, mỗi góc ở đáy là $(180^o - a^o)/2$.

Nếu $a < 90$ thì :

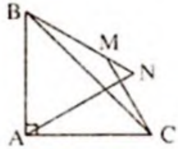
– Góc ở đỉnh có thể là a^o, lúc đó mỗi góc ở đáy có số đo là $\frac{180^o - a^o}{2}$

– Góc ở đáy có thể là a^o, lúc đó góc ở đỉnh có số đo là $180^o - 2a^o$

65. $\hat{B} = (180^o - 36^o)/2 = 72^o$; $\widehat{ABD} = 72^o : 2 = 36^o$. Vậy $\hat{A} = \widehat{ABD}$ $(= 36^o)$.

ΔABD cân tại D suy ra DA = DB.

66. *(Hình 113)*

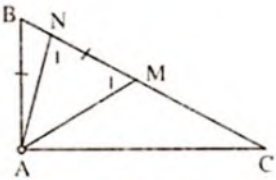


Hình 113

Hướng dẫn : Tính được $\widehat{CBN} = 15^o$

suy ra $\widehat{CBN} = \widehat{CBM}$, hai tia BN và BM trùng nhau.

67. *(Hình 114)*



Hình 114

ΔBAM cân tại B ; ΔCAN cân tại C suy ra

$\widehat{M_1} = (180^o - \hat{B})/2$; $\widehat{N_1} = (180^o - \hat{C})/2$

$$\widehat{M_1} + \widehat{N_1} = \frac{360^o - (\hat{B} + \hat{C})}{2} = \frac{360^o - 90^o}{2} = 135^o$$

Xét ΔAMN có $\widehat{MAN} = 180^o - (\widehat{M_1} + \widehat{N_1})$

$= 180^o - 135^o = 45^o$

68. *(Hình 115)*

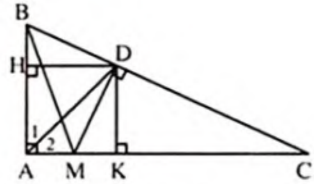
Vẽ DH $\perp$ AB, DK $\perp$ AC thì DH $\perp$ DK.

ΔHAD = ΔKAD

(cạnh huyền, góc nhọn)suy ra DH = DK.

ΔHDB = ΔKDM (g–c–g) suy ra DB = DM.

Vậy ΔDBM vuông cân, do đó $\widehat{MBD} = 45^o$.



Hình 115

69. *(Hình 116)*

Vẽ MI $\perp$ AC. Ta có ΔMAI = ΔMAH

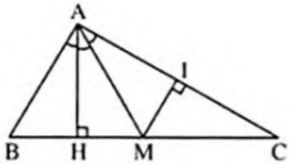
(cạnh huyền góc nhọn) suy ra MI = MH

ΔABH = Δ AMH (g–c–g) suy ra BH = MH

$= \frac{1}{2}$BM $= \frac{1}{2}$CM do đó MI $= \frac{1}{2}$CM

nên $\hat{C} = 30^o$; $\widehat{HAC} = 60^o$;

$\widehat{BAC} = \frac{60^o.3}{2} = 90^o$.



Hình 116

Vậy ΔABC vuông tại A.

Vì $\hat{C} = 30^o$ nên $\hat{B} = 60^o$; AM = BM $= \frac{1}{2}$BC (tính chất trung tuyến thuộc cạnh huyền) Δ ABM cân, có một góc 60^o nên nó là tam giác đều.

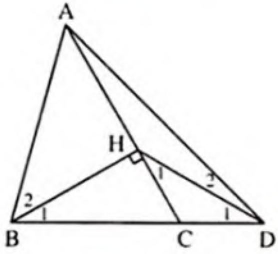
70. *(Hình 117)*

Vẽ BH $\perp$ AC.

Xét ΔBHC vuông tại H có $\hat{C} = 60^o$(gt) nên $\hat{B}_1 = 30^o \Rightarrow$ CH $= \frac{1}{2}$BC mà CD $= \frac{1}{2}$BC (gt)

nên CH = CD ; ΔCHD cân ;

$\hat{D}_1 = \frac{1}{2}\ \widehat{ACB} = 30^o$.



Hình 117

Vậy $\hat{B}_1 = \hat{D}_1 = 30^o$. Do đó ΔHBD cân $\Rightarrow$ HD = HB (1)

Xét ΔHAB vuông tại H, có $\hat{B}_2 = 75^o - 30^o = 45^o$ nên ΔHAB vuông cân $\Rightarrow$ HA = HB (2).

Từ (1) và (2) suy ra HD = HA $\Rightarrow$ ΔHAD cân.

Suy ra $\hat{D}_2 = \frac{1}{2}\hat{H}_1 = 15^o$, do đó $\widehat{ADB} = 30^o + 15^o = 45^o$.

71. Trong mặt phẳng tô hai màu xanh và đỏ ta vẽ một tam giác đều cạnh 1 đơn vị. Có 3 đỉnh mà chỉ có hai màu nên theo nguyên lí Đirichlê tồn tại hai đỉnh có cùng một màu, khoảng cách giữa chúng đúng bằng 1 đơn vị .

72. Xét Δ AHC vuông tại H có $\widehat{C} = 30^o$ nên $AH = \dfrac{1}{2}AC = 20$.

Áp dụng định lí Py–ta–go vào tam giác vuông ABH, tính được BH = 21.

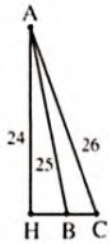
73. *(Hình 118a,b)*

Tính được HB = 7 ; HC = 10.

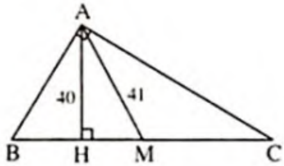
Nếu góc B nhọn, H nằm giữa B và C thì BC = 10 + 7 = 17 (hình 118a)

Nếu góc B tù, B nằm giữa H và C thì BC = 10 – 7 = 3 (hình 118b)

Hình 118a



Hình 118b



Hình 119

74. *(Hình 119)*

ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM = 41 nên MB = MC = 41 ta tính được HM = 9, HB = 32 ; HC = 50.

Xét ΔABH và ΔACH vuông tại H, ta có : $AB^2 = 40^2 + 32^2 = 2624$; $AC^2 = 40^2 + 50^2 = 4100 \Rightarrow \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{2624}{4100} = \dfrac{16}{25}$ suy ra $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

75. Giả sử Δ ABC vuông tại A. Đặt AB = 8k thì AC = 15k

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ $(8k)^2 + (15k)^2 = 51^2$; $289k^2 = 2601$; $k^2 = 9$; k = 3

Vậy AB = 8. 3 = 24 ; AC = 15. 3 = 45

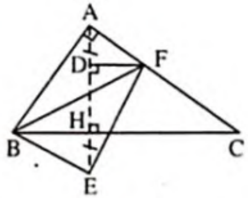
76. *(Hình 120)*

Vì AD = HE nên AH = DE. Áp dụng định lí Pi–ta–go vào các tam giác vuông ABF, ABH, ADF, BHE, DEF ta được $BF^2 = AB^2 + AF^2 = (BH^2 + AH^2) + (AD^2 + DF^2)$

$= BH^2 + DE^2 + HE^2 + DF^2 = (BH^2 + HE^2) + (DE^2 + DF^2)$

$= BE^2 + EF^2$; $BF^2 = BE^2 + EF^2$

Vậy ΔBEF vuông tại E (định lí Py–ta–go đảo) do đó $EB \perp EF$.



Hình 120

77. *(Hình 121)*

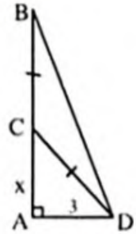
Giả sử AB là độ cao của cây tre, C là điểm gẫy.

Đặt AC = x thì CB = CD = 9 – x. Ta có :

$AC^2 + AD^2 = CD^2$

$x^2 + 3^2 = (9 - x)^2 \Rightarrow x = 4$

Vậy điểm gẫy cách gốc 4m



Hình 121

78. *(Hình 122)*

$AB^2 = (5 - 2)^2 + (4 - 3)^2 = 10$ (1)

$AC^2 = (5 - 6)^2 + (4 - 1)^2 = 10$ (2)

$BC^2 = (6 - 2)^2 + (1 - 3)^2 = 20$

Từ (1) và (2) suy ra $AB^2 = AC^2$

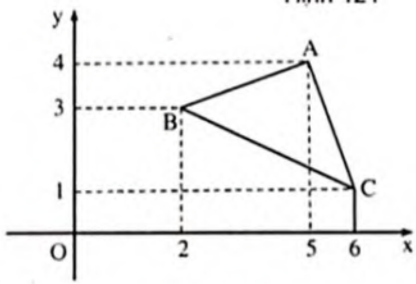
$\Rightarrow AB = AC$.

Vậy ΔABC cân

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (20 = 10 + 10)

do đó ΔABC vuông cân tại A

suy ra $\widehat{A} = 90^o, \widehat{B} = \widehat{C} = 45^o$.



Hình 122

79. *(Hình 123)*

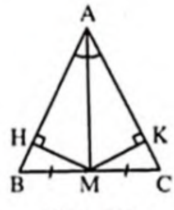
a) Vẽ $MH \perp AB$; $MK \perp AC$

$\Delta HAM = \Delta KAM$ (cạnh huyền, góc nhọn)

Suy ra MH = MK.

$\Delta HMB = \Delta KMC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$. Vậy ΔABC cân tại A



Hình 123

b) Xét ΔABC cân tại A có AM là trung tuyến ứng với cạnh đáy nên AM cũng là đường cao (*xem thí dụ 10*)

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông MAB ta được

$AB^2 = AM^2 + BM^2 \Rightarrow BM^2 = AB^2 - AM^2 = 37^2 - 35^2 = 144$; BM = 12

$\Rightarrow BC = 24$.

80. a) Δ ABC có các đường cao AD, BE, CF bằng nhau. Ta phải chứng minh ΔABC đều. ΔFBC = ΔECB (cạnh huyền, cạnh góc vuông) suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{C} = \widehat{A}$.

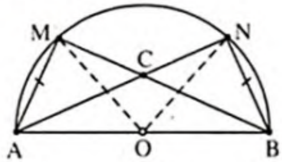
Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ suy ra ΔABC đều.

b) Gọi độ dài mỗi cạnh tam giác đều là x

Xét ΔADC vuông tại D có $AC^2 = AD^2 + CD^2$; từ đó tính được x = a.

81. *(Hình 124)*

ΔMAB và ΔNAB có trung tuyến MO, NO thuộc cạnh AB và bằng nửa AB nên chúng là những tam giác vuông. ΔNAB = ΔMBA (cạnh huyền, cạnh góc vuông). Suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MBA}$ do đó ΔABC cân tại C.



Hình 124

82. *(Hình 125)*

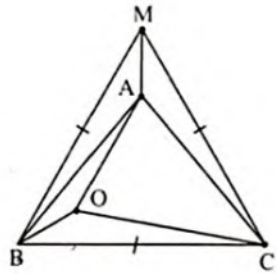
ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 80^o$ suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^o$.

Vẽ tam giác đều BCM (M và A thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC). $\widehat{MCA} = 60^o - 50^o = 10^o$

ΔAMB = ΔAMC (c–c–c)

suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 60^o : 2 = 30^o$

ΔOBC = ΔAMC (g–c–g) suy ra CO = CA do đó ΔCOA cân.



Hình 125

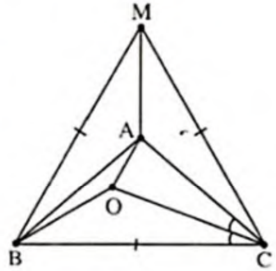
83. *(Hình 126)*

Vẽ tam giác đều BCM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC).

Chứng minh tương tự bài 82 ta được ΔCOA cân tại C.

Ta có $\widehat{ACO} = 40^o : 2 = 20^o$

suy ra $\widehat{CAO} = (180^o - 20^o) : 2 = 80^o$



Hình 126

84. *(Hình 127)*

Vẽ tam giác đều BCM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC).

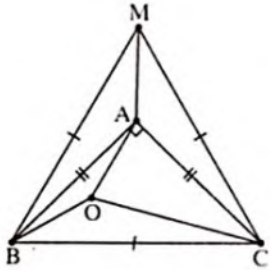
Chứng minh tương tự bài 82 ta được ΔCOA cân tại C ;

$\widehat{ACO} = 45^o - 15^o = 30^o$;

$\widehat{CAO} = (180^o - 30^o) : 2 = 75^o$;

$\widehat{BAO} = 90^o - 75^o = 15^o$; $\widehat{ABO} = 45^o - 30^o = 15^o$

Vậy $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ suy ra ΔAOB cân tại O.



Hình 127

85. *(Hình 128)*

ΔABC cân tại A, $\hat{A} = 30^o$

suy ra $\hat{B} = \hat{C} = 75^o$; $\widehat{CBx} = 90^o - 75^o = 15^o$.

Vẽ tam giác đều BCM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC) ; $\widehat{ABM} = 75^o - 60^o = 15^o$

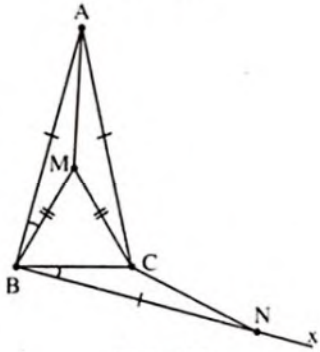
$\Delta MAB = \Delta MAC$ (c–c–c)

suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MAC} = 30^o : 2 = 15^o$

$\Delta CNB = \Delta MAB$ (c–g–c)

$\Rightarrow \hat{N} = \widehat{MAB} = 15^o$;

$\widehat{BCN} = 180^o - (15^o + 15^o) = 150^o$.



Hình 128

86. *(Hình 129)*

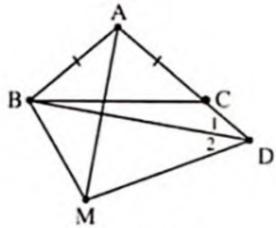
ΔABC cân tại A, $\hat{A} = 100^o$ suy ra $\hat{B} = \hat{C} = 40^o$.

Vẽ tam giác đều ADM

(M và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AD)

$\widehat{BAM} = 100^o - 60^o = 40^o$

ΔABC và ΔBAM có BC = AM (= AD)



Hình 129

$\widehat{ABC} = \widehat{BAM}$ (= 40^o) ; AB chung

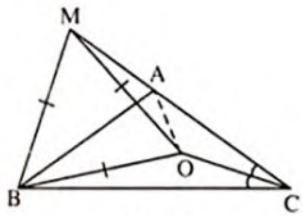
Vậy $\Delta ABC = \Delta BAM$ (c– g–c) suy ra AC = BM có AC = AB (gt) nên BM = BA.

$\Delta ABD = \Delta MBD$ (c–c–c) suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 60^o : 2 = 30^o$

Xét Δ CBD có $\widehat{BCA}$ là góc ngoài nên

$\widehat{BCA} = \widehat{CBD} + \hat{D}_1 \Rightarrow \widehat{CBD} = 40^o - 30^o = 10^o$

87. *(Hình 130)*



Hình 130

a) Δ ABC cân tại A, $\widehat{A} = 108^o$

suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 36^o$; $\widehat{OCA} = \widehat{OCB} = 18^o$.

Xét Δ BOC có $\widehat{BOC} = 180^o - (12^o + 18^o) = 150^o$;

$\widehat{BOM} = 60^o$

Suy ra $\widehat{MOC} = 360^o - (150^o + 60^o) = 150^o$.

$\Delta BOC = \Delta MOC$ (c– g–c).

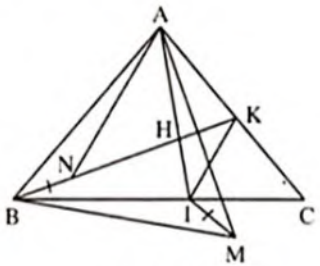
Suy ra $\widehat{OCM} = \widehat{OCB} = 18^o$ mà $\widehat{OCA} = 18^o$ nên hai tia CM, CA trùng nhau do đó 3 điểm C, A, M thẳng hàng.

b) ΔCBM có CM = CB nên cân tại C ; $\widehat{C} = 36^o$ suy ra

$\widehat{CBM} = \widehat{CMB} = \dfrac{180^o - 36^o}{2} = 72^o$; $\widehat{BAM} = 180^o - 108^o = 72^o$.

Vậy ΔBAM cân tại B $\Rightarrow$ BA = BM = BO do đó ΔAOB cân tại B.

88. *(Hình 131)*



Hình 131

ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 80^o$ suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^o$.

Vẽ tam giác đều ABM (M và C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB)

Ta tính được $\widehat{CBM} = 60^o - 50^o = 10^o$.

$\Delta AMI = \Delta BMI$ (c–c–c)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{BMI} = 60^o : 2 = 30^o$

Trên tia BK lấy điểm N sao cho BN = MI.

$\Delta BAN = \Delta MBI$ (c–g–c) $\Rightarrow$ $\widehat{BAN} = \widehat{MBI} = 10^o$ và AN = BI (1)

ΔIBA có 2 góc 50^o nên cân tại I nên AI = BI (2)

Từ (1), (2) suy ra AN = AI (3)

ΔNAK có 2 góc 70^o nên cân tại N $\Rightarrow$ AN = NK (4)

Từ (3), (4) suy ra AI = NK (5).

ΔHAN có hai góc 40^o nên cân tại H $\Rightarrow$ HA = HN (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow$ HI = HK $\Rightarrow$ ΔHIK cân.

89. *Trường hợp góc B nhọn*

$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$)

$\Delta EBH = \Delta ECA$ (cạnh huyền, góc nhọn)

Suy ra EB = EC, ΔEBC vuông cân do đó $\widehat{ABC} = 45^o$

Trường hợp góc B tù

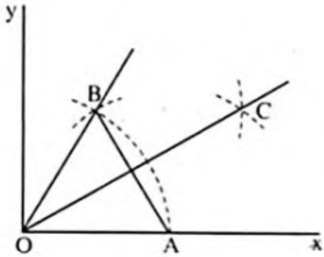
Ta được $\widehat{B} = 135^o$ (bạn đọc tự chứng minh)

90. *(Hình 132)*

Giả sử xOy là góc vuông cho trước. Trên tia Ox lấy điểm A.

Dựng tam giác đều OAB (điểm B ở trong góc vuông).

Dựng tia phân giác OC của góc AOB. Các tia OB, OC chia góc vuông xOy thành ba góc bằng nhau.



Hình 132

Chứng minh : Dành cho bạn đọc

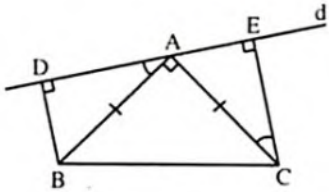
91. *(Hình 133)*

$\Delta ADB = \Delta CEA$ (cạnh huyền, góc nhọn)

Suy ra AD = CE.

Áp dụng định lý Py–ta–go vào tam giác vuông ABD ta có $BD^2 + AD^2 = AB^2$; suy ra $BD^2 + CE^2 = AB^2$.

Vì AB không đổi nên $BD^2 + CE^2$ không đổi.



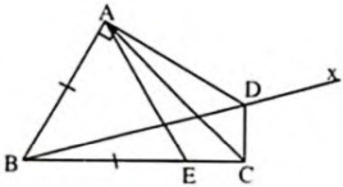
Hình 133

92. *(Hình 134)*

a) Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA.

Ta được ΔABE cân, $\widehat{B} = 60^o$ nên ΔABE đều suy ra AB = AE.

Ta tính được $\widehat{EAC} = 75^o - 60^o = 15^o$



Hình 134

$\widehat{DAC} = 90^o - 75^o = 15^o$; $\widehat{ABx} = 60^o - 15^o = 45^o$

ΔABD vuông cân $\Rightarrow AB = AD$ do đó AE = AD (cùng bằng AB)

$\Delta ACD = \Delta ACE$ (c–g–c) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{ACE} = 45^o$

do đó $\widehat{DCB} = 90^o \Rightarrow DC \perp BC$.

b) Áp dụng định lý Py–ta–go vào tam giác vuông BCD ta được

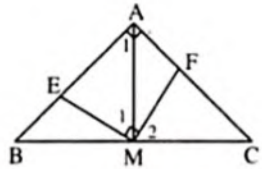
$BC^2 + CD^2 = BD^2 = AB^2 + AD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

93. *(Hình 135)*

ΔABC vuông cân tại A (gt) suy ra $\widehat{C} = 45^o$ AM là trung tuyến nên $AM \perp BC$ và $\widehat{A}_1 = 45^o$,

ΔAME và ΔCMF có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ $(= 45^o)$

$AM = CM$ $(= \frac{1}{2}BC)$; $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (cùng phụ với $\widehat{AMF}$). Vậy $\Delta AME = \Delta CMF$ (g–c–g), suy ra AE = CF.



Hình 135

94. *(Hình 136)*

a) ΔMAB cân tại M nên $\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$

ΔABC cân tại A nên $\widehat{ACB} = \widehat{ABM}$

suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{ACB}$ (1)

Có Bx // AM nên $\widehat{ABN} + \widehat{BAM} = 180^o$ (2)

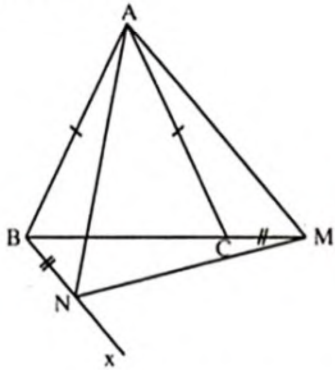
(cặp góc trong cùng phía)

Có $\widehat{ACM} + \widehat{ACB} = 180^o$ (kề bù)(3).

Từ (1) ; (2) ; (3) suy ra $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$.

b) $\Delta ABN = \Delta ACM$ (c–g–c) suy ra AN = AM

do đó ΔAMN cân.



Hình 136

95. *(Hình 137)*

a) $\Delta AHE = \Delta AHF$ (g–c–g)

suy ra AE = AF và $\widehat{E}_1 = \widehat{F}$.

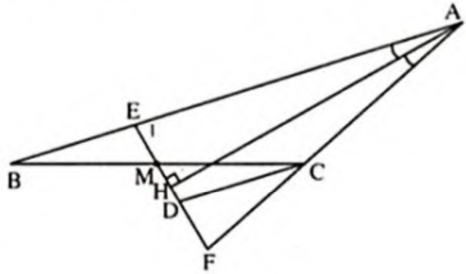
Từ C vẽ CD // AB $(D \in EF)$

$\Delta BME = \Delta CMD$ (g–c–g) suy ra BE = CD (1)

có $\widehat{E}_1 = \widehat{CDF}$ (cặp góc đồng vị)

do đó $\widehat{CDF} = \widehat{F}$;

ΔCDF cân. Vậy CF = CD (2)



Hình 137

Từ (1) và (2) suy ra BE = CF.

b) • Ta có AE = AB – BE.

Mặt khác AE = AF = AC + CF.

Suy ra AE + AE = (AB –BE) + (AC + CF)

$2AE = AB + AC$ (vì BE = CF) ; $AE = \dfrac{AB + AC}{2}$

• Ta có BE = AB – AE = AB – AF = AB – (AC + CF)

Mặt khác BE = CF suy ra BE + BE = (AB – AC – CF) + CF

Hay $2BE = AB - AC$; $BE = \dfrac{AB - AC}{2}$

• Xét ΔCMF có $\widehat{ACB}$ là góc ngoài suy ra $\widehat{CMF} = \widehat{ACB} - \hat{F}$.

Xét ΔBME có $\hat{E}_1$ là góc ngoài suy ra $\widehat{BME} = \hat{E}_1 - \hat{B}$.

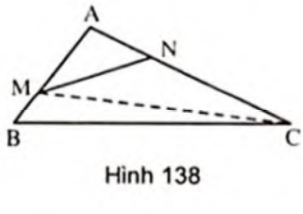
Vậy $\widehat{CMF} + \widehat{BME} = (\widehat{ACB} - \hat{F}) + (\hat{E}_1 - \hat{B})$

Hay $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \hat{B}$; $\widehat{BME} = \dfrac{\widehat{ACB} - \hat{B}}{2}$

CHƯƠNG III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

96. *(Hình 138)*



Hình 138

Xét ΔBMC có $\widehat{BMC} > \hat{A}$ do đó $\widehat{BMC} > 90^o$

suy ra BC > MC (1)

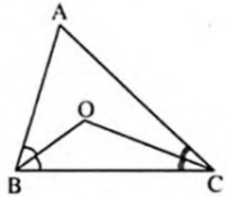
(vì trong tam giác, cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất)

Xét ΔMNC có $\widehat{MNC} > \hat{A}$ do đó $\widehat{MNC} > 90^o$

Suy ra MC > MN (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC > MN

97. *(Hình139)*



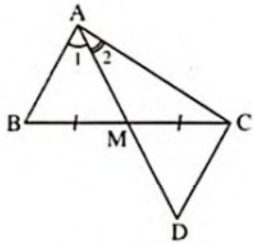
Hình 139

a/ Xét ΔBOC, dễ thấy $\widehat{BOC} = 90^o + \frac{\widehat{A}}{2}$ (xem thí dụ 9) vậy $\widehat{BOC}$ là góc tù suy ra cạnh BC là cạnh lớn nhất

b/ Xét ΔBOC có $OB < OC$ (gt)

suy ra $\widehat{BCO} < \widehat{CBO}$, do đó $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$. Vậy $AB < AC$

98. *(Hình 140)*



Hình 140

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

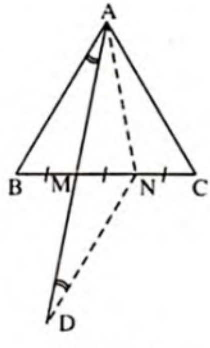
$\Delta ABM = \Delta DCM$ (c.g.c)

suy ra $AB = CD$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{D}$; ta có $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$ (gt)

nên $\widehat{D} > \widehat{A}_2$

Trong ΔACD có $\widehat{D} > \widehat{A}_2$ suy ra $AC > CD$, do đó $AC > AB$ suy ra $\hat{B} > \hat{C}$

99. *(Hình 141)*



Hình 141

Gọi N là trung điểm của MC thế thì

$BM = MN = NC$ $(= \frac{1}{3} BC)$

$\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c) suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, $\widehat{ANB} > \hat{C}$

do đó $\widehat{ANB} > \hat{B} \Rightarrow AB > AN$ (1)

Trên tia đối của tia AM, lấy điểm D sao cho MD = MA.

Ta có $\Delta ABM = \Delta DNM$ (c.g.c)

Suy ra $AB = DN$ (2) và $\widehat{BAM} = \widehat{NDM}$.

Từ (1) và (2) suy ra $DN > AN$, do đó $\widehat{DAN} > \hat{D}$ hay $\widehat{MAN} > \widehat{BAM}$

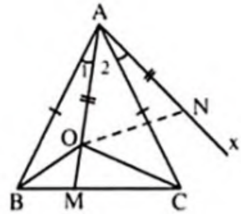
Như vậy $\widehat{BAM} = \widehat{CAN} < \widehat{MAN}$ suy ra $\widehat{BAM} < \frac{60^o}{3} = 20^o$

100. *(Hình 142)*

ΔAMB và ΔAMC có AM chung ; $AB = AC$(gt) ; $MB < MC$(gt)

suy ra $\widehat{A}_1 < \widehat{A}_2$ (định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B vẽ tia Ax sao cho



Hình 142

$\widehat{CAx} = \widehat{A}_1$. Trên tia Ax ta đặt $AN = AO$.

$\Delta ANC = \Delta AOB$ (c.g.c) suy ra $NC = OB$ và $\widehat{ANC} = \widehat{AOB}$

ΔANC và ΔAOC có AC chung ; $AN = AO$; $\widehat{NAC} < \widehat{A}_2$ nên $NC < OC$

suy ra $\widehat{NOC} < \widehat{ONC}$ (1)

Ta có $\widehat{AON} = \widehat{ANO}$ (2) (vì ΔAON cân)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AOC} < \widehat{ANC}$ do đó $\widehat{AOC} < \widehat{AOB}$.

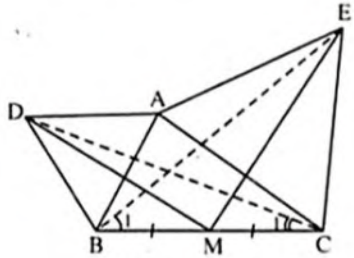
101. *(Hình 143)*

$\Delta ABE = \Delta ADC$ (c.g.c) suy ra $BE = CD$

ΔBCE và ΔCBD có :

BC chung ; $BE = CD$; $CE > BD$ (vì $AC > AB$) nên $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ (định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

ΔMBE và ΔMCD có : $MB = MC$(gt) ;



Hình 143

$BE = CD$ (chứng minh trên) ;

$\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ (chứng minh trên) nên $ME > MD$

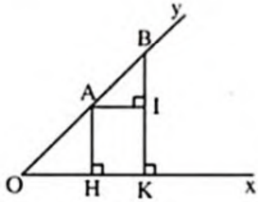
102. *(Hình 144)*

Vẽ $AH \perp Ox$, $BK \perp Ox$, $H, K \in Ox$

HK là hình chiếu của AB trên Ox.

Vẽ $AI \perp BK$ thì $HK = AI$ (tính chất đoạn chắn)

ΔIAB vuông tại I, có $\widehat{B} = 45^o$ nên vuông cân suy ra $IA = IB$



Hình 144

Ta có $AI^2 + IB^2 = AB^2$; $2AI^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$AI^2 = 1$; $AI = 1$ do đó $HK = 1$

103. *(Hình 145)*

a) Vẽ $BD \perp AM$; $CE \perp AM$; $BD + CE = d$

Ta có $BD \leq BM$; $CE \leq CM$

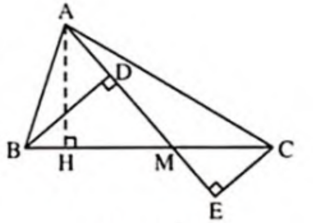
Nên $BD + CE \leq BM + CM$ hay $d \leq BC$

b) Giá trị lớn nhất của $d = BC$

$\Leftrightarrow BD = BM$; $CE = CM$

$\Leftrightarrow$ D trùng với M và E trùng với M

$\Leftrightarrow$ M trùng với hình chiếu H của A trên BC.



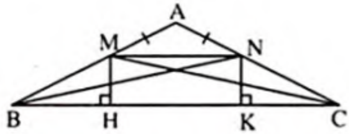
Hình 145

104. *(Hình 146)*

a) Vẽ $MH \perp BC$; $NK \perp BC$

$\Delta MBH = \Delta NCK$ (cạnh huyền, góc nhọn)

suy ra $BH = CK$



Hình 146

b) $\Delta ABN = \Delta ACM$ (c.g.c)

suy ra $BN = CM$

Dễ thấy $MN \parallel BC$, suy ra $MN = HK$(tính chất đoạn chắn)

Ta có $BN > BK$; $CM > CH$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Vậy $BN + CM > BK + CH$ hay $BN + BN > (BH + HK) + CH$

$2BN > (BH + CH) + HK$; $2BN > BC + MN$;

$BN > \dfrac{BC + MN}{2}$

105. *(Hình 147)*

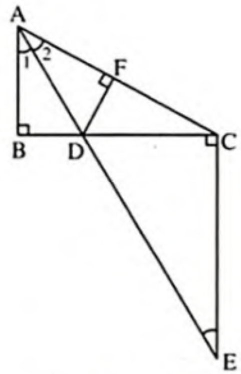
a) $AB \parallel CE \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{A}_1$ (so le trong)

mà $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$ (gt) nên $\widehat{E} = \widehat{A}_2 \Rightarrow \Delta$ CAE cân

Vậy $AC = CE$.

Có $AC > AB$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Suy ra $CE > AB$ (1)



Hình 147

Vẽ $DF \perp AC$, ta chứng minh được DF = DB.

Có DC > DF (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

suy ra DC >DB (2)

Ta có $DE^2 = CE^2 + DC^2$; $AD^2 = AB^2 + DB^2$

Kết hợp với (1) và (2) ta được $DE^2 > AD^2$. Do đó DE > AD (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra CE + DC + DE > AB + DB + AD

Hay chu vi ΔECD > chu vi ΔABD.

106. Cạnh 4cm là cạnh đáy.

107. Độ dài mỗi cạnh bên là $\dfrac{15-a}{2} \in \mathbf{N}$ suy ra a là số tự nhiên lẻ (1)

Mặt khác $\dfrac{15-a}{2} + \dfrac{15-a}{2} > a$ suy ra $15 - a > a$ hay $a < 7{,}5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$.

108. *(Hình 148)*

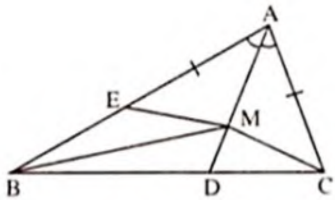
Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho AE = AC.

Vậy BE = AB – AC ; $\Delta AME = \Delta AMC$ (c.g.c)

suy ra ME = MC. Xét tam giác ΔEBM có :

BE > MB – ME hay BE > MB – MC

Vậy AB – AC > MB – MC



Hình 148

109. *(Hình 149)*

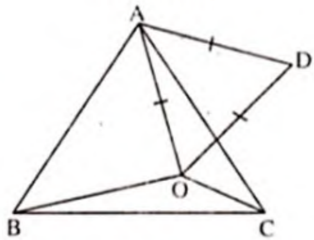
Vẽ tam giác đều AOD (D và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AO).

$\widehat{BAO} = \widehat{CAD}$

(vì cùng cộng với $\widehat{OAC}$ cho 60^o)

Δ BAO = Δ CAD (c.g.c) suy ra OB = CD

Ba đoạn thẳng OA, OB, OC lần lượt bằng ba cạnh OD, CD, OC của Δ COD.



Hình 149

Vậy ba đoạn thẳng OA, OB, OC thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

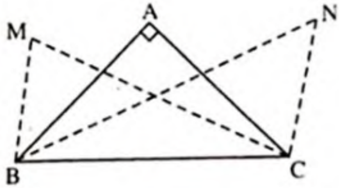
110. *(Hình 150)*

Vì AB = 5 nên $BC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} > 7$. Ta có :

$BM + CM \geq BC > 7$; $BN + CN \geq BC > 7$

Suy ra (BM + BN)+ (CM +CN) > 14

Vậy trong hai tổng BM + BN và CM + CN tồn tại một tổng lớn hơn 7, giả sử BM + BN > 7, thế thì B là điểm cần tìm.



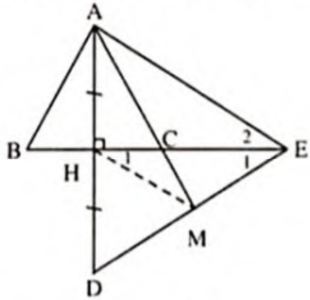
Hình 150

111. *(Hình 151)*

a) Δ ABC cân tại A, AH $\perp$ BC nên HB = HC (tính chất đường cao ứng với cạnh đáy của tam giác cân).

Ta có CE = CB suy ra CE = 2 CH. Xét Δ ADE có EH là trung tuyến mà CE = 2CH nên C là trọng tâm

b) Xét Δ ADE có đường thẳng AC là đường trung tuyến nên MD = ME, suy ra MH = ME (tính chất trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông).



Hình 151

Δ MHE cân do đó $\widehat{H}_1 = \widehat{E}_1$

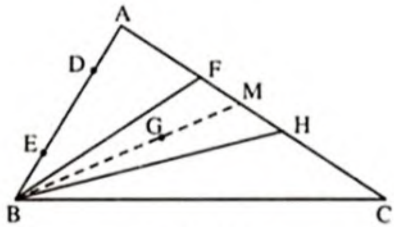
Δ EHA = Δ EHD (c.g.c) suy ra $\widehat{E}_2 = \widehat{E}_1$ do đó $\widehat{H}_1 = \widehat{E}_2$

suy ra HM // AE (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

112. *(Hình 152)*

Gọi M là trung điểm của AC vì AF = CH (gt) nên MF = MH.

Hai tam giác ABC và BHF có cùng trung tuyến BM nên có cùng trọng tâm G. Chứng minh tương tự ta cũng được G là trọng tâm của tam giác CDE.



Hình 152

113. *(Hình 153)*

a) G là trọng tâm của tam giác ABC nên trung tuyến AD phải đi qua G suy ra A, G, D thẳng hàng.

b) Δ ADB và Δ ADC có DB = DC ; AD chung ; AB < AC (gt) nên $\widehat{D}_1 < \widehat{D}_2$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

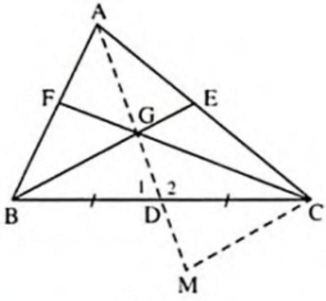
ΔGDB và Δ GDC có DB = DC ; GD chung, $\widehat{D}_1 < \widehat{D}_2$ nên GB < GC suy ra $\frac{2}{3}BE < \frac{2}{3}CF$ (tính chất trọng tâm của tam giác).

hay $BE < CF$.

c) Kéo dài GD một đoạn $DM = DG$ thế thì $GM = GA$.

$\Delta GBD = \Delta MCD$ (c.g.c) suy ra $GB = MC$.

Không làm giảm tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $AB \le BC \le CA$, thế thì theo câu b) ta có : $BE \le AD \le CF$.



Hình 153

Muốn chứng tỏ AD, BE, CF thoả mãn bất đẳng thức tam giác, ta chỉ cần chứng tỏ $CF < AD + BE$.

Xét ΔGCM có : $GC < GM + CM$ hay $GC < GA + GB$.

do đó $\frac{2}{3}CF < \frac{2}{3}AD + \frac{2}{3}BE$ vậy $CF < AD + BE$ (đpcm).

114. *(Hình 154)*

a) Vẽ điểm M sao cho D là trung điểm của AM.

Ta chứng minh được $\Delta ABD = \Delta MCD$ suy ra $AB = CM$.

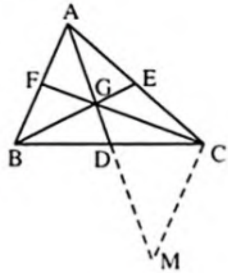
Xét ΔACM có $AM < AC + CM$ hay $2AD < AC + AB$

hay $AD < \frac{AB + AC}{2}$.

b) Xét ΔGBC có $GB + GC > BC$ suy ra

$\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC$ hay $BE + CF > \frac{3}{2}BC$

c) Theo câu a ta có $AD < \frac{AB + AC}{2}$;



Hình 154

tương tự $BE < \frac{BA + BC}{2}$;

$CF < \frac{CA + CB}{2}$ suy ra $AD + BE + CF < \frac{AB + AC + BA + BC + CA + CB}{2}$

hay $AD + BE + CF < AB + BC + CA$ (1).

Theo câu b ta có $BE + CF > \frac{3}{2}BC$ tương tự

$AD + CF > \frac{3}{2}AC$; $AD + BE > \frac{3}{2}AB$

suy ra (BE + CF) + (AD + CF) + (AD + BE) > $\frac{3}{2}$(AB + BC + CA) ;

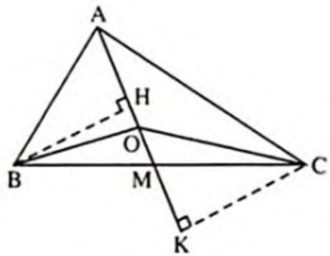
2(AD + BE + CF) > $\frac{3}{2}$(AB + BC + CA) ;

(AD + BE + CF) > $\frac{3}{4}$(AB + BC + CA) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{3}{4}(AB + BC + CA) < AD + BE + CF < AB + BC + CA$$

115. *(Hình 155).*



Hình 155

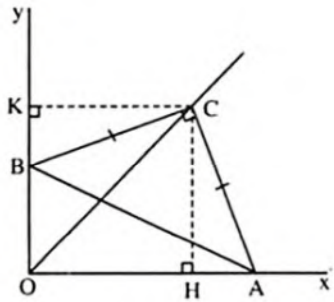
a) Hai tam giác AOB và AOC có diện tích bằng nhau, lại chung cạnh AO nên các đường cao ứng với AO phải bằng nhau. Vậy BH = CK.

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng AO với BC.

ΔHBM = Δ KCM (g.c.g). Suy ra MB = MC, do đó AO là đường trung tuyến của ΔABC.

Chứng minh tương tự, BO cũng là đường trung tuyến của Δ ABC. Vậy O là trọng tâm của Δ ABC.

116. *(Hình 156)*

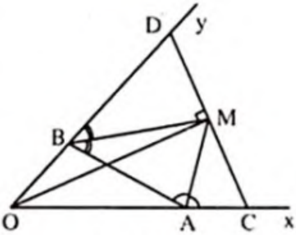


Hình 156

Vẽ CH ⊥ Ox, CK ⊥ Oy. Δ CHA = Δ CKB (cạnh huyền, góc nhọn) suy ra CH = CK.

Vậy C nằm trên tia phân giác của góc xOy, đó là một tia cố định.

117. *(Hình 157)*



Hình 157

Xét Δ AOB có các tia phân giác ngoài của các góc A và B cắt nhau tại M nên tia OM là tia phân giác của góc xOy .

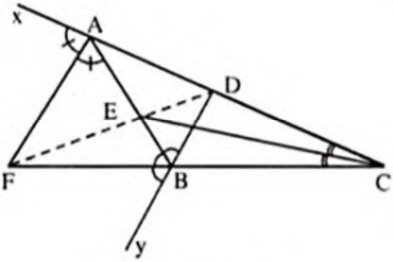
ΔMOC = Δ MOD (g.c.g)

suy ra OC = OD Vậy Δ OCD cân.

118. *(Hình 158)*

a) Dễ thấy

$\widehat{ABD} = \widehat{ABF} = \widehat{FBy} = 60^o$.



Hình 158

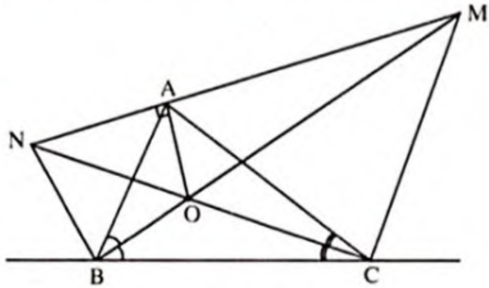
Xét Δ ABD có hai tia phân giác ngoài tại đỉnh A và B cắt nhau tại F suy ra DF là tia phân giác của góc ADB.

Vậy $\widehat{ADF} = \widehat{BDF}$

b) Xét Δ DBC có tia phân giác góc C và tia phân giác ngoài tại đỉnh B, cắt nhau tại E, suy ra tia DE là tia phân giác của góc ADB.

Tia DE và tia DF đều là tia phân giác của góc ADB nên ba điểm D, E, F thẳng hàng.

119. *(Hình 159)*



Hình 159

Xét Δ ABC, O là giao điểm của các tia phân giác của góc B và C nên tia AO là tia phân giác của góc A.

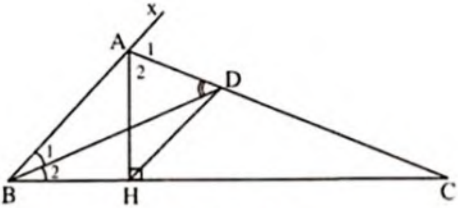
Có AN $\perp$ AO nên AN là tia phân giác ngoài tại đỉnh A của ΔABC. Tia phân giác ngoài AN và tia phân giác trong CO của Δ ABC cắt nhau tại N, suy ra tia BN là tia phân giác ngoài tại đỉnh B của Δ ABC. Do đó BM $\perp$ BN (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Chứng minh tương tự ta được CM $\perp$ CN .

120. *(Hình 160).*

Xét Δ DBC có góc ADB là góc ngoài nên $\widehat{ADB} = \hat{B}_2 + \hat{C}$ suy ra

$\hat{C} = \widehat{ADB} - \hat{B}_2$; $\hat{C} = 45^o - \frac{\hat{B}}{2}$



Hình 160

Xét Δ ABC có : $\hat{A}_1$ là góc ngoài nên :

$$\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} = \hat{B} + 45^o - \frac{\hat{B}}{2} \quad => \quad \hat{A}_1 = \frac{B}{2} + 45^o \qquad (1)$$

Xét ΔHAC vuông tại H có $\hat{A}_2 = 90^o - \hat{C} = 90^o - \left(45^o - \frac{\hat{B}}{2}\right) = 45^o + \frac{\hat{B}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Xét Δ ABH có D là giao điểm của một tia phân giác ngoài với một tia phân giác trong không kề nên tia HD phải là tia phân giác ngoài tại đỉnh H do đó $\widehat{DHC} = 45^o$.

Suy ra HD // AB (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

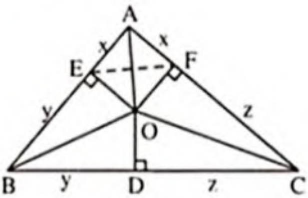
121. *(Hình 161)*

a) Vẽ thêm OD ⊥ BC ta được OD = OE = OF

Ta cũng chứng minh được

AE = AF(= x) ; BE = BD(= y) ; CD = CF(= z)

Ta có AB + AC − BC = (x + y) + (x + z) − (y + z) = 2x = 2AE



Hình 161

b) Áp dụng định lý Py−ta−go vào ΔABC vuông tại A, ta tính được BC = 5.

Ta có 2AE = AB + AC − BC = 3 + 4 − 5 = 2 ; AE = 1

ΔEOA có $\hat{E} = 90^o$; $\hat{A} = 45^o$ nên nó vuông cân suy ra OE = AE = 1.

Vậy OD = OE = OF = 1

c) Ta có AB = 3 ; AE = 1 nên BE = 2 ; AC = 4 ; AF = 1 nên CF = 3.

$OA^2 = OE^2 + AE^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; $OA = \sqrt{2}$; $OB^2 = OE^2 + BE^2 = 1^2 + 2^2 = 5$; $OB = \sqrt{5}$

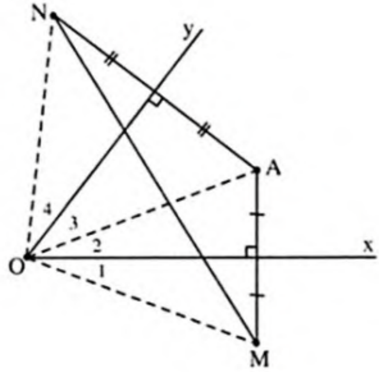
$OC^2 = OF^2 + CF^2 = 1^2 + 3^2 = 10$; $OC = \sqrt{10}$

122. *(Hình 162)*

a) Điểm O nằm trên đường trung trực của AM nên OM = OA.

Điểm O nằm trên đường trung trực của AN nên ON = OA suy ra OM = ON.

Do đó đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định là điểm O.



Hình 162

b) Dễ thấy $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{AOM}$;

$\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \frac{1}{2}\widehat{AON}$

do đó $\widehat{AOM} + \widehat{AON} = 2(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3) = 2\widehat{xOy}$;

$\widehat{MON} = 2a^o$

Vì đã có OM = ON nên O là trung điểm của MN

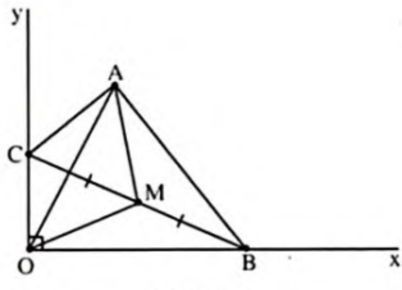
$\Leftrightarrow \widehat{MON} = 180^o \Leftrightarrow 2a^o = 180^o \Leftrightarrow a = 90$

123. *(Hình163)*

$MA = MO = \frac{1}{2}BC$ (tính chất trung tuyến thuộc cạnh huyền)

Điểm M nằm trên đường trung trực của OA.

Do OA cố định nên đường trung trực của OA cũng cố định.

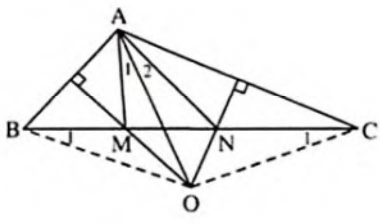


Hình 163

124. *(Hình 164)*

O là giao điểm các đường trung trực của AB và AC nên OA = OB = OC.

Điểm M nằm trên đường trung trực của AB nên MA = MB. Điểm N nằm trên đường trung trực của AC nên NA = NC



Hình 164

$\Delta AOM = \Delta BOM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

$\Delta AON = \Delta CON$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{C}_1$

Mặt khác $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (vì ΔBOC cân)

Nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ suy ra AO là tia phân giác của góc MAN.

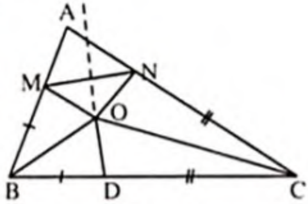
125. *(Hình 165)*

Vẽ các tia phân giác của các góc B và C chúng cắt nhau tại O đó là một điểm cố định.

Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = BM thế thì CD = CN

$\Delta BOM = \Delta BOD$ (c.g.c) ; $\Delta CON = \Delta COD$ (c.g.c)

suy ra OM = OD và ON = OD do đó OM = ON. Suy ra đường trung trực của MN đi qua một điểm cố định là điểm O.



Hình 165

126. *(Hình 166)*

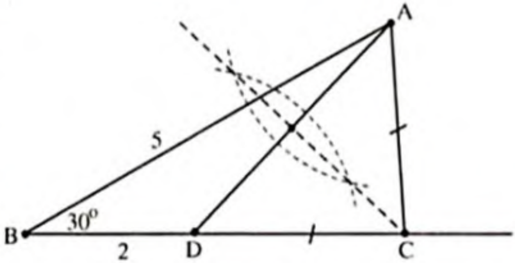
1. Phân tích

Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho CD = CA, ta được BD = BC – CD = BC – AC = 2cm

Ta dựng được ΔABD theo trường hợp (c.g.c). Điểm C thoả mãn hai điều kiện :

– C nằm trên tia BD

– C nằm trên đường trung trực của AD.



Hình 166

2. Cách dựng

– Dựng ΔABD sao cho

$\widehat{B} = 30^o$; BA = 5cm ; BD = 2cm.

– Dựng đường trung trực của AD cắt tia BD tại C

– Nối AC ta được ΔABD là tam giác phải dựng.

3. Chứng minh

Thật vậy, điểm C nằm trên đường trung trực của AD nên CA = CD.

ΔABC có $\widehat{B} = 30^o$; AB = 5cm ; BC – AC = BC – CD = BD = 2cm.

127. *(Hình 167)*

1. Phân tích

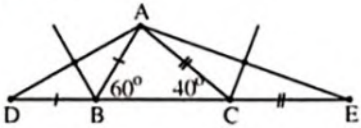
Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BA ; trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = CA.

Ta có DE = DB + BC + CE = AB + BC + CA = 8cm.

ΔABD cân tại B nên $\widehat{D} = 30^o$

ΔACE cân tại C nên $\widehat{E} = 20^o$

ΔADE dựng được theo trường hợp (g.c.g)



Hình 167

Điểm B thoả mãn hai điều kiện :

– B nằm trên DE

– B nằm trên đường trung trực của AD

Điểm C thoả mãn hai điều kiện :

– C nằm trên DE

– C nằm trên đường trung trực của AE.

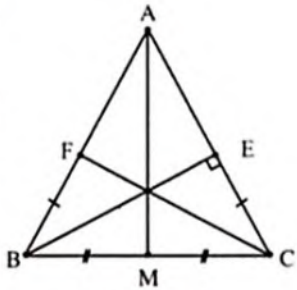
2. Cách dựng :

– Dựng ΔADE sao cho DE = 8cm ; $\widehat{D} = 30^o$; $\widehat{E} = 20^o$.

– Dựng đường trung trực của AD và AE cắt DE lần lượt tại B và C.

– Nối AB, AC ta được ΔABC là tam giác phải dựng.

3. Chứng minh : Bạn đọc tự chứng minh.



Hình 168

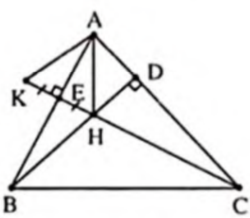
128. *(Hình 168)*

ΔBFC = ΔCEB (c.g.c)

suy ra $\widehat{F} = \widehat{E} = 90^o$ do đó CF $\perp$ AB.

AM là trung tuyến ứng với cạnh đáy của tam giác cân nên AM $\perp$ BC.

Suy ra AM, BE, CF là ba đường cao của ΔABC nên chúng đồng quy.



Hình 169

129. *(Hình169)*

H là trực tâm của ΔABC nên AH $\perp$ BC, suy ra $\widehat{KCB} = \widehat{BAH}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc) (1)

$\Delta KAE = \Delta HAE$ suy ra $\widehat{KAB} = \widehat{BAH}$. (2)

từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KAB} = \widehat{KCB}$.

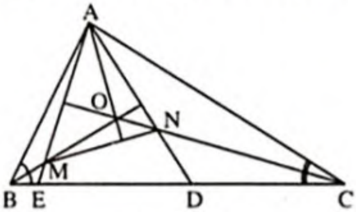
130. *(Hình 170)*

Gọi O là giao điểm của các tia phân giác của góc B và C suy ra tia AO là tia phân giác của góc BAC.

ΔABD cân tại B ; ΔACE cân tại C ;

nên $BO \perp AD$; $CO \perp AE$

xét ΔAMN có O là trực tâm do đó $AO \perp MN$.



Hình 170

131. *(Hình 171)*

ΔABC đều nên $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^o$

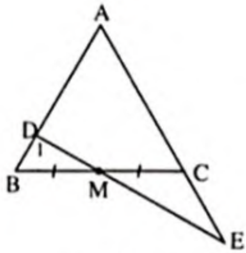
$\widehat{D_1} > \widehat{A} = 60^o$. Xét ΔDBM có $\widehat{B} < \widehat{D_1}$

suy ra $MD < MB$ (1)

Xét ΔCME có $\widehat{C} = 120^o$ nên ME là cạnh lớn nhất ;

$ME > MC$ (2)

Vì $MB = MC$(gt) nên từ (1) và(2) suy ra $MD < ME$



Hình 171

132. *(Hình 172)*

ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 108^o$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^o$.

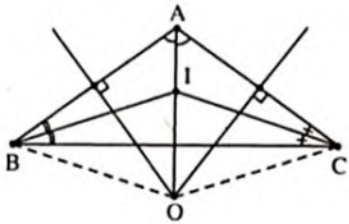
I là giao điểm của các tia phân giác nên

$\widehat{ICB} = \widehat{IBC} = 18^o$.

O là giao điểm của các đường trung trực nên O nằm trên tia phân giác của góc A (tính chất của tam giác cân)

Ta có $OA = OB \Rightarrow \Delta AOB$ cân

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 54^o$.



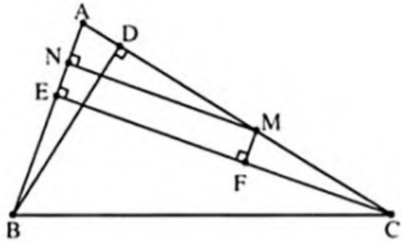
Hình 172

Do đó $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 54^o - 36^o = 18^o$.

$\Delta IBC = \Delta OBC$ (g.c.g) suy ra $BI = BO$; $CI = CO$.

Do đó BC là đường trung trực của OI.

133. *(Hình 173)*



Hình 173

Vì $\hat{B} > \hat{C}$ nên AC > AB. Trên AC ta đặt AM = AB. Vẽ MN ⊥ AB, MF⊥CE.

ΔABD = ΔAMN (cạnh huyền, góc nhọn)

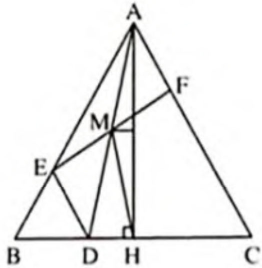
⇒ BD = MN = EF.

Xét ΔFCM vuông tại F ta có

CM > CF hay AC – AM > CE – EF

Do đó AC – AB > CE – BD.

134. *(Hình 174)*



Hình 174

Dễ thấy BE = AF. Vẽ ED // AC (D∈BC),

ta chứng minh được ΔEBD cân

suy ra ED = EB = AF.

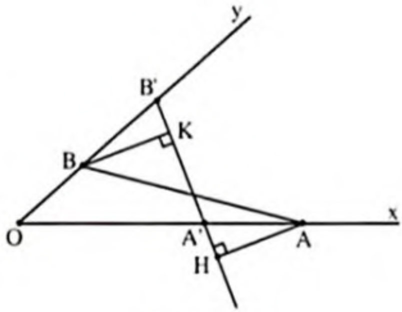
ΔAMF = ΔDME(c.g.c)

⇒ MA = MD và $\widehat{AMF} = \widehat{DME}$, dẫn tới A, M, D thẳng hàng.

Vẽ đường cao AH của ΔABC ta có HM = MA (trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông)

suy ra M nằm trên đường trung trực của AH, đó là một đường thẳng cố định.

135. *(Hình 175)*



Hình 175

Trên tia Ox lấy A' ; trên Oy lấy B' sao cho OA' = OB' = a.

Ta có OA'+ OB' = OA + OB = 2a

⇒AA' = BB'

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên đường thẳng A'B'.

ΔHAA' = ΔKBB' (cạnh huyền, góc nhọn)

suy ra HA'= KB', do đó HK = A'B'.

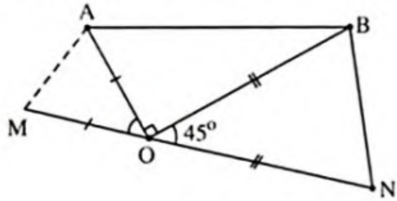
Ta chứng minh được HK ≤ AB (dấu = ⇔ A trùng A', B trùng B')

do đó A'B' ≤ AB. Vậy AB nhỏ nhất ⇔ OA = OB = a.

Nhận xét : Qua chứng minh trên ta thấy : OA' + OB' + A'B' ≤ OA + OB + AB hay chu vi ΔOA'B' ≤ chu vi ΔOAB

Một cách tổng quát : trong các tam giác có một góc bằng nhau và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng nhau thì tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

136. *(Hình 176)*



Hình 176

Xét ΔAOB có $\widehat{O} = 90^o$;

OA + OB = OM + ON = MN = 4cm

nên AB nhỏ nhất khi OA = OB (xem bài 135).

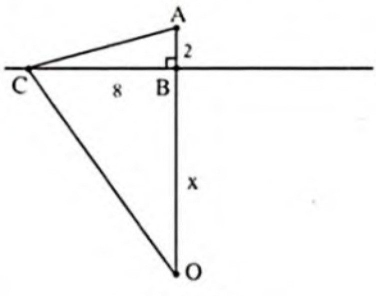
Khi đó O phải là trung điểm của MN.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông OAB ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ $= 2^2 + 2^2 = 8$

$AB = \sqrt{8}$ (cm).

137. *(Hình 177)*

Gọi OA là chiều cao của cây sen từ gốc tới ngọn ; OB = x là độ sâu của hồ, C là vị trí của bông sen khi bị gió thổi.



Hình 177

Ta có OC = OA = x + 2

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông BOC ta có : $x^2 + 8^2 = (x + 2)^2$;

$x^2 + 64 = x^2 + 4x + 4$; 4x = 60 ;

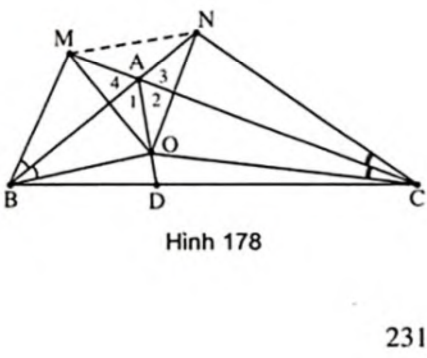
x =15(dm).

138. *(Hình 178)*

a) Xét ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^o$ nên $\widehat{A} = 120^o$

Do AD là tia phân giác nên

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = 60^o$



Hình 178

ΔABM = ΔABO (g.c.g)

suy ra AM = AO.

ΔACN = ΔACO (g.c.g)

suy ra AN = AO.

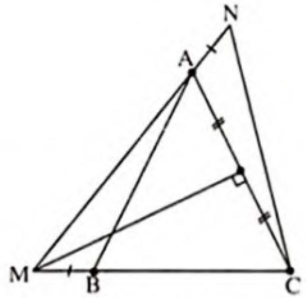
Suy ra AM = AN

b) $\Delta AOM = \Delta AON$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (1)

$\Delta AOM = \Delta ANM$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = MN$(2)

Từ (1) và (2) suy ra OM = ON = MN do đó ΔMON đều.

139. *(Hình 179)*



Hình 179

a) M nằm trên đường trung trực của AC nên MA = MC, ΔMAC cân tại M.

Hai tam giác MAC và ABC là những tam giác cân có chung góc C ở đáy nên góc ở đỉnh của chúng phải bằng nhau. Vậy $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.

b) $\widehat{ABM} = \widehat{CAN}$ (kề bù với hai góc bằng nhau)

$\Delta ABM = \Delta CAN$ (c.g.c) suy ra AM = CN

mà AM = MC nên CM = CN.

c) ΔCMN cân tại C

$CM \perp CN \Leftrightarrow \widehat{MCN} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{AMC} = 45^o \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 45^o$

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập nội dung:
NGUYỄN XUÂN BÌNH

Biên tập tái bản:
ĐẶNG MINH THU

Biên tập mĩ thuật - kĩ thuật:
TRẦN THANH HẰNG

Trình bày bìa:
BÙI QUANG TUẤN

Sửa bản in:
PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC)

Chế bản:
CÔNG TY CỔ PHẦN THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN 7

Mã số: T7T26h3-CPD
Số đăng kí KHXB: 14-2013/CXB/98-1961/GD

In 7.000 cuốn (QĐ số 39), khổ 17x24 cm, tại Công ty CP In - PHS và TBTH Quảng Nam, 260 Hùng Vương, TP. Tam Kỳ.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2013.