$\sqrt{-1}$

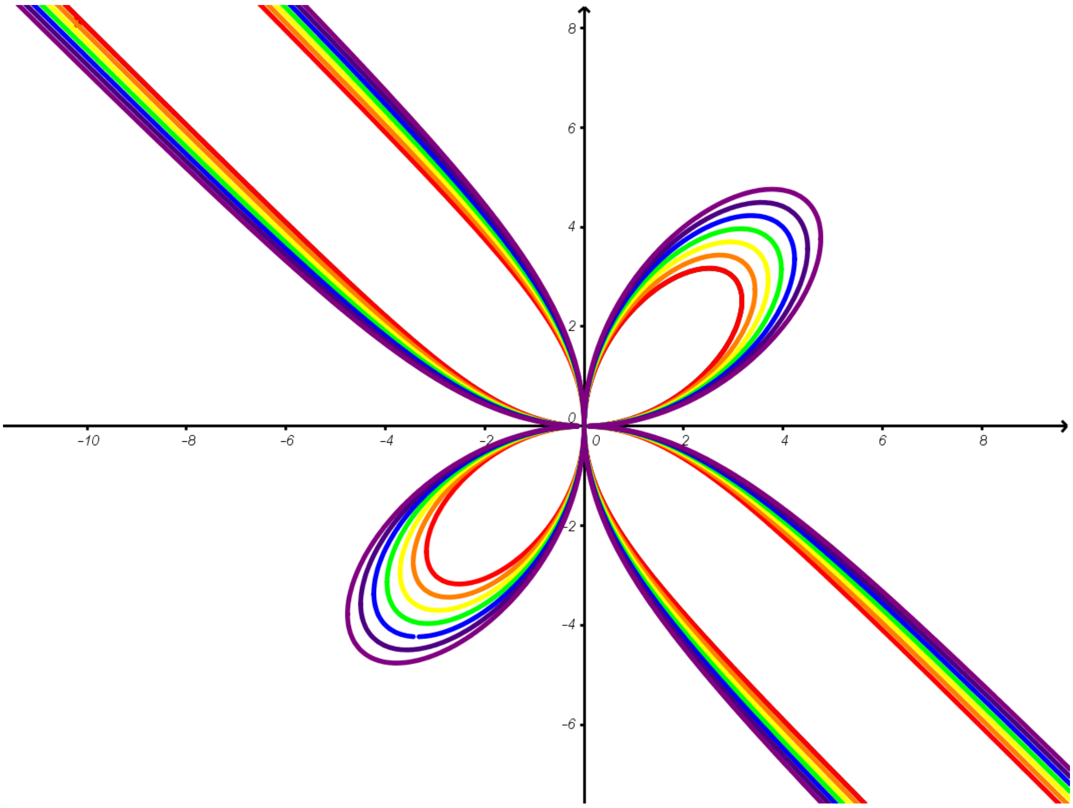
Blog TOÁN HỌC CHO MỌI NGƯỜI

https://thcmn.wordpress.com/

https://www.facebook.com/thcmn/

blogtoanhocchomoinguoi@gmail.com

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN TRONG KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2016 – 2017



TRẦN MINH NGỌC – LƯƠNG VĂN KHẢI

VÕ THÀNH ĐẠT – HOÀNG ĐÌNH HIẾU – LÊ THÀNH LONG – ĐẶNG NHÌ – NGUYỄN DUY TÙNG

NGUYỄN TRƯỜNG HẢI – ĐỖ TRẦN NGUYÊN HUY – PHẠM THỊ HỒNG NHUNG – PHẠM QUỐC THẮNG

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN TRONG KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2016 – 2017

Tháng 12 năm 2016

LỜI NÓI ĐẦU

Ban biên tập

"Đi nhiều người, bạn sẽ đi rất xa."

Với mục đích giúp quý thầy cô và các bạn học sinh có một tài liệu chất lượng để chuẩn bị cho kì thi Học sinh giỏi Quốc gia môn Toán (VMO), tập thể các quản trị viên blog Toán học cho mọi người đã cùng nhau biên soạn cuốn sách "Tuyển chọn theo chuyên đề các bài toán trong kì thi chọn đội tuyển VMO của các tỉnh, thành phố".

Trong cuốn sách này, các bài toán được liệt kê trước, sau đó là phần lời giải, đáp số. Trong một số bài toán, chúng tôi có đưa ra nhiều hơn một cách tiếp cận, nhưng cũng có những bài toán mà chúng tôi thấy chỉ cần hướng dẫn sơ lược lời giải, qua đó giúp bạn đọc chủ động trong quá trình đọc tài liệu. Nhiều bài giải của chúng tôi trong đây chưa phải là cách làm hay nhất, tốt nhất cho các bài toán tương ứng, và chúng tôi rất mong nhận được sự đánh giá, đóng góp của bạn đọc để những lần biên soạn sau, chất lượng cuốn tuyển tập này được nâng lên.

Các phần của cuốn sách và người biên soạn cụ thể như sau:

- *Bất đẳng thức*: Võ Thành Đạt (Sinh viên khoa Toán - Tin học Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM).

- *Đa thức, Phương trình và Hệ phương trình*: Đỗ Trần Nguyên Huy (Học sinh trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM) và Phạm Quốc Thắng (Học sinh trường THPT chuyên Long An).

- *Hình học*: Trần Minh Ngọc (Học viên Cao học Đại học Sư phạm Tp. HCM), Lương Văn Khải và Nguyễn Duy Tùng (Sinh viên khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học tự nhiên Tp. HCM).

- *Số học*: Phạm Thị Hồng Nhung (Học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu).

- *Tổ hợp*: Hoàng Đình Hiếu (Sinh viên khoa Công nghệ thông tin trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM) và Đặng Nhì (Sinh viên khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM).

- *Giải tích*: Nguyễn Trường Hải (Học sinh trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận).

- *Phương trình hàm*: Lê Thành Long (Sinh viên khoa Điện - Điện tử trường Đại học Bách khoa Tp. HCM).

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn TS Trần Nam Dũng (trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM), anh Lê Phúc Lữ (FPT Software, Tp. HCM), bạn Đào Nguyễn Nguyên Trân (Swiss UMEF, Thuỵ Sĩ), bạn Đỗ Thuỳ Anh (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá), bạn Nguyễn Trần Hữu Thịnh (THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ), bạn Hoàng Hữu Quốc Huy (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu) đã giúp đỡ chúng tôi rất nhiều trong quá trình biên soạn cuốn sách này. Cảm ơn các thành viên của các diễn đàn NangKhieuToan.com (nangkhieutoan.com), Diễn đàn Mathscope (forum.mathscope.org), Diễn đàn Toán học Việt Nam (diendantoanhoc.net), Diễn đàn Art of Problem Solving (artofproblemsolving.com) đã đóng góp các đề bài và lời giải.

Trong quá trình biên soạn, chắc chắn chúng tôi không tránh khỏi những sai sót ở các đề bài và lời giải, rất mong được lắng nghe những nhận xét, góp ý và phê bình thẳng thắn từ các bạn. Mọi thắc mắc và đóng góp xin vui lòng liên hệ fanpage Toán học cho mọi người ở địa chỉ www.facebook.com/thcmn hoặc qua email blogtoanhocchomoinguoi@gmail.com.

Cảm ơn tất cả các bạn !

Mục lục

Phần I
CÁC BÀI TOÁN

1 Bất đẳng thức

Bài 1. *(THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

1. Cho x, y là các số thực dương sao cho $2x+y$ và $2y+x$ khác 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{(2x^2+y)(4x+y^2)}{(2x+y-2)^2}+\frac{(2y^2+x)(4y+x^2)}{(x+2y-2)^2}-3(x+y)$$

2. Cho $a, b, c>0$ sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b^2(ca+1)}+\frac{b}{c^2(ab+1)}+\frac{c}{a^2(bc+1)}\geq\frac{9}{(1+abc)(ab+bc+ca)}$$

Bài 2. *(Trường Phổ thông Năng Khiếu - ĐHQG Tp. HCM)* Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức
$$x^ky^kz^k(x^3+y^3+z^3)\leq 3$$
đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Bài 3. *(THPT chuyên Đại học Vinh)* Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c
$$ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}+k.\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}\leq a^2+b^2+c^2$$

Bài 4. *(Bà Rịa - Vũng Tàu)*

1. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh bất đẳng thức
$$\frac{1}{(2x+y+z)^2}+\frac{1}{(2y+z+x)^2}+\frac{1}{(2z+x+y)^2}\leq\frac{3}{16}$$

2. Cho x, y, z không âm và thỏa $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh bất đẳng thức
$$(x^2y+y^2z+z^2x)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)\leq\frac{3}{2}.$$

Bài 5. *(Bắc Ninh)* Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{ab}{3a+4b+5c} + \frac{bc}{3b+4c+5a} + \frac{ca}{3ac+4a+5b} - \frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}$$

Bài 6. *(Bến Tre)* Cho a, b, c là các số thực dương . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1344}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}} - \frac{2016}{\sqrt{a+b+c}}$$

Bài 7. *(Bình Thuận)* Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{yz}{y+z} + \frac{xy}{x+y} + \frac{zx}{z+x}$$

Bài 8. *(Đồng Nai)* Cho các số thưc dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}$$

Bài 9. *(Hà Nam)* Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Bài 10. *(Hà Nội)* Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+2abc = 1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2(a+b+c).$$

Bài 11. *(Hà Tĩnh)* Cho các số thực dương a, b, c và thỏa mãn $a^5+b^5+c^5 = 3$. Chứng minh rằng

$$a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 \leq 3$$

.

Bài 12. *(Hải Phòng)* Cho $a, b, c \geq \frac{1}{2}$ thỏa mãn $a+b+c=6$. chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc+ab+bc+ca-4}$$

Bài 13. *(Hòa Bình)* Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $abc=1$ và x,y,z thuộc R Chứng minh rằng :

$$x^2(a+b)+y^2(b+c)+z^2(c+a)\geq 2(xy+yz+zx)$$

Bài 14. *(Khánh Hòa)* Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2\leq 2$. Chứng minh rằng

$$5x^2+2xy+2y^2\leq 12$$

Bài 15. *(Lạng Sơn)* Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P=\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}$$

Bài 16. *(Nam Định)* Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{a})^2}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\leq 12$$

.

Bài 17. *(Ninh Bình)* Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\geq 4\left(\frac{1}{x+7}+\frac{1}{y+7}+\frac{1}{z+7}\right)$$

Bài 18. *(Quảng Bình)* Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác và $a\geq b\geq c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(a+b-\sqrt{ab})}+\sqrt{b(a+c-\sqrt{ac})}+\sqrt{c(c+b-\sqrt{bc})}\geq a+b+c$$

Bài 19. *(Quảng Nam)* Cho các số thực không âm a,b,c,d. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a+b+c+d)^3\leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3)+24(abc+bcd+cda+dab)$$

Bài 20. *(Quảng Ninh)* Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{\sqrt{ab}+1}+\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{\sqrt{bc}+1}+\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{\sqrt{ca}+1}$$

Bài 21. *(Quảng Ngãi)* Cho ba số thực dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 6\geq \frac{8}{a^2+b^2+2}+\frac{8}{b^2+c^2+2}+\frac{8}{c^2+a^2+2}$$

Bài 22. *(Quảng Trị)* Cho 3 số không âm x,y,z thỏa $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$x^2y+y^2z+z^2x\leq x^3+y^3+z^3\leq 1+\frac{1}{2}(x^4+y^4+z^4)$$

Bài 23. *(Tp. HCM)* Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$(a^2+1)^2+(b^2+1)^2+c^2+1)^2+6\sqrt{6}abc$$

Bài 24. *(Thái Nguyên)*

1. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{3}{32}(ab+bc+ca)\geq\frac{21}{32}$$

2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz\geq 1$ và $z\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{4-z^3}{3(1+xy)}$$

Bài 25. *(Thanh Hóa)* Cho $x,y,z>0$ thỏa $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2xy+yz+zx)^2}+\frac{1}{(2yz+zx+xy)^2}+\frac{1}{(2zx+xy+yz)^2}\leq\frac{3}{16x^2y^2z^2}.$$

2 Đa thức

Bài 1. *(THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)* Tìm tất cả đa thức hệ số thực thỏa mãn

$$2\left(P(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+3P(x^2)P\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Bài 2. *(Bến Tre)* Cho khai triển $(1-2x+x^3)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...++a_{3n}x^{3n}$. Xác định hệ số a_6 biết rằng $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+...+\frac{a_{3n}}{2^{3n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

Bài 3. *(Bến Tre)* Cho phương trình

$$x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$$

Chứng minh rằng phương trình trên có đúng 5 nghiệm phân biệt. Với x_i $(i = \overline{1,5})$ là nghiệm của phương trình trên, tính tổng S biết: $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2}$.

Bài 4. *(Bình Dương)* Cho dãy các đa thức hệ số thực $\{P_n(x)\}, n = 1,2,3,...$ thỏa mãn điều kiện $P_n(2\cos x) = 2^n \cos(nx), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $P_n(x)$ là đa thức hệ số nguyên bậc n và $x \leq \sqrt[n]{P_n(x)}, \forall x > 2$.

Bài 5. *(Đà Nẵng)* Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại đa thức $f(x)$ bậc n có hệ số nguyên thỏa mãn: $f(0) = 0, f(1) = 1$ và với mọi $m \in \mathbb{N}^*, f(m)(f(m) - 1)$ là bội của 2017.

Bài 6. *(Đà Nẵng)* Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$, tồn tại đa thức $f_m(x)$ có hệ số hữu tỉ thỏa mãn với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì: $1^{2m+1} + 2^{2m+1} + ... + n^{2m+1} = f_m(n(n+1))$.

Bài 7. *(Đồng Nai)* Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho $a_1 > -1, a_2 \geq \frac{n-1}{2}$. Giả sử phương trình $x_n^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ có đúng n nghiệm thực. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm đó nằm trong đoạn $[-a_1, a_1 + 2]$.

Bài 8. *(Hà Nam)* Cho P, Q, R là 3 đa thức hệ số thực thỏa mãn: $P(Q(x)) + P(R(x)) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$ với $c = const \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $P(x) \equiv const$ hoặc $[Q(x) + R(x)] \equiv const$

Bài 9. *(Hà Tĩnh)* Cho các đa thức $P(x), Q(x), R(x)$ với hệ số thực có bậc tương ứng là $3,2,3$ thỏa mãn đẳng thức $P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi đa thức $T(x) = P(x).Q(x).R(x)$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực (kể cả nghiệm bội).

Bài 10. *(Hải Phòng)* Cho dãy đa thức hệ số thực $\{P_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ xác định như sau $P_0(x) = 2, P_1(x) = 2x, P_{n+1}(x) = 2x.P_n(x) + \left(1 - x^2\right) P_{n-1}(x) \, \forall n \geq 1$.

1. Xác định công thức tổng quát của $P_n(x)$.
2. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $P_n(x)$ chia hết cho $x^2 + 3$.

Bài 11. *(Hòa Bình)* Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $Q(x) = x^2 + px + q$ cùng thuộc $\mathbb{Q}[x]$. Biết rằng hai đa thức cùng nhận giá trị âm trên khoảng I có độ dài lớn hơn hai và ngoài khoảng I chúng đều nhận giá trị không âm . Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ để $P(x_o) < Q(x_o)$.

Bài 12. *(Tp. HCM)* Cho đa thức $P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + ... + a_1 x + a_0$ có hệ số thực với $P(1)P(2) \neq 0$ và $4\frac{P^/(2)}{P(2)} > \frac{P^/(1)}{P(1)} + 2016$. Giả sử $P(x)$ có 2016 nghiệm thực, chứng minh rằng trong số đó, có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Bài 13. *(Khánh Hòa)* Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho

1. $P(x)R(x)$ là các đa thức của x^2.
2. $P(x)R(x)$ là các đa thức của x^3.

Bài 14. *(Long An)* Tìm tất cả đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(-x).P(3x)+\left(P(2x)\right)^2 = P(x).P(5x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 15. *(Nghệ An)* Cho m là số nguyên dương thỏa mãn $m \equiv 1 (\bmod 2017)$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^{2017} - mx + 2016$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài 16. *(Phú Thọ)* Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x^2-6x+8)P(x)-(x^2+2x)P(x-2) = 6x^2-12x.$$

Bài 17. *(Quảng Bình)* Cho đa thức

$$f(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$$

trong đó $a, b, c \in Z$ có ba nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3 . Chứng minh rằng biểu thức sau là bội của 2017

$$(a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

Bài 18. *(Quảng Nam)* Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

$$P(x^2) + P(x).P(x+1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 19. *(Vĩnh Phúc)* Cho $P_i(x) = x^2 + b_i x + c_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ là n đa thức đôi một phân biệt với hệ số thực sao cho với mọi $1 \le i < j \le n$ thì đa thức $Q_{i,j}(x) = P_i(x) + P_j(x)$ có nghiệm thực duy nhất. Tìm giá trị lớn nhất có thể của n.

3 Giải tích

Bài 1. *(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)* Cho dãy số (x_n) thỏa $x_1 = 3, x_2 = 7$ và:

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n^2 + x_n, n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt dãy:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Chứng minh (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2. *(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)* Tìm a để dãy số (u_n) hội tụ, biết $u_1 = a$ và:

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n - 1 \text{ khi } u_n > 0 \\ -1 \text{ khi } -1 \le u_n \le 0 \\ u_n^2 + 4u_n + 2 \text{ khi } u_n < -1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 3. *(THPT chuyên ĐH Vinh)* Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

1. $f(1) > 0$.
2. $f(xy-1) + 2f(x)f(y) = 3xy - 1 \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4. *(THPT chuyên ĐH Vinh)* Cho số thực $a \ge 2$ và dãy số (u_n) xác đinh bởi:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + \ln \dfrac{u_n + 1}{2u_n - 3}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy u_n có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 5. *(Bà Rịa - Vũng Tàu)*

1. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
$$f(x - 2016f(y)) = y - 2017f(x) \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn
$$f(x + yf(x)) = xf(y) + f(x) \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6. *(Bà Rịa - Vũng Tàu)* Cho dãy số x_n xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{nx_n^2}{1 + (n+1)x_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Chứng minh $x_n \le \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \ge 1$.
2. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{kx_k}{1 + (k+1)x_k}$. Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Bài 7. *(Bình Dương)* Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{1}{3}f(xy) + \frac{1}{3}f(xz) - f(x)f(yz) \ge \frac{1}{9}$.

Bài 8. *(Bình Thuận)*

a. Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n+2}$ $n \in \mathbb{N}$.

b. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát của (u_n).

Bài 9. *(Đà Nẵng)* Cho dãy Fibonacci xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \geq 7$ thì có đúng 1 trong 2 số u_{p-1}, u_{p+1} là bội của p.

Bài 10. *(Đồng Nai)* Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - 2yf(x)) + f(y^2) = f^2(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 11. *(Đồng Nai)* Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 \in (1;2) \\ u_{n+1} = 1 + u_n - \dfrac{u_n^2}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 12. *(Hà Nam)* Cho hai dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2;3)$ $\forall n \geq 2$.

2. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Bài 13. *(Hà Nội)* Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1, u_n = \dfrac{n}{n-1} u_{n-1} + n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$.

1. Xác định công thức của (u_n).

2. Chứng minh $u_1 + u_2 + ... + u_{2016} < 2016^3$.

Bài 14. *(Hà Tĩnh)* Với mỗi số nguyên dương n, xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi $f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + ... + x^2 + x + 1$.

1. Chứng minh hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất.
2. Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là s_n. Chứng minh dãy số (s_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 15. *(Hải Phòng)* Cho dãy số (u_n) thỏa:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + n}{2u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ có giới hạn hữu hạn.

Bài 16. *(Hòa Bình)* Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f([x]y) = f(x)[f(y)]$ với $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài 17. *(Hòa Bình)* Cho (x_n) được xác định như sau:

$$x_0 > 0; x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^2}, n \in \mathbb{N}$$

Tìm $\lim \sqrt{2n} x_n$.

Bài 18. *(Hòa Bình)* Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_o = 1 \\ x_1 = 41 \\ x_{n+2} = 3x_n + \sqrt{8(x_{n+1}^2 + x_n^2)}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

Bài 19. *(Tp. HCM)* Cho dãy số u_n xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh dãy số u_n có giới hạn hữu hạn.

Bài 20. *(Khánh Hòa)* Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(xy) + f(x - y) + f(x + y + 1) = xy + 2x + 1$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Bài 21. *(Khánh Hòa)* Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{n}{u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\left[u_n^2\right] = n$ khi $n \geq 4$.

Bài 22. *(Lạng Sơn)* Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} + 1 = \dfrac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Chứng minh rằng $u_{n+1} + 1 < \dfrac{3(u_n + 1)}{\sqrt{10}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Bài 23. *(Lạng Sơn)* Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^3 + f(y)) = f^3(x) + y \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 24. *(Lào Cai)* Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \dfrac{20n + 21}{n + 1}} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó .

Bài 25. *(Ninh Bình)* Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i. $f(m) < f(n)$ $\forall m, n \in \mathbb{N}^*; m < n$.

ii. $f(mn) = f(m)f(n)$ $\forall m, n \in \mathbb{N}^*; (m, n) = 1$.

iii. $\exists i \in \mathbb{N}^*, i > 1$ sao cho $f(i) = i$.

1. Chứng minh rằng $f(1) = 1$, $f(3) = 3$.
2. Tìm tất cả các hàm $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 26. *(Ninh Bình)* Cho dãy số (x_n) xác định bởi hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i + 2}$. Tính $\lim y_n$.

Bài 27. *(Phú Thọ)* Xét dãy số thực vô hạn $x_1, x_2, \cdots, x_n$ thỏa mãn

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}$$

với mọi số nguyên dương m, n. Chứng minh rằng (x_n) là cấp số cộng.

Bài 28. *(Quảng Bình)* Tìm tất cả hàm số $f : N^* \to N^*$ sao cho ba số $a, f(b), f(b+f(a)-1)$ luôn là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi $a, b \in N^*$

Bài 29. *(Quảng Binh)* Cho a là một số thực và dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_n = 2016n + a.\sqrt[3]{n^3+1}.$$

1. Tìm a sao cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.
2. Tìm a để dãy số là dãy tăng từ một lúc nào đó.

Bài 30. *(Quảng Ninh)* Cho a, b là các số thực dương. Xét dãy số u_n được xác định bởi $u_n = a^2n^2 + bn$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $Lim\{\sqrt{u_n}\}$.

Bài 31. *(Quảng Trị)* Cho dãy số x_n xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2} \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát x_n và tìm $\lim x_n$.

Bài 32. *(Thái Bình)* Cho dãy số (a_n) có $a_1 \in \mathbb{R}$ và $a_{n+1} = \left|a_n - 2^{1-n}\right|, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim a_n$.

Bài 33. *(Thanh Hóa)* Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + f(y)) = f(x^2) + 2x^2 f(y) + (f(y))^2$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Bài 34. *(Thanh Hóa)* Với số thực $a \neq \frac{-1}{\sqrt{2}}$ cho trước ,xét dãy số a_n cho bởi

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{7\sqrt{2a_n^2+7} - 14}{4a_n + \sqrt{2a_n^2+7}} \end{cases}$$

Xác định a để dãy có giới hạn hữu han.

4 Hình học

Bài 1. *(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)* $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $OE//BC$. OE cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F. Tiếp tuyến tại F của đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ cắt BC, AH ở P, Q.

1. Chứng minh đường tròn (K) ngoại tiếp $\triangle BPQ$ đi qua trung điểm M của AH.

2. PA, PH cắt (K) ở S, T khác P. Chứng minh hai tiếp tuyến của (K) tại S, T cắt nhau tại một điểm trên ME.

Bài 2. *(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)* Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) sao cho $ABCD$ không phải hình thang. Tiếp tuyến tại C, D của (O) cắt nhau tại T. TA cắt BD tại S, E đối xứng với D qua S. AB cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F. EC cắt TA tại P.

1. Chứng minh rằng PF tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$.

2. Giả sử PF cắt AC tại Q, H, K lần lượt là hình chiếu của Q lên FA, FC. M là trung điểm FA. Chứng minh rằng tiếp tuyến qua A của (O) và đường thẳng qua Qv song song AO cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHK$.

Bài 3. *(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)* $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) có H là trực tâm. P là một điểm nằm trên trung trực của BC và nằm trong $\triangle ABC$. Đường thẳng qua A song song PH cắt (O) tại E khác A. Đường thẳng qua E song song AH cắt (O) tại F khác E. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua O. Đường thẳng qua F song song với AQ cắt PH tại G.

1. Chứng minh rằng B, C, P, G cùng thuộc một đường tròn tâm K.

2. AQ cắt (O) tại R khác A. PQ cắt FR tại L. Chứng minh $KL = OP$.

Bài 4. *(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)* $\triangle ABC$ nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại P. AI giao BC tại X. Tiếp tuyến qua X của (I) khác BC, giao tiếp tuyến tại (I) tại P tại S. AS giao (O) tại T khác A. Chứng minh rằng $\widehat{ATI} = 90^o$

Bài 5. *(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)* Cho $\triangle ABC$ nhọn. Đường tròn (I) có tâm I thuộc BC và tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F.Llấy hai điểm M, N bên trong tứ giác $BCEF$ sao cho tứ giác $EFNM$ nội tiếp (I) và các đường thẳng BC, MN, EF đồng quy. MF cắt NE tại P, AP cắt BC tại D.

1. Chứng minh A, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2. Trên đường thẳng BN, CM lấy các điểm H, K sao cho $\widehat{ACH} = \widehat{ABK} = 90^o$. Lấy T là trung điểm HK. Chứng minh $TB = TC$.

Bài 6. *(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)* $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC}$ tù, H là chân đường cao kẻ từ A xuống BC. Điểm M thay đổi trên cạnh AB. Dựng N sao cho $\triangle BMN \sim \triangle HCA$ (H, N) nằm khác phía với AB.

1. CM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMN$ tại K khác M. Chứng minh NK luôn đi qua điểm cố định.

2. NH cắt AC tại P. Dựng Q sao cho $\triangle HPQ \sim \triangle HNM$ $(Q, M$ khác phía với NP. Chứng minh Q thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 7. *(THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội)* Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng DI cắt đường tròn tâm A bán kính AE tại M, N (N) nằm giữa M và D). Các đường thẳng AD, EF cắt nhau tại P. các đường thẳng MA, NP cắt nhau tại Q. Gọi H là giao điểm thứ hai của AD và (I). Đường thẳng qua trung điểm của DH, DE cắt AC tại L. Chứng minh rằng:

1. $QH \perp AD$.

2. $DL//EF$.

Bài 8. *(THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội)* Hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại A. BC là một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2), với $B \in (O_1)$ và $C \in (O_2)$. Gọi M là trung điểm BC, P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua O_1, O_2. MP theo thứ tự cắt BO_2, BA tại X, Y. MQ cắt CO_1, CA tại Z, T. Chứng minh rằng:

1. Các tứ giác $BZTP, CXYQ$ nội tiếp.

2. AM, ZT, XY đồng quy.

Bài 9. *(THPT chuyên ĐH Vinh)* $\triangle ABC$ vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua A song song BC cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua I song song AB cắt AD tại J. Đường tròn tâm C bán kính CI cắt (O) tại E và F (E thuộc cung BAC.

1. Gọi S là giao điểm của IJ với CD. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

2. Chứng minh $EJ \perp AF$.

Bài 10. *(THPT chuyên ĐH Vinh)* $\triangle ABC$ có M di chuyển trên cạnh AC. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ cắt cạnh BC tại điểm thứ hai là D. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCM$ cắt cạnh AB tại điểm thứ hai là E.

1. Gọi O là giao điểm của AD và CE. Chứng minh A, E, O, M cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi I, J, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DM, BC và EM, AJ và CI. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định.

Bài 11. *(Bà Rịa - Vũng Tàu)* Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB lấy hai điểm M,N sao cho $AM < AN$ và MN không song song với AB. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ cắt AB tại điểm D khác O. Đường thẳng AN cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle MBD$ tại hai điểm E,F (E nằm giữa A và N). Đường thẳng BM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle NAD$ tại hai điểm P,Q (P nằm giữa B và M).

1. Chứng minh E,F,P,Q cùng thuộc một đường tròn.
2. Đường thẳng AP cắt BE tại điểm X, đường thẳng BE cắt AQ tại điểm Y. Chứng minh bốn đường thẳng EP,QF,XY,AB đồng quy.

Bài 12. *(Bắc Ninh)* Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử AD cắt BC tại N, AB cắt CD tại M, AC cắt BD tại E. Đường thẳng OE cắt MN tại K. Chứng minh KO là phân giác của $\widehat{BKD}$.

Bài 13. *(Bến Tre)* Cho đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài tại điểm T. Một đường thẳng cắt đường tròn (O_1) tại hai điểm A,B phân biệt và tiếp xúc với (O_2) tại X. đường thẳng XT cắt (O_1) Tại S (S khác T và C là một điểm trên cung TS không chứa A và B. Cho CY là tiếp tuyến của (O_2) tại Y sao cho các đoạn thẳng CY và ST không cắt nhau. Cho I là giao điển của các đường thẳng XY và SC. Chứng minh rằng:

1. C,T,Y và I cùng thuộc một đường tròn.
2. $SA = SI$

Bài 14. *(Bình Dương)* $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong $\triangle ABC$ sao cho PA,PB,PC cắt (O) lần lượt tại D,E,F. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $TA = TP$ thì $DE = DF$.

Bài 15. *(Bình Định)* Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại A,B. trên tia BA lấy M (M nằm ngoài (O')). Từ M Kẻ 2 tiếp tuyến MC,MD của (O') (C,D là 2 tiếp điểm). AC,AD lần lượt cắt (O) tại P,Q.

1. Chứng minh $\dfrac{DA}{DQ} = \dfrac{CA}{CQ}$.
2. Chứng minh C đi qua trung điểm PQ.
3. Chứng minh CD đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên tia BA.

Bài 16. *(Bình Thuận)* Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và M là một điểm nằm trong giác. Gọi A_1,B_1,C_1 là các điểm đối xứng với điểm M lần lượt qua các đường thẳng AI,BI,CI. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy.

Bài 17. *(Bình Thuận)* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của AB và CD, AC và BD. Lấy K là trung điểm của đoạn MN. Đoạn PK cắt (O) tại H, MH cắt (O) tại I khác H, NH cắt (O) tại J khác H. Hãy phân tích $\overrightarrow{PK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MJ}$.

Bài 18. (*(Đà Nẵng)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O),H$ là trực tâm tam giác. Đường thẳng qua A vuông góc OH cắt BC tại D. $K.L$ là tâm $(ADB),(ADC)$.

1. Chứng minh A, K, L, O thuộc một đường tròn gọi là (S).

2. AH cắt lại (S) tại $E.F$ đối xứng với E qua BC. Chứng minh $HA = HF$.

Bài 19. *(Đà Nẵng)* Cho tứ giác $ABCD$ lồi, P là điểm nằm bên trong tứ giác thỏa $\widehat{PAD} = \widehat{CAB}.M, N$ đối xứng C qua AB, AD. $(CPM), (CPN)$ cắt đoạn AB, AD tại $S, T.X, Y$ tâm $(PSC), (PTC).Q$ là giao của XY và trung trực AP.

1. Chứng minh AQ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp $\triangle AXY$.

2. Tiếp tuyến tại P, C của $(PST), (CST)$ cắt nhau ở $G.(PST), (CST)$ cắt lại AP, AC ở U, V. Chứng minh tâm (AUV) thuộc AG.

Bài 20. *(Đồng Nai)* Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có M là trung điểm BC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm AH, L là giao điểm EF và AH, N là giao điểm của đoạn AM và đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCH$.

1. Chứng minh rằng 5 điểm A, E, N, H, F cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng $\widehat{HMA} = \widehat{LNK}$.

Bài 21. *(Đồng Nai)* Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\triangle ABC$ không đều. Chứng minh rằng

$$\widehat{AIO} \le 90^0 \Leftrightarrow 2BC \le AB + AC.$$

Bài 22. *(Hà Nội)* $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có trung tuyến AM. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E, đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F. ĐƯờng tròn ngoại tiếp $\triangle ABF$ cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACE$ tại điểm thứ hai P. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A, (S_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc AC tại A. (S_1) cắt (S_2) tại điểm thứ hai Q. Chứng minh $\triangle OPQ$ vuông.

Bài 23. *(Hà Tĩnh)* $\triangle ABC$ nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$, A', B', C' lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C xuống BC, CA, AB. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm trên (O) sao cho $AA_1 // BC, BB_1 // CA, CC_1 // AB$. A_1', B_1', C_1' là các điểm trên (O) sao cho $A_1A_1' // AA'$, $B_1B_1' // BB', C_1C_1' // CC'$.

1. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $OA_1A_1', OB_1B_1', OC_1C_1'$ cùng đi qua một điểm K khác O.

2. Chứng minh $OK.OH = \dfrac{abc}{p}$, trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của $\triangle ABC$ và p là chu vi tam giác $A_1B_1C_1$.

Bài 24. *(Hà Tĩnh)* $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O), E là trung điểm cung BC không chứa A. Gọi D là giao điểm AE và BC. P, Q lần lượt là hai điểm di động trên đoạn AD sao cho $\widehat{ABQ} = \widehat{DBP}$ và Q nằm giữa A, P. Lấy điểm S sao cho $QS // AO$ và $DS \perp AO$. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm đối xứng của M qua AE, R là hình chiếu vuông góc của Q lên BC.

1. Chứng minh $\dfrac{MN}{MR} = \dfrac{2ME}{QE}$.

2. Chứng minh đường thẳng qua P vuông góc SM đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

Bài 25. *(Hải Phòng)* $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có AD là phân giác trong đỉnh $A (D \in BC)$. E là điểm trên đoạn BC sao cho $BD = CE$. Phân giác ngoài đỉnh A cắt đường thẳng qua D và vuông góc với BC tại F. Gọi I là trung điểm DF, đường thẳng EI cắt AD tại M, đường thẳng EF cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại K.

1. Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại P, KD cắt đường tròn đường kính DF tại L khác D. Chứng minh đường thẳng PL tiếp xúc với đường tròn đường kính DF.

2. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle KBC$.

Bài 26. *(Hải Phòng)* $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có trực tâm H, D, E là chân các đường cao kẻ từ B và C xuống CA, AB. Gọi M là trung điểm BC, F là giao điểm của hai đường thẳng DE và BC, K là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (C) ngoại tiếp $\triangle ADE$.

1. Chứng minh F, H, K thẳng hàng.

2. Gọi S là trung điểm MF, T là giao điểm của đường thẳng DE với đường thẳng qua A và song song với BC. Chứng minh đường thẳng ST tiếp xúc với đường tròn (C).

3. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OA_1A_1', OB_1B_1', OC_1C_1' cùng đi qua một điểm K khác O.

4. Chứng minh $OK.OH = \dfrac{abc}{p}$, trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của $\triangle ABC$ và p là chu vi tam giác $A_1B_1C_1$.

Bài 27. *(Hoà Bình)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại T . Đường thẳng qua O và vuông góc với PT cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Hai đường thẳng PE, PF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N khác P. Lấy K,L sao cho $\widehat{KAC} = \widehat{KNP} = \widehat{LAB} = \widehat{LMP} = 90^o$.

1. Chứng minh rằng $\widehat{BQF} = \widehat{KAB}$ với Q là giao của EF với PT.

2. Chứng minh rằng KB và LC vắt nhau tại 1 điểm thuộc (O).

Bài 28. *(Hoà Bình)* Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) với $C \in (O_1)$, $D \in (O)$, và B gần CD hơn A.

1. Gọi E là giao điểm của BC và AD, F là giao điểm của DB và AC. Chứng minh rằng $EF//CD$.

2. Gọi N là giao điểm của AB và EF. Lấy K trên CD sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{DAK}$. Chứng minh rằng $KE = KF$.

Bài 29. *(Tp. HCM)* Cho $\triangle ABC$ có tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $AN - AP = BP - BM = CP - CM$. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ANP, \triangle BPM, \triangle CMN$. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle XYZ$.

Bài 30. *(Tp. HCM)* Đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1.

1. Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm T.

2. Đường tròn ω_1 đi qua T tiếp xúc với CA, CB tại B_2, A_3. Các điểm C_2, A_2, B_3, C_3 xác định tương tự. Chứng minh sáu điểm $A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 31. *(Khánh Hoà)* Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua C cắt các tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M, N. Chứng minh

$$\frac{4S_{ABC}}{S_{AMN}} \leq \left(\frac{BD}{AC}\right)^2.$$

Bài 32. *(Khánh Hoà)* $\triangle ABC$ nhọn có AM, BN, CP là các trung tuyến. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh

$$AM + BN + CP \leq 4R + r.$$

Bài 33. *(Lào Cai)* Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trực tâm K. Đường thẳng BK cắt đường tròn đường kính tại D, E $(BD < BE)$. Đường thẳng CK cắt (AB) tại F, G $(CF < CG)$. Và (DHF) cắt BC tại điểm thứ hai là P.

1. Chứng minh rằng các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy.

Bài 34. *(Lạng Sơn)* Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) với I là tâm nội tiếp tam giác. Đường tròn đi qua C tiếp xúc với AI tại I cắt AC tại E và cắt (O) tại H $(E, H \neq C)$.

1. Chứng minh EH đi qua trung điểm của AI.

2. Đường tròn đi qua B tiếp xúc với AI tại I cắt AB tại F và cắt (O) tại G $(G, F \neq B)$. Chứng minh rằng 2 đường tròn (EIF) và (GIH) tiếp xúc nhau.

Bài 35. *(Lạng Sơn)* Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ttai5 H $(D \in BC, E \in CA, F \in AB)$. Gọi M là trung điểm của BC. 2 đường tròn (DEF) và (HBC) cắt nhau tại X và Y

1. Chứng minh $AX = AY$.
2. Gọi R là trung điểm của XY. AR cắt HM tại S. Chứng minh tứ giác $HDSR$ nội tiếp.

Bài 36. *(Long An)* Từ một điểm M tùy ý trong tam giác ABC, các đường thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1.$$

Bài 37. *(Nghệ An)* Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua B cắt hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại C và D. Gọi M là trung điểm CD. Đường thẳng AM cắt (O_1) tại điểm thứ hai là K (K và C khác phía so với AB), cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai P. Đường thẳng (d) qua M vuông góc với O_1M cắt đường thẳng AC tại Q và cắt đường thẳng KB tại R.

1. Gọi I, J lần lượt là giao điểm củaAB, CK với đường thẳng (d). Chứng minh M là trung điểm IJ vàRQ.
2. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

Bài 38. *(Nghệ An)* $\triangle XYZ$ đều, các đỉnh X, Y, Z lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ nhọn. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nằm trong $\triangle XYZ$.

Bài 39. *(Ninh Bình)* Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (O) đi qua A và C cắt các cạnh AB, BC tại K, N. Đường tròn (KBN) cắt đường tròn (ABC) tại B và M. Tính $\widehat{BMO}$.

Bài 40. *(Ninh Bình)* Cho $\triangle ABC$ và điểm (O) nằm trog $\triangle ABC$ Đường thẳng d_1 đi qua O song song với BC lần lượt cắt AB, AC tại J, G. Đường thẳng d_2 đi qua O song song với CA lần lượt cắt BC, CA tại F, J. Đường thẳng d_3 đi qua O song song với AB lần lượt cắt CA, CB tại H, E. Dựng các hình bình hành OEA_1F, OGB_1H, OIC_1J. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài 41. *(Nam Định)* Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn ω tâm O. Một đường tròn ω' đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở E, F $(E, F \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn ω tại K $(A \neq K)$. KE, KF lần lượt cắt lại đường tròn ω tại Q, P $(P, Q \neq K)$. Gọi T là giao điểm của BQ và CP; M, N lần lượt là trung điểm BF, CE.

1. Chứng minh rằng A, O, T thẳng hàng.
2. Chứng minh rằng KA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Bài 42. *(Nam Định)* $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi P là trung điểm cung BC không chứa A của (O), J là điểm đối xứng với I qua O. Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IBC$ cắt BC tại M, H là hình chiếu của M trên OI. Gọi D là trung điểm BC và K là giao điểm thứ hai của ID với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ODH$.

1. Chứng minh rằng $\triangle JPM$ vuông ở J.
2. Chứng minh H, A, K thẳng hàng.

Bài 43. *(Phú Thọ)* Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). Các cạnh AB, AC tiếp xúc với (I) tại E, F. Đường thẳng qua B song song với AC cắt EF tại K. CK cắt AB tại G. Chứng minh tam giác AIG vuông.

Bài 44. *(Phú Thọ)* Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Các đường tròn (O_1) và (O_2) nằm về một phía đối với đường thẳng AB, Tiếp xúc với nhau tại T đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O). Tiếp tuyến chung tại T của $(O_1), (O_2)$ cắt đường tròn (O) tại C (Với C thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa $(O_1), (O_2)$). Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 45. *(Quảng Bình)* Cho tam giác ABC nhọn không cân. P là một điểm bất kì trên cạnh BC và không trùng với B, C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt AC tại Y khác A. Tương tự xác định Z. Gọi BY cắt CZ tại K. Gọi T là hình chiếu của A lên BC, H là trực tâm tam giác ABC, A' là điểm đối xứng của A qua BC.

1. Chứng minh A', P, K thẳng hàng.
2. Chứng minh khi P di chuyển trên BC, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Bài 46. *(Quảng Nam)* Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC không cân tại A. Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến với (O) tại B và C, AM cắt (O) tại D khác A. Dựng đường kính DE của (O). Các đường thẳng BD, CE cắt nhau tại X, các đường thẳng BE, CD cắt nhau tại Y.

1. Chứng minh rằng $MX = MY$.
2. Gọi N là giao điểm của AE và XY. Chứng minh rằng N nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 47. *(Quảng Ngãi)* $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, D là điểm di chuyển trên cung BC không chứa A (D không trùng B, C).

1. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AD và BC, AB và CD. Gọi P là trung điểm EF, M là điểm đối xứng với B qua P. Chứng minh đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.
2. Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến các cạnh BC, CA, AB. Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tìm GTNN của tổng $\dfrac{AB}{DK} + \dfrac{AC}{DI} + \dfrac{BC}{DH}$.

Bài 48. *(Quảng Ninh)* Cho $\triangle ABC$ nhọn ko cân tại A nội tiếp (O) . Gọi M là trung điểm của BC. 2 tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại P. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của B va C lên AP, Q là giao điểm của AP và BC. Đường tròn (CQD) và (BQE) lần lượt cắt (O) tại điểm thứ 2 là K, L.

1. Chứng minh $\widehat{MKC} = \widehat{MLB}$.

2. Kẻ đường kính AT của (O). Giả sử các đường thẳng TB, TC, AK, AL đôi 1 cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. CMR: 4 giao điểm này là 4 đỉnh của 1 tứ giác nội tiếp.

Bài 49. *(Quảng Ninh)* Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) $(AB < AC)$, trực tâm H. Lấy điểm T trên (O) sao cho $AT \parallel BC$. Giả sử AH cắt (O) tại K, TH cắt (O) tại D trên cung nhỏ BC. Gọi I là trung điểm của HT.

1. Chứng minh 5 điểm A, L, O, K, D cùng thuộc 1 đường tròn.

2. Gọi P là giao điểm thứ 2 của AO với (O). Đường thẳng qua H song song với BC cắt PD tại X. Chứng minh rằng XA là tiếp tuyến của (O).

Bài 50. *(Quảng Trị)* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi Ilà giao điểm AC và BD, H và Klần lượt là trực tâm của $\triangle IAD$ và $\triangle IBC$. M và N lần lượt là trung điểm AB và CD; Pvà Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC và AD.

1. Chứng minh $HK \perp MN$.

2. Chứng minh MN đi qua trung điểm PQ.

Bài 51. *(Quảng Trị)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại $P.Q$ và tiếp xúc trong với (O) tại S. Hai đường thẳng $SP.SQ$ cắt lại (O) theo thứ tự tại M, N. Gọi E, D, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của S trên các đường thẳng AM, MN, AN.

1. Chứng minh $SM.AN = SN.AM$.

2. Chứng minh $DE = DF$.

Bài 52. *(Thái Bình)* Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt AC tại P. Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng DP với (O), I là trung điểm AP. Chứng minh rằng:

1. O, P, C, I cùng thuộc một đường tròn.

2. AG, BC, OP đồng quy.

Bài 53. *(Thái Nguyên)* Cho tam giác ABC nhọn, có $AC > AB$. Gọi D là hình chiếu của A trên BC và E là hình chiếu của D trên AC. Xét điểm F trên đoạn DE. Chứng minh rằng

$$AF \perp BF \iff EF.DC = BD.DE$$

.

Bài 54. *(Thanh Hoá)* Cho tam giác ABC không cân tại A.Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ với BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt đường thẳng EF tại Pvà Q. Gọi Mlà trung điểm BC, O_1 và O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAB và IAC.

1. Chứng minh rằng D, P, Q, M nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DPQ$ nằm trên đường thẳng O_1O_2.

Bài 55. *(Vĩnh Phúc)* $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC. Các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ cắt nhau tại K khác A. Đường thẳng LB cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$ tại điểm thứ hai M, đường thẳng LC cắt đường tròn ngoại tiếp ACD tại điểm thứ hai N.

1. Chứng minh M, K, L thẳng hàng và $MN \perp OL$.
2. Chứng minh K là trung điểm MN.

Bài 56. *(Vĩnh Phúc)* $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O), P nằm trong $\triangle ABC$ nằm trên đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi K, L lần lượt là giao điểm khác P của BP với (APC), CP với (APB). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các phân giác trong góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ với (O). các đường thẳng AE, AF cắt $(APC), (APB)$ lần lượt tại M, N khác A. Chứng minh K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.

5 Phương trình và hệ phương trình

Bài 1. *(Bắc Ninh)* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x(x+1) + y(y-4x-1) = 2\left[(x+1)\sqrt{x^2+y} - 1\right] \\ 2^x + 5^x = \dfrac{13-y}{6} + 44log_2\left(2 + \dfrac{131x}{3} - 5^x\right) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 2. *(Bến Tre)* Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2(x-7y) + 12 = 0 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3} = x^2 + y^2 - 10x - 5y + 22 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 3. *(Hà Nội)*

1. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 4} + \sqrt{5x^2 + 4} + x^2 - 7x + 1 = 0$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y}=5\\ \sqrt{x+4y}+2x-y=3\end{cases}$$

Bài 4. *(Hòa Bình)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y\end{cases}$$

Bài 5. *(Khánh Hòa)* Giải phương trình trên tập số thực

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$$

Bài 6. *(Khánh Hòa)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+\sqrt{x(x^2+3x+3)}=\sqrt[3]{y+4}+\sqrt{y+3}-1=\\ 7\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+18x+18}=\sqrt[3]{y+4}+1\end{cases}$$

Bài 7. *(Lào Cai)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1}=x+y\\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1\end{cases}$$

Bài 8. *(Ninh Bình)* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}y^3+4x^2y+3xy^2=x^6+3x^5+4x^4\\ \sqrt{x^2+3}+\sqrt{3y+1}=4\end{cases}$$

Bài 9. *(Quảng Trị)*

1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+y=2(x^2+1)\\ 2y^3+z=2(2y^2+1)\\ 3z^3+x=2(3z^2+1)\end{cases}$$

Bài 10. *(Thái Nguyên)* Giải bất phương trình

$$2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} \leqslant x^2-2x-1$$

Bài 11. *(Thái Nguyên)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 \end{cases} \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

Bài 12. *(Vĩnh Phúc)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+7x+3+\sqrt{x+1}=y^2+2y-xy+\sqrt{y-x} \\ 3\sqrt{6+x-y}+3\sqrt{3x+y-5}=y+6 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

6 Số học

Bài 1. *(Trường THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG HN)*

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương (a,p,n) trong đó p là một số nguyên tố thỏa mãn :

$$a^2(a^2+1)=5^n(5^{n+1}-p^3).$$

2. Một số nguyên dương $n\geq 2$ được gọi là tốt nếu với mọi $2\leq k\leq n$ thì n có dạng $n=a_1+a_2+....+a_k$ trong đó $(n,a_k)=1$ và các số a_i là nguyên dương . Tính tổng tất cả các số tốt nhỏ hơn 2016.

Bài 2. *(Trường THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG HN)* Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2-1$ là một lũy thừa của 7 .

Bài 3. *(Trường THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG HN)* Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m có n chữ số, chỉ gồm các chữ số $1,2,3$ và chia hết cho $S(m)$(tổng các chữ số của m) .

Bài 4. *(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp.HCM)* Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện: f tăng thực sự và $f(2n)=2f(n)$ với mọi số n nguyên dương.

1. Giả sử $f(a)=3$ và p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh tồn tại n sao cho $f(n)$ chia hết cho p.

2. Cho q là một số nguyên tố lẻ. Hãy xây dựng một hàm f thỏa mãn bài toán mà $f(n)$ không chia hết cho q với mọi số nguyên dương n.

Bài 5. *(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp.HCM)* Với mỗi số nguyên dương n ,tồn tại duy nhất số tự nhiên a thỏa mãn $a^2 \le n < (a+1)^2$. Đặt $\Delta_n = n - a^2$.

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của Δ_n khi n thay đổi và luôn thỏa $n = 15m^2$ với m là số nguyên dương.
2. Cho p, q là các số nguyên dương và $d = 5(4p+3)q^2$. Chứng minh $\Delta_d \ge 5$.

Bài 6. *(THPT chuyên ĐH Vinh)* Tìm các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn

$$a + 2^b + 3^c = 3d! + 1,$$

biết rằng tồn tại các số nguyên tố p, q sao cho $a = (p+1)(2p+1) = (q+1)(q-1)^2$

Bài 7. *(Bắc Ninh)* Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 34 \\ a_{n+1} = 4a_n^3 - 104a_n^2 - 107a_n \end{cases}.$$

với mọi số n nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn hai điều kiện $p \equiv 3 \pmod 4$ và $a_{2017} + 1 \vdots\ p$.

Bài 8. *(Bến Tre)* Cho p là số nguyên tố lẻ và $T = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k - (2^p + 1)$. Chứng minh rằng T chia hết cho p^2 .

Bài 9. *(Bình Dương)* Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên dương

$$(x+y)^2 = n(4xy+1).$$

Bài 10. *(Hà Nội)* Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn $12^x + y^4 = 56^z$

Bài 11. *(Hà Tĩnh)* Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$x^{19} - 1 = (x-1)(y^{12} - 1)$$

.

Bài 12. *(Hải Dương)* Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $1^n + 2^n + \ldots + 2016^n$ không chia hết cho 2017.

Bài 13. *(Hải Phòng)*

1. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu $ord_{p^2}(2) = p(p-1)$ và $v_p(2^{p(p-1)} - 1) = 2$ thì $ord_{p^k}(2) = p^{k-1}(p-1)$ và $v_p(2^{p^{k-1}(p-1)} - 1) = k, \forall k \ge 2$, trong đó $ord_b(a)$ là cấp của a theo mod b và $v_p(a)$ là số mũ đúng của a theo mod b.

2. Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 10.33^{10}$ thỏa mãn đồng thời

$$2^n \equiv 2017 \pmod{3^{11}} \ ; \ 2^n \equiv 2016 \pmod{11^3}?$$

Bài 14. *(Tp. HCM)* Với mỗi số nguyên dương n lớn hơn 1, số $\frac{1}{n}$ được biểu diễn dưới dạng thập phân như sau $\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 \dots$. Tìm tất cả các số n sao cho $n = a_1 + a_2 + \dots$

Bài 15. *(Khánh Hòa)* Cho các số nguyên tố thỏa mãn $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ và $p_4 - p_1 = 8$. Giả sử $p_1 > 5$. Chứng minh rằng p_1 chia 30 dư 11 .

Bài 16. *(Kiên Giang)* Chứng minh rằng nếu n và $m = 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là các số nguyên dương thì m là số chính phương .

Bài 17. *(Lào Cai)* Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$9x^2 + 24x + 15 = y^3.$$

Bài 18. *(Lạng Sơn)* Cho đa thức $P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x + m$. Chứng minh rằng với mỗi $m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(n) \vdots 107$.

Bài 19. *(Long An)* Cho số nguyên dương n và $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ là 4 ước nguyên dương nhỏ nhất của n. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

Bài 20. *(Nam Định)* Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất: nếu a, b là ước của n và $(a, b) = 1$ thì $a + b - 1$ cũng là ước của n.

Bài 21. *(Nghệ An)* Cho số nguyên dương a không chính phương. Chứng minh số

$$\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \dots + \{\sqrt{a}\}^n$$

là số vô tỷ.

Bài 22. *(Nghệ An)*

1. Tồn tại hay không các số thực phân biệt a, b sao cho $a + b \notin \mathbb{Q}$ nhưng $a^n + b^n \in \mathbb{Q}$ với mỗi số nguyên dương $n > 1$?

2. Cho a, b là các số thực khác nhau sao cho $a^n - b^n$ là số nguyên với mỗi số nguyên dương n. Hỏi a, b là nguyên, hữu tỷ hay vô tỷ?

Bài 23. *(Ninh Bình)* Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m luôn tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(3.2^n + n) \vdots m$.

Bài 24. *(Phú Thọ)* Với mỗi số nguyên dương n, gọi $f(n)$ là số cách chọn các dấu cộng, trừ trong biểu thức $E_n = \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$ sao cho $E_n = 0$. Chứng minh rằng:

1. $f(n) = 0$ khi $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.

2. Khi $n \equiv 0,3 \pmod 4$ ta có $\dfrac{\sqrt{2^n}}{2} \le f(n) \le 2^n - 2^{1+[\frac{n}{2}]}$.

Bài 25. *(Quảng Bình)* Cho đa thức $f(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có 3 nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng biểu thức sau là bội của 2017:

$$(a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Bài 26. *(Quảng Nam)* Cho số nguyên tố p và các số nguyên dương a, b, c phân biệt nhỏ hơn p. Chứng minh rằng nếu các số a^3, b^3, c^3 có cùng số dư khi chia cho p thì $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho $a + b + c$.

Bài 27. *(Quảng Ngãi)*

1. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình $x^2+2016x+2017y^2+y = xy+2017xy^2+2018$.

2. Cho m, n là các số nguyên dương, m là số lẻ. Chứng minh rằng $4m \mid 3^n + 1$ khi và chỉ khi $2m \mid 3^n + 1$ và $3 \mid (2m)^n + 1$.

Bài 28. *(Quảng Ninh)* Cho số nguyên $n \ge 2$ thỏa mãn điều kiện $2^{\varphi(n)} + 3^{\varphi(n)} + ... + n^{\varphi(n)}$ chia hết cho n, trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương ko vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

1. Chứng minh rằng n ko có ước số lớn hơn 1 nào là số chính phương.

2. Biết rằng n có ko quá 3 ước nguyên tố, tìm tất cả các số n thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 29. *(Thái Bình)* Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^y y^x = (x + y)^{x+y}.$$

7 Tổ hợp

Bài 1. (*THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN*) Trên một giá sách có n cuốn sách được đánh số từ 1 đến n ($n \in \mathbb{N}^*$ cho trước), ban đầu các cuốn sách được sắp xếp theo thứ tự nào đó. Một thủ thư muốn xếp lại theo đúng thứ tự $1, 2, ..., n$ từ trái qua phải, quy tắc xếp như sau: Chọn quyển sách đầu tiên có số không đúng vị trí (tính từ bên phải sang) và chuyển cuốn sách đó về đúng vị trí của nó. Ví dụ, trên giá có 4 quyển sách theo thứ tự $3-1-4-2$, sau một bước chuyển quyển số 2 về đúng vị trí của nó ta xếp lại thành $3-2-1-4$. Chứng minh rằng người thủ thư có thể hoàn thành công việc của mình sau ít hơn 2^n lần xếp theo quy tắc.

Bài 2. (*THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN*) Tìm số lớn nhất phần tử của một tập hợp là tập con của $\{1,2,3,....2016\}$ thỏa mãn hiệu hai phần tử bất kỳ khác 4 và 7.

Bài 3. (*THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN*) Cho n nguyên dương. Các tâm thẻ trong một bộ sưu tập có giá trị $m!$ với m là số nguyên dương nào đó, Một bộ sưu tập tốt là một bộ sưu tập sao cho với mọi số k thỏa mãn $k \le n!$, luôn tồn tại một số tâm thẻ trong bộ sưu tập mà tổng giá trị các thẻ này bằng k. Tìm số tấm thẻ ít nhất của bộ sưu tập tốt.

Bài 4. (*Trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM*) Với các số nguyên a,b,c,d thỏa $1 \le a < b < c < d$, kí hiệu $T(a,b,c,d) = \{x,y,z,t \in N | 1 \le x < y < z < t, x \le a, y \le b, z \le c, t \le d\}$.

1. Tính số phần tử của $T(1,4,6,7)$.

2. Cho $a = 1$ và $b \ge 4$. Gọi d_1 là số phần tử của $T(a,b,c,d)$ chứa 1 và không chứa 2, d_2 là số phần tử chứa 1,2 nhưng không chứa 3, d_3 là số phần tử chứa 1,2,3 nhưng không chứa 4. Chứng minh rằng $d_1 \ge 2d_2 - d_3$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 5. (*Trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM)* Trong một hệ thống máy tính, một máy tính có thể kết nối trực tiếp với ít nhất 30% máy tính khác của hệ thống. Hệ thống này có một chương trình ngăn chặn và cảnh báo khá tốt,do đó khi một máy tính bị virus,nó chỉ đủ thời gian lây virus cho các máy tính được kết nối trực tiếp với nó. Chứng minh rằng dù vậy, kẻ tấn công vẫn có thể chọn hai máy tính của hệ thống mà nếu thả virus vào hai máy đó, ít nhất 50% máy tính của hệ thống sẽ bị nhiễm virus.

Bài 6. (*THPT chuyên ĐH Vinh*) Bạn An có 12 tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ ghi một số nguyên từ 1 đến 12, các số trên các thẻ đều phân biệt.

1. Chứng minh rằng bạn An có thể chia 12 tấm thẻ đó thành một số nhóm thỏa mãn tính chất (P) như sau: trong mỗi nhóm có nhiều hơn một tấm thẻ đồng thời số lớn nhất ghi trên một tấm thẻ nào đó bằng tổng các số ghi trên tấm thẻ còn lại.

2. Nếu bạn An cho bạn Bình n tấm thẻ mang các số từ 1 đến n $(1 \le n \le 12)$ thì với những tấm thẻ còn lại bạn An có thể chia thành một số nhóm thỏa mãn tính chất (P) hay không?

Bài 7. (*Bà Rịa - Vũng Tàu*)

1. Tính số hoán vị $f(1); f(2); ...; f(2016)$ sao cho biểu thức

$$T = |f(1) - 1| + |f(2) - 2| + ... + |f(2016) - 2016|$$

đạt trá trị lớn nhất, trong đó $f(1)$ là giá trị ở vị trí thứ i trong mỗi hoán vị,$i = 1,2,3,...2016$.

2. Trên mặt phẳng xét 42 điểm mà không có ba điểm nào thẳng hàng.Ta dựng các đoạn thẳng nối hai điểm trong các điểm nói trên sao cho mọi bộ ba điểm đang xét luôn có hai điểm được nối với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của số đoạn thẳng cần dựng.

Bài 8. (*Bắc Ninh*)

1. Xung quanh bờ hồ hình tròn có 2017 cây liễu. Người ta dự định chặt bớt 5 cây liễu sao cho không có 2 cây liễu nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau ?

2. Một cuộc họp có $12k(k \in \mathbb{N}^*)$ người, trong đó mỗi người bắt tay với đúng $3k+6$ người khác. Biết rằng với mọi cách chọn cặp hai người $(A;B)$ thì số người bắt tay với cả hai người A và B luôn là $m(m \in \mathbb{N}^*, m \leq 3k+6)$. Hỏi cuộc họp có bao nhiêu người ?

Bài 9. (*Bình Dương*) Trên mặt phẳng cho 2017 điểm sao cho với ba điểm bất kì ta luôn tìm được hai điểm để đoạn thẳng được tạo thành có độ dài bé hơn 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 1009 điểm đã cho.

Bài 10. (*Bình Dương*) Trên bảng cho các số $\frac{1}{2016}, \frac{2}{2016}, \dots, \frac{2016}{2016}$. Mỗi lần thực hiện trò chơi cho phép ta xóa đi hai số a, b bất kì và thay vào số mới bằng $a+b-3ab$. Hỏi sau 2015 lần thực hiện phép xóa, số còn lại trên bảng là số nào?

Bài 11. (*Bình Dương*)

1. Trên mỗi ô vuông của một bảng $9x9$, ta đặt một con châu chấu. Giả sử cứ sau một tiếng gõ, mỗi con châu chấu nhảy sang ô bên cạnh cùng một hàng hoặc cùng một cột. Chứng minh rằng sau một tiếng gõ có ít nhất hai con ở cùng một ô.

2. Trên mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy, có một con châu chấu ở tọa độ (x, y) trong đó $x, y \in \mathbb{Z}$. Với N là số nguyên dương cho trước, con châu chấu có thể nhảy từ điểm nguyên A đến điểm nguyên B nếu độ dài AB bằng N. Hỏi rằng con châu chấu có thể nhảy đến bất kì điểm nguyên nào sau hữu hạn các bước nhảy không nếu $N = 2025$. Vì sao? (Điểm nguyên là điểm có tung độ và hoành độ là các số nguyên).

Bài 12. (*Đà Nẵng*) Trong mặt phẳng cho $n \geq 2$ đường thẳng đôi một cắt nhau và không có ba đường nào đồng quy. Các đường này chia mặt phẳng thành các miền hữu hạn và vô hạn. Chứng minh ta có thể đánh dấu các miền đó bằng các số nguyên thỏa mãn cả ba điều kiện sau:

(i) Các số đó khác 0.

(ii) Trị tuyệt đối của mỗi số không lớn hơn n.

(iii) Mỗi đường thẳng đã cho sẽ phân mặt phẳng làm hai phần mà tổng các số của mọi miền thuộc mỗi phần sẽ bằng 0.

Bài 13. (*Đà Nẵng*) Cho bảng ô vuông 2017 x 2017, người ta điền vào mỗi ô của bảng một số nguyên từ 1 đến 2017 sao cho mỗi số được điền vào bảng đúng một lần.

1. Chứng minh tồn tại hai số cạnh nhau trong bảng (tức thuộc hai ô chung cạnh) có hiệu không nhỏ hơn 2017.

2. Tìm $k \in \mathbb{N}^*$ nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách điền để hiệu hai số cạnh nhau bất kì trong bảng đều không lớn hơn k.

Bài 14. (*Đồng Nai*) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho: Với n số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ đôi một khác nhau , luôn tồn tại hai chỉ số $i, j \in \left\{1,2,3,...,n\right\}$ để $a_i + a_j \geq 2017(a_i, a_j)$ với (a, b) là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b.

Bài 15. (*Đồng Nai*) Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ của các số $1,2,3,..,10$ sao cho $a_i > a_{2i}$ với $1 \leq i \leq 5$ và $a_j > a_{2j+1}$ với $1 \leq i \leq 4$.

Bài 16. (*Hà Nam*) Gọi A là tập các bộ (x_1, x_2, x_3) với $x_1, x_2, x_3 \in \{0;1;2;...;7\}$. Bộ $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$ gọi là trội hơn bộ $y = (y_1, y_2, y_3) \in A$ nếu $x \neq y$ và $x_i \geq y_i$ $\forall i = 1;2;3$. Khi đó ta viết $x > y$. Tìm $n_{min} \in \mathbb{N}^*$ sao cho mọi tập con có n ptử của A đều chứa ít nhất 2 bộ $x > y$.

Bài 17. (*Hà Tĩnh)* Cho tập $S = \{1,2,3,...,2016\}$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_{2016})$ của tập S sao cho $2(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) \vdots k$ với $\forall k = 0,1,2,...,2016$

Bài 18. (*Tp. HCM*) Xét tập hợp S gồm 2016 số nguyên dương đầu tiên. Gọi A, B, C là 3 tập con bất kỳ của S, đôi một không giao nhau sao cho $|A| = |B| = |C| = 672$ và $A \cup B \cup C = S$. Chứng minh rằng tồn tại 3 số a, b, c lần lượt thuộc 3 tập A, B, C mà số này bằng tổng hai số kia.

Bài 19. (*Khánh Hòa*) Cho tập hợp $A = \left\{a_1, a_2, ..., a_{15}\right\}$ gồm 15 phần tử. Chúng ta sẽ tạo ra những tập hợp mà mỗi tập hợp này chỉ chứa một hay nhiều phần tử của A (có thể sử dụng tất cả các phần tử của tập A) và chỉ số dưới của mỗi phần tử trong mỗi tập hợp được tạo thành phải là bội của chỉ số dưới nhỏ nhất có trong tập hợp đó. Có bao nhiêu tập hợp như hợp như thế được tạo thành? Chẳng hạn $\left\{a_2, a_4, a_8\right\}, \left\{a_6\right\}, ...$ là các tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 20. (*Lạng Sơn*) Cho tập $M_n = \{1;2;...;n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. Gọi X là 1 tập con của M_{15} sao cho tích của 3 ptử bất kỳ của X không phải số chính phương. Tìm max $|X|$.

2. Gọi Y là 1 tập con gồm có 15 phần tử của tập M_{25}. Tập I' gọi là tập "tốt" nếu như không tồn tại 2 phần tử nào mà tích của chúng là số chính phương. Tính số tất cả các tập "tốt".

Bài 21. (*Nghệ An*) Một số nguyên dương k được gọi là "*đẹp*" nếu có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^*$ thành tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ sao cho với mỗi số nguyên dương $n \geq 15$ và với mọi $i \in \{1;2;...;k\}$ đều tồn tại hai sô thuộc tập A_i có tổng là n.

1. Chứng minh rằng $k = 3$ là *đẹp*.

2. Chứng minh rằng mọi $k \geq 4$ đều không *đẹp*.

Bài 22. (*Ninh Bình*) Tìm $k_{max} \in \mathbb{N}^*$ sao cho ta có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương thành k tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ thỏa mãn với mỗi $n \in \mathbb{N}^*, n > 14$, trong mỗi tập A_i $i = \overline{1,k}$ đều tồn tại 2 số có tổng bằng n.

Bài 23. (*Phú Thọ*) Một hàng cây bưởi Đoan Hùng gồm 17 cây thẳng hàng đánh số cây theo thứ tự là các số tự nhiên từ 1 đến 17. Ban đầu mỗi cây có một con đậu trên đó để hút mật hoa. Sau đó, cứ mỗi giờ có hai con ong nào đó bay sang hai cây bên cạnh để tìm và hút mật nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số giờ có hay không trường hợp mà

1. Không có con ong ở cây có số thứ tự chẵn.

2. Có 9 con ong ở cây cuối cùng.

Bài 24. (*Quảng Bình*) Cho số nguyên dương $n \geq 4$. Tìm số lớn nhất các cặp gồm hai phần tử phân biệt của tập $X_n = \{1, 2, ..., n\}$ sao cho tổng các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá n .

Bài 25. (*Quảng Ninh*) Giả sử S là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong 2 màu đỏ hoặc xanh. Gọi $A_1, A_2, ..., A_{68}$ là tập con của tập S mà mỗi tập chứa đúng 5 điểm thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i Mỗi tập $A_1, A_2, ..., A_{68}$ chứa ít nhất một điểm màu đỏ.

ii Với ba điểm bất kì trong S, tồn tại chính xác 1 tập con A_i chứa 3 điểm đó.

Hỏi:

1. Tìm số phần tử của tập S.

2. Tồn tại hay không một tập con A_i chứa 4 hoặc 5 điểm đỏ. Vì sao ?

Bài 26. (*Quảng Trị*)

1. Cho tập hợp $S = \{1;2;3;...;2016\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con của S có 3 phần tử mà chúng là độ dài của 3 cạnh của một tam giác có chiều dài cạnh lớn nhất bằng 1000 ?

2. Cho một hình vuông có cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông này có $n(n \in \mathbb{N}^*)$ hình tròn có tổng diện tích lớn hơn $n - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm của hình vuông nằm trong tất cả hình tròn này.

Bài 27. (*Thái Nguyên*) Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5\}$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc E. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

Bài 28. (*Thanh Hóa*) Tại bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$ có ghi tương ứng bốn số a, b, c, d không đồng thời bằng nhau.Thực hiện phép biến đổi số tại các đỉnh của tứ diện như sau: Mỗi lần biến đổi ta xóa bộ các số cũ $(x; y; z; t)$ và thay vào đó bộ bốn số mới $(x+y+z-3t; y+z+t-3x; z+t+x-3y; t+x+y-3z)$ theo thứ tự bất kỳ. Chứng minh rằng kể từ sau lần biến đổi đầu tiên, trong bốn đỉnh của tứ điện có ít nhất một đỉnh được ghi số dương và sau một số lần thực hiện phép biến đổi luôn có ít nhất một đỉnh của tứ diện được ghi số không nhỏ hơn 2016.

Phần II
LỜI GIẢI

1 Bất đẳng thức

Bài 1

1. Cho x, y là các số thực dương sao cho $2x+y$ và $2y+x$ khác 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{(2x^2+y)(4x+y^2)}{(2x+y-2)^2}+\frac{(2y^2+x)(4y+x^2)}{(x+2y-2)^2}-3(x+y)$$

2. Cho $a,b,c>0$ sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b^2(ca+1)}+\frac{b}{c^2(ab+1)}+\frac{c}{a^2(bc+1)}\geq\frac{9}{(1+abc)(ab+bc+ca)}$$

(THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Lời giải

1. Ta sẽ chứng minh:
$$\frac{(2x^2+y)(4x+y^2)}{(2x+y-2)^2}\geq 2x+y-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (2xy-6x-3y+2)^2\geq 0 \text{ (đúng).}$$
Chứng minh tương tự ta được: $P\geq -1$. Vậy GTNN của P là -1 khi $x=y=\dfrac{9+\sqrt{65}}{4}$ hoặc $x=y=\dfrac{9-\sqrt{65}}{4}$.

2. Theo BĐT Cauchy - Schwartz thì
$$\sum_{cyc}\frac{c}{a^2(bc+1)}=\sum_{cyc}\frac{\frac{1}{a^2}}{b+\frac{1}{c}}\geq\frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a+b+c}=\frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3}$$
$$=\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(ab+bc+ca)+3a^2b^2c^2}.$$
Đặt $ab+bc+ca=x, abc=y$. BĐT ban đầu sẽ đúng nếu ta chứng minh được
$$\frac{x^2}{xy+3y^2}\geq\frac{9}{x(1+y)}\Leftrightarrow x^3+x^3y\geq 9xy+27y^2$$
$$\Leftrightarrow x(x^2-9y)+y(x^3-27y)\geq 0,$$
một điều luôn đúng vì $x^2-9y\geq 0$ và $x^3-27y\geq 0$. Vậy BĐT được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 2

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$x^k y^k z^k (x^3 + y^3 + z^3) \le 3$$

đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)

Lời giải

Lời giải sau đây trích từ trang nangkhieutoan.com

- Dễ dàng tìm được các bộ số để BĐT không đúng với $k = 1$ và $k = 2$.
- Nhận xét rằng nếu BĐT đúng với $k = 3$ thì BĐT sẽ đúng với mọi $k > 3$ vì $x^k y^k z^k (x^3 + y^3 + z^3) = x^3 y^3 z^3 (x^3 + y^3 + z^3).x^{k-3} y^{k-3} z^{k-3} \le 3$. Điều này gợi ý cho ta chứng minh rằng $k = 3$ là số nhỏ nhất cần tìm, bằng cách chứng minh

$$x^3 y^3 z^3 (x^3 + y^3 + z^3) \le 3. \tag{1.1}$$

Thật vậy, giả sử z là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z, suy ra $z \le 1$. Ta có

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (3 - z)^3 - 3xy(3 - z).$$

Khi đó

$$(1.1) \Leftrightarrow (3 - z)^3 + z^3 \le \frac{3}{x^3 y^3 z^3} + 3xy(x + y)$$

$$3z^2 - 9z + 9 \le \frac{1}{x^3 y^3 z^3} + x^2 y + xy^2. \tag{1.2}$$

Để ý rằng

$$\frac{1}{x^3 y^3 z^3} + x^2 y + xy^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{x^3 y^3}{x^3 y^3 z^3}}$$

đồng thời

$$3z^2 - 9z + 9 - \frac{3}{z} = \frac{3(z-1)^3}{z} \le 0$$

nên (1.2) đúng, và BĐT ban đầu được chứng minh. Vậy $k = 3$ là số nguyên dương nhỏ nhất để BĐT ban đầu đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 3

Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c

$$ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} + k.\max\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\} \le a^2+b^2+c^2.$$

(THPT chuyên Đại học Vinh)

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó $\max\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\} = (a-c)^2$. Như vậy, ta sẽ tìm k sao cho: $ab+bc+ca \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3} + k(a-c)^2 \le a^2+b^2+c^2$.

Cho $c = 0, a = 2b$ ta được $\dfrac{-1}{4} \le k \le \dfrac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh $ab+bc+ca \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3} + k(a-c)^2 \le a^2+b^2+c^2$ với mọi $\dfrac{-1}{4} \le k \le \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$$ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} + k(a-c)^2 \Leftrightarrow \left(k+\frac{1}{4}\right)(a-c)^2 + \frac{1}{12}(a+c-2b)^2 \ge 0,$$

nên BĐT đầu tiên đúng. Đồng thời

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} + k(a-c)^2 \le a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-k\right)(a-c)^2 + \frac{1}{6}(a+c-2b)^2 \ge 0$$

nên BĐT thứ hai cũng đúng.

Bài 4

1. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh bất đẳng thức
$$\frac{1}{(2x+y+z)^2} + \frac{1}{(2x+y+z)^2} + \frac{1}{(2x+y+z)^2} \le \frac{3}{16}.$$

2. Cho x, y, z không âm và thỏa $x^2+y^2+z^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức
$$(x^2y+y^2z+z^2x)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right) \le \frac{3}{2}.$$

(Bà Rịa - Vũng Tàu)

Lời giải

Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 1 *Cho* $x, y, z > 0$. *Khi đó* $9(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

Trở lại bài toán.

1. Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có
$$\sum \frac{1}{(2x+y+z)^2} = \sum \frac{1}{((x+y)+(x+z))^2} \le \sum \frac{1}{4(x+y)(x+z)}.$$
Do đó BĐT ban đầu sẽ đúng nếu ta chứng minh được
$$\sum \frac{1}{4(x+y)(x+z)} \le \frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{8}{3}(x+y+z) \le (x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}(x+y+z)(xy+yz+zx) \le (x+y)(y+z)(z+x)(xy+yz+zx),$$
Nhưng điều này đúng vì $xy+yz+zx \ge \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3$ và theo bổ đề bên trên. Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

2. Chúng tôi xin nêu hai cách chứng minh cho câu 2.
   - *Cách 1:* Ta có
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = x^3+y^3+z^3+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và $x^2+y^2+z^2=1$ ta có
$$x^2y+y^2z+z^2x \le \frac{1}{3}(x+y+z)$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)^2 \le 3\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)$$
Do đó ta sẽ chứng minh
$$3\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right) \le \left(\frac{9}{2(x+y+z)}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{27}{4(x+y+z)^2} \ge \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{27}{4(x+y+z)^2}+\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1} \ge 3$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwartz ta có
$$VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{3+x^2+y^2+z^2}+\frac{27}{4(x+y+z)^2}$$
$$\Rightarrow VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{4}+\frac{27}{4(x+y+z)^2}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và $x+y+z \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = \sqrt{3}$ ta có
$$\frac{27}{4(x+y+z)^2}+\frac{(x+y+z)^2}{4} = \frac{9}{4(x+y+z)^2}+\frac{(x+y+z)^2}{4}+\frac{18}{4(x+y+z)^2} \ge \frac{3}{2}+\frac{18}{4.3} = 3$$
Từ đó ta thấy đpcm là đúng.

- *Cách 2:* Ta có

$$x^2y+y^2z+z^2x \le \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{3} = \frac{x+y+z}{3}$$

Do đó cần chứng minh

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x+y+z}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{x+y+z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{9}{2}$$

Ta có:

$$xy+zx+zx \le x^2+y^2+z^2 = 1$$

Do đó

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)$$

Do đó

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}$$

Hay là chứng minh

$$\frac{y+z}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2}}+\frac{z+x}{\sqrt{2y^2+z^2+x^2}}+\frac{x+y}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}} \le 3$$

Ta có:

$$\left(\frac{y+z}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2}}\right)^2 \le \frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}$$

Suy ra:

$$\left(\frac{y+z}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z+x}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{x+y}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}}\right)^2 \le 3$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{y+z}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2}}+\frac{z+x}{\sqrt{2y^2+z^2+x^2}}+\frac{x+y}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}}\right)^2\\ &\le 3\left[\left(\frac{y+z}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z+x}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{x+y}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}}\right)^2\right] \le 9\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{y+z}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2}}+\frac{z+x}{\sqrt{2y^2+z^2+x^2}}+\frac{x+y}{\sqrt{2z^2+x^2+y^2}} \le 3$$

Do đó ta có đpcm.

Bài 5

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{ab}{3a+4b+5c} + \frac{bc}{3b+4c+5a} + \frac{ca}{3c+4a+5b} - \frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}.$$

(Bắc Ninh)

Lời giải

Ta có

$$\sum \frac{ab}{3a+4b+5c} = \sum \frac{2ab}{5(a+b+2c)+(a+3b)} \le \frac{2}{36}\left(\sum \frac{5ab}{a+b+2c} + \sum \frac{ab}{a+3b}\right).$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$\sum \frac{ab}{a+b+2c} \le \frac{9}{4}.$$

Ta có:

$$\sum \frac{ab}{a+b+2c} \le \frac{1}{4}\left(\sum \frac{ab}{c+a} + \sum \frac{ab}{b+c}\right) = \frac{1}{4}(a+b+c) = \frac{9}{4}$$

nên điều trên sẽ đúng nếu ta sẽ chứng minh:

$$\sum \frac{ab}{a+3b} \le \frac{9}{4}.$$

Để ý rằng

$$\sum \frac{ab}{a+3b} \le \frac{1}{16}\left(\sum \frac{ab}{a} + \sum \frac{3ab}{b}\right) = \frac{1}{16}\left(\sum b + \sum 3a\right) = \frac{1}{4}(a+b+c) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{ab}{3a+4b+5c} \le \frac{1}{18}\left(5.\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{4} \tag{1.3}$$

Mặt Khác

$$\frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} = \frac{2}{2\sqrt{(ab+2bc)(ab+2ca)}} \ge \frac{2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$= \frac{3}{3(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{(a+b+c)^2} = \frac{3}{9^2} = \frac{1}{27} \tag{1.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) ta được: $T \le \frac{3}{4} - \frac{1}{27} = \frac{77}{108}$. Vậy GTLN của T là $\frac{77}{108}$ khi $a=b=c=3$.

Bài 6

Cho a, b, c là các số thực dương . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1344}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{2016}{\sqrt{a+b+c}}.$$

(Bến Tre)

Lời giải

Ta có: $a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} = a + 2\sqrt{\frac{a}{4}.b} + \sqrt[3]{\frac{a}{4}.b.4c} \le a + \frac{a}{4} + b + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{4} + b + 4c\right) = \frac{4}{3}(a+b+c)) \Rightarrow$ $P \ge \frac{1008}{a+b+c} - \frac{2016}{\sqrt{a+b+c}} = 1008\left(\frac{1}{\sqrt{a+b+c}} - 1\right)^2 - 1008 \ge -1008$. Vậy GTNN của P là -1008 khi $a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$.

Bài 7

Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{2} \ge \frac{yz}{y+z} + \frac{xy}{x+y} + \frac{zx}{z+x}.$$

(Bình Thuận)

Hướng dẫn

- $\sum \frac{x^2}{y+z} \ge \frac{(\sum x)^2}{\sum (y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$.
- $\frac{x+y+z}{2} \ge \frac{yz}{y+z} + \frac{xy}{x+y} + \frac{zx}{z+x} \Leftrightarrow \sum \frac{(x-y)^2}{4xy} \ge 0$ (đúng)

Bài 8

Cho các số thưc dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}.$$

(Đồng Nai)

Lời giải

Ta có: $\sum \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sum \frac{1}{\sqrt{bc(b+c)}} \ge \frac{9}{\sum \sqrt{bc(b+c)}} \ge \frac{9}{\sqrt{3(\sum bc(b+c))}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3abc}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}$.

Bài 9

Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

(Hà Nam)

Lời giải

Chuẩn hoá $a+b+c=3$. Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} = \sqrt{\frac{a}{3-a}} \geq \frac{2}{3}a$. Điều này tương đương với $a(2a-3)^2 \geq 0$, hiển nhiên đúng. Cộng lại ta được $P \geq \frac{2}{3}.3 = 2$. Vậy GTNN của P bằng 2 khi có một số bằng 0 và hai số bằng nhau.

Nhận xét 1 *Một số bạn sẽ giải bài này như sau: Ta có* $P = \sum \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sum \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \sum \frac{2a}{a+b+c} = 2$ *phải xét trường hợp có một số bằng* 0*, vì để ý rằng khi nhân cả từ và mẫu của phân thức cho một số, số đó phải khác* 0.

Bài 10

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+2abc=1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2(a+b+c).$$

(Hà Nội)

Lời giải

Dự đoán GTNN của P là 3 đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$, vậy ta sẽ cố gắng chứng minh BĐT

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2(a+b+c) \geq 3.$$

Từ giả thiết suy ra tồn tại các số $x, y, z > 0$ sao cho

$$a = \frac{x}{y+z}, b = \frac{y}{z+x}, c = \frac{z}{x+y}.$$

BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 2\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) + 3.$$

Để ý rằng

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

nên BĐT sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge \frac{3}{2}.$$

Nhưng đây chính là BĐT Nesbitt quen thuộc, vì vậy BĐT ban đầu đúng..

Nhận xét 2 *Cách đặt* $a=\frac{x}{y+z}, b=\frac{y}{z+x}, c=\frac{z}{x+y}$ *khá kinh điển trong việc đổi biến và thuần nhất hoá để chứng minh bất đẳng thức, và nó giúp đưa về các dang bài toán quen thuộc. Ngoài ra, chúng ta còn những cách đặt khác cho các loại giả thiết tương tự. Cụ thể như sau, nếu* x,y,z *là các số dương thì:*

- $x^2+y^2+z^2+xyz=4\Rightarrow x=2\cos A, y=2\cos B, z=2\cos C$ *với* A,B,C *là ba góc trong một tam giác.*
- $xyz=x+y+z+2\Rightarrow x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c}$ *với* $a,b,c>0$.

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra các cách đặt trên.
Ngoài ra còn một số bài toán khác liên quan đến cách đổi biến lượng giác như:

1. *(USA 2001) Cho* a,b,c *không âm thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng:*
$$0\le ab+bc+ca-abc\le 2$$
2. *(Iran 2002) Cho* $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng:*
$$a+b+c\le 3$$

Bài 11

Cho các số thực dương a,b,c dương và thỏa mãn $a^5+b^5+c^5=3$. Chứng minh rằng

$$a^6b^6+b^6c^6+c^6a^6\le 3.$$

(Hà Tĩnh)

Lời giải

Đặt $x=a^5, y=b^5, z=c^5$ thì $x+y+z=3$. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$xy\sqrt[5]{xy}+yz\sqrt[5]{yz}+zx\sqrt[5]{zx}\le 3.$$

Theo BĐT AM - GM thì

$$\sum_{x,y,z}xy\sqrt[5]{xy}\le\sum_{cyc}\frac{xy(x+y+3)}{5}=\sum_{cyc}\frac{xy(x+y+x+y+z)}{5}=\sum_{x,y,z}\frac{2xy(x+y)+xyz}{5}$$

$$= \frac{2(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz}{5} = \frac{6(xy+yz+zx)-3xyz}{5}.$$

Mặt khác theo BĐT Schur thì

$$(x+y+z)^3+9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx) \Leftrightarrow 3^3+9xyz \geq 4.3(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow 9+3xyz \geq 4(xy+yz+zx)$$

Suy ra

$$\frac{6(xy+yz+zx)-3xyz}{5} \leq \frac{6(xy+yz+zx)-4(xy+yz+zx)+9}{5}$$

$$= \frac{2(xy+yz+zx)+9}{5} \leq \frac{\frac{2}{3}(x+y+z)^2+9}{5} = 3.$$

Vậy BĐT ban đầu được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét 3 *Bằng cách tương tự ta có thể giải được bài toán tổng quát sau: Cho các số thực dương a,b,c và $k \geq 3$ thỏa mãn $a^k+b^k+c^k=3$. Chứng minh rằng*

$$a^{k+1}b^{k+1}+b^{k+1}c^{k+1}+c^{k+1}a^{k+1} \leq 3.$$

Bài 12

Cho $a,b,c \geq \frac{1}{2}$ thỏa mãn $a+b+c=6$. chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc+ab+bc+ca-4}.$$

(Hải Phòng)

Lời giải

Đặt $p=a+b+c=6, q=ab+bc+ca, r=abc$. Từ giả thiết dễ dàng chứng minh được $q \leq 12$.
Ta có

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -27r^2+2p(9q-2p^2)r+p^2q^2-4q^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{p(9q-2p^2)+2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27} = \frac{18(q-8)+2(12-q)\sqrt{3(12-q)}}{9} \tag{1.5}$$

Ta cần chứng minh

$$q^2 \geq 9(q+r-4) \Leftrightarrow q^2-9q+36 \geq 9r. \tag{1.6}$$

Điều này sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$q^2-9q+36 \geq 18(q-8)+2(12-q)\sqrt{3(12-q)}$$

$$\Leftrightarrow (12-q)(\sqrt{12-q}-\sqrt{3})^2 \geq 0,$$

một điều hiển nhiên đúng.
Từ (1.5) và (1.6) ta có điều phải chứng minh

Bài 13

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $abc=1$ và x,y,z thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$x^2(a+b)+y^2(b+c)+z^2(c+a)\geq 2(xy+yz+zx).$$

(Hoà Bình)

Lời giải

Đặt $a=m^3, b=n^3, c=p^3$. Do $abc=1$ nên $mnp=1$.
Áp dụng BĐT quen thuộc $m^3+n^3\geq mn(m+n)$ và BĐT Cauchy - Schwartz, ta có

$$x^2(m^3+n^3)+y^2(n^3+p^3)+z^2(p^3+m^3)\geq x^2mn(m+n)+y^2np(n+p)+z^2pm(p+m)$$

$$=\frac{[x(m+n)]^2}{p(m+n)}+\frac{[y(n+p)]^2}{m(n+p)}+\frac{[z(p+m)]^2}{n(p+m)}\geq\frac{[x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)]^2}{2(mn+np+pm)}.$$

Như vậy BĐT ban đầu sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{[x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)]^2}{2(mn+np+pm)}\geq 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow [x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)]^2\geq 4(x+y+z)(m+n+p)$$

$$\Leftrightarrow \left|x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)\right|\geq 2\sqrt{(x+y+z)(m+n+p)}$$

$$\Leftrightarrow \left|x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)\right|+\left|xp+ym+zn\right|$$

$$\geq 2\sqrt{(x+y+z)(m+n+p)}+\left|xp+ym+zn\right|.$$

Để ý rằng

$$\left|x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)\right|+\left|xp+ym+zn\right|$$

$$\leq\sqrt{[x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)][m^2+n^2+p^2+2(mn+np+pm)]}$$

$$=\sqrt{(x+y+z)^2(m+n+p)^2}=\left|(x+y+z)(m+n+p)\right|\leq$$

$$\left|x(m+n)+y(n+p)+z(p+m)\right|+\left|xp+ym+zn\right|$$

chính là điều phải chứng minh.
Bài toán trên đã kết hợp BĐT trong đề Ukraine năm 2001 với một đánh giá quen thuộc là $a^3+b^3\geq ab(a+b)$
Nội dung bài BĐT trong đề Ukraine năm 2001 như sau:
Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương và $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\leq a+b+c$$

Nhận xét 4 *Có thể thấy bài toán này cũng đúng trong trường hợp x,y,z là các số thực, từ đó ta có được bài toán BĐT trong đề chọn đội tuyển của tỉnh Hòa Bình.*

Bài 14

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$(a^2+1)^2+(b^2+1)^2+(c^2+1)^2+6\sqrt{6}abc$$

(Tp. HCM)

Lời giải

Chúng tôi xin nêu hai cách chứng minh cho bài này như sau.

- *Cách 1:* Đặt $P=(a^2+1)^2+(b^2+1)^2+(c^2+1)^2+6\sqrt{6}abc$. Không mất tính tổng quát giả sử $ab\geq 0$.
  Thay $c=-a-b$ vào P ta được
  $$P=3(a+b-\sqrt{6}ab)^2+(a^2-b^2)^2+(a-b)^2(a^2+b^2+6ab)+3\geq 3.$$
  Vậy GTNN của P là 3, xảy ra khi $a=b=c=0$ hoặc $a=b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, c=\dfrac{-2\sqrt{6}}{3}$.
- *Cách 2:* Dự đoán rằng bất đẳng thức tồn tại dấu bằng tại biên nên ta sẽ đi dồn biến về biên. Theo nguyên lý Dirichlet trong 3 số a,b,c sẽ tồn tại 2 số cùng dấu, giả sử $ab\geq 0$.
  Bỏ qua trường hợp đơn giản là $c\geq 0$. Xét $c<0$.
  Xét hiệu:
  $$f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$$
  $$=(a^2+1)^2+(b^2+1)^2+(c^2+1)^2+6\sqrt{6}abc-2\left(\frac{(a+b)^2}{4}+1\right)^2-(c^2+1)^2-6\sqrt{6}\frac{(a+b)^2}{4}c$$
  $$=\frac{1}{8}(a-b)^2(7a^2+10ab+7b^2+8-\frac{3\sqrt{6}}{2}c)\geq 0 \text{ (do } ab\geq 0, c<0)$$
  Đặt $t=\dfrac{a+b}{2}$. Khi đó: $c=-2t$. Ta có:
  $$P\geq 2(t^2+1)^2+(4t^2+1)^2+12\sqrt{6}t^3=3+2t^2(3t+\sqrt{6})^2\geq 3.$$
  Vậy GTNN của P là 3, xảy ra khi $a=b=c=0$ hoặc $a=b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, c=\dfrac{-2\sqrt{6}}{3}$

Bài 15

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2\leq 2$. Chứng minh rằng

$$5x^2+2xy+2y^2\leq 12.$$

(Khánh Hòa)

Lời giải

Ta có: $(x+2y)^2\geq 0 \Leftrightarrow 5x^2+2xy+2y^2\leq 6(x^2+xy+y^2)\leq 6.2=12$ (điều phải chứng minh).

Bài 16

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{1}{x^2+2y^2+3} + \frac{1}{y^2+2z^2+3} + \frac{1}{z^2+2x^2+3}.$$

(Lạng Sơn)

Lời giải

Ta có: $P = \sum \frac{1}{x^2+2y^2+3} = \sum \frac{1}{x^2+y^2+1+y^2+2} \le \sum \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+y^2+1} + \frac{1}{y^2+2}\right)$. Ta sẽ lần lượt chứng minh các BĐT phụ sau:

- $\sum \frac{1}{x^2+y^2+1} \le 1$. Ta có: $x^2+y^2+1 = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} \ge x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}) + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \sum \frac{1}{x^2+y^2+1} \le \sum \frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}} = 1$ (đpcm).

- $\sum \frac{1}{y^2+2} \le 1$. Thật vậy, điều này tương đương với $\frac{y^2}{y^2+2} \ge 1$. Để ý rằng $\sum \frac{y^2}{y^2+2} \ge \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6} = \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2+6} \ge \frac{x^2+y^2+z^2+2.3\sqrt[3]{(xyz)^2}}{x^2+y^2+z^2+6} = 1$ (đpcm)

Từ hai điều trên ta được: $P \le \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$. Vậy GTNN của P là $\frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 17

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{(c+\sqrt{a})^2}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \le 12.$$

(Nam Định)

Lời giải

Ta có: $\sum \frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} = \sum \frac{2(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{(a+b)^2+3(a-b)^2}} \le \sum \frac{2(a+1)(a+b)}{a+b} = \sum 2(a+1) = 12$

Bài 18

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} \geq 4\left(\frac{1}{x+7} + \frac{1}{y+7} + \frac{1}{z+7}\right).$$

(Ninh Bình)

Lời giải

Ta có $\sum \frac{4}{x+7} = \sum \frac{4}{(x+1)+(x+1)+(y+1)+(z+1)} \leq \sum \frac{4}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2(\sqrt{z}+\sqrt{x})}$

$\leq \sum \left(\frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{1}{2(\sqrt{z}+\sqrt{x})}\right) = \sum \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Bài 19

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác và $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(a+b-\sqrt{ab})} + \sqrt{b(a+c-\sqrt{ac})} + \sqrt{c(c+b-\sqrt{bc})} \geq a+b+c.$$

(Quảng Bình)

Lời giải

Chúng tôi xin nêu hai cách chứng minh cho BĐT này.

- *Cách 1*: BĐT cần chứng minh trở thành

$$x\sqrt{x^2+y^2-xy} + y\sqrt{x^2+z^2-xz} + z\sqrt{y^2+z^2-yz} \geq x^2+y^2+z^2.$$

Để ý rằng

$$\sqrt{x^2+y^2-xy} = \frac{\sqrt{(x^3+y^3)(x+y)}}{x+y} \geq \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Chứng minh tương tự ta sẽ được

$$x\sqrt{x^2+y^2-xy}+y\sqrt{x^2+z^2-xz}+z\sqrt{y^2+z^2-yz} \geq \frac{x(x^2+y^2)}{x+y} + \frac{y(x^2+z^2)}{x+z} + \frac{z(y^2+z^2)}{y+z}$$

Vậy BĐT ban đầu sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{x(x^2+y^2)}{x+y} + \frac{y(x^2+z^2)}{x+z} + \frac{z(y^2+z^2)}{y+z} \geq x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow y(x-y)(y-z)\left[\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{z}{(y+z)(x+z)}\right] \geq 0.$$

Nhưng điều này luôn đúng với mọi $x \geq y \geq z > 0$, nên BĐT ban đầu được chứng minh.

- *Cách 2*: Đặt $f(y) = x\sqrt{x^2+y^2-xy}+y\sqrt{x^2+z^2-xz}+z\sqrt{y^2+z^2-yz}-(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow$ $f'(y) = \dfrac{x(2y-x)}{2\sqrt{x^2+y^2-xy}} + \dfrac{z(2y-z)}{2\sqrt{y^2+z^2-yz}} + \sqrt{x^2-xz+z^2}-2y$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{3x^3}{4(\sqrt{x^2+y^2-xy})^3} + \frac{3z^3}{4(\sqrt{y^2+z^2-yz})^3} - 2$$

Ta có:

$$x^2-xy+y^2 = (\frac{x}{2}-y)^2+\frac{3}{4}x^2 \geq \frac{3}{4}x^2$$
$$y^2-yz+z^2 \geq z^2$$
$$\Rightarrow f''(y) = \frac{3}{4(\sqrt{\frac{3}{4}})^3} + \frac{3}{4} - 2 < 0$$

Vậy $f(y)$ là hàm lồi $\Rightarrow f(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $y = x$ hoặc $y = z$.
Ta có

$$f(x) = \sqrt{(x+z)(x^3+z^3)} - (x^2+z^2) \geq 0$$
$$f(z) = \sqrt{(x+z)(x^3+z^3)} - (x^2+z^2) \geq 0$$

Từ đó ta có đpcm.

Nhận xét 5 *Đây chính là BĐT trong đề Iran TST 2013, có thể thấy giả thiết a, b, c là 3 cạnh của tam giác là không cần thiết.*

Bài 20

Cho các số thực không âm a, b, c, d. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a+b+c+d)^3 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3)+24(abc+bcd+cda+dab)$$

(Quảng Nam)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $d = \min\{a, b, c, d\} \Rightarrow d \in \left[0, \dfrac{a+b+c}{3}\right]$.
Xét $f(d) = 4(a^3+b^3+c^3+d^3)+24(abc+bcd+cda+dab)-(a+b+c+d)^3 \Rightarrow f'(d) = 12d^2 - 3(a+b+c+d)^2+24(ab+bc+ca) \Rightarrow f''(d) = 24d-6(a+b+c+d) = 6(3d-a-b-c) \leq 0 \Rightarrow f(d)$ là hàm lồi $\Rightarrow f(d)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $d = 0$ hoặc $d = \dfrac{a+b+c}{3}$. Ta có:

$$f(0) = 3[a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)]+9abc \geq 0$$

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{16}{9}(a^3+b^3+c^3)+\frac{104}{3}abc+\frac{4}{3}[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geq 0$$

Từ đó ta có đpcm.

Bài 21

Cho ba thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 6\geq \frac{8}{a^2+b^2+2}+\frac{8}{b^2+c^2+2}+\frac{8}{c^2+a^2+2}$$

(Quảng Ngãi)

Lời giải

Trước hết xin phát biểu lại một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 2 *Cho a,b,c là ba số dương. Khi đó*

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3.$$

Chứng minh bổ đề này dễ dàng và xin giành lại cho bạn đọc.

Quay lại bài toán.

- Đầu tiên ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 6.$$

Điều này tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 6+\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{a^2+1}{2a}+\frac{b^2+1}{2b}+\frac{c^2+1}{2c}+\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq\frac{15}{2}$$

Ta có các BĐT sau:

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \tag{1.7}$$

$$\frac{a^2+1}{2a}+\frac{b^2+1}{2b}+\frac{c^2+1}{2c}+\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 6\sqrt[6]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{8abc}}$$

$$=6\sqrt[6]{\frac{1}{8}(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{a})}\geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{8}(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}})^3}\geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{8}(1+1)^3}=6 \tag{1.8}$$

Từ (1.7) và (1.8) ta có điều phải chứng minh.

- Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$\frac{8}{a^2+b^2+2}+\frac{8}{b^2+c^2+2}+\frac{8}{c^2+a^2+2}\leq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}\ge \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}\ge \frac{(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2}{2(a^2+b^2+c^2+3)}.$$

Vậy BĐT ban đầu sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2}{2(a^2+b^2+c^2+3)}\ge \frac{3}{2.}$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2\ge 3(a^2+b^2+c^2)+9=3(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}+\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}+\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

Để ý rằng

$$\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}\ge b^2+ca,$$
$$\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\ge c^2+ab,$$
$$\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\ge a^2+bc.$$

Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Vậy BĐT ban đầu của ta đúng.

Nhận xét 6 *Đây chính là bài toán trong đề chọn đội tuyển Iran 2009, và cách giải của nó như sau: Không mất tính tổng quát, giả sử:* $a\ge b\ge c\Rightarrow a\ge 1; b+c\le 2.$
Do điều kiện đề bài là $a+b+c=3$ *nên để giảm tính phức tạp, ta sẽ dồn như sau:*

$$f(a,b,c)\le f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

với

$$f(a,b,c)=\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}$$

Vì $b+c\le 2, a\ge b\ge c$ *nên ta có:*

$$f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)-f(a,b,c)$$
$$=\left(\frac{2}{2+a^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}-\frac{1}{2+a^2+b^2}-\frac{1}{2+a^2+c^2}\right)+\left(-\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+\frac{(b+c)^2}{2}}\right)$$
$$=\frac{(b-c)^2(2a^2-b^2-4bc-c^2+4)}{\left(2+a^2+b^2\right)\left(2+a^2+c^2\right)\left(8+4a^2+(b+c)^2\right)}+\frac{(b-c)^2}{(2+b^2+c^2)(4+(b+c)^2)}$$
$$=(b-c)^2\left[\frac{2(a^2-bc)+4-(b+c)^2}{\left(2+a^2+b^2\right)\left(2+a^2+c^2\right)\left(8+4a^2+(b+c)^2\right)}+\frac{1}{(2+b^2+c^2)(4+(b+c)^2)}\right]\ge 0$$

Do đó ta chỉ còn cần chứng minh $f(a,t,t) \le \frac{3}{4}$ *với* $a+2t=3$
Điều này tương đương với:

$$(a-1)^2(15a^2-78a+111) \ge 0$$

Do đó ta có điều phải chứng minh là đúng.

Bài 22

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{\sqrt{ab}+1}+\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{\sqrt{bc}+1}+\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{\sqrt{ca}+1}.$$

(Quảng Ninh)

Lời giải

Ta có: $\sqrt{(a^2-ab+b^2)(a+b)^2}=\sqrt{(a^3+b^3)(a+b)}\ge\sqrt{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2\Rightarrow\sqrt{a^2-ab+b^2}\ge\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Chứng minh tương tự ta được $P\ge\sum\frac{a^2+b^2}{(\sqrt{ab}+1)(a+b)}\ge\frac{\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{2\sum a+\sum\sqrt{ab}(a+b)}$.
Ta sẽ chứng minh

$$\frac{\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{2\sum a+\sum\sqrt{ab}(a+b)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+2\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\ge 2\sum a+\sum\sqrt{ab}(a+b).$$

Để ý rằng

$$\sum\sqrt{ab}(a+b)\le\sum\frac{1}{2}(a+b)^2=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\ge 2(a+b+c)+ab+bc+ca.$$

Mà $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\ge a+b+c.$$

Ta có

$$\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\ge\sum(b^2+ca)=\frac{1}{2}\sum(a+b)^2\ge\frac{1}{6}\left(\sum(a+b)\right)^2=\frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

Vì thế ta sẽ đi chứng minh

$$\frac{2}{3}(a+b+c)^2\ge a+b+c\Leftrightarrow a+b+c\ge\frac{3}{2},$$

một điều dễ dàng suy được từ điều kiện ban đầu. Vậy GTNN của P là 1 khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 23

Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh:

$$x^2y+y^2z+z^2x \le x^3+y^3+z^3 \le 1+\frac{1}{2}(x^4+y^4+z^4).$$

(Quảng Trị)

Lời giải

Nhận xét rằng vế đầu của BĐT cần chứng minh luôn đúng vì

$$3(x^3+y^3+z^3)-3(x^2y+y^2z+z^2x)=\sum(x-y)^2(2x+y)\ge 0.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh vế sau. Chúng tôi xin trình bày hai cách chứng minh cho BĐT này.

- *Cách 1:* Ta có

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &\le 1+\frac{1}{2}(x^4+y^4+z^4)\\ \Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3) &\le 2+x^4+y^4+z^4\\ \Leftrightarrow (x+y+z)(x^3+y^3+z^3) &\le 2+x^4+y^4+z^4\\ \Leftrightarrow xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2) &\le 2. \end{aligned}$$

  Để ý rằng

$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\le xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)+xyz(x+y+z)$$

$$=(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2=\frac{1}{8}(x+y+z)^4=2.$$

  Vậy ta có điều phải chứng minh.

- *Cách 2:* Đặt

$$p=x+y+z=2;\ q=xy+yz+zx;\ r=xyz.$$

  Khi đó

$$x^3+y^3+z^3=p^3-3pq+3r=8-6q+3r$$

$$x^4+y^4+z^4=(p^2-2q)^2-2(q^2-2pr)=2q^2-16q+8r+16.$$

  Do đó ta cần chứng minh:

$$8-6q+3r\le q^2-8q+4r+8+1 \Leftrightarrow r+(q-1)^2\ge 0,$$

  một điều luôn đúng với mọi $x, y, z\ge 0$. Vậy BĐT ban đầu được chứng minh.

Bài 24

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{\left(1+b\right)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{3}{32}\left(ab+bc+ca\right)\geqslant\frac{21}{32}.$$

2. Cho x, y, z là ba số thực dương thoả mãn $xyz\geqslant 1$ và $z\leqslant 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$F=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{4-z^3}{3\left(1+xy\right)}.$$

(Thái Nguyên)

Lời giải

1. Trước hết xin nhắc lại bổ đề quen thuộc sau.

Bổ đề 3 *Cho $a,b>0$. Khi đó*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq\frac{1}{1+ab}.$$

Chứng minh bổ đề này dễ dàng, xin giành lại cho bạn đọc.

Quay lại bài toán. Ta có:

$$\frac{1}{2(1+a)^3}+\frac{1}{2(1+a)^3}+\frac{1}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2(1+a)^3}.\frac{1}{2(1+a)^3}.\frac{1}{16}}=\frac{3}{4}.\frac{1}{(1+a)^2}.$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\sum\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{3}{32}(\sum ab)\geq\frac{3}{4}\left(\sum\frac{1}{(1+a)^2}\right)+\frac{3}{32}(\sum ab)-\frac{3}{16}.$$

Áp dụng thêm bổ đề vừa nêu trên có được:

$$\sum\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{3}{32}(\sum ab)-\frac{3}{16}\geq\frac{3}{4}\left(\sum\frac{1}{(1+a)^2}\right)+\frac{3}{32}(\sum ab)-\frac{3}{16}$$

$$\geq\frac{3}{8}\left(\sum\frac{1}{1+ab}\right)+\frac{3}{32}(\sum ab)-\frac{3}{16}\geq\frac{27}{8}.\frac{1}{ab+bc+ca+3}+\frac{3}{32}(ab+bc+ca+3)-\frac{9}{32}-\frac{3}{16}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{27}{8}.\frac{3}{32}}-\frac{9}{32}-\frac{3}{16}=\frac{21}{32}$$

chính là đpcm.

2. Chúng ta tiếp tục có một bổ đề khác cho bài này như sau.

Bổ đề 4 *Cho x, y là hai số thực dương thoả $xy \geq 1$. Khi đó*

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}.$$

Chứng minh bổ đề này xin giành lại cho bạn đọc.

Quay lại bài toán. Dễ thấy $z \leq 1$ nên $xy \geq 1$. Ta có:

$$F=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{1}{1+xy}+\frac{1-z^3}{3(1+xy)} \geq \frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{1}{1+xy} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{1}{1+xy}.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{1}{1+xy} \geq \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy}-1)^2 \geq 0,$$

một điều hiển nhiên đúng. Do vậy $F \geq \frac{3}{2}$. Vậy GTNN của F là $\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Ta có: $\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\sum\frac{1}{\sqrt{bc(b+c)}} \geq \frac{9}{\sum\sqrt{bc(b+c)}} \geq \frac{9}{\sqrt{3(\sum bc(b+c))}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3abc}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}$

Bài 25

Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2xy+yz+zx)^2}+\frac{1}{(2yz+zx+xy)^2}+\frac{1}{(2zx+xy+yz)^2} \leq \frac{3}{16x^2y^2z^2}.$$

(Thanh Hoá)

Lời giải

Theo BĐT AM - GM thì

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(2xy+yz+zx)^2} \leq \sum_{cyc}\frac{1}{4(zx+xy)(xy+yz)}=\sum_{cyc}\frac{1}{4xy(y+z)(z+x)}$$

nên BĐT ban đầu sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{1}{4xy(y+z)(z+x)} \leq \frac{3}{16x^2y^2z^2} \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{x}{(z+x)(x+y)} \leq \frac{3}{4xyz}$$
$$\Leftrightarrow 8xyz(xy+yz+zx) \leq 3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right). \tag{1.9}$$

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$, ta có $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Khi đó (1.9) trở thành

$$8(a+b+c)\le 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)(ab+bc+ca)\le 3(a+b)(b+c)(c+a)(ab+bc+ca) \quad (1.10)$$

Vì theo bổ đề 1,

$$3(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{3}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

đồng thời

$$ab+bc+ca=abc\left(a+b+c\right)\le \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 \Rightarrow ab+bc+ca\ge 3$$

nên (1.10) đúng và ta giải quyết xong BĐT. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Chú ý 1 *Các BĐT với điều kiện $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ luôn khá khó chịu, đòi hỏi người làm phải nắm chắc những kiến thức cơ bản cộng với một chút khéo léo trong biến đổi, tính toán. Nhưng bù lại, những bài toán có điều kiện này ẩn chứa những điều thú vị có thể khai thác được từ giả thiết. Cụ thể như sau:*

1. $3\cdot\max\{a,b,c\}\ge a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{3}{\max\{a,b,c\}}$ *nên* $\max\{a,b,c\}\ge 1$. *Tương tự,* $\min\{a,b,c\}\le 1$.
2. $ab+bc+ca=abc\left(a+b+c\right)\le \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 \Rightarrow ab+bc+ca\ge 3$ *hay* $ab+bc+ca\ge 3$. *Từ đó* $a+b+c\ge\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}=3$.
3. $\frac{1}{3}(a+b+c)^2\ge ab+bc+ca=abc\left(a+b+c\right)\ge 3abc \Rightarrow a+b+c\ge 3abc,\ ab+bc+ca\ge 3abc$.

2 Đa thức

Bài 1

Tìm tất cả đa thức hệ số thực thỏa mãn

$$2\left(P(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+3P(x^2)P\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)

Lời giải

1. $P(x)\equiv C, \forall x\in\mathbb{R}$.
   Khi đó dễ thấy $P(x)\equiv 0$.

2. Xét $degP \geq 1$
   Thay $x = 1$ vào ta được: $P(1) = 0$
   Giả sử $P(x) = (x-1)^n.Q(x)$ sao cho $Q(1) \neq 0$.
   Khi đó ta có:
$$2\left[(x-1)^n.Q(x) - \left(\frac{1}{x}-1\right)^n.Q\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 + 3(x^2-1)^n.Q(x^2).\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^n.Q\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow 2\left[Q(x) - \frac{(-1)^n}{x^n}Q\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 + 3(x+1)^n.\frac{(-1)^n(1+x)^n}{x^{2n}}.Q(x^2).Q\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$
   Thay $x = 1$ vào biểu thức trên ta được:
$$2\left[Q(1) - (-1)^n.Q(1)\right]^2 + 3.(-4)^n.Q(1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1-(-1)^n\right)^2 + 3.(-4)^n = 0$$
   Dễ thấy không có n thỏa mãn. Do đó không tồn tại đa thức $P(x)$ có $deqP \geq 1$.
   Vậy $P(x) \equiv 0$.

Nhận xét 7 *Tương tự, ta có thể giải được bài toán sau: Tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn*
$$P^2(x) + P^2\left(\frac{1}{x}\right) = P(x^2).P\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Bài 2

Cho khai triển $(1-2x+x^3)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + +a_{3n}x^{3n}$. Xác định hệ số a_6 biết rằng $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$

(Bến Tre)

Lời giải

Cho $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow 3n = 15 \Leftrightarrow n = 5$
Ta có
$$\left(x^3+1-2x\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^{15-3k}(1-2x)^k = \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^{15-3k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i(-2x)^i$$
$$= \sum_{k=0}^{5}\sum_{i=0}^{k} C_5^k.C_k^i.(-2)^i.x^{15-3k+i}\ \left(0 \leq i \leq k \leq 5\right)$$
$15-3k+i = 6 \Leftrightarrow 3k-i = 9$
Ta có bảng sau:

k	3	4	5
i	0	3	6

$\Rightarrow k = 3,\ i = 0$ hoặc $k = 4,\ i = 3$
Vậy $a_6 = C_5^3.C_3^0.(-2)^0 + C_5^4.C_4^3.(-2)^3 = -150.$

Bài 3

Cho phương trình
$$x^5-\frac{1}{2}x^4-5x^3+x^2+4x-1=0 \qquad (2.1)$$
Chứng minh rằng phương trình (2.1) có đúng 5 nghiệm phân biệt. Với x_i $(i=\overline{1,5})$ là nghiệm của phương trình (2.1), tính tổng S biết: $S=\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2x_i^5-x_i^4-2}$.

(Bến Tre)

Lời giải

$f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$
Ta có:
$$f(-2)=-5;f\left(\frac{-3}{2}\right)=2;f(0)=-1;f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8};f(1)=\frac{-1}{2};f(3)=\frac{175}{2}$$
Khi đó:
$$f(-2).f\left(\frac{-3}{2}\right)<0;f\left(\frac{-3}{2}\right).f(0)<0;f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0;f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0;f(1).f(3)<0$$
Do đó phương trình có 5 nghiệm phân biệt
$$-2<x_1<\frac{-3}{2}<x_2<0<x_3<\frac{1}{2}<x_4<1<x_5<3$$
Ta có x_i là nghiệm của (2.1) nên:
$$x_i{}^5-\frac{1}{2}x_i{}^4-5x_i{}^3+x_i^2+4x_i-1=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2x_i^5-x_i^4-2=2\left(5x_i^3-x_i^2-4x_i\right)$$
Do đó: $S=\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2\left(5x_i^3-x_i^2-4x_i\right)}$
Xét biểu thức:
$$g(x)=\frac{x+1}{5x^3-x^2-4x}=\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$$
Đồng nhất thức ta được:
$$g(x)=-\frac{1}{4x}+\frac{2}{9(x-1)}+\frac{5}{36(5x+4)}$$
Do vậy:
$$S=-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i-1}+\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+\frac{4}{5}}$$
Với $x\neq x_i$ ta có:
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x-x_i}$$

và

$$f'(x) = 5x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x + 4$$

Do đó:

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i - 1} = -\frac{f'(1)}{f(1)} = -12$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = 4$$

$$\frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{-\frac{4}{5} - x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + \frac{4}{5}} = -\frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(\frac{4}{5}\right)} = -\frac{12900}{4789}$$

Vậy: $S = -\dfrac{8959}{4789}$.

Bài 4

Cho dãy các đa thức hệ số thực $\{P_n(x)\}, n = 1,2,3,...$ thỏa mãn điều kiện $P_n(2\cos x) = 2^n \cos(nx), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $P_n(x)$ là đa thức hệ số nguyên bậc n và $x \le \sqrt[n]{P_n(x)}, \forall x > 2$.

(Bình Dương)

Lời giải

Dễ thấy: $P_1(x) = x; P_2(x) = 2x^2 - 4$

Ta có:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos x) &= 2^{n+1}\cos[(n+1)x] = 2^{n+1}[\cos(nx).\cos x - \sin(nx).\sin x] \\ &= 2\cos x.2^n\cos(nx) - 2^{n+1}\sin(nx).\sin x \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} P_{n+2}(2\cos x) &= 2\cos x 2^{n+1}\cos[(n+1)x] - 2^{n+2}\sin[(n+1)x]\sin x \\ &= 2\cos x P_{n+1}(2\cos x) + 2^{n+1}\left[\cos[(n+2)x] - \cos(nx)\right] \\ &= 2\cos x P_{n+1}(2\cos x) + \frac{1}{2}P_{n+2}(2\cos x) - 2P_n(2\cos x) \end{aligned}$$

Thay $2\cos x$ bởi x ta được:

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - 4P_n(x)$$

Do $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nên theo công thức truy hồi tuyến tính cấp hai đã chứng minh ở trên, ta có: $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta sẽ đi tìm công thức tổng quát của dãy đa thức $P_n(x)$ như sau:

Phương trình đặc trưng của dãy: $X^2 - 2xX + 4 = 0 \Leftrightarrow X = x + \sqrt{x^2-4} \vee X = x - \sqrt{x^2-4}$

Do đó: $P_n(x) = A(x + \sqrt{x^2-4})^n + B(x - \sqrt{x^2-4})^n, \forall x > 2$

Thay $n = 1, n = 2$ vào ta tìm được $A = \dfrac{1}{2}; B = \dfrac{1}{2}$

Do đó:

$$P_n(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2-4})^n + \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-4})^n, \forall x > 2$$

Áp dụng bất đẳng thức: $a^n+b^n \geq \dfrac{(a+b)^n}{2^{n-1}}, \forall a,b>0; n\in\mathbb{N}^*$
Ta có:

$$P_n(x) \geq \frac{1}{2}.\frac{(2x)^n}{2^{n-1}} = x^n$$

Do đó:

$$x \leq \sqrt[n]{P_n(x)}, \forall x>2.$$

Nhận xét 8 *Bằng cách chuyển từ dãy đa thức lượng giác sang dạng đại số, ta có thể giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn. Sau đây là một số bài toán về dãy đa thức:*

1. *(England, 1978)*
   - *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại đa thức $P_n(x)$ bậc n với hệ số nguyên thỏa mãn $P_n(2\cos x) = 2\cos(nx), \forall x\in\mathbb{R}$.*
   - *Với mọi số hữu tỉ α thì số $\cos(\alpha\pi)$ hoặc trùng với một trong các số $0, \pm1, \pm\dfrac{1}{2}$ hoặc là số vô tỉ.*
2. *(VMO, 1989) Cho dãy đa thức $P_n(x)$ xác định bởi*

$$P_0(x) = 0; P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x-P_n^2(x)}{2}, n\geq 0$$

Chứng minh rằng với mọi $x\in[0;1]$ và $n\geq 0$ thì $0\leq \sqrt{x}-P_n(x) \leq \dfrac{2}{n+1}$

Bài 5

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại đa thức $f(x)$ bậc n có hệ số nguyên thỏa mãn: $f(0)=0, f(1)=1$ và với mọi $m\in\mathbb{N}^*, f(m)(f(m)-1)$ là bội của 2017.

(Đà Nẵng)

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $n\geq 2016$ thỏa mãn. Giả sử $1\leq n\leq 2015$ và tồn tại đa thức $f(x)$ thỏa mãn bài toán. Áp dụng công thức nội suy Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2015} f(k).\prod_{i=0,i\neq k}^{2015}\frac{x-i}{k-i}.$$

Suy ra:

$$f(2016) = \sum_{k=0}^{2015} f(k).\prod_{i=0,i\neq k}^{2015}\frac{2016-i}{k-i} = \sum_{k=0}^{2015}(-1)^{k+1}C_{2016}^k f(k).$$

Ta chứng minh $C_{2016}^k \equiv (-1)^k (\bmod 2017), k=0,1,...,2015$
Với $k=0$ thì $C_{2016}^0 \equiv 1(\bmod 2017)$. Giả sử $C_{2016}^k \equiv (-1)^k(\bmod 2017)$ thì $C_{2016}^{k+1} = C_{2017}^{k+1} - C_{2016}^k \equiv$

$(-1)^{k+1}(\bmod 2017)$. Vậy $f(k) \equiv -\sum_{k=0}^{2015} f(k)(\bmod 2017) \Rightarrow \sum_{k=0}^{2016} f(k) \equiv 0(\bmod 2017)$.

Nhưng

$$\sum_{k=0}^{2016} f(k) = 1 + \sum_{k=2}^{2016} f(k)$$

và

$$f(k) \equiv 0; 1(\bmod 2017); k = 2, 3, ..., 2016$$

Do đó $\sum_{k=0}^{2016} \not\equiv 0(\bmod 2017)$ (mâu thuẫn nhận xét trên).

Vậy $n \geq 2016$. Với $n = 2016$ xét $f(x) = x^{2016}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó $n_{min} = 2016$

Bài 6

Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$, tồn tại đa thức $f_m(x)$ có hệ số hữu tỉ thỏa mãn với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì: $1^{2m+1} + 2^{2m+1} + ... + n^{2m+1} = f_m(n(n+1))$.

(Đà Nẵng)

Lời giải

- Với $m = 0$: $f_0(x) = \frac{x}{2}$; $m = 1$: $f_1(x) = \frac{x^2}{4}$.
- Giả sử khẳng định là đúng đến $m-1$, xét:

$$\varphi(x) = x(x^2-1^2)(x^2-2^2)...(x^2-m^2) = x^{2m+1} - a_{m-1}x^{2m-1} - a_{m-2}x^{2m-3} - ... - a_0x$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) + a_{m-1}x^{2m-1} + a_{m-2}x^{2m-3} + ... + a_0x = x^{2m+1} \tag{2.2}$$

Thay x lần lượt bởi $1, 2, ..., n$ ta được:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) + \sum_{i=0}^{m-1} a_i f_i(n(n+1)) = \sum_{i=1}^{n} i^{2m+1} \tag{2.3}$$

Ta có:

$$\varphi(x) = x(x-1)(x+1)...(x-m)(x+m) = (x-m)(x-m+1)...(x+m-1)(x+m)$$

Lại có:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2m+2}\left[\varphi(x)(x+m+1) - \varphi(x)(x-m-1)\right]$$

Đặt $d(x-m) = (x+m+1)\varphi(x) = (x-m)(x-m+1)...(x+m+1) \Rightarrow d(x-m-1) = (x-m-1)(x-m)...(x+m) = (x-m-1)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2m+2}\left[d(x-m) - d(x-m-1)\right]$.

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \frac{1}{2m+2}\left[d(n-m) - d(-m)\right] = \frac{1}{2m+2} d(n-m) = \frac{1}{2m+2}(n-m)(n-m+1)...(n+m+1)$$

Ta có: $(n-i)(n+i+1) = n^2 - i^2 + n - i = n(n+1) - i(i+1), i = 0, 1, ..., m$
Suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \frac{1}{2m+2} \prod_{i=0}^{m} \left[n(n+1) - i(i+1) \right] = h_m(n(n+1)).$$

Khi đó h_m có hệ số hữu tỉ và từ (2.3) chọn:

$$f_m(x) = h_m(x) + a_{m-1} f_{m-1}(x) + a_{m-2} f_{m-2}(x) + ... + a_0 f_0(x).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét 9 *Một số bài toán tương tự:*

1. *Tìm số tự nhiên n để* $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ *chia hết cho* $Q(x) = x^2 + x + 1$.

2. *Chứng minh rằng với mọi* $n \in \mathbb{Z}^+$ *ta có đa thức* $P(x) = (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ *chia hết cho đa thức* $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Bài 7

Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho $a_1 > -1, a_2 \geq \frac{n-1}{2}$. Giả sử phương trình $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ có đúng n nghiệm thực. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm đó nằm trong đoạn $[-a_1, a_1 + 2]$.

(Đồng Nai)

Lời giải

Đặt $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$.
Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là n nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.
Khi đó:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -a_1$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} x_n = a_2 \geq \frac{1}{2}$$

Mặt khác:

$$x_k^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a_1^2 - 2a_2 \leq a_1^2$$

Do đó:

$$x_k \in [-a_1; a_1], k = 1, 2, ..., n$$

Vậy tất cả các nghiệm của $P(x) = 0$ đều nằm trong đoạn $[-a_1; a_1 + 2]$.

Nhận xét 10 *Đôi lúc trong bài toán đa thức ta cần chú ý đến nghiệm của đa thức. Một trong những hướng xử lý là dùng định lý Bezout, định lý Viete,... Sau đây là một số bài toán về nghiệm của đa thức:*

1. *(Costa Rica, 2009) Giả sử đa thức* $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ *có thể phân tích thành* $(x + r_1)(x + r_2)...(x + r_n)$, *với* $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{R}$. *Chứng minh rằng*

$$(n-1) a_{n-1}^2 \geq 2n a_{n-2}$$

2. *(Taiwan TST Round 1, 2014) Cho đa thức hệ số thực* $P(x)=x^n+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x+a_0$ $(n\geq 2)$. *Giả sử* x_k *nghiệm thực của phương trình* $P(x)=0$ $k=1,2,...,n$. *Chứng minh rằng* $|x_k|\leq\sqrt{\dfrac{2(1-n)}{n}a_{n-2}}$.

3. *Cho đa thức hệ số thực* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$. *Giả sử* x_0 *là một nghiệm tùy ý của* $P(x)=0$. *Chứng minh rằng:* $|x_0|<1+max\left|\dfrac{a_i}{a_n}\right|(i=0,1,...,n-1)$

Bài 8

Cho P,Q,R là 3 đa thức hệ số thực thỏa mãn: $P(Q(x))+P(R(x))=c\ \forall x\in\mathbb{R}$ với $c=const\in\mathbb{R}$ Chứng minh rằng $P(x)\equiv const$ hoặc $[Q(x)+R(x)]\equiv const$.

(Hà Nam)

Lời giải

Bỏ qua trường hợp $P(x)$ là hằng số.
Xét $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0(a_n\neq 0, n\geq 1)$
Xét $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0$
$R(x)=c_kx^k+c_{k-1}x^{k-1}+...+c_0$
Giả sử $m\geq k$. Ta có:

$$P(Q(x))+P(R(x))=c.$$

Đồng nhất hệ số của bậc cao nhất trong (*) ta được: $a_n.b_m^n=0$
Do đó hoặc $b_m=0$ suy ra:$degQ=degR=0$ hoặc $m=k$.
Khi $m=k$ thì $a_n.(b_m^n+c_m^n)=0\Rightarrow b_m=-c_m$ và n lẻ.
Khi đó

$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0(b_m\neq 0)$$

$$R(x)=-b_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+...+c_0(b_m\neq 0)$$

Xét đa thức $H(x)=a_n\left(Q^n(x)+R^n(x)\right)=a_n\left(Q(x)+R(x)\right)S(x)$, trong đó

$$S(x)=Q^{n-1}(x)-Q^{n-2}(x)R(x)+Q^{n-3}(x)R^2(x)-...-Q(x).R^{n-2}(x)+R^{n-1}(x)$$

Xét hệ số của $x^{(n-1)m}$ trong $S(x)$: $b^{n-1}-b^{n-2}(-b)+\cdots-b(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1}=nb^{n-1}\neq 0$
Do đó $degS=m(n-1)$.
Ta sẽ giả sử phản chứng rằng $deg(Q(x)+R(x))\geq 1$
Khi đó: $degH\geq m(n-1)+1$
Xét $T(x)=P(Q(x))+P(R(x))-H(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\left(Q^i(x)+R^i(x)\right)$
Nhận thấy rằng $degT\leq m(n-1)$ (Vô lí)
Do đó ta có điều phải chứng minh là đúng.

Nhận xét 11 *Khi gặp các dạng toán về đa thức, thông thường ta phải chú ý đến một số vấn đề quan trọng như bậc của đa thức, mối quan hệ giữa các hệ số với nhau, ngoài ra cũng nên chú ý đến các yếu tố giải tích. Sau đây là một số bài toán có liên quan.*

1. *(Tiêu chuẩn Eisenstein) Cho đa thức hệ số nguyên $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 (a_n \neq 0)$ và số nguyên tố p sao cho thỏa mãn đồng thời cả 3 điều kiện:*

    - $a_p \not\vdots p$
    - $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \vdots p$
    - $a_0 \not\vdots p^2$

    Chứng minh rằng khi ấy $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

2. *(Romania 1980) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực thỏa mãn $P(x^2) = P^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$*

3. *Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức monic thỏa mãn $P(P(x)) = Q(Q(x))$. Chứng minh rằng $P(x) \equiv Q(x)$*

4. *(Albanian TST, 2009) Tìm tất cả đa thức $P(x)$ khác đa thức không, có hệ số không âm và thỏa mãn:*

$$P(x).P\left(\frac{1}{x}\right) \leq P^2(1), \forall x > 0$$

Bài 9

Cho các đa thức $P(x), Q(x), R(x)$ với hệ số thực có bậc tương ứng là $3, 2, 3$ thỏa mãn đẳng thức $P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi đa thức $T(x) = P(x).Q(x).R(x)$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực (kể cả nghiệm bội).

(Hà Tĩnh)

Lời giải

Đầu tiên ta có thể thấy rằng

$$Q^2(x) = (R(x) - P(x))(R(x) + P(x))$$

Do $deg(R+P) = 3$ nên phương trình $R(x)+P(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm, điều này chứng tỏ rằng phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm. Mà do $degQ = 2$ nên $Q(x) = 0$ có 2 nghiệm. Mặt khác:

$$P^2(x) = (R(x) - Q(x))(R(x) + Q(x))$$

Do $deg(R+Q) = deg(R-Q) = 3$ nên $P^2(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

1. Hai nghiệm của $P^2(x) = 0$ là phân biệt. Khi đó $P(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm, mà $degP = 3$ nên $P(x) = 0$ sẽ có 3 nghiệm thực. Mặt khác do $degR = 3$ nên $R(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm. Do vậy mà $T(x) = 0$ có ít nhất 6 nghiệm.

2. Hai nghiệm là nghiệm kép $x = a$. Do đó:

- $R(x) - Q(x) = 0$ và $R(x) + Q(x) = 0$ đều nhận a làm nghiệm.
Khi đó $P(a) = Q(a) = R(a) = 0$.
Theo định lý Bezout ta sẽ phân tích được:

$$P(x) = (x - a)P_1(x); Q(x) = (x - a)Q_1(x); R(x) = (x - a)R_1(x)$$

với $P_1(x), Q_1(x), R_1(x)$ là các đa thức có hệ số cao nhất dương.
Do đó:

$$P_1^2(x) + Q_1^2(x) = R_1^2(x)$$

Xét $P_1(x) = ax^2 + bx + c; Q_1(x) = dx + e; R_1(x) = fx^2 + gx + h$
Đồng nhất hệ số của x^4 và x^3 trong khai triển ta được:

$$a = f; 2ab = 2fg \Rightarrow b = g$$

Do đó

$$P_1(x) = ax^2 + bx + c; Q_1(x) = dx + e; R_1(x) = ax^2 + bx + h$$

Ta có:

$$(dx + e)^2 = (h - c)(P_1(x) + R_1(x))$$

Mà $deg(P_1 + R_1) = 2$ nên $P_1(x) + R_1(x) = 2ax^2 + 2bx + c + h$ có nghiệm kép. Suy ra:

$$b^2 = 2a(c + h)$$

Nếu cả hai đa thức $P_1(x)$ và $R_1(x)$ đều không có nghiệm thực thì

$$b^2 < 4ac; b^2 < 4ah$$

hay là

$$b^2 < 2a(c + h) \text{ (Vô lí)}$$

Do đó một trong hai đa thức có 2 nghiệm. Điều này dẫn đến $T(x) = 0$ có 6 nghiệm.

- Chỉ có một trong hai đa thức $R(x) - Q(x); R(x) + Q(x)$ nhận a làm nghiệm.
Khi đó do $deg(R - Q) = deg(R + Q) = 3$ nên $R(x) - Q(x) = 0$ hoặc $R(x) + Q(x)$ sẽ có 3 nghiệm và $P^2(x) = 0$ cũng sẽ có ít nhất 3 nghiệm.
Do $degP = 3$ nên $P^2(x) = 0$ sẽ có 2 nghiệm hoặc có 6 nghiệm. Mà $P^2(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm nên $P(x)^2 = 0$ phải có 6 nghiệm hay là $P(x) = 0$ có 3 nghiệm.
Do đó $T(x) = 0$ có ít nhất 6 nghiệm.

Nhận xét 12 *Đối với những bài toán này ta cần phải để ý đến bậc, hệ số của bậc cao nhất, nghiệm của đa thức. Ngoài ra cần kết hợp sử dụng các định lý về nghiệm như Viete, Bezout,... hay đồng nhất hệ số. Sau đây là các bài toán tương tự:*

1. *Cho $P(x), Q(x)$ là hai đa thức bậc n. Chứng minh rằng $P^2(x) \equiv Q^2(x)$ hoặc là đa thức $P^2(x) - Q^2(x)$ có bậc không nhỏ hơn n.*

2. *Cho đa thức $P(x)$ có bậc $2n$, hệ số của bậc cao nhất là 1. Chứng minh rằng tồn tại 2 đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho $degQ = n, degR < n$ và $P(x) = Q^2(x) + R(x)$.*

Bài 10

Cho dãy đa thức hệ số thực $\{P_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ xác định như sau $P_0(x) = 2, P_1(x) = 2x, P_{n+1}(x) = 2x.P_n(x) + \left(1 - x^2\right) P_{n-1}(x) \,\forall n \geq 1$

1. Xác định công thức tổng quát của $P_n(x)$.
2. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $P_n(x)$ chia hết cho $x^2 + 3$.

(Hải Phòng)

Lời giải

1. Đầu tiên ta xét phương trình đặt trưng của dãy đa thức trên:

$$t^2 - 2xt + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = x + 1 \vee t = x - 1$$

Do đó dãy có dạng $P_n(x) = a(x+1)^n + b(x-1)^n$.
Mặt khác do $P_0(x) = 2; P_1(x) = 2x$ nên suy ra $a = b = 1$.
Do đó $P_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$. Thử lại thấy thỏa mãn.

2. Do đa thức $Q(x) = x^2 + 3$ có 2 nghiệm là $\sqrt{3}i$ và $-\sqrt{3}i$ nên để $P_n(x)$ chia hết cho $Q(x)$ thì $P(x)$ nhận $\pm\sqrt{3}i$ làm nghiệm.

   - $P(\sqrt{3}i) = 0$. Khi đó: $(\sqrt{3}i + 1)^n + (\sqrt{3}i - 1)^n = 0$

   $$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n + \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = 0$$

   Theo công thức Moivre ta có:

   $$\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 3k (k \in \mathbb{Z})$$

   - $P(-\sqrt{3}i) = 0$. Khi đó: $(-\sqrt{3}i + 1)^n + (-\sqrt{3}i - 1)^n = 0$

   $$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^n + \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n = 0$$

   Theo công thức Moivre ta có:

   $$\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{-n\pi}{3} + \cos\frac{4n\pi}{3} + i\sin\frac{4n\pi}{3} = 0 \Rrightarrow n = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$$

   Kết hợp cả hai dữ kiện trên ta được: $n = 3(2k+1) = 6k + 3$.

Nhận xét 13 *Một số bài toán tương tự:*

1. *(VMO, 2015) Cho dãy đa thức $\{P_n(X)\}$ thỏa mãn điều kiện $P_0(x) = 2, P_1(x) = 3x$ và*

$$P_n(x) = 3xP_{n-1}(x) + (1 - x - 2x^2)P_{n-2}(x), \forall n \geq 2$$

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $P_n(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^3 - x^2 + x$.

2. *(Trường Đông, 2015) Cho dãy đa thức $\{P_n(X)\}$ thỏa mãn điều kiện $P_0(x) = 2, P_1(x) = x$ và*

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), \forall n \geq 2$$

   - *Chứng minh rằng tất cả đa thức của dãy đều thỏa mãn*

$$P(x^2 - 2) = P^2(x) - 2$$

   - *Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ thì $P_n(x)$ có n nghiệm thực.*

Bài 11

Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $Q(x) = x^2 + px + q$ cùng thuộc $\mathbb{Q}[x]$. Biết rằng hai đa thức cùng nhận giá trị âm trên khoảng I có độ dài lớn hơn 2 và ngoài khoảng I chúng đều nhận giá trị không âm . Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ để $P(x_o) < Q(x_o)$.

(Hòa Bình)

Lời giải

Gọi $(x_1; x_2)$ là khoảng I có độ dài lớn hơn 2 thỏa đề. Do $P(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và với 3 giá trị x_i, x_j, x_k sao cho chúng lần lượt thuộc các khoảng $(-\infty; x_1); (x_1; x_2); (x_2; +\infty)$ nên $P(x_i).P(x_j) < 0; P(x_j).P(x_k) < 0$. Do đó $P(x)$ có ít nhất 2 nghiệm, giả sử 2 nghiệm này không phải là x_1, x_2.
Do $P(x)$ chỉ nhận giá trị âm trong $(x_1; x_2)$ còn ngoài khoảng đó thì nhận giá trị không âm, đồng thời $P(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên không xày ra trường hợp $P(x_1), P(x_2) \neq 0$. Vậy x_1, x_2 là nghiệm của $P(x) = 0$. Xét các trường hợp sau:

- x_1 không là nghiệm của $Q(x) = 0 \Rightarrow P(x_1) = 0 < Q(x_1)$ (đpcm).
- x_2 không là nghiệm của $Q(x) = 0 \Rightarrow P(x_2) = 0 < Q(x_2)$ (đpcm).
- x_1, x_2 đều là nghiệm của $Q(x) = 0$. Do $|x_1 - x_2| \geq 2$ nên $p^2 - 4q \geq 4$. Theo định lý Bezout và do P, Q đều monic nên $P(x) = Q(x).H(x)$ với $H(x) = x^2 + mx + n$. Giả sử phản chứng rằng: $P(x) \geq Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó: $P(x) - Q(x) = Q(x).\left[H(x) - 1\right]$.
  Thay $x = x_i$ ta có: $P(x_i) - Q(x_i) = Q(x_i)\left[H(x_i) - 1\right] \geq 0 \Rightarrow H(x_i) \geq 1$. Tương tự, với mọi $x \in (x_1; x_2)$ thì $H(x) \in (0; 1)$ và với $x \notin (x_1; x_2)$ thì $H(x) \geq 1$.
  Do $H(x) - 1$ chỉ nhận giá trị âm trong $(x_1; x_2)$ và ngoài đó thì nhận giá trị không âm nên nếu $H(x_1) - 1, H(x_2) - 1 \neq 0$ thì vô lý vì $H(x) - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy $H(x) - 1$ nhận x_1, x_2 làm nghiệm, dẫn tới $P(x) - Q(x)$ có 2 nghiệm kép. Mà $P(x) - Q(x)$ monic nên $H(x) - 1 \equiv Q(x)$ hay $P(x) = Q^2(x) + Q(x)$.
  Để ý rằng nếu chọn β sao cho $\beta \in I$ và $P(\beta) = Q^2(\beta) + Q(\beta) \geq 0$ thì $Q^2(\beta) + Q(\beta) = (\beta^2 + p\beta + q)^2 + (\beta^2 + p\beta + q) \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 + p\beta + q \leq -1$ (do $Q(\beta) < 0$)
  $\Leftrightarrow \beta \in \left(\dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q+1)}}{2}; \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q+1)}}{2} \right)$
  Mặt khác dễ dàng chứng minh: $\left(\dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q+1)}}{2}; \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q+1)}}{2} \right) \subset (x_1; x_2)$
  nên tồn tại β sao cho $\beta \in I$ và $P(\beta) \geq 0$. Điều này vô lí. Vậy không tồn tại x_0 để $P(x_0) < Q(x_0)$.

Nhận xét 14 *Bài tập tương tự:*

1. *(Canada, 1981) Cho hai đa thức $P(x), Q(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x) = Q(x)$ không có nghiệm thực và $P(Q(x)) \equiv Q(P(x)) \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $P(P(x)) = Q(Q(x))$ cũng không có nghiệm thực.*

2. *(VMO, 2003) Cho hai đa thức $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$ và $Q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$. Chứng minh rằng $P(x) = 0$ và $Q(x) = 0$ đều có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại α là nghiệm của $P(x)$ và β là nghiệm của $Q(x)$ sao cho $\alpha^2 + 3\beta^2 = 4$.*

3. *Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm phân biệt và $Q(x) = x^2 + 2x + 2016$. Biết rằng phương trình $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng $P(2016) > 1$.*

Bài 12

Cho đa thức $P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + ... + a_1x + a_0$ có hệ số thực với $P(1)P(2) \neq 0$ và $4\dfrac{P^/(2)}{P(2)} > \dfrac{P^/(1)}{P(1)} + 2016$. Giả sử $P(x)$ có 2016 nghiệm thực, chứng minh rằng trong số đó, có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

(Tp. HCM)

Lời giải

Gọi $x_1, x_2, ..., x_{2016}$ là nghiệm của $P(x)$. Theo định lý Bezout ta có:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Khi đó:

$$P'(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)\left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + ... + \frac{1}{x - x_n}\right)$$

Do đó:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

Ta sẽ đi phản chứng rằng $P(x)$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(1;2)$.
Ta có:

$$4.\frac{P'(2)}{P(2)} - \frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{i=1}^{2016}\left(\frac{4}{2 - x_i} - \frac{1}{1 - x_i}\right) = \sum_{i=1}^{2016}\left(\frac{2 - 3x_i}{(2 - x_i)(1 - x_i)}\right)$$

Do $x_i > 2$ hoặc $x_i < 1$ nên $(2 - x_i)(1 - x_i) > 0$. Ngoài ra: $\dfrac{2 - 3x_i}{(2 - x_i)(1 - x_i)} \leq 1, \forall x_i \notin (1;2)$
Suy ra:

$$4.\frac{P'(2)}{P(2)} - \frac{P'(1)}{P(1)} \leq 2016 \text{ (Vô lí)}$$

Do đó tồn tại ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Nhận xét 15 *Đây là một dạng toán hay về hệ quả của định lý Bezout. Để xử lí được dạng toán này cần phải có những kiến thức về đại số, giải tích hỗ trợ. Sau đây là một số bài toán về áp dụng định lý Bezout vào việc xử lý các bài toán bất đẳng thức trong đa thức:*

1. *Cho đa thức $P(x)$ bậc n có hệ số thực, hệ số cao nhất là 1 và có n nghiệm thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và*
$$-\frac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \frac{n}{2}.$$
Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

2. *Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, n \geq 2, a_n a_0 \neq 0$ và có n nghiệm dương. Chứng minh rằng $\left|\frac{a_{n-1}a_1}{a_0 a_n}\right| \geq n^2$*

3. *(Hong Kong, 1997) Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ có bậc $n \geq 2$ và có n nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng:*
$$P(x+1).\frac{P'(x)}{P(x)} \geq 2n^2, \forall x > x_i$$

4. *(Hungary, 1983) Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + 1$ là đa thức hệ số dương và phương trình $P(x) = 0$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng: $P(2) \geq 3^n$.*

5. *(Costa Rica, 2009) Giả sử đa thức $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ có thể phân tích thành $(x+r_1)(x+r_2)...(x+r_n)$, với $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng*
$$(n-1)a_{n-1}^2 \geq 2na_{n-2}$$

Bài 13

Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho

1. $P(x)Q(x)$ là các đa thức của x^2
2. $P(x)R(x)$ là các đa thức của x^3

(Khánh Hòa)

Lời giải

1. Chú ý hằng đẳng thức sau:
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
Với
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i}x^{2i} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i+1}x^{2i+1}$$
Ta chọn:
$$Q(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i}x^{2i} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i+1}x^{2i+1}$$

Suy ra:

$$P(x)Q(x) = \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i}x^{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i+1}x^{2i+1}\right)^2 = S(x^2)$$

2. Chú ý hằng đẳng thức sau:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

Ta xét:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} a_{3i}x^{3i} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} a_{3i+1}x^{3i+1} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} a_{3i+2}x^{3i+2}$$

Đặt:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} a_{3i}x^{3i}; B(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} a_{3i+1}x^{3i+1}; C(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} a_{3i+2}x^{3i+2}$$

Ta sẽ chọn

$$R(x) = A^2(x)+B^2(x)+C^2(x)-A(x)B(x)-B(x)C(x)-C(x)A(x)$$

Suy ra:

$$P(x)R(x) = A^3(x)+B^3(x)+C^3(x)-3A(x)B(x)C(x) = T(x^3)$$

Nhận xét 16 *Một số bài toán tương tự:*

1. *Biểu diễn đa thức $P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ dưới hạng hiệu bình phương của hai đa thức:$P(x)=Q^2(x)-R^2(x)$ bậc khác nhau và với hệ số thực. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức hệ số thực $H(x)$ để $P(x)=H^2(x)$.*

2. *Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ để $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $P'(x)>P''(x)$ và $P(x)>P''(x)$.*

3. *(Iran, 2013) Cho $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại các số tự nhiên $b_0,b_1,\ldots,b_n$ thỏa mãn $0\le i\le n: a_i\le b_i\le 2a_i$. Chứng minh rằng*

$$P(x) = b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài 14

Tìm tất cả đa thức $P(x)$ thỏa mãn

$$P(-x).P(3x)+\left(P(2x)\right)^2 = P(x).P(5x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

(Long An)

Lời giải

Thay $x=0$ vào (2.4) ta được: $P(0)=0$.

1. Xét $P(x) \equiv C$. Khi đó ta có: $C^2 + C^2 = C^2 \Leftrightarrow C = 0$, do đó $P(x) \equiv 0$.

2. Xét $degP \geq 1$
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0)$
Khi đó xét hệ số của x^{2n} trong khai triển (2.4) ta được:
$$a_n.(-1)^n.a_n.3^n + (a_n.2^n)^2 = a_n.a_n.5^n \Leftrightarrow (-3)^n + 4^n = 5^n \tag{2.5}$$
Nhận thấy rằng nếu n là số lẻ thì không thỏa mãn (2.5). Dễ thấy $n = 2$ là nghiệm của (2.5).
Xét $n \geq 4$. Khi đó:
$$3^n + 4^n = 5^n \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$
Mặt khác: $\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 < 1 + 1 = 2$ và $\left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 2 (n \geq 4)$
Do đó phương trình (2.5) có nghiệm duy nhất $n = 2$
Suy ra:$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x$ (do $P(0) = 0$).
Từ đề bài, so sánh hệ số đứng trước x^3 ta có :
$$3a_1 a_2 - 9a_1 a_2 + 16a_1 a_2 = 5a_1 a_2 + 25a_1 a_2$$
Suy ra:$a_1 = 0$ (vì $a_2 \neq 0$)
Thử lại ta thấy $P(x) \equiv 0; P(x) = a_2 x^2$ $(a_2 \neq 0)$ thỏa yêu cầu đề bài.

Nhận xét 17 *Một số bài tập tương tự cho dạng này:*

1. *(KHTN, 2010) Tìm tất cả các đa thức* $P(x)$ *hệ số thực thỏa mãn*
$$P(x-y) + P(y-z) + P(z-x) = 3\left[P(x) + P(y) + P(z)\right]$$
với $x + y + z = 0$

2. *(IMO, 2004) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực* $P(x)$ *thỏa mãn*
$$P\left(x-y\right) + P\left(y-z\right) + P\left(z-x\right) = 2P\left(x+y+z\right), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$
sao cho $xy + yz + zx = 0$

3. *(Nam Tư, 1982) Tìm tất cả đa thức hệ số nguyên* $P(x)$ *sao cho*
$$16P(x^2) = \left[P(2x)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

4. *(Ukraine, 2009) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực* $P(x)$ *thỏa mãn với* x, y, z, t *đôi một khác nhau:*$x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2$,$\gcd(x, y, z, t) = 1$ *và*
$$2P^2(t) + 2P(xy + yz + zx) = P^2(x + y + z)$$

5. *(Costa Rica, 2008) Tìm đa thức* $P(x)$ *hệ số thực thỏa mãn*
$$P(\sqrt{3}(a-b)) + P(\sqrt{3}(b-c)) + P(\sqrt{3}(c-a)) = P(2a-b-c) + P(-a+2b-c) + P(-a-b+2c)$$
với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Bài 15

Cho m là số nguyên dương thỏa mãn $m \equiv 1(\bmod 2017)$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^{2017} - mx + 2016$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

(Nghệ An)

Lời giải

Ta sẽ đi chứng minh bài toán tổng quát hơn như sau: *Cho a là một số nguyên dương và $p > 2$ là số nguyên tố thỏa mãn $(a, p) = 1$. Khi đó đa thức $P(x) = x^p - mx + a$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ với $m \equiv 1(\bmod p)$.* Thật vậy, giả sử rằng $P(x)$ khả quy, ta có: $P(x) = Q(x).R(x)$ $(degQ, degR \geq 1)$

Do $P(x)$ là monic nên $Q(x), R(x)$ cũng monic.

Xét $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ với $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0 \in \mathbb{Z}$

Gọi α_i là nghiệm (thực hoặc phức) của $Q(x) = 0$. Đặt

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$$

Do α_i cũng là nghiệm của $P(x) = 0$ nên ta có:

$$S_p - mS_1 + na = 0$$

Do $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ nên theo định lí Viete trong $Q(X)$ ta có $S_1 \in \mathbb{Z}$. Do đó $S_p \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $S_1^p \equiv S_1(\bmod p)$.

Mặt khác: $S_1^p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^p \equiv S_p(\bmod p)$

Do đó: $S_p - S_1 \vdots p$.

Mà $S_p - mS_1 \equiv S_p - S_1 \equiv 0(\bmod p)$ nên $na \vdots p$

Mà $1 < n < p$ và $(a, p) = 1$ nên vô lí. Do đó $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Nhận xét 18 *Đa thức bất khả quy là một toán hay gặp trong các đề thi học sinh giỏi. Có nhiều phương pháp để giải quyết bài toán này như phản chứng, dùng số phức hay dùng tiêu chuẩn Eisenstein. Sau đây là một số bài tập về sự khả quy cũng như bất khả quy của đa thức.*

1. *Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) - 1$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.*

2. *Chứng minh rằng $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.*

3. *(China TST, 2008) Chứng minh với mọi $n \geq 2$, tồn tại đa thức $P(x) = x^n + a_{a-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện:*
    - $a_1, a_2, \cdots, a_n \neq 0$
    - *$P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$*

- *Với mọi số nguyên x thì $|P(x)|$ không phải là số nguyên tố.*

4. *(Romania TST, 2006): Cho p là số nguyên tố, $p \geq 5$. Xét đa thức $P(x) = x^p + p(x^k + x^l) + 1$ với $1 \leq l \leq k \leq p-1$. Hỏi có bao nhiêu cặp (k, l) để $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.*

Bài 16

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x^2-6x+8)P(x)-(x^2+2x)P(x-2) = 6x^2-12x.$$

(Phú Thọ)

Lời giải

Viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$\left(x^2-6x+8\right)\left[P(x)+x\right] = \left(x^2+2x\right)\left[P(x-2)+x-2\right], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $Q(x) = P(x)+x$, ta có $Q \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$\left(x^2-6x+8\right)Q(x) = \left(x^2+2x\right)Q(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$$

Hay

$$(x-2)(x-4)Q(x) = x(x+2)Q(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Cho $x = 0, -2, 4$, từ (2.6) suy ra $Q(0) = 0; Q(-2) = 0, Q(2) = 0$.
Suy ra $Q(x) = x(x-2)(x+2)R(x)$. Ta có $R \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$(x-4)(x-2)^2(x)(x+2)R(x) = (x)^2(x+2)(x-4)(x-2)R(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x-2)R(x) = xR(x-2), \forall x \neq 0; \pm 2; 4 \Rightarrow (x-2)R(x) = xR(x-2), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Cho $x = 0$, (2.7) $\Rightarrow R(0) = 0$; suy ra $R(x) = xS(x)$.
Khi đó $S \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$(x-2)(x)S(x) = x(x-2)S(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow S(x) = S(x-2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $S(x) = c$, với c là hằng số.
Do đó $P(x) = cx^2\left(x^2-4\right) - x = c\left(x^4-4x^2\right) - x$. Thử lại thoả mãn.

Nhận xét 19 *Đây là một dạng toán tìm đa thức quen thuộc, tuy nhiên để xử lý bài toán trên phải khéo léo. Sau đây là một số bài toán tương tự:*

1. *(Long An, 2012) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn*

$$P(x)\left(x^2+2x+2\right)x(x+2) = \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)P(x+1)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

2. *(Moldova, 2004) Tìm tất cả đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn*

$$\left(x^3+3x^2+3x+2\right).P(x-1) = \left(x^3-3x^2+3x-2\right).P(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

3. *(Greece, 2014) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn*

$$(x^2-6x+8)P(x) = (x^2+2x)P(x-2)$$

Bài 17

Cho đa thức
$$f(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$$
có ba nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng biểu thức sau là bội của 2017
$$(a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$
(Quảng Bình)

Lời giải

Xét $f(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$
Nếu x_1, x_2, x_3 có cùng số dư khi chia cho 2017 thì ta có điều phải chứng minh.
Xét x_1, x_2, x_3 có số dư đôi một khác nhau đôi một khi chia cho 2017.
Theo định lý Fermat, ta có:
$$f(x) \equiv ax^2 + x(b+1) + c$$
Mặt khác:
$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0 \vdots 2017$$
Ta có:
$$f(x_1) - f(x_2) \equiv (x_1 - x_2)(ax_1 + ax_2 + b + 1)$$
Suy ra:
$$ax_1 + ax_2 + b + 1 \vdots 2017$$
Tương tự:
$$ax_2 + ax_3 + b + 1 \vdots 2017$$
Do đó: $(ax_1 + ax_2 + b + 1) - (ax_2 + ax_3 + b + 1) = a(x_1 - x_3) \vdots 2017 \Rightarrow a \vdots 2017$
Do $f(x_1) - f(x_2) \equiv (x_1 - x_2)(ax_1 + ax_2 + b + 1)$ nên $b + 1 \vdots 2017$.
Ngoài ra: $f(x_1) \equiv ax_1^2 + x_1(b+1) + c \equiv 0 \pmod{2017}$ nên $c \vdots 2017$
Suy ra: $a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1 \equiv a + b + c + 1 \equiv 0 \pmod{2017}$
Do đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 20 *Đối với những bài toán như trên ta cần phải chú ý đến các tính chất của đa thức hệ số nguyên trong số học và một số hệ quả của định lý Bezout chẳng hạn như $P(a) - P(b) \vdots a - b, a, b \in \mathbb{Z}$. Sau đây là một số bài toán liên quan đến đa thức trong số học:*

1. *(Hong Kong 2001) Cho số tự nhiên $k \geq 4$ và đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq P(c) \leq k$ với mọi $c = 0, 1, \ldots, k+1$. Chứng minh rằng $P(0) = P(1) = \ldots = P(k+1)$.*

2. *(China TST, 2009) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ hệ số nguyên sao cho $f(a) + f(b) + f(c) \vdots a + b + c$, với mọi số nguyên a, b, c.*

Bài 18

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2)+P(x).P(x+1)=0, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

(Quảng Nam)

Lời giải

1. Nếu $P(x)\equiv C$ thì $P(x)\equiv 0$ hoặc $P(x)\equiv -1$.

2. Nếu $degP=n\ge 1$ thì $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 (a_n\neq 0)$.
Xét hệ số của x^{2n} trong khai triển (2.8) ta có:

$$a_n+a_n^2=0\Leftrightarrow a_n=0\vee a_n=-1$$

Do $a_n\neq 0$ nên $a_n=-1$.
Gọi α là nghiệm của $P(x)=0$. Thay $x=\alpha$ vào (*) ta được:

$$P(\alpha^2)=-P(\alpha)P(\alpha+1)=0$$

Do đó các giá trị $\alpha^{2k}, k=1,2,...$ cũng là nghiệm của $P(x)=0$. Khi đó để các giá trị α^{2k} là hữu hạn thì $|\alpha|=0$ hoặc $|\alpha|=1$. Mặt khác với $x=\alpha-1$ thì $P((\alpha-1)^2)=-P(\alpha-1)P(\alpha)=0$. Do đó $(\alpha-1)^2$ là nghiệm của $P(x)=0$. Tương tự ta cũng có $(\alpha-1)^{2k}; k=1,2,...$ cũng là nghiệm của $P(x)=0$.
Một cách tương tự ta sẽ có: $|(\alpha-1)^2|=0$ hoặc $|(\alpha-1)^2|=1$.

(a) Nếu $|\alpha|=0$ thì $P(0)=0$ suy ra $P((0-1)^2)=P(1)=0$.

(b) Nếu $|\alpha|=1$ và $|(\alpha-1)^2|=1$.
Xét $\alpha=cos\varphi+isin\varphi$. Khi đó:

$$1-\alpha=1-cos\varphi-isin\varphi$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^2&=(1-cos\varphi)^2-2i(1-cos\varphi)sin\varphi-sin^2\varphi\\&=2cos\varphi(cos\varphi-1)-2isin\varphi(1-cos\varphi)\\&=2(cos\varphi-1)(cos\varphi+isin\varphi)\end{aligned}$$

Do đó

$$1=|(\alpha-1)^2|=\sqrt{4(cos\varphi-1)^2(cos^2\varphi+sin^2\varphi)}=2(1-cos\varphi)$$

$$\Leftrightarrow cos\varphi=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}\vee\varphi=\frac{5\pi}{3}$$

Với $\varphi=\frac{\pi}{3}$ thì $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Do α là nghiệm nên α^2 cũng là nghiệm, suy ra: $(\alpha-1)^2$ cũng là nghiệm.
Mặt khác ta tính được: $|(\alpha-1)^2|\neq 0,1$ (Vô lí).
Tương tự với trường hợp $\varphi=\frac{5\pi}{3}$.

Vậy $P(x)=0$ chỉ có nghiệm hai $0,1$ kể cả nghiệm phức.
Do đó theo Bezout ta có:

$$P(x)=x^m(1-x)^n, m,n\in\mathbb{N}$$

Thay vào (2.8) ta được:

$$x^{2m}(1-x^2)^n+x^m.(1-x)^n.(x+1)^m(-x)^n=0$$

$$\Leftrightarrow x^m(1-x)^n\left[x^m(1+x)^n+(x+1)^m.(-x)^n\right]=0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m=n$$

Khi đó:

$$P(x)=x^m(1-x)^m, m\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}$$

.

Nhận xét 21 *Cần nhận ra rằng phương trình $P(x)=0$ không có nghiệm nào khác ngoài $0,1$ kể cả nghiệm phức, từ đó sử dụng kiến thức về số phức trong đa thức để giải quyết các bài toán. Sau đây là một số bài toán tương tự:*

1. *Tìm các đa thức hệ số thực $P(x)$ sao cho*

$$P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1), \forall x\in\mathbb{R}$$

2. *(IMO 1983) Chứng minh rằng đa thức $P(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ với mọi $n>1$.*

3. *(Bulgaria, 1979) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn*

$$P(x).P(2x^2)=P(2x^3+x), \forall x\in\mathbb{R}$$

Bài 19

Cho $P_i(x)=x^2+b_ix+c_i$ $(i=1,2,...,n)$ là n đa thức đôi một phân biệt với hệ số thực sao cho với mọi $1\le i<j\le n$ thì đa thức $Q_{i,j}(x)=P_i(x)+P_j(x)$ có nghiệm thực duy nhất. Tìm giá trị lớn nhất có thể của n.

(Vĩnh Phúc)

Lời giải

- Với n=3 ta chọn $P_1(x)=x^2-4; P_2(x)=x^2-4x+6; P_3(x)=x^2-8x+12$ thì $P_1(x)+P_2(x)=2(x-1)^2$; $P_1(x)+P_3(x)=2(x-2)^2$; $P_2(x)+P_3(x)=2(x-3)^2$ thỏa mãn.
- Giả sử tồn tại 4 đa thức P_1,P_2,P_3,P_4 thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó $P_1+P_2=2\left(x-t_{12}\right)^2$; $P_3+P_4=2\left(x-t_{34}\right)^2$; $P_1+P_3=2\left(x-t_{13}\right)^2$; $P_2+P_4=2\left(x-t_{24}\right)^2$, trong đó t_{ij} là nghiệm duy nhất của P_i+P_j.
  Đặt $Q=P_1+P_2+P_3+P_4$ thì Q có hai biểu diễn

$$Q=2\left(x-t_{12}\right)^2+2\left(x-t_{34}\right)^2$$

và

$$Q = 2(x - t_{13})^2 + 2(x - t_{24})^2.$$

So sánh hệ số ta được

$$t_{12} + t_{34} = t_{13} + t_{24} \text{ và } t_{12}^2 + t_{34}^2 = t_{13}^2 + t_{24}^2.$$

Suy ra

$$t_{12} + t_{34} = t_{13} + t_{24} = a; t_{12}.t_{34} = t_{13}.t_{24} = b.$$

Do đó: $t_{12}; t_{34}$ và t_{13}, t_{24} là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + b = 0$
Nếu $t_{12} = t_{13}$ thì $P_2 = P_3$, nếu $t_{12} = t_{24}$ thì $P_1 = P_4$ đều dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết.
Vậy giá trị lớn nhất có thể của n là 3.

3 Giải tích

Bài 1

Cho dãy số (x_n) thỏa

$$\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 7 \\ x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n^2 + x_n \end{cases}$$

Đặt dãy

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Chứng minh (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG HN)

Lời giải

Ta sẽ cố gắng rút gọn biểu thức để có thể quy về dãy tuyến tính cấp 2 rồi sau đó sẽ rút gọn y_n.
Ta có

$$x_{n+2} - x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_{n+1} - x_n^2 + x_n = ... = x_2 - x_1^2 + x_1 = 1$$

Do đó ta có được

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$$

Khi đó:

$$\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_{k+1} - 1}$$

Do đó sai phân và rút gọn, ta tính được

$$y_n = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_n - 1}$$

Tiếp theo ta sẽ tìm $\lim x_n$. Ta có $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0$. Do đó x_n tăng.
Giả sử x_n bị chặn trên thì khi đó x_n có giới hạn hữu hạn. Đặt $L = \lim x_n$ thì giải ra được $L = 1$ vô lí. Do đó $\lim x_n = +\infty$. Khi đó

$$\lim y_n = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét 22 *Khi gặp những bài dạng tính tổng sai phân mà ta đã có phương trình sai phân cấp* 2 *thì thường ta có* 2 *cách làm thông dụng như sau:*

1. *Đồng nhất hệ số: Ta sẽ tìm α, β thỏa mãn*

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\alpha}{x_k - \beta} - \frac{\alpha}{x_{k+1} - \beta}.$$

2. *Sử dụng điểm cố định của hàm số: Khi đó ta sẽ giải phương trình sai phân có dạng $f(x) = x$ để tìm ra điểm cố định đó, sau đó đặt vào lại biểu thức sai phân là được*
Ví dụ bài trên là ta giải phương trình $x = x^2 - x + 1$ ta tìm được nghiệm $x = 1$ nên ta có cách phân tích như trên.

Ta có một số bài tập ứng dụng sau đây:

1. *Cho a là một số thực dương và dãy (x_n) được xác định bởi:*

$$x_1 = \frac{1}{2a}, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + ax_n + \sqrt{a^2x_n^2 + 4ax_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Tính $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

2. *Cho m là số thực lớn hơn 1 và a là số thực lớn hơn 4. Xét dãy số (x_n) được xác định bởi:*

$$x_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n^{m+1} + 3x_n + 16}{x_n^m - x_n + 11}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^m + 7}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim_{n\to+\infty} y_n$.

3. *Cho $a \in \mathbb{R}$. Xét dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = -a^4 - 2a^2 - 2$ và:*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 5 - \sqrt{u_n^2 - 14u_n + 21}}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_{i+1}^2 - 4u_{i+1} - 5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính các giới hạn $\lim y_n$ và $\lim \frac{u_n}{n}$.

4. *Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi:* $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $A_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Tính $\lfloor A_n \rfloor$.

Bài 2

Tìm a để dãy số (u_n) hội tụ, biết $u_1 = a$ và:

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n - 1 \text{ khi } u_n > 0 \\ -1 \text{ khi } -1 \le u_n \le 0 \\ u_n^2 + 4u_n + 2 \text{ khi } u_n < -1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)

Lời giải

Đây là dạng toán cần phải xét nhiều trường hợp do đó điều cần nhất là việc chia khoảng sao cho hợp lí.
Ta có nhận xét sau: Nếu tồn tại $x_i \in [-1;0]$ thì dãy sẽ có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = -1$.
Ta sẽ chia khoảng vào những điểm nhạy cảm của bài toán để từ đó đi ra được lời giải.

- $a > 1 \Rightarrow u_2 = 2u_1 - 1 > 1$. Bằng quy nạp suy ra $u_n > 1, \forall n$. Từ đó suy ra công thức tổng quát của dãy là $u_n = 2^{n-1}(a-1)+1$, tức là dãy (u_n) không có giới hạn hữu hạn.

- $a = 1 \Rightarrow u_2 = 1 \Rightarrow u_n = 1$. Vậy dãy có giới hạn $L = 1$.

- $0 < a < 1$: Ta sẽ chứng minh trong dãy u_n luôn có 1 số hạng âm. Thật vậy giả sử $u_n > 0, \forall n$. Khi đó $u_2 \in [\frac{1}{2};1]$. Cứ chia nửa khoảng nửa khoảng rồi kẹp lim thì suy ra được $u_n = 1$ với n đủ lớn (vô lí). Do đó tồn tại $k : u_k < 0$ và $-1 \le u_k \le 0$. Như vậy theo nhận xét thì ta có $\lim u_n = 1$.

- $-1 \le a \le 0$ thì hiển nhiên theo nhận xét.

- $a < -1$: Đây cũng chính là trường hợp chính của bài toán vì chỗ xác định dãy là khá khó. Với $a < -1$, $u_2 = a^2 + 4a + 2$. Nếu $u_2 > 1 \Leftrightarrow a < -2 - \sqrt{3}$ thì theo trường hợp 1, dãy không có giới hạn.
Ta đi chứng minh $-2 - \sqrt{3} \le a < -1$ thì dãy có giới hạn. Nhưng tới đây thì vẫn chưa chia khoảng được nên ta tiếp tục xét thêm các điểm nhạy cảm là $-2; -1$.

  - Nếu $-2 - \sqrt{3} \le a \le -2$ thì $-1 \le u_2 \le 1$. Theo các trường hợp trên thì dãy hội tụ.
  - Nếu $-2 < a < -1$, xét hàm số $f(x) = x^2+4x+2$ trên $(-2;-1)$ thì $f'(x) = 2x+4 > 0$, mà $u_2 < u_1$ nên dãy giảm. Mặt khác u_n bị chặn dưới bởi -2 nên tồn tại giới hạn của u_n.

  Vậy dãy có giới hạn khi $-2 - \sqrt{3} \le a \le 1$.

Nhận xét 23 *Dạng toán trên thuộc lớp bài toán biện luận sự hội tụ của dãy số. Trong các kì thi học sinh giỏi, đặc biệt là kì thi học sinh giỏi quốc gia ta thường gặp dạng toán sau: Cho dãy số (x_n) như sau:*

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (a là tham số thực).}$$

Tìm a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn trong các trường hợp đó. Phương pháp giải bài toán trên gồm hai bước.

1. *Xét hàm số $y = f(x)$. Tìm nghiệm của phương trình $x = f(x)$, lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và dấu của $f(x) - x$.*

2. *Sử dụng bảng vừa lập để xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy số này vào điều kiện của a.*

Ta có một số bài tập áp dụng:

1. *Cho dãy số (x_n) như sau: $x_1 = a \in \mathbb{R}$ và $x_{n+1} = \sqrt[3]{7x_n - 6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn trong các trường hợp đó.*

2. *Với mỗi cặp số thực $(a;b)$. Xét dãy số (x_n) như sau:*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n + b\sin x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) *Cho $b = 1$. Chứng minh rằng với mọi số thực a, dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tính giới hạn đó theo a.*

   (b) *Chứng minh rằng với mỗi số thực $b > 2$ cho trước, tồn tại số thực a sao cho dãy số (x_n) tương ứng không có giới hạn hữu hạn.*

3. *Cho dãy số (x_n) như sau:*

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   Tìm a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn trong các trường hợp đó.

Bài 3

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

1. $f(1) > 0$.

2. $f(xy - 1) + 2f(x)f(y) = 3xy - 1 \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(THPT chuyên ĐH Vinh)

Lời giải

Kí hiệu $P(u, v)$ là phép thế x bởi u,y bởi v vào 2..
Từ $P(x,0)$ ta có: $f(-1) + 2f(0)f(x) = -1 \forall x \in \mathbb{R}$.
Từ đây ta thấy $f(0) =$ vì nếu ngược lại, ta có $f(x) = c \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số), không thỏa mãn đề bài.
$P(1,1) \Rightarrow f(0) + 2f(1)^2 = 2 \Rightarrow f(1) = 1 (f(1) > 0)$.
$P(x+1,1)$

$$f(x) + 2f(x+1) = 3x + 2 \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Trong đẳng thức trên thay $x=-1 \Rightarrow f(-1)=-1$
Từ $P(-x-1,-1)$ ta có:
$$f(x)-2f(-x-1)=3x+2\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$
Từ (3.1) và (3.2) $\Rightarrow f(x)=-f(-x)\,\forall x\in\mathbb{R}$
$P(-x-1,-1)$
$$f(-x-1)+2f(-x)=-3x-1 \Rightarrow f(x+1)+2f(x)=3x+1\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3.3}$$
Từ (3.1) (3.3), ta có $f(x)=x\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn.

Bài 4

Cho số thực $a\ge 2$ và dãy số (u_n) xác đinh bởi:
$$\begin{cases} u_1=a \\ u_{n+1}=u_n+\ln\dfrac{u_n+1}{2u_n-3}, n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$
Chứng minh rằng dãy u_n có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Trường THPT chuyên ĐH Vinh)

Lời giải

Ta có
$$\ln\frac{x+1}{2x-3}>0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x-3}>1 \Leftrightarrow \frac{4-x}{2x-3}>0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x<4. \tag{3.4}$$
Do đó ta xét hàm số $f(x)=x+\ln\dfrac{u_n+1}{2u_n-3}$ trên $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. Có $f'(x)=1+\dfrac{\frac{-5}{(2x-3)^2}}{\frac{x+1}{2x-3}}=\dfrac{2x^2-x-8}{(x+1)(2x-3)}$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{65}}{4}$.
Do khi giải phương trình giới hạn ta suy ra được $\lim u_n=4$ nên ta sẽ xét 2 trường hợp sau:

TH1: $a\ge 4$. Lập bảng biến thiên, ta suy ra $u_2=f(u_1)=f(a)\ge f(4)=4$.. Tiếp đó, bằng quy nạp suy ra
$$u_n\ge 4\forall n\ge 1. \tag{3.5}$$
Từ (3.4) và (3.5) suy ra $u_{n+1}-u_n\le 0$ với mọi $n\ge 1$. Do đó (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn.

TH2: $2\le a<4$.Ta có $f(2)=2+\ln 3<4$ và $f\left(\dfrac{1+\sqrt{65}}{4}\right)>\dfrac{1+\sqrt{65}}{4}>2$. Lập bảng biến thiên, ta suy ra $u_2=f(u_1)=f(a)\in[2;\,4)$. Bằng quy nạp suy ra
$$u_n\in[2;\,4)\forall\, n\ge 1. \tag{3.6}$$
Từ (3.4) và (3.6) suy ra $u_{n+1}-u_n>0$ với mọi $n\ge 1$.
Do đó (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.

Vậy với $a \geq 2$ thì (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim u_n = L$, khi đó $L = L + \ln \dfrac{L+1}{2L-3} \Leftrightarrow$ $L = 4$. Vậy $\lim u_n = 4$.

Bài 5

1. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
$$f(x - 2016f(y)) = y - 2017f(x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn
$$f(x + yf(x)) = xf(y) + f(x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

(Bà Rịa - Vũng Tàu)

Lời giải

1. Giả sử tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn. Thay $x = 0$ vào (3.7) ta có $f(-2016f(y)) = y - 2017f(0)\ \ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ toàn ánh.
   Do đó $\exists a$ sao cho $f(a) = 0$.
   Thay y bởi a vào phương trình ban đầu, ta có $f(x) = a - 2017f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = c\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số thực).
   Thử lại ta thấy không thỏa mãn.
   Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn $f(x-2016f(y)) = y-2017f(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Giả sử tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn. Đặt $P(x, y)$ là phép thế của x, y vào (3.8).
   Xét $x \neq 0$: $P(x, 0) \Rightarrow f(0) = 0$.
   - Ta có $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm hàm.
   - Xét $f(x) \not\equiv 0$. Gỉa sử tồn tại $a \neq 0$ là số thỏa mãn $f(a) = 0$.
     - $P(a, y) \Rightarrow af(y) = 0 \Rightarrow f(y) = 0\ \ \forall y \in \mathbb{R}$ vô lý. Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
     - $P(-1, -1) \Rightarrow f(-1) = -1$.
     - $P(1, -1) \Rightarrow f(1 - f(1)) = f(1) - 1$.
     - $P(1 - f(1), 1) \Rightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$.
     - $P(1, y) \Rightarrow f(y + 1) = f(y) + 1\ \ \forall y \in \mathbb{R}$.
     - $P(x, y+1) \Rightarrow f(x+yf(x)+f(x)) = xf(y)+f(x)+x = f(x+yf(x))+x\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
       Mặt khác vì $x + yf(x)$ toàn ánh(cho x=1, y chạy) nên thay $x + yf(x)$ bởi y ở (3.8), ta có
       $$f(y + f(x)) = f(y) + x\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$
       Thay $y = 0$ vào (3.9) ta có: $f(f(x)) = x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
       Thay x bởi $f(x)$ vào (3.9) ta có
       $$f(x + y) = f(x) + f(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$
       $P(f(x), y)$ kết hợp (3.10) ta có
       $$f(xy) = f(x).f(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$
       Từ (3.10) và (3.11) ta có nghiệm hàm là $f(x) = x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) \equiv 0$.

Bài 6

Cho dãy số x_n xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{nx_n^2}{1+(n+1)x_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Chứng minh $x_n \le \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \ge 1$.
2. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{kx_k}{1+(k+1)x_k}$. Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

(Bà Rịa - Vũng Tàu)

Lời giải

1. Đầu tiên ta dễ chứng minh $0 < x_n < 1, \forall n$. Ta sẽ quy nạp để chứng minh $x_n \le \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   - Với $u_1 = \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1.2}$.
   - Giả sử đúng tới n, ta chứng minh đúng với $n+1$ tức là chứng minh

   $$x_{n+1} \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

   $$\Leftrightarrow n(n+1)(n+2)x_n^2 - (n+1)x_n \le 1$$

   $$\Leftrightarrow (n+1)x_n(n(n+2)x_n - 1) \le 1$$

   Áp dụng giả thiết quy nạp ta cần chứng minh $x_n \le 1$, một điều hiển nhiên đúng. Do đó ta có điều phải chứng minh.

2. Để ý rằng so với công thức truy hồi thì bậc của x_k giảm đi 1 đơn vị, do đó ngay lập tức thì ta sẽ lập hiệu có dạng $f(x+1)x_{k+1} - f(x).x_k$
   Ta sẽ chọn $f(x) = x$. Khi đó ta sẽ có

   $$(k+1)x_{k+1} - kx_k = \frac{-kx_k}{1+(k+1)x_k}$$

   Đổi dấu lại thì

   $$kx_k - (k+1)x_{k+1} = \frac{kx_k}{1+(k+1)x_k}$$

   Cho k chạy từ $1 \to n-1$ thì

   $$x_1 - nx_n = \sum \frac{kx_k}{1+(k+1)x_k}$$

Mà từ câu a thì ta có

$$0 < nx_n \le \frac{1}{n+1} \Leftarrow \lim nx_n = 0$$

Do đó $\lim y_n = x_1 = \frac{1}{2}$.

Bài 7

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{3}f(xy) + \frac{1}{3}f(xz) - f(x)f(yz) \ge \frac{1}{9} \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

(Bình Dương)

Lời giải

Kí hiệu $P(u, v, w)$ là phép thế x bởi u, y bới v, z bởi w vào đề bài.

- $P(1, 1, 1) \Rightarrow \left(f(1) - \frac{1}{3}\right)^2 \le 0 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3}$.
- $P(0, 0, z) \Rightarrow \left(f(0) - \frac{1}{3}\right)^2 \le 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{3}$.
- $P(x, 1, 1) \Rightarrow f(x) \ge \frac{1}{3} \forall x \in \mathbb{R}$.
- $P(0, 1, x) \Rightarrow f(x) \le \frac{1}{3} \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy ta có $f(x) = \frac{1}{3} \forall x \in \mathbb{R}$, Thử lại thấy đúng.

Bài 8

1. Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n+2}$ $n \in \mathbb{N}$.
2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1 + u_n^2} - 1}{u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   Tìm công thức tổng quát của (u_n).

(Bình Thuận)

Lời giải

1. Chúng tôi xin nêu hai cách giải cho câu 1.

Cách 1: Nếu $0 < a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$. Do đó

$$u_n < \frac{2.4.6...(2n+2)}{3.5....(2n+3)} => 0 < u_n^2 < \frac{1}{2n+3}.$$

Lấy lim hai vế ta được $\lim u_n = 0$.

Cách 2: Ta sẽ quy nạp để chứng minh $u_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \forall n \geq 3$.

- Với $n = 3$ thì $u_3 = \frac{35}{128} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
- Giả sử đúng tới n, ta chứng minh đúng với $n+1$. Thật vậy,

$$u_{n+1} = u_n.\frac{2n+3}{2n+4} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.\frac{2n+3}{2n+4} < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Nhân chéo lên, điều trên tương đương với

$$(2n+4)^3.n > (2n+3)^3.(n+1) \Leftrightarrow 4n^3 + 6n^2 - 17n - 27 > 0,$$

một điều đúng với mọi $n \geq 3$. Do đó ta có $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Lấy lim2 vế ta được $\lim u_n = 0$.

2. Đây là 1 câu khá quen thuộc và nhìn hình thức thì ta sẽ nghĩ ngay tới đặt lượng giác. Do đó quy nạp dễ chứng minh $u_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Bài 9

Cho dãy Fibonacci xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \geq 7$ thì có đúng 1 trong 2 số u_{p-1}, u_{p+1} là bội của p.

(Đà Nẵng)

Lời giải

Trong bài này chúng ta sẽ dùng tới các bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 5 *Với $\{u_n\}$ là dãy Fibonacci thì:*

1. *Công thức tổng quát của u_n là*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right].$$

2. $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n-3}$.

Bổ đề 6 $C_p^k \vdots p, \forall k = 2, 3, ..., p-1$.

Quay lại bài toán. Dễ thấy nếu tồn tại u_{k-1}, u_{k+1} đều chia hết cho p thì u_k chia hết cho p nên suy ra được u_n chia hết cho p với mọi n vô lí
Do đó chỉ có duy nhất 1 trong 2 số u_{p-1}, u_{p+1} chia hết cho $p \geq 7$
Thay $n = p \geq 7$ trong bổ đề 5 $\Rightarrow u_p^2 - 1 = u_{p-1}u_{p+1}$. Do đó ta cần chứng minh $u_p^2 - 1 \vdots p$.
Ta có

$$u_p^2 - 1 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2p} + \frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2p} - 3\right]$$

Do $p \geq 7$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2p} - 3 \vdots p.$$

Mà khai triển trực tiếp và quy đồng, chú ý là rút gọn, ta thu đươc tử sẽ là

$$2(C_{2p}^0 + C_{2p}^2.5 + C_{2p}^4.5^2 + ... + C_{2p}^{2p}.5^p) - 3.2^{2p}$$

Mà theo bổ đề 6 thì ta có $C_{2p}^2, C_{2p}^4, ...C_{2p}^{2p-2} \vdots p$ nên ta cần chứng minh

$$2(C_{2p}^0 + C_{2p}^{2p}.5^p) - 3.2^{2p} \vdots p,$$

một điều hiển nhiên theo định lý Fermat. Do đó tử chia hết cho $p \geq 7$, còn mẫu sẽ là 2^{2p} không chia hết cho p. Do đó ta có $u_p^2 - 1 \vdots p$ nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 24 *Dãy số với các tính chất số học bao giờ cũng là một trong những đề tài "nóng hổi" được quan tâm trong các kì thi học sinh giỏi. Hơn nữa, bài toán trên thuộc một trong những tính chất đẹp của dãy Fibonacci. Để bạn đọc có thể nắm vững một số tính chất về dãy đặc biệt này, hãy thử sức ở các bài toán sau:*

1. *Cho (u_n) là dãy số Fibonacci. Chứng minh rằng nếu n là bội của k thì u_n là bội của u_k.*

2. *Cho (u_n) là dãy Fibonacci. Với mọi số tự nhiên k, chứng minh phân số sau đây tối giản:*

$$\frac{ku_{n+2} + u_n}{ku_{n+3} + u_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 10

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2-2yf(x))+f(y^2)=f^2(x-y),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.12}$$

(Đồng Nai)

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn (3.12).
Thay $y=0$ vào (3.12) ta có

$$f(x^2)+f(0)=f^2(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Thay $x=0$ vào đẳng thức trên ta có $2f(0)=f^2(0)\Rightarrow f(0)=0$ hoặc $f(0)=2$.

TH1: $f(0)=2$.
Thay $x=0$, y bởi $-y$ vào (3.12) ta có $f(4y)+f(y^2)=f^2(y)\quad\forall y\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(4y)=f(0)=2\quad\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)\equiv 2$ Thử lại đúng.

TH2: $f(0)=0$.

$$(3.12)\Rightarrow f(x^2)=f^2(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Ta có $f(x)\equiv 0$ là một nghiệm hàm.
Xét $f(x)\not\equiv 0$.
Nếu tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)=0$:
(3.14) $\Rightarrow f(a^2)=0$ và $f(-a)=0$ do đó không giảm tổng quát giả sử $a>0$
Từ (3.14) ta cũng có $f(x)\geq 0\quad\forall x>0$.
Thay $x=a$, y bởi $-y$ vào (3.12) ta có $f(a^2)+f(y^2)=f^2(a+y)\quad\forall y\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f^2(y)=f^2(a+y)\quad\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(y)=f(y+a)\quad\forall y>0$
Xét $x>0$ thay x bởi $x+a$ vào (3.12) ta có

$$f((x+a)^2-2yf(x+a))+f(y^2)=f^2(x+a-y),\forall x>0,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f((x+a)^2-2yf(x))+f(y^2)=f^2(x-y),\forall x>0,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x^2-2yf(x)+2ax+a^2)=f(x^2-2yf(x)),\forall x>0,y\in\mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Do $f(x)\not\equiv 0$ nên tồn tại $x_0>0$ sao cho $f(x_0)\neq 0$.
Thay $x=x_0$, y bởi $\dfrac{x_0^2-y}{2f(x_0)}$ vào (3.15) ta có

$$f(y+2ax_0+a^2)=f(y)\quad\forall y\in\mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Đặt $c=2ax_0+a^2$. Do $a,x_0>0$ nên $c>0$.
Với mỗi $y\in\mathbb{R}$ tồn tại $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $y+nc>0$.
Từ (3.16) ta suy ra $f(y)=f(y+nc)\quad\forall y\in\mathbb{R}$
Kết hợp với (3.14) suy ra $f(y)\geq 0\quad\forall y\in\mathbb{R}$
Do đó $f(-x)=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$
Thay x bởi $-x$ vào (3.12) ta suy ra $f^2(x-y)=f^2(-x-y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x-y)=f(x+y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$

Thay x bởi $\frac{x+y}{2}$, y bởi $\frac{x-y}{2}$ ta có $f(x)=f(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$
Do đó $f(x)$ là hàm hằng. Thử lại suy ra $f(x)\equiv 2$ hoặc $f(x)\equiv 0$ vô lý.
Vậy $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.
Thay $x=2y$ vào (3.12) ta có

$$f(4y^2-2yf(2y))=0\quad\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 4y^2=2yf(2y)\quad\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(2y)=2y\quad\forall y\neq 0.$$

Mà $f(0)=0$ suy ra $f(x)=x\quad\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại đúng.

Vậy bài toán có 3 nghiệm hàm $f(x)\equiv 2$, $f(x)\equiv 0$ và $f(x)=x\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 11

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1\in(1;2) \\ u_{n+1}=1+u_n-\dfrac{u_n^2}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Đồng Nai)

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}$ trên $(1;2)$. Có $f'(x)=1-x<0, \forall x\in(1;2)$ nên $f(x)$ nghịch biến. Mặt khác $1\le u_n\le\frac{3}{2}$ nên dãy chẵn tăng bị chặn trên, dãy lẻ giảm bị chặn dưới.
Đặt giới hạn từng dãy là A,B thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A=1+B-\dfrac{B^2}{2} \\ B=1+A-\dfrac{A^2}{2} \end{cases}$$

Trừ 2 vế ta được

$$2(A-B)=\frac{A^2-B^2}{2}$$

Suy ra $A=B$ hoặc $2=\frac{A+B}{2}$. Nhưng vì $A,B\le\frac{3}{2}$ nên $A=B$
Do đó $L=\sqrt{2}$

Bài 12

Cho hai dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2;3)\ \forall n \geq 2$.
2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

(Hà Nam)

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$x_n = \cot\frac{\pi}{3.2^n}, y_n = \tan\frac{\pi}{3.2^n}.$$

- Dễ thấy điều trên đúng với $n = 1$.
- Giả sử điều trên đúng tới n.
- Bây giờ ta sẽ chứng minh nó đúng với $n+1$. Thật vậy,

$$x_n + \sqrt{1+x_n^2} = \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}}{\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}} = \cot\frac{\pi}{3.2^{n+1}} = x_{n+1}.$$

Tương tự với y_n. Khi đó ta có

$$x_n y_n = \frac{2}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{3.2^n}} \in (2,3).$$

Dễ dàng tính được $\lim y_n = 0$.

Bài 13

Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1, u_n = \dfrac{n}{n-1}u_{n-1} + n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$.

1. Xác định công thức của (u_n).
2. Chứng minh $u_1 + u_2 + ... + u_{2016} < 2016^3$.

(Hà Nội)

Lời giải

1. Tính toán vài giá trị đầu: $u_2 = 4; u_3 = 9$ làm ta dự đoán được $u_n = n^2$, và ta sẽ tiến hành quy nạp với mong muốn khẳng định đó là đúng.

   - Với $n = 1, u_1 = 1^2$ khẳng định đúng.
   - Giả sử khẳng định đúng tới $n-1$, $(n > 1)$. Khi đó $u_{n-1} = (n-1)^2$.
   - Giờ ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với n. Thật vậy,

   $$u_n = \frac{n}{n-1}u_{n-1} + n = \frac{n}{n-1}(n-1)^2 + n = n^2.$$

     Do đó ta có điều phải chứng minh.

   Vậy $u_n = n^2$.

2. Đề bài tương đương với việc chứng minh

   $$1^2 + 2^2 + ... + 2016^2 < 2016^3.$$

   Rất dễ thấy số 2016 mang tính tượng trưng, và nó gợi ý cho ta đi chứng minh 1 kết quả tổng quát hơn:

   $$1^2 + 2^2 + ... + n^2 < n^3. \tag{3.17}$$

   - Với $n = 2$ thì (3.17) đúng.
   - Giả sử (3.17) đúng tới n. Khi đó $1^2 + 2^2 + ... + n^2 < n^3$.
   - Bây giờ ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng tới $n+1$. Thật vậy,

   $$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 < n^3 + (n+1)^2$$

     nên điều cần chứng minh sẽ đúng nếu có$n^3 + (n+1)^2 < (n+1)^3 \Leftrightarrow 3n^2 + 3n > 0$,một điều hiển nhiên đúng.

   Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 14

Với mỗi số nguyên dương n, xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi $f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + ... + x^2 + x + 1$.

1. Chứng minh hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất.
2. Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là s_n. Chứng minh dãy số (s_n) có giới hạn hữu hạn.

(Hà Tĩnh)

Lời giải

Ở câu 1, ta dễ dàng suy ra các nhận xét sau:

- $f_n(x) \geq 1 \forall x \geq 0$.
- $f_n(x) \geq 1 \forall x \leq -1$.
- $f_n(x) < 1 \forall x \in (-1;0)$

Do đó $\min f_n(x) \in (-1;0)$. Khi đó ta có

$$f_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x} \Rightarrow f_n'(x) = \frac{2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1}{(1-x)^2}.$$

Xét hàm số $g_n(x) = 2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1 \forall x \in (-1;0)$ có $g_n'(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1) > 0 \forall x \in (-1;0)$. Dễ chứng minh $g_n(x)$ có đúng 1 nghiệm x_n trên $(-1;0)$. Lập bảng biến thiên, thấy được $f_n(x)$ đạt GTNN tại 1 điểm duy nhất.
Với mọi $x \in (-1;0)$, ta có

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{2n+1}(x+1) \leq f_n(x) \Rightarrow s_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) = s_n.$$

Do đó dãy s_n giảm. Mặt khác

$$f_n = f_n(x_n) = \frac{1-x_n^{2n+1}}{1-x_n} > \frac{1}{1-x_n} > \frac{1}{2}$$

nên dãy giảm bị chặn dưới nên tồn tại $L = \lim s_n$.

Nhận xét 25 *Đây là một trong những bài toán về các dãy số xác định bởi dãy các phương trình với tham số n nguyên dương* $f_n(x) = 0$. *Yêu cầu bài toán đặt ra rằng một dãy số* (x_n) *được sinh bởi nghiệm, giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất,... của phương trình* $f_n(x) = 0$. *Chứng minh rằng dãy số* (x_n) *có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.*
Đối với dạng toán này, ta thường khảo sát hàm số $f(x)$ *để nhận xét một số tính chất liên quan đến dãy* (x_n) *rồi sau đó biện luận miền của các số hạng trong dãy và tính đơn điệu của dãy. Đôi khi ta cũng cần kết hợp một số định lý có liên quan đến phần giải tích như định lý Lagrange, định lý Rolle,... để biện luận dãy* (x_n). *Sau đây là một số bài tập ứng dụng:*

1. *(Trường Đông viện Toán 2016 - Ngày 1) Ký hiệu* x_n *là nghiệm dương duy nhất của phương trình:*
$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = n+2$$
Chứng minh rằng dãy (x_n) *hội tụ tới một số thực dương. Tìm giới hạn đó.*

2. *(Moscow University Entrance Exam 2000) Ký hiệu* x_n *là nghiệm của phương trình:*
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = 0$$
thuộc khoảng $(0;1)$. *Chứng minh dãy số* (x_n) *hội tụ. Hãy tìm giới hạn đó.*

3. *Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình* $x^n = x+1$ *có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* x_n. *Chứng minh rằng* $\lim x_n = 1$ *và tính* $\lim n(x_n - 1)$.

Bài 15

Cho dãy số (u_n) thỏa:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + n}{2u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ có giới hạn hữu hạn.

(Hải Phòng)

Lời giải

Ta chứng minh quy nạp $\sqrt{n-1} \le u_n \le \sqrt{n}\ \forall n$.

- Dễ thấy khẳng định đã đúng với $n = 1, 2$.
- Nếu đã có $\sqrt{k-1} \le u_k \le \sqrt{k}\ \forall k \ge 2$ thì:
  Với $f(x) = \dfrac{x^2 + k}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{k}{2x}$ ta có

  $$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{k}{2x^2} = \frac{x^2 - k}{2x^2} \le 0\ \forall \sqrt{k-1} \le x \le \sqrt{k}$$

  nên

  $$u_{k+1} = f(u_k) \ge f\left(\sqrt{k}\right) = \sqrt{k}$$

  và

  $$u_{k+1} = f(u_k) \le f\left(\sqrt{k-1}\right) = \frac{2k-1}{2\sqrt{k-1}}.$$

  Ta có

  $$\frac{2k-1}{2\sqrt{k-1}} \le \sqrt{k+1} \Leftrightarrow (2k-1)^2 \le 4\left(k^2 - 1\right) \Leftrightarrow 4k - 5 \ge 0$$

  đúng $\forall\ k \ge 2$.
  Từ đó theo nguyên lý kẹp ta có $\lim \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.

Bài 16

Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.18}$$

với $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

(Hòa Bình)

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn (3.18). Thay $x=0$ vào (3.18) ta có

$$f(0)=f(0)[f(y)]\ \ \forall y\in\mathbb{R}.$$

TH1: $f(0)\neq 0\Rightarrow [f(x)]=1\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f([x]y)=f(x)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
Xét $x\not\in[0;1)$ thay y bởi $\frac{y}{[x]}$ vào đẳng thức trên ta có $f(y)=f(x)=c\ \ \forall y\in\mathbb{R}$ (c là hằng số).
Kết hợp với $[f(x)]=1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ ta có $1\le c<2$. Vậy $f(x)=c$ với mọi số thực x,y, $1\le c<2$ là hằng số. Thử lại đúng.

TH2: $f(0)=0$.
Xét $x\in(0;1)$ ta có $[x]=0$. Khi đó $f(0)=f(x)[f(x)]\ \ \forall x\in\ (0;1)\Rightarrow f(x)[f(x)]=0\ \ \forall x\in(0;1)$
Từ đây suy ra $[f(x)]=0\ \ \forall x\in(0;1)$
Xét $x>1$. Thay y bởi $\frac{1}{[x]}$ vào $(*)$ ta có $f(1)=f(x)[f(\frac{1}{[x]})]\ \ \forall x>1\Rightarrow f(1)=0$
Thay $x=1$ vào (3.18) ta được $f(y)=0\ \ \forall y\in\mathbb{R}$. Thử lại đúng.

Vậy bài toán có 2 nghiệm hàm $f(x)=c(1\le c<2)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 17

Cho (x_n) được xác định như sau:

$$x_0>0;x_{n+1}=\frac{x_n}{1+x_n^2},n\in\mathbb{N}$$

Tìm $\lim\sqrt{2n}x_n$.

(Hòa Bình)

Lời giải

Đặt $x_n=\frac{1}{y_n}$. Khi đó

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n(1+\frac{1}{y_n^2})}\Rightarrow y_{n+1}=y_n+\frac{1}{y_n}\Rightarrow y_{n+1}^2=y_n^2+2+\frac{1}{y_n^2}.$$

Ta cần tìm $\lim\frac{2n}{y_n^2}$.Để ý rằng $\lim x_n=0\Rightarrow\lim y_n=+\infty$. Áp dụng định lý Stolz, ta có

$$\lim\frac{2n}{y_n}=\frac{2n+2-2n}{2+\frac{1}{y_n^2}}=1\Rightarrow\lim\sqrt{2n}x_n=1.$$

Bài 18

Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_o = 1 \\ x_1 = 41 \\ x_{n+2} = 3x_n + \sqrt{8(x_{n+1}^2 + x_n^2)}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

(Hòa Bình)

Lời giải

Ta có

$$x_{n+2} - 3x_n = \sqrt{8(x_{n+1}^2 + x_n^2)}$$

$$x_{n+2}^2 - 6x_{n+2}x_n + x_n^2 = 8x_{n+1}^2$$

Tương tự ta cũng sẽ có

$$x_{n+1}^2 - 6x_{n+1}x_{n-1} + x_{n-1}^2 = 8x_n^2$$

. Trừ vế theo vế ta sẽ được

$$(x_{n+2} - 3x_n)^2 = (3x_{n+1} - x_{n-1})^2$$

Đến đây ta có nhận xét rằng nếu $x_0; x_1; x_2$ nguyên thì mọi số hạng của dãy đều nguyên. Tính được $x_2 = 239$, do đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 26 *Việc chứng minh dãy số có các số hạng đều nguyên quả là một vấn đề thú vị. Ngoài cách xác định x_{n+2} theo hệ thức truy hồi như bài toán vừa xong, ta còn có thể dùng một số tính chất số học để chứng minh các số hạng của một dãy luôn là số nguyên. Sau đây là một số bài tập liên quan:*

1. *Dãy số (u_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right) u_n + 2 - \dfrac{3}{n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

2. *Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn điều kiện $a^2 = b + 1$. Dãy số (x_n) xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_o = 0 \\ x_{n+1} = ax_n + \sqrt{bx_n^2 + c^2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

3. *Dãy số (u_n) có tính chất sau:*

$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 7 \\ -\dfrac{1}{2} < u_{n+1} - \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} < \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng khi $n \geq 2$ thì mọi số hạng u_n của dãy đều là số nguyên lẻ.

Bài 19

Cho dãy số u_n xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}+2}{u_n+2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh dãy số u_n có giới hạn hữu hạn.

(Tp. HCM)

Lời giải

Nhận xét rằng giới hạn của (u_n), nếu có, là $\lim u_n = 1$, do đó ta sẽ thử tiến hành kẹp

$$1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

- Với $n = 1, n = 2$ ta có điều hiển nhiên.
- Giả sử điều trên đúng tới $n+1$. Ta có $1 - \dfrac{1}{n+1} \leq u_{n+1} \leq 1 + \dfrac{1}{n+1}$.
- Bây giờ ta sẽ chứng min điều trên đúng với $n+2$. Thật vậy,

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+2}{u_n+2} > \frac{3 - \dfrac{1}{n+1}}{3 + \dfrac{1}{n}}.$$

nên điều trên sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{3 - \dfrac{1}{n+1}}{3 + \dfrac{1}{n}} > 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 3(n+2) - \frac{n+2}{n+1} > 3(n+1) + \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow 3 \geq \frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1},$$

một điều hiển nhiên. Tương tự ta cũng chứng minh được $u_n \leq 1 + \dfrac{1}{n}$. Do đó $\lim u_n = 1$.

Bài 20

Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$

(Khánh Hòa)

Lời giải

Đặt $g(x)+x=f(x)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$g(xy)+g(x-y)+g(x+y+1)=0\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Kí hiệu P(u,v) là phép thế x bởi u, y bởi v trong phương trình trên.

- $P(0,0),P(0,1),P(0,2),P(1,1)\Rightarrow g(0)=0.$
- $P(x,0)\Rightarrow g(x)+g(x+1)=0\forall x\in\mathbb{R}.$
- $P(x,-1)\Rightarrow g(-x)+g(x+1)+g(x)=0\forall x\in\mathbb{R}.$

Từ hai đẳng thức trên ta có $g(-x)=0\forall x\in\mathbb{R}$ hay $g(x)=0\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)=x\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng.

Bài 21

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1=a \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n}+\dfrac{n}{u_n}, n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\left[u_n^2\right]=n$ khi $n\geq 4$.

(Khánh Hòa)

Lời giải

$$u_{n+1}^2=\frac{u_n^2}{n^2}+2+\frac{n^2}{u_n^2}$$

Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng $n\leq u_n^2<n+1$ với mọi $n\geq 4$
Ta có

$$u_{n+1}^2=2+\frac{u_n^2}{n^2}+\frac{n^2}{u_n^2}<2+\frac{(n+1)^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}=3+\frac{(n+1)^2}{n^2}<n+2$$

Tức là ta cần chứng minh
$(n+1)^2<(n-1).n^2$ đúng với mọi $n\geq 4$
Tương tự vế kia
Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 22

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^3+f(y))=f^3(x)+y\forall x,y\in\mathbb{R}$$

(Lạng Sơn)

Lời giải

Kí hiệu $P(u,v)$ là phép thế x bởi u, y bởi v vào đề bài.

- $P(0,y)\Rightarrow f(f(y))=y+f^3(0)$ với mọi số thực y .Ta thấy vế phải của phương trình này có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên f toàn ánh.
- Giả sử có $f(a)=f(b)$, lần lượt thực hiện $P(x,a),P(x,b)$ ta có a=b. Vậy f đơn ánh. Suy ra f song ánh. Vậy tồn tại duy nhất giá trị t sao cho $f(t)=0$.
- $P(0,y)\Rightarrow f(f(y))=f^3(0)+y\forall y\in\mathbb{R}$.
  Trong đẳng thức trên thay y bởi $f(y)$ và sử dụng lại chính đẳng thức trên ta có $f(y+f^3(0))=f^3(0)+f(y)\forall y\in\mathbb{R}$.
- $P(0,0)\Rightarrow f(f(0))=f^3(0)$.
- $P(f(0),y)\Rightarrow f(f(y)+f^3(0))=f^3(f(0))+y\ \ \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow f^3(0)+f(f(y))=f^9(0)+y\ \ \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow 2f^3(0)=f^9(0)$. Do đó $f(0)=0$ hoặc $f^6(0)=2$.
- $P(t,0)\Rightarrow f(t^3+f(0))=0=f(t)\Rightarrow t^3+f(0)=t$.
- $P(0,t)\Rightarrow f(0)=f^3(0)+t\ \ (*)$. Suy ra $t^3=-f^3(0)\Rightarrow t=-f(0)\Rightarrow 2f(0)=f^3(0)\Rightarrow f(0)=0$ hoặc $f^2(0)=2$. Kết hợp với trên suy ra $f(0)=0$.
  Từ đó ta có $f(f(x))=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x^3)=f^3(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (2)$.
  $P(\sqrt[3]{x},f(y))\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
  Đặt $f(1)=k$ ta có $k=k^3$, thay x bởi $x+1$ vào (2) ta có $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x^3+3x^2+3x+1)=(f(x)+f(1))^3$$

$$\Rightarrow f(x^3)+3f(x^2)+3f(x)=f^3(x)+3kf^2(x)+3k^2f(x)$$

$$\Rightarrow f(x^2)+f(x)=kf^2(x)+k^2f(x)$$

  Thay x bởi $x-1$ vào (2) trên ta có $\forall x\in\mathbb{R}$

$$-f(x^2)+f(x)=-kf^2(x)+k^2f(x)$$

  Do đó $f(x^2)=kf^2(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ Ta xét 2 trường hợp của k:

TH1: $k=1$. Ta có $f(x^2)=f^2(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)>0\ \ \forall x>0$ do $f(x)$ song ánh và $f(0)=0$
Xét $x>y$ ta có: $f(x)=f(y)+f(x-y)>f(y)$. Suy ra $f(x)$ đồng biến. Kết hợp với $f(x)$ cộng tính và $f(1)=1$ ta có $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại đúng.

TH2: $k=-1$. Ta có $f(x^2)=-f^2(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)<0\ \ \forall x>0$ do $f(x)$ song ánh và $f(0)=0$
Xét $x>y$ ta có: $f(x)=f(y)+f(x-y)<f(y)$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến. Kết hợp với $f(x)$ cộng tính và $f(1)=-1$ ta có $f(x)=-x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại đúng.

Vậy bài toán có 2 nghiệm hàm $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=-x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Bài 23

Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1=-\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1}+1=\dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases} \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Chứng minh rằng $u_{n+1}+1<\dfrac{3(u_n+1)}{\sqrt{10}}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
2. Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

(Lạng Sơn)

Lời giải

1. Ý tưởng đầu tiên sẽ là chứng minh bằng quy nạp, tức là ta cần chứng minh

$$\frac{3(u_n+1)}{\sqrt{10}}\ge\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}}.$$

Cũng bằng quy nạp, dễ nhận thấy $u_n+1\ge 0$. Do đó ta cần chứng minh

$$3\sqrt{u_n^2+1}\ge\sqrt{10}.$$

Bình phương 2 vế, điều cần chứng minh trở thành

$$9(u_n^2+1)\ge 10\Leftrightarrow u_n^2\ge\frac{1}{9}.$$

Dễ chứng minh u_n giảm, nên bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh được

$$u_n^2\ge\frac{1}{9}\forall n,$$

và ta có điều cần chứng minh ban đầu.

2. Dãy đã cho giảm và bị chặn dưới bởi -1 nên tồn tại $L=\lim u_n$. Chuyển sang giới hạn: $L+1=\dfrac{L+1}{\sqrt{L^2+1}}\Rightarrow L=-1$.

Bài 24

Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \dfrac{20n+21}{n+1}} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó .

(Lào Cai)

Lời giải

Chuyển sang giới hạn thì

$$L = \sqrt{L^3 - 12L + 20} \Leftrightarrow L = 2.$$

Do đó ta sẽ quy nạp để chứng minh $x_n \geq 2$.

- Với $n = 1$ thì $x_1 = \dfrac{5}{2} \geq 2$.
- Giả sử điều cần chứng minh đúng tới n.
- Bây giờ ta sẽ chứng minh điều này cũng đúng với $n+1$, tức là ta sẽ đi chứng minh

  $$x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1} \geq 4.$$

  Nhưng điều này sẽ là hiển nhiên do

  $$x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1} - 4 \geq x_n^3 - 12x_n + 16 \geq (x_n-2)^2(x_n+4) \geq 0.$$

  Do đó $x_n \geq 2$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x$ có $f'(x) = 3x^2 - 12 \geq 0$, và $x_2 < x_1$ nên dãy giảm.
Ta cũng có hàm số $g(n) = \dfrac{20n+21}{n+1}$ là hàm giảm, do đó x_n vì là tổng của hai dãy giảm nên cũng là dãy giảm. Hơn nữa nó bị chặn dưới bởi 2 nên tồn tại $L = \lim x_n$. Dễ dàng tìm được $L = 2$.

Nhận xét 27 *Việc đánh giá hàm ở đây phải khéo léo vì việc xét một hàm là sai phân của x_n như trên khá "chặt" do hàm sinh bởi công thức truy hồi x_n trong bài toán vừa xong. Trong đề chọn đội tuyển quốc gia Cần Thơ năm nay cũng có một bài tương tự như sau, bạn đọc hãy giải nó như một bài tập áp dụng:*

Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ và } u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 + 3u_n^2 - 9u_n + \frac{9n+10}{n+1}} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ngoài hai bài toán trên, bạn đọc có thể xây dựng những bài toán tương tự với bậc cao hơn thông qua hàm số đảm bảo tính đơn điệu và bị chặn trong công thức truy hồi đối với số hạng của dãy.

Bài 25

Cho hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i. $f(m) < f(n)\ \forall m,n \in \mathbb{N}^*; m < n$.

ii. $f(mn) = f(m)f(n)\ \forall m,n \in \mathbb{N}^*; (m,n) = 1$.

iii. $\exists i \in \mathbb{N}^*, i > 1$ sao cho $f(i) = i$.

1. Chứng minh rằng $f(1) = 1$, $f(3) = 3$.
2. Tìm tất cả các hàm $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

(Ninh Bình)

Lời giải

1. Thay $m = n = 1$ vào 2. ta được $f(1) = 1$.
   Do $i > 1$ mà $f(i) = i$ nên ta suy ra $f(n) = n$ với mọi $n = \overline{1,i}$ (do i.).
   - Nếu $i \geqslant 3$ thì $f(3) = 3$.
   - Nếu $i = 2$ thì $f(2) = 2$ và $f(3).f(5) = f(15) < f(18) = f(2).f(9) < 2.f(10) = 4.f(5)$.
     Do đó $2 < f(3) < 4$ nên $f(3) = 3$.
2. Xét dãy $(a_n): a_1 = 3, a_n = a_{n-1}\left(a_{n-1} - 1\right)$.
   Khi đó $f(a_1) = a_1$, nếu $f(a_k) = a_k$ thì $f(a_k - 1) = a_k - 1$ (do f tăng ngặt) nên $f(a_{k+1}) = f(a_k)f(a_k - 1) = a_{k+1}$.
   Vậy bằng quy nạp t có thể chứng minh $f(a_{k+1}) = a_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}^*$.
   Dựa vào tính chất đầu tiên ta cũng dễ dàng chứng minh rằng nếu $f(a_k) = a_k (k > 1)$ thì $f(j) = j$ với mọi $1 \le j \le a_k$. Mà dãy trên tăng vô hạn nên suy ra $f(n) = n$ với mọi số tự nhiên n.

Bài 26

Cho dãy số (x_n) xác định bởi hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+2}$. Tính $\lim y_n$.

(Ninh Bình)

Lời giải

Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
Ta sẽ cố gắng thu gọn biểu thức tính của x_{n+1}
Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= x_n(x_n+3)(x_n+1)(x_n+2)+1 \\ \Leftrightarrow x_{n+1}^2 &= (x_n^2+3x_n+1)^2 \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= x_n^2+3x_n+1 \end{aligned}$$

Do đó ta sẽ tính được

$$\frac{1}{x_i+2} = \frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_{i+1}+1}$$

Mặt khác, ta tính được $\lim x_n = +\infty$
Do đó $\lim y_n = \lim \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{2}$.

Bài 27

Xét dãy số thực vô hạn $x_1, x_2, \cdots, x_n$ thỏa mãn

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}$$

với mọi số nguyên dương m, n. Chứng minh rằng (x_n) là cấp số cộng.

(Phú Thọ)

Lời giải

Để chứng minh cấp số cộng thì ta nên tìm cách chứng minh $x_{m+1} - x_m = d$: cố định.
Do đó, ta sẽ tìm cách làm như sau:

$$\begin{aligned} |(x_{m+1}-x_m)-(x_{n+1}-x_n)| &= |(x_{m+n+1}-x_m-x_{n+1})-(x_{m+n+1}-x_{m+1}-x_n)| \\ &< |(x_{m+n+1}-x_m-x_{n+1})| + |(x_{m+n+1}-x_{m+1}-x_n)|. \\ &< \frac{2}{m+n+1} \end{aligned}$$

Tới đây thì vẫn chưa ổn vì vậy ta sẽ cố tìm cách chặn thêm 1 hằng số tự do nữa, cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}|(x_{m+1}-x_m)-(x_{n+1}-x_n)| &= |(x_{m+1}-x_m-x_{a+1}+x_a)-(x_{n+1}-x_n-x_{a+1}+x_a)|\\ &< |(x_{m+1}-x_m)-(x_{a+1}-x_a)|+|(x_{n+1}-x_n)-(x_{a+1}-x_a)|\\ &< \frac{2}{a+m+1}+\frac{2}{a+n+1}\end{aligned}.$$

Cho a đủ lớn thì suy ra được

$$x_{m+1}-x_m = x_{n+1}-x_n = d, \forall m,n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó x_n là cấp số cộng.

Bài 28

Tìm tất cả hàm số $f: N^* \to N^*$ sao cho ba số $a, f(b), f(b+f(a)-1)$ luôn là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi $a,b \in N^*$

(Quảng Bình)

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài. Với mọi số tự nhiên a,b, ta có: $a+f(b) \geq f(b+f(a)-1)+1 \Rightarrow f(b) \geq f(b+f(1)-1)$. Ta cũng có: $a+f(b+f(a)-1) \geq f(b)+1 \Rightarrow f(b+f(1)-1) \geq f(b)$. do đó $f(b) = f(b+f(1)-1)$.

1. $f(1) \neq 1$. Ta có f tuần hoàn. Mà f có tập giá trị là các số nguyên dương nên f bị chặn. Vậy tồn tại $M = max f(x)$.
   Từ đề bài chọn $b=1, a=2M$ ta có $f(f(2M)), f(1)$ và $2M$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Suy ra $2M \geq f(f(M+1))+f(1) \geq 2M+1$, vô lý!

2. $f(1)=1$
   Từ đề bài, chọn $b=1$, ta có hai điều sau:

$$a+f(1) \geq f(f(a))+1 \Rightarrow a \geq f(f(a)) \forall a \in \mathbb{N}^*$$

$$f(f(a))+f(1) \geq a+1 \Rightarrow f(f(a)) \geq a \forall a \in \mathbb{N}^*.$$

   Vậy $f(f(a)) = a \forall a \in \mathbb{N}^*$, từ đây dễ có f song ánh. Đặt $f(2)=t$ ta có $f(t)=2$. Thay $a=2, b=t$ ta có $2, 2, f(t-1+f(2))$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Suy ra $3 \geq f(t-1+f(2)) \geq 1$.

   - Nếu $f(t-1+f(2)) = 1 = f(1)$, ta có $f(2)=1$ vô lý.
   - Nếu $f(t-1+f(2)) = 2 = f(f(2))$, ta có $f(2)=t=1$ vô lý.

   Vậy $f(t-1+f(2)) = 3$. Ta chứng minh:

$$f(t-1+f(n)) = n+1 \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (3.19).$$

   - Ta thấy (3.19) đúng với $n=1,2$.

- Giả sử (3.19) đúng với $n<k$, ta chứng minh (3.19) đúng với $n=k$. Thật vậy, thay $a=k, b=t$ ta có $k, 2, f(t-1+f(k))$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $k+2>f(t-1+f(k))>k-2$.
  Nếu $f(t-1+f(k))=k-1=f(t-1+f(k-2))$ ta có điều vô lý. Tương tự ta có $f(t-1+f(k))\neq k$. Do đó $f(t-1+f(k))=k+1$.
  Vậy $f(t-1+f(n))=n+1 \forall n\in\mathbb{N}^*$

$f(t-1+f(n))=n+1=f(f(n+1)) \Rightarrow f(n+1)=t-1+f(n) \forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó ta có $f(n+1)=n(t-1)+1 \forall n\in\mathbb{N}^*$. Mặt khác $n+1=f(f(n+1))=f(n(t-1)+1)=(t-1)^2n+1 \forall n\in\mathbb{N}^*$, do đó $t=2$, $f(n)=n \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Thử lại, với hàm $f(n)=n \forall n\in\mathbb{N}^*$, điều kiện đề bài trở thành $a, b, a+b-1$ luôn là độ dài ba cạnh của một tam giác (đúng). Vậy chỉ có hàm số $f(n)=n \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn.

Bài 29

Cho a là một số thực và dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_n = 2016n + a.\sqrt[3]{n^3+1}.$$

1. Tìm a sao cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.
2. Tìm a để dãy số là dãy tăng từ một lúc nào đó.

(Quảng Bình)

Lời giải

1. $x_n = 2016n - 2016\sqrt[3]{n^3+1} + (a+2016).\sqrt[3]{n^3+1}$
   $x_n = 2016\cdot\dfrac{-1}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt[3]{(n^3+1)^2}} + (a+2016)\cdot\sqrt[3]{n^3+1}$
   Khi đó nếu $a\neq -2016$ thì $\lim x_n = +\infty$ hoặc là $\lim x_n = -\infty$
   Do đó để x_n có giới hạn hữu hạn thì $a=-2016$.

2. Ta dễ chứng minh $\lim\left(\sqrt[3]{(n+1)^3+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)=1$.
   Ta có $x_{n+1}-x_n \geq 0, \forall n\geq n_0$
   Tức là $a \geq \dfrac{-2016}{\sqrt[3]{(n+1)^3+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}$
   Lấy lim hai vế được $a\geq -2016$.
   Với $a=-2016$ dễ thấy thỏa mãn.
   Với $a>-2016$ thì ta có luôn điều phải chứng minh theo giới hạn.
   Do đó $a\geq -2016$.

Bài 30

Cho a, b là các số thực dương. Xét dãy số u_n được xác định bởi $u_n = a^2n^2 + bn$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim\{\sqrt{u_n}\}$.

(Quảng Ninh)

Lời giải

Đặt $b = 2aq + r$ với $q, r \in N; 0 \le r \le 2a - 1$.

TH1: $r = 0$ thì $b = 2aq$ và

$$u_n = a^2n^2 + 2aqn = (an+q)^2 - q^2 < (an+q)^2.$$

Lại có

$$u_n - (an+q-1)^2 = 2an - (q-1)^2.$$

Từ đây suy ra

$$u_n > (an+q-1)^2;\ \forall n > \frac{(q-1)^2}{2a}.$$

Điều này dẫn tới

$$[\sqrt{u_n}] = an + q - 1\,\forall n > \frac{(q-1)^2}{2}$$

Khi ấy

$$\lim_{n\to+\infty}\{\sqrt{u_n}\} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{u_n} - [\sqrt{u_n}]\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+2aqn} - (an+q-1)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2an-(q-1)^2}{\sqrt{a^2n^2+2aqn}+an+q-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2a-\frac{(q-1)^2}{n}}{\sqrt{a^2+\frac{2aq}{n}}+a+\frac{q-1}{n}} = 1.$$

TH2: $1 \le r \le 2a-1$. Để ý rằng

$$u_n - (an+q+1)^2 = (r-2a)n - (q+1)^2 < 0;\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

và

$$u_n - (an+q)^2 = rn - q^2.$$

Suy ra

$$(an+q)^2 < u_n < (an+q+1)^2;\ \forall n > \frac{q^2}{r}$$

$$\Rightarrow [\sqrt{u_n}] = an + q;\ \forall n > \frac{q^2}{r}.$$

Do đó $\lim u_n = \left\{\dfrac{b}{a}\right\}$.

Bài 31

Cho dãy số x_n xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{x_n+2} \end{cases}$$
Tìm số hạng tổng quát x_n và tìm $\lim x_n$.

(Quảng Trị)

Lời giải

Đây là một bài khá quen thuộc và điển hình trong dạng bài tìm công thức tổng quát của dãy số. Ta có
$$x_{n+1}-1 = \frac{2x_n+1}{x_n+2}-1 = \frac{x_n-1}{x_n+2}, \tag{3.20}$$
$$x_{n+1}+1 = \frac{2x_n+1}{x_n+2}+1 = \frac{3(x_n+1)}{x_n+2}. \tag{3.21}$$
Do đó lấy (3.21) chia (3.20), ta được
$$\frac{x_n+1}{x_n-1} = 3\frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}-1} = \ldots = 3^{n-1}.\frac{x_1+1}{x_1-1} = 3^n.$$
Quy đồng lên ta tính được $x_n = \dfrac{3^n+1}{3^n-1} \Rightarrow \lim x_n = 1$.

Bài 32

Cho dãy số (a_n) có $a_1 \in \mathbb{R}$ và $a_{n+1} = \left|a_n - 2^{1-n}\right|, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim a_n$.

(Thái Bình)

Lời giải

TH1: $a_1 \geq 2$ Khi đó $a_2 = a_1 - 1 \geq 1 = 2^0$. Khi đó $a_3 = a_2 - 2^{-1} \geq 1 - \dfrac{1}{2} \geq 2^{-1}$

Do đó quy nạp thì ta có $a_{n+1} = a_n - 2^{1-n} \Rightarrow a_{n+1} = a_1 - 1 - \dfrac{1}{2} - \ldots - \dfrac{1}{2^{n-1}} = a_1 - 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \lim a_n = a_1 - 2$.

TH2: $a_1 \leq 0$, Khi đó $a_2 = 1 - a_1 \geq 1 = 2^0$, $a_3 = \left|a_2 - \dfrac{1}{2}\right| = a_2 - \dfrac{1}{2}$. Quy nạp tương tự như trên, ta được
$$a_{n+1} = a_1 - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{n-1}} = a_1 - 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

TH3: $a_1 \in (0;2)$. Khi đó ta sẽ chứng minh quy nạp rằng $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-2}}, \forall n \geq 2$.

- Với $n = 2$ thì $a_2 = |a_1 - 1| \leq 1$.

– Giả sử đúng tới n, ta chứng minh đúng với $n+1$. Ta có $a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}| \le \frac{1}{2^{n-1}}$. Để ý rằng

$$a_n - 2^{1-n} \le 2^{1-n} \Leftrightarrow a_n \le 2^{2-n} \text{ đúng,}$$
$$2^{1-n} - a_n \le 2^{1-n} \Leftrightarrow a_n \ge 0 \text{ đúng.}$$

Do đó theo quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Như vậy $0 < a_n \le \frac{1}{2^{n-2}}$. Lấy lim hai vế ta được $\lim a_n = 0$.

Bài 33

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + f(y)) = f(x^2) + 2x^2 f(y) + (f(y))^2 \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(Thanh Hoá)

Lời giải

Kí hiệu $P(u, v)$ là phép thế x bởi u,y bởi v vào phương trình đề bài cho.

- $P(1,0) \Rightarrow f(f(1) + f(0)) = f(1) + 2f(0) + f^2(0)$. (3.22)
- $P(0,1) \Rightarrow f(f(0) + f(1)) = f(0) + f^2(1)$.

Từ đó suy ra $f(1) = -f(0)$ hoặc $f(1) = f(0) + 1$.

- Nếu $f(1) = -f(0)$, ta có $f(0) = f(1) + 2f(0) + f^2(0) \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$.
  - $P(0, y) \Rightarrow f(f(y)) = f^2(y) \forall y \in \mathbb{R}$.
  - $P(1, y) \Rightarrow f(f(y)) = 2f(y) + f^2(y) \forall y \in \mathbb{R}$.

  Từ đó suy ra $f(y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}$
- Nếu $f(1) = f(0)+1$: $P(y, x) \Rightarrow f(x^2)+2x^2 f(y)+f^2(y) = f(y^2)+2y^2 f(x)+f^2(x)$ (1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Trong phương trình trên lần lượt thay $x = 0, x = 1$ ta được:

  $$f(0) + f^2(y) = f(y^2) + 2y^2 f(0) + f^2(0) \forall y \in \mathbb{R},$$

  $$f(1) + 2f(y) + f^2(y) = f(y^2) + 2y^2 f(1) + f^2(1) \forall y \in \mathbb{R}$$

  Với chú ý $f(1) = f(0) + 1$, từ hai phương trình trên ta thu được $f(x) = x^2 + f(0) \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy $f(0) = 0$. Hàm $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Vậy có hai hàm thỏa mãn bài toán là $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 34

Với số thực $a \neq \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ cho trước ,xét dãy số a_n cho bởi

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{7\sqrt{2a_n^2+7}-14}{4a_n+\sqrt{2a_n^2+7}} \end{cases}$$

Xác định a để dãy có giới hạn hữu han.

(Thanh Hoá)

Lời giải

Xét hàm $f(x) = \dfrac{7\sqrt{2x^2+7}-14}{4x+\sqrt{2x^2+7}}$ thì $a_{n+1} = f(a_n)$.
Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -3$. Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty, -3)$ và $(1; +\infty)$ nên dễ chứng minh được $f(x) > x, \forall x \in (-\infty; -3)$ và $f(x) < x, \forall x \in (1; +\infty)$.
Tiếp theo, dễ chứng minh được $f(x) \geq 1, \forall x > \dfrac{-7}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.
Tương tự $f(x) \leq -3, \forall x < \dfrac{-7}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = -3$.
Từ các kết quả trên, ta thu được:

TH1: $x_1 = a = 1$ Khi đó $x_n = 1$ nên $\lim x_n = 1$.

TH2: $x_1 = a = -3$ Khi đó $x_n = -3$ nên $\lim x_n = -3$.

TH3: $x_1 = a > \dfrac{-7}{2}$. Khi đó $x_2 \geq 1 \Rightarrow x_n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) < x_n$. Do dãy giảm bị chặn dưới bởi 1 nên $\lim x_n = 1$.

TH4: $x_1 = a < \dfrac{-7}{2}$. Khi đó $x_2 \leq -3 \Rightarrow x_n \leq -3 \Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) > x_n$. Do đó x_n tặng bị chặn trên bởi -3. Giải ra được $\lim x_n = -3$.

4 Hình học

Bài 1

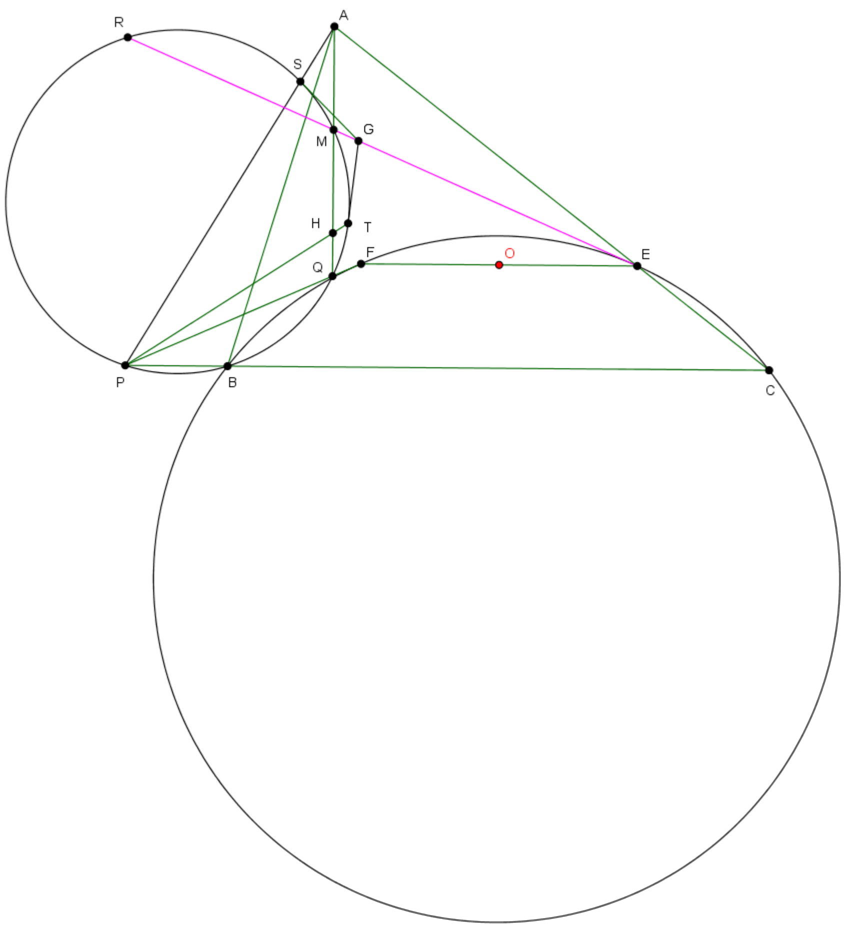
$\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $OE // BC$. OE cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F. Tiếp tuyến tại F của đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ cắt BC, AH ở P, Q.

1. Chứng minh đường tròn (K) ngoại tiếp $\triangle BPQ$ đi qua trung điểm M của AH.

2. PA, PH cắt (K) ở S, T khác P. Chứng minh hai tiếp tuyến của (K) tại S, T cắt nhau tại một điểm trên ME.

(*THPT chuyên KHTN - ĐH KHTN, ĐHQG HN*)

Hướng dẫn



1. Do $EF // BC$ nên $\widehat{FPC} = \widehat{FCE}$. Mặt khác dễ thấy $\triangle OCE \sim \triangle BAH$ nên $\dfrac{OE}{EC} = \dfrac{BH}{AH}$. Từ đó suy ra $\dfrac{MH}{HB} = \dfrac{EC}{EF}$ nên $\triangle FEC \sim \triangle BHM$ (c.g.c). Do đó $\widehat{BMQ} = \widehat{FCE} = \widehat{FPC}$ nên tứ giác $MQBP$ nội tiếp.

2. Gọi R là giao điểm của EM với (K). Dễ thấy chỉ cần chứng minh tứ giác $RSMT$ điều hòa $\Leftrightarrow P(RMAH) = -1$. Mặt khác do M là trung điểm AH nên ta chỉ cần

chứng minh $PR//AH$. Điều này tương đương với chứng minh $\widehat{PQM}+\widehat{EMQ}=180^\circ$. Do $\widehat{PQM}=90^\circ+\widehat{BPQ}=90^\circ+\widehat{BMH}$ nên ta chỉ cần chứng minh $\widehat{BME}=90^\circ$, một kết quả quen thuộc.

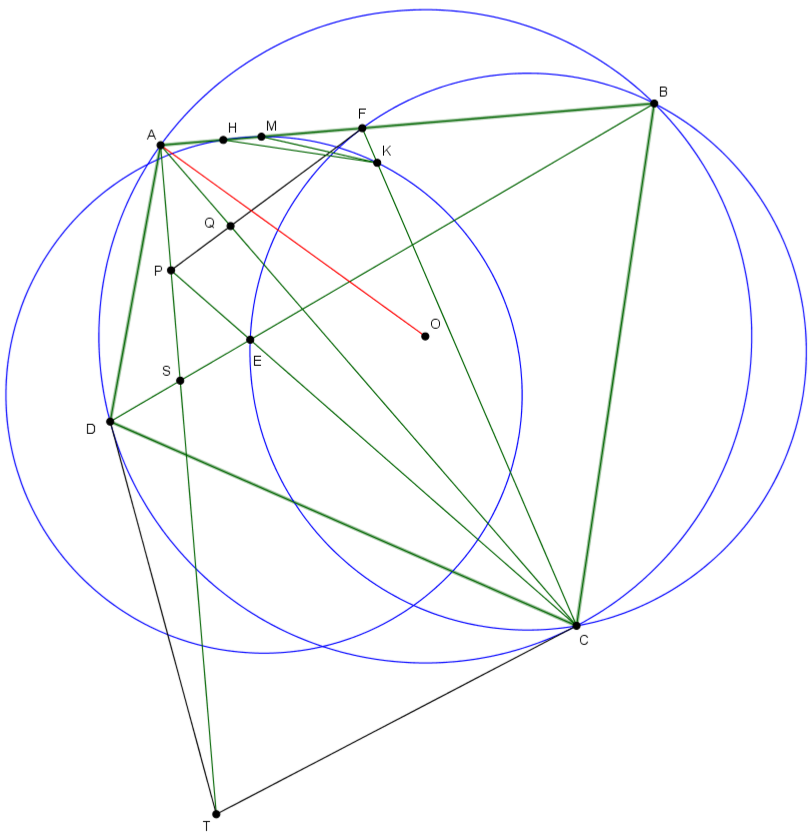
Bài 2

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) sao cho $ABCD$ không phải hình thang. Tiếp tuyến tại C,D của (O) cắt nhau tại T. TA cắt BD tại S, E đối xứng với D qua S. AB cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F. EC cắt TA tại P.

1. Chứng minh rằng PF tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$.
2. Giả sử PF cắt AC tại Q, H,K lần lượt là hình chiếu của Q lên FA,FC. M là trung điểm FA. Chứng minh rằng tiếp tuyến qua A của (O) và đường thẳng qua Qv song song AO cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHK$.

(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)

Lời giải



1.
   - Dễ dàng chứng minh được $\triangle ECF \backsim \triangle DCA$.
   - AT cắt CD ở N, $R\in CD$ sao cho $ER//AT$. Như vậy N là trung điểm DR. Để ý rằng AN là đường đối trung nên $\dfrac{ND}{NC}=\dfrac{AD^2}{AC^2}\Rightarrow\dfrac{PE}{PC}=\dfrac{NR}{NC}=\dfrac{ND}{BC}=\dfrac{AD^2}{AC^2}=\dfrac{FE^2}{FC^2}\Rightarrow PF$ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F.

2. Đường thẳng qua I song song AO cắt tiếp tuyến qua (O) của A tại L.

   - PF tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F nên $\widehat{LAQ} = \widehat{ADC} = \widehat{FEA} = \widehat{KFQ} \Rightarrow \triangle QLA \sim \triangle QKF$.
   - Theo kết quả quen thuộc thì đường tròn ngoại tiếp $\triangle HKL$ đi qua trung điểm M của AF, từ đó L nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHK$.

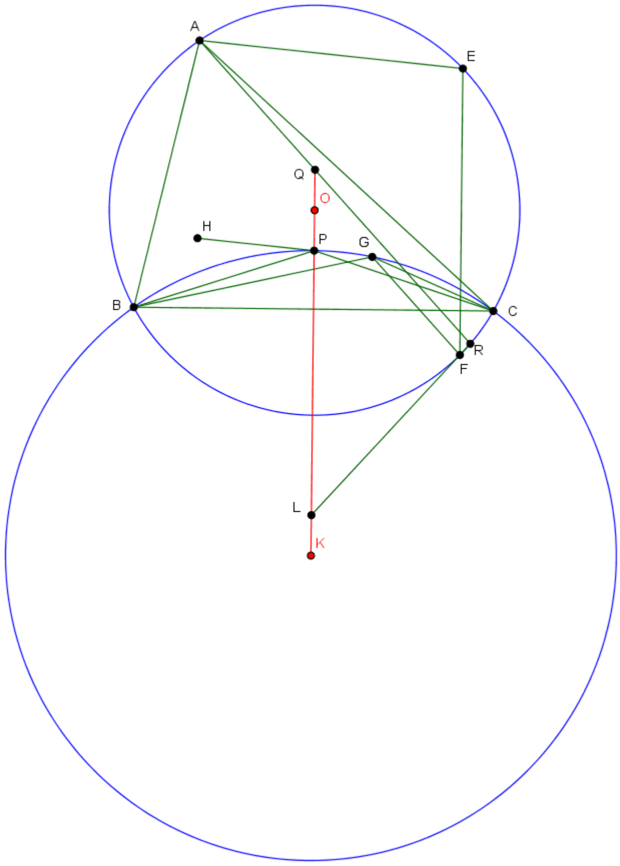
Bài 3

$\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) có H là trực tâm. P là một điểm nằm trên trung trực của BC và nằm trong $\triangle ABC$. Đường thẳng qua A song song PH cắt (O) tại E khác A. Đường thẳng qua E song song AH cắt (O) tại F khác E. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua O. Đường thẳng qua F song song với AQ cắt PH tại G.

1. Chứng minh rằng B, C, P, G cùng thuộc một đường tròn tâm K.
2. AQ cắt (O) tại R khác A. PQ cắt FR tại L. Chứng minh $KL = OP$.

(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)

Lời giải



1. AH cắt (O) tại điểm thứ hai là A'. HG cắt BC tại F' Ta sẽ chứng minh F, F', A' thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{F'HA} = \widehat{F'A'H} = \widehat{EAH} = \widehat{FA'H}$ (vì $HP//AE$ và $AEFA'$ là

hình thang cân do $EF//AA'$), suy ra F, F', A' thẳng hàng. Khi đó, ta có: $\widehat{FGF'} = \widehat{QAE} = \widehat{FA'P}$ (dựa vào tính song song của gt và $AQPA'$ là hình thang cân), suy ra $PFGA'$ nội tiếp, nên theo tính chất phương tích thì $F'P.F'G = F'F.F'A' = F'B.F'C$, suy ra: $BPCG$ nội tiếp.

2. Gọi $A'F$ cắt trung trực của BC tại S. Theo định lý Reim ta có $QS//AA'$; $FRA'A$ nội tiếp nên $FRSQ$ nội tiếp.

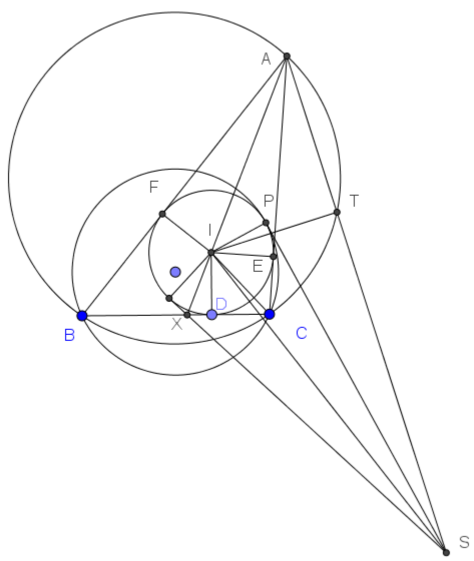
   - $LR.LF = LS.LQ = LO^2 - R^2$ (Phương tích của L tới (O) và $(QFRS)$) $\Leftrightarrow LS.LQ = LO^2 - R^2 \Leftrightarrow (LO - OS)(LO + OQ) = LO^2 - R^2 \Leftrightarrow LO(OQ - OS) - OS.OQ = -R^2 \Leftrightarrow LO.PS + OS.OQ = R^2$.
   - $OS = 2OM - OP; PS = 2OM - 2OP \Rightarrow 2.LO.OM - 2.LO.OP + 2OM.OP - OP^2 = R^2 \Leftrightarrow LO = R^2 + OP^2 - 2.OM.OP/2OM - 2OP$.
   - Ta có: $KP = \dfrac{CP}{2\sin PBC} = \dfrac{CP}{\frac{2PM}{CP}} = \dfrac{CP^2}{2PM}$. Vì $PM = OM - OP$ nên ta cần phải chứng minh $KP = LO$ hay $\Leftrightarrow R^2 + OP^2 - 2OM.OP = CP^2 \Leftrightarrow 2.R.OP.\cos A = 2OM.OP \Leftrightarrow R\cos A = OM$, luôn đúng.

Bài 4

$\triangle ABC$ nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại P. AI giao BC tại X. Tiếp tuyến qua X của (I) khác BC, giao tiếp tuyến tại (I) tại P tại S. AS giao (O) tại T khác A. Chứng minh rằng $\widehat{ATI} = 90^o$

(THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN)

Lời giải



Gọi T' là giao điểm của (AEF) với (O), D' là đối xứng của D qua AI, N là giao điểm các tiếp tuyến tại D', P của (I).

- Xét cực đối cực đối với đường tròn (I) thì PD', EF theo thứ tự là đường đối cực của N, A đối với (I). Theo kết quả quen thuộc thì P thuộc đường tròn Appolonius chia BC theo tỉ số $\dfrac{DB}{DC}$.
- Gọi S là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống EF. Ta có $\widehat{SPE} = \widehat{EPF} - \widehat{DPF} - \widehat{(EF,BC)} = \widehat{DPF}$ nên PS đi qua D'. Mặt khác do (BIC) tiếp xúc (AEF) nên tiếp tuyến tại I, AT', BC đồng quy. Từ đó suy ra AT' là đường đối cực của S đối với (I), do đó AT' đi qua N suy ra $T \equiv T'$ suy ra $\widehat{ATI} = 90°$.

Bài 5

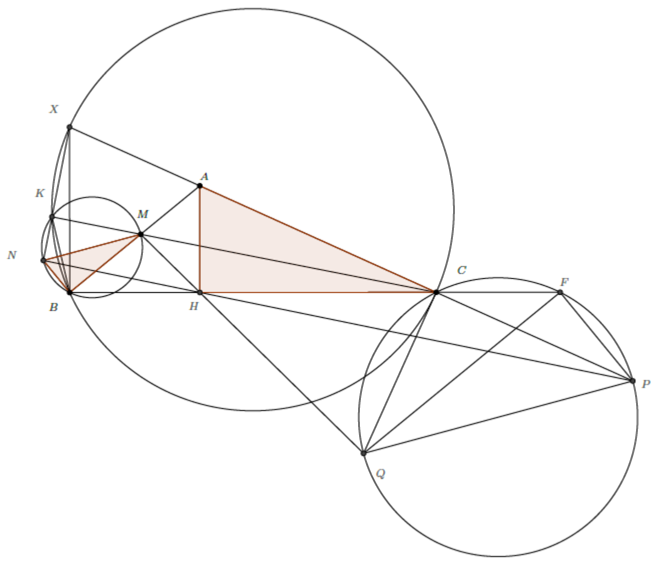
$\triangle ABC$ có $\widehat{BAC}$ tù, $AH \perp BC$ $H \in BC$. Điểm M thay đổi trên cạnh AB. Dựng điểm N sao cho $\triangle BMN \sim \triangle HCA$ (H và N khác phía đối với AB).

1. CM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMN$ tại K khác M. Chứng minh đường thẳng NK luôn đi qua một điểm cố định.
2. NH cắt AC tại P. Dựng Q sao cho $\triangle HPQ \sim \triangle HNM$ (Q và M khác phía so với PN). Chứng minh Q thuộc một đường thẳng cố định.

(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)

Lời giải

Chúng tôi xin trích đăng lời giải của thầy Nguyễn Tăng Vũ (trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM).



1. Gọi X là giao điểm của đường thẳng vuông góc với BC tại B và đường thẳng AC, K' là giao điểm của NX và CM. $\triangle BMN \sim \triangle BCX$ nên có một phép vị tự quay tâm B biến M thành N, biến C thành X. Vì K' là giao điểm của CM và NX nên K' thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMN$ hay K trùng K'. Vậy NK luôn đi qua điểm X cố định.

2. Xét phép vị tự tâm H biến N thành P, biến M thành Q, biến B thành F. Có $\triangle BMN \sim \triangle FQP \Rightarrow \widehat{FQP} = \widehat{BMN} = \widehat{ACB} = \widehat{FCP} \Rightarrow$ Tứ giác $CFPQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QCP} = \widehat{QFP} = \widehat{MBN} = 90^o \Rightarrow Q$ thuộc đường thẳng qua C vuông góc với AC cố định.

Bài 6

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Đường tròn (I) có tâm I thuộc BC và tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F.Llấy hai điểm M, N bên trong tứ giác $BCEF$ sao cho tứ giác $EFNM$ nội tiếp (I) và các đường thẳng BC, MN, EF đồng quy. MF cắt NE tại P, AP cắt BC tại D.

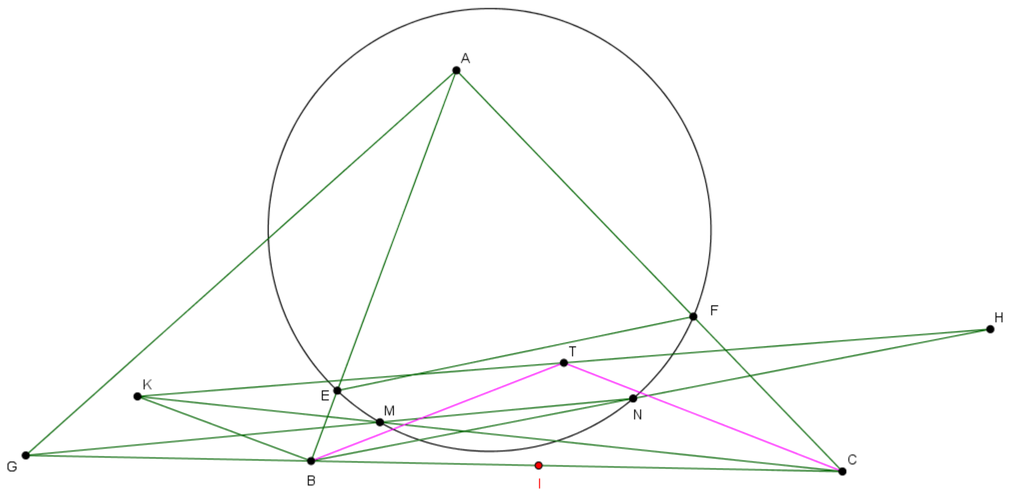
1. Chứng minh A, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2. Trên đường thẳng BN, CM lấy các điểm H, K sao cho $\widehat{ACH} = \widehat{ABK} = 90^o$. Lấy T là trung điểm HK. Chứng minh $TB = TC$.

(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)

Lời giải

Chúng tôi xin trích đăng lời giải của thầy Nguyễn Tăng Vũ (trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM).



Các bổ đề dùng trong bài như sau:

Bổ đề 7 *Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm Q nằm ngoài đường tròn. Cát tuyến qua Q cắt (O) tại M, N. Tiếp tuyến tại M, N cắt nhau A, vẽ $AD \perp OQ$. Khi đó $OD.OQ = R^2$.*

Bổ đề 8 (Định lý Brocard) *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, I lần lượt là giao điểm của AD và BC, AB và CD, AC và BD. Khi đó $PI \perp OQ$ và nếu D là giao điểm của PI và OQ thì $OD.OQ = R^2$.*

Bổ đề 9 (Định lí Desargue) *Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AB và $A'B'$, AC và $A'C'$, BC và $B'C'$. Khi đó M, M, P thẳng hàng $\Leftrightarrow AA', BB', CC'$ đồng quy.*

Bổ đề 10 *Cho $\triangle ABC$, hai tia Ax, Ay đối xứng nhau qua phân giác trong góc A. Gọi H, K là hình chiếu của B trên Ax, Ay; P, Q là hình chiếu của C trên Ax, Ay. Khi đó H, K, P, Q cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm BC.*

Chứng minh các bổ đề trên xin dành cho bạn đọc.

1. Gọi D' là hình chiếu của A trên BC. Theo bổ đề 7, ta có $ID'.IQ = R^2$.
Gọi $X, D"$ là giao điểm của ME và NF, XP và BC thì $XP \perp BC$ và $ID".IQ = R^2 \Rightarrow D' \equiv D" \Rightarrow X, A, P, D$ thẳng hàng và tứ giác $EFID$ nội tiếp.

2. Gọi S là giao điểm của BM và CN. Áp dụng định lí Desargue cho hai tam giác PEF và SBC ta được A, P, S thẳng hàng $\Rightarrow S \in AD$. Chứng minh được $\widehat{BAK} = \widehat{CAH} \Rightarrow AK, AH$ đối xứng nhau qua phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Đến đây theo bổ đề 10, trung điểm của HK cách đều BC và ta có đpcm.

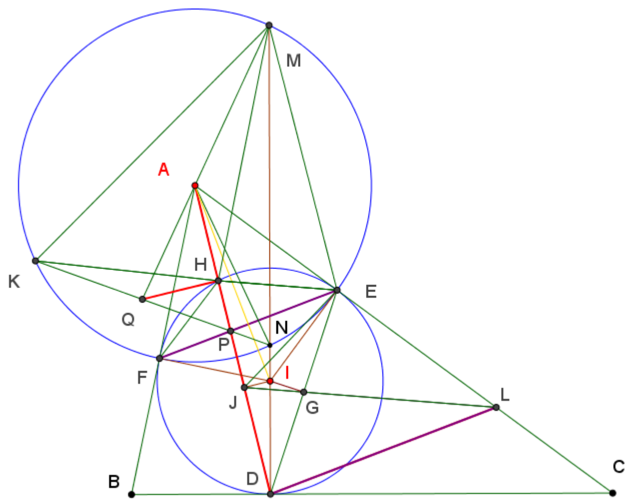
Bài 7

Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng DI cắt đường tròn tâm A bán kính AE tại M, N (N nằm giữa M và D). Các đường thẳng AD, EF cắt nhau tại P. các đường thẳng MA, NP cắt nhau tại Q. Gọi H là giao điểm thứ hai của AD và (I). Đường thẳng qua trung điểm của DH, DE cắt AC tại L. Chứng minh rằng:

1. $QH \perp AD$.

2. $DL//EF$.

(THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội)



Lời giải

1. Ta có
$$AM^2 = AE^2 = \overline{AH}.\overline{AD} \Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle ADM \Rightarrow \widehat{QMH} = \widehat{ADM} \quad (4.1)$$

Gọi giao điểm của QN và đường tròn bán kính AE là K. Ta có:

$$\overline{PN}.\overline{PK} = \overline{PH}.\overline{PD} \Rightarrow \text{ Tứ giác } KHND \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{NDH} = \widehat{NKE} = \widehat{QKH} = \widehat{NME}. \tag{4.2}$$

Từ (4.1) và (4.2) suy ra: $\widehat{QKH} = \widehat{QMH}$ và $AD//ME \Rightarrow$ Tứ giác $KQHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AQH} = \widehat{MKE} = \dfrac{\widehat{MAE}}{2} = 90^o - \widehat{AME} = 90^o - \widehat{QAH} \Rightarrow QH \perp AD$ (đpcm).

2. Gọi J, G lần lượt là trung điểm HD, ED thì $HE//JG//JL$.
   Ta cần chứng minh sau để suy ra kết quả đề bài: $\widehat{HEF} = \widehat{JLD}$. Thật vậy,

$$\widehat{AEH} = \widehat{ALJ} = \widehat{ADE} \Rightarrow JDLE \text{ là tứ giác nội tiếp } \Rightarrow \widehat{JLD} = \widehat{JED}. \tag{4.3}$$

Ngoài ra,

$$180^o - \widehat{EJD} = \widehat{AJE} = \widehat{AFE} = \widehat{FDE} = 180^o - \widehat{EHF} \Rightarrow \widehat{EJD} = \widehat{EHF}$$

mà

$$\widehat{HFE} = \widehat{HDE} \Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{JED}. \tag{4.4}$$

Từ (4.3) và (4.4) ta suy ra điều phải chứng minh.

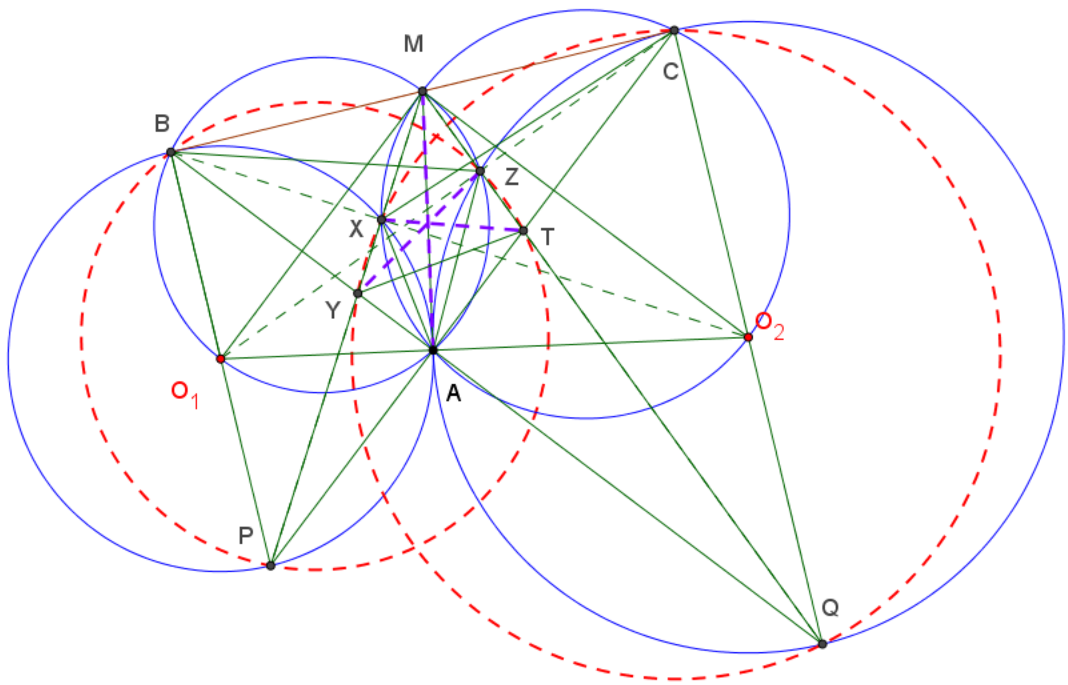
Bài 8

Hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại A. BC là một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2), với $B \in (O_1)$ và $C \in (O_2)$. Gọi M là trung điểm BC, P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua O_1, O_2. MP theo thứ tự cắt BO_2, BA tại X, Y. MQ cắt CO_1, CA tại Z, T. Chứng minh rằng:

1. Các tứ giác $BZTP, CXYQ$ nội tiếp.
2. AM, ZT, XY đồng quy.

(THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội)

Lời giải



1. Giả sử MQ giao với (O_2) tại Z', ta chứng minh $Z \equiv Z'$. Dễ thấy $P \in (O_1), Q \in (O_2), BP//CQ$.

    - Dễ chứng minh M nằm trên trục đẳng phương của $(O_1),(O_2) \Rightarrow AM \perp O_1O_2$. Khi đó $MB^2 = MC^2 = \overline{MZ'}.\overline{MQ} \Rightarrow \triangle MBZ' \sim \triangle MQB \Rightarrow \widehat{MBZ'} = \widehat{Z'QA}$. Mà theo tính chất tiếp tuyến, ta có: $\widehat{MCZ'} = \widehat{CQZ'} = \widehat{CAZ'} \Rightarrow \widehat{BZ'A} = 360^o - \widehat{BZ'C} - \widehat{AZ'C} = 2.(180^o - \widehat{Z'CA} + \widehat{Z'AC}) = 2.(180^O - \widehat{CQA}) = 180^O - (180^O - 2.\widehat{ABO_1}) = 180^O - \widehat{BO_1A} \Rightarrow BZ'AO_1$ là tứ giác nội tiếp. Từ đây dễ dàng suy ra được: $\widehat{O_1ZA} = \widehat{AQC} = 180^o - \widehat{AZC} \Rightarrow O_1, Z, C$ thẳng hàng $\Rightarrow Z' \equiv Z$ Kết hợp với trên suy ra $BZAO_1$ là tứ giác nội tiếp. Chứng minh tương tự: CO_2XA là tứ giác nội tiếp.

    - $BZ'AO_1$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ZBO_1} = \widehat{ZAO_2} = 180^O - \dfrac{\overset{\frown}{ZC} + \overset{\frown}{AQ}}{2} = 180^o - \widehat{ZTA} \Rightarrow$ $BZTP$ là tứ giác nội tiếp. Chứng minh tương tự, $CXYQ$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì $BZ'AO_1$ là tứ giác nội tiếp nên dễ chứng minh được rằng: $MQ \perp O_1C$. Tương tự: $BO_2 \perp MP$.

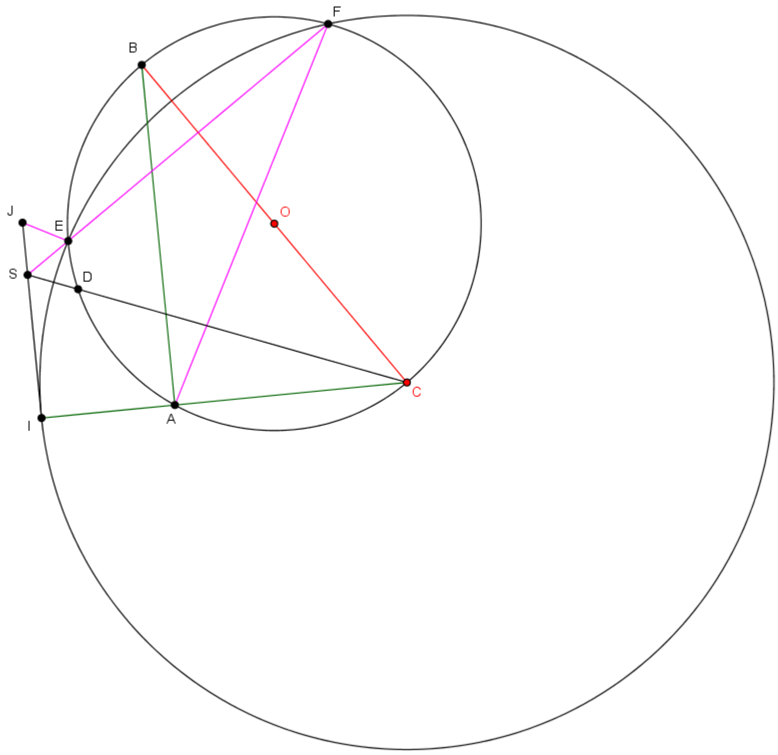
Bài 9

$\triangle ABC$ vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua A song song BC cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua I song song AB cắt AD tại J. Đường tròn tâm C bán kính CI cắt (O) tại E và F (E thuộc cung BAC.

1. Gọi S là giao điểm của IJ với CD. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.
2. Chứng minh $EJ \perp AF$.

(THPT chuyên ĐH Vinh)

Lời giải



1. $SI \perp AC$ và $ID \perp SD$ nên $SI2 = SD * SC \Rightarrow S$ thuộc trục đẳng phương của (O) và $(C) \Rightarrow S, E, F$ thẳng hàng.
2. Dễ thấy $\triangle SJD$ cân với trung trực $SE \Rightarrow \widehat{JEF} = \widehat{DEF} = \widehat{DAF}$ và $SE \perp AD \Rightarrow AF \perp EJ$.

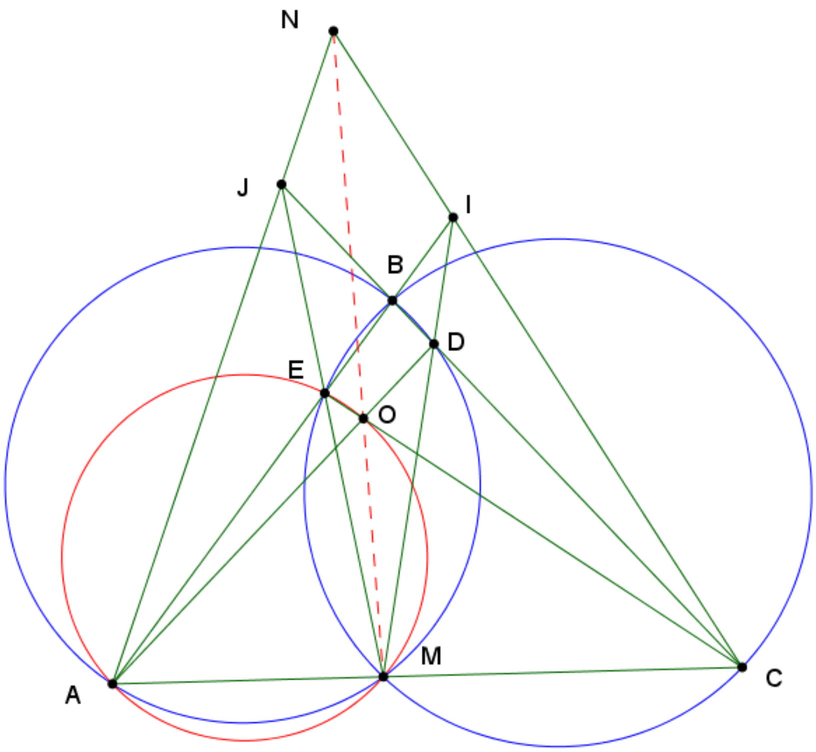
Bài 10

$\triangle ABC$ có M di chuyển trên cạnh AC. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ cắt cạnh BC tại điểm thứ hai là D. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCM$ cắt cạnh AB tại điểm thứ hai là E.

1. Gọi O là giao điểm của AD và CE. Chứng minh A, E, O, M cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi I, J, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DM, BC và EM, AJ và CI. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định.

(THPT chuyên ĐH Vinh)



Lời giải

1. $\widehat{AEC} = \widehat{AMB} = \widehat{ADB} \Rightarrow$ Tứ giác $BDOE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{ABC} = \widehat{AME} \Rightarrow$ tứ giác $AEOM$ nội tiếp.

2. Theo định lý Pappus có O, M, N thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{AMO} = \widehat{BEC} = \widehat{BMC} \Rightarrow$ MN luôn đi qua điêm đối xứng của B qua AC. Ta có đpcm.

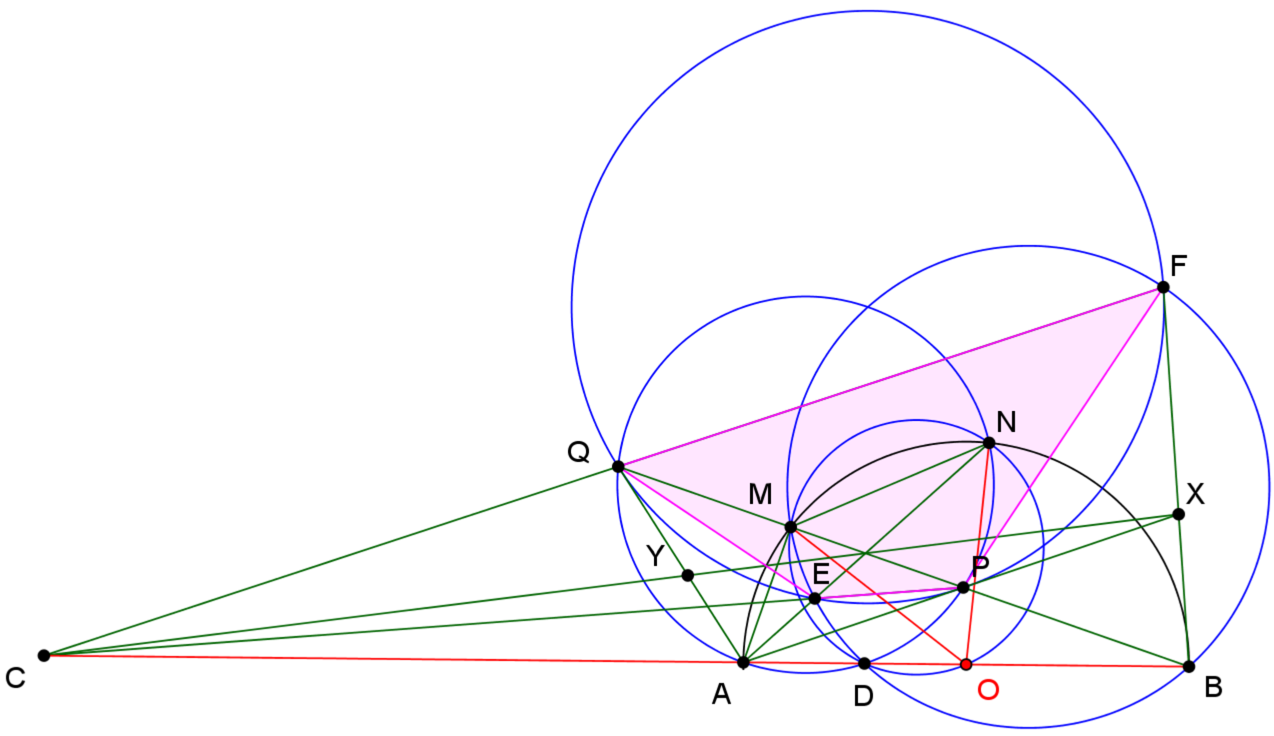
Bài 11

Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM < AN$ và MN không song song với AB. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ cắt AB tại điểm D khác O. Đường thẳng AN cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle MBD$ tại hai điểm E, F (E nằm giữa A và N). Đường thẳng BM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle NAD$ tại hai điểm P, Q (P nằm giữa B và M).

1. Chứng minh E, F, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
2. Đường thẳng AP cắt BE tại điểm X, đường thẳng BE cắt AQ tại điểm Y. Chứng minh bốn đường thẳng EP, QF, XY, AB đồng quy.

(Bà Rịa - Vũng Tàu)

Lời giải



1. Dùng phương tích.
2. EP cắt QF tại U, PF cắt EQ tại V, AN cắt BM tại T. Khi đó UV là đường đối cực của T đối với $(EFPQ)$.
   - (ADN) cắt (BDM) tại $K \Rightarrow T$ là trực tâm của $\triangle KAB \Rightarrow TD \perp AB$. Từ đây được $(ATEF) = (BTPQ) = -1$ (1) $\Rightarrow A, B$ thuộc đường đối cực của T đối với $(EFPQ) \Rightarrow A, B, U, V$ thẳng hàng. Ngoài ra , từ (1) $\Rightarrow AB, PE, QF$ đồng quy tại U.
   - AQ cắt BF tại H áp dụng định lý Desargues cho 2 tam giác AQE BPF được H V T thẳng hàng.

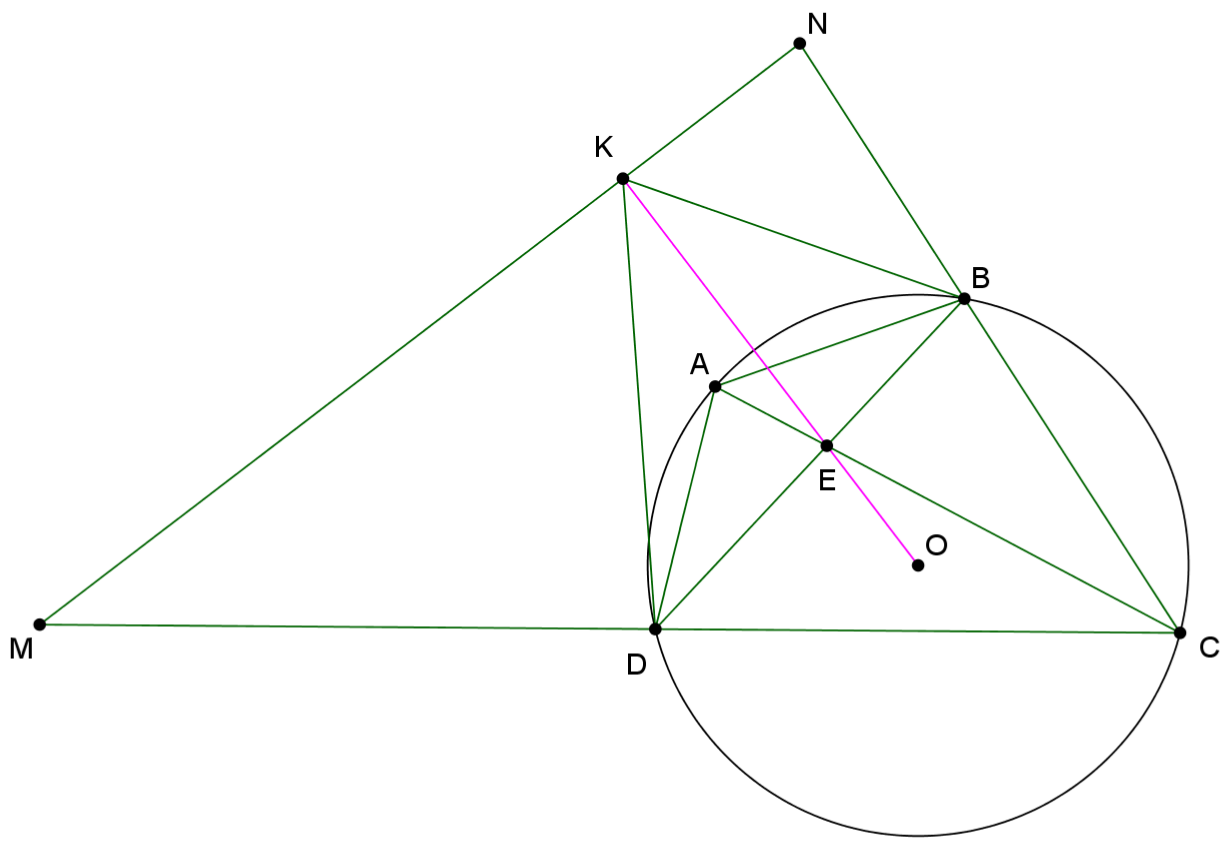
- AP cắt BE tại Z. Có $(UVAB) = -1 \Rightarrow T, Z, V$ thẳng hàng $\Rightarrow T, Z, V, H$ thẳng hàng. Áp dụng định lý Desargues cho 2 tam giác AEY và $BPX \Rightarrow AB, PE, XY$ đồng quy. Từ đó ta có đpcm.

Bài 12

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử AD cắt BC tại N, AB cắt CD tại M, AC cắt BD tại E. Đường thẳng OE cắt MN tại K. Chứng minh KO là phân giác của $\widehat{BKD}$.

(Bắc Ninh)

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BD và MN thì $(B, D, E, T) = -1$.
Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác toàn phần $ABCDMN \Rightarrow OK \perp MN$, do đó EK là phân giác góc $\widehat{BKD}$.

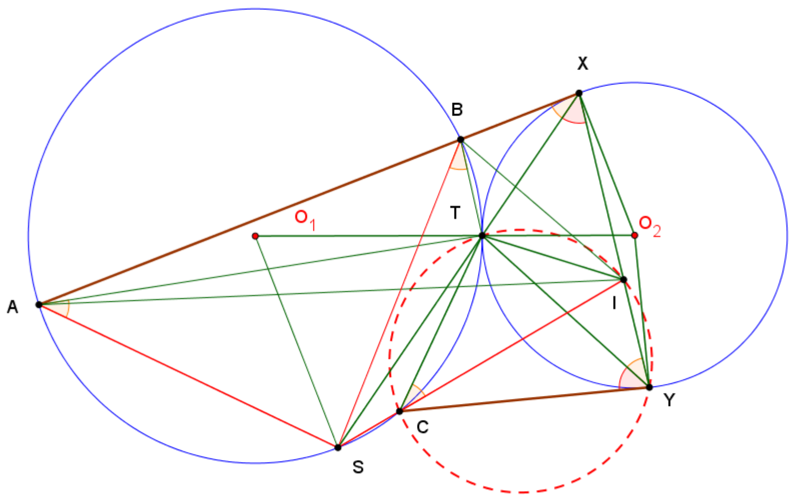
Bài 13

Cho đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài tại điểm T. Một đường thẳng cắt đường tròn (O_1) tại hai điểm A,B phân biệt và tiếp xúc với (O_2) tại X. đường thẳng XT cắt (O_1) Tại S (S khác T và C là một điểm trên cung TS không chứa A và B. Cho CY là tiếp tuyến của (O_2) tại Y sao cho các đoạn thẳng CY và ST không cắt nhau. Cho I là giao điển của các đường thẳng XY và SC. Chứng minh rằng:

1. C,T,Y và I cùng thuộc một đường tròn.
2. $SA = SI$

(Bến Tre)

Lời giải



1. Vì $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài nhau tại T nên dễ dàng chứng minh được: $\widehat{SO_1T} = \widehat{TO_2X} \Rightarrow \widehat{TAS} = \widehat{TYX} = \widehat{TYI}$. Mà: $\widehat{TAS} = \widehat{TCI}$ (Do C thuộc cung TS không chứa AB và theo tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{TCI} = \widehat{TYI} \Rightarrow TCIY$ là tứ giác nội tiếp.

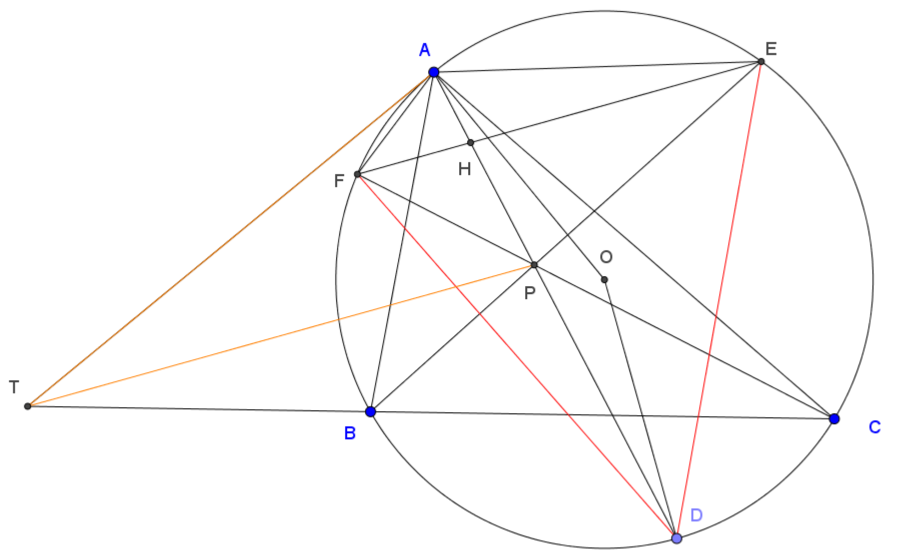
2. Dễ chứng minh: $O_1S//XO_2$, mà $XO_2 \perp AB \Rightarrow SO_1 \perp AB \Rightarrow SA = SB$.
   Ta lại có: $\widehat{TIS} = \widehat{TIC} = \widehat{TYC} = \widehat{TXI}$, mà $\widehat{TSI} = \widehat{XSI} \Rightarrow \triangle STI \sim \triangle SIX \Rightarrow SI^2 = ST.SX$.
   Ta có: $\widehat{TBS} = \widehat{TAS} = \widehat{TCI} = \widehat{TYI} = \widehat{BXS}$, mà: $\widehat{BST} = \widehat{BSX} \Rightarrow\Rightarrow \triangle STB \sim \triangle SBX \Rightarrow SB^2 = ST.SX$.
   TỪ ba điều trên suy ra $SA = SI$.

Bài 14

$\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong $\triangle ABC$ sao cho PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $TA = TP$ thì $DE = DF$.

(Bình Dương)

Lời giải



Gọi giao điểm của EF và AD là H. Yêu cầu đề bài tương đương với chứng minh $\triangle DEF$ cân tại D, hay $OD \perp FE$.
Dễ dàng chứng minh được: $TP \perp OD$ nên điều trên sẽ đúng nếu ta chứng minh được $TP//FE$. Thật vậy, $TP^2 = TA^2 = TB.TC \Rightarrow \triangle TBP \sim \triangle TPC \Rightarrow \widehat{TBP} = \widehat{TPC} \Rightarrow \widehat{FPT} = 180^o - \widehat{TPC} = \widehat{PBC} \Rightarrow \widehat{APT} = \widehat{FPT} + \widehat{APF} = \widehat{PBC} + \widehat{APF} = \dfrac{\overset{\frown}{EC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AF}}{2} = \widehat{AHF}$. Theo tính chất hai góc đồng vị, ta có đpcm.

Bài 15

Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B. trên tia BA lấy M (M nằm ngoài (O')). Từ M Kẻ 2 tiếp tuyến MC, MD của (O') (C, D là 2 tiếp điểm). AC, AD lần lượt cắt (O) tại P, Q.

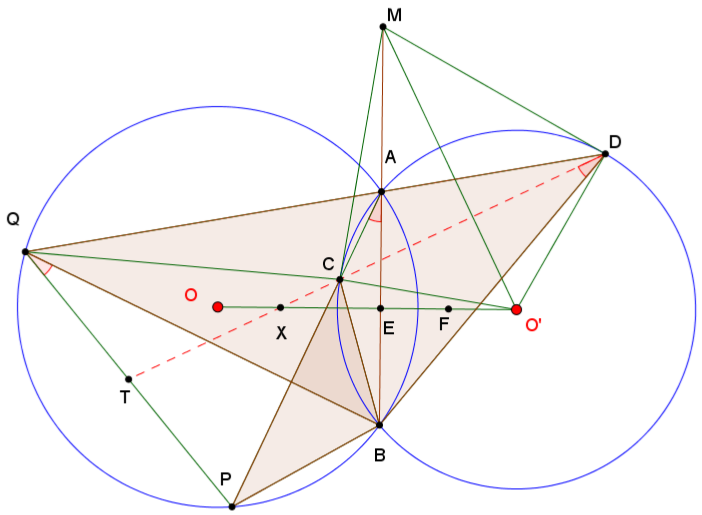
1. Chứng minh $\dfrac{DA}{DQ} = \dfrac{CA}{CP}$.

2. Chứng minh C đi qua trung điểm PQ.

3. Chứng minh CD đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên tia BA.

(Bình Định)

Lời giải



1. Dễ dàng chứng minh được $\begin{cases} \triangle PBC \sim \triangle QBC \Rightarrow \dfrac{QD}{PC} = \dfrac{BD}{BC} \\ \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{DA}{DQ} = \dfrac{CA}{CP}$ (đpcm).

2. Giả sử CD giao với PQ tại T, ta cần chứng minh $TP = TQ$.
   Xét tam giác QAD có T, C, D thẳng hàng. Theo định lý Menelaus, ta có
   $$\frac{TQ}{TP}.\frac{DA}{DQ}.\frac{CP}{CA} = 1.$$
   Kết hợp với kết quả câu 1, ta có: $TQ = TP \Rightarrow$ (đpcm).

3. Gọi giao điểm của CD, AB với O_1O_2 lần lượt là X, E. Trung điểm EO' là F. Ta chứng minh X cố định. Thật vậy, dễ thấy: O', E, F cố định.
   Ta có: $O'X^2 = CO'^2 - CM^2 + MX^2 = CO'^2 - \overline{MA}.\overline{MB} + ME^2 + EX^2 = CO'^2 - ME^2 + EA^2 + ME^2 + EX^2 = CO'^2 + EA^2 \Rightarrow XO'^2 - XE^2 = CO'^2 + EA^2 = 2.\overline{XF'}.\overline{EO'} \Rightarrow \overline{XF'} = \dfrac{CO'^2 + EA^2}{2.\overline{EO'}}$. Từ đây, ta có được X là điểm cố định.

Bài 16

Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và M là một điểm nằm trong giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với điểm M lần lượt qua các đường thẳng AI, BI, CI. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

(Bình Thuận)

Hướng dẫn

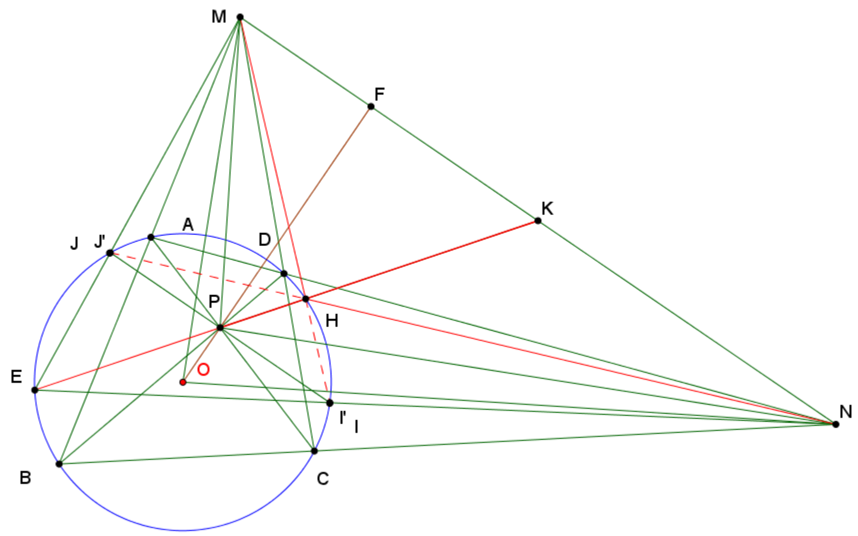
Áp dụng $Ceva - sin$ và các góc đối xứng.

Bài 17

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AB và CD, AC và BD. Lấy K là trung điểm của đoạn MN. Đoạn PK cắt (O) tại H, MH cắt (O) tại I khác H, NH cắt (O) tại J khác H. Hãy phân tích $\overrightarrow{PK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MJ}$.

(Bình Thuận)

Lời giải



Tước hết, ta cần chứng minh: P là trung điểm IJ.
Gọi giao điểm của tia PK với (O) là E $(E \neq H)$, bán kính của (O) là R, OP giao MN tại F.

Theo tính chất đối cực và định lý Brocard, ta có: $\begin{cases} P \text{ là trực tâm } \triangle MON \\ OF \perp MN \\ \overline{OP}.\overline{OF} = R^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{MF}.\overline{FN} = \overline{FP}.\overline{FO} = FO^2 - \overline{OP}.\overline{OF} = FO^2 - R^2$
$\Rightarrow FO^2 + FK^2 - R^2 = OK^2 - R^2 = \overline{MF}.\overline{FN} + FK^2 = MK^2 - FK^2 + FK^2 = MK^2$
$\Rightarrow KM^2 = \overline{KH}.\overline{KE} = KN^2$
Từ P ta kẻ đường vuông góc với OF giao (O) lần lượt tại hai điểm I', J', (I' nằm trên nữa mặt phẳng bờ EK chứa M). Ta chứng minh $I' \equiv I, J \equiv J'$.
Từ cách vẽ và do F nằm trên đường đối cực tương ứng với điểm P của (O), nên ta chứng minh được: $PJ' = PI', I'J' // MN, (KPHE) = -1$.

Ta có: $(KPHE) = -1$ nên $\dfrac{\overline{EK}}{\overline{EP}} = -\dfrac{\overline{HK}}{\overline{HP}}$.
Do $\overline{KH}.\overline{KE} = KN^2$; $\overline{PH}.\overline{PE} = PI'^2$, nên kết hợp với (4.5) ta sẽ chứng minh được tỉ số sau:

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{PI'}} \qquad (4.5)$$

Từ đây ta chứng minh được E, I', N thẳng hàng. Tương tự, E, J', M thẳng hàng.
Ngoài ra thì $KM^2 = \overline{KH}.\overline{KE}$ nên ta có: $\widehat{KMH} = \widehat{MEH} = \widehat{J'IH'}$. Mà $I'J' // MN$, nên M, H, I' thẳng hàng.
Từ đây dễ thấy: $I \equiv I'$. Tương tự: $J \equiv J'$. Mà P là trung điểm $J'I' \Rightarrow P$ là trung điểm IJ.
Vậy:

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HK} = \frac{\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{HM}}{2} = -\frac{\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NJ}}{2}$$

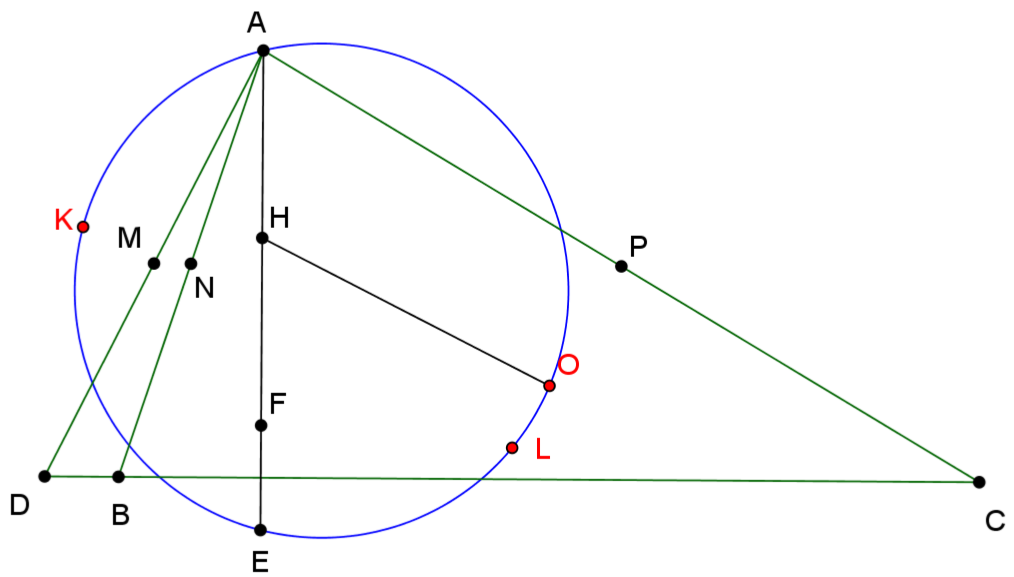
Bài 18

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), H là trực tâm tam giác. Đường thẳng qua A vuông góc OH cắt BC tại D. $K.L$ là tâm $(ADB), (ADC)$.

1. Chứng minh A, K, L, O thuộc một đường tròn gọi là (S).
2. AH cắt lại (S) tại $E.F$ đối xứng với E qua BC. Chứng minh $HA = HF$.

(Đà Nẵng)

Lời giải



1. Theo giả thiết thì
$$LK \perp AD, LO \perp AC \Rightarrow \widehat{KLO} = \widehat{DAC}. \tag{4.6}$$
Do $\triangle ADC$ có tâm nội tiếp K nên
$$\widehat{AKD} = 2\widehat{ABC} = \widehat{AOC} \Rightarrow \triangle KAD \sim \triangle OAC\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{KAD} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{DAC}. \tag{4.7}$$
Từ (4.6) và (4.7) $\Rightarrow AKLO$ nội tiếp (dpcm).

2. Gọi M, N, P là trung điểm của AD, AB, AC.
   - $AKMN$ nội tiếp do $\widehat{AMK} = \widehat{ANK} = 90^\circ$. Lại có $\widehat{AHO} = \widehat{ADC}$ do AH vuông góc DC, OH vuông góc $AD \Rightarrow \widehat{AHO} = \widehat{ADC} = \widehat{AMP} = \widehat{AMN} = \widehat{AKN} = \widehat{AKO} = \widehat{OEH} \Rightarrow \triangle OEH$ cân tại O.

- Đặt AH cắt (O) tại $Q \Rightarrow AE = HQ$. Lại có $H, Q; E, F$ đối xứng qua $BC \Rightarrow EH = FQ$. Vậy $AH = HF$.

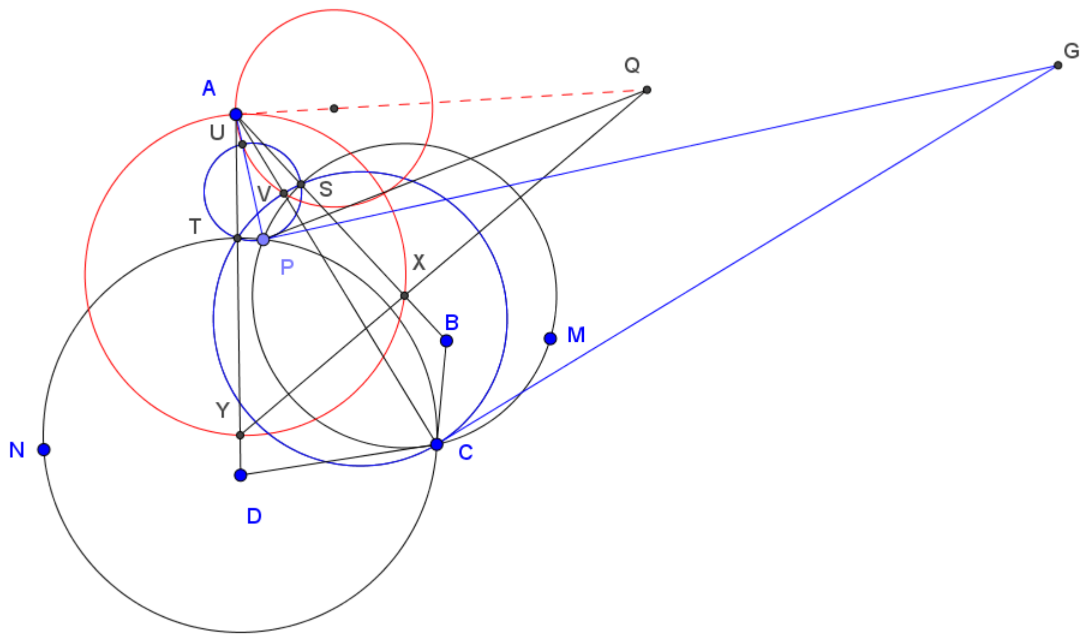
Bài 19

Cho tứ giác $ABCD$ lồi, P là điểm nằm bên trong tứ giác thỏa $\widehat{PAD} = \widehat{CAB}$.$M, N$ đối xứng C qua AB, AD. $(CPM), (CPN)$ cắt đoạn AB, AD tại S, T.X, Y tâm $(PSC), (PTC)$.Q là giao của XY và trung trực AP.

1. Chứng minh AQ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp $\triangle AXY$.
2. Tiếp tuyến tại P, C của $(PST), (CST)$ cắt nhau ở G.$(PST), (CST)$ cắt lại AP, AC ở U, V. Chứng minh tâm (AUV) thuộc AG.

(Đà Nẵng)

Lời giải



Lời giải

1. Vì Q là tâm của (APC) nên $\Rightarrow (QP, QX) \equiv (AP, AC)$
Ta chứng minh: $(PX, PQ) \equiv (YQ, YP) \pmod \pi \Leftrightarrow (PX, PC) + (PC, PQ) \equiv (YQ, YP) \pmod \pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} - (QP, QY) + (PX, PC) \equiv (YQ, YP) \pmod \pi$. Thật vậy, điều trên tương đương với

$$(PY, PC) \equiv (QP, QY) + (PC, PX) \pmod \pi \Leftrightarrow (PY, PC) \equiv (AP, AC) + (PC, PX) \pmod \pi$$

$$\Leftrightarrow (NP, NC) \equiv (AP, AC) + (MC, MP) \pmod \pi. \tag{4.8}$$

Dễ thấy rằng: AP là phân giác $\widehat{MAN}$ và $AM = AC = AN \Rightarrow (NA, NP) \equiv (MP, MA) \pmod \pi$

(4.8) $\Leftrightarrow (NP, NC)+(NA, NP) \equiv (AP, AC)+(MC, MP)+(MP, MA) (\bmod \pi) \Leftrightarrow (NA, NC) \equiv (AP, AC)+(MC, MA) (\bmod \pi) \Leftrightarrow (AP, AC) \equiv (NA, ND)-(AB, AM) \equiv (AD, AC)-(AD, AP) (\bmod \pi)$.
Vì điều trên hiển nhiên đúng, nên ta chứng minh được: $(PX, PQ) \equiv (YQ, YP) \pmod{\pi}$.
Từ đây ta chứng minh được: $QA^2 = QP^2 = \overline{QX}.\overline{QY}$.
Từ đây ta suy ra được đpcm.

Bài 20

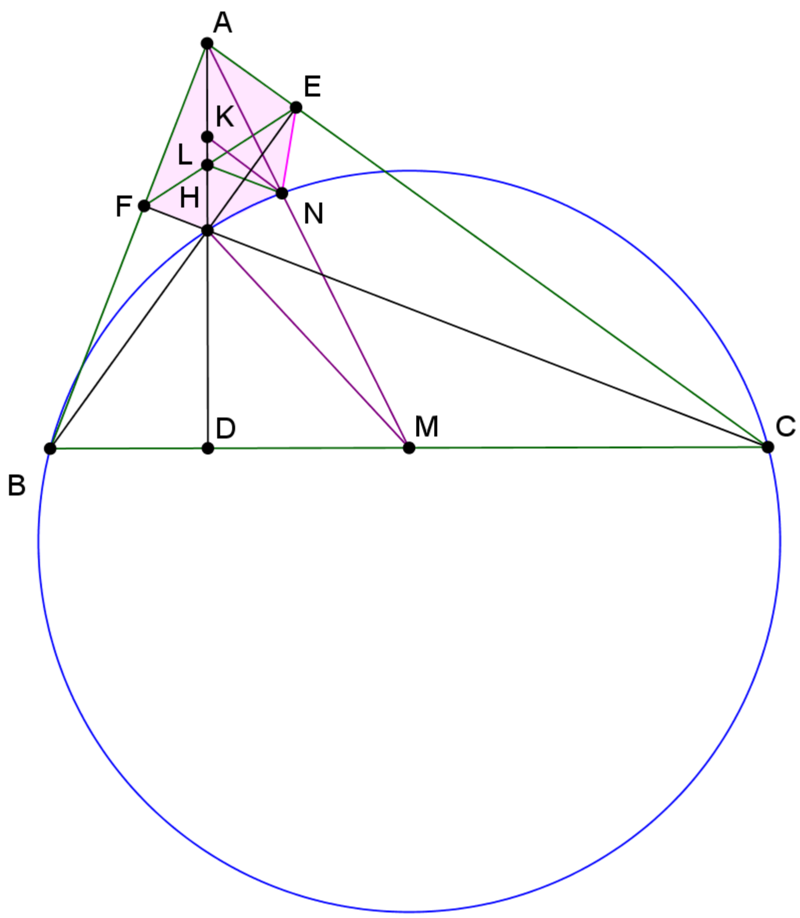
Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có M là trung điểm BC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm AH, L là giao điểm EF và AH, N là giao điểm của đoạn AM và đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCH$.

1. Chứng minh rằng 5 điểm A, E, N, H, F cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng $\widehat{HMA} = \widehat{LNK}$.

(Đồng Nai)

Lời giải



Gọi S là giao điểm của EF và BC, SH cắt AM tại N', ta chứng minh $N \equiv N'$.

- Định lý Brocard cho ta $SN' \perp AM$, do đó $N' \in (AHEF) \Rightarrow SH.SN' = SE.SF = SB.SC \Rightarrow N' \in (HBC) \Rightarrow N' \equiv N$ hay A, E, F, H, N đồng viên.

- Ta có $(AHLD) = -1$, K là trung điểm $AH \Rightarrow AK^2 = KH^2 = KL.KD = KN^2 \Rightarrow KN$ là tiếp tuyến tại N của $(LND) \Rightarrow \widehat{KNH} = \widehat{LDN} = \widehat{HMN}$.

Bài 21

Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\triangle ABC$ không đều. Chứng minh rằng
$$\widehat{AIO} \leq 90^0 \Leftrightarrow 2BC \leq AB + AC.$$

(Đồng Nai)

Lời giải

Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- $\widehat{BID} = \widehat{BAD} + \widehat{ABI} = \widehat{CAD} + \widehat{CBI} = \widehat{DBC} + \widehat{CBI} = \widehat{DBI} \Rightarrow DB = DI$. Dễ thấy $DB = DC$. Vậy có $DB = DC = DI$.

- Vì $ABDC$ là tứ giác nội tiếp nên theo định lý Ptolemy ta có $AD.BC = AB.DC + AC.BD = (AB + AC).DI \Rightarrow DI = \dfrac{AD.BC}{AB + AC}$.

- Vì tam giác AOD cân tại O nên $\widehat{AIO} \leq 90^0 \Leftrightarrow DI \leq \dfrac{AD}{2}$.

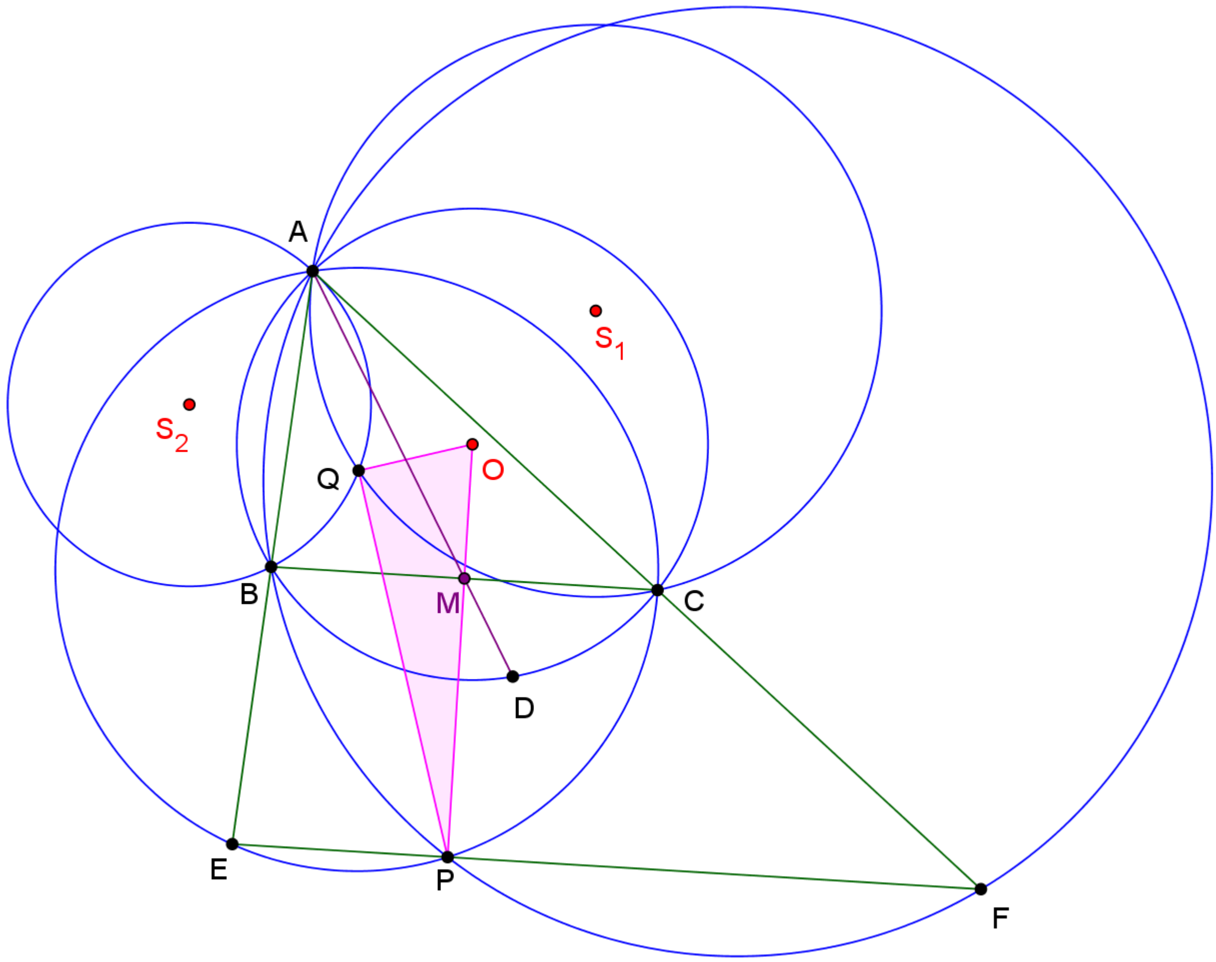
- Từ hai điều trên ta có $\dfrac{AD.BC}{AB + AC} \leq \dfrac{AD}{2} \Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB + AC} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow AB + AC \geq 2BC$.

Bài 22

$\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có trung tuyến AM. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E, đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F. ĐƯờng tròn ngoại tiếp $\triangle ABF$ cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACE$ tại điểm thứ hai P. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A, (S_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc AC tại A. (S_1) cắt (S_2) tại điểm thứ hai Q. Chứng minh $\triangle OPQ$ vuông.

(Hà Nội)

Lời giải



Gọi P' là giao điểm thứ hai của EF và (ABF).

- $EP'.EF = EA.EB = EC.ED \Rightarrow$ Tứ giác $DCFP'$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBD} + \widehat{EP'D} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $EBDP'$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CEP'} = \widehat{P'BF} = \widehat{P'AC} \Rightarrow$ Tứ giác $EACP'$ nội tiếp $\Rightarrow P \equiv P'$ và E, P, F thẳng hàng.
- Để ý rằng $\frac{EA}{EB}.\frac{CB}{CM}.\frac{DM}{DA} = 1$ và $\frac{FA}{FC}.\frac{BC}{BM}.\frac{DM}{DA} = 1$ nên $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FC}$ hay $BC//EF$.
- $\widehat{PBD} = \widehat{DEF} = \widehat{BCD} \Rightarrow PB$ là tiếp tuyến của (O). Tương tự, PC cũng là tiếp tuyến của (O).
- Gọi Q' là hình chiếu vuông góc của O trên AP. Ta có O, Q', B, C, P cùng thuộc đường tròn đường kính $OP \Rightarrow \widehat{ABQ'} = \widehat{ABC} - \widehat{Q'PC} = \widehat{ABC} - \widehat{APC} = \widehat{ABC} - \widehat{AEC} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \widehat{CEP} = \widehat{CAQ'} \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của (ABQ'), do đó $(ABQ') \equiv (S_2)$. Tương tự, $(ACQ') \equiv (S_1) \Rightarrow Q \equiv Q' \Rightarrow \triangle OPQ$ vuông tại Q.

Bài 23

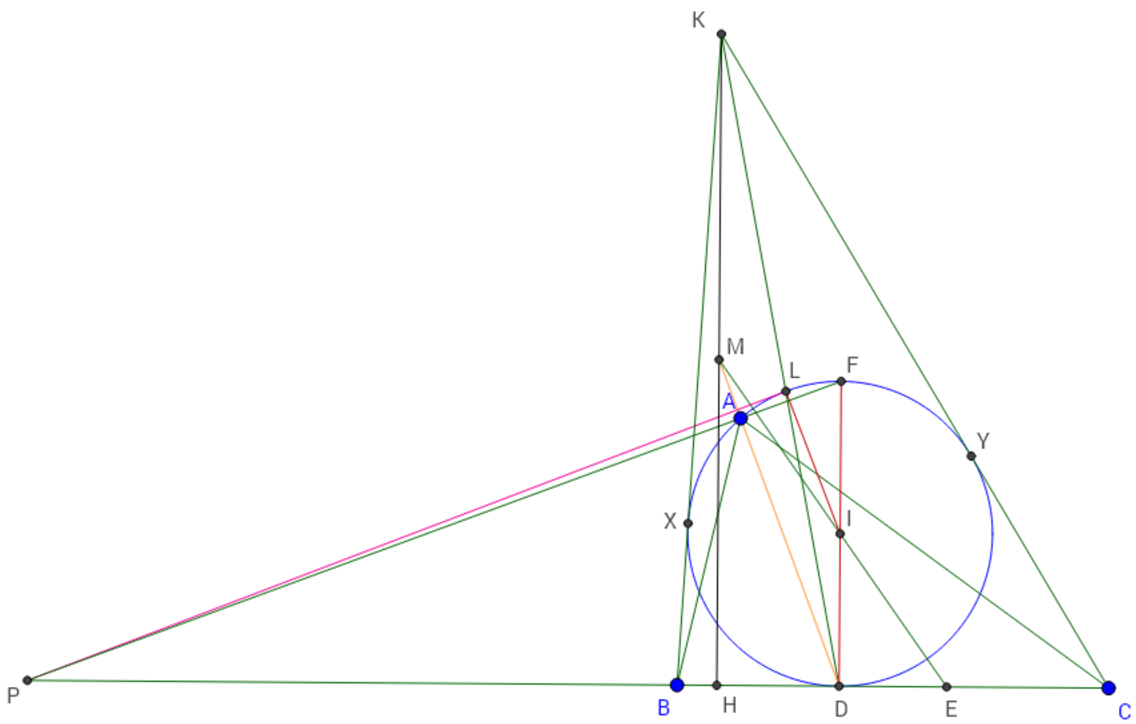
$\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có AD là phân giác trong đỉnh $A\,(D \in BC)$. E là điểm trên đoạn BC sao cho $BD = CE$. Phân giác ngoài đỉnh A cắt đường thẳng qua D và vuông góc với BC tại F. Gọi I là trung điểm DF, đường thẳng EI cắt AD tại M, đường thẳng EF cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại K.

1. Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại P, KD cắt đường tròn đường kính DF tại L khác D. Chứng minh đường thẳng PL tiếp xúc với đường tròn đường kính DF.

2. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle KBC$.

(Hải Phòng)

Lời giải



1. KM cắt BC tại H, ta có M là trung điểm HK và $HK // DF$ nên $(DP, DK, DA, DF) = 1$ hay $DALF$ là tứ giác điều hòa. Do PD tiếp xúc với (I) và $p \in AF$ nên PL tiếp xúc với (I).

2. Kẻ các tiếp tuyến KX, KY tới (I), KX cắt BC tại B', KY cắt BC tại C' (theo thứ tự trên đường thẳng là $PB'DC'$).

   - Do $DXLY$ là tứ giác điều hòa nên P, X, Y thẳng hàng.
   - Do (I) là đường tròn nội tiếp và tiếp xúc với các cạnh tam giác $KB'C'$ tại D, Y, X nên $KD, B'Y, C'X$ đồng quy. Từ đó suy ra $(PDB'C') = -1$.

- Ngoài ra với DF là đường kính đường tròn nội tiếp (I) của $\triangle KB'C'$ và thì ta có tính chất quen thuộc $B'D = C'E$. Vậy các cặp điểm B, C và B', C' cùng thỏa mãn hai điều kiện $(PDBC) = (PDB'C') = -1$ và $BD = CE, B'D = C'E$ nên dễ dàng suy ra $B \equiv B', C \equiv C'$ hay (I) nội tiếp $\triangle KBC$.

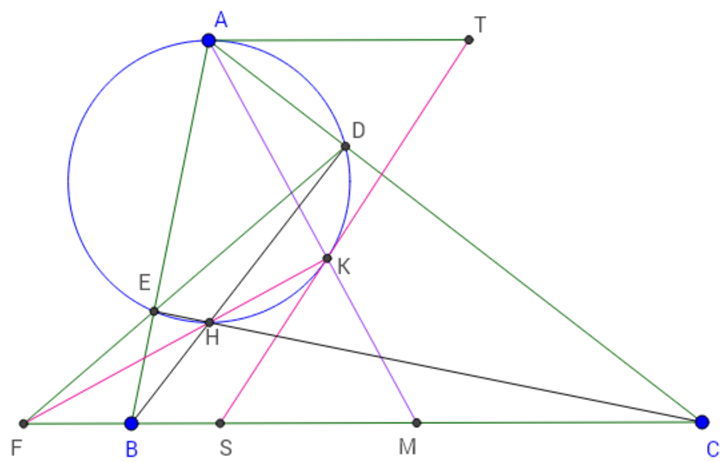
Bài 24

$\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có trực tâm H, D, E là chân các đường cao kẻ từ B và C xuống CA, AB. Gọi M là trung điểm BC, F là giao điểm của hai đường thẳng DE và BC, K là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (C) ngoại tiếp $\triangle ADE$.

1. Chứng minh F, H, K thẳng hàng.

2. Gọi S là trung điểm MF, T là giao điểm của đường thẳng DE với đường thẳng qua A và song song với BC. Chứng minh đường thẳng ST tiếp xúc với đường tròn (C).

(Hải Phòng)



Lời giải

1. Gọi giao điểm của đường tròn (ADE) với đường tròn (ABC) là G. Sử dụng tính chất tâm đẳng phương của $(ABC), (ADE), (BEDC)$, ta suy ra: AG, ED, BC đồng quy tại F. Từ đây, ta chứng minh được rằng: H, M, G thẳng hàng $\Rightarrow MH \perp AK$, mà $HK \perp AK \Rightarrow F, H, K$ thẳng hàng.

2. Gọi giao điểm của AM với DE là X, do $ADKE$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow F(MXKA) = -1 \Rightarrow F(CTMA) = -1$. Mà $AM//FC \Rightarrow T$ là trung điểm AM. Từ đây dễ chứng minh: S, K, T thẳng hàng. Mà ta lại có: $\widehat{FKS} = \widehat{KFS} = \widehat{HAK} \Rightarrow ST$ là tiếp tuyến của (C)

Bài 25

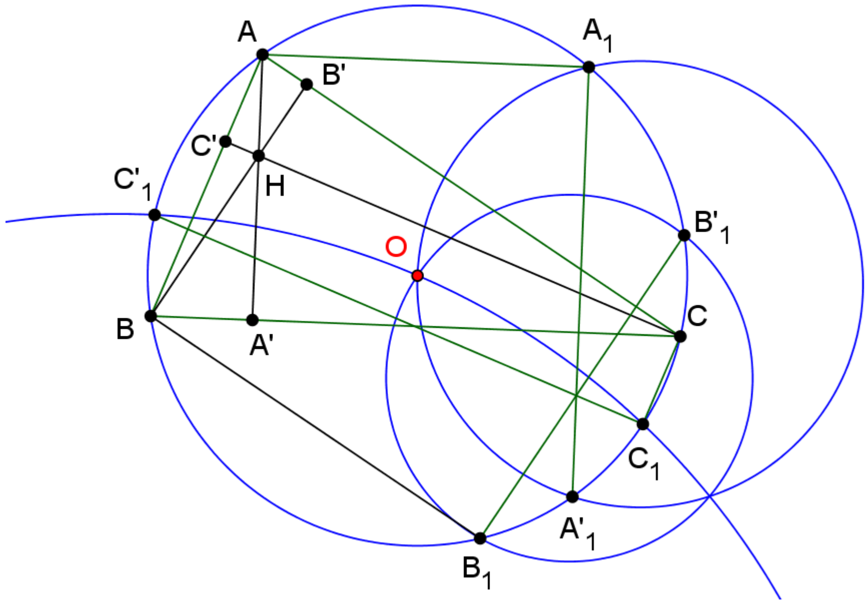
$\triangle ABC$ nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$, A', B', C' lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C xuống BC, CA, AB. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm trên (O) sao cho $AA_1//BC, BB_1//CA, CC_1//AB$. A'_1, B'_1, C'_1 là các điểm trên (O) sao cho $A_1A'_1//AA'$, $B_1B'_1//BB'$, $C_1C'_1//CC'$.

1. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $OA_1A'_1, OB_1B'_1, OC_1C'_1$ cùng đi qua một điểm K khác O.

2. Chứng minh $OK.OH = \dfrac{abc}{p}$, trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của $\triangle ABC$ và p là chu vi tam giác $A_1B_1C_1$.

(Hà Tĩnh)

Lời giải



1. $A_1A'_1 \perp BC \Rightarrow A_1A'_1 \perp B'_1C'_1$. Chứng minh tương tự suy ra $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$ đồng quy tại H' là trực tâm của tam giác $A'_1B'_1C'_1$. Mặt khác $H'A_1.H'A'_1 = H'B_1.H'B'_1 = H'C_1.H'C'_1$ nên OH' là trục đẳng phương của 3 đường tròn $(OA_1A'_1), (OB_1B'_1),, (OC_1C'_1)$. Do đó ba đường tròn $(OA_1A'_1), (OB_1B'_1), (OC_1C'_1)$ cùng đi qua điểm K khác O.

2. Dễ thấy tam giác $A'_1B'_1C'_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng tâm O nên a, b, c cũng là độ dài 3 cạnh của tam giác $A'_1B'_1C'_1$ và $OH = OH'$.
Gọi p' là chu vi của tam giác $A_2B_2C_2$. Vì $\triangle A_2B_2C_2$ là ảnh của tam giác $A'_1B'_1C'_1$ qua phép vị tự tâm H tỉ số $\dfrac{1}{2}$ nên $p' = \dfrac{P}{2}$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $OK.OH' = \dfrac{abc}{2p'}$.

Dễ thấy $OA'_1 \perp B_2C_2$ nên $S_{OB_2A'_1C_2} = \dfrac{R.B_2C_2}{2}$ trong đó R là bán kính của (O).

Chứng minh tương tự và cộng lại suy ra $\dfrac{abc}{4R} = S_{A'_1B'_1C'_1} = \dfrac{R.p'}{2} \Rightarrow \dfrac{abc}{2p'} = R^2$ Lại có:

$\widehat{OA_1A'_1} = \widehat{OA'_1A_1} = \widehat{OKA_1}$ nên OA_1 là tiếp tuyến của $(H'A_1K) \Rightarrow OK.OH' = OA_1^2 = R^2$

Do đó ta có điều phải chứng minh

Bài 26

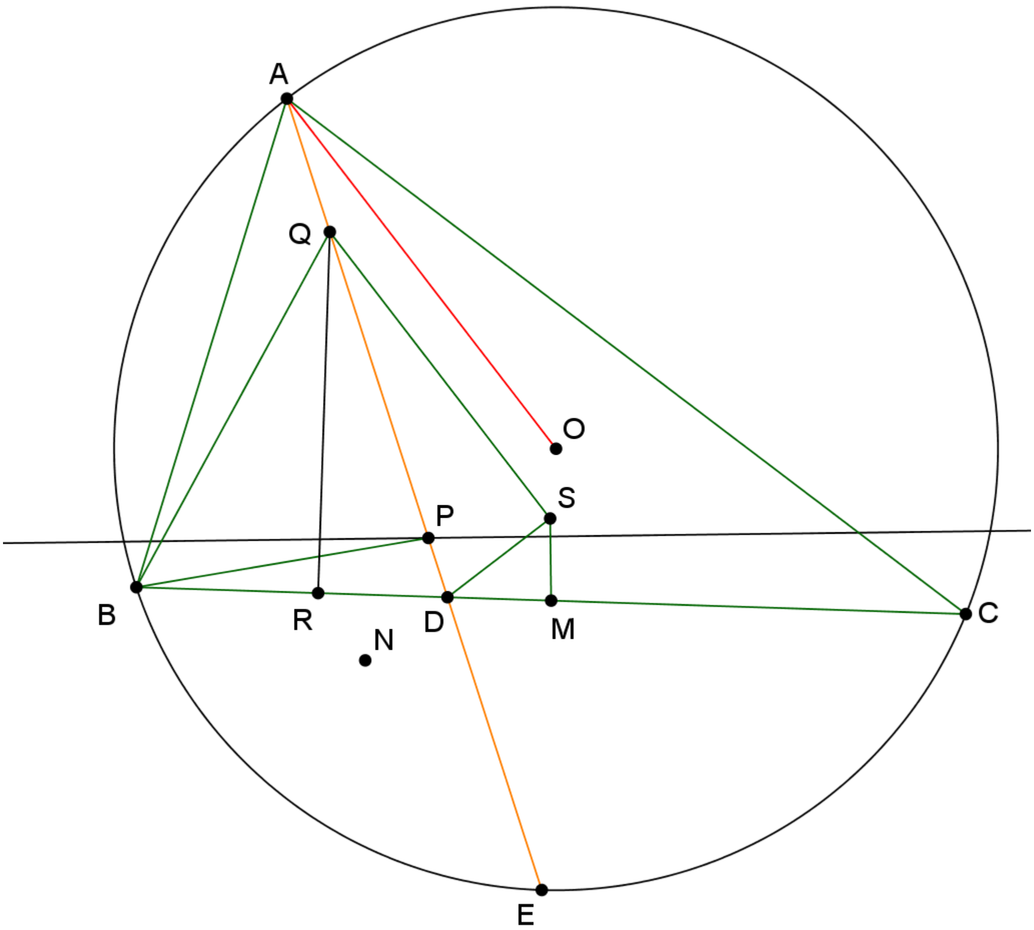
$\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O), E là trung điểm cung BC không chứa A. Gọi D là giao điểm AE và BC. P, Q lần lượt là hai điểm di động trên đoạn AD sao cho $\widehat{ABQ} = \widehat{DBP}$ và Q nằm giữa A, P. Lấy điểm S sao cho $QS//AO$ và $DS \perp AO$. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm đối xứng của M qua AE, R là hình chiếu vuông góc của Q lên BC.

1. Chứng minh $\dfrac{MN}{MR} = \dfrac{2ME}{QE}$.

2. Chứng minh đường thẳng qua P vuông góc SM đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

(Hà Tĩnh)

Lời giải



1. Gọi J là hình chiếu của M trên AE. Do tính đối xứng nên $MN = 2MJ$. Do đó bài toán quy về chứng minh $\frac{MJ}{MR} = \frac{EM}{EQ}$. Thật vậy, $QRJM$ nội tiếp nên $\widehat{JRM} = \widehat{EQM}$. Lại có $\widehat{RMJ} = \widehat{DEM}$. Do đó $\triangle RMJ \backsim \triangle QEM$ suy ra $\frac{MJ}{MR} = \frac{EM}{EQ}$ suy ra điều phải chứng minh.

2. Kẻ đường cao AL . Gọi U là hình chiếu của P trên BC

   - $AL.AO$ đẳng giác nên dễ suy ra QD là phân giác của $\widehat{RQS}$. Mà $DS \perp QS$ nên $DS = DR$ và R, S đối xứng qua A, E.
   - Gỉa sử EN cắt AL tại T. Do AE là phân giác của $\widehat{TAO}$ và $\widehat{TEO}$ nên dễ dàng suy ra O, T đối xứng qua A, E suy ra T cố định.
   - Bây giờ ta sẽ chứng minh $PT \perp SM \Leftrightarrow TS^2 - TM^2 = PS^2 - PM^2$. Nhưng vì $PS = PR, TS = OR$ (phép đối xứng trục AE) nên chỉ cần chứng minh $OR^2 - TM^2 = PR^2 - PM^2 \Leftrightarrow OM^2 + RM^2 - TM^2 = RU^2 - MU^2$. Thật vậy, $\Leftrightarrow TM^2 - OM^2 = RM^2 + MU^2 - RU^2 = (RM - RU)(RM + RU) + MU^2 = MU(RM + RU + MU) = 2MR.MU$. Chứng minh tương tự phần a ta cũng có: $\frac{MJ}{MU} = \frac{ME}{PE}$. Do đó $2MU.MR = 2MJ^2.\frac{EP.EQ}{ME^2}$. Bằng cộng góc dễ dàng chứng minh được EB là tiếp tuyến của (BPQ) nên $2MU.MR = \frac{2.MJ^2.EB^2}{ME^2}$ là số cố định nên ta chỉ cần chứng minh đẳng thức trên khi $P \equiv Q$ là tâm nội tiếp của tam giác.
   - Gọi tâm nội tiếp của tam giác là I và tiếp điểm trên BC là X Cần chứng minh
   $$TM^2 - OM^2 = 2MX^2,$$
   mà $TM^2 - OM^2 = TM^2 - TD^2 + OD^2 - OM^2 = ML^2 - DL^2 + DM^2 = DM(ML + DL + MD) = 2MD.ML$ nên chỉ cần chứng minh
   $$MD.ML = MX^2 \Leftrightarrow \frac{ML}{MD} = \frac{MX^2}{MD^2}.$$
   Mặt khác
   $$\frac{ML}{MD} = \frac{EA}{ED}$$
   và
   $$\frac{MX^2}{MD^2} = \frac{EI^2}{ED^2}$$
   nên chỉ cần chứng minh
   $$EI^2 = EA.ED,$$
   một tính chất quen thuộc.

   Vậy ta có đường thẳng qua P vuông góc với SM đi qua điểm T cố định.

Bài 27

Cho $\triangle ABC$ có tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $AN - AP = BP - BM = CP - CM$. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ANP, \triangle BPM, \triangle CMN$. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle XYZ$.

(Tp. HCM)

Lời giải

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I lên $BC, CA, AB \Rightarrow ID = IE = IF$ và $AE = AF, BD = BF, CD = CE$.

- $AN - AP = BP - BM = CM - CN \Rightarrow (AE + EN) - (AF - PF) = (BF + FP) - (BD - MD) = (CD + DM) - (CE - EN) \Rightarrow EN + PF = PF + MD = MD + EN \Rightarrow EN = MD = PF \triangle IEN = \triangle IFP = \triangle IDM \Rightarrow IN = IP = IM$.

- Tứ giác $AFIE$ nội tiếp $\Rightarrow$ Tứ giác $APIN$ nội tiếp. Ta có I là điểm chính giữa của cung PN không chứa A của đường tròn $(APIN)$ và X là tâm đường đường tròn nội tiếp $\triangle APN \Rightarrow IP = IN = IX$. Chứng minh tương tự ta có $IP = IM = IY$ và $IM = IN = IZ \Rightarrow IX = IY = IZ \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

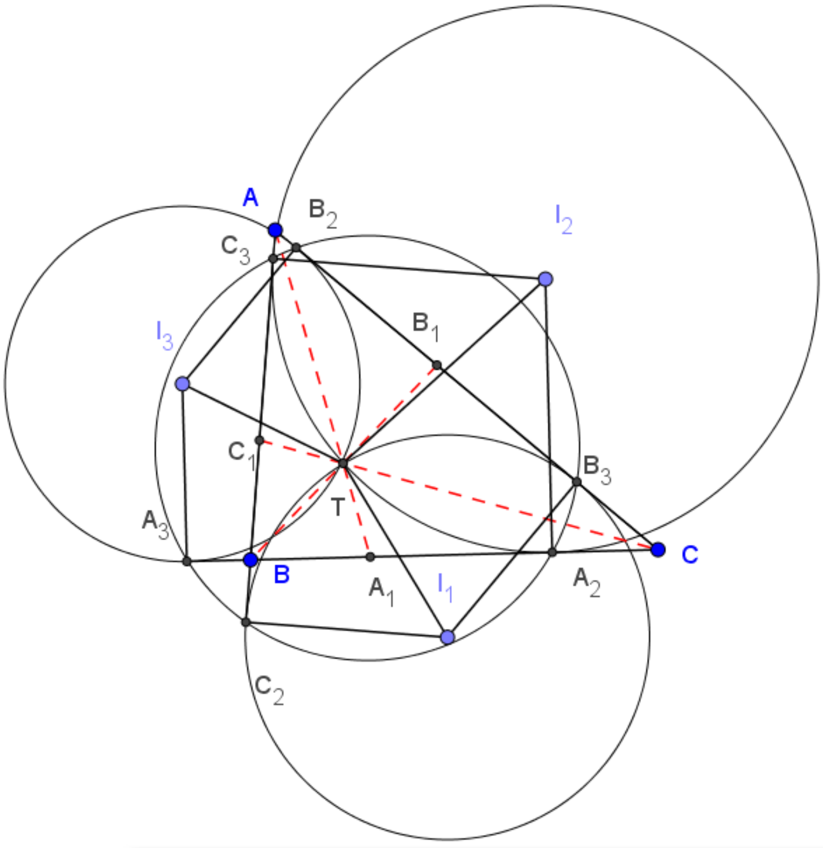
Bài 28

Đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1.

1. Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm T.
2. Đường tròn ω_1 đi qua T tiếp xúc với CA, CB tại B_2, A_3. Các điểm C_2, A_2, B_3, C_3 xác định tương tự. Chứng minh sáu điểm $A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ cùng thuộc một đường tròn.

(Tp. HCM)

Lời giải



1. Từ tính chất của đường tròn nội tiếp tam giác ta suy ra $\dfrac{A_1B}{A_1C}.\dfrac{B_1C}{B_1A}.\dfrac{C_1A}{C_1B} = 1$ nên AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

2. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

   - Do C là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(A_1B_1C_1)$ và (ω_1) nên C là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn này. Từ đó suy ra tồn tại phép vị tự tâm C biến đường tròn $(A_1B_1C_1)$ thành đường tròn (ω_2). Khi đó phép vị tự này cũng biến $\triangle A_1B_1C_1$ thành $\triangle A_3B_2T$. Từ đó suy được $A_1B_1 // A_3B_2, B_1C_1 // B_2T, C_1A_1 // TA_3$. Tương tự, $A_1B_1 // A_2T, B_1C_1 // TC_3, C_1A_1 // C_3A$ và $A_1B_1 // TB_3, B_1C_1 // B_3C_2, C_1A_1 // C_2T$. Từ đó ta suy ra các đường thẳng A_2B_3, B_2C_3, C_2A_3 cùng đi qua T và lần lượt song song với A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.
   - Tiếp theo để ý rằng đường phân giác CI của $\widehat{ACB}$ là đường trung trực của A_1B_1 mà $A_2B_3 // A_1B_1 // A_3B_2$ nên CI cũng là đường trung trực của A_2B_3 và A_3B_2, BI là trung trực của C_2A_3 và $C_3A_2 \Rightarrow IA_2 = IB_2 = IC_2 = IA_3 = IB_3 = IC_3 \Rightarrow A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 29

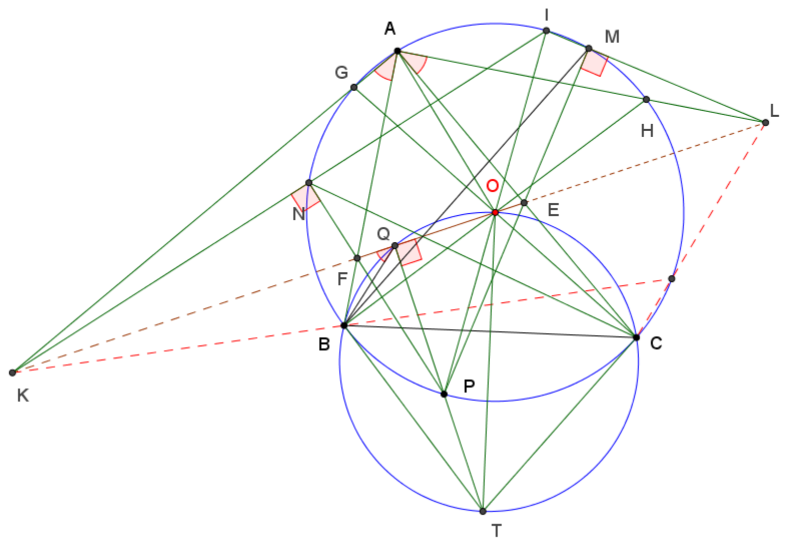
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại T. Đường thẳng qua O và vuông góc với PT cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Hai đường thẳng PE, PF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N khác P. Lấy K,L sao cho $\widehat{KAC} = \widehat{KNP} = \widehat{LAB} = \widehat{LMP} = 90^o$.

1. Chứng minh rằng $\widehat{BQF} = \widehat{KAB}$ với Q là giao của EF với PT.

2. Chứng minh rằng KB và LC vắt nhau tại 1 điểm thuộc (O).

(Hoà Bình)

Lời giải



1. $\widehat{OQT} = \widehat{OBT} = \widehat{OCT}$, nên O, B, C, T, Q cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow \widehat{FQB} = \widehat{OCB} = 90^o - \widehat{BAC} = \widehat{KAB}$.

2. Gọi I, G, H lần lượt là giao điểm của các cặp sau: NK và ML, AK và (O), AL và (O). Khi đó dễ chứng minh được rằng I, O, P thẳng hàng; G, O, C thẳng hàng; H, O, B thẳng hàng.
Áp dụng định lý Pascal cho 3 bộ điểm sau:
(N, A, M, B, P, C); (A, I, B, M, H, P); (A, I, C, N, G, P), ta có được K, F, Q, O, E, L thẳng hàng.
Từ kết quả câu 1 có $KAQB$ là tứ giác nội tiếp nên
$$(AQ; AB) \equiv (KL; KB)(\bmod \pi). \tag{4.9}$$
Tương tự:
$$(AC; AQ) \equiv (LC; LK)(\bmod \pi). \tag{4.10}$$
Từ (4.9) và (4.10) $\Rightarrow (LC; KB) = (AC; AB)(\bmod \pi)$ và ta có đpcm.

Bài 30

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) với $C \in (O_1)$, $D \in (O)$, và B gần CD hơn A.

1. Gọi E là giao điểm của BC và AD, F là giao điểm của DB và AC. Chứng minh rằng $EF//CD$.

2. Gọi N là giao điểm của AB và EF. Lấy K trên CD sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{DAK}$. Chứng minh rằng $KE = KF$.

(Hoà Bình)

Lời giải

1. Để ý rằng $\widehat{BCD} = \widehat{CAB}$ và $\widehat{BDC} = \widehat{BAD}$, mà $\widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} = 180^o \Rightarrow \widehat{EAF} + \widehat{EBF} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $AEBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFB} = \widehat{BAE} = \widehat{BDC} \Rightarrow EF \perp CD$.

2. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua CD, AN cắt CD tại M thì $MC^2 = MB.MA = MD^2 \Rightarrow M$ là trung điểm của CD và N là trung điểm của EF.

   - Giả sử K' là điểm thuộc CD sao cho $K'N \perp EF$ tại N. Xét tứ giác toàn phần $AFBECD$ có $(ABNM) = -1 \Rightarrow K'(ABNM) = -1$. Mà $K'N \perp K'M \Rightarrow K'M$ là phân giác ngoài của $\widehat{BK'A}$. Lại có $K'M$ là phân giác $\widehat{BKB'} \Rightarrow A, K', B$ thẳng hàng.

   - $\widehat{CB'D} = \widehat{CBD} = 180^o - \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{B'CD} = \widehat{B'AD} \Rightarrow$ Tứ giác $ACB'D$ nội tiếp. Mà $\widehat{B'CD} = \widehat{BCD} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{B'CD} = \widehat{K'AD} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{K'AD} \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow KN \perp EF \Rightarrow KE = KF$.

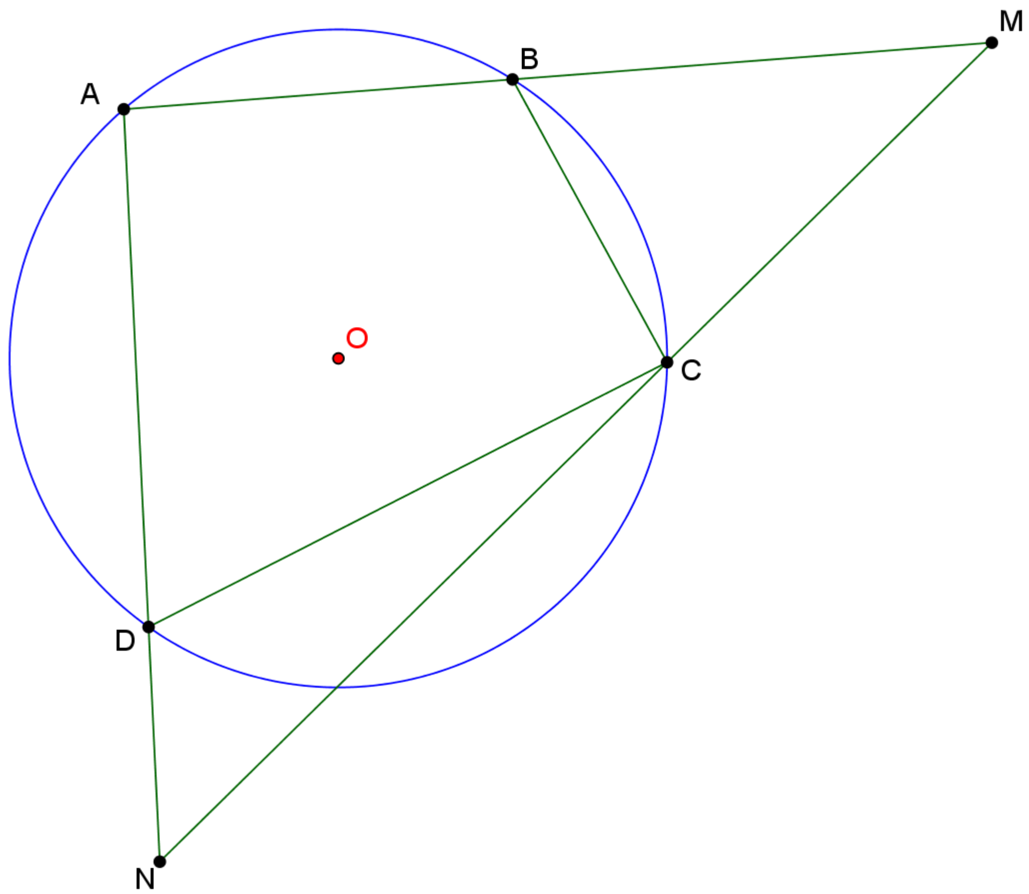
Bài 31

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua C cắt các tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M, N. Chứng minh

$$\frac{4S_{ABC}}{S_{AMN}} \le \left(\frac{BD}{AC}\right)^2.$$

(Khánh Hoà)

Lời giải



Qua C kẻ $CF//AB$, $F \in AD$.

- $\widehat{FAC} = \widehat{DBC}, \widehat{ACF} = \widehat{BCD} \Rightarrow \triangle AFC = \triangle BCD \Rightarrow \dfrac{S_{BCD}}{S_{AFC}} = \left(\dfrac{BD}{AC}\right)^2$.

- $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}.AM.AN.\sin\widehat{BAD}, S_{AFC} = \dfrac{1}{2}.AF.AC.\sin\widehat{BAD}$.

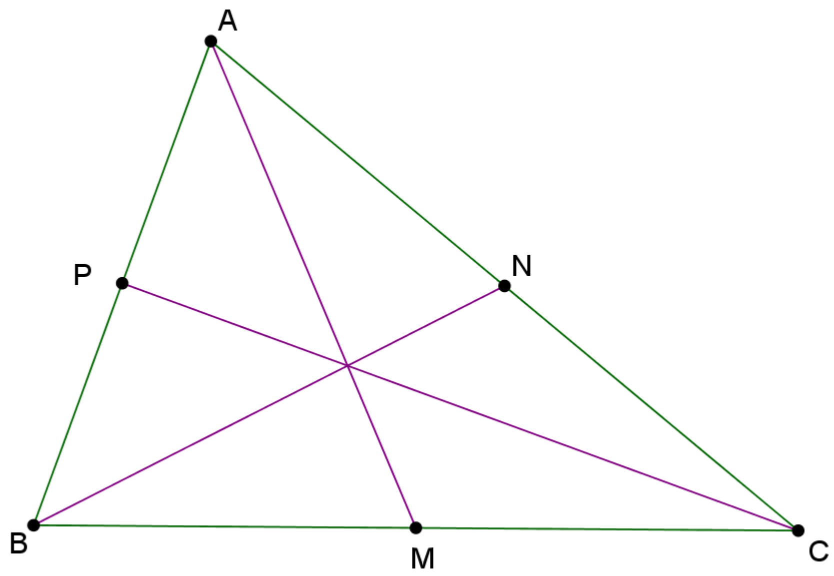
- $\dfrac{4S_{ABC}}{S_{AMN}} \le \left(\dfrac{BD}{AC}\right)^2 \Leftrightarrow AM.AN \ge 4AF.AC \Leftrightarrow \left(\dfrac{AM}{FC}\right).AN \ge 4AF \Leftrightarrow \left(\dfrac{AN}{FN}\right).AN \ge 4AF \Leftrightarrow$ $AN^2 \ge 4AF.FN \Leftrightarrow (AF+FN)^2 \ge 4AF.FN$, đúng theo BĐT AM - GM.

Bài 32

$\triangle ABC$ nhọn có AM, BN, CP là các trung tuyến. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh

$$AM + BN + CP \le 4R + r.$$

(Khánh Hoà)



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Theo bđt tam giác ta có:

$$AM + BN + CP \leq (OA + OM) + (OB + ON) + (OC + OP) = 3R + R(cosA + cosB + cosC).$$

Mặt khác dễ chứng minh

$$cosA + cosB + cosC = 1 + \frac{r}{R}$$

nên $AM + BN + CP \leq 3R + R(1 + \frac{r}{R}) = 4R + r$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

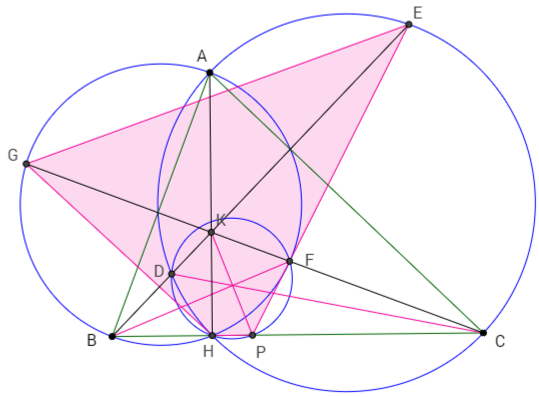
Bài 33

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trực tâm K. Đường thẳng BK cắt đường tròn đường kính tại D, E $(BD < BE)$. Đường thẳng CK cắt (AB) tại F, G $(CF < CG)$. Và (DHF) cắt BC tại điểm thứ hai là P.

1. Chứng minh rằng các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy.

(Lào Cai)

Hướng dẫn



1. Áp dụng hệ thức lượng và hệ thức bằng nhau của hai đường cao, dễ chứng minh được $(KCGF) = (KBED) = -1$
Từ tính chất đồng quy của hàng điểm điều hòa, ta suy ra: GE, DF, BC đồng quy tại X. Ta có: $\overline{KG}.\overline{KF} = \overline{KA}.\overline{KH} = \overline{KD}.\overline{KE} \Rightarrow GDFE$ là tứ giác nội tiếp.
Kết hợp hai điều trên, ta chứng minh được rằng: $\overline{XG}.\overline{XE} = \overline{XH}.\overline{XP} \Rightarrow GHPE$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

2. $E\ (KCGF) = -1 \Rightarrow (XPBC) = -1$ Áp dụng tính chất của hàng điểm điều hòa cho $\triangle KBC$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 34

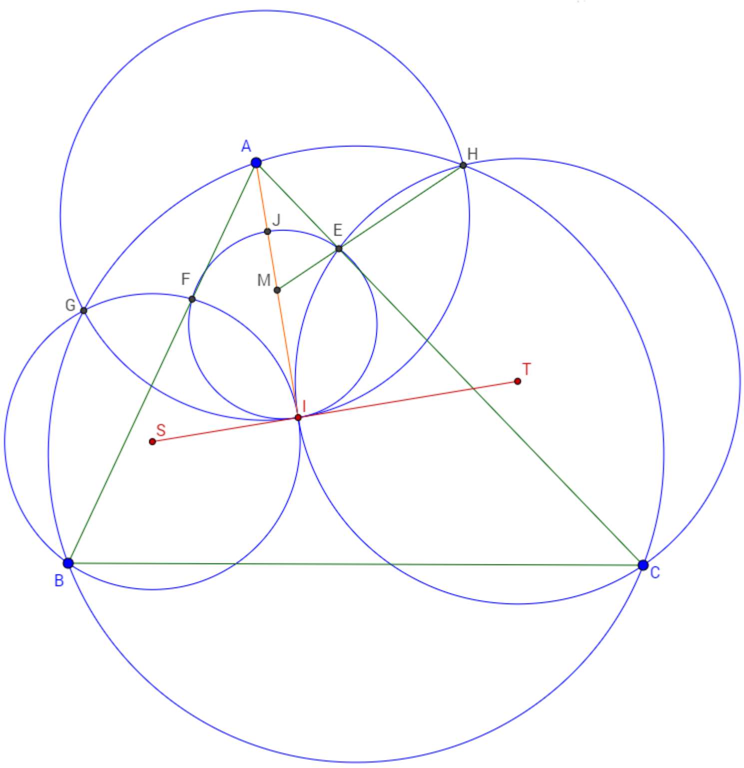
Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) với I là tâm nội tiếp tam giác. Đường tròn đi qua C tiếp xúc với AI tại I cắt AC tại E và cắt (O) tại H $(E, H \neq C)$.

1. Chứng minh EH đi qua trung điểm của AI.

2. Đường tròn đi qua B tiếp xúc với AI tại I cắt AB tại F và cắt (O) tại G $(G, F \neq B)$. Chứng minh rằng hai đường tròn (EIF) và (GIH) tiếp xúc nhau.

(Lạng Sơn)

Lời giải



1. Ta sẽ chứng minh rằng AI cũng là tiếp tuyến tại A của (AHE). Thật vậy, $\widehat{HIA} = \widehat{HCI} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{HIC} = \widehat{AIC} - \widehat{AIH} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Mặt khác $\widehat{HEC} = 180^o -$

$\widehat{HIC} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} + \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AEC} - \widehat{HEC} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} - \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAH}$. Vậy IA cũng là tiếp tuyến của (AHC). Tới đây, theo tính chất phương tích, nếu gọi M là giao điểm của HE và AI thì M là trung điểm AI.

2. Ta sẽ chứng minh AI là đường nối tâm của (EIF) và (GIH). Gọi giao điểm thứ hai của AI và (AEF) là J thì

$$\widehat{EJF} = 180^o - \widehat{BAC},$$

mà AI lại là phân giác trong góc $\widehat{EAF}$ nên J là trung điểm cung EF của (AEF) hay $JE = JF$. Mà

$$\widehat{EIF} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{BAC})$$

và IJ không phải là phân giác góc $\widehat{EIF}$ nên J là tâm (EIF).
Gọi S và T lần lượt là tâm của (BIG) và (CIH). Vì EF và GH là hai đường đối song nên $\widehat{EFM} = \widehat{GHM}$. Ta có $\widehat{GIS} = 90^o - \widehat{GBI} = 90^o - \widehat{IFM} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} - \widehat{JFM} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} - \widehat{JFE} + \widehat{MFE} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} - \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{GHM} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} + \widehat{HGM} = \widehat{MHI} + \widehat{MHG} = \widehat{GHI} \Rightarrow ST$ là tiếp tuyến của (GIH) tại I. hay tâm của (GIH) nằm trên AI.

Bài 35

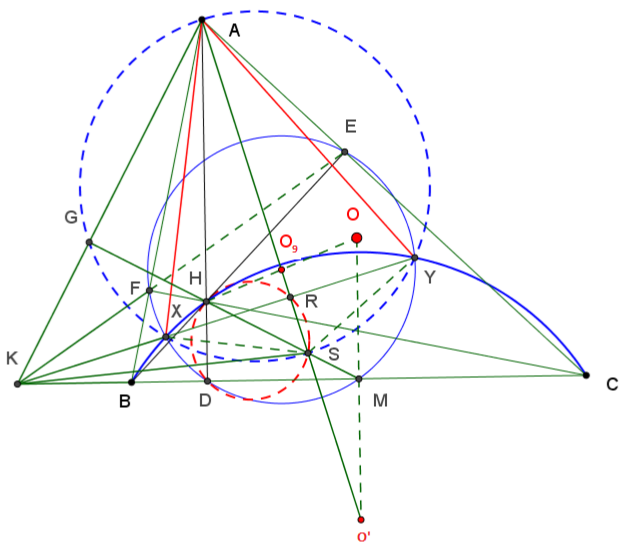
Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H $(D \in BC, E \in CA, F \in AB)$. Gọi M là trung điểm của BC. 2 đường tròn (DEF) và (HBC) cắt nhau tại X và Y

1. Chứng minh $AX = AY$.

2. Gọi R là trung điểm của XY. AR cắt HM tại S. Chứng minh tứ giác $HDSR$ nội tiếp.

(Lạng Sơn)

Lời giải



1. Gọi O_9 là tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$, O' đối xứng với O qua BC. Khi đó dễ chứng minh được O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle NHC$ và $AOO'H$ là hình bình hành $\Rightarrow A, O_9, O'$ thẳng hàng. Vậy hiển nhiên $AX = AY$.

2. Chúng tôi xin nêu hai cách chứng minh cho câu này.

Cách 1: $AH.AD = AF.AB$ và $\dfrac{AS}{SO'} = \dfrac{AH}{MO'} = \dfrac{AH}{MO} = 2 \Rightarrow \dfrac{AS}{AO'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AS}{AO_9} = \dfrac{4}{3}$.

– $RO' = \dfrac{O'O_9^2 + R^2 - \frac{R^2}{4}}{2O'O_9} = \dfrac{AO_9^2 + \frac{3R^2}{4}}{2AO_9} \Rightarrow AR = AO' - RO' = 2AO_9 - \dfrac{AO_9^2 + \frac{3}{4}R^2}{2AO_9} \Rightarrow$ $AS.AR = \dfrac{4}{3}AO_9.\dfrac{3AO_9^2 - \frac{3R^2}{4}}{2AO_9} = 2AO_9^2 - \dfrac{R^2}{2}$.

– $AO_9^2 - \dfrac{R^2}{4} = AF.AN = \dfrac{1}{2}AF.AB$ (N là trung điểm AB) nên $2AO_9^2 - \dfrac{R^2}{2} =$ $AF.AB = AH.AD \Rightarrow$ Tứ giác $HDSR$ nội tiếp.

Cách 2: Từ câu 1 dễ thấy R, A, O', O_9 thẳng hàng. Áp dụng tích chất đẳng phương cho 4 đường tròn $(DEF), (HBC), (HDM), (AFE)$, ta chứng minh được: EF, XY, BC đồng quy tại K.
Cho HM giao AK tại G, dễ chứng minh được rằng: $AK \perp HM$ tại G, $G \in (ABC)$.
$\Rightarrow \overline{KG}.\overline{KA} = \overline{KX}.\overline{KY}$. Bằng tính toán, ta chứng minh được: $AX^2 = \overline{AG}.\overline{AK} = \overline{AR}.\overline{AS} = \overline{AH}.\overline{AD} \Rightarrow HDSR$ là tứ giác nội tiếp.(đpcm)

Bài 36

Từ một điểm M tùy ý trong tam giác ABC, các đường thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1.$$

(Long An)

Hướng dẫn

Bằng biến đổi tỉ số, ta có: $\dfrac{MA_1}{AA_1} = \dfrac{S_{A_1MC}}{S_{AA_1C}} = \dfrac{S_{A_1MB}}{S_{AA_1B}} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$. Tương tự với $\dfrac{MB_1}{BB_1}$ và $\dfrac{MC_1}{CC_1}$. Cộng ba tỉ số theo diện tích đó sẽ ra điều phải chứng minh.

Bài 37

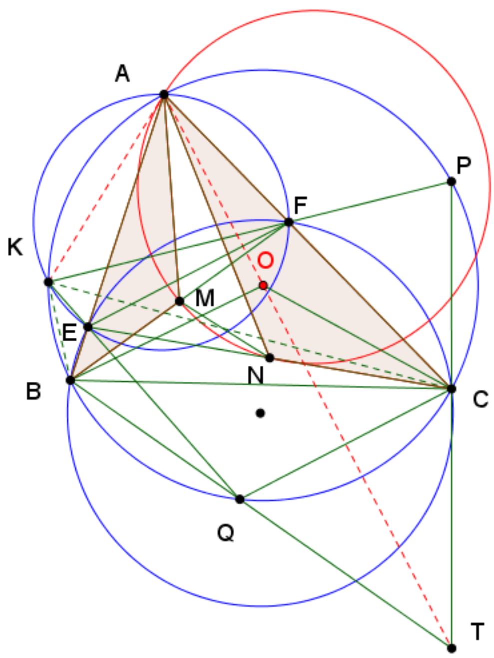
Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn ω tâm O. Một đường tròn ω' đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở E, F $(E, F \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn ω tại K $(A \neq K)$. KE, KF lần lượt cắt lại đường tròn ω tại Q, P $(P, Q \neq K)$. Gọi T là giao điểm của BQ và CP; M, N lần lượt là trung điểm BF, CE.

1. Chứng minh rằng A, O, T thẳng hàng.

2. Chứng minh rằng KA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

(Nam Định)

Hướng dẫn



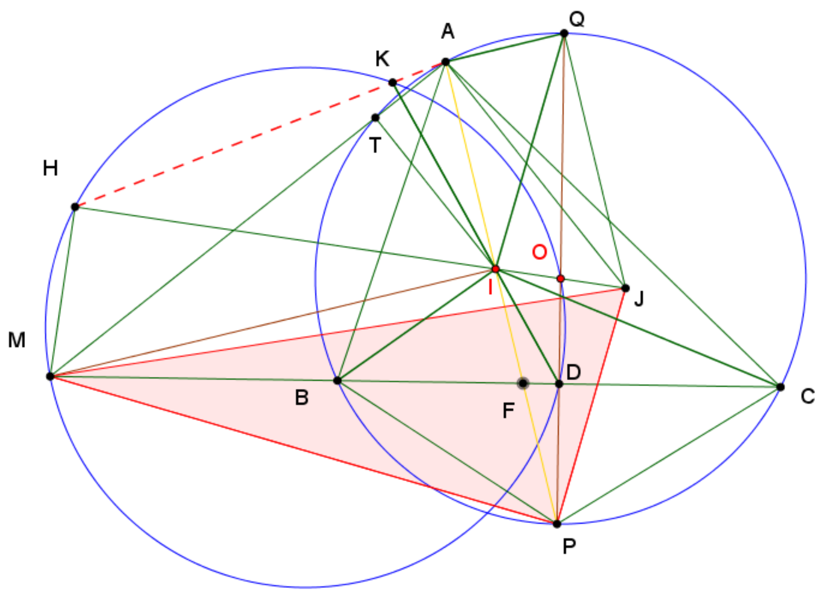
Ta có: $\widehat{AQC} = \widehat{ABC} = \widehat{AFE} = \widehat{ACQ} \Rightarrow AQ = QC$.
Mặt khác: $\widehat{BKQ} = \widehat{PKC} \Rightarrow BQCP$ là hình thang cân nội tiếp $(O) \Rightarrow TQ = TC$.
Từ đây, suy ra A, O, T cùng nằm trên đường trung trực đoạn $QC \Rightarrow$ đpcm.

Bài 38

$\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi P là trung điểm cung BC không chứa A của (O), J là điểm đối xứng với I qua O. Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IBC$ cắt BC tại M, H là hình chiếu của M trên OI. Gọi D là trung điểm BC và K là giao điểm thứ hai của ID với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ODH$.

1. Chứng minh rằng $\triangle JPM$ vuông ở J.
2. Chứng minh H, A, K thẳng hàng.

(Nam Định)



Lời giải

1. PQ là đường kính (O).Gọi giao điểm của AI và BC là F.
   Dễ chứng minh được tích sau: $IF.AP = AI.IP$. Ngoài ra thì $\triangle MIF \sim \triangle PAQ \Rightarrow \dfrac{MI}{IF} = \dfrac{PA}{AQ}$. Kết hợp hai điều trên suy ra: $\dfrac{AQ}{IP} = \dfrac{AI}{MI} \Rightarrow \Delta MIP \sim \Delta IAQ$. Từ đây dễ chứng minh bằng cộng góc: ΔMPJ vuông tại P.

2. MA cắt (O) tại T.
   - Bằng cộng góc, chứng minh được $\widehat{AQJ} = 90^o \Rightarrow QJ//AP$.
   - $MI^2 = MB.MC = MT.MA \Rightarrow IT \perp MA$.
   - $\triangle QAT \sim \triangle PIT \Rightarrow \dfrac{QA}{AT} = \dfrac{PI}{IT} = \dfrac{QJ}{IT} \Rightarrow \triangle AQJ \sim \triangle ATI \Rightarrow \widehat{AJQ} = \widehat{AIT} = \widehat{AMI}$ hay $\widehat{JAI} = \widehat{IMA} \Rightarrow MA \perp AJ$. Từ đây A, J, P, H, M cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{KHO} = \widehat{KDO} = \widehat{APJ} = \widehat{AHJ}$ hay A, K, H thẳng hàng (đpcm)

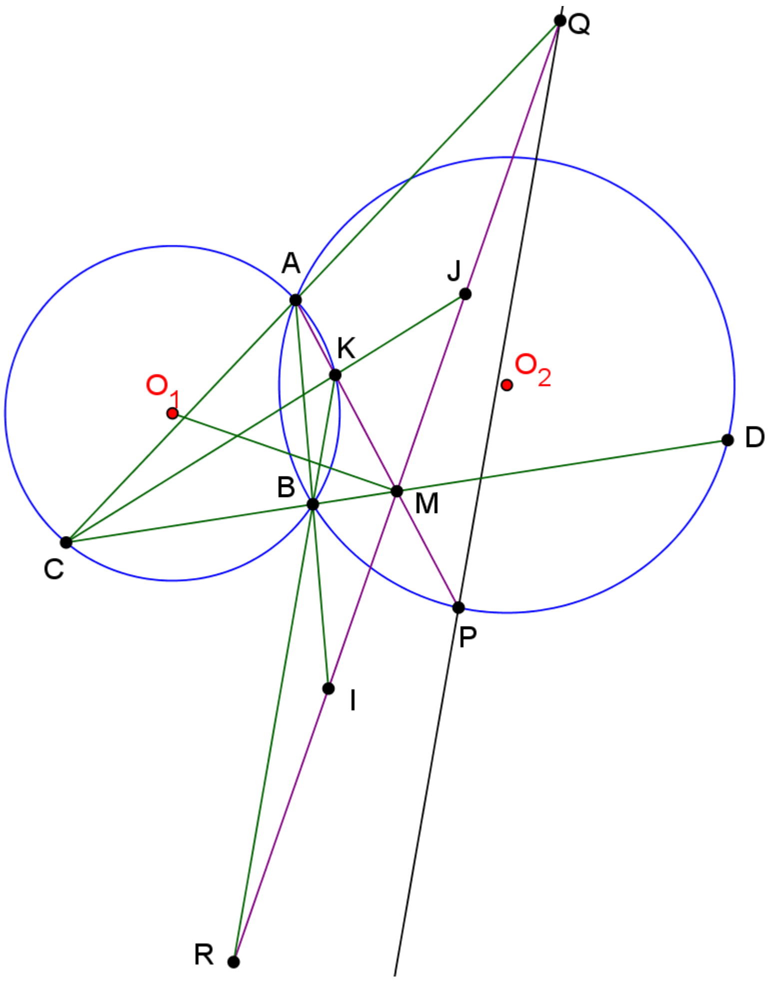
Bài 39

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua B cắt hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ lần lượt tại C và D. Gọi M là trung điểm CD. Đường thẳng AM cắt (O_1) tại điểm thứ hai là K (K và C khác phía so với AB), cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai P. Đường thẳng (d) qua M vuông góc với O_1M cắt đường thẳng AC tại Q và cắt đường thẳng KB tại R.

1. Gọi I,J lần lượt là giao điểm củaAB,CK với đường thẳng (d). Chứng minh M là trung điểm IJ vàRQ.
2. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

(Nghệ An)

Hướng dẫn



1. Hiển nhiên đúng theo định lý con bướm.
2. Gọi N là giao điểm thứ 2 của BC với $(ACP)\equiv(O_3)$.
   - $\overline{MB}.\overline{MD}=\overline{MP}.\overline{MA}=\overline{MC}.\overline{MN}=-\overline{MD}.\overline{MN}\Rightarrow M$ là trung điểm của BN.
   - $\overline{MK}.\overline{MA}=\overline{MB}.\overline{MC}=-\overline{MN}.\overline{MC}=-\overline{MP}.\overline{MA}\Rightarrow M$ là trung điểm của PK.

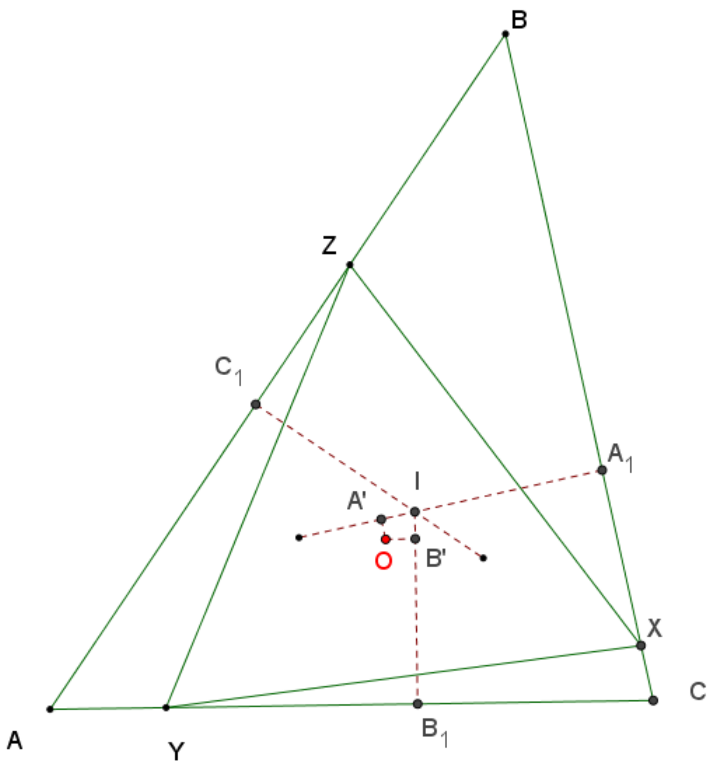
- Xét phép đối xứng $D_M : K \mapsto P, B \mapsto N, C \mapsto D \Rightarrow (O_1) \mapsto (PND) \equiv (O_4) \Rightarrow \overline{O_1, O_4, M}$. Mà $MQ \perp O_1O_4, P_{M/(O_1)} = P_{M/(O_4)}$ nên MQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_4). Xét 3 đg tròn $(O_1), (O_3), (O_4)$ có 3 trục đẳng phương lần lượt là AC, MQ, NP nên theo định lý về tâm đẳng phương thì AC, MQ, NP đồng quy hay $\overline{N, P, Q}$.
- Gọi T là giao điểm thứ 2 của PQ với (O_2). Bằng biến đổi góc ta suy ra BT là tt của (O_1) tại $B \Rightarrow T$ cố định. Vậy PQ đi qua điểm T cố định.

Bài 40

$\triangle XYZ$ đều, các đỉnh X, Y, Z lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ nhọn. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nằm trong $\triangle XYZ$.

(Nghệ An)

Lời giải



Ta chứng minh rằng tâm nội tiếp của $\triangle ABC$ nằm trong đường tròn nội tiếp $\triangle XYZ$. Kí hiệu $d(U, WV)$ là khoảng cách giữa điểm U và đường thẳng WV.O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle XYZ$ và r, r', R' lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, XYZ và đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Khi đó $R' = 2r'$ và điều cần chứng minh là $OI \leq r'$.

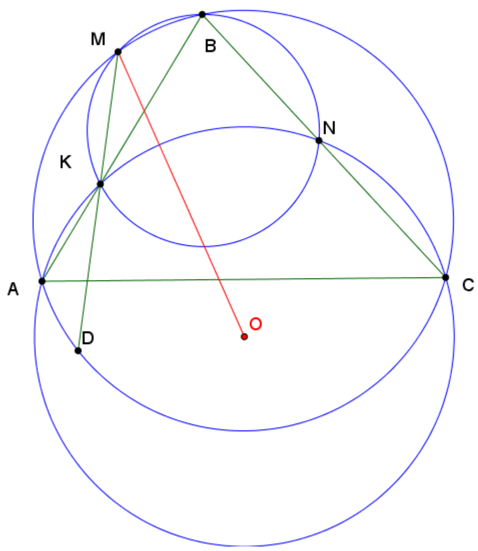
- Nếu $O \equiv I$, ta có ngay điều cần chứng minh.

- Giả sử $O \neq I$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại lần lượt là A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng IA_1, IB_1, IC_1 chia mặt phẳng thằng 6 góc nhọn, mỗi góc chứa một trong các điểm A_1, B_1, C_1 trên biên của nó.
  Giả sử rằng O nằm trong góc xác đỉnh bởi các đường thằng $IA_1.IB_1$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của O lên các đường thằng IA_1, IB_1.
  Ta có:
  $$OX = R' \Rightarrow d(O, BC) \leq R'.$$
  $$OA'//BC \Rightarrow d(A', BC) = A'I + r = d(O, BC) \leq R' \Rightarrow A'I \leq R' - r.$$
  Mặt khác đường tròn nội tiếp $\triangle ZYX$ nằm trong $\triangle ABC$, suy ra
  $$r - IB' = B'B_1 = d(O, AC) \geq r' \Rightarrow IB' \leq r - r'.$$
  Cuối cùng $IA'OB'$ là tứ giác nội tiếp, suy ra
  $$A'\overset{\frown}{O}B' < O\overset{\frown}{B'}I \Rightarrow \overset{\frown}{A'O} + \overset{\frown}{OB'} < \overset{\frown}{OB'} + \overset{\frown}{B'I} \Rightarrow \overset{\frown}{A'O} < \overset{\frown}{B'I} \Rightarrow A'O < B'I.$$
  Vậy suy ra $OI \leq IA' + A'O < IA' + IB' \leq R' - r + r - r' = r'$ (đpcm).

Bài 41

Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (O) đi qua A và C cắt các cạnh AB, BC tại K, N. Đường tròn (KBN) cắt đường tròn (ABC) tại B và M. Tính $\widehat{BMO}$.

(Ninh Bình)



Lời giải

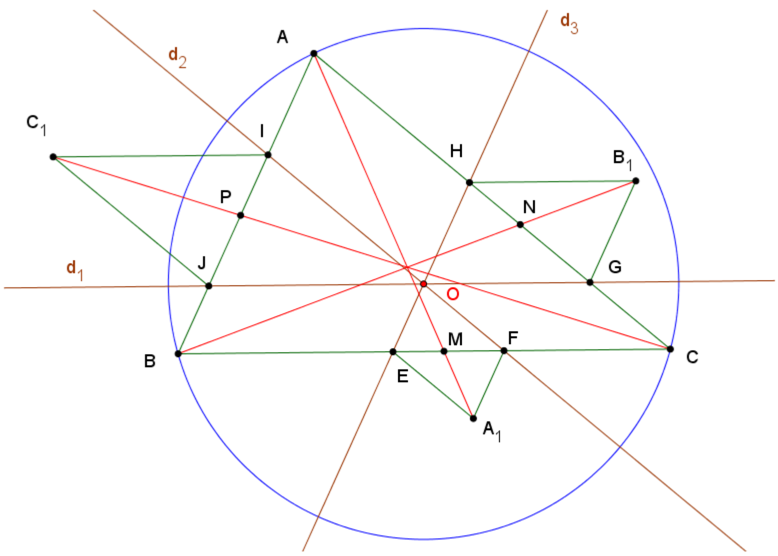
Gọi D là giao điểm thứ hai của MK và đường tròn tâm O.

- $(BM, BN) = (KM, KN) = (CD, CN) \Rightarrow BM//CD.$
- $(DC, BK) = (AC, AK) = (MC, MB) = (CM, CD) \Rightarrow MC = MD$, mà $OC = OD \Rightarrow OM$ là trung trực của $CD \Rightarrow OM \perp CD \Rightarrow OM \perp BM \Rightarrow \widehat{BMC} = 90^o$.

Bài 42

Cho $\triangle ABC$ và điểm (O) nằm trog $\triangle ABC$ Đường thẳng d_1 đi qua O song song với BC lần lượt cắt AB, AC tại J, G. Đường thẳng d_2 đi qua O song song với CA lần lượt cắt BC, CA tại F, J. Đường thẳng d_3 đi qua O song song với AB lần lượt cắt CA, CB tại H, E. Dựng các hình bình hành OEA_1F, OGB_1H, OIC_1J. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

(Ninh Bình)



Lời giải

Gọi M là giao điểm của AA_1 và BC, N là giao điểm của BB_1 và CA, P là giao điểm của CC_1 và AB, D là giao của AO và BC.

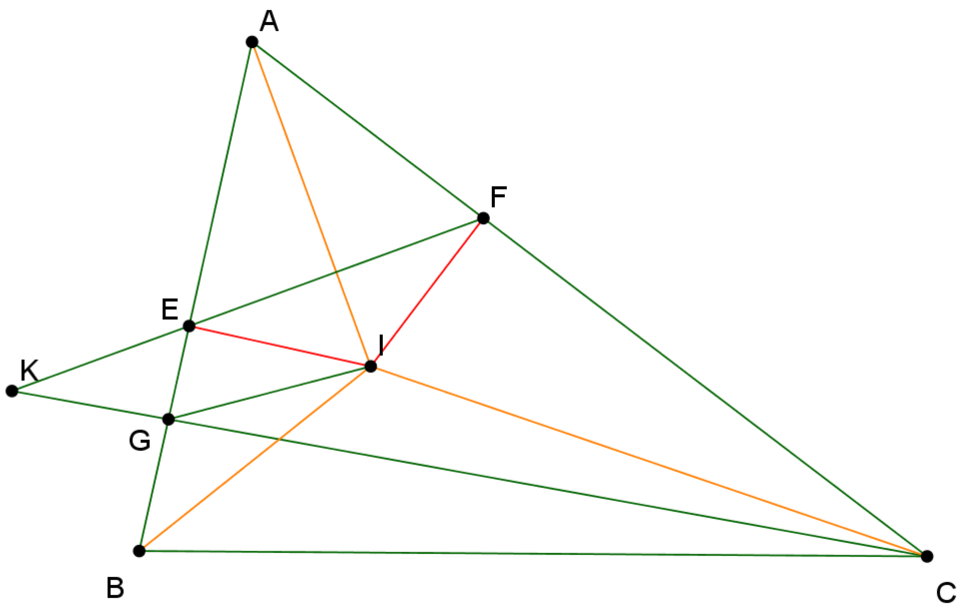
- $EA_1 // AC \Rightarrow \dfrac{EM}{MC} = \dfrac{EA_1}{AC} = \dfrac{OF}{AC} = \dfrac{DO}{DA}$. Tương tự, $\dfrac{FM}{MB} = \dfrac{DO}{DA} \Rightarrow \dfrac{EM}{MC} = \dfrac{FM}{MB} \Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{FM}{EM} = \dfrac{FM+MB}{EM+MC} = \dfrac{FB}{EC}$. Tương tự, $\dfrac{NC}{NA} = \dfrac{HC}{GA}$.
- $\triangle AGJ \sim \triangle HCE \Rightarrow \dfrac{HC}{GA} = \dfrac{EC}{GJ} \Rightarrow \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{EC}{GJ}$. Tương tự, $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{JA}{IB} = \dfrac{GJ}{BF}$. Do đó $\dfrac{MB}{MC}.\dfrac{NC}{NA}.\dfrac{PA}{PB} = 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1 \Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ đồng quy.

Bài 43

Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). Các cạnh AB, AC tiếp xúc với (I) tại E, F. Đường thẳng qua B song song với AC cắt EF tại K. CK cắt AB tại G. Chứng minh tam giác AIG vuông.

(Phú Thọ)

Lời giải



Đặt $a = BC, b = CA, c = AB$. Yêu cầu đề bài tương đương với chứng minh: $FK//GI$. Gọi giao điểm của AI và EF là H. Do $KB//AC$ nên $\triangle KBE$ cân tại $B \Rightarrow KB = BE$. Áp dụng định lý Thales và phép biến đổi tỉ số, ta có

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AE}{AB}.\frac{AB}{AG} = \frac{AE}{AB}.\frac{AC+KB}{AC} = \frac{\frac{AB+AC-BC}{2}}{AB}.\frac{AC+\frac{AB+BC-AC}{2}}{AC} = \frac{(c+b-a)(c+b+a)}{4bc}.$$

Mà ta có:

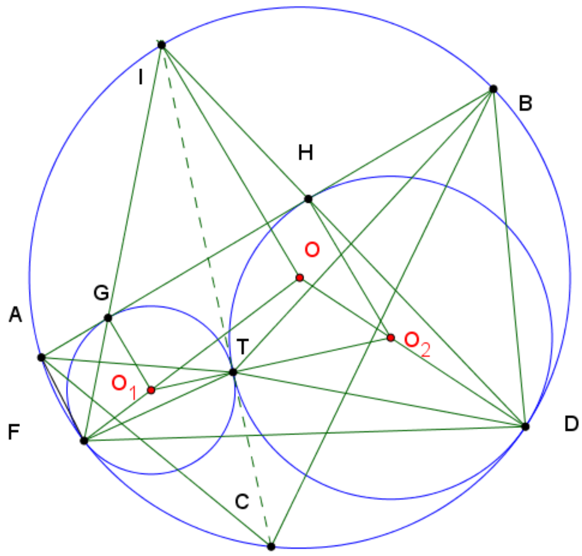
$$\frac{AH}{AI} = \frac{\cos\widehat{BAC}+1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4bc}$$

nên trên suy ra $\dfrac{AE}{AG} = \dfrac{AH}{AI} \Rightarrow KF//GI$ (đpcm).

Bài 44

Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Các đường tròn (O_1) và (O_2) nằm về một phía đối với đường thẳng AB, Tiếp xúc với nhau tại T đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O). Tiếp tuyến chung tại T của $(O_1),(O_2)$ cắt đường tròn (O) tại C (Với C thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa $(O_1),(O_2)$). Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

(Phú Thọ)



Lời giải

$(O_1),(O_2)$ lần lượt tiếp xúc với (O) tại F,D. Gọi giao điểm của FG,HD với (O) là I,I'. Bằng định lý Thales, ta dễ dàng chứng minh được: $I \equiv I'$ là điểm chính giữa cung AB không chứa C. Ta cũng chứng minh được $IA^2 = IG.IF = IH.ID = IT^2 = IB^2 \Rightarrow$ Tứ giác $FGHD$ nội tiếp. Từ đây, sử dụng tính chất tâm đẳng phương cho 3 đường tròn $(FGHD),(O_1),(O_2)$, ta suy ra được: I,T,C thẳng hàng. Kết hợp với hệ thức trên, ta suy ra được T là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

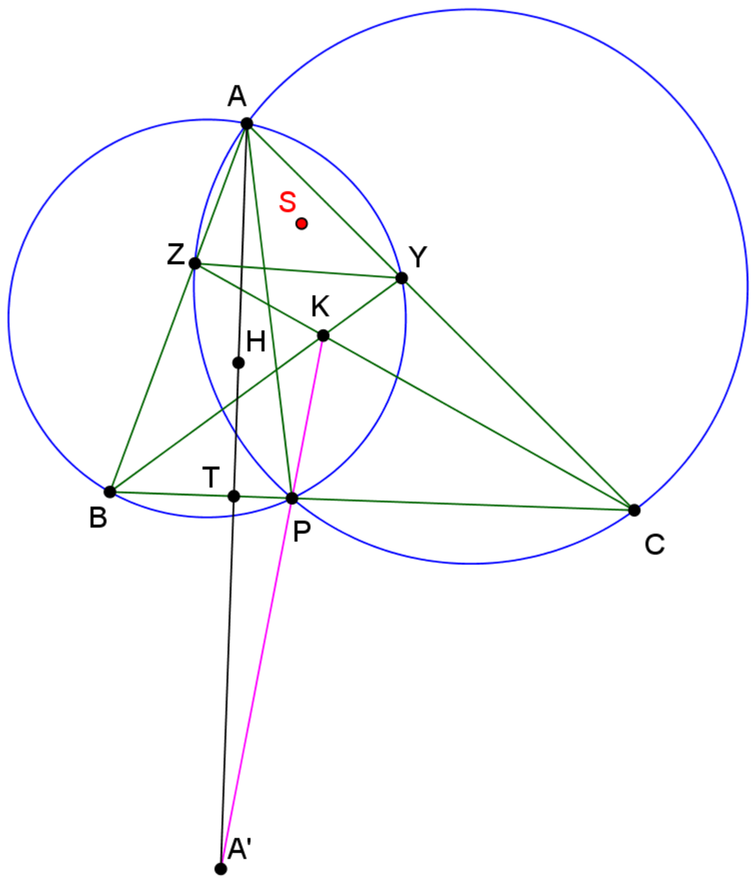
Bài 45

Cho tam giác ABC nhọn không cân . P là một điểm bất kì trên cạnh BC và không trùng với B, C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt AC tại Y khác A . Tương tự xác định Z . Gọi BY cắt CZ tại K . Gọi T là hình chiếu của A lên BC , H là trực tâm tam giác ABC , A' là điểm đối xứng của A qua BC.

1. Chứng minh A', P, K thẳng hàng.
2. Chứng minh khi P di chuyển trên BC , tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định.

(Quảng Bình)

Lời giải



1. Bằng biến đổi góc đơn giản suy ra $AZKY$ nội tiếp từ đó $PKYC, ZKPB$ nội tiếp từ đó suy ra $\widehat{BPA'} = \widehat{APB} = \widehat{KPC}$ suy ra đpcm.
2. BN, CM là các đường cao của tam giác ABC.Trung tuyến At của tam giác ABC giao (AH) tại I. Ta có hai tam giác ZIM, MIY đồng dạng suy ra $MIN = ZIY$ suy ra I thuộc (AYZ) do đó SI' vuông góc AI (S là tâm (AYZ), I' là trung điểm AH) Ta có dpcm.

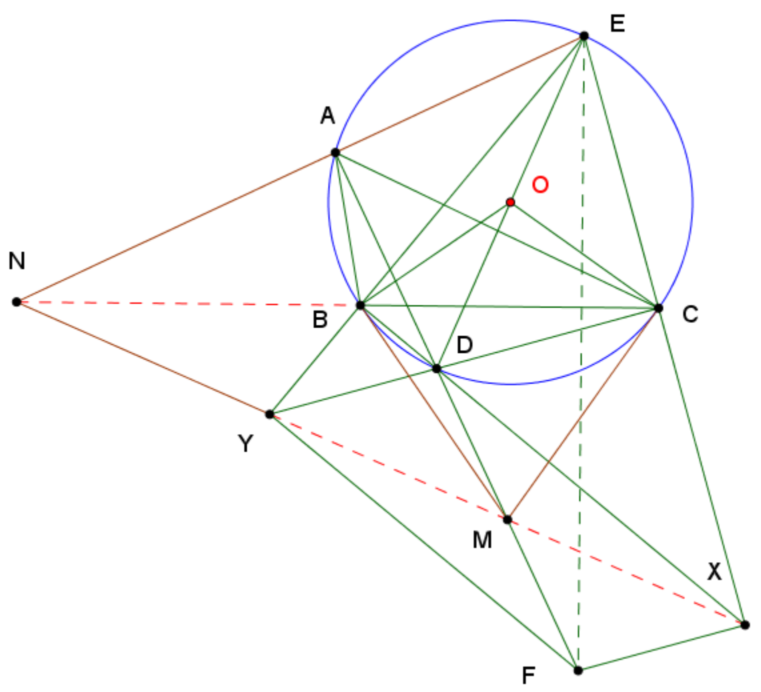
Bài 46

Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC không cân tại A. Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến với (O) tại B và C, AM cắt (O) tại D khác A. Dựng đường kính DE của (O). Các đường thẳng BD, CE cắt nhau tại X, các đường thẳng BE, CD cắt nhau tại Y.

1. Chứng minh rằng $MX = MY$.
2. Gọi N là giao điểm của AE và XY. Chứng minh rằng N nằm trên một đường thẳng cố định.

(Quảng Nam)

Lời giải



1. Bằng tính góc, ta chứng minh được: $\dfrac{\widehat{BMC}}{2} = \widehat{BYC} = \widehat{BXC}$. Mà $\triangle BMC$ cân $\Rightarrow M$ là tâm đường tròn $(YBCX)$ có đường kính $XY \Rightarrow MX = MY$.
2. Lấy F đối xứng với D qua M. Ta chứng minh được: $\widehat{EAF} = \widehat{EYF} = \widehat{EXF} = 90^o$ $\Rightarrow EAYX$ nội tiếp.
   Áp dụng tính chất tâm đẳng phương cho ba đường tròn $(O), (AEXY), (YBCX)$, ta suy ra được: N thuộc đường thẳng BC
   Vậy N luôn chạy trên đường thẳng BC cố định khi A di chuyển trên cung BC không chứa A của (O).

Bài 47

$\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, D là điểm di chuyển trên cung BC không chứa A (D không trùng B,C).

1. Gọi E,F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AD và BC, AB và CD. Gọi P là trung điểm EF, M là điểm đối xứng với B qua P. Chứng minh đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.
2. Gọi H,I,K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến các cạnh BC,CA,AB. Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tìm GTNN của tổng $\dfrac{AB}{DK}+\dfrac{AC}{DI}+\dfrac{BC}{DH}$.

(Quảng Ngãi)

Lời giải

1. Gọi K', J lần lượt là trung điểm BD, AC. Lấy H' đối xứng với J qua BC thì H' cố định.
   Ta chứng minh: MD đi qua H' cố định. Áp dụng tính chất đường thẳng Gauss cho tứ giác toàn phần $BEFD$ với P,K',J lần lượt trung điểm $FE,BD,AC \Rightarrow P,K',J$ thẳng hàng .
   Từ đây, áp dụng tính chất đường trung bình, ta suy ra được MD đi qua H'.
2. Gọi tổng cần tìm GTNN là T. Ta chứng minh được: $DH.DA = DI.DB = DK.DC \Rightarrow T = 2.\dfrac{BC}{DH}$.
   Đồng thời, do $BC = R\sqrt{3}$, nên ta cũng chứng minh được: $DH \le \dfrac{R}{2} \Rightarrow T \ge 4.\sqrt{3}$

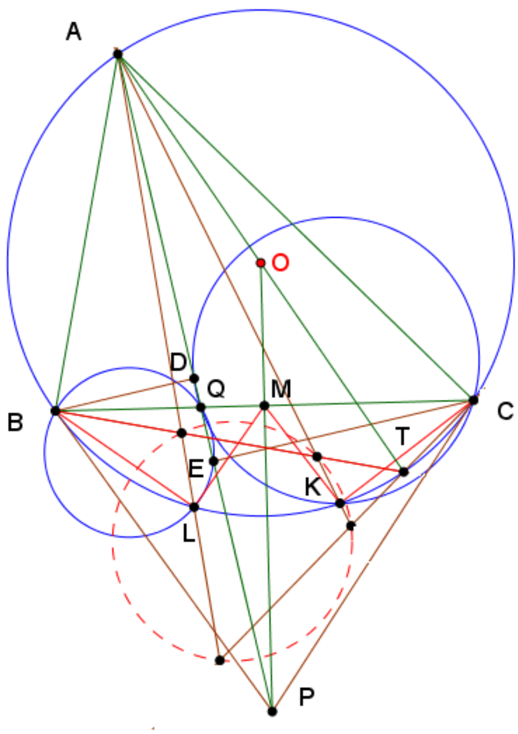
Bài 48

Cho $\triangle ABC$ nhọn ko cân tại A nội tiếp (O) . Gọi M là trung điểm của BC. 2 tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại P. Gọi D,E lần lượt là hình chiếu vuông góc của B va C lên AP, Q là giao điểm của AP và BC. Đường tròn (CQD) và (BQE) lần lượt cắt (O) tại điểm thứ 2 là K,L.

1. Chứng minh $\widehat{MKC} = \widehat{MLB}$.
2. Kẻ đường kính AT của (O). Giả sử các đường thẳng TB,TC,AK,AL đôi 1 cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. Chứng minh rằng 4 giao điểm này là 4 đỉnh của 1 tứ giác nội tiếp.

(Quảng Ninh)

Lời giải



1. Ta có: $\widehat{QDK} = \widehat{QCK} = \widehat{PBK} \Rightarrow$ Tứ giác $DBPK$ nội tiếp. Mà tứ giác $BDMP$ nội tiếp nên B, D, M, K, P cùng thuộc một đường tròn. Khi đó $\widehat{MKC} = \widehat{BKC} - \widehat{BKM} = 180^o - \widehat{BPM} - \widehat{PBM} = 90^o$. Chứng minh tương tự, $\widehat{MLB} = 90^o \Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MLB} = 90^o$.

2. Xét phép đối xứng trục MP, thấy được L, K đối xứng với nhau qua đường thẳng $MP \Rightarrow BLKC$ là hình thang cân.
   Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của TB với AK, AL; Z, W lần lượt là giao điểm của TC với AL, AK. Khi đó bằng biến đổi góc, chứng minh được $\widehat{XYZ} = \widehat{XWT} \Rightarrow$ Tứ giác $XYZW$ nội tiếp.

Bài 49

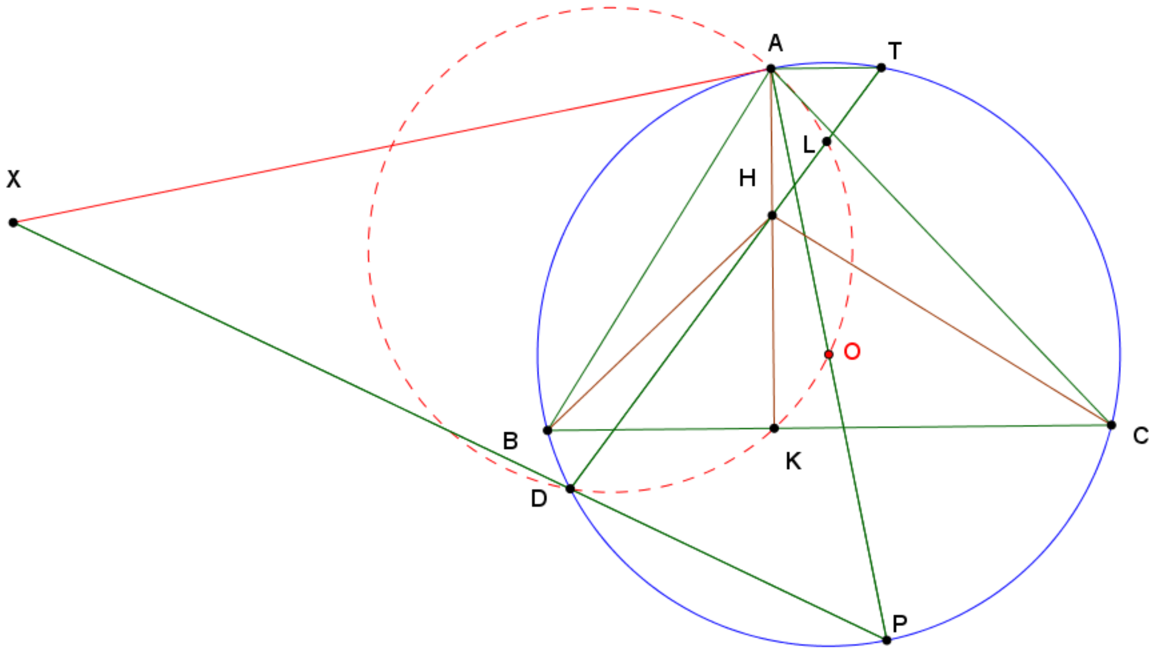
Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) $(AB < AC)$, trực tâm H. Lấy điểm T trên (O) sao cho $AT \parallel BC$. Giả sử AH cắt (O) tại K, TH cắt (O) tại D trên cung nhỏ BC. Gọi I là trung điểm của HT.

1. Chứng minh 5 điểm A, L, O, K, D cùng thuộc 1 đường tròn.

2. Gọi P là giao điểm thứ 2 của AO với (O). Đường thẳng qua H song song với BC cắt PD tại X. Chứng minh rằng XA là tiếp tuyến của (O).

(Quảng Ninh)

Lời giải



1. Gọi S là giao điểm của AH với (O). Vì $AT \perp BC$ nên suy ra $\widehat{SAT} = 90^o$, do đó S, O, T thẳng hàng. Theo tính chất đối xứng quen thuộc của trực tâm ta có $KS = KH$.

   - $HD.HT = HA.HS \Rightarrow HD.HL = HA.HK \Rightarrow$ Tứ giác $ALKD$ nội tiếp.
   - Dễ chứng minh được $ALOK$ là hình thang. Vì AL là trung tuyến tam giác vuông AHT nên $\widehat{HAL} = \widehat{AHL} = \widehat{AKO} \Rightarrow ALOK$ là hình thang cân $\Rightarrow ALOK$ nội tiếp đường tròn.

2. Gọi E, F là giao của XH với AC, AB; I, J là giao của BH, CH với (O). Gọi P' là giao của IE với (O). Dễ thấy H, I đối xứng qua AC, $\widehat{ACB} = \widehat{AHI}, \widehat{BAH} = \widehat{CAO}$, nên ta có: $\dfrac{\overset{\frown}{AI} + \overset{\frown}{CP'}}{2} = \widehat{AEI} = \widehat{AEH} = \widehat{ACB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = \widehat{ABH} + \widehat{CAO} = \dfrac{\overset{\frown}{AI} + \overset{\frown}{CP}}{2}$, suy ra $\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{CP'}$, tức là $P \equiv P'$, hay P, E, I thẳng hàng.
   Tương tự, suy ra J, F, P thẳng hàng. Do đó,
   $$\widehat{EPF} = \frac{\overset{\frown}{AI} + \overset{\frown}{JA}}{2} = \widehat{ABH} + \widehat{ACH} = 180^o - 2.\widehat{A} \tag{4.12}$$
   Mặt khác, dễ thấy $\widehat{BDH} = \dfrac{\overset{\frown}{BT}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \widehat{ABC} = \widehat{AFE}$, suy ra $BDHF$ nội tiếp, tượng tự $CDHE$ nội tiếp. Suy ra
   $$\widehat{EDF} = \widehat{EDH} + \widehat{FDH} = \widehat{ECH} + \widehat{FBH} = 180^o - 2.\widehat{A} \tag{4.13}$$
   Từ (4.12) và (4.13) suy ra $\widehat{EPF} = \widehat{EDF}$, tức tứ giác $EFDH$ nội tiếp.

   Vì $EF//BC$, nên (AEF) tiếp xúc với (O) tại A. Xét ba đường tròn $(AEF), (O), (EFDP)$ có ba trục dẳng phương là: tiếp tuyến tại A của $(O), EF, PD$. Vậy X là tâm đẳng phương nghĩa là XA là tiếp tuyến của (O).

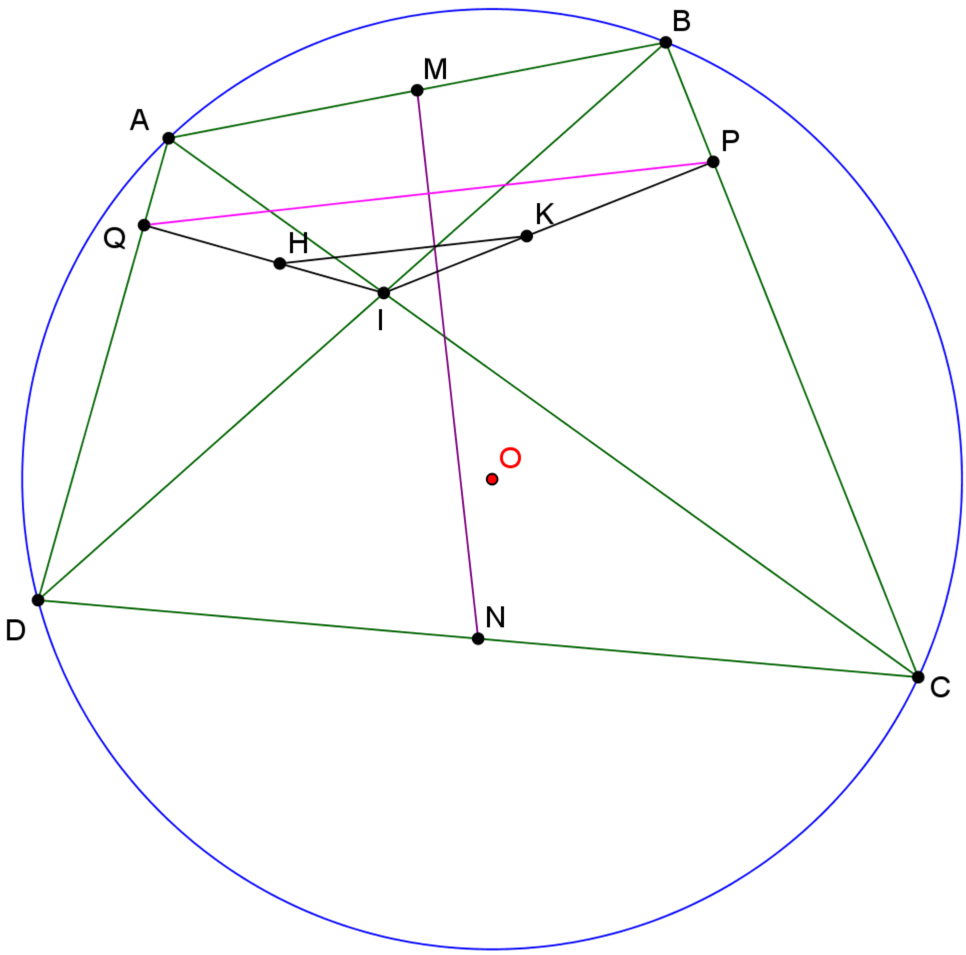
Bài 50

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi Ilà giao điểm AC và BD, H và Klần lượt là trực tâm của $\triangle IAD$ và $\triangle IBC$. M và N lần lượt là trung điểm AB và CD; Pvà Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC và AD.

1. Chứng minh $HK \perp MN$.
2. Chứng minh MN đi qua trung điểm PQ.

(Quảng Trị)

Lời giải



Gọi J là trung điểm $IA \Rightarrow JQ = \dfrac{IA}{2}, JM = \dfrac{IB}{2} \Rightarrow \dfrac{JQ}{JM}\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IQ}{IP}$. Mặt khác, $\widehat{QJM} = \widehat{QIP}$, do $\widehat{QIA} = \widehat{PIB} \Rightarrow \triangle PIQ \sim \triangle PJM$. Do đó, theo phép vị tự quay, $\triangle QJI \sim \triangle QMP$, mà $\triangle QJI$ cân tại J nên $\triangle QMP$ cân tại M. Chứng minh tương tự, $\triangle QNP$ cân tại N, suy ra đpcm.

Bài 51

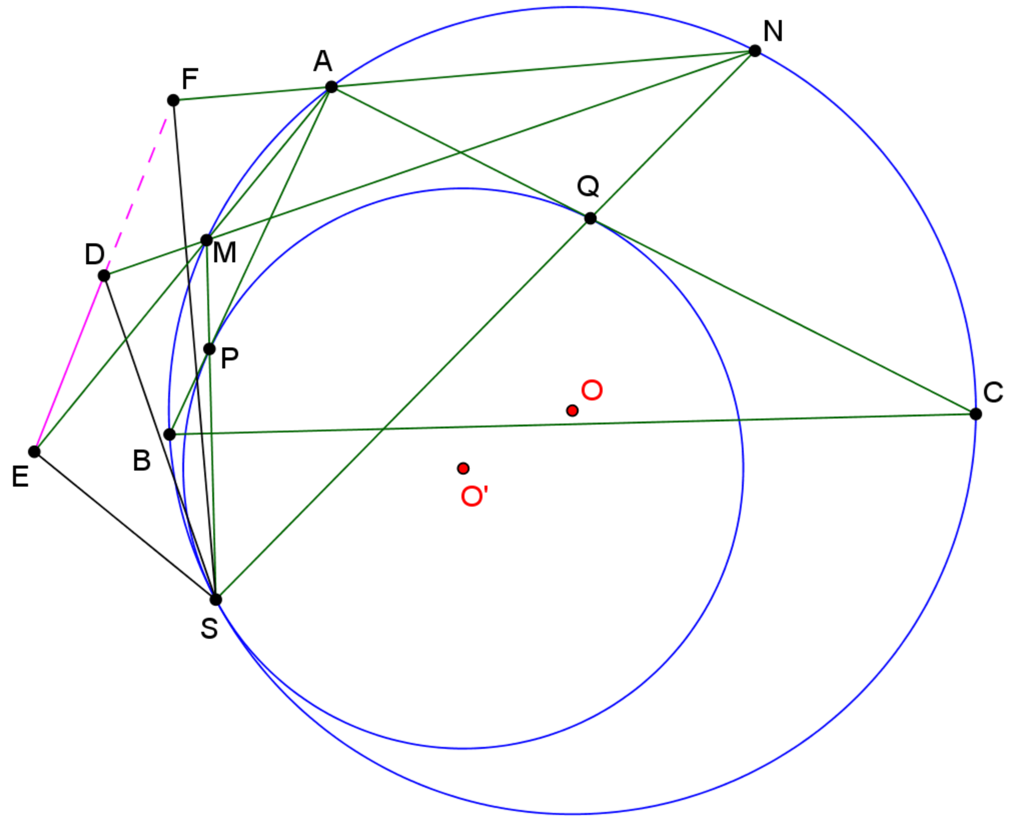
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại $P.Q$ và tiếp xúc trong với (O) tại S. Hai đường thẳng $SP.SQ$ cắt lại (O) theo thứ tự tại M, N. Gọi E, D, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của S trên các đường thẳng AM, MN, AN.

1. Chứng minh $SM.AN = SN.AM$.

2. Chứng minh $DE = DF$.

(Quảng Trị)

Lời giải



1. Gọi I là tâm (SPQ)

   - $\dfrac{SP}{SM} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SQ}{SN} \Rightarrow PQ//MN$.
   - Tiếp tuyến tại M, N cắt nhau tại T. Ta có $\widehat{MSN} = 180° - \widehat{MON} = \widehat{PAQ} \Rightarrow \dfrac{IA}{OT} = \dfrac{IQ}{ON} = \dfrac{SI}{SO} \Rightarrow A, S, O$ thẳng hàng $\Rightarrow AMSN$ là tứ giác điều hòa.

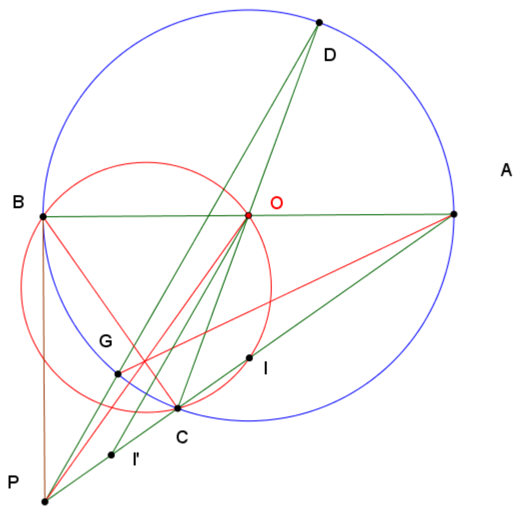
2. $DE = SM.sin\widehat{DSE} = SM.sin\widehat{AMN}, DF = SN.sin\widehat{DSF} = SN.sin\widehat{ANM} \Rightarrow \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{SM.sin\widehat{AMN}}{SN.sin\widehat{ANM}} = \dfrac{AN.sin\widehat{AMN}}{AM.sin\widehat{ANM}} = 1$

Bài 52

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt AC tại P. Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng DP với (O), I là trung điểm AP. Chứng minh rằng:

1. O, B, C, I cùng thuộc một đường tròn.
2. AG, BC, OP đồng quy.

(Thái Bình)



Lời giải

1. $OI//BP \Rightarrow \widehat{IOB} = \widehat{OBP} = 90^o$. Mà $\widehat{BCI} = 90^o$ nên O, B, C, I cùng nằm trên đường tròn đường kính BI.

2. Gọi I' là trung điểm của PC. Ta có $OI'//DP$ nên $\widehat{COI'} = \widehat{CDG}$. Mà $\widehat{CDG} = \widehat{CAG}, \widehat{COI'} = \widehat{I'OG} \Rightarrow I', A, O, G$ nằm trên một đường tròn (ω').
   Để ý rằng $\mathbf{P}_{O/(\omega)} = \mathbf{P}_{O/(\omega')} = 0$, hơn nữa $\mathbf{P}_{P/(\omega)} = \overline{PI}.\overline{PC} = \dfrac{1}{2}\overline{PA}.\overline{PI'} = \overline{PA}.\overline{PI'} = \mathbf{P}_{P/(\omega')} \Rightarrow$ OP là trục đẳng phương của (ω) và (ω'). Lại có AG là trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (ω), BC là trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (ω) nên ba đường thẳng AG, BC, OP đồng qui tại S là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(C), (\omega)$ và (ω').

Bài 53

Cho tam giác ABC nhọn, có $AC > AB$. Gọi D là hình chiếu của A trên BC và E là hình chiếu của D trên AC. Xét điểm F trên đoạn DE. Chứng minh rằng

$$AF \perp BF \iff EF.EC = BD.DE$$

.

(Thái Nguyên)

Hướng dẫn

Ta chứng minh được $AF \perp FB \Leftrightarrow$ Tứ giác $AFDB$ nội tiếp $\Leftrightarrow \triangle AEF \sim \triangle ADB \Leftrightarrow \dfrac{EA}{AD} = \dfrac{EF}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AE}{ED} = \dfrac{EF}{BD}$ (Do hệ thức lượng của $\triangle ADC$ với đường cao $DE \Leftrightarrow EF.EC = BD.DE$.

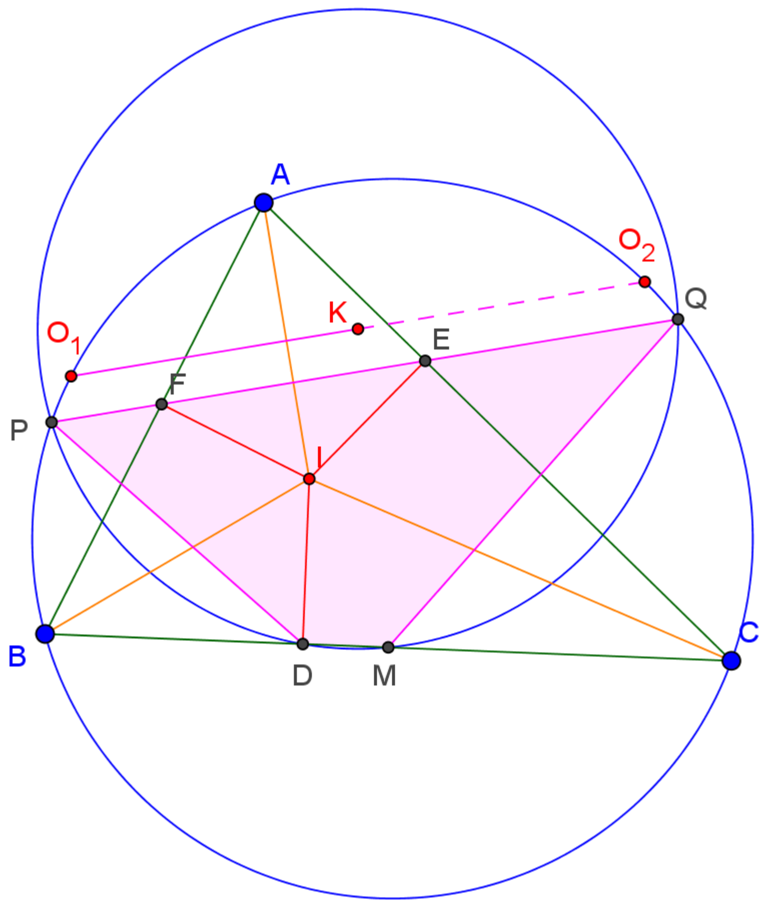
Bài 54

Cho tam giác ABC không cân tại A.Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ với BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt đường thẳng EF tại Pvà Q. Gọi Mlà trung điểm BC, O_1 và O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAB và IAC.

1. Chứng minh rằng D, P, Q, M nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DPQ$ nằm trên đường thẳng O_1O_2.

(Thanh Hoá)

Lời giải



1. Kéo dài MN cắt BC tại J. Dễ chứng minh $(JDBC) = -1$, từ đó kết hợp với hệ thức Maclaurin suy ra $JD.JG = JM.JN$ và ta có đpcm.

2. OH cắt (O) tại P suy ra $PH = ID$, mà $PH//ID$ nên $PHID$ là hình bình hành, suy ra trung điểm L của DH cũng là trung điểm L của PI.
   Mặt khác dễ chứng minh góc IAP vuông (dựa vào tính chất AI cắt (O) tại điểm chính giữa cung BC) nên dễ suy ra $APNM$ là hình thang cân.
   L thuộc trung trực của AP nên L cũng thuộc đường trung trực của MN, mà L cũng là đường trung trực của DG (dễ chứng minh), do đó $L \equiv K$ hay K, D, H thẳng hàng (đpcm)

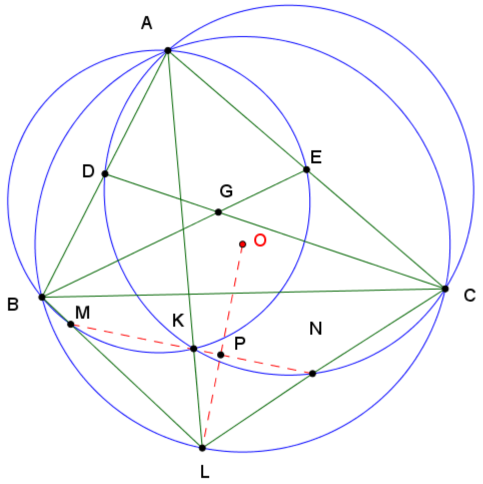
Bài 55

$\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC. Các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ cắt nhau tại K khác A. Đường thẳng LB cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$ tại điểm thứ hai M, đường thẳng LC cắt đường tròn ngoại tiếp ACD tại điểm thứ hai N.

1. Chứng minh M, K, L thẳng hàng và $MN \perp OL$.

2. Chứng minh K là trung điểm MN.

(Vĩnh Phúc)



Lời giải

1. Gọi G là giao của BE và CD. Tứ giác $ABLC$ nội tiếp nên $\widehat{AKN} = 180^o - \widehat{ACN} = \widehat{ABL} = 180^o - \widehat{ABM} = 180^o - \widehat{AKM} \Rightarrow M, K, N$ thẳng hàng.

   - Tứ giác $AKNC$ và $AKBM$ nội tiếp nên $LN.LC = LK.LA = LB.LM \Rightarrow$ Tứ giác $MBNC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBL} = \widehat{LNM}$.
   - Gọi P là giao điểm của OL và MN. Ta có

$$\widehat{PLN} = \widehat{OLC} = 90^o - \frac{\widehat{LOC}}{2} = 90^o - \widehat{LBC} = 90^o - \widehat{MNL} \Rightarrow OL \perp MN.$$

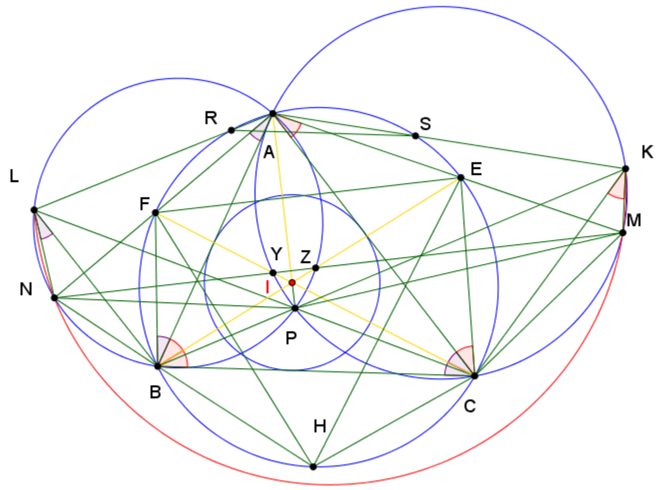
2. Áp dụng định lý Miquel cho tứ giác toàn phần $ADGEBC$ ta được K là điểm chung của hai đường tròn (BDG) và (CEG). Từ đó dễ thấy hai tam giác BKD và EKC đồng dạng.

   - $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{KB}{KE} = \dfrac{\sin\widehat{BAK}}{\sin\widehat{EAK}} = \dfrac{\sin\widehat{BAL}}{\sin\widehat{CAL}} = \dfrac{LB}{LC} \Rightarrow$ Tứ giác $ABLC$ điều hoà $\Rightarrow LA$ là đường đối trung của $\triangle LBC$.
   - Vì $\triangle LBC \sim \triangle LNM$ nên đường đối trung của $\triangle LBC$ là đường trung tuyến của $\triangle LNM$, tức là LA đi qua trung điểm của MN hay K là trung điểm MN.

Bài 56

$\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O), P nằm trong $\triangle ABC$ nằm trên đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi K, L lần lượt là giao điểm khác P của BP với (APC), CP với (APB). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các phân giác trong góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ với (O). các đường thẳng AE, AF cắt $(APC), (APB)$ lần lượt tại M, N khác A. Chứng minh K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.

(Vĩnh Phúc)



Lời giải

Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm của (APC) với CF, (APB) với BE, I là tâm nội tiếp $\triangle ABC$.

- $\widehat{NZB} = \widehat{NAB} = \widehat{FEB} \Rightarrow NZ//EF$. Tương tự $YM//EF$.
- Do A, P, I thẳng hàng nên I nằm trên trục đẳng phương của (APB) và $(APC) \Rightarrow IY.IC = IZ.IB \Rightarrow$ Tứ giác $BZYC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IZY} = \widehat{ICB} = \widehat{FEZ} \Rightarrow YZ//EF$. Vậy B, Z, Y, C thẳng hàng. Mặt khác, $\widehat{BLC} = \widehat{BAP} = \widehat{CAP} = \widehat{CKB} \Rightarrow$ Tứ giác $BLKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{LKB} = \widehat{LCB}$. Từ đó $\widehat{LKM} = \widehat{LKB} + \widehat{BKM} = \widehat{PCB} + \widehat{PAE} = \widehat{PCB} + \dfrac{\widehat{BAC}}{2} + \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$.
  Lại có $\widehat{LNM} = \widehat{ZPC} = \widehat{ZPI} + \widehat{IPC} = \widehat{ZBA} + \widehat{PAC} + \widehat{PCA} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \dfrac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{PCA}$. Do đó $\widehat{LKM} + \widehat{LNM} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $LKMN$ nội tiếp.
-

5 Phương trình và hệ phương trình

Bài 1

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2(x - 7y) + 12 = 0 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3} = x^2 + y^2 - 10x - 5y + 22 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Bến Tre)

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \le 3 \le y$
Phương trình đầu có thể được viết lại thành:

$$x^3 + 2x = y^3 - 6y^2 + 14y - 12 \Leftrightarrow x^3 + 2x = (y-2)^3 + 2(y-2).$$

Để ý hàm $f(t) = t^3 + 2t$ đồng biến trên R nên suy ra $x = y - 2$.
Thay vào phương trình sau rồi thu gọn, ta được:

$$\sqrt{5-y} + \sqrt{y-3} = 2y^2 - 19y + 46 \left(3 \le y \le 5\right)$$

Trừ 2 ở cả hai vế:

$$(y-4)\left(\frac{1}{\sqrt{y-3}+1} - \frac{1}{\sqrt{5-y}+1}\right) = (y-4)(2y-11)$$

Nếu $y \neq 4$ thì:

$$\frac{1}{\sqrt{y-3}+1} - \frac{1}{\sqrt{5-y}+1} = 2y - 11$$

Để ý trên $[3,5]$ vế trái là hàm nghịch biến nên nó không nhỏ hơn $-2+\sqrt{2}$ (đạt được khi $y = 5$. Lại để ý trên cùng đoạn thì vế phải làm hàm đồng biến nên không lớn hơn $2.5 - 11 = -1 < -2 + \sqrt{2}$.
Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $y = 4, x = 4 - 2 = 2$.

Nhận xét 28 *Mấu chốt bài toán trên là việc sử dụng bổ đề: Cho hàm số f khả vi và đơn điệu trên $\mathbb{D}$. Khi đó với $u, v \in \mathbb{D}$: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Kết quả trên được vận dụng để giải quyết phương trình đầu. Ta chuyển hai biến về hai vế, giữ lại vế có cấu trúc đơn giản hơn (cụ thể bài này là vế trái) và sau đó dùng biến đổi đại số để đưa vế còn lại về cấu trúc này.*

Bài 2

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x(x+1) + y(y-4x-1) = 2\left[(x+1)\sqrt{x^2+y} - 1\right] \\ 2^x + 5^x = \dfrac{13-y}{6} + 44log_2\left(2 + \dfrac{131x}{3} - 5^x\right) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Bắc Ninh)

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2 + y \ge 0, 5^x \le 2 + \dfrac{131x}{3}$.
Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM:

$$(x+1)^2 + (x^2+y) \ge 2(x+1)\sqrt{x^2+y}$$

Suy ra:

$$6x(x+1) + y(y-4x-1) \le (x+1)^2 + x^2 + y - 2$$

$$\Leftrightarrow (2x - y + 1)^2 \le 0$$

Vậy $y = 2x + 1$. Thay vào phương trình sau, ta được:

$$f(x) = 2^x + 5^x + \frac{x}{3} - 2 - 44\log_2(2 + \frac{131x}{3} - 5^x) = 0$$

Đặt $g(x) = 2^x + 5^x + \frac{x}{3} - 2; h(x) = \ln(2 + \frac{131x}{3} - 5^x)$ thì khi đó:

$$f(x) = g(x) - \frac{44}{\ln 2} h(x)$$

Để ý $g''(x) > 0, h''(x) < 0$ nên $f''(x) = 0$ vô nghiệm, tức $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt. Lại có $f(0) = f(3) = 0$ nên kết luận nghiệm hệ đã cho:$(x, y) = (0,1); (3,7)$

Nhận xét 29 *Bài toán trên có hai ý:*

1. *Khai thác phương trình đầu để có $y = 2x + 1$. Bước này cần vận dụng bất đẳng thức khéo léo để khử căn và ép được một bình phương không dương.*

2. *Thay vào phương trình sau và giải. Bước này vẫn không hề đơn giản khi có xuất hiện cả hàm mũ và hàm logarit. Ta đã vận dụng hệ quả định lý Rolle:*

   Bổ đề 11 (Định lý Rolle) *Cho hàm số $f(x)$ khả vi n lần trên miền xác định của nó. Khi đó nếu phương trình $f^{(n)}(x) = 0$ có tối đa k nghiệm thực phân biệt thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá $k + n$ nghiệm thực phân biệt.*

   Hệ quả trên tỏ ra khá hiệu quả với các bài phương trình phức tạp mà ta đã nhẩm được nghiệm. Khi đó ta sẽ khảo sát đạo hàm cấp phù hợp để giới hạn số nghiệm phương trình ban đầu.

Bài 3

1. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 4} + \sqrt{5x^2 + 4} + x^2 - 7x + 1 = 0$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 4y} = 5 \\ \sqrt{x + 4y} + 2x - y = 3 \end{cases}$$

(Hà Nội)

Lời giải

1. Để ý từ vế trái phương trình đã cho không nhỏ hơn $2 + x^2 - 7x + 1$ nên suy ra:

$$x^2 - 7x + 3 \le 0$$

Vậy $x > 0$.
Viết lại phương trình đã cho:

$$[\sqrt{2x^2 - 2x + 4} - (x + 1)] + [\sqrt{5x^2 + 4} - (2x + 1)] + x^2 - 7x + 1 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)[\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 4} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 4} + 2x + 1} + 1] = 0$$

Lại do

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2-2x+4}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{5x^2+4}+2x+1}+1=0(x>0)$$

nên phương trình trên tương đương $x^2-4x+3=0$, tức $x=1, x=3$. Đó cũng là nghiệm phương trình đã cho.

2. Điều kiện xác định: $2x+y\geq 0, x+4y\geq 0$
   Đặt $\sqrt{2x+y}=a\geq 0, \sqrt{x+4y}=b\geq 0$
   Khi đó

$$x=\frac{4a^2-b^2}{7}, y=\frac{2b^2-a^2}{7}$$

   Hệ đã cho được viết lại:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ b+\dfrac{9a^2-4b^2}{7}=3 \end{cases}$$

   Thay phương trình đầu vào phương trình sau, ta được:

$$b+\frac{9(5-b)^2-4b^2}{7}=3$$

   Giải được các nghiệm $b=\frac{68}{5}, b=3$, lần lượt tương ứng $a=\frac{-43}{5}, a=2$.
   Kết hợp điều kiện, chỉ chọn $(a,b)=(2,3)$.
   Suy ra nghiệm của hệ là $(x,y)=(1,2)$.

Nhận xét 30 *Câu 3.2 đã được xử lí bằng cách đặt ẩn là căn thức. Cách này giúp ta khử căn, và thật may mắn là hệ với ẩn mới gồm các phương trình có bậc không quá lớn, và phép thế giúp giải quyết gọn gàng.*

Bài 4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4 \\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y \end{cases}$$

(Hòa Bình)

Lời giải

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x\geq \dfrac{2}{7} \\ y\geq \dfrac{-3}{5} \\ y-3x+4\geq 0 \\ y+5x+4\geq 0 \end{cases}$$

Theo điều kiện xác định, $x > 0$ nên $\sqrt{y-3x+4} < \sqrt{y+5x+4}$.
Thực hiện nhân liên hợp với phương trình đầu, ta có:

$$\frac{8x}{\sqrt{y+5x+4}-\sqrt{y-3x+4}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y+5x+4}-\sqrt{y-3x+4} = 2x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y+5x+4} = x+2$$
$$\Leftrightarrow y = x^2 - x$$

Thay vào phương trình sau, ta được:

$$\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2} = 2x-1-4(x^2-x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2} = -4x^2+6x-1$$
$$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)]+(2x-\sqrt{7x-2}) = -(4x^2-7x+2)$$
$$\Leftrightarrow (4x^2-7x+2)[\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+(x+1)}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1] = 0$$

Để ý với điều kiện $x \geq \frac{2}{7}$thì mỗi số hạng trong thừa số thứ hai đều dương nên đẳng thức trên tương đương:

$$4x^2-7x+2 = 0$$

hay

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7+\sqrt{17}}{8} \\ x = \dfrac{7-\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$$

Từ đó kết luận bộ (x, y) là nghiệm của hệ là: $(\frac{7+\sqrt{17}}{8}, \frac{5+3\sqrt{17}}{32}), (\frac{7-\sqrt{17}}{8}, \frac{5-3\sqrt{17}}{32})$

Nhận xét 31 *Bài giải trên có hai ý:*

1. *Nhân liên hợp để tìm ra mối quan hệ hai biến. Ý tưởng khá rõ ràng khi để ý hai căn thức có cùng hệ số của y và hệ số tự do.*

2. *Nhân liên hợp tìm nghiệm ở phương trình sau.*
   Khi nhẩm nghiệm, nhận thấy phương trình sau nhiều khả năng không có nghiệm "đẹp" (nguyên hay hữu tỉ) nên ta nghĩ tới khả năng có nghiệm vô tỉ, tức nhân liên hợp với một biểu thức để xuất hiện hàm bậc hai làm thừa số chung. Gọi $ax+b, cx+d$ *lần lượt là các hàm được nhân liên hợp với hai số hạng ở vế trái. Khi đó, ta thu được các hàm bậc hai:*

$$5x^2-5x+3-(ax+b)^2$$

$$(cx+d)^2-(7x-2)$$

$$-4x^2+6x-1+(cx+d)-(ax+b)$$

   Cho các hàm này bằng nhau (hoặc đối nhau) để tìm được $a = b = 1, c = 2, d = 0$.

Bài 5

Giải phương trình trên tập số thực

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}.$$

(Khánh Hòa)

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq 2, x \neq 1, \sqrt{4-x}+x-5 \neq 0$ Khi đó, phương trình tương đương:

$$\frac{(x-2)\sqrt{x-2}-2\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2[(x-2)\sqrt{x-2}-1]}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x-2}+1)(x-3-\sqrt{x-2})}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2(\sqrt{x-2}+1)(x-1-\sqrt{x-2})}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3-\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2(x-1-\sqrt{x-2})}{x-1}$$

Bớt 1 ở hai vế:

$$\frac{2-\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-1}$$

Để ý vế phải không âm (do $\frac{(\sqrt{x-2}-1)^2}{x-1} \geq 0$).
Ta chứng minh vế trái không dương.
Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \leq \sqrt{2(x-2+4-x)}=2$$

nên tử số không âm.

Lại để ý với mọi số thực a, $a^2-a+1>(a-\frac{1}{2})^2 \geq 0$, tức $a^2+1>a$. Áp dụng kết quả này, ta có:

$$\sqrt{4-x}+x<4-x+1+x=5$$

nên mẫu số luôn âm.
Vậy đẳng thức xảy ra giữa hai vế khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x-2=4-x \\ \sqrt{4-x}=1 \\ (\sqrt{x-2}-1)^2=0 \end{cases}$$

tức $x=3$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Nhận xét 32 *Mấu chốt bài toán là phân tích nhân tử được tử số ở hai vế, sau đó là phép thêm bớt phù hợp để dễ đánh giá hơn.*

Bài 6

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\sqrt{x(x^2+3x+3)} = \sqrt[3]{y+4}+\sqrt{y+3}-1 = \\ 7\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+18x+18} = \sqrt[3]{y+4}+1 \end{cases}$$

(Khánh Hòa)

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq -1, y \geq -3, x(x^2+3x+3) \geq 0, x^2+18x+18 \geq 0$
Phương trình đầu tương đương:

$$\sqrt[3]{(x^3+3x^2+3x)+1}+\sqrt{x^3+3x^2+3x} = \sqrt[3]{y+4}+\sqrt{y+3}$$

Để ý hàm $\sqrt[3]{t^2+1}+\sqrt{t}$ đồng biến trên $(0,+\infty)$ nên đẳng thức trên cho ta:

$$\sqrt{x^3+3x^2+3x} = \sqrt{y+3}$$

tức $y+4=(x+1)^3, x>0$ (do $y \geq -3$)
Thay vào phương trình sau, ta có:

$$\begin{aligned} &7\sqrt{x+1} = x+2+\sqrt{x^2+18x+18} \\ &\Rightarrow 7\sqrt{x+1}-(x+2) = \sqrt{x^2+18x+18} \\ &\Rightarrow 49(x+1)+(x+2)^2-14(x+2)\sqrt{x+1} = x^2+18x+18 \\ &\Rightarrow 35x+35 = 14(x+2)\sqrt{x+1} \\ &\Rightarrow 25(x+1)^2 = 4(x+2)^2(x+1) \\ &\Rightarrow (x+1)(4x^2-9x-9) = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(x-3)(4x+3) = 0 \end{aligned}$$

Thử lại, chọn nghiệm $x=3$ (khi đó $y=60$).
Kết luận: $(x,y)=(3,60)$.

Nhận xét 33 *Một lần nữa, dạng $f(u)=f(v)$ đã thể hiện vai trò trong cách khai thác phương trình đầu.*

Bài 7

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1} = x+y \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+x+y+1 \end{cases}$$

(Lào Cai)

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq y-3$
Viết lại phương trình thứ hai dưới dạng:

$$(x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+2x-(x-y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y+3}+2} + (x-y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\frac{x^2+x+2+\sqrt{x-y+3}}{\sqrt{x-y+3}} = 0$$

Để ý $x^2+x+2 > (x-\frac{1}{2})^2 \geq 0$ nên $\dfrac{x^2+x+2+\sqrt{x-y+3}}{\sqrt{x-y+3}} > 0$, suy ra $y = x-1$.
Thay vào phương trình đầu tiên, ta có:

$$(x+1)\sqrt{x^2-x+2} + (x-2)\sqrt{x^2+x+1} = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x^2-x+2} + (x-2)(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+2}) = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x^2-x+2} + (x-2)\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+2}} = 2x-1$$

Vậy $x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\sqrt{x^2-x+2} + \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+2}} = 1$.
Trường hợp sau tương đương:

$$\sqrt{(x^2-x+2)(x^2+x+1)} + x^2-x+2+x-2 = \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+2}$$

Đặt $a = \sqrt{x^2+x+1}, b = \sqrt{x^2-x+2}$ thì $x^2 = \dfrac{a^2+b^2-3}{2}$.
Đẳng thức trên trở thành:

$$ab + \frac{a^2+b^2-3}{2} = a+b$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 2(a+b) - 3 = 0$$

Lại do $a+b \geq 0$ nên suy ra $a+b = 3$, tức:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2+x+1} - \left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)\right] + \left[\sqrt{x^2-x+2} - \left(\frac{-1}{3}x+\frac{5}{3}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (8x-7)(x+1).\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}\right) = 0. \qquad (5.1)$$

Để ý:

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}(x+2)^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|x| > \frac{1}{3}.(-x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} > 0$$

Và:

$$\sqrt{x^2-x+2} > \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}(x-2)^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|x| > \frac{1}{3}x$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} > 0$$

Nên (5.1) cho ta $x=-1$ (khi đó $y=-2$) hoặc $x=\frac{7}{8}$ (khi đó $y=\frac{-1}{8}$)

Kết luận: Các bộ (x,y) cần tìm: $(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}),(-1,-2),(\frac{7}{8},\frac{-1}{8})$.

Nhận xét 34 *Khai thác phương trình đầu không hề dễ vì nó không có dạng $f(u)=f(v)$. Khi đó, ta có thể cho một biến nhận giá trị đặc biệt, rồi giải ra giá trị biến còn lại. Mục đích là để "tiên đoán" quan hệ hai biến, và rồi ý tưởng phân tích nhân tử trở nên rõ ràng.*

Bài 8

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3+4x^2y+3xy^2 = x^6+3x^5+4x^4 \\ \sqrt{x^2+3}+\sqrt{3y+1}=4 \end{cases}$$

(Ninh Bình)

Lời giải

Điều kiện xác định: $y \geq \frac{-1}{3}$.

- Nếu $x=0$, thay vào phương trình đầu tìm được $y=0$. Nhưng cặp số này không thỏa phương trình sau.
- Nếu $x\neq 0$, phương trình đầu tiên tương đương

$$(y-x^2)(y^2+(x^2+3x)y+x^4+3x^3+4x^2)=0$$

Xét $f(y)=y^2+(x^2+3x)y+x^4+3x^3+4x^2$ là tam thức bậc hai theo biến y, có:

$$\Delta=(x^2+3x)^2-4(x^4+3x^3+4x^2)=-x^2(3x^2+6x+7)<0$$

Vậy: $f(y)>0$
Tức phương trình đầu cho ta:

$$y=x^2$$

Thay vào phương trình sau:

$$\sqrt{y+3}+\sqrt{3y+1}=4$$

Vế trái là hàm đồng biến theo y nên phương trình trên có tối đa một nghiệm. Lại có $y=1$ thỏa đẳng thức trên nên nó chính là nghiệm duy nhất phương trình.
Kết luận: $(x,y)=(1,1)$.

Nhận xét 35 *Đánh giá tổng quan hệ số tương ứng từng hạng tử ở hai vế là quan trọng để nhận ra mối tương quan hai biến được "che giấu" trong phương trình đầu.*

Bài 9

1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+y=2(x^2+1) \\ 2y^3+z=2(2y^2+1) \\ 3z^3+x=2(3z^2+1) \end{cases}$$

(Quảng Trị)

Lời giải

1. Điều kiện xác định: $x \geq 0$
   Phương trình đã cho được viết lại thành:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x}-\sqrt{3x+1})+(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{4x}+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}\right)=0$$

   Lại do $\frac{1}{\sqrt{4x}+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}>0$ nên $x=1$.
   Kết luận: $S=\{1\}$

2. Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} y-2=x^2(2-x) \\ z-2=2y^2(2-y) \\ x-2=3z^2(2-z) \end{cases}$$

   Nếu trong ba biến có một biến bằng 2 thì từ hệ trên suy ra các biến còn lại cũng bằng 2.
   Nếu cả ba biến đều khác 2, nhân vế theo vế ba phương trình rồi thu gọn, ta được: $x^2.2y^2.3z^2=-1$
   Rõ ràng phương trình trên vô nghiệm trên $\mathbb{R}$.
   Kết luận nghiệm của hệ $(x,y,z)=(2,2,2)$.

Bài 10

Giải bất phương trình

$$2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} \leqslant x^2-2x-1.$$

(Thái Nguyên)

Lời giải

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{2}-1 \\ x \leq -(\sqrt{2}+1) \end{array}\right.$. Đặt A là vế trái, B là vế phải.

Để ý đẳng thức:

$$A-B=(\sqrt{x^2+2x-1}-2)(\sqrt{x^2+2x-1}+2x)$$

Nếu $x \geq \sqrt{2}-1$, ta có $\sqrt{x^2+2x-1}+2x>0$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương:
$x^2+2x-1 \geq 4$, hay suy ra $x \geq \sqrt{6}-1$.
Nếu $x \leq -(\sqrt{2}+1)$, để ý khi đó $\sqrt{x^2+2x-1}+2x<0$ (tương đương $3x^2-2x+1>0$, hiển nhiên đúng), nên bất phương trình đã cho tương đương $x^2+2x-1 \leq 4$, hay suy ra:

$$-(\sqrt{6}+1) \leq x \leq -(\sqrt{2}+1)$$

Bài toán được giải quyết xong.

Nhận xét 36 *Hướng suy nghĩ đầu tiên xuất hiện là bình phương hai vế khử căn. Tuy nhiên, việc mơ hồ về dấu khiến việc bình phương này dẫn đến việc xét nhiều trường hợp. Như bài 7, ta lại phải để ý mối quan hệ giữa các biểu thức trong và ngoài căn, để từ đó có được phân tích nhân tử "đẹp mắt" và việc xét dấu trở nên nhẹ nhàng hơn.*

Bài 11

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Thái Nguyên)

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \leq 1, y^2 \leq \dfrac{9}{4}$.
Phương trình đầu tương đương:

$$2y^3+y=2(\sqrt{1-x})^3+\sqrt{1-x}$$

Để ý hàm $f(t) = 2t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $y = \sqrt{1-x}$, tức $y^2 = 1 - x$. Thay vào phương trình sau, ta được:

$$\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$$
$$\Leftrightarrow 4x+5 = (2x^2-6x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x-1)(x^2-4x+1) = 0$$

Vậy: $\left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \\ x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện xác định, suy ra tập nghiệm:$(x, y) = (1-\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}); (2-\sqrt{3}, \sqrt[4]{3})$

Bài 12

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+7x+3+\sqrt{x+1} = y^2+2y-xy+\sqrt{y-x} \\ 3\sqrt{6+x-y}+3\sqrt{3x+y-5} = y+6 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Vĩnh Phúc)

Lời giải

Điều kiện xác định: $6+x \geq y \geq x \geq -1, y \geq 5-3x$.
Viết lại phương trình đầu dưới dạng:

$$[(2x^2+7x+3)-(y^2+2y-xy)] + [\sqrt{x+1}-\sqrt{y-x}] = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1-y)(y+x+3) + (2x+1-y).\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y-x}} = 0$$

Từ điều kiện xác định, $y \geq x \geq -1$ nên $y+x+3 > 0$. Kết hợp với $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y-x}} > 0$, suy ra đẳng thức trên cho ta $y = 2x+1$.
Thay vào phương trình sau, ta được:
$3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ (điều kiện: $\dfrac{4}{5} \leq x \leq 5$)

$$\Leftrightarrow 9[5-x+5x-4+2\sqrt{(5-x)(5x-4)}] = 4x^2+28x+49$$
$$\Leftrightarrow 18\sqrt{(5-x)(5x-4)} = 4x^2-8x+40$$
$$\Leftrightarrow 9\sqrt{(5-x)(5x-4)} = 2x^2-4x+20$$
$$\Leftrightarrow 81(5-x)(5x-4) = (2x^2-4x+20)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4)(4x^2+4x+505) = 0$$

Để ý khi $\dfrac{4}{5} \leq x \leq 5$ thì $4x^2+4x+505 > 0$ nên suy ra phương trình trên có nghiệm $x = 1, x = 4$ tương ứng lần lượt $y = 3, y = 9$.
Kết luận: Nghiệm (x, y) của hệ phương trình là $(1,3), (4,9)$.

Nhận xét 37 *Cần một sự nhạy cảm để phát hiện mối quan hệ giữa hai biến rút ra từ phương trình đầu. Ta có thể dự đoán khi cho hai căn thức bằng nhau để tìm mối quan hệ, và kiểm tra lại mối quan hệ đó trong cả phương trình, từ đó có cách nhân liên hợp như trên. Phần còn lại trở nên đơn giản.*

6 Số học

Bài 1

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương (a, p, n) trong đó p là một số nguyên tố thỏa mãn
$$a^2(a^2+1) = 5^n(5^{n+1} - p^3).$$
2. Một số nguyên dương $n \geq 2$ được gọi là tốt nếu với mọi $2 \leq k \leq n$ thì n có dạng $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$ trong đó $(n, a_k) = 1$ và các số a_i là nguyên dương. Tính tổng tất cả các số tốt nhỏ hơn 2016.

(Trường THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Lời giải

1. Với $n = 0$ ta có
$$a^2(a^2+1) = 5 - p^3,$$
vô lý do vế phải âm.
Với $n \geq 1$, do $(a^2; a^2+1) = 1$ nên ta xét 2 trường hợp:

TH1: $5^n \mid a^2$
Khi đó đặt $a^2 = k.5^n \Rightarrow k(k.5^n + 1) = 5^{n+1} - p^3 \Rightarrow p^3 + k = 5^n(5 - k^2)$.
Dễ thấy vế phải là một số dương nên$k = 1$ hoặc $k = 2$.

- $k = 1 \Rightarrow p^3 + 1 = 4.5^n \Rightarrow \left(\frac{p+1}{4}\right)(p^2 - p + 1) = 5^n$. Mà $(\frac{p+1}{4}, p^2 - p + 1) = 1 \Rightarrow \frac{p+1}{4} = 1 \Rightarrow p = 3$ hoặc $p^2 - p + 1 = 1$ (vô lý do $p > 1$). Vậy $p = 3 \Rightarrow p^2 - p + 1 = 7$ không thỏa mãn nên phương trình vô nghiệm.
- $k = 2 \Rightarrow a^2 = 2.5^n \Rightarrow a^2 \equiv 2 \pmod 4$, vô lý.

TH2: $5^n \mid a^2 + 1$. Đặt $a^2 + 1 = k.5^n$ thì $p^3 - k = 5^n(5 - k^2)$.
Nếu $p^3 < k \Rightarrow k - p^3 \geq 5^n \Rightarrow k > 5^n \Rightarrow a^2 + 1 > 5^{2n} \Rightarrow a^2(a^2+1) > 5^{2n}(5^{2n} - 1) > 5^{2n+1} > 5^n(5^{n+1} - p^3)$. Do đó $p^3 > k$ nên $k = 1$ hoặc $k = 2$.

- $k = 1 \Rightarrow p^3 = 4.5^n + 1$. Chứng minh tương tự TH1, ta có PT này vô nghiệm.
- $k = 2 \Rightarrow p^3 = 5^n + 2$.
  * n chẵn ta có $3 \mid p \Rightarrow (p, n) = (3, 2)$.
  * n lẻ ta đặt $n = 2t + 1$. Khi đó
$$5^n + 2 \equiv 5^{2t+1} + 2 \pmod{13} \Rightarrow p^3 \equiv 5.(-1)^t + 2 \pmod{13}$$
$$\Rightarrow p^3 \equiv 7, 10 \pmod{13} \qquad (6.1)$$

Nhưng khi cho p chạy trên $\mod 13$, ta thu được kết quả là $p^3 \equiv 0, 1, 8, 5, 12 \pmod{13}$. Do đó (6.1) vô lý.

Vậy $p = 3, n = 2, a = 7$.

2. Rõ ràng mọi số tự nhiên lớn hơn 2, nếu muốn là số tốt thì nó phải lẻ (vì ta thấy nếu nó chẵn thì các a_i phải lẻ và khi đó dễ thấy nếu chọn k lẻ thì vô lý). Điều này gợi ý ta chứng minh mọi số tự nhiên lẻ lớn hơn 2 đều là số tốt.
Thật vậy xét n lẻ, $n > 2$. Ta chứng minh với mọi $2 \le k \le n$ thì đều có thể viết $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$ trong đó $(n, a_i) = 1$
Thật vậy, ta sẽ viết $n = (n - 2^x) + 2^x$. Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh
$$2^x = a_1 + a_2 + ... + a_k$$
với mọi $1 \le k \le 2^x$ và a_i đều là lũy thừa của 2. Do đó với $2 \le k \le 2^x + 1$ thì bài toán được chứng minh.
Chọn x là số lớn nhất thỏa mãn $2^x < n < 2^{x+1} \Rightarrow 2^x > \dfrac{n}{2}$ nên chỉ cần chứng minh nó đúng với $k > \dfrac{n}{2}$.
Mặt khác ta cũng viết được $n = 2 + 2 + ... + 2 + 1$ nên rõ ràng bằng quy nạp theo k với $k > \dfrac{n}{2}$ thì cũng thỏa mãn
Vậy tất cả các số tốt là 2 và các số lẻ lớn hơn 2.
Từ đó ta tính được tổng bằng $1 + 1008^2$.

Bài 2

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2 - 1$ là một lũy thừa của 7.

(Trường THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Lời giải

$$2p^2 - 1 = 7^t$$

TH1: $p = 2$ thỏa mãn do $2.2^2 - 1 = 7$

TH2: $p \ge 3$. Khi đó xét $\mod 4$ ta thấy t chẵn.
Đặt $t = 2^s a$ với $s \ge 1$ và $a \not\vdots 2$.
Xét $a \ge 3$ ta có:
$$2p^2 = 7^{2^s a} + 1$$
$$\Leftrightarrow 2p^2 = (7^{2^s} + 1)(7^{2^s(a-1)} - 7^{2^s(a-2)} + \ldots - 7^{2^s} + 1)$$
Đặt $A = 7^{2^s(a-1)} - 7^{2^s(a-2)} + \ldots - 7^{2^s} + 1$. Do $s \ge 1$ nên $7^{2^s} + 1 > 2$, hơn nữa $7^{2^s} + 1 \vdots 2$ nên $7^{2^s} + 1 = 2p$ hoặc $7^{2^s} + 1 = 2p^2$.

– Nếu $7^{2^s} + 1 = 2p \Rightarrow A = p$. Nhưng $a \ge 3$ thì $A > 7^{2^s} + 1 \Rightarrow p > 2p$ vô lý.

- Nếu $7^{2^s}+1=2p^2 \Rightarrow A=1$. Nhưng $a\geq 3$ thì $A>1$ nên vô lý. Do đó $a=1$. Ta có

$$7^{2^s}+1=2p^2 \Leftrightarrow \frac{p-1}{2}.\frac{p+1}{2}=\frac{7^{2^{s-1}}+1}{2}.\frac{7^{2^{s-1}}-1}{4}$$

Lại có $\left(\frac{p-1}{2};\frac{p+1}{2}\right)=1$ nên $\frac{p-1}{2} \vdots \frac{7^{2^{s-1}}+1}{2}$ hoặc $\frac{p+1}{2} \vdots \frac{7^{2^{s-1}}+1}{2}$

Nếu $\frac{p-1}{2} \vdots \frac{7^{2^{s-1}}+1}{2} \Rightarrow \frac{p+1}{2} \mid \frac{7^{2^{s-1}}-1}{4}$.

Như thế thì $\frac{p-1}{2} \geq \frac{7^{2^{s-1}}+1}{2} > \frac{7^{2^{s-1}}-1}{4} \geq \frac{p+1}{2} \Rightarrow p-1>p+1$ vô lý.

Do đó $\frac{p+1}{2} \vdots \frac{7^{2^{s-1}}+1}{2} \Rightarrow \frac{7^{2^{s-1}}-1}{4} \vdots \frac{p-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{p+1}{2} \geq \frac{7^{2^{s-1}}+1}{2} > 2.\frac{7^{2^{s-1}}-1}{4} \geq 2.\frac{p-1}{2} \Rightarrow p+1>2(p-1) \Rightarrow 3>p \Rightarrow p=2$ vô lý.

Vậy $p=2$

Bài 3

Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m có n chữ số, chỉ gồm các chữ số $1,2,3$ và chia hết cho $S(m)$(tổng các chữ số của m).

(Trường THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Lời giải

TH1: n là lũy thừa của 3. Chọn $m=111...11$ (n số 1). Đặt $n=3^t$. Theo bổ đề LTE ta có

$$v_3(10^{3^t}-1)=v_3(10-1)+v_3(3^t)=t+2.$$

Do đó $m=\frac{10^n-1}{9} \vdots n$.

TH2: n không là lũy thừa của 3 thì tồn tại số x sao cho $3^x<n<3^{x+1}$. Khi đó ta sẽ chọn $S(m)=3^{x+1}$, tức là chỉ ra tồn tại số m có tổng các chữ số là 3^{x+1} và $m \vdots 3^{x+1}$.

- Nếu $n\leq 2.3^x$, đặt $n=3^x+t$. Ta chọn $m=111...1333...3222...2$, trong đó gồm t số 1, t số 2 và 3^x-t số 3. Sau khi biến đổi, ta thu được $m=\frac{(10^t+2)(10^{3^x}-1)}{9} \vdots 3^{x+1}$ (đúng theo bổ đề LTE).
- Nếu $n>2.3^x$. Đặt $n=2.3^x+t$
Ta chọn $m=111...1222...21.....1$ thứ tự từ trái sang phải là gồm 3^x+t số 1, 3^x-t số 2 rồi lại t số 1. Sau khi biến đổi ta thu được $m=\frac{(10^{3^x+t}+10^t+1)(10^{3^x}-1)}{9} \vdots 3^{x+1}$ (đúng theo bổ đề LTE).

Vậy ta có đpcm.

Bài 4

Cho hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện: f tăng thực sự và $f(2n) = 2f(n)$ với mọi số n nguyên dương.

1. Giả sử $f(1) = 3$ và p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh tồn tại n sao cho $f(n)$ chia hết cho p.
2. Cho q là một số nguyên tố lẻ. Hãy xây dựng một hàm f thỏa mãn bài toán mà $f(n)$ không chia hết cho q với mọi số nguyên dương n.

(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp.HCM)

Lời giải

Chúng tôi xin đăng lời giải từ trang nangkhieutoan.com.

1. Đặt $A = \{f(n+1) - f(n) | n \in \mathbb{N}^*\}$, vì f tăng thực sự nên $A \subseteq \mathbb{N}^*$. Khi đó tồn tại phần tử k nhỏ nhất của A và n thỏa mãn $k = f(n+1) - f(n)$.
   Khi đó $f(2n+2)-f(2n) = 2(f(n+1)-f(n)) = 2k$ mà $\begin{cases} f(2n) < f(2n+1) < f(2n+2) \\ f(2n+1) - f(2n) \geq k \\ f(2n+2) - f(2n+1) \geq k \end{cases}$
   $\Rightarrow f(2n+1) - f(2n) = k$
   Bằng quy nạp ta chứng minh được $\begin{cases} f(2^i n) = 2^i f(n) \\ f(2^i n+1) = 2^i f(n) + k \\ \dots \\ f(2^i n+i) = 2^i f(n) + ik \end{cases}$
   Do $f(1) = 3, f(2) = 6$ nên $k \leq 3 \Rightarrow (k, p) = 1$
   Khi đó p số $f(2^p + i)$ với $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ sẽ tạo thành một hệ thặng dư đầy đủ mod p nên sẽ có một số chia hết cho p.

2. Ta xây dựng hàm f như sau: $\begin{cases} f(1) = 2^a > q \\ f(2n) = 2f(n) \\ f(2n+1) = f(2n) + q \end{cases}$
   Ta chứng minh f thỏa đề bài.
   (a) f là hàm tăng thực sự. Ta chứng minh $f(n+1) - f(n) \geq q$ bằng quy nạp. Với $n = 1$ ta có $f(2) - f(1) = 2^a > q$. Giả sử đúng đến k. Ta xét $f(k+1)$.
      - Nếu k chẵn, dễ thấy ta có điều phải chứng minh thỏa theo cách xây dựng hàm.
      - Nếu k lẻ, ta có $f(k+1) = 2f\left(\dfrac{k+1}{2}\right) \geq f\left(\dfrac{k-1}{2} + q\right) = f(k-1) + 2q$ và ta có điều phải chứng minh.

   (b) Ta chứng minh không tồn tại n thỏa $q | f(n)$ theo quy nạp.
      - Ta có $f(1) = 2^a$ không chia hết cho q.
      - Giả sử đúng đến k.
        - Nếu k chẵn thì $f(k+1) = f(k) + q$.

– Nếu k lẻ thì $f(k+1) = 2f\left(\frac{k+1}{2}\right)$ không chia hết cho q.

Vậy hàm f thỏa đề.

Bài 5

Với mỗi số nguyên dương n ,tồn tại duy nhất số tự nhiên a thỏa mãn $a^2 \le n < (a+1)^2$. Đặt $\Delta_n = n - a^2$.

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của Δ_n khi n thay đổi và luôn thỏa $n = 15m^2$ với m là số nguyên dương.
2. Cho p, q là các số nguyên dương và $d = 5(4p+3)q^2$. Chứng minh $\Delta_d \ge 5$.

(Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp.HCM)

Lời giải

Chúng tôi xin trích đăng lời giải từ trang nangkhieutoan.com.

1. Ta chỉ cần tìm Δ_n nhỏ nhất để phương trình $15m^2 - a^2 = \Delta_n$ có nghiệm nguyên dương. Để ý rằng $15 - 3^2 = 6$, điều này gợi ý cho ta chứng minh phương trình không có nghiệm với $\Delta_n < 6$.
Ta có $3|a^2 + \Delta_n$ nên suy ra
$$3|\Delta_n \text{ hoặc } 3|\Delta_n + 1. \tag{6.2}$$
Mặt khác $5|a^2 + \Delta_n$ nên suy ra
$$\Delta_n \equiv 0, 1, 4 \pmod 5. \tag{6.3}$$
Từ (6.2) và (6.3) ta có nếu $\Delta_n < 6$ thỏa đề thì $\Delta_n = 5$.
Ta có $15m^2 - a^2 = 5$ nên $5|a$, đặt $a = 5s$ ta có $3m^2 - 5s^2 = 1$.
Mà $3m^2 - 1 \equiv -1, 2, 11 \pmod 5$ nên phương trình vô nghiệm.

2. Xin nhắc lại một bổ đề quen thuộc như sau.

Bổ đề 12 *Nếu $p = 4k+3$ nguyên tố, $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$ thì $p|a$ và $p|b$.*

Quay lại bài toán. Xét phương trình $5(4p+3)q^2 - a^2 = \Delta_d$. Để ý rằng $a^2 \equiv 0, 1, 4$ (mod 5) $\Rightarrow \Delta_d \equiv 0, 1, 4$ (mod 5). Mặt khác $5(4p+3) \equiv 3$ (mod 4) nên khác số chính phương.
Nếu $\Delta_d = 1$ ta có $a^2 + 1 = 5(4p+3)q^2$. Ta có $5(4p+3)$ là số có dạng $4k+3$ nên tồn tại ước nguyên tố r có dạng $4k+3$. Suy ra $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod r$
Áp dụng bổ đề trên, ta có: $1 \equiv 0 \pmod r$ (Vô lý)
Tương tự cho trường hợp $\Delta_d = 4$ thì cũng có điều vô lý. Vậy $\Delta_d \ge 5$.

Bài 6

Tìm các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn

$$a + 2^b + 3^c = 3d! + 1,$$

biết rằng tồn tại các số nguyên tố p, q sao cho $a = (p+1)(2p+1) = (q+1)(q-1)^2$.

(Trường THPT chuyên ĐH Vinh)

Lời giải

Ta chia làm hai ý như sau:

1. Tìm tất cả các số a thoả mãn đề bài.
Khai triển và thu gọn, ta có $p(2p+3) = q(q^2 - q - 1)$.
Do $(q, q^2 - q - 1) = 1$ và p là số nguyên tố nên $p|q$ hoặc $p|q^2 - q - 1$.

    - Nếu $p|q$ thì do p, q là số nguyên tố nên $p = q$. Thay vào tính được $p = q = 4$ hoặc $p = q = -1$, đều loại.
    - Nếu $p|q^2 - q - 1$ thì $q|2p+3$. Đặt $2p+3 = kq (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$. Thay vào đẳng thức ban đầu, khai triển và thu gọn thì

    $$2q^2 - (2 + k^2)q + 3k - 2 = 0$$

    Xem đây là phương trình bậc hai theo q, để có nghiệm nguyên thì cần có $\triangle$ là số chính phương. Khi đó $\Delta = k^4 + 4k^2 - 24k + 20$.
    Thử với k từ 1 đến 5, do k lẻ ta chọn $k \in \{1, 3, 5\}$. Thế vào tính lại, nhận $k = 5$, $q = 13$, $p = 31$, $a = 2016$.
    Với $k \geq 6$ thì $(k^2+2)^2 > k^4+4k^2-24k+20 > (k^2)^2$ nên $k^4+4k^2-24k+20 = (k^2+1)^2$, Phương trình này không cho nghiệm nguyên nên loại.

    Vậy $a = 2016$.

2. Tìm tất cả các số b, c, d thoả mãn đề bài.
Từ giả thiết, $3d! + 1 > 2016$ nên suy ra $d \geq 6$ hay $2|d!$.
Ta có đẳng thức $2015 + 2^b + 3^c = 3d!$.

    Từ đây ta có $2^b \equiv 1 \pmod 9$ và $3^c \equiv 1 \pmod{16}$. Vì thế $b \,\vdots\, 6$ và $c \,\vdots\, 4$.
    Đặt $b = 6x$; $c = 4y$ ta có

    $$2015 + 64^x + 81^y = 3d!.$$

    - Nếu $d = 6 \Rightarrow x = y = 1 \Rightarrow b = 6, c = 4$.
    - Nếu $d \geq 7 \Rightarrow 3d! \,\vdots\, 7$, mà $2015 + 64^x + 81^y \equiv 4^y \pmod 7$ hay không chia hết cho 7, vô lý.

Vậy $a = 2016$, $b = 6$, $c = 4$.

Bài 7

Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 34 \\ a_{n+1} = 4a_n^3 - 104a_n^2 - 107a_n \end{cases}.$$

với mọi số n nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn hai điều kiện $p \equiv 3(\bmod 4)$ và $a_{2017} + 1 \vdots p$.

(Bắc Ninh)

Lời giải

Từ công thức truy hồi ta có

$$a_{n+1} - 27 = (a_n - 27)(2a_n + 1)^2.$$

Do đó $a_n - 27 = (a_1 - 27)\prod_{k=1}^{n-1}(2a_k + 1)^2 = 7\prod_{k=1}^{n-1}(2a_k + 1)^2$.

Do đó $a_n + 1 = 7\left[\prod_{k=1}^{n-1}(2a_k + 1)^2 + 4\right]$.

Xét số nguyên tố $p \mid \prod_{k=1}^{n-1}(2a_k + 1)^2 + 4$ (dĩ nhiên ta thấy chỉ có p lẻ).

Ta có $\left(\frac{-4}{p}\right) = 1 \iff \left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ hay $p \equiv 1 \pmod 4$

Do đó số cần tìm là 7.

Nhận xét 38 *Lời giải trên cho ta thấy được ngoài những yếu tố giải tích phức tạp, các bài toán dãy số còn mang "hương vị" số học. Như vậy, ngoài việc khảo sát hàm, biện luận phương trình,... ta còn phải nắm vững những tính chất cơ bản nhưng vô cùng quan trọng của số học. Mời bạn đọc thử sức với các bài toán dãy số mang tính số học sau:*

1. *Dãy số (u_n) được xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 24 \\ u_n = \dfrac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1}u_{n-2}^2}{u_{n-2}u_{n-3}}, \forall n \geq 4 \end{cases}$$

   Chứng minh rằng với mọi n là số nguyên dương thì $u_n \vdots n$.

2. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_n = 2^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng u_p của dãy sao cho $p | u_p$ với p là số nguyên tố.*

3. *Dãy số (u_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 1999u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho u_n là số nguyên tố.

Bài 8

Cho p là số nguyên tố lẻ và $T = \sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k - (2^p + 1)$. Chứng minh rằng T chia hết cho p^2 .

(Bến Tre)

Lời giải

$T = \sum_{k=0}^{p} C_p^k . C_{p+k}^k - (2^p + 1) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k . C_{p+k}^k - (\sum_{k=0}^{p} C_p^k + 1) = \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C_{p+k}^k + 1 + C_{2p}^p - (\sum_{k=0}^{p} C_p^k + 3) = \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (C_{p+k}^k - 1) + (C_{2p}^p - 2)$. Đặt $A = \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (C_{p+k}^k - 1),\ \ B = C_{2p}^p - 2$

Ta có $C_p^k \vdots p$ với p là số nguyên tố và $1 \le k \le p-1$.

- Xét $C_{p+k}^k - 1 = \dfrac{(p+1)...(p+k) - k!}{k!}$. Ta có

$$(p+1)(p+2)...(p+k) - k! \equiv k! - k! \equiv 0 \pmod{p}$$

  cộng với việc

$$(p, k!) = 1$$

  nên ta có

$$p^2 | A.$$

- Xét $(1+x)^{2p} = (1+x)^p.(1+x)^p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k . x^k = (\sum_{i=0}^{p} C_p^i . x^i)^2$. Đồng nhất hệ số của x^p hai vế ta có

$$C_{2p}^p = 2 + \sum_{k=0}^{p-1} .(C_p^k)^2 \Rightarrow C_{2p}^p - 2 = \sum_{k=0}^{p-1} .(C_p^k)^2 \vdots p^2 \Rightarrow p^2 | B.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 9

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên dương

$$(x+y)^2 = n(4xy+1).$$

(Bình Dương)

Lời giải

$$(x+y)^2 = n(4xy+1) \Leftrightarrow x^2+2xy(1-2n)+y^2-n=0. \quad (6.4)$$

Gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (6.4) thỏa mãn x_0+y_0 nhỏ nhất. Do vai trò x, y như nhau nên giả sử $y_0 \le x_0$

Coi phương trình (6.4) là phương trình bậc 2, ẩn x. Gọi $(x_1; y_0)$ là một nghiệm khác của (6.4). Theo hệ thức Viete ta có:

$$\begin{cases} x_0+x_1 = 2(2n-1) \\ x_0x_1 = y_0^2 - n \end{cases}$$

với x_1 nguyên.

Nếu $y_0^2 < n$ thì $x_1 < 0 \Rightarrow x_1 \le -1 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1y_0(1-2n) + y_0^2 - n \ge 2y_0(2n-1) + y_0^2 - n > 0$ do $2y_0(2n-1) \ge 2n > n$ ta có điều vô lý.

Suy ra x_1 nguyên không âm. Xét các trường hợp:

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_0 = 2(2n-1)$ và $n = y_0^2$. Thay vào phương trình (6.4) có $y_0 = 1$ suy ra $n = 1$. Thử lại với $n = 1$ phương trình (6.4) có nghiệm $(x; y)$ là $(2; 1)$.

- x_1 nguyên dương thì $(x_1; y_0)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình (6.4), do đó:

  $$x_1 + y_0 \ge x_0 + y_0 \Rightarrow x_1 \ge x_0 \Rightarrow y_0^2 - n \ge x_0^2 \ge y_0^2 \Rightarrow -n \ge 0$$

  vô lý.

Vậy $n = 1$ để phương trình (6.4) có nghiệm nguyên dương.

Bài 10

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn $12^x + y^4 = 56^z$.

(Hà Nội)

Lời giải

Nếu 1 trong 3 số x, y, z bằng 0 ta dễ dàng suy ra 2 số còn lại cũng bằng 0.

Xét x, y, z khác 0. Ta có x, z phải nguyên dương

Xét mod 3, ta thấy z chẵn và y không chia hết cho 3. Đặt $z = 2k$. Ta có: $12^x = (56^k - y^2)(56^k + y^2)$. Vì $(56^k - y^2) + (56^k + y^2)$ không chia hết cho 3 nên có dạng:

$56^k + y^2 = 3^x.4^{a_1}, 56^k - y^2 = 4^{a_2}$ hoặc $56^k - y^2 = 3^x.4^{a_1}, 56^k + y^2 = 4^{a_2}$.

TH1: $56^k - y^2 = 3^x.4^{a_1}$, $56^k + y^2 = 4^{a_2}$

Do đó: $2.y^2 \equiv 4^{a_2} \pmod 3$ (Vô lý vì $2.y^2 \equiv 2 \pmod 3$ mà $4^{a_2} \equiv 1 \pmod 3$)

TH2: $56^k + y^2 = 3^x.4^{a_1}$, $56^k - y^2 = 4^{a_2}$

Khi đó $y^2 + 2^{2a_2} = 56^k$. Mặt khác 56 có ước 7 là số nguyên tố dạng $4t+3 \Rightarrow y \vdots 7; 2 \vdots 7$ (vô lý)

Vậy PT có nghiệm $x = y = z = 0$.

Bài 11

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$x^{19} - 1 = (x-1)(y^{12} - 1).$$

(Hà Tĩnh)

Lời giải

Trước hết xin phát biểu và chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 13 *Với x là số nguyên dương, $p \mid \dfrac{x^{19}-1}{x-1}$ thì p=19 hoặc $p = 19n+1$.*

Chứng minh 1 *Giả sử $p \not\equiv 1(\bmod 19)$ do đó $(p-1;19) = 1 \Rightarrow$ Tồn tại k, m thỏa mãn:* $19k + (p-1)m = 1 \Rightarrow x \equiv x^{19k+(p-1)m} = (x^{19})^k.(x^{p-1})^m \equiv 1\,(\bmod p) \Rightarrow \dfrac{x^{19}-1}{x-1} = x^{18} + ... + 1 \equiv 19(\bmod p)$. *Vậy* $p = 19$.

Quay lại bài toán. Từ bổ đề suy ra mỗi ước d của $\dfrac{x^{19}-1}{x-1}$ thỏa mãn $d = 19k$, hoặc $d = 19k+1$.

Giả sử (x, y) là nghiệm của PT, ta có $y - 1 \mid \dfrac{x^{19}-1}{x-1}$

$y = 1 \rightarrow x = 1$

Xét $y \geq 2$. Theo bổ đề thì $y = 19k+1$, hoặc $y = 19k+2$.

Do đó $y^{11} + y^{10} + ... + 1 \equiv 0, 1(\bmod 19)$

Mặt khác $y^{11} + y^{10} + ... + 1 \mid \dfrac{x^{19}-1}{x-1}$ nên $y^{11} + y^{10} + ... + 1 \equiv 1, 2(\bmod 19)$ (mâu thuẫn)

Vậy phương trình chỉ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$.

Bài 12

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $1^n + 2^n + \ldots + 2016^n$ không chia hết cho 2017.

(Hải Dương)

Lời giải

Ta chứng minh bài toán tổng quát: *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng* $1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k \,\vdots\, p$ *với mọi* $k \not\vdots\, p-1$. Thật vậy, mỗi số nguyên tố p có ít nhất một căn nguyên thủy m. Khi đó $\{m; m^2; \ldots; m^{p-1}\} \equiv \{1; 2; \ldots; p-1\}$.

Vì thế

$$1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k = m^k + (m^2)^k + \ldots + (m^{p-1})^k = m^k \frac{(m^k)^{p-1} - 1}{m^k - 1}.$$

Do m là căn nguyên thủy của p và $k \not\vdots\, p-1$ nên $m^k - 1 \not\vdots\, p$, lại có $(m^k)^{p-1} - 1 \,\vdots\, p$. Suy ra đpcm.

Từ bài toán trên suy ra số n nhỏ nhất cần tìm là 2016.

Bài 13

1. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu $ord_{p^2}(2) = p(p-1)$ và $v_p(2^{p(p-1)}-1) = 2$ thì $ord_{p^k}(2) = p^{k-1}(p-1)$ và $v_p(2^{p^{k-1}(p-1)}-1) = k, \forall k \geq 2$, trong đó $ord_b(a)$ là cấp của a theo mod b và $v_p(a)$ là số mũ đúng của a theo mod b.

2. Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 10.33^{10}$ thỏa mãn đồng thời

$$2^n \equiv 2017 \pmod{3^{11}} \ ; \ 2^n \equiv 2016 \pmod{11^3}?$$

(Hải Phòng)

Lời giải

1. Giả sử khẳng định đúng với $k \geq 2$, đặt $a = 2^{p^{k-1}(p-1)}$ ta có

$$a^l - 1 = (a-1)\left(a^{l-1} + a^{l-2} + \ldots + a + 1\right) \equiv (a-1).l \left(\operatorname{mod} p^{k+1}\right).$$

Do đó

$$a^l - 1 \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p^{k+1}\right) \Leftrightarrow l \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p) \Rightarrow ord_{p^{k+1}}(2) = (p-1).p^k$$

và

$$v_p\left(a^p - 1\right) = v_p(a-1) + 1 \Rightarrow v_p\left(2^{(p-1).p^k} - 1\right) = k+1.$$

2. Để ý rằng

$$ord_{3^2}(2) = 2.3 = 6; v_3\left(2^6 - 1\right) = 2$$

và

$$ord_{11^2}(2) = 10.11 = 110; v_{11}\left(2^{110} - 1\right) = 2$$

nên $\Rightarrow \left\{2^0; 2^1; 2^2; \ldots; 2^{2.3^{10}-1}\right\}$ và $\left\{2^0; 2^1; 2^2; \ldots; 2^{10.11^2-1}\right\}$ lần lượt là các hệ thặng dư thu gọn theo các module 3^11 và module 11^3. Vì vậy $\exists n_1, n_2$ sao cho

$$\begin{cases} 2^{n_1} \equiv 2017 \left(\operatorname{mod} 3^{11}\right) \\ 2^{n_2} \equiv 2016 \left(\operatorname{mod} 11^3\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{n_1} \equiv 1 \,(\operatorname{mod} 3) \\ 2^{n_2} \equiv 3 \,(\operatorname{mod} 11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 2k_1 \\ n_2 = 10k' + 8 = 2k_2 \end{cases}$$

Mà $\left(3^{10}; 5.11^2\right) = 1$ nên theo định lý thặng dư Trung Hoa $\exists k : \begin{cases} k \equiv k_1 \left(\operatorname{mod} 3^{10}\right) \\ k \equiv k_2 \left(\operatorname{mod} 5.11^2\right) \end{cases}$.

Đặt $n = 2k$ thì $\begin{cases} n \equiv n_1 \left(\operatorname{mod} 2.3^{10}\right) \\ n \equiv n_2 \left(\operatorname{mod} 10.11^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^n \equiv 2^{n_1} \equiv 2017 \left(\operatorname{mod} 3^{11}\right) \\ 2^n \equiv 2^{n_2} \equiv 2016 \left(\operatorname{mod} 11^3\right) \end{cases}$. Suy ra hệ trên có nghiệm duy nhất theo module $BCNN\left[2.3^{10}; 10.11^2\right] = 10.3^{10}.11^2$. Như vậy có 11^8 số nguyên dương n thỏa mãn.

Bài 14

Với mỗi số nguyên dương n lớn hơn 1, số $\frac{1}{n}$ được biểu diễn dưới dạng thập phân như sau $\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 \ldots$. Tìm tất cả các số n sao cho $n = a_1 + a_2 + \ldots$.

(Tp.HCM)

Lời giải

Vì $\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 \ldots$ có hữu hạn số sau dấu phẩy nên ta đặt $\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 \ldots a_m = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}}{10^m}$
$\Rightarrow \ n.\overline{a_1 a_2 \ldots a_m} = 10^m$ cho nên n chỉ có ước nguyên tố là 2 và 5. Đặt $n = 2^p 5^q$. Kí hiệu $s(x)$ là tổng các chữ số của x trong hệ thập phân. Ta có $s(x) \le x$.

- Nếu $q \ge p \Rightarrow 2^p 5^q = s\left(2^{q-p}\right) \le 2^{q-p} < 2^p 5^q$ (vô lý).
- Nếu $p > q \Rightarrow 2^p 5^q = s\left(5^{p-q}\right)$. Với $p \ge 6 \Rightarrow 2^p \le 2^p 5^q = s\left(5^{p-q}\right) \le 9\left(p-q\right) \le 9p < 2^p$ (vô lý). Do đó $1 \le p \le 5 \Rightarrow s\left(5^{p-q}\right) \in \left\{5, 7, 8, 13, 11\right\}$. Mặt khác n chẵn nên $s\left(5^{p-q}\right)$ chẵn. Vì thế $s\left(5^{p-q}\right) = 8 \ \Rightarrow \ p - q = 3$. Thử các trường hợp ta thấy $p = 3, q = 0$ thỏa mãn.

Vậy $n = 8$.

Bài 15

Cho các số nguyên tố thỏa mãn $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ và $p_4 - p_1 = 8$. Giả sử $p_1 > 5$. Chứng minh rằng p_1 chia 30 dư 11.

(Khánh Hòa)

Lời giải

Từ giả thiết thì p_2, p_3 chỉ có thể nhận 2 trong 3 giá trị $\{p_1 + 2; p_1 + 4; p_1 + 6\}$.
Nếu $p_2 = p_1 + 2;\ p_3 = p_1 + 4 \ \Rightarrow$ Trong 3 số p_1, p_2, p_3 có 1 số chia hết cho 3, vô lý.
Nếu $p_2 = p_1 + 4;\ p_3 = p_1 + 6 \ \Rightarrow$ Trong 3 số p_2, p_3, p_4 có 1 số chia hết cho 3, vô lý.
Do đó $p_2 = p_1 + 2;\ p_3 = p_1 + 6;\ p_4 = p_1 + 8$. Từ đó suy ra $p_1 \equiv 2 \pmod 3$ và $p_1 \equiv 1 \pmod 5$.
Cộng thêm việc p_1 lẻ suy ra $p_1 \equiv 11 \pmod{30}$.

Bài 16

Chứng minh rằng nếu n và $m = 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là các số nguyên dương thì m là số chính phương.

(Kiên Giang)

Lời giải

$m \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 12n^2+1=(2k+1)^2$ với k nguyên dương.
Ta có

$$3n^2 = k(k+1)$$

$(k;k+1)=1$ nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} k=3a^2 \\ k+1=b^2 \end{cases}$ Với $(a;b)=1, ab=n \Rightarrow 3a^2+1=b^2$. Do đó $12n^2+1=(2k+1)^2=(3a^2+b^2)^2=(2b^2-1)^2 \Rightarrow m=2+2(2b^2-1)=(2b)^2$. Ta có m là số chính phương.

TH2: $\begin{cases} k=b^2 \\ k+1=3a^2 \end{cases}$ Với $(a;b)=1, ab=n \Rightarrow 3a^2=b^2+1$. Điều này vô lí vì $b^2+1 \equiv 1,2 \pmod 3$.

Vậy ta có đpcm.

Bài 17

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$9x^2+24x+15=y^3.$$

(Lào Cai)

Lời giải

Đặt $a=3x+4$. Phương trình được viết lại như sau

$$a^2-1=y^3 \Leftrightarrow a^2=(y+1)(y^2-y+1).$$

Do $a \equiv 1 \pmod 3$ nên VP không chia hết cho 3. Do đó $UCLN(y+1;y^2-y+1)=1$, tức là $y+1=b^2$; $y^2-y+1=c^2$.
Thay $y=b^2-1$ vào, ta được

$$(2b^2-3)^2+3=4c^2 \leftrightarrow (2c-2b^2+3)(2c+2b^2-3)=3.$$

Ta có 4 trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} 2c-2b^2+3=1 \\ 2c+2b^2-3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ b^2=2 \end{cases}$ (loại).

TH2: $\begin{cases} 2c-2b^2+3=3 \\ 2c+2b^2-3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} 2c-2b^2+3=-1 \\ 2c+2b^2-3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$

TH4: $\begin{cases} 2c-2b^2+3=-3 \\ 2c+2b^2-3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ b^2=2 \end{cases}$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-1;0)$.

Bài 18

Cho đa thức $P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x + m$. Chứng minh rằng với mỗi $m \in \mathbb{Z}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(n) \vdots 107$.

(Lạng Sơn)

Lời giải

Trước hết xin phát biểu lại một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 14 *Cho p là số nguyên tố dạng $3k+2$. Khi đó*

$$x^2 + xy + y^2 \vdots p \Leftrightarrow x, y \vdots p.$$

Chứng minh bổ đề này dễ dàng xin dành lại cho bạn đọc.

Quay lại bài toán. Ta chứng minh

$$A = \{4x^3 - 18x^2 + 27x | x \equiv 0, 1, \ldots, 106 \pmod{107}\} \text{ là hệ thặng dư đầy đủ mod 107.} \quad (6.5)$$

Thật vậy: đặt $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x$
Xét $x \not\equiv y \pmod{107} \Rightarrow x - y \not\vdots 107$
ta có : $f(x) - f(y) = 4(x-y)(4x^2 + 4xy + 4y^2 - 18x - 18y + 27)$
Nếu $f(x) \equiv f(y) \pmod{107} \Rightarrow (4x^2 + 4xy + 4y^2 - 18x - 18y + 27) \vdots 107$
Lại có $4x^2 + 4xy + 4y^2 - 18x - 18y + 27 = (2x-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + (2y-3)^2$ và 107 là số nguyên tố chia 3 dư 2 $\Rightarrow 2x - 3 \vdots 107$ và $2y - 3 \vdots 107 \Rightarrow x - y \vdots 107$ (vô lý)
Áp dụng bổ đề trên ta có đpcm.

Nhận xét 39 *Một số bài toán tương tự:*

1. *Cho đa thức $P(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$. Chứng minh rằng $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.*

2. *Cho đa thức $P(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15}$. Chứng minh rằng $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.*

Bài 19

Cho số nguyên dương n và $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ là 4 ước nguyên dương nhỏ nhất của n. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

(Long An)

Lời giải

$d_1 = 1$
Nếu n lẻ thì d_1, d_2, d_3, d_4 cùng lẻ suy ra $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ chẵn vô lý.
Do đó n chẵn $\Rightarrow\ d_2 = 2\ \Rightarrow\ n = 5 + d_3^2 + d_4^2$
Từ đó có d_3 và d_4 khác tính chẵn lẻ.
Khi đó $n \equiv d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 2 \pmod 4\ \Rightarrow\ n \not\vdots\, 4\ \Rightarrow\ d_3 = p;\, d_4 = 2p$ với p là số nguyên tố.
Mà như thế thì $5 \vdots p$ nên $p = 5$.
Từ đó tính được $n = 130$

Bài 20

Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất: nếu a, b là ước của n và $(a, b) = 1$ thì $a + b - 1$ cũng là ước của n.

(Nam Định)

Lời giải

$n = 1$ hiển nhiên thỏa mãn.
Xét $n \geq 2$ ta có các trường hợp sau:

TH1 : $n = p^r$ (trong đó p là số nguyên tố, r là số tự nhiên) dễ thấy thỏa mãn đề bài.

TH2 : $n = s.p^r$ với p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n, r là số nguyên dương, s là số nguyên dương > 1 và không chia hết cho p.
$(p; s) = 1 \Rightarrow (p + s - 1) \mid n$

- Giả sử $q \mid p + s - 1$ với q là ước nguyên tố của s.
  Ta có $s < p + s - 1 < s + q$ vô lý vì s và $s + q$ là 2 bội liên tiếp của q.
  Do đó $p + s - 1$ chỉ có ước nguyên tố là p.
  Đặt $p + s - 1 = p^k, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2 \Rightarrow s = p^k - p + 1$

- $n \vdots p^k \Rightarrow r \geq k$
  $(p^k; s) = 1 \Rightarrow s + p^k - 1 \mid n \Rightarrow 2p^k - p \mid n \Rightarrow 2p^{k-1} - 1 \mid n$.
  Mà $(2p^{k-1} - 1; p) = 1 \Rightarrow s \vdots 2p^{k-1} - 1$
  $\Rightarrow p^k - p + 1 \vdots 2p^{k-1} - 1$
  $\Rightarrow 2p^k - 2p + 2 \vdots 2p^{k-1} - 1$
  $\Rightarrow p - 2 \vdots 2p^{k-1} - 1$
  Với $k \geq 3 \Rightarrow 2p^{k-1} - 1 \geq 2p^2 - 1 > p - 2$ vô lý.
  Nên $k = 2 \Rightarrow p - 2 \vdots 2p - 1 \Rightarrow 3 \vdots 2p - 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow n = 2^r(2^k - 1)$

- Khi đó $s = 2^k - 1$ cũng thỏa mãn tính chất như số n.
  Nếu s có nhiều hơn 1 ước nguyên tố, gọi t là ước nguyên tố nhỏ nhất của s, cmtt như trên ta có $t = 2$ vô lý do s lẻ.
  Do đó $s = t^u$ với t nguyên tố lẻ.
  Khi đó $n = 2^r t^u$.
  Với $r \geq 2$ ta có: $(2; t) = 1 \Rightarrow 2 + t - 1 \mid n \Rightarrow t + 1 \mid n \Rightarrow t + 1 = 2^k$ và $(4; t) = 1 \Rightarrow 4 + t - 1 \mid n \Rightarrow t + 3 \mid n \Rightarrow t + 3 = 2^h \Rightarrow h = 2, k = 1 \Rightarrow t = 1$ vô lý.
  Do đó $r = 1$.Lại có $t + 1 \mid n \Rightarrow t + 1 = 2 \Rightarrow t = 1$ vô lý.

Vậy $n = p^r$ thỏa mãn đề, với p nguyên tố và r là số tự nhiên.

Bài 21

Cho số nguyên dương a không chính phương. Chứng minh số

$$\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \ldots + \{\sqrt{a}\}^n$$

là số vô tỷ.

(Nghệ An)

Lời giải

$$S = \{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \ldots + \{\sqrt{a}\}^n = \frac{1 - \{\sqrt{a}\}^{n+1}}{1 - \{\sqrt{a}\}}$$

Giả sử S là số hữu tỷ, đặt $S = \dfrac{p}{q}$ trong đó $(p, q) = 1$.
Mà $\{\sqrt{a}\} < 1$ nên $\{\sqrt{a}\}^{n+1} < \{\sqrt{a}\}$, suy ra $p > q$.
Đặt $a = k^2 + x$ trong đó $1 \le x \le 2k$ ta có $\{\sqrt{a}\} = \sqrt{a} - k$
Từ $S = \dfrac{p}{q}$ suy ra

$$\{\sqrt{a}\}(p - q\{\sqrt{a}\}^n) = p - q \Rightarrow (\sqrt{a} - k)(p - q(\sqrt{a} - k)^n) = p - q \tag{6.6}$$

Khai triển vế trái ta được số có dạng $A\sqrt{a} + B$ với

$$A = p + kq \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (C_n^{2i+1}(-k)^{n-2i-1}a^i) - q \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (C_n^{2i}(-k)^{n-2i}a^i)$$

$$= p - q \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} ((C_n^{2i+1} + C_n^{2i})(-k)^{n-2i}a^i)$$

Từ đây ta có $A \ne 0$ do $p \not\vdots\, q$. Do đó (6.6) vô lý.
Vậy ta có đpcm.

Bài 22

1. Tồn tại hay không các số thực phân biệt a, b sao cho $a + b \notin \mathbb{Q}$ nhưng $a^n + b^n \in \mathbb{Q}$ với mỗi số nguyên dương $n > 1$?

2. Cho a, b là các số thực khác nhau sao cho $a^n - b^n$ là số nguyên với mỗi số nguyên dương n. Hỏi a, b là nguyên, hữu tỷ hay vô tỷ?

(Nghệ An)

Lời giải

1. Ta có $a^4+b^4=(a^2+b^2)-2a^2b^2$ mà $a^4+b^4\in\mathbb{Q}$ và $a^2+b^2\in\mathbb{Q}$ nên $a^2b^2\in\mathbb{Q}$
Lại có $a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$ mà $a^2+b^2, a^3+b^3, a^5+b^5, a^2b^2\in\mathbb{Q}$ nên $a+b\in\mathbb{Q}$ vô lý.
Vậy không tồn tại hay không các số thực phân biệt a,b sao cho $a+b\notin\mathbb{Q}$ nhưng $a^n+b^n\in\mathbb{Q}$ với mỗi số nguyên dương $n>1$

2. • $a,b\in\mathbb{Z}$ hiển nhiên đúng.
   • Vì $a-b$ và a^2-b^2 nguyên nên $a+b\in\mathbb{Z}$. Do đó $2a\in\mathbb{Q}\Rightarrow a\in\mathbb{Q}\Rightarrow b\in\mathbb{Q}$.
   • Với $a,b\in\mathbb{Q}$. Đặt $a=\dfrac{p}{q}, b=\dfrac{r}{t}$ với p,q,r,t là các số nguyên, $q,t\neq 0$ và $(p;q)=(r;t)=1$.
   $a-b=\dfrac{pt-qr}{qt}\in\mathbb{Z}\Rightarrow pt\,\vdots\,q, qr\,\vdots\,t\Rightarrow t\,\vdots\,q, q\,\vdots\,t\Rightarrow q=t$
   Từ đó ta có $a=\dfrac{p}{q}, b=\dfrac{r}{q}$ và $p-r\,\vdots\,q$
   Lại có $a^n-b^n\in\mathbb{Z}\ \forall n$ nguyên dương nên $p^n-r^n\,\vdots\,q^n\ \forall n$ nguyên dương.
   Gọi s là 1 ước nguyên tố của q và $v_s(q)=m, v_s(p-r)=u$ với $u\geq m$

   – $s=2\Rightarrow p,r$ lẻ.
   Xét n chẵn. Theo bổ đề LTE:
   $$v_2(p^n-r^n)=v_2(p-r)+v_2(p+r)+v_2(n)-1=v_2(p+r)+u+v_2(n)-1$$
   $$v_2(q^n)=nm$$
   Chọn n sao cho $n\not\vdots\, q$ và $nm>u+v_2(p+r)$ ta sẽ có điều vô lý.
   – s lẻ.
   Theo bổ đề LTE:
   $$v_s(p^n-r^n)=v_s(p-r)+v_s(n)=u+v_s(n)$$
   $$v_s(q^n)=nm$$
   Chọn n sao cho $n\not\vdots\, q$ và $nm>u$ ta sẽ có điều vô lý.

   Vậy a,b là các số nguyên.

Bài 23

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m luôn tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(3.2^n+n)\,\vdots\,m$.

(Ninh Bình)

Lời giải

Gọi $P(m)$ là mệnh đề cần chứng minh.

• Dễ thấy $P(1), P(2)$ đúng.

- Giả sử mệnh đề đúng đến $m = k > 2$. Khi đó tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $(3.2^n + n) \vdots k$.
- Ta sẽ chứng minh $P(k+1)$ đúng, tức là chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương s sao cho $(3.2^s + s) \vdots k+1$. Thật vậy, xét số $\phi(k+1)$. Để ý là $\phi(k+1) \leq k$ nên tồn tại vô số số nguyên dương u sao cho $(3.2^u + u) \vdots \phi(k+1)$.
  Bây giờ ta chọn $s > 2u$ sao cho $\begin{cases} s \equiv -3.2^u \pmod{k+1} \\ s \equiv -3.2^u \pmod{\phi(k+1)} \end{cases}$. Rõ ràng có vô số số s như vậy.
  Bây giờ ta sẽ chứng minh $3\left(2^s - 2^u\right) \vdots (k+1)$.
  - Nếu $k+1$ chẵn, vì $s + 3.2^u \vdots (k+1)$, $(s > 2u, s$ chẵn) nên $s = 2^r.b$ $(r \geq u,\ b$ lẻ) $\Rightarrow v_2(k+1) < u \Rightarrow 3.2^u\left(2^{s-u} - 1\right) \vdots (k+1) \Rightarrow 3\left(2^s - 2^u\right) \vdots (k+1)$.
  - Nếu $k+1$ lẻ, theo cách chọn s thì $s - u \equiv -3.2^u - u \equiv 0 \pmod{\phi(k+1)}$. Theo định lí phi - hàm Euler, $2^{s-u} - 1 \vdots 2^{\phi(k+1)} - 1 \vdots (k+1) \Rightarrow 3\left(2^s - 2^u\right) \vdots (k+1)$.

    Kết hợp hai điều trên suy ra luôn có $3\left(2^s - 2^u\right) \vdots (k+1)$. Mà $3.2^u + s \vdots (k+1) \Rightarrow 3.2^s + s \vdots (k+1)$, và ta có đpcm.

Bài 24

Với mỗi số nguyên dương n, gọi $f(n)$ là số cách chọn các dấu cộng, trừ trong biểu thức $E_n = \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$ sao cho $E_n = 0$. Chứng minh rằng:

1. $f(n) = 0$ khi $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.
2. Khi $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ ta có $\dfrac{\sqrt{2^n}}{2} \leq f(n) \leq 2^n - 2^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}$.

(Phú Thọ)

Lời giải

1. Ta có $\sum_{i=1}^{n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ do đó $f(n) \neq 0 \leftrightarrow$ tồn tại một số số trong tập $\{1; 2; \ldots; n\}$ có tổng bằng $\dfrac{n(n+1)}{4}$ mà $(n; n+1) = 1$ nên $n \equiv 0, 3 \pmod 4$. Vì thế $f(n) = 0$ khi $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.
2. Chúng ta sẽ lần lượt chứng minh các bước như sau:
   (a) Chứng minh $f(n) \geq 2^{\frac{n}{2}-1}$.
   - Với $n = 3$ và $n = 4$, mệnh đề trên hiển nhiên đúng.
   - Ta chứng minh rằng nến n đúng thì $n+4$ cũng đúng. Xét dấu của các số $n+1; n+2; n+3; n+4$.

- Nếu ta đặt các dấu là $(n+1)-(n+2)-(n+3)+(n+4)$ hoặc $-(n+1)+(n+2)+(n+3)-(n+4)$ và các dấu còn lại đặt như các bộ $f(n)$ thì ta có bộ mới thỏa yêu cầu đề bài.
- Đối với các bộ thuộc $f(n)$ có -1 thì ta đổi thành $+1$ rồi thêm $(n+1)-(n+2)+(n+3)-(n+4)$ thì có được bộ mới.
- Đối với các bộ thuộc $f(n)$ có $+1$ thì ta đổi thành -1 rồi thêm $-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)$ thì có được bộ mới.
- Đối với các bộ thuộc $f(n)$ có -2 thì ta đổi thành $+2$ rồi thêm $(n+1)+(n+2)-(n+3)-(n+4)$ thì có được bộ mới.
- Đối với các bộ thuộc $f(n)$ có $+2$ thì ta đổi thành -2 rồi thêm $-(n+1)-(n+2)+(n+3)+(n+4)$ thì có được bộ mới.

Vậy $f(n+4) \geq 4f(n) \geq 2^{\frac{n+4}{2}-1}$. Suy ra đpcm.

(b) Chứng minh $f(n) < 2^n - 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Gọi $g(n)$ là số các bộ dấu sao cho tổng trên khác 0. Ta sẽ chứng minh $g(n) > 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ bằng quy nạp.

- Với $n=3$ và $n=4$ thì ta có mệnh đề trên đúng.
- Ta chứng minh với n đúng thì $n+4$ cũng đúng.
  Xét dấu của các số $n+1; n+2; n+3; n+4$
  Đối với các bộ thuộc $f(n)$, ta đặt dấu các số $n+1; n+2; n+3; n+4$ để tổng đại số chúng khác 0. Có 14 cách đặt dấu cho mỗi bộ như vậy
  Đối với các bộ thuộc $g(n)$, ta đặt dấu các số $n+1; n+2; n+3; n+4$ để tổng đại số chúng khác 0. Có 2 cách đặt dấu cho mỗi bộ như vậy.
  Suy ra $g(n+4) \geq 14f(n) + 2g(n) > 14.2^{\frac{n}{2}-1} + 2.2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} > 2^{\left[\frac{n+4}{2}\right]+1}$

Ta có đpcm.

Bài 25

Cho đa thức $f(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có 3 nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng biểu thức sau là bội của 2017:

$$(a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

(Quảng Bình)

Lời giải

Nếu có 2 trong 3 số $x_1; x_2; x_3$ đồng dư $\bmod 2017$ ta suy ra đpcm.
Nếu không có 2 số nào trong 3 số $x_1; x_2; x_3$ đồng dư theo $\bmod 2017$:
Ta có $f(x) \equiv ax^2 + (b+1)x + c \pmod{2017}$
Và $f(x_1) - f(x_2) \equiv (x_1 - x_2)(ax_1 + ax_2 + b + 1) \pmod{2017}$

Do đó $ax_1 + ax_2 + b + 1 \,\vdots\, 2017$

Tương tự $ax_2 + ax_3 + b + 1 \,\vdots\, 2017$

Suy ra $a(x_1 - x_3) \,\vdots\, 2017 \Rightarrow a \,\vdots\, 2017$

Suy ra $b + 1 \,\vdots\, 2017$. Lại có $f(x_1) = 0$ nên c cũng chia hết cho 2017.
Khi đó $a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1 \equiv a + b + c + 1 \equiv 0 \pmod{2017}$
Ta có đpcm.

Bài 26

Cho số nguyên tố p và các số nguyên dương a, b, c phân biệt nhỏ hơn p. Chứng minh rằng nếu các số a^3, b^3, c^3 có cùng số dư khi chia cho p thì $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho $a+b+c$.

(Quảng Nam)

Lời giải

Rõ ràng $p>3$ thì bài toán mới có nghĩa.

Từ giả thiết, ta suy ra $(a-b)(a^2+ab+b^2) \vdots p$, mà $a \neq b$ và $a, b < p$ nên $a^2+ab+b^2 \vdots p$, tương tự có b^2+bc+c^2 và c^2+ca+a^2 là bội của p. Từ đó $a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2 \vdots p$ hay $(a-c)(a+b+c) \vdots p$, lại có $a \neq c$ và $a, c < p$ nên $a+b+c \vdots p$.

Do $a+b+c<3p$ nên ta xét các trường hợp:

TH1: $a+b+c=p$:
Ta có $a+b \equiv -c \pmod p$ nên $a^2+2ab+b^2 \equiv c^2 \pmod p$ hay $(a^2+ab+b^2)+ab+bc+ca \equiv c(a+b+c) \pmod p$.
Từ đó $ab+bc+ca \vdots p$. Để ý rằng $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ nên $a^2+b^2+c^2 \vdots p$ hay $a^2+b^2+c^2 \vdots a+b+c$.

TH2: $a+b+c=2p$. Tương tự trên, ta có $a^2+b^2+c^2 \vdots p$, mà $a^2+b^2+c^2 \vdots 2$ và $(p,2)=1$ nên $a^2+b^2+c^2 \vdots a+b+c$.

Bài 27

1. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình
$$x^2+2016x+2017y^2+y=xy+2017xy^2+2018$$
.
2. Cho m, n là các số nguyên dương, m là số lẻ. Chứng minh rằng $4m \mid 3^n+1$ khi và chỉ khi $2m \mid 3^n+1$ và $3 \mid (2m)^n+1$.

(Quảng Ngãi)

Lời giải

1. $x^2+2016x+2017y^2+y=xy+2017xy^2+2018$
$\leftrightarrow \quad (x-1)(x+2017-2017y^2-y)=1$
$\rightarrow 1 \vdots (x-1) \quad \Rightarrow x-1 \in \{1;-1\} \Rightarrow x \in \{2;0\}$
Với $x=0 \Rightarrow 2017-2017y^2-y=-1 \leftrightarrow 2017y^2+y-2018=0 \rightarrow y=1$
Với $x=2 \Rightarrow 2019-2017y^2-y=1 \leftrightarrow 2017y^2+y-2018=0 \Rightarrow y=1$
Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1)$ và $(2;1)$.

2. (a) *Chiều thuận:*

- Nếu n chẵn, ta có $3^n+1\equiv 1+1=2\pmod 4$ (vô lý), do đó n lẻ.
- Gọi p là một ước nguyên tố bất kỳ của m, vì m lẻ và không chia hết cho 3 nên $p>3$. Ta có

$$3^n+1\equiv 0\pmod p \Rightarrow 3^{n+1}\equiv -3\pmod p \Rightarrow \left(\frac{-3}{p}\right)=1.$$

Theo luật tương phản Gauss, ta có $\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(3-1)}{4}}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{p}{3}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-3}{p}\right)=(-1)^{p-1}=1$

$\Rightarrow \exists a/p\equiv a^2\pmod 3 \Rightarrow p\equiv 1\pmod 3 \Rightarrow m\equiv 1\pmod 3$

Do đó $(2m)^n+1\equiv(-1)^n+1=0\pmod 3$ vì n lẻ.

(b) *Chiều đảo:*

Nếu n chẵn thì $(2m)^n+1\equiv 1;2\pmod 3$ (vô lý), do đó n lẻ

Suy ra $4=(3+1)\,|\,(3^n+1)\Rightarrow 4m|3^n+1$, do $(4,m)=1$

Bài 28

Cho số nguyên $n\geq 2$ thỏa mãn điều kiện $2^{\varphi(n)}+3^{\varphi(n)}+...+n^{\varphi(n)}$ chia hết cho n, trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương ko vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

1. Chứng minh rằng n ko có ước số lớn hơn 1 nào là số chính phương.
2. Biết rằng n có ko quá 3 ước nguyên tố, tìm tất cả các số n thỏa mãn điều kiện trên.

(Quảng Ninh)

Lời giải

1. Đặt $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1,p_2,...,p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Giả sử n có ước số là số chính phương, do đó tồn tại $\alpha_i\geq 2\,(1\leq i\leq k)$, giả sử đó là α_1.

   Ta có $\varphi(n)=n\prod\limits_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\Rightarrow(p_1-1)\,|\,n$

   Có $n|\sum\limits_{i=2}^{n}i^{\varphi(n)}\Rightarrow p_1|\sum\limits_{i=2}^{n}i^{\varphi(n)}$.

   Từ 2 đến n có $p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ số chia hết cho p_1 và $n-1-p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ số nguyên tố cùng nhau với p_1.

   Theo định lý Fermat nhỏ, ta có $\sum\limits_{i=2}^{n}i^{\varphi(n)}\equiv n-1-p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}\equiv 0\pmod{p_1}$

   $\Rightarrow 1\equiv 0\pmod{p_1}$(vô lý).

   Do đó giả sử sai ta có đpcm.

2. Theo câu a, n có dạng phân tích chuẩn mực là $p_1p_2...p_k$ trong đó p_i là các số nguyên tố khác nhau.
Chứng minh tương tự câu a, ta có được $p_i | n - \frac{n}{p_i} - 1 \left(1 \le i \le k\right)$.

TH1: $k = 1$ ta có $n = p \in \mathbb{P}$ và $\varphi(p) = p-1$. Khi đó $\sum\limits_{i=2}^{p} i^{\varphi(p)} \equiv p - 2 \equiv 0 \left(\bmod p\right) \Rightarrow n = p = 2$

TH2: $k = 2$ ta có $n = pq$ với p, q là 2 số nguyên tố phân biệt và $p < q$. Khi đó $p \mid q+1$ và $q \mid p+1 \Rightarrow p < q \le p+1 \Rightarrow q = p+1 \Rightarrow p = 2;\ q = 3$. Do đó $n = 6$

TH3: $k = 3$ ta có $n = pqr$ trong đó $p < q < r$ là các số nguyên tố. Khi đó $p \mid qr + 1$, $q \mid pr + 1$ và $r \mid pq + 1 \Rightarrow pq + qr + pr + 1 \vdots pqr$. Đặt $pq + qr + pr + 1 = tpqr$ trong đó $t \in \mathbb{N}^*$ thì $tpqr < 4qr \Rightarrow tp \le 3 \Rightarrow p \in \{2;3\}$ và $t = 1$.

- Nếu $p = 2 \Rightarrow 2q + 2r + qr + 1 = 2qr \Rightarrow (q-2)(r-2) = 5 \Rightarrow q = 3;\ r = 7 \Rightarrow n = 42$.
- Nếu $p = 3 \Rightarrow 3q + 3r + qr + 1 = 3qr$ vô lí do vế trái chẵn, vế phải lẻ.

Vậy $n \in \{2;6;42\}$.

Bài 29

Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^y y^x = (x+y)^{x+y}.$$

(Thái Bình)

Lời giải

- $x = 1 \Rightarrow y = (y+1)^{y+1}$, vô lí.
- $y = 1 \Rightarrow x = (x+1)^{x+1}$ vô lí.
- Xét $x, y > 1$. Ta thấy $\forall p \in \mathbb{P}$ sao cho $p \mid x$ thì $p \mid y$ và ngược lại. Kí hiệu $v_p(x)$ là số mũ đúng của p trong phân tích tiêu chuẩn của x. Đặt

$$x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, y = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}.$$

Nếu có $\alpha_i \neq \beta_i$, không mất tính tổng quát giả sử $\alpha_i > \beta_i$. Theo giả thiết, $v_{p_i}(x^y y^x) = v_{p_i}((x+y)^{x+y}) \Rightarrow y\alpha_i + x\beta_i = (x+y)\beta_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$, vô lí. Do đó $\alpha_i = \beta_i \forall i = 0, 1, \dots, k \Rightarrow x = y \Rightarrow x^{2x} = (2x)^{2x} \Rightarrow x = 2x$, vô lí do x nguyên dương.

Vậy phương trình không có nghiệm $(x; y)$ nguyên dương.

7 Tổ hợp

Bài 1

Trên một giá sách có n cuốn sách được đánh số từ 1 đến n ($n \in \mathbb{N}^*$ cho trước), ban đầu các cuốn sách được sắp xếp theo thứ tự nào đó. Một thủ thư muốn xếp lại theo đúng thứ tự $1, 2, ..., n$ từ trái qua phải, quy tắc xếp như sau: Chọn quyển sách đầu tiên có số không đúng vị trí (tính từ bên phải sang) và chuyển cuốn sách đó về đúng vị trí của nó. Ví dụ, trên giá có 4 quyển sách theo thứ tự $3-1-4-2$, sau một bước chuyển quyển số 2 về đúng vị trí của nó ta xếp lại thành $3-2-1-4$. Chứng minh rằng người thủ thư có thể hoàn thành công việc của mình sau ít hơn 2^n lần xếp theo quy tắc.

(*THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN*)

Lời giải

Chúng ta sẽ phát biểu lại bài toán cho dễ trình bày hơn một chút. *Cho một hoán vị của dãy số $\{1, 2, 3, ..., n\}$, viết từ trái sang phải. Ta sẽ chuyển dãy số này về đúng vị trí, tức là $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Mỗi bước ta thực hiện như sau : Chọn số gần tay nhất mà không đứng đúng vị trí rồi chuyển nó về vị trí đúng (ví dụ dãy* 3 1 4 2 *sau một bước chuyển thì* 2 *về vị trí thức hai thành* 3 2 1 4*). Chứng minh rằng sau ít hơn 2^n bước thì dãy luôn chuyển về đúng vị trí.*

Nhận xét 40 *Mỗi bước thực hiện chỉ làm thay đổi vị trí của các số từ số được chọn đến vị trí đúng của số đó. Cụ thể, phép biến đổi đẩy vị các số trong khoảng trên lên thêm* 1 *đơn vị.*

Nhận xét 41 *Mọi số đã ở đúng vị trí thì sau đó sẽ chỉ ở từ vị trí đúng đó đến vị trí n.*

Sau khi thực hiện mỗi bước ta được một tập hợp $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ là tập hợp các số ở đúng vị trí. Ta sẽ chứng minh không có hai bước phân biệt nào cho ta cùng một tập hợp các số có vị trí đúng.
Giả sử phản chứng, tồn tại hai bước thực hiện cho cùng một tập hợp $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ là x và y với bước x được thực hiện trước bước y và $a_i < a_{i+1}$ với mọi $1 \le i < k$.
Giả sử bước y đưa số a_i vào đúng vị trí. Theo đề bài, rõ ràng từ sau vị trí của a_i trước khi biến đổi đến vị trí n, các số đều ở đúng vị trí. Suy ra ở sau bước x các số đó cũng đã ở đúng vị trí. Ngoài ra, dựa trên nhận xét 11 dễ thấy các số có vị trí đúng sau vị trí trước bước y của a_i đều đã ở đúng vị trí. Dựa trên nhận xét 10, và giả thiết phản chứng, phép biến đổi y chỉ khiến a_i về đúng vị trí, nói cách khác phép biến đổi chỉ làm tập hợp tăng thêm một phần tử a_i. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $i = k$.
Hiển nhiên vị trí của a_k không phải là vị trí cuối. Dựa theo nhện xét 10, tập hợp mất đi một hay nhiều phần tử chỉ khi tập hợp đó được thêm vào một phần tử bé hơn những phần tử vừa mất. Ban đầu sau bước x tập hợp có phần tử a_k. Tuy nhiên tại bước y phần tử a_k được thêm vào chứng tỏ trước đó có phần tử nhỏ hơn a_k và khác tất cả các phần từ a_i với $1 \le i \le k$. Phần tử này sau đó lại bị mất đi... chứng tỏ đến bước y trong tập hợp vẫn tồn tại một phần tử khác tất cả các phần từ a_i với $1 \le i \le k$, vô lý!
Có 2^n tập hợp có thể có, tính cả tập hợp ban đầu khi chưa thực hiện phép biến đổi

nào, trong trường hợp tệ nhất ta phải thực hiện nhiều nhất $2^n - 1$ phép biến đổi. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Bài 2

Tìm số lớn nhất phần tử của một tập hợp là tập con của $\{1, 2, 3, ...2016\}$ thỏa mãn hiệu hai phần tử bất kỳ khác 4 và 7.

(*THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN*)

Lời giải

Xét 11 số tự nhiên liên tiếp, giả sử đó là $\{a+1, a+2, ..., a+11\}$. Ta nhóm các số này thành sáu nhóm: $\{a+1, a+8\}, \{a+2, a+6\}, \{a+3, a+7\}, \{a+4, a+11\}, \{a+5, a+9\}$ và $\{a+10\}$. Dễ thấy ta không thể chọn hai số trong cùng một nhóm nên có thể chọn nhiều nhất 6 số trong 11 số liên tiếp. Giả sử có thể chọn được 6 số trong 11 số liên tiếp đã cho. Theo cách chia nhóm trên, ta phải chọn số $a+10$, mỗi nhóm chọn thêm một số. Theo đề bài ta không thể chọn $a+6$ và $a+3$. Dẫn đến ta phải lần lượt chọn $a+2$, $a+7$, $a+5$, $a+8$. Tuy nhiên khi đó trong nhóm $\{a+4, a+11\}$ ta không thể chọn số nào do $11-4=7$ và $8-4=4$. Vậy trong 11 số liên tiếp ta chỉ có thể chọn tối đa 5 số.
Ta chia 2016 số tự nhiên đầu tiên thành 183 nhóm 11 số tự nhiên liên tiếp và nhóm $\{2016, 2015, 2014\}$. Dễ thấy nếu ta chọn cả ba số $2016, 2015, 2014$ thì ta không thể chọn đủ 5 số trong nhóm $\{2003, 2004, ..., 2013\}$. Vậy số cần tìm là:$183x5+2=917$. Cách chọn là: Ta chọn tất cả các số có số dư khi chia cho 11 thuộc tập hợp $\{1, 2, 4, 7, 10\}$.

Bài 3

Cho n nguyên dương. Các tâm thẻ trong một bộ sưu tập có giá trị $m!$ với m là số nguyên dương nào đó, Một bộ sưu tập tốt là một bộ sưu tập sao cho với mọi số k thỏa mãn $k \leq n!$, luôn tồn tại một số tâm thẻ trong bộ sưu tập mà tổng giá trị các thẻ này bằng k. Tìm số tấm thẻ ít nhất của bộ sưu tập tốt.

(*THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG HN*)

Lời giải

Để biểu diễn số $n!-1$, ta cần ít nhất $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tấm thẻ. Thật vậy: Nếu có k tấm thẻ $i!$ thì $k \leq i$. Vậy ta có $n!-1 = a_1(n-1)! + ... + a_{n-1}.1! \leq (n-1)(n-1)! + ... + 1.1! = n!-1$. Vậy dấu bằng xảy ra, nhận xét của ta là đúng và đây cũng là cách biểu diễn duy nhất cho $n!-1$ bằng $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tấm thẻ. Để biểu diễn $n!$ ta cần thêm ít nhất 1 tấm thẻ nữa.
Dễ thấy với mọi $k \leq n!-1$ ta luôn tìm được một số tấm thẻ đã dùng để biểu diễn $n!-1$ có tổng bằng k. Thật vậy, ta chọn m lớn nhấn sao cho $m! \leq k$. Sau đó ta chọn b_m sao cho $b_m.m! \leq k$. Dễ thấy $b_m \leq m$ nên ta có thể tìm đủ b_m tấm thẻ $m!$. Cứ làm như vậy đến hết, ta tìm được đủ các tấm thẻ để tổng các tấm thẻ này bằng k.
Vậy số cần tìm là $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$. Bộ sưu tập tốt ví dụ gồm: 2 tấm thẻ $1!$, 2 tấm thẻ $2!$,..., i tấm thẻ $i!$,...,$n-1$ tấm thẻ $(n-1)!$.

Bài 4

Với các số nguyên a,b,c,d thỏa $1 \le a < b < c < d$, kí hiệu $T(a,b,c,d) = \{x,y,z,t \in N | 1 \le x < y < z < t, x \le a, y \le b, z \le c, t \le d\}$.

1. Tính số phần tử của $T(1,4,6,7)$.
2. Cho $a = 1$ và $b \ge 4$. Gọi d_1 là số phần tử của $T(a,b,c,d)$ chứa 1 và không chứa 2, d_2 là số phần tử chứa 1,2 nhưng không chứa 3, d_3 là số phần tử chứa 1,2,3 nhưng không chứa 4. Chứng minh rằng $d_1 \ge 2d_2 - d_3$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

(*Trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM*)

Lời giải

1. Với một phần tử bất kì, hiển nhiên $x = 1$.
Dễ thấy $T(1,4,6,7) = T(1,4,7,7)$.

   - Với $y = 4$: Có $\dfrac{3.2}{2} = 3$ phần tử.
   - Với $y = 3$: Có $\dfrac{4.3}{2} = 6$ phần tử.
   - Với $y = 2$: Có $\dfrac{5.4}{2} = 10$ phần tử.

   Vậy có tổng cộng 19 phần tử.

2. Đương nhiên ta chỉ xét các bộ (a,b,c,d) sao cho $a \le b \le c \le d$.

   - Xét d_3: Do các phần tử tính trong d_3 chứa ba số 1,2 và 3 nên ba số này cũng chính là x,y và z. Khi đó $t \ge 5$ nên ta có $d_3 = d - 4$.
   - Xét d_2: Tương tự như trên, ta có $x = 1, y = 2$. Vì $z \ge 4$ nên z có thể nhận $c-3$ giá trị. Với mỗi giá trị của z, t có thể nhận $d-z$. Vậy $d_2 = \dfrac{(c-3)(d-4+d-c)}{2} = \dfrac{(c-3)(2d-c-4)}{2}$.
   - Xét d_1: Ta có $x = 1$, $y \ge 3$ và có thể nhận $b-2$ giá trị, z có thể nhận $c-y$ giá trị và t có thể nhận $d-z$ giá trị. Ta cho lần lượt $y = 3$ và $y = 4$, dễ thấy trường hợp $y = 3$ có số phần tử bằng với d_2.

   Trường hợp $y = 4$, tương tự, có số phần tử là $\dfrac{(c-4)(2d-c-5)}{2}$. Vậy $d_1 \ge \dfrac{(c-4)(2d-c-5)}{2} + \dfrac{(c-3)(2d-c-4)}{2}$.
   Khi đó ta có: $d_1 - 2d_2 + d_3 \ge \dfrac{(c-4)(2d-c-5)}{2} + \dfrac{(c-3)(2d-c-4)}{2} - (c-3)(2d-c-4) + (d-4)$.
   Tương đương với $d_1 - 2d_2 + d_3 \ge 0$. Vậy ta có điều cần chứng minh.
   Dấu bằng xảy ra khi $b = 4$.

Bài 5

Trong một hệ thống máy tính, một máy tính có thể kết nối trực tiếp với ít nhất 30% máy tính khác của hệ thống. Hệ thống này có một chương trình ngăn chặn và cảnh báo khá tốt,do đó khi một máy tính bị virus,nó chỉ đủ thời gian lây virus cho các máy tính được kết nối trực tiếp với nó. Chứng minh rằng dù vậy, kẻ tấn công vẫn có thể chọn hai máy tính của hệ thống mà nếu thả virus vào hai máy đó, ít nhất 50% máy tính của hệ thống sẽ bị nhiễm virus.

(*Trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG Tp. HCM*)

Lời giải

Gọi tập hợp các máy tính trong hệ thống là X.

Bổ đề 15 *Xét một tập con* S *bất kì của tập* X. *Khi đó tồn tại một máy tính của hệ thống kết nối trực tiếp với ít nhất* 30% *máy tính trong tập* S.

Chứng minh 2 *Xét cặp* (s,x) *với* $s \in S$ *và* $x \in X$. *Cho* x *chạy trong* X *và* s *chạy trong* S *sao cho* x *và* s *kề nhau, tính theo* s *thì số cặp như vậy không ít hơn* $\frac{3}{10}.|X|.|S|$. *Do đó khi tính theo* x, *phải tồn tại* x *sao cho* x *này kết nối trực tiếp với ít nhất* 30% *máy tính thuộc* S.

Trở lại bài toán. Xét máy tính A bất kì. Gọi S là tập hợp các máy tính không kết nối với A. Nếu S rỗng thì kết quả bài toán là hiển nhiên đúng.Nếu S không rỗng thì theo bổ đề, tồn tại một máy tính B khác A kết nối trực tiếp với ít nhất 30% máy tính trong S. Ta chọn hai máy tính A và B. Ta có:

$$|X|-|S|+\frac{3}{10}.|S|=|X|-\frac{7}{10}.|S|\geq |X|-\frac{7}{10}.\frac{7}{10}.|X|=0,51|X|.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 6

Bạn An có 12 tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ ghi một số nguyên từ 1 đến 12, các số trên các thẻ đều phân biệt.

1. Chứng minh rằng bạn An có thể chia 12 tấm thẻ đó thành một số nhóm thỏa mãn tính chất (P) như sau: trong mỗi nhóm có nhiều hơn một tấm thẻ đồng thời số lớn nhất ghi trên một tấm thể nào đó bằng tổng các số ghi trên tấm thẻ còn lại.

2. Nếu bạn An cho bạn Bình n tấm thẻ mang các số từ 1 đến n $(1 \leq n \leq 12)$ thì với những tấm thẻ còn lại bạn An có thể chia thành một số nhóm thỏa mãn tính chất (P) hay không?

(*THPT chuyên ĐH Vinh*)

Lời giải

1. Ta có cách chia nhóm thỏa mãn sau: $(1,10,11);(2,5,7);(3,6,9);(4,8,12)$. Từ đó suy ra mệnh đề cần chứng minh là đúng.

2. Giả sử tồn tại n sao cho nếu An cho Bình n tấm thẻ đầu tiên thì số thẻ còn lại vẫn có thể chia thành các nhóm thỏa mãn tính chất (P).
Do mỗi nhóm phải có ít nhất 3 phần tử nên khi đó không thể chia số tấm thẻ còn lại thành quá 3 nhóm.
Do mỗi nhóm đều thỏa mãn (P) nên tổng các phần tử của mỗi nhóm đều chia hết cho 2, dẫn đến tổng các thẻ còn lại cũng chia hết cho 2. Suy ra $n \geq 3$
Do đã mất hai tấm thẻ 1 và 2 nên phải tồn tại nhóm có số lớn nhất là 11 và một nhóm khác có số lớn nhất là 10. Hiển nhiên nhóm còn lại có số lớn nhất là 12.
Vậy số thẻ An cho Bình là $12-3.3=3$ thẻ.
Vậy $n=3$. Nhưng khi đó tổng các số trên các tấm thẻ còn lại bằng $4+5+6+...+12 = 72$ và $2(10+11+12)=66$, vô lí vì 72 không thể bằng 66!
Vậy giả thiết phản chứng là sai. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 7

1. Tính số hoán vị $f(1); f(2); ...; f(2016)$ sao cho biểu thức

$$T=|f(1)-1|+|f(2)-2|+...+|f(2016)-2016|$$

đạt trá trị lớn nhất, trong đó $f(1)$ là giá trị ở vị trí thứ i trong mỗi hoán vị, $i=1,2,3,...2016$.

2. Trên mặt phẳng xét 42 điểm mà không có ba điểm nào thẳng hàng.Ta dựng các đoạn thẳng nối hai điểm trong các điểm nói trên sao cho mọi bộ ba điểm đang xét luôn có hai điểm được nối với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của số đoạn thẳng cần dựng.

(*Bà Rịa - Vũng Tàu*)

Lời giải

1. Trong T, mỗi số tự nhiên thuộc khoảng $[1;2016]$ xuất hiện hai lần, có 2016 dấu cộng và 2016 dấu trừ. Như vậy, T đạt giá trị lớn nhất khi 2016 dấu cộng thuộc về $\frac{2016}{2}=1008$ số lớn nhất, còn 2016 dấu trừ thuộc về 1008 số còn lại. Vậy $T_{max} = 2(\sum_{i=1009}^{2016} i - \sum_{i=1}^{1008} i) = 2(1008.1008) = 2.1008^2$, đạt được khi $(f(1), f(2), ..., f(1008))$ là hoán vị của $(1009,1010,...,2016)$ và $(f(1009), f(1010),..., f(2016))$ là hoán vị của $(1,2,...,1008)$.
Thật vậy, giả sử tồn tại $i<1009$ sao cho $f(i)<1009$. Khi đó từ $|f(i)-i|$ sẽ xuất hiện một số bé hơn 1009 nhưng mang dấu cộng, vô lí.
Từ điều kiện dấu bằng, ta tính được số hoán vị là: $1008!1008! = (1008!)^2$.

2. Trước hết xin phát biểu và chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 16 *Trên mặt phẳng xét $2n$ điểm $(n \geq 2)$, nếu có n^2+1 đoạn thẳng được nối thì hệ điểm có ít nhất một tam giác. Đây cũng là số cạnh ít nhất cần có để luôn tồn tại tam giác.*

Chứng minh 3

- *Với $n=2$, xét tập điểm $\{A,B,C,D\}$. Ta có số cặp hai điểm bất kì là $\frac{4.3}{2}=6$. Suy ra có đúng một cặp không được nối là AB.*
- *Giả sử bổ đề đúng với $n=k$, xét $n=k+1$. Giả sử tồn tại cách nối sao cho không tồn tại tam giác nào. Xét một tập con S có $2k$ điểm bất kì của tập hợp $2(k+1)$ điểm đang xét sao cho hai điểm còn lại, đặt là A và B, được nối với nhau. Nếu có quá k^2 đoạn thẳng có hai đầu mút đều thuộc S thì trong S có một tam giác theo giả thiết quy nạp. Xét bộ ba (A,B,X) với X chạy trong S. Mỗi bộ ba như vậy có nhiều nhất 2 cạnh, nếu không tính AB thì chỉ có nhiều nhất 1 cạnh. Khi đó cho X chạy trong S ta được nhiều nhất $2k$ đoạn thẳng. Vậy số đoạn thẳng nhiều nhất là $k^2+2k+1=(k+1)^2 \geq (k+1)^2+1$, vô lí! Nếu chỉ nối $(k+1)^2$ đoạn thẳng, ta có cách nối như sau: Chia S thành hai nhóm $(k+1)$ điểm, mỗi điểm nối với tất cả các điểm khác nhóm với nó. Với cách nối này, khi chọn 3 điểm bất kì, theo nguyên lí Dirichlet, luôn có hai điểm chung nhóm, không được nối với nhau.*

Vậy bổ đề đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp, bổ đề đúng với mọi $n \geq 2$.

Quay lại bài toán. Gọi tập hợp các đoạn thẳng cần nối là A với $|A|$ nhỏ nhất có thể. Điều kiện đề bài tương đương với không tồn tại ba điểm nào đôi một không nối với nhau. Gọi S là tập hợp tất cả các cặp điểm. Khi đó theo bổ đề ta có $|S/A| \leq (\frac{42}{2})^2$. Suy ra $|A|=|S|-|S/A| \geq \frac{42.41}{2}-(\frac{42}{2})^2=420$.

Bài 8

1. Xung quanh bờ hồ hình tròn có 2017 cây liễu. Người ta dự định chặt bớt 5 cây liễu sao cho không có 2 cây liễu nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau ?
2. Một cuộc họp có $12k(k \in \mathbb{N}^*)$ người, trong đó mỗi người bắt tay với đúng $3k+6$ người khác. Biết rằng với mọi cách chọn cặp hai người $(A;B)$ thì số người bắt tay với cả hai người A và B luôn là $m(m \in \mathbb{N}^*, m \leq 3k+6)$. Hỏi cuộc họp có bao nhiêu người ?

(*Bắc Ninh*)

Lời giải

1. Đánh số các cây liễu từ 1 đến 2017 theo chiều kim đồng hồ.
Trước hết ta tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $a+b+c+d+e=2012$. Dễ thấy số cách chặt cây thỏa yêu cầu với một cây chắc chắn bị chặt (ví dụ, cây

số 1) cũng chính là số nghiệm nguyên dương của phương trình này và bằng $\dfrac{2011!}{4!(2011-4)!} = \dfrac{2011!}{4!2007!}$.
Do có 2017 cây và mỗi cách chặt sẽ bị đếm 5 lần khi ta nên số lượng cách chặt là: $\dfrac{2011!2017}{4!2007!5}$ cách.

2. Ta sẽ đếm bằng hai cách số cái bắt tay trong cuộc họp.

   - Cách đếm thứ nhất: Do mỗi người bắt tay đúng $3k+6$ lần và mỗi cái bắt tay được thực hiện bởi hai người nên số cái bắt tay là: $\dfrac{12k(3k+6)}{2} = 6k(3k+6)$.
   - Cách đếm thứ hai: Số lượng nhóm hai người bất kì là $\dfrac{12k(12k-1)}{2} = 6k(12k-1)$. Với mỗi nhóm hai người như vậy, theo đề có đúng m người bắt tay với cả hai người này, từ mỗi nhóm hai người ta đếm được có đúng $2m$ cái bắt tay (không tính cái bắt tay giữa chính hai người đó nếu có). Xét hai người bắt tay nhau là A và B. Dễ thấy cái bắt tay giữa A và B chỉ được đếm trong đúng $2(3k+5)$ nhóm hai người bao gồm (A, X_B) và (B, X_A) với X_A chạy trong tập những người bắt tay với A không tính B và X_B chạy trong tập những người bắt tay với B không tính A. Vậy tổng số cái bắt tay là $\dfrac{6k(12k-1).2m}{2(3k+5)} = \dfrac{6km(12k-1)}{3k+5}$.

   Từ hai cách đếm trên, ta được phương trình nghiệm nguyên dương: $\dfrac{6km(12k-1)}{3k+5} = 6k(3k+6)$. Giải phương trình trên ta được $k=3, m=6$. Vậy cuộc họp có $12k = 36$ người.

Bài 9

Trên mặt phẳng cho 2017 điểm sao cho với ba điểm bất kì ta luôn tìm được hai điểm để đoạn thẳng được tạo thành có độ dài bé hơn 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 1009 điểm đã cho.

(*Bình Dương*)

Lời giải

Gọi tập hợp điểm đã cho là S. Xét một điểm A bất kì trong S.

TH1: Mọi điểm còn lại trong tập đều có khoảng cách với A bé hơn 1. Đường tròn tâm A bán kính bằng 1 chính là đường tròn cần tìm. Kết quả bài toán là đúng trong trường hợp này.

TH2: Tồn tại một điểm B trong tập hợp điểm còn lại sao cho $AB \geq 1$. Xét bộ ba điểm (A, B, X) với X chạy trong $S/\{A, B\}$. Do $AB \geq 1$ nên hoặc $AX < 1$ hoặc $BX < 1$. Theo nguyên lí Dirichlet, một trong hai đường tròn $(A, 1)$ và $(B, 1)$ chứa ít nhất 1008 điểm thuộc $S/\{A, B\}$. Đường tròn đó chính là đường tròn chứa 1009 điểm thuộc S khi tính thêm A, B. Kết quả bài toán là đúng.

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 10

Trên bảng cho các số $\frac{1}{2016}, \frac{2}{2016}, \ldots, \frac{2016}{2016}$. Mỗi lần thực hiện trò chơi cho phép ta xóa đi hai số a, b bất kì và thay vào số mới bằng $a+b-3ab$. Hỏi sau 2015 lần thực hiện phép xóa, số còn lại trên bảng là số nào?

(*Bình Dương*)

Lời giải

Ta hãy xét số $\frac{672}{2016} = \frac{1}{3}$. Nếu ta xóa một số x bất kì và số $\frac{672}{2016}$, ta sẽ vẫn nhận lại $\frac{672}{2016}$ vì $\frac{672}{2016} + x - 3\frac{672}{2016}x = \frac{672}{2016}$. Vậy số $\frac{672}{2016}$ luôn hiện diện trên bảng, đây cũng là đáp án bài toán.

Bài 11

1. Trên mỗi ô vuông của một bảng $9x9$, ta đặt một con châu chấu. Giả sử cứ sau một tiếng gõ, mỗi con châu chấu nhảy sang ô bên cạnh cùng một hàng hoặc cùng một cột. Chứng minh rằng sau một tiếng gõ có ít nhất hai con ở cùng một ô.

2. Trên mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy, có một con châu chấu ở tọa độ (x, y) trong đó $x, y \in \mathbb{Z}$. Với N là số nguyên dương cho trước, con châu chấu có thể nhảy từ điểm nguyên A đến điểm nguyên B nếu độ dài AB bằng N. Hỏi rằng con châu chấu có thể nhảy đến bất kì điểm nguyên nào sau hữu hạn các bước nhảy không nếu $N = 2025$. Vì sao? (Điểm nguyên là điểm có tung độ và hoành độ là các số nguyên).

(*Bình Dương*)

Lời giải

1. Ta tô màu bảng đã cho đen trắng xen kẽ với ô ở góc màu đen. Dễ dàng tính được số ô đen nhiều hơn số ô trắng 1 ô và sau một tiếng gõ, con châu chấu ở ô đen sẽ nhảy sang ô trắng và ngược lại, từ ô trắng nhảy sang ô đen. Từ đó suy rasau một tiếng gõ, số châu chấu ở các ô trắng nhiều hơn số ô trắng đúng 1 đơn vị. Khi đó theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 2 con châu chấu ở cùng một ô.

2. Theo đề bài, khi châu chấu ở vị trí (a, b) nào đó, nó chỉ có thể nhảy tới vị trí $(a+m, b+n)$ với m, n là số nguyên thỏa $m^2 + n^2 = 2025$. Do $2025 \vdots 3$ nên $m, n \vdots 3$. Vậy số dư khi chia hoành độ (tương tự, tung độ) cho 3 là không đổi. Vậy kết luận của bài toán là không.

Bài 12

Trong mặt phẳng cho $n \geq 2$ đường thẳng đôi một cắt nhau và không có ba đường nào đồng quy. Các đường này chia mặt phẳng thành các miền hữu hạn và vô hạn. Chứng minh ta có thể đánh dấu các miền đó bằng các số nguyên thỏa mãn cả ba điều kiện sau:

i. Các số đó khác 0.

ii. Trị tuyệt đối của mỗi số không lớn hơn n.

iii. Mỗi đường thẳng đã cho sẽ phân mặt phẳng làm hai phần mà tổng các số của mọi miền thuộc mỗi phần sẽ bằng 0.

(*Đà Nẵng*)

Lời giải

Nhận xét rằng vì mỗi miền có tối đa n cạnh nên số đỉnh của một miền không bao giờ vượt quá n.
Ta có cách đánh số sau: Chọn một miền bất kì, đánh số cho miền này bằng số đỉnh của nó. Sau đó ta đánh số các miền còn lại theo quy tắc: số đánh dấu có giá trị tuyệt đối bằng số đỉnh của miền và số đánh dấu ở hai miền chung cạnh trái dấu nhau. Ta sẽ chứng minh luôn có thể đánh số bằng cách này.

- Với $n = 2$ hiển nhiên mệnh đề đúng.

- Giả sử với $n = k$ mệnh đề đúng. Xét một bộ $k + 1$ đường thẳng bất kì thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta bỏ qua 1 đường thẳng và đánh số theo cách trên. Theo giả thiết quy nạp, ta đánh số được. Bây giờ ta xét thêm đường thẳng đã bỏ qua. Ta chọn một bên bất kì, giữ nguyên dấu các miền bên đó. Ở mỗi miền bị phân chia, bên phía được chọn ta giữ dấu của miền ban đầu, phía còn lại trái dấu. Các miền không bị phân chia ở phía không được chọn đổi dấu. Dễ thấy cách chọn dấu âm, dương này thỏa mãn cách đánh số đã nêu. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$ và theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề đúng với mọi n.

Cách đánh số này thỏa mãn các điều kiện trong đề bài. Thật vậy:
Điền kiện (i) hiển nhiên thỏa mãn. Điều kiện (ii) thỏa mãn dựa trên nhận xét ban đầu của chúng ta.
Đối với điều kiện (iii): Dễ thấy mỗi đỉnh hoặc thuộc về 4 miền nếu không nằm trên đường thẳng đang xét (loại 1), hoặc thuộc về 2 miền nếu nằm trên đường thẳng đang xét (loại 2). Tổng của các miền "dương" thực chất là đếm số đỉnh loại 1 nhân 2 rồi cộng cho số đỉnh loại 2. Tương tự với tổng của các miền "âm". Vậy tổng các miền thuộc về một phía bất kì của đường thẳng đang xét bằng 0. Điều này chứng tỏ điều kiện (iii) được thỏa mãn.
Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài 13

Cho bảng ô vuông 2017 x 2017, người ta điền vào mỗi ô của bảng một số nguyên từ 1 đến 2017 sao cho mỗi số được điền vào bảng đúng một lần.

1. Chứng minh tồn tại hai số cạnh nhau trong bảng (tức thuộc hai ô chung cạnh) có hiệu không nhỏ hơn 2017.
2. Tìm $k \in \mathbb{N}^*$ nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách điền để hiệu hai số cạnh nhau bất kì trong bảng đều không lớn hơn k.

(*Đà Nẵng*)

Lời giải

1. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử tồn tại cách đánh số sao cho hai số bất kì cạnh nhau trên bảng có hiệu nhỏ hơn 2017.
   Xét số k bất kì sao cho $1 \le k \le 2017^2 - 2017$. Gọi $A_k = \{k+1, k+2, ..., k+2016\}$, $B_k = \{1, 2, ..., k\}$, $C_k = \{k+2017, k+2018, ..., 2017^2\}$. Vì $|A_k| = 2016$ nên tồn tại ít nhất một cột (tương tự, một cạnh) không chứa phần tử nào thuộc A_k. Gọi tập hợp các số thuộc vào cột hoặc hàng đó là D_k. Cũng do $|A_k = 2016|$ nên trong D_k không thể có hai phần tử kề nhau nào không thuộc cùng một tập hợp, suy ra D_k là tập con của B_k hoặc C_k. Dễ thấy $|D_k| = 4033$.

   - Với $k = 1$, do $|B_k| = 1$ nên $D_1 \subset C_1$.
   - Với $k = 2017^2 - 2017$, do $|C_k| = 1$ nên $D_{2017^2-2017} \subset B_{2017^2-2017}$.

   Vậy tồn tại n sao cho $D_n \subset C_n$ và $D_{n+1} \subset B_{n+1}$. Vậy tồn tại ít nhất một số h sao cho $h \in C_n$ và $h \in B_{n+1}$. Khi đó ta có $n + 2017 \le h \le n+1$, vô lý!

2. Theo câu 1, ta có $k \ge 2017$.
   Ta có cách đánh số sau: Hàng thứ i đánh số từ trái sang phải lần lượt là $2017(i-1)+j$ với j là vị trí trong hàng của ô. Dễ thấy cách đánh số này thỏa mãn hiệu hai số cạnh nhau bất kì không vượt quá 2017.
   Vậy số cần tìm là 2017, với cách đánh số đã chỉ ở trên.

Bài 14

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho: Với n số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ đôi một khác nhau, luôn tồn tại hai chỉ số $i, j \in \left\{1, 2, 3, ..., n\right\}$ để $a_i + a_j \ge 2017(a_i, a_j)$ với (a, b) là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b.

(*Đồng Nai*)

Lời giải

Dễ thấy 2017 là số nguyên tố. Xét 1008 số nguyên dương đầu tiên. Ta có hai số nguyên dương bất kì trong dãy có tổng không quá $1008 + 1007 = 2015 < 2017$. Vậy $n \ge 1009$.

- Ta sẽ chứng minh 1009 là số cần tìm. Giả sử tồn tại cách chọn 1009 số $\{a_1, a_2, ..., a_1009\}$ sao cho không thỏa điều kiện đề bài.

- Giả sử tồn tại chỉ số i, j sao cho a_i chia hết cho 2017 còn a_j không chia hết cho 2017. Khi đó ta có $(a_i, a_j) = (\frac{a_i}{2017}, a_j) \leq \frac{a_i}{2017}$ suy ra $a_i + a_j \geq 2017(\frac{a_i}{2017}, a_j)$, mâu thuẫn với giả thiết phản chứng.Vậy trong dãy hoặc tất cả đều chia hết cho 2017, hoặc tất cả đều không chia hết cho 2017. Dễ thấy rằng nếu ta tìm được một bộ số không thỏa điều kiện, thì khi chia mỗi số cho ước chung lớn nhất của chúng, ta được thêm một bộ số nữa không thỏa điều kiện. Vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp tất cả không chia hết cho 2017.

- Giả sử tồn tại hai chỉ số i, j sao cho $a_i - a_j \vdots 2017$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_i - a_j = 2017b, b \in \mathbb{N}$. Ta có $\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} = \frac{a_i + a_j}{(b, a_j)} \geq \frac{2017b}{(b, a_j)} \geq 2017$ suy ra $a_i + a_j \geq (a_i, a_j)$.
Vậy 1009 số này đôi một không dùng số dư khi chia cho 2017. Ta có các nhóm $(1, 2016); (2, 2015); ...; (1008, 1009)$. Theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại hai chỉ số i, j sao cho số dư khi chia a_i và a_j cho 2017 là một trong 1008 nhóm trên. Khi đó ta có $a_i + a_j \vdots 2017$. Đặt $a_i + a_j = 2017c$. Vậy ta có $\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} = \frac{2017c}{(2017c, a_j)} \geq \frac{2017c}{(c, a_j)} \geq$ 2017. Suy ra $a_i + a_j \geq 2017(a_i, a_j)$, mâu thuẫn với giả thiết phản chứng!
Vậy giả thiết phản chứng là sai, ta có điều cần chứng minh.

Bài 15

Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ của các số $1, 2, 3, .., 10$ sao cho $a_i > a_{2i}$ với $1 \leq i \leq 5$ và $a_j > a_{2j+1}$ với $1 \leq i \leq 4$.

(*Đồng Nai*)

Lời giải

Từ điều kiện đề bài ta có$a_1 > a_2, a_3$; $a_2 > a_4, a_5$; $a_4 > a_8, a_9$; $a_5 > a_10$; $a_3 > a_6, a_7$. Dễ thấy a_1 là số lớn nhất, vậy $a_1 = 10$. Chia các số còn lại thành hai nhóm $(a_2, a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10})$ và (a_3, a_6, a_7). Dễ thấy hai nhóm này không ảnh hưởng gì đến nhau khi xét đến điều kiện đề bài. Ta có số cách chọn phần tử nhóm thứ nhất là $\frac{9!}{3!6!}$. Khi chọn xong phần tử cho nhóm 1, còn lại đúng 3 phần tử cho nhóm 2. Do trong nhóm 2, phần tử a_3 là phần tử lớn nhất, a_6 và a_7 không ảnh hưởng đến nhau nên số cách sắp cho nhóm 2 là 2.
Trong nhóm 1, để ý rằng a_2 là phần tử lớn nhất trong nhóm. Các phần tử còn lại chia thành hai nhóm (a_4, a_8, a_9) và (a_5, a_{10}).
Rõ ràng hai nhóm này không ảnh hưởng đến nhau. Vậy số cách chọn phần tử cho hai nhóm này là: $\frac{5!}{2!3!}$. Nhóm nhỏ thứ nhất tương tự nhóm hai nên số cách sắp là 2.
Nhóm nhỏ thứ hai có $a_5 > a_{10}$ nên có số cách sắp là 1.
Vậy số hoán vị thỏa mãn là: $4\frac{5!9!}{2!3!3!6!} = 3360$.

Bài 16

Gọi A là tập các bộ (x_1, x_2, x_3) với $x_1, x_2, x_3 \in \{0;1;2;...;7\}$. Bộ $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$ gọi là trội hơn bộ $y = (y_1, y_2, y_3) \in A$ nếu $x \neq y$ và $x_i \geq y_i$ $\forall i = 1;2;3$. Khi đó ta viết $x > y$. Tìm $n_{min} \in \mathbb{N}^*$ sao cho mọi tập con có n ptử của A đều chứa ít nhất 2 bộ $x > y$.

(*Hà Nam*)

Lời giải

Xét một tập con B của A sao cho không có hai phần tử nào của B mà một phần tử trội hơn phần tử còn lại, và $|B|$ đạt giá trị lớn nhất.
Xét một bảng 8×8 đánh số các hàng từ trên xuống dưới lần lượt từ 0 đến 7 và các cột từ trái sang phải lần lượt từ 0 đến 7. Nếu trong B có phần tử $x = a, b, c$ thì ta đánh dấu ô (a, b).
Dễ thấy không có ô nào được đánh dấu quá một lần. Thật vậy, giả sử có một ô (a, b) được đánh dấu ít nhất một lần, khi đó trong tập B sẽ có tương ứng hai phần tử $x = (a, b, x_3) > y = (a, b, y_3)$, vô lí! Vậy số ô đánh dấu bằng $|B|$.
Ta gọi một ô (a_1, b_1) bé hơn (tương tự, lớn hơn) ô (a_2, b_2) nếu $a_1 \leq a_2$ và $b_1 \leq b_2$ (tương tự, $a_1 \geq a_2$ và $b_1 \geq b_2$). Dễ thấy, trên bảng không thể có 9 ô $(a_1, b_1); ...; (a_9, b_9)$ sao cho $(a_i, b_i) < (a_{i+1}, b_{i+1}), i = \overline{1,8}$, vì nếu tồn tại, theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại hai chỉ số $i < j$ sao cho $c_i = c_j$ dẫn đến $x_i < x_j$.
Gọi S_1 là tập tất cả các ô được đánh dấu mà không có ô được đánh dấu nào lớn hơn,..., S_{i+1} là tập tất cả các ô được đánh dấu mà với mỗi phần tử thuộc S_{i+1}, có ít nhất một phần tử thuộc S_i lớn hơn nó và không có phần tử nào không thuộc S_k với mọi $k \leq i$ lớn hơn nó. Ta có $|S_9| = 0$. Với i bất kì, xét các phần tử thuộc S_i, gọi m_i là giá trị lớn nhất của $a + b$ với (a, b) thuộc S_i, gọi phần tử thuộc S_i đó là (a_i, b_i). Để ý rằng nếu $(a, b) < (c, d)$ thì $a + b < c + d$. Vậy nên ta có $m_i > m_{i+1}$.
Xét phần tử (c_i, d_i) bất kì thuộc S_i khác (a_i, b_i). Rõ ràng $c_i \neq a_i$ và $d_i \neq b_i$. Ngoài ra, $c_i < a_i$ khi và chỉ khi $d_i > b_i$ và ngược lại, $c_i > a_i$ khi và chỉ khi $d_i < b_i$. Vậy $|S_i| \leq m_i$ nếu $m_i \leq 8$ và $|S_i| \leq 16 - m_i$ nếu $m_i > 8$.
Dễ dàng thấy rằng khi đó $|B| = \sum\limits_{i=1}^{8} |S_i| \leq 5+6+7+8+7+6+5+4 = 48$. Dấu bằng xảy ra, chẳng hạn khi mọi ô được đánh dấu (a, b) thỏa $5 \leq a + b \leq 12$ và ngược lại, những ô thỏa điều kiện này được đánh dấu.
Vậy ta có $n \geq 49$, hay $n_{min} = 49$.

Bài 17

Cho tập $S = \{1, 2, 3, ..., 2016\}$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_{2016})$ của tập S sao cho $2(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) \,\vdots\, k$ với $\forall k = 0, 1, 2, ..., 2016$

(*Hà Tĩnh*)

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $a_k = min a_1, a_2, ..., a_k$ hoặc $a_k = max a_1, a_2, ..., a_k$ với $k \geq 4$.

- Với $k = 2016$, hiển nhiên $a_1, a_2, ..., a_{2016} = 1, 2, ..., 2016$ nên $2\sum_{i=1}^{2016} a_i = 2016.2017$. Ta lại có $2\sum_{i=1}^{2015} a_i \vdots 2015$ nên $a_{2016} - 1 \vdots 2015$. Vậy $a_{2016} \in \{1; 2016\}$. Mệnh đề đúng với $k = 2016$.
- Giả sử mệnh đề từ $k = 2016$ đến $k = n \geq 5$. Xét $k = n+1$. Hiển nhiên $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ là hoán vị của $n-1$ số liên tiếp nào đó. Ta có $2\sum_{i=0}^{n-2} i = (n-1)(n-2) \vdots (n-1)$ nên ta có thể xem $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ là hoán vị của $(1, 2, ..., n-1)$. Tương tự như trên ta cũng có $2\sum_{i=1}^{n-1} a_i = n.(n-1)$. Do $2\sum_{i=1}^{n-2} a_i \vdots n-2$ nên $a_{n-1} - 1 \vdots (n-2)$ nên hoặc $a_{n-1} = 1$ hoặc $a_{n-1} = n-1$. Vậy mệnh đề đúng với $k = n-1$. Theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề đúng với $k > 3$.

Gọi S_k là số hoán vị của (1,2,...,k) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Theo mệnh đề đã chứng minh, ta có $S_{k+1} = 2S_k$ với $k \geq 3$. Dễ dàng tính được $S_3 = 2$. Vậy số lượng hoán vị thỏa yêu cầu là 2^{2014}.

Bài 18

Xét tập hợp S gồm 2016 số nguyên dương đầu tiên. Gọi A, B, C là 3 tập con bất kỳ của S, đôi một không giao nhau sao cho $|A| = |B| = |C| = 672$ và $A \cup B \cup C = S$. Chứng minh rằng tồn tại 3 số a, b, c lần lượt thuộc 3 tập A, B, C mà số này bằng tổng hai số kia.

(*Tp. HCM*)

Lời giải

Giả sử phản chứng, tồn tại cách chọn các tập A, B, C thỏa mãn điều kiện đề bài sao cho không tồn tại 3 số a, b, c lần lượt thuộc A, B, C mà số này bằng tổng hai số còn lại. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \in A$. Theo giả thiết phản chứng, không thể tồn tại hai số liên tiếp mà một số thuộc B, số còn lại thuộc C. Ta viết lại các số thành một chuỗi các chữ cái a, b, c theo qui tắc số i thuộc tập A thì chữ cái ở vị trí thứ i là chữ a, tương tự với B, C.
Không mất tính tổng quát, giả sử chữ cái cuối cùng là chữ c.
Ta chứng minh tồn tại chuỗi acc. Giả sử không tồn tại chuỗi này. Khi đó số lượng chữ a cần có để ngăn cách từng chữ c đúng bằng 672. Tuy nhiên ta cần thêm ít nhất 1 chữ a nữa để ngăn cách các chữ c với 672 chữ b, vô lí vì khi đó $672 = |A| \geq 672 + 1$. Vậy chuỗi acc có tồn tại. Giả sử chữ a trong chuỗi đó ở vị trí x.
Ta chứng minh tồn tại chuỗi bba. Giả sử không tồn tại chuỗi này. Khi đó do chữ cuối cùng là chữ c và các chữ b phải ngăn cách với các chữ c bằng chữ a nên tồn tại chữ a ở vị trí lớn hơn vị trí của tất cả các chữ b và cần ít nhất 673 chữ a. Suy ra điều vô lí là $673 \leq 672$. Vậy tồn tại chuỗi bba. Giả sử chữ b đầu tiên trong chuỗi ở vị trí y.

TH1: $x > y$. Xét hiệu $(x - y)$. Do $x \in A$ và $y \in B$ nên theo giả thiết phản chứng, $(x - y)$ không thể thuộc C. Tương tự với $x + 1$ và $y + 1$, $x + 2$ và $y + 2$ ta cũng có $(x - y)$ không thể thuộc A và B. Suy ra $(X - y)$ không thuộc tập nào cả, vô lí.

TH2: $x < y$. Xét hiệu $(y - x)$ tương tự như trên, ta cũng suy ra $(y - x)$ không thuộc tập nào cả, vô lí.
Vậy giả thiết phản chứng là sai, ta có điều cần chứng minh.

Bài 19

Cho tập hợp $A = \left\{a_1, a_2, ..., a_{15}\right\}$ gồm 15 phần tử. Chúng ta sẽ tạo ra những tập hợp mà mỗi tập hợp này chỉ chứa một hay nhiều phần tử của A (có thể sử dụng tất cả các phần tử của tập A) và chỉ số dưới của mỗi phần tử trong mỗi tập hợp được tạo thành phải là bội của chỉ số dưới nhỏ nhất có trong tập hợp đó. Có bao nhiêu tập hợp như hợp như thế được tạo thành? Chẳng hạn $\left\{a_2, a_4, a_8\right\}, \left\{a_6\right\}, ...$ là các tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(*Khánh Hòa*)

Hướng dẫn

Xét một số tự nhiên n bất kì sao cho $1 \le n \le 15$. Dễ thấy trong $[1;15]$ có đúng $\left[\dfrac{15}{n}\right] - 1$ số khác n là bội số của n. Số tập hợp thỏa diều kiện đề bài với n là chỉ số nhỏ nhất, cũng chính là số tập con của tập hợp các bội số của n nhỏ hơn hoặc bằng 15, bằng:
$S_n = 2^{\left[\frac{15}{n}\right]-1}$
Số tập hợp thỏa điều kiện đề bài là: $\sum\limits_{i=1}^{15} S_i = 2^{14} + 2^6 + 2^4 + 2.2^2 + 2.2^1 + 8.2^0 = 16492$.

Bài 20

Cho tập $M_n = \{1; 2; ...; n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. Gọi X là 1 tập con của M_{15} sao cho tích của 3 ptử bất kỳ của X không phải số chính phương. Tìm max $|X|$.
2. Gọi Y là 1 tập con gồm có 15 phần tử của tập M_{25}. Tập I' gọi là tập "tốt" nếu như không tồn tại 2 phần tử nào mà tích của chúng là số chính phương. Tính số tất cả các tập "tốt".

(*Lạng Sơn*)

Lời giải

1. Ta chia mỗi số từ 1 đến 15 cho ước chính phương lớn nhất của chính nó. Khi đó ta được các số lần lượt là $1, 2, 3, 1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15$. Giả sử $|X| > 10$.

- Nếu X chứa số 1: Khi đó trong X không có hai phần tử nào có tích là số chính phương nên X chỉ có thể chứa tối đa 2 số 1, chứa tối đa 1 số 2, chứa tối đa 1 số 3.
- Nếu X chứa số 2 thì X không thể chứa cả hai số 5 và 10, không thể chứa cả hai số 7 và 14. Khi đó $|X| \leq 15-5=10$, mâu thuẫn với giả thiết quy nạp. Vậy $|X|$ không chứa 2, mà do $|X|>10$ nên $X=\{1,1,3,5,6,7,10,11,13,14,15\}$, nhưng khi đó bộ ba số $(3,5,15)$ có tích là số chính phương.
  Vậy X không chứa số 1, nhưng do X cũng không thể chứa bộ ba số $(2,7,14)$ và $(3,5,15)$ nên $|X| \leq 15-5=10$.

Vậy $|X| \leq 10$. Đưa các số về lại ban đầu, ta chỉ ra được một cách chọn phần tử cho X là: $X=\{1,3,4,5,6,7,10,11,13,14\}$.

2. Tương tự như trên, ta thay các số từ 1 đến 25 bằng thương khi chia nó cho ước chính phương lớn nhất của chính nó, ta được 16 số $1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,$ $19,21,22,23$ với số lần xuất hiện của các số lần lượt là $5,3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1$. Theo điều kiện đề bài, các số ta lấy phải khác nhau nên số cách chọn 15 phần tử (cũng chính là số đề yêu cầu tính) là:$5.3.2.2.2.\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+11\right)=1564$.

Bài 21

Một số nguyên dương k được gọi là "*đẹp*" nếu có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^*$ thành tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ sao cho với mỗi số nguyên dương $n \geq 15$ và với mọi $i \in \{1;2;...;k\}$ đều tồn tại hai sô thuộc tập A_i có tổng là n.

1. Chứng minh rằng $k=3$ là *đẹp*.
2. Chứng minh rằng mọi $k \geq 4$ đều không *đẹp*.

(*Nghệ An*)

Lời giải

1. Ta có cách phân hoạch sau:

$$A_1=\{1;2;3;12;...;3k;...\},$$

$$A_2=\{4;5;6;11;...;3k+2\},$$

$$A_3=\{7;8;9;10;...;3k+1;...\}.$$

- Với $n=15$, $n=16$ và $n=17$.
  - Đối với A_1: 3+12=15; 1+15=16; 2+15=17.
  - Đối với A_2: 4+11=15; 5+11=16; 6+11=17. Đối với A_3: 7+8=15; 7+9=16; 8+9=17.
- Với $n \geq 18$: Đối với A_1: Khi $n=3k$ với $k \geq 6$: (3k-3)+3=3k. Khi $n=3k+1$ với $k \geq 6$: (3k)+1=3k+1. Khi $n=3k+2$ với $k \geq 6$: (3k)+2=3k+2.
  Tương tự với A_2 và A_3.
  Vậy $k=3$ là số đẹp.

2. Giả sử phản chứng, tồn tại cách phân hoạch thỏa đề bài với $k \geq 4$. Xét tập $S = \{1;2;...;15\}$, do $15 < 44$ nên phải tồn tại một chỉ số i sao cho A_i chỉ chứa không quá 3 số thuộc S. Không mất tính tổng quát, giả sử số đó là 1. Theo điều kiện đề bài, tồn tại $k \leq 7$ sao cho $\{k; 15-k\}$ là tập con của A_1. Đặt số còn lại là h. Ta có $k+h = 16$ hoặc $15-k+h = 16$. Suy ra k là phần tử bé nhất của A_1.
   Giả sử $k > 1$: Trong A_1 phải tồn tại 2 số có tổng bằng 17. Do phần tử nhỏ nhất của A_1 lớn hơn 1 nên ta có $15-k+h = 17$ và $k+h = 16$. Giải hệ phương trình trên ta được $k = 7, h = 9$. Nhưng khi đó không tồn tại 2 số thuộc A_1 có tổng bằng 18 do $18-9 < 18-8 < 18-7 < 15$.
   Vậy ta có $k = 1$.
   Giả sử $15 \in A_1$. Ta xét lần lượt các số từ 17 đến 28, ta được $\{1;14;15;16;17;18;...;27\} \subset A_1$. Khi đó ta xét số 27, do $27 : 2 = 13.5$ nên với $i > 1$, không tồn tại hai phần tử thuộc A_i có tổng bằng 27, vi phạm điều kiện.
   Vậy 15 không thuộc A_1. Khi đó $2 \in A_1$.

Bài 22

Tìm $k_{max} \in \mathbb{N}^*$ sao cho ta có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương thành k tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ thỏa mãn với mỗi $n \in \mathbb{N}^*, n > 14$, trog mỗi tập A_i $i = \overline{1,k}$ đều tồn tại 2 số có tổng bằng n.

(*Ninh Bình*)

Hướng dẫn

Bài này hoàn toàn tương tự bài 19 đề Nghệ An. Bạn đọc có thể dùng cách giải trong bài 19 để giải quyết bài toán này.

Bài 23

Một hàng cây bưởi Đoan Hùng gồm 17 cây thẳng hàng đánh số cây theo thứ tự là các số tự nhiên từ 1 đến 17. Ban đầu mỗi cây có một con đậu trên đó để hút mật hoa. Sau đó, cứ mỗi giờ có hai con ong nào đó bay sang hai cây bên cạnh để tìm và hút mật nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau giờ có hay không trường hợp mà

1. Không có con ong ở cây có số thứ tự chẵn.
2. Có 9 con ong ở cây cuối cùng.

(*Phú Thọ*)

Lời giải

1. Có thể xảy ra trường hợp này, chẳng hạn, sau giờ thứ nhất, con ong ở cây 2 chuyển sang cây 3, con ong ở cây 4 chuyển sang cây 3;...; sau giờ thứ 4, con ong ở cây 14 chuyển sang cây 15, con ong ở cây 16 chuyển sang cây 15. Lúc này, không có con ong nào ở cây có vị trí chẵn.

2. Đánh số các con ong bằng vị trí của cây bưởi mà nó đang đậu. Gọi S là tổng của tất cả các con ong. Ban đầu ta có $S = \sum_{i=1}^{17} i = 17.9$

   Khi một con ong bay sang cây bên cạnh, nếu nó bay về hướng cây số 1, số gán cho nó giảm 1; ngược lại, nếu nó bay về hướng cây số 17, số gán cho nó tăng 1. Do sau mỗi giờ có hai con ong bay sang cây bên cạnh và ngược hướng nhau nên S không thay đổi. Vậy nếu có 9 con ong ở cây cuối cùng, $S > 17.9 = S$, vô lí! Vậy không thể xảy ra trường hợp này.

Bài 24

Cho số nguyên dương $n \geq 4$. Tìm số lớn nhất các cặp gồm hai phần tử phân biệt của tập $X_n = \{1, 2, ..., n\}$ sao cho tổng các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá n.

(*Quảng Bình*)

Lời giải

Giả sử k là số cần tìm.
Do có đúng $2k$ số phân biệt trong k cặp tìm được nên tổng của chúng không nhỏ hơn: $k(2k+1)$.
Do mỗi tổng mỗi cặp khác nhau và không vượt quá n nên tổng của $2k$ số đó không lớn hơn: $k(n-k) + \frac{k(k+1)}{2}$.
Vậy $k(2k+1) \leq k(n-k) + \frac{k(k+1)}{2}$.
Suy ra $k \leq \frac{2n-1}{5}$.

Bài 25

Giả sử S là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong 2 màu đỏ hoặc xanh. Gọi $A_1, A_2, ..., A_{68}$ là tập con của tập S mà mỗi tập chứa đúng 5 điểm thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i. Mỗi tập $A_1, A_2, ..., A_{68}$ chứa ít nhất một điểm màu đỏ.

ii. Với ba điểm bất kì trong S, tồn tại chính xác 1 tập con A_i chứa 3 điểm đó.

Hỏi:

1. Tìm số phần tử của tập S.

2. Tồn tại hay không một tập con A_i chứa 4 hoặc 5 điểm đỏ. Vì sao ?

(*Quảng Ninh*)

Lời giải

1. Số tập con có ba phần tử của một tập hợp năm phần tử là: $\dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$.
   Do mỗi tập con ba phần tử của S là tập con của chính xác một tập A_i nào đó nên số lượng tập con ba phần tử của S bằng: $68.10 = 680$. Suy ra $\dfrac{|S|.(|S|-1)(|S|-2)}{6} = 680$. Giải phương trình trên với $|S|$ là số tự nhiên, ta được $|S| = 17$. Vậy số phần tử của S là 17.

2. Giả sử phản chứng, không tồn tại tập A_i nào chứa 4 hoặc 5 điểm đỏ.
   Gọi tập các tập con A_i là F. Ta có các nhận xét sau:

   - $|A_i \cap A_j| \leq 2$ với $i \neq j$. Điều này là đúng vì nếu tồn tại $i \neq j$ sao cho $|A_i \cap A_j| > 2$ thì có một bộ ba điểm tồn tại trong cả A_i và A_j, vi phạm điều kiện 2.
   - Bộ hai điểm (A,B) bất kì xuất hiện trong đúng 5 phần tử của F. Xét bộ ba (A,B,X) với X chạy trong $S/\{A,B\}$, có 15 bộ ba và mỗi bộ ba này phải thuộc vào đúng một phần tử của F. Mà mỗi tập hợp A_i nếu chứa (A,B) thì chứa đúng 3 bộ ba như vậy. Nên có đúng $15:3 = 5$ phần tử của F chứa (A,B). Để ý rằng 5 tập hợp này có hợp bằng S. Xét bộ hai (A,B) với A,B đều được tô màu xanh. Mỗi tập A_i chứa bộ hai này đều phải chứa ít nhất 1 điểm đỏ nên có ít nhất 5 điểm đỏ thuộc $S.(*)$. Xét bộ ba điểm đỏ nào đó, do giả thiết phản chứng nên bộ ba này phải thuộc một tập A_i có hai điểm còn lại màu xanh. Ta lại xét bộ hai điểm xanh đó tương tự như trên, suy ra có ít nhất 7 điểm đỏ.
   - Có đúng 7 điểm đỏ trong S. Thật vậy, giả sử có ít nhất 8 điểm đỏ, khi đó xét hai điểm đỏ tương tự như $(*)$, và theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một tập A_i chứa hai điểm đỏ này và thêm ít nhất hai điểm đỏ khác trong 6 điểm đỏ còn lại, mâu thuẫn với giả thiết phản chứng!
   - Không tồn tại i sao cho A_i chứa đúng hai điểm đỏ. Thật vậy, giả sử tồn tại i như vậy, xét bộ hai điểm đỏ thuộc A_i tương tự như trên, ta cũng suy ra tồn tại một tập A_j chứa ít nhất 4 điểm đỏ, mâu thuẫn!

   Số lượng phần tử của F chứa đúng 3 điểm màu đỏ là $\dfrac{7!}{3!(7-3)!} = 35 < 68$ suy ra tồn tại một điểm đỏ R là điểm màu đỏ duy nhất của một tập A_r nào đó.
   Đặt $A_r = R, G_1, ..., G_4$. Xét bộ hai (R, G_i), dựa trên nhận xét 2,3 và 4, tồn tại thêm đúng một tập A_{r_i} chứa bộ hai đang xét nhận R là điểm đỏ duy nhất. Cho i chạy từ 1 đến 4, dựa trên nhận xét 1, có ít nhất 5 phần tử của F nhận R là điểm màu đỏ duy nhất. Để ý rằng mỗi bộ (R,G) với G là một điểm màu xanh thuộc S chỉ "tạo ra" hoặc 0 hoặc 2 tập hợp thuộc F nhận R là điểm đỏ duy nhất. Vậy R "tạo ra" nhiều nhất $10.2:4 = 5$ phần tử của F. Vậy R "tạo ra" đúng 5 phần tử của F.

   Từ đó do $35 \vdots 5$ và mỗi điểm đỏ "tạo ra" một lượng chia hết cho 5 phần tử của F có đúng 1 điểm đỏ nên ta có $68 \vdots 5$, vô lí!
   Vậy giả thiết phản chứng là sai. Câu trả lời là: tồn tại một tập con A_i chứa 4 hoặc 5 điểm đỏ.

Bài 26

1. Cho tập hợp $S = \{1;2;3;...;2016\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con của S có 3 phần tử mà chúng là độ dài của 3 cạnh của một tam giác có chiều dài cạnh lớn nhất bằng 1000 ?

2. Cho một hình vuông có cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông này có $n (n \in \mathbb{N}^*)$ hình tròn có tổng diện tích lớn hơn $n-1$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm của hình vuông nằm trong tất cả hình tròn này.

(*Quảng Trị*)

Lời giải

1. Số lượng tập con ba phần tử của S thỏa yêu cầu cũng chính là số lượng tập con hai phần tử $\{a,b\}$ của S thỏa $1 \le a,b \le 1000$ và $a+b > 1000$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b$. Suy ra $2a > a+b \ge 1000 \Rightarrow a > 500$.
Ta cũng có: $b < a$ và $b \ge 1001 - a$. Suy ra số giá trị của b thỏa điều kiện với $500 < a \le 1000$ là: $a - (1001 - a) = 2a - 1001$.
Vậy kết quả bài toán là $\sum\limits_{a=501}^{1000} (2a-1001) = \sum\limits_{i=1}^{500} (2i-1) = \dfrac{1000.500}{2} = 250000$.

2. Do mỗi hình tròn đều nằm hoàn toàn trong hình vuông nên diện tích lớn nhất của mỗi hình tròn là $S = (\frac{1}{2})^2.\pi = \frac{\pi}{4}$.
Gọi O là tâm hình vuông. Giả sử có một đường tròn không chứa O. Do điểm trong hình vuông cách O xa nhất một khoảng là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ diện tích đường tròn đó nhỏ hơn $(\frac{\sqrt{2}}{4})^2.\pi = \frac{\pi}{8}$.
   - Giả sử tất cả các hình tròn đều chứa O. Vậy O chính là điểm cần tìm. Mệnh đề cần chứng minh là đúng.
   - Giả sử có một hình tròn không chứa O. Khi đó tổng diện tích các đường tròn còn lại lớn hơn $n-1-\frac{\pi}{8}$. Suy ra $(n-1)\frac{\pi}{4} > n-1-\frac{\pi}{8} \Rightarrow n < \frac{8-\pi}{8-2\pi} < 3$. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $n=1$ và $n=2$.
     – Với $n=1$: Do hình tròn đó phải có diện tích lớn hơn 0 nên phải tồn tại một điểm trong hình vuông thuộc hình tròn đó. Mệnh đề cần chứng minh là đúng.
     – Với $n=2$: Do diện tích hình vuông chỉ bằng 1 mà tổng diện tích hai hình tròn lớn hơn 1 nên hiển nhiên phải tồn tại một điểm nằm trong cả hai hình tròn này. Vậy mệnh đề cần chứng minh là đúng.

   Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 27

Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5\}$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc E. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

(*Thái Nguyên*)

Lời giải

- Số lượng các số thuộc M có ba chữ số là: $5.4.3$
  Số lượng các số có bốn chữ số thuộc M là: $5.4.3.2$
  Số lượng các số có năm chữ số thuộc M là: $5.4.3.2.1$
  Vậy theo nguyên lí cộng, ta có $|M| = 5.4.3 + 5.4.3.2 + 5.4.3.2.1 = 300$.

- Số lượng các số thuộc S có ba chữ số và có tổng các chữ số là 10 bằng tổng số lượng các hoán vị của $\{1,4,5\}$ và $\{2,3,5\}$. Vậy số các số có ba chữ số thỏa yêu cầu là: $2.3! = 12$ số.
  Xét một số có bốn chữ số thỏa yêu cầu bất kì, ta có tổng các chữ số của số này lớn hơn hoặc bằng $1+2+3+4 = 10$. Suy ra số lượng các số có bốn chữ số thỏa yêu cầu bằng số lượng hoán vị của $\{1,2,3,4\}$ và bằng: $4.3.2.1 = 24$
  Vì $1+2+3+4+5 = 15 \neq 10$ nên không tồn tại số có năm chữ số thuộc M thỏa yêu cầu. Vậy xác suất để chọn được số có tổng các chữ số bằng 10: $\dfrac{12+24}{300} = 0.12$.

Bài 28

Tại bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$ có ghi tương ứng bốn số a, b, c, d không đồng thời bằng nhau.Thực hiện phép biến đổi số tại các đỉnh của tứ diện như sau: Mỗi lần biến đổi ta xóa bộ các số cũ $(x; y; z; t)$ và thay vào đó bộ bốn số mới $(x+y+z-3t; y+z+t-3x; z+t+x-3y; t+x+y-3z)$ theo thứ tự bất kỳ. Chứng minh rằng kể từ sau lần biến đổi đầu tiên, trong bốn đỉnh của tứ điện có ít nhất một đỉnh được ghi số dương và sau một số lần thực hiện phép biến đổi luôn có ít nhất một đỉnh của tứ diện được ghi số không nhỏ hơn 2016.

(*Thanh Hóa*)

Lời giải

- Để ý rằng $(x+y+z-3t)+(y+z+t-3x)+(z+t+x-3y)+(t+x+y-3z) = 0$. Giả sử đến một lúc nào đó không có số nào dương, khi đó tất cả các số đều phải bằng 0, dẫn đến bước trước đó tất cả các số phải bằng nhau. Mà ban đầu tất cả các số không đồng thời bằng nhau nên bước đó chưa phải bước đầu tiên và các số ở bước đó đều bằng 0... Cứ như vậy, suy ra cần vô hạn bước, vô lí! Vậy sau phép biến đổi đầu tiên, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh được ghi số dương. Về đầu bài toán là đúng.

- Ta sẽ chứng minh rằng sau bước đầu tiên, các bước sau sẽ khiến cho số lớn nhất trong bốn số của bốn đỉnh luôn tăng và tiến dần về dương vô cùng. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử sau bước thứ $i \geq 1$, ta được bốn số $x \geq y \geq z \geq t$. Khi đó sau bước $i+1$ ta được số lớn nhất là $x+y+z-3t$. Để ý rằng $x+y+z+t=0$ và do luôn tồn tại một trong bốn số là số dương nên $x>0, t<0$. Ta có $x+y+z-3t=-4t$. Giả sử $t>\frac{-1}{3}x$. Suy ra $y,z>\frac{-1}{3}x \Rightarrow x+y+z+t>0$, mâu thuẫn!
  Vậy $t \leq \frac{-1}{3}x$. Suy ra $-4t \geq \frac{4}{3}x$.
  Đặt số lớn nhất sau bước i là x_i. Ta có $x_{i+1} \geq \frac{4}{3}x_i, i \geq 1$. Do $x_1>0$ nên x_i luôn tăng và tiến dần về vô cùng. Vậy tồn tại một chỉ số m sao cho với mọi $i>m$, $x_i>2016$. Vậy vế sau bài toán là đúng, ta có điều cần chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- diendantoanhoc.net, forum.mathscope.org, artofproblemsolving.com, nangkhieutoan.com.
- Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Problems from the book*.