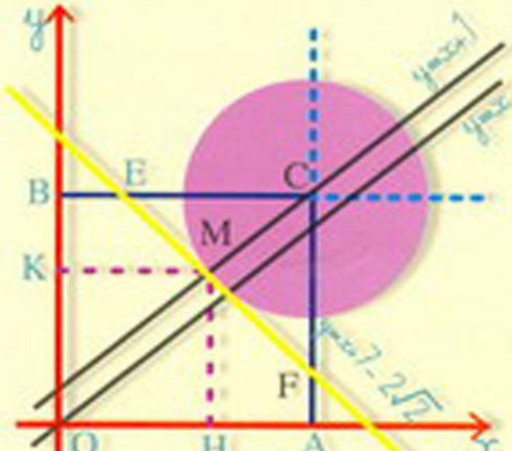
NGUYỄN VŨ THANH

30 Đề thi học sinh giỏi TOÁN

(Biên soạn theo chương trình mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo)



Dùng cho các lớp 6, 7, 8, 9.

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

30 ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TOÁN
CẤP 2

30 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN
CẤP 2

NGUYỄN VŨ THANH

(Tái bản)

Chịu trách nhiệm xuất bản:
LÊ HOÀNG

Biên tập:
YẾN CA

Sửa bản in:
NGUYỆT KIỀU

In 2.000 cuốn, khổ 14,5 × 20,5cm. Tại Xí nghiệp In Bến Tre. Số đăng kí kế hoạch xuất bản 402/207 do Cục xuất bản cấp ngày 21/04/2000 và giấy trích ngang KHXB số 885/2000.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2000.

ĐỀ 1.

1.

Chứng minh rằng nếu $x, y \in Z$ thì $2x + 3y$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi $9x + 5y$ chia hết cho 17.

2.

Giải phương trình :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$$

3.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y số

$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

4.

Cho hình vuông ABCD cạnh a, E là điểm bất kỳ nằm giữa A và B, đường thẳng CE cắt đường thẳng AD tại I, đường thẳng vuông góc với CI tại C cắt đường thẳng AB tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACKI nội tiếp và CI= CK. Suy ra trung điểm của IK di động trên một đường cố định.

b) Từ E kẻ đường vuông góc với IK tại M, khi E di động trên AB, chứng tỏ M di động trên một đường cố định.

c) Đặt BE = x, tính các độ dài BK, CK, IK và diện tích tứ giác ACKI theo và x.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Ta có : $4(2x + 3y) + (9x + 5y) = 17(x + y)$

Do đó : $2x + 3y \vdots 17 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 5y \vdots 17$

Ở đây chúng ta đã sử dụng hai tính chất chia hết :

- Nếu $a \vdots c$ và $b \vdots c$ thì $a \pm b \vdots c$
- Nếu $ab \vdots c$ và $(b,c) = 1$ thì $a \vdots c$

Cùng với loại bài tập này có các bài sau :

1/ Biết $N = \overline{dcba}$, chứng minh rằng :

a) $N \vdots 4$ khi và chỉ khi $a + 2b \vdots 4$

b) $N \vdots 8$ khi và chỉ khi $a + 2b + 4c \vdots 8$

c) $N \vdots 16$ khi và chỉ khi $a + 2b + 4c + 8d \vdots 16$ và b chẵn.

2/ Cho a, b $\in$ N, chứng minh rằng :

a) $a + 4b \vdots 13$ khi và chỉ khi $10a + b \vdots 13$

b) $3b + 2b \vdots 17$ khi và chỉ khi $10a + b \vdots 17$

3/ Chứng minh rằng nếu một số có ba chữ số mà chữ số hàng chục và hàng đơn vị giống nhau và tổng ba chữ số đó chia hết cho 7 thì số đã cho chia cho 7.

4/ Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 5 thì hai số

$2a + b$, $2b - a$ hoặc hai $2a - b$, $2b + a$ chia hết cho 5.

5/ Cho n số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng $a_1 + a_2 + ... + a_n$ chia hết cho 6, chứng tỏ rằng tổng $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3$ cũng chia hết cho 6

(Thi học sinh giỏi TP.Hồ Chí Minh, 1991).

■ **Hướng dẫn giải :**

1/ a) $N \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{ba} \vdots 4 \Leftrightarrow 10b + a \vdots 4 \Leftrightarrow 2b + a \vdots 4$

b) $N \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{cba} \vdots 8 \Leftrightarrow 100c + 10b + a \vdots 8$

$\Leftrightarrow a + 2b + 4c \vdots 8$

c). $N \vdots 16 \Leftrightarrow 1000d + 100c + 10b + a \vdots 16$

$\Leftrightarrow a + 2b + 4c + 8d \vdots 16$ và b chẵn.

2/ a) Ta có : $(10a + b) - 10(a + 4b) = -39b$

b) $3(10a + b) - 10(3a + 2b) = -17b$

3/ $\overline{abb} = 100a + 11b = 98a + 7b + 2(a + 2b) \vdots 7$

4/ $a^2 + b^2 = (a^2 - 4b^2) + 5b^2 \Rightarrow (a - 2b)(a + 2b) \vdots 5$

• Nếu $a - 2b \vdots 5$ thì $2b - a \vdots 5$

và $2(2b - a) + (2a + b) = 5b \vdots 5 \Rightarrow 2a + b \vdots 5$

• Tương tự nếu $a + 2b \vdots 5$ thì $2a - b \vdots 5$

5/ Áp dụng : $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1) \vdots 6$

(tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6)

BÀI 2 :

Đặt $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-x}$ với $2 \le x \le 10$

Ta có $A^2 = (x - 2) + 2\sqrt{(x-2)(10-x)} + (10 - x)$

$= 8 + 2\sqrt{(x-2)(10-x)}$

Ta có : $(x - 2) + (10 - x) = 8$ (hằng số) nên tích $(x - 2)(10 - x)$ lớn nhất khi và chỉ $x - 2 = 10 - x$ hay $x = 6$

$\Rightarrow \max A = 4$ khi $x = 6$ $\Rightarrow A \le 4$ (1)

Mặt khác :

$$x^2 - 12x + 40 = x^2 - 2.6.x + 6^2 + 4$$

$$= (x - 6)^2 + 4 \ge 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra nghiệm của phương trình đã cho là $x = 6$.

■ **Nhận xét cách giải :**

• Phương pháp giải trên đây gọi là *phương pháp đối lập.*

$$\begin{cases} A \le M \\ B \ge M \\ A = B \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}$$

Với phương pháp này các em nhớ dấu bất đẳng thức xảy ra của bất đẳng thức dạng "≥" hoặc "≤".

• Bằng phương pháp biến đổi tương đương ta có thể chứng minh bất đẳng thức :

$$(ac + b.d)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Bất đẳng thức trên gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta chứng minh A ≤ 4 như sau :

$A^2 = (1.\sqrt{x+2} + 1.\sqrt{10-x})^2 \le (1^2 + 1^2)[(x-2) + (10-x)] = 16$

$\Rightarrow \ A \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-2} = \sqrt{10-x} \Leftrightarrow x = 16$

Tương tự các em giải các phương trình sau :

1/ $\sqrt[4]{3x^2 + 6x + 19} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

2/ $x + \sqrt{2 - x^2} = 4y^2 + 4y + 3$

3/ $\sqrt{3x^2 + 6x + 12} + \sqrt{5x^4 - 10x^2 + 9} = 3 - 4x - 2x^2$

* *Hướng dẫn :*

1/ So sánh hai vế với số 5.

2/ So sánh hai vế với số 2.

3/ So sánh hai vế với số 5.

BÀI 3 :

Ta có :

$$A = (x + y)(x + 4y)(x + 2y)(x + 3y) + y^4$$
$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$
$$= [(x^2 + 5xy + 5y^2) - y^2][(x^2 + 5xy + 5y^2) + y^2] + y^4$$
$$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 \qquad \text{(đpcm).}$$

■ Nhận xét cách giải :

Khi gặp dạng tích $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$ với $a + b = c + d$ ta thường khai triển $(x + a)(x + b)$ và $(x + c)(x + d)$ để được :

$$x^2 + (a + b)x = x^2 + (c + d)x$$

Loại này có các bài toán sau :

1/ Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = m - 1$$

2/ Định m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$$

3/ Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

4/ Gọi $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n + 1)(n + 2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

5/ Giải phương trình $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = 3a^4$

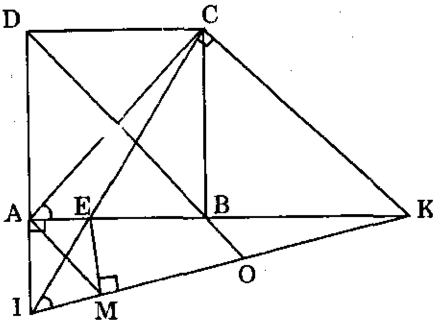
6/ Cho $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của y

b. Giải phương trình $y = 3$.

7/ Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp không thể là số chính phương.

BÀI 4 :



a) Tứ giác ACKI có hai đỉnh A và C nhìn cạnh IK dưới góc vuông nên nội tiếp trong đường tròn đường kính IK và tâm O là trung điểm IK.

Ta có : $\widehat{CAK} = \widehat{CIK}$ (hai góc nội tiếp chắn cung CK).

Mà $\widehat{CAK} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CIK} = 45^0$

Suy ra Δ CIK vuông cân tại A do đó CI = CK.

Tâm O nằm trên đường trung trực của AC là BD cố định.

b) Tứ giác AIME nội tiếp (vì có $\widehat{A} + \widehat{M} = 180^0$)

$\Rightarrow$ $\widehat{EAM} = \widehat{EIM} = 45^0$ (cùng chắn cung EM).

$\Rightarrow$ tia AM là tia phân giác của góc vuông IAB.

$\Rightarrow$ M di động trên tia phân giác của góc vuông IAB.

c) Trong Δ vuông ECK, ta có : $CB^2 = BE \,.\, BK \Rightarrow BK = \dfrac{a^2}{x}$

$$CK^2 = BK \,.\, KE = \frac{a^2}{x}\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \Rightarrow CK = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$$

IK là cạnh huyền của Δ vuông cân ICK nên :

$$IK = CK\sqrt{2} = \frac{a}{x}\sqrt{2(a^2 + x^2)}$$

$$S_{ACKI} = S_{CIK} + S_{CAI}$$

$$= \frac{1}{2}CK^2 + \frac{1}{2}AI.\,DC$$

• Tính AI : ta có Δ IAE ∽ Δ CBE

$$\Rightarrow \frac{AI}{BC} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow AI = a.\frac{a - x}{x}$$

Suy ra : $S_{ACKI} = \dfrac{a^3(a + x)}{2x^2}$

ĐỀ 2.

1.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^4 + (y + 1)^4$$

2.

Tìm 11 số không âm sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng 10 số còn lại.

3.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của :

$$y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x} \qquad (1 \le x \le 5)$$

4.

Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác với các cạnh AB và BC. Phân giác góc A cắt MN tại P. Chứng minh rằng $\widehat{APC} = 90^0$.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Khai triển và rút gọn hai vế ta được :

$$x(x + 1) = y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x + 1) = y^2(y + 1)^2 + 2y(y + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + 1 = (y^2 + y + 1)^2 \qquad (1)$$

a) Nếu $x > 0$ thì từ $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$

Suy ra (1) không có nghiệm nguyên $x > 0$

b) Nếu $x = 0$ hoặc $x = -1$ thì từ (1)

Suy ra : $y^2 + y + 1 = \pm 1$

$\Leftrightarrow y = 0 \vee y = -1$

Ta có nghiệm : $(0, 0)$; $(0 ; -1)$

$(-1 ; 0)$; $(-1 ; 1)$

c) Nếu $x < -1$ thì từ $(x + 1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$

Suy ra (1) không có nghiệm nguyên $x < -1$

Tóm lại, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên :

$(0 ; 0)$; $(0 ; -1)$; $(-1 ; 0)$; $(-1 ; -1)$

■ Nhận xét cách giải :

Phương pháp giải trên gọi là phương pháp loại trừ, trong đó sử dụng tính chất :

"Nếu có số nguyên m sao cho $m^2 < n < (m + 1)^2$ thì n không thể là số chính phương".

■ Các bài toán cùng loại này :

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

1) $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$ (Thi toàn quốc, 1992)

2) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$

3) $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$

4) $(x - 2)^4 - x^4 = y^3$

5) $1 + x + x^2 = y^2$

6) $x^2 = y(y + 1)(y + 2)(y + 3)$

■ **Hướng dẫn giải :**

1/ Với $x > 0 : x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 = y^3 < (x + 1)^3$

$\Rightarrow \quad x < y < x + 1,$ vô lý

Với $x = 0 \quad \Rightarrow y = 1$ ta có nghiệm $(0 ; 1)$

Với $x = -1 \quad \Rightarrow y = 0$ ta có nghiệm $(-1 ; 0)$

Với $x < -1 : x^3 < y^3 < (x + 1)^3 \quad \Leftrightarrow 2x(x + 1) > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên : $(0 ; 1) ; (-1 ; 0)$.

2/ Biến đổi :

$$4y^2 = 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4$$
$$= (2x^2 + x + 1)^2 + 3 - x^2 + 2x$$

Vì $3x^2 + 4x + 4 > 0$ nên $4y^2 > (2x^2 + x)^2$

Nếu $3 - x^2 + 2x < 0$ thì $4y^2 < (2x^2 + x + 1)^2$

Vậy $3 - x^2 + 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 3.$

Ta có nghiệm : $(0 ; \pm 1) ; (-1 ; \pm 1) ; (3 ; \pm 11)$

3/ Với $x > 0$ $(x^3 + 1)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 2)^2$

• Với $x \leq -2$ $\quad (x^3 + 2)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 1)^2$

$\Rightarrow \quad |x^3 + 2| < y^2 < |x^3 + 1|$, vô lý.

• Với $x = -1$ $\quad y^4 = -1$ vô lý.

• Với $x = 0 ; y = \pm 1$ là nghiệm.

4/ $y^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = z^3$

• Với $x \geq 0$ thì $(x + 1)^3 < z^3 < (x + 2)^3$

• Với $x \leq -2$ đặt $x_1 = -x - 2 \geq 0 ; y_1 = -y$

• $x = -1 ; y = 0$ là nghiệm.

5/ Xét $x > -1, x \leq -1$

6/ Đặt $a = y^2 + 3y$

BÀI 2 :

Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là 11 số không âm thỏa điều kiện của bài toán. Ta có :

$$a_1 = (a_2 + a_3 + \ldots + a_{11})^2$$

$$a_2 = (a_1 + a_3 + \ldots + a_{11})^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 - a_2 = (a_2 + a_3 + \ldots + a_{11})^2 - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{11})^2$$

$$= (a_2 - a_1)(a_2 + a_1 + 2a_3 + \ldots + 2a_{11})$$

$$\Rightarrow \quad (a_1 - a_2)(1 + a_1 + a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_{11}) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$$

Tương tự ta có : $a_1 = a_2 = \ldots = a_{11} = a$

Khi đó : $a = (10a)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ hoặc $a = \dfrac{1}{100}$

BÀI 3 :

a/ Giá trị lớn nhất :

Dùng biến đổi tương đương, chứng minh bất đẳng thức :

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \text{ (BĐT Bunhiacopxki).}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi : $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có :

$$y^2 = (3.\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x})^2 \leq (3^2 + 4^2)(x - 1 + 5 - x) = 100$$

$$\Rightarrow \quad y \leq 10$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $\dfrac{\sqrt{x-1}}{3} = \dfrac{\sqrt{5-x}}{4}$ hay $x = \dfrac{61}{25}$

Vậy : Max $y = 10$ khi $x = \dfrac{61}{25}$

b/ Giá trị nhỏ nhất :

Ta có : $y = 3(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}) + \sqrt{5-x}$

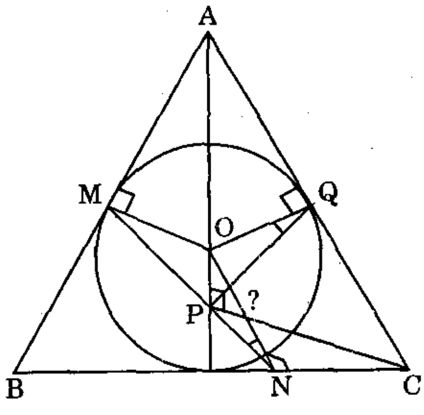
Đặt $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} \Rightarrow A^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} \geq 4$

$\Rightarrow$ $A \geq 2$ và dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ hoặc $x = 5$

Vậy $y \geq 3.2 + 0 = 6$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 5$

Do đó : $\min y = 6$ khi $x = 5$

BÀI 4 :



A/ Trường hợp P nằm trong đường tròn nội tiếp Δ ABC.

Ta có : Δ MOP = Δ QOP (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OMP} = \widehat{OQP}$ (1)

Mặt khác :

$\widehat{OMP} = \widehat{ONP}$ (ΔMON cân) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ONP} = \widehat{OQP}$

$\Rightarrow$ Tứ giác OPNQ nội tiếp.

$\Rightarrow$ 5 điểm O, P, N, C, Q nằm trên đường tròn đường kính OC $\Rightarrow \widehat{OPC} = 90^0$ *(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).*

b/ Trường hợp P nằm trên đường nội tiếp ΔABC. Khi đó ΔABC là Δ cân tại A và P là chân đường cao kẻ từ A.

c/ Trường hợp P nằm ngoài đường tròn nội tiếp Δ ABC. Bạn đọc chứng minh tương tự.

ĐỀ 3.

1.

Cho $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2$ $+(x+z-2y)^2$.

Chứng minh rằng : $x = y = z$

2.

Cho ba số a,b,c thỏa điều kiện :

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $a + b^2 + c^3 = 1$

3.

Cho dãy số 49, 4489, 444889... được xây dựng bằng cách thêm 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy số là số chính phương.

4.

Cho tam giác ABC, trên AB và AC về phía ngoài tam giác ta dựng hai hình vuông ABDE và ACMN.

Chứng minh rằng trung tuyến qua A của tam giác AEN kéo dài chính là đường cao của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Đẳng thức đã cho tương đương với :

$$(x-y)^2-(x+y-2z)^2+(y-z)^2-(y+z-2x)^2+(z-x)^2-$$
$$-(x+z-2y)^2=0$$

$\Leftrightarrow 4(x-z)(z-y)+4(y-x)(x-z)+4(z-y)(y-x)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \qquad \Leftrightarrow x=y=z$

■ **Nhận xét cách giải :**

Trên đây sử dụng phương pháp : "Tổng bình phương".

Nếu $A_1^2+A_2^2+\ldots+A_n^2=0$ thì $A_1=A_2=\ldots=A_n=0$

Các bài tập cùng dạng :

1/ Chứng minh rằng nếu :

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ thì $a=b=c$

2/ Chứng minh rằng nếu :

$a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$

3/ Chứng minh rằng :

$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$

khi và chỉ khi : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ $(abc\neq 0)$

4/ Giải phương trình :

$x+y+z+4=2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}$

BÀI 2 :

Từ đẳng thức $a^2+b^2+c^2=1$, suy ra :

$|a|\leq 1$; $|b|\leq 1$; $|c|\leq 1$.

Lấy đẳng thức thứ nhất trừ đẳng thức thứ hai, ta được :

$a^2(1-a)+b^2(1-b)+c^2(1-c)=0 \qquad (1)$

vì $a^2(1-a)\geq 0$; $b^2(1-b)\geq 0$; $c^2(1-c)\geq 0$

nên từ (1) suy ra :

$$\begin{cases} a(1-a)=0 \\ b(1-b)=0 \\ c(1-c)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{một trong ba số } a, b, c \text{ bằng 1 còn hai số còn lại bằng 0.}$$

Từ đó suy ra : $a + b^2 + c^3 = 1$

BÀI 3 :

Số hạng tổng quát của dãy số có dạng :

$$a_n = \underbrace{44...4}_{n \text{ số } 4}\underbrace{88...89}_{n-1 \text{ số } 8} = \underbrace{44...4}_{n \text{ số } 4}\underbrace{88...8}_{n \text{ số } 8} + 1$$

$$= \underbrace{44...4}_{n \text{ số } 4}.10^n + \underbrace{88...8}_{n \text{ số } 8} + 1 = 4\underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1}.10^n + 8\underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1} + 1$$

$$= 4.\frac{10^n - 1}{9}.10^n + 8.\frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4.10^{2n} + 4.10^n + 1}{9} = (\frac{2.10^n + 1}{3})^2$$

$$(\text{vì } \underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1} = \frac{99...9}{9} = \frac{10^n - 1}{9})$$

Nhận xét cách giải :

- Sử dụng biểu diễn số tự nhiên trong hệ ghi số cơ số 10.

$$N = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0$$

Thí dụ :

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 100\overline{ab} + \overline{cd}$$

- Số $\underbrace{\overline{aaa...a}}_{n \text{ số } a} = a.\underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1} = a.\frac{99...9}{9} = a.\frac{10^n - 1}{9}$

■ **Bài tập tương tự :**

1/ Chứng minh rằng các số sau là số chính phương.

$$A = \underbrace{11...1}_{2n\text{ số }1} + \underbrace{44...4}_{n\text{ số }4} + 1$$

$$B = \underbrace{11...1}_{2n\text{ số }1} + \underbrace{11...1}_{n+1\text{ số }1} + \underbrace{66...6}_{n\text{ số }6} + 8$$

$$C = \underbrace{44...4}_{2n\text{ số }4} + \underbrace{22...2}_{n+1\text{ số }2} + \underbrace{88...8}_{n\text{ số }8} + 7$$

2/ Chứng minh rằng : $\overline{abcabc} \vdots 7.\ 11.\ 13$

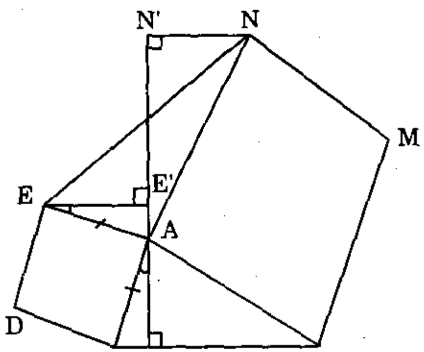
3/ Chứng minh rằng số $\underbrace{11.1}_{n\text{ số }1}\underbrace{2...2}_{n\text{ số }2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp với mọi $n \geq 1$ ($n \in N$).

BÀI 4 :

Ta chứng minh đường cao AH của tam giác ABC kéo dài cắt EN tại trung điểm của EN.

Gọi E' , N' lần lượt là hình chiếu củ E, N lên AH kéo dài.

Xét hai tam giác vuông AE'E và BHA có :



$AE = AB$

$\widehat{E'EA} = \widehat{HAB} (= 90^0 - \widehat{E'AE})$

$\Rightarrow \Delta\ AE'E = \Delta\ BHA$

$\Rightarrow EE' = AH \qquad (1)$

Tương tự ta cũng có :

$\Delta\ AN'B = \Delta CHA$

$\Rightarrow NN' = AH \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : EE' // = NN'; do đó tứ giác EE'NN' là hình bình hành $\Rightarrow$ AH cắt EN tại trung điểm của EN (đpcm).

Nhận xét : Bạn đọc hãy chứng minh bằng phương pháp trực tiếp.

ĐỀ 4.

1.

Giả sử x,y là số dương. Gọi m là số nhỏ nhất trong các số x ; $y + \frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể đạt được của m.

2.

Với những số nguyên nào của x ($0 \le x \le 9$) thì các số $\overline{\underbrace{44...4}_{n\text{ số }4}\underbrace{xx...x}_{n\text{ số }x}}$ và $\overline{\underbrace{11...1}_{n\text{ số }1}\underbrace{xx...x}_{n\text{ số }x}}$ đồng thời là tích của hai số tự nhiên liên tiếp với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

3.

Cho a + b + c = 0, chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$$

4.

Cho cạnh của hình vuông ABCD có độ dài là 1. Trên các cạnh AB, AD lấy các điểm P và Q sao cho chu vi tam giác APQ bằng 2. Chứng minh rằng $\widehat{PCQ} = 45^0$.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Đặt $z = \frac{1}{y}$ thì $m = \min\left\{x; z; \frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right\}$.

x , z có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $x \le z$

Xét hai trường hợp xảy ra :

a) Khi $x \le \sqrt{2}$ thì $m \le x \le \sqrt{2}$

b) Khi $x > \sqrt{2}$ thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \le \frac{2}{x} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow m < \sqrt{2}$

Vậy m đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $x = \sqrt{2}$ hoặc $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

BÀI 2 :

Với n = 1 hai số $\overline{4x}$ và $\overline{1x}$ đồng thời là tích của hai số tự nhiên liên tiếp chỉ với x = 2 (42 = 6.7 ; 12 = 3.4). Ta chứng minh với x = 2 thì kết quả đúng với mọi $n \ge 1$.

Ta có :

$$\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{44...4}_{n}.10^n + \underbrace{22...2}_{n} = 4.\underbrace{11...1}_{n}.10^n + 2.\underbrace{11....1}_{n}$$

$$= 4.\frac{10^n - 1}{9}.10^n + 2.\frac{10^n - 1}{9} = 2.\frac{10^n - 1}{9}(2.10^n + 1)$$

$$= \frac{2(10^n - 1)}{3}.\left[\frac{2(10^n - 1)}{3} + 1\right]$$

là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

Tương tự :

$$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}.10^n + 2.\frac{10^n - 1}{9}$$

$$= \frac{10^n - 1}{9}(10^n + 2) = \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{10^n - 1}{3} + 1\right)$$

là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

■ **Nhận xét cách giải :** (Xem nhận xét cách giải bài 3 đề 3)

BÀI 3 :

Đặt $x = \dfrac{b-c}{a}$; $y = \dfrac{c-a}{b}$; $z = \dfrac{a-b}{c}$

Khi đó :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} \qquad (1)$$

Ta có : $\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{a}{b-c}\left(\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}\right) = \dfrac{a}{b-c}\cdot\dfrac{c^2-ac+ab-b^2}{bc}$

$$= \frac{a}{b-c}\cdot\frac{(c-b)(c+b-a)}{bc} = \frac{2a^2}{bc} \text{ (vì } c+b=-a)$$

Tương tự : $\dfrac{z+x}{y} = \dfrac{2b^2}{ac}$ và $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2c^2}{ab}$

Suy ra : $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z} = 2\left(\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}\right)$

$$= \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} = \frac{2\left[-(b+c)^3+b^3+c^3\right]}{abc}$$

$$= \frac{-6bc(b+c)}{abc} = 6 \qquad \text{(vì } b+c=-a) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = 9$ (đpcm)

Nhận xét :

Từ cách giải trên suy ra bài toán :

Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

• *Các bài toán tương tự :*

1/ a, b, c là ba số đôi một khác nhau và

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b} = 0$$

Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2} = 0$

2/ Giả sử $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, tính :

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})$$

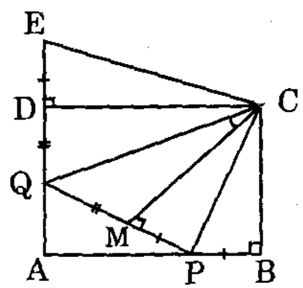
3/ Chứng minh rằng nếu $a^3 + b^3 + c^3 \neq 3abc$ thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

4/ Chứng minh rằng nếu hệ :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$ có nghiệm thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

BÀI 4 :



Ta có :

$AP + AQ + PQ = 2 = AQ + QD + AP + PB \Rightarrow PQ = PB + QD$

Trên đoạn PQ lấy điểm M sao cho :

$DQ = QM$; $MP = PB$

Trên tia đối với tia DA lấy điểm E sao cho : $DE = PB$. Khi đó : $\Delta CBP = \Delta CDE$

$\Rightarrow \quad PC = EC \Rightarrow \Delta\, CEQ = \Delta\, CQP \qquad$ (c.c.c)

$\Rightarrow \quad \widehat{CQD} = \widehat{CQP} \Rightarrow \Delta$ CMQ vuông tại M.

Ta có : $\Delta CDQ = \Delta CMQ$ và $\Delta CMP = \Delta CBP$

$\Rightarrow \quad \widehat{DCQ} = \widehat{QCM}$ và $\widehat{MCP} = \widehat{PCB}$

$\Rightarrow \quad \widehat{PCQ} = \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{90^0}{2} = 45^0 \qquad$ (đpcm).

ĐỀ 5.

1.

Tìm một số điện thoại có 4 chữ số biết rằng nó là một số chính phương và nếu ta thêm vào mỗi chữ số của nó một đơn vị thì cũng được một số chính phương.

2.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có :

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{9}{20}$$

3.

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \end{cases}$$

4.

Cho tam giác ABC cân tại A. Các đường thẳng qua đỉnh B, C và trung điểm O của đường cao tương ứng đỉnh A cắt các cạnh AB, AC ở M và N. Cho diện tích tam giác ABC bằng S. Hãy tính diện tích tứ giác AMON.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Giả sử số điện thoại là : $\overline{abcd}$

Ta có : $\overline{abcd} = x^2$; $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = y^2$

$\Rightarrow \quad y^2 - x^2 = 1111 \quad \Rightarrow \quad (y - x)(y + x) = 1111$

x,y là các số có hai chữ số (vì nếu x,y có từ 3 chữ số trở lên thì khi bình phương không thể là số có 4 chữ số và x,y cũng không thể có 1 chữ số).

1111 chỉ có hai cách phân tích thành tích hai số nguyên dương $1111 = 11.\ 101 = 1111.1$

Vì $(y - x)(y + x) = 11.101 \Rightarrow \begin{cases} y - x = 11 \\ y + x = 101 \end{cases}$

Giải hệ ta được ; $x = 45$; $y = 56$

Thử lại : $\overline{abcd} = x^2 = 2025$; $y^2 = 3136$

Vậy số điện thoại cần tìm là : 2025.

■ Nhận xét cách giải :

Cách giải trên sử dụng phương pháp phân tích trong phương trình nghiệm nguyên.

- Đưa các ẩn về cùng một vế và phân tích ra thừa số.
- Phân tích vế còn lại ra thừa số nguyên tố.
- Lập luận để đi đến các hệ phương trình.

Sau đây là những bài toán tìm nghiệm nguyên bằng phương pháp phân tích.

1/ Tìm hai số nguyên có tổng bằng tích.

2/ Tìm hai số nguyên có tích bằng p lần tổng (p nguyên tố).

3/ Tìm hình chữ nhật có các cạnh nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

4/ Tìm nghiệm nguyên :

a) $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

b) $2x^2 + xy - y^2 - 9 = 0$

5/ Tìm hai số tự nhiên mà hiệu bình phương của chúng bằng 169.

6/ Tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương :

Hướng dẫn : Giả sử $\frac{p}{q} \in Q$: $\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2 \Rightarrow q = 1$

$$p^2 + p + 6 = n^2 \Leftrightarrow (2p + 1)^2 - 4n^2 = -23$$

7/ Tìm nghiệm nguyên phương trình : $x^2 + x + 13 = y^2$

Hướng dẫn : $(4x^2 + 4x + 1) + 51 = y^2 \Leftrightarrow 51 = y^2 - (2x + 1)^2$

BÀI 2 :

Ta có :

$$\frac{1}{K^2 + (K+1)^2} = \frac{1}{2K^2 + 2K + 1} < \frac{1}{2K(K+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right)$$

Với K = 2 ; ta có : $\frac{1}{13} = \frac{1}{2^2 + 3^2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

Với K = 3 ; ta có : $\frac{1}{25} = \frac{1}{3^2 + 4^2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

....

Với K = n ; ta có : $\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Từ đó suy ra :

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2}$$

$$< \frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]$$

$$< \frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20} \qquad \text{(đpcm).}$$

■ **Nhận xét cách giải :**

Bất đẳng thức trên được chứng minh bằng phương pháp gọi là "phương pháp làm trội". Ta có thể dùng tính chất bất đẳng thức để làm tăng lên (hoặc giảm xuống) một vế của bất đẳng thức mà vế này tính được tổng hoặc tích.

Các bất đẳng thức sau được chứng minh bằng phương pháp làm trội.

1/ $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1 (n \geq 1)$

2/ $1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{1.2.3}+...+\dfrac{1}{1.2.3...n}<2 \qquad (n \geq 1)$

3/ $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+....+\dfrac{1}{(2n+1)^2}<\dfrac{1}{4} \qquad (n \geq 1)$

4/ $2\sqrt{n+1}-2 < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1 \ (n > 1)$

5/ $\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}...\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$

BÀI 3 :

Đặt $X = \dfrac{1}{x}$; $Y = \dfrac{1}{y}$: $Z = \dfrac{1}{z}$ $(x, y, z \neq 0)$

Hệ đã cho được viết : $\begin{cases} X+Y+Z=2 & (1) \\ 2XY-Z^2=4 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra : $Z = 2 - X - Y$ rồi thay vào (2) và rút gọn ta được.

$(X-2)^2 + (Y-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = Y = 2\ ,\ Z = -2$

Vậy hệ có nghiệm : $(x\ ;\ y;\ z) = (\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$

■ Nhận xét cách giải :

Giải phương trình (hệ phương trình) theo phương pháp trên gọi là phương pháp tổng bình phương, có thể giải được phương trình nhiều ẩn hoặc hệ phương trình có số ẩn nhiều hơn số phương trình. Chuyển tất cả về một vế rồi đưa về tổng bình phương bằng 0, suy ra từng số hạng bằng 0.

■ Bài tập tương tự :

1/ Giải phương trình : $x^3 - y^3 = 3xy + 1$

2/ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2}=x \end{cases}$$

3/ Giải phương trình :

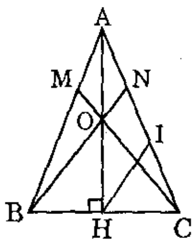
$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$$

4/ Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn bất đẳng thức :

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3$$

BÀI 4 :

Ta có : $\dfrac{S_{AMON}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{AON}}{S_{AHC}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AN}{AC}$ (1)



Gọi I là trung điểm NC ta có :

HI là đường trung bình ΔCBN

$\Rightarrow$ HI//BN $\Rightarrow$ ON là đường trung bình Δ AHI

$\Rightarrow$ N là trung điểm AI

Do đó : $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{6}.S$

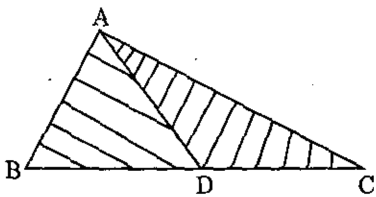
Từ (1) và (2) suy ra : $S_{AMON} = \dfrac{1}{6} . S$

■ Nhận xét cách giải :

Trên đây là dạng bài tỷ số diện tích.

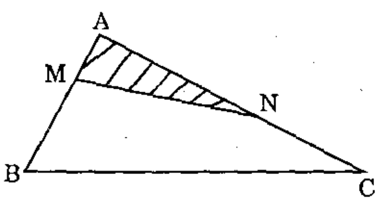
Lưu ý các tỷ số sau :

a)



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$$

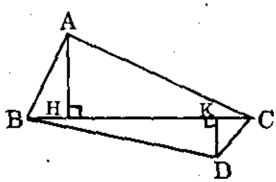
b)



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

c) Nếu $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ tỷ số K thì $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K^2$

d)



$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{AH}{KD}$$

■ **Các bài toán về tỷ số diện tích.**

1/ Cho hình bình hành ABCD, gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tính diện tích hình giới hạn bởi các đường thẳng AQ, BR, CS, DP, biết diện tích hình bình hành là a^2.

2/ Trong tam giác ABC có diện tích bằng đơn vị, dựng đoạn AD cắt trung tuyến CF tại E sao cho $EF = \dfrac{1}{4}CF$. Tính diện tích tam giác ABD.

3/ Cho lục giác đều ABCDEF gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, EF.

a) Chứng minh rằng tam giác MNP đều.

b) Tính diện tích tam giác MNP, biết diện tích lục giác đều là S.

4/ Các đường chéo của một hình thang chia hình thang ấy thành bốn tam giác. Tìm diện tích hình thang, biết diện tích của các tam giác kề với đáy là S_1 và S_2.

5/ Tìm tỷ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của tam giác khác có cạnh bằng các trung tuyến của tam giác ABC.

ĐỀ 6.

1.

Giả sử N = 1.3.5... 2001 chứng minh rằng trong ba số nguyên liên tiếp 2N – 1, 2N, 2N + 1 không có số nào là số chính phương.

2.

Cho 2001 điểm trên mặt phẳng, biết rằng trong mỗi nhóm ba điểm bất kỳ của các điểm trên bao giờ cũng có thể chọn ra được hai điểm có khoảng cách bé hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm trên có ít nhất 1001 điểm nằm trong một đường tròn có bán kính bằng 1.

3.

Tìm các chữ số x,y sao cho nếu $\overline{xxxxx}$ cho $\overline{yyyy}$ có thương là 16 dư là r; nếu chia $\overline{xxxx}$ cho $\overline{yyy}$ có thương là 16 nhưng số dư nhỏ hơn r là 2000.

4.

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

• 2N là một số chẵn nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là một số chính phương.

• Một số chính phương không chia hết cho 3 thì chia cho 3 dư là 1 vì $(3K \pm 1)^2 = 3(3K^2 \pm 2K) + 1$.

Mà $2N - 1 = (2N - 3) + 2$ chia cho 3 dư là 2 nên $2N - 1$ không thể là số chính phương.

• Giả sử $2N + 1 = K^2$ (K lẻ)

$\Rightarrow$ $2N = (K - 1)(K + 1) \vdots 4$

$\Rightarrow$ N chẵn (vô lý)

Vậy $2N + 1$ cũng không là số chính phương.

■ **Nhận xét cách giải :**

Ở trên sử dụng hai tính chất của số chính phương.

a) Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì sẽ chia hết cho p^2.

b) Số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Các bài tập về số chính phương.

1/ Tổng các chữ số của một số chính phương có thể bằng 2000, 2001 được không ? Tại sao ?

2/ Chứng minh rằng tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

3/ Chứng minh rằng tổng lũy thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.

BÀI 2 :

Ta có : 2001 = 2. 1000 + 1

Gọi A là một điểm trong 2001 điểm đã cho. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 1, nếu tất cả 2000 điểm còn lại đều nằm trong đường tròn tâm A bán kính 1 thì bài toán được giải.

Giả sử có điểm B nằm ngoài đường tròn (A,1) tức là AB > 1. Vẽ đường tròn tâm B bán kính 1, ký hiệu là (B, 1). Ta chứng minh tất cả 2001 điểm đã cho đều nằm trong (A,1) hoặc (B,1). Thật vậy, lấy C bất kỳ, ta có nhóm ba điểm A, B, C theo giả thiết vì AB > 1 nên AC < 1 hoặc BC < 1, khi đó C nằm trong (A,1) hoặc (B,1).

Vậy theo nguyên tắc Dirichlet, một trong hai đường tròn này phải chứa ít nhất 1001 điểm (đpcm).

■ **Nhận xét cách giải :**

Nguyên tắc ngăn kéo Dirichlet : "Nếu đem n + 1 vật xếp vào n ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ 2 vật trở lên".

Tổng quát : "Nếu đem nk + 1 vật xếp vào n ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ K + 1 vật trở lên" với bài giải trên : n = 2 ; K = 1000 vật là điểm ; ngăn kéo là đường tròn (A,1) và (B,1).

Sau đây là một số bài tập sử dụng nguyên tắc Dirichlet trong hình học.

1/ Trong hình vuông có cạnh bằng 1 có 101 điểm phân bố tùy ý, chứng minh rằng có ít nhất 5 điểm nằm trong hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

2/ Cho 6 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kỳ trong chúng tạo nên một tam giác có độ dài các cạnh khác nhau.

Chứng minh rằng tồn tại một cạnh vừa là cạnh nhỏ nhất của một tam giác vừa là cạnh lớn nhất của tam giác khác.

3/ Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1 không thể chọn ra nhiều hơn 5 điểm có khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong chúng đều lớn hơn 1.

4/ Cho 17 điểm nằm trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm này lại bằng các đoạn thẳng và tô màu xanh, đỏ hoặc vàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh cùng màu.

BÀI 3 :

Theo giả thiết, ta có :

$$\overline{xxxxx} = 16\overline{yyyy} + r \quad (1)$$

$$\overline{xxxx} = 16\overline{yyy} + r - 2000 \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo từng vế ta được :

$$\overline{x0000} = 16\overline{y000} + 2000$$

$$\Rightarrow \quad 10x = 16y + 2 \quad \Rightarrow \quad 5x - 8y = 1 \quad (3)$$

Vì (5; 8) = 1 nên (3) có nghiệm nguyên và nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = 5 + 8t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{với } t \in Z$$

Vì $0 < x, y \leq 9$ nên $t = 0$. Từ đó suy ra : $x = 5$; $y = 3$.

■ Nhận xét cách giải :

Phương trình (3) là phương trình Diophante bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát : $ax + by = c$ (*) với a , b , c nguyên.

■ **Cách giải :**

• Kiểm tra điều kiện có nghiệm riêng : (a , b) là ước của c.

• Tìm một nghiệm riêng (x_0 ; y_0) của (*)

• Nếu (a,b) =1 thì nghiệm nguyên tổng quát của (*) cho bởi công thức :

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} \quad \text{với } t \in Z$$

■ **Bài tập :**

1/ Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa :

a) $n \vdots 9$ và $n + 1 \vdots 25$

b) $n \vdots 21$ và $n + 1 \vdots 165$

c) $n \vdots 9$, $n + 1 \vdots 25$ và $n + 2 \vdots 4$.

2/ Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $\frac{3n-1}{7}$ và $\frac{7n-1}{5}$ là những số nguyên.

3/ Giải bài toán cổ :

"Trăm trâu, trăm cỏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Lụ khụ trâu già
Ba con một bó".

Hỏi có bao nhiêu trâu đứng, trâu nằm và trâu già ?

BÀI 4 :

• *Cách 1 :* (Tổng bình phương)

– Nếu x = 0 thì ta có nghiệm : x = 0 ; y = 0 ; z = 0

– Nếu $x \neq 0$ thì $y \neq 0$ và $z \neq 0$

Hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1+y^2}{2y^2} = \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1+z^2}{2z^2} = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{2y^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{x^2} + 1 \\ \dfrac{2}{z} = \dfrac{1}{y^2} + 1 \\ \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{z^2} + 1 \end{cases}$$

Cộng vế với ba phương trình của hệ và chuyển sang một vế ta có :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x} - \frac{2}{y} - \frac{2}{z} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y = z = 1.$$

Thử lại rõ ràng (1 ; 1 ; 1) là nghiệm của hệ.

Vậy hệ có hai nghiệm (0 ; 0 ; 0) và (1 ; 1 ; 1)

• *Cách 2 :* (Dùng bất đẳng thức)

Từ hệ đã cho suy ra : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

Ta có bất đẳng thức $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$

(vì $2x \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x)^2$).

Do đó : $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2} = x.\dfrac{2x}{1+x^2} \leq x$ (1)

Tương tự : $z \leq y$ và $x \leq z$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x \leq z \leq y \leq x \Rightarrow x = y = z$

Từ đó ta có $x = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

Vậy hệ có nghiệm : (0 ; 0 ; 0) và (1 ; 1 ; 1)

ĐỀ 7.

1.

Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn bất đẳng thức :

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3$$

2.

Chứng minh rằng nếu $|a| > 2$ thì hệ sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x^5 - 2y = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3.

Ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của x (là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Tính tổng :

$$A = \left[\sqrt{1.2.3.4}\right] + \left[\sqrt{2.3.4.5}\right] + \ldots + \left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

4.

Cho tam giác ABC vuông tại B, trên tia đối với tia BA, lấy điểm D sao cho AD = 3AB. Đường thẳng vuông góc với CD tại D cắt đường thẳng vuông góc với AC tại A ở E. Chứng minh tam giác BDE cân.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Ta có : $x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 3 < 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 3 \le -1$ (vì $x, y, z \in Z$)

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - xy + \frac{y^2}{4} + 3(\frac{y^2}{4} - y + 1) + z^2 - 2z + 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - \frac{y}{2})^2 + 3(\frac{y}{2} - 1)^2 + (z - 1)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{y}{2} - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \; ; \; y = 2 \; ; \; z = 1$$

BÀI 2 :

Từ $\quad x^2 + y^2 = 1$ suy ra : $|x| \le 1$; $|y| \le 1$.

Khi đó $\quad |x|^5 \le |x|^2$ và $|x^5 - 2y|$

$\le |x|^5 + 2|y| \le |x|^2 + |y|^2 - (|y|^2 - 2|y| + 1) + 1$

$\le x^2 + y^2 + 1 - (|y| - 1)^2 \le 2$

$\Rightarrow \quad |a| \le 2 \quad$ (Vô lý)

Vậy hệ đã cho vô nghiệm với $|a| > 2$.

■ Nhận xét cách giải :

Bài giải trên sử dụng đến các tính chất của giá trị tuyệt đối :

$a^2 \le b^2 \Leftrightarrow |a| \le |b|$

$|a + b| \le |a| + |b|$ (dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$)

$|a|^2 = a^2$

Bạn đọc hãy giải các bài toán sau :

1/ Giả sử $f(x) = x^2 + bx + c$, chứng minh rằng nếu m, n, k là ba số nguyên đôi một khác nhau thì :

$$\text{Max}\ \{|f(m)|, |f(n)|, |f(k)|\} \geq \frac{1}{2}$$

2/ Chia tập hợp những số tự nhiên {1,2...,2n} thành hai tập con rời nhau A và B, mỗi tập có n phần tử ký hiệu các phần tử của hai tập này theo thứ tự tăng.

$$A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n\}$$

và $\quad B = \{b_n < b_{n-1} < \ldots b_2 < b_1\}$

Hãy chứng minh đẳng thức :

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2$$

3/ Tìm a, b, c sao cho :

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|,\ \forall x,y,z$$

■ **Hướng dẫn :**

1/ Giả sử $m < n < k$ thì $k - m \geq 2$

Nếu : $|f(m)| \leq \frac{1}{2}$; $|f(n)| < \frac{1}{2}$; $|f(k)| < \frac{1}{2}$ thì :

$$|f(k) - f(n)| = |k - n||k + n + b| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |k + n + b| < 1$$

Tương tự $|m + n + b| < 1 \Rightarrow k - m < 2$ (vô lý).

2/ $|a_k - b_k|$ bằng hiệu giữa số lớn hơn n và số không vượt quá n, do đó :

$$VT = (n + 1) + (n + 2) + \ldots + 2n - (1 + 2 + \ldots + n) = n^2$$

3/ Lần lượt thay vào đẳng thức $x = y = z = 1$; $x = 1, y = z = 0$; $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$ ta có hệ :

$$\begin{cases} |a+b+c| = 1 \\ |a| + |b| + |c| = 1 \\ |a-b| + |b-c| + |c-a| = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{hai trong ba số a,b,c bằng 0}$$

BÀI 3 :

Ta có : $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$

$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n)$$

$$\Rightarrow (n^2 + 3n)^2 < n(n+1)(n+2)(n+3) < (n^2 + 3n + 1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n < \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)} < n^2 + 3n + 1$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right] = n^2 + 3n$$

Suy ra :

$$A = (1^2 + 3.1) + (2^3 + 3.2) + ... + (n^2 + 3.n)$$

$$= (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + ... + n) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

■ **Nhận xét cách giải :**

Đây là bài toán về "phần nguyên của một số".

• *Định nghĩa :* Phần nguyên của số α, ký hiệu là $[\alpha]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá α.

$$[\alpha] \le a < [\alpha] + 1$$

• *Tính chất :*

a) $n \in Z$ và $n \le \alpha < n + 1$ thì $[\alpha] = n$

b) $[n + \alpha] = n + [\alpha]$ $(n \in Z)$

c) $\alpha \geq \beta \quad \Rightarrow \quad [\alpha] \geq [\beta]$

d) $[-\alpha] = \begin{cases} -[\alpha] & \text{nếu } \alpha \in Z \\ -1-[\alpha] & \text{nếu } \alpha \notin Z \end{cases}$

e) $\left[\dfrac{[\alpha]}{n}\right] = \left[\dfrac{\alpha}{n}\right]$ với $n \in Z^+$

• *Một vài Bài toán về phần nguyên.*

1/ Chứng minh rằng :

a) $\left[\alpha + \dfrac{1}{2}\right] = [2\alpha] - [\alpha]$

b) $[2\alpha] + [2\beta] \geq [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta]$

c) $\left[\dfrac{n}{2}\right] + \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = n$ với $n \in Z$.

2/ Tính $[x]$ biết :

a) $x = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

b) $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots. + \dfrac{1}{\sqrt{10^6}}$

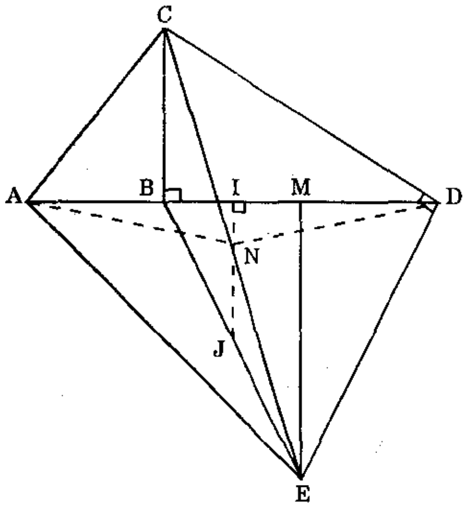
c) $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \ldots + \sqrt[3]{6}}}$

3/ Tính các tổng :

a) $N = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{n^2 - 1}\right]$

b) $S = \left[\dfrac{n+1}{2}\right] + \left[\dfrac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\dfrac{n+2^k}{2^k}\right] + \ldots$

BÀI 4 :



Gọi N, I, M lần lượt là trung điểm của CE, AD, BD. Từ giả thiết AD = 3AB suy ra I là trung điểm BM.

Ta có : AN = DN

($= \frac{1}{2}$CE do các Δ ACE, Δ DCE vuông).

⇒ NI ⊥ AD (Δ AND cân).

Gọi J là giao điểm của NI kéo dài với BE thì NJ là đường trung bình Δ BCE ⇒ IJ là đường trung bình của Δ BME ⇒ ME // IJ ⇒ ME ⊥ BD.

⇒ Δ BED cân (đpcm).

Nhận xét cách giải :

Đây là dạng toán : "Sử dụng tính chất của trung điểm" trong đó sử dụng nhiều đến đường trung bình tam giác và định lý : "Đường trung tuyến của tam giác vuông ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền".

Bài tập tương tự :

1/ Cho tứ giác ABCD có hai cạnh đối AB = CD. Gọi M, N, lần lượt là trung điểm của AD và BC. Kéo dài AB, MN, CD gặp nhau đôi một tại E và F. Chứng minh rằng : $\widehat{AEM} = \widehat{MFD}$.

2/ Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ 3 đỉnh của tam giác đến một đường thẳng ngoài tam giác bằng ba lần khoảng cách từ trọng tâm đến tam giác đó.

3/ Lấy điểm P trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. **Vẽ PK** vuông góc với AB, PH vuông góc với AC. Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm D của BC đến K và H là bằng nhau.

ĐỀ 8.

1.

a/ Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số n^5 và **n** chữ số tận cùng giống nhau.

b/ Chứng minh rằng : $n^5m - nm^5 \;\vdots\; 30$ với mọi n, m∈ Z.

2.

a, b, c là số đo ba cạnh tam giác.

Chứng minh rằng : $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < 1$

3.

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

4.

Cho hình vuông ABCD và một tứ giác MNPQ có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh hình vuông (gọi là tứ giác nội tiếp hình vuông).

a) Chứng minh rằng : $S_{ABCD} = \dfrac{AC}{4}(MN + NP + PQ + QM)$

b) Xác định vị trí M, N, P, Q để chu vi tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

c) Xác định vị trí M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

a/ Ta cần chứng minh rằng : $n^5 - n \vdots 10$

Ta có : $n^5 - n = n(n^4 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) \vdots 2$ (1)

(vì $(n - 1)n$ là tích lũy hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2)

Mặt khác : $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

- Nếu $n = 5k$ thì $n^5 - n \vdots 5$
- Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1 \vdots 5 \Rightarrow n^5 - n \vdots 5$
- Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1 \vdots 5 \Rightarrow n^5 - n \vdots 5$

Vậy $n^5 - n \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n^5 - n \vdots 10$ với mọi n

b/ Ta có : $n^5m - nm^5 = nm(n^4 - m^4)$

$= mn(n^4 - 1) - nm(m^4 - 1)$

Ta cần chứng minh : $n(n^4 - 1) \vdots 30$

Theo câu (a) ta đã chứng minh được : $n(n^4 - 1) \vdots 5$

Mặt khác : $n(n^4 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2+1) \vdots 6$

(Vì $(n - 1)n(n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6).

Vậy : $n(n^4 - 1) \vdots 30$

Suy ra : $n^5m - nm^5 \vdots 30, \quad \forall n, m \in Z$.

■ **Nhận xét cách giải :**

Bài toán trên sử dụng hai tính chất trong chứng minh chia hết là dùng phép chia có dư và tính chất : "Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n" các bài toán áp dụng tính chất này là :

1/ Chứng minh rằng :

a) Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

b) Tích năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 120.

c) $n^3 + 11n \vdots 6$

d) $mn(m^2 - n^2) \vdots 6$

2/ Chứng minh rằng trong 1900 số tự nhiên liên tiếp có một số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

3/ p là số nguyên tố > 3, chứng minh : $p^2 - 1 \vdots 24$

4/ Chứng minh rằng : $n^3 - n + 2 \not\vdots 6 \ \forall n \in N$ và $n^3 - n \vdots 24$ $\forall n \in N$, n lẻ.

• Phương pháp chứng minh chia hết dựa vào phép chia có dư là ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho p. Chia n cho p có thể dư là $0, 1, 2 \ldots, p - 1$ hoặc là $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}$ nếu p lẻ.

Chẳng hạn , ta có các bài tập sau :

1/ Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Chứng minh rằng *với* mọi số tự nhiên n thì $2^n + 1$ không chia hết cho 7.

2/ Chứng minh rằng : $n \not\vdots\ 4 \Leftrightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \ \vdots\ 5$

3/ Tìm số tự nhiên n để :

a) $2^{2n} + 2^n + 1 \ \vdots\ 7$

b) $3^n + 63 \ \vdots\ 72$

4/ Tìm n nguyên dương sao cho $n.2^n + 3^n$ chia hết cho 5.

BÀI 2 :

Áp dụng : $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -x < 1 \end{cases}$

Ta có :

$$\frac{a-b}{a+b} < \frac{a-b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (a-b)(a+b+c) < (a+b)(a-b+c)$$

$\Leftrightarrow \quad a - b < a + b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2b$ (luôn đúng)

Vậy : $\dfrac{a-b}{a+b} < \dfrac{a-b+c}{a+b+c}$

Tương tự : $\dfrac{b-c}{b+c} < \dfrac{b-c+a}{b+c+a}$

$$\frac{c-a}{c+a} < \frac{c-a+b}{c+a+b}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được :

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} < \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Tương tự ta cũng có : $\dfrac{b-a}{b+a} + \dfrac{c-b}{c+b} + \dfrac{a-c}{a+c} < 1$

Suy ra : $\left|\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a}\right| < 1$

■ **Nhận xét cách giải :**

Bài trên áp dụng tính chất tỉ lệ của bất đẳng thức.

• Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ (b, c > 0)

• Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ (b,c > 0)

Chứng minh các tính chất này dành cho bạn đọc.

Các bài toán sau đây được sử dụng tính chất trên :

1/ Cho a, b, c > 0, chứng minh rằng :

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

2/ Cho a, b, c, d nguyên dương, chứng minh rằng các số sau không là số nguyên :

a) $A = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}$

b) $B = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$

■ **Hướng dẫn :**

Chứng minh : 1 < A < 2,2 < B < 3

3/ Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và b, d > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$$

BÀI 3 :

Đặt $X = \dfrac{1}{x+y-1}$; $Y = \dfrac{1}{2x-y+3}$

Ta có hệ : $\begin{cases} 4X - 5Y = \dfrac{5}{2} & (1) \\ 3X + Y = \dfrac{7}{5} & (2) \end{cases}$

Nhân (2) với 5 rồi cộng (1) ta được : $X = \dfrac{1}{2}$, $Y = -\dfrac{1}{10}$

Suy ra : $\begin{cases} x + y - 1 = 2 \\ 2x - y + 3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{19}{3} \end{cases}$

• *Một số bài toán giải hệ bằng cách đặt ẩn phụ :*

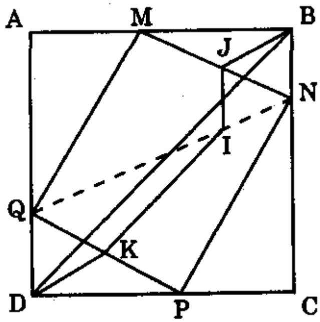
1/ $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} + \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{xy}{x-y} = \dfrac{10}{3} \end{cases}$

2/ $\begin{cases} \dfrac{2x}{y-1} + \dfrac{3y}{x-1} = 1 \\ \dfrac{2y}{x-1} - \dfrac{5x}{y-1} = 2 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} x(x+1)(3y+5y) = 144 \\ x^2 + 4x + 5y = 24 \end{cases}$

4/ $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$

BÀI 4 :



a) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của QN, MN, PQ.

Ta có : $BJ = \frac{1}{2}MN$ (tính chất trung tuyến trong tam giác vuông)

$IJ = \frac{1}{2}QM$ (tính chất đường trung bình)

Tương tự ta có : $IK = \frac{1}{2}PN$

$DK = \frac{1}{2}PQ$

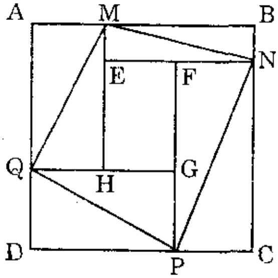
Suy ra :

$$\frac{AC}{4}(MN + NP + PQ + QM) = \frac{AC}{2}(BJ + JI + IK + KD)$$

$$\geq \frac{AC.BD}{2} = S_{ABCD}$$

b) Theo lập luận câu (a) chu vi tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất khi đường gấp khúc BJIKD cùng với đoạn BD, tức là khi MN // AC // PQ và MQ // BD // NP, lúc đó MNPQ là hình chữ nhật.

Vậy : Mọi hình chữ nhật nội tiếp được hình vuông đã cho đều có chu vi bằng nhau và chu vi đó là nhỏ nhất so với chu vi tất cả các tứ giác nội tiếp hình vuông này.



c) Từ các đỉnh M, N, P, Q ta dựng các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Các đường đó hoặc trùng nhau hoặc song song. Nếu chúng song song từng đôi thì giao điểm của chúng sẽ tạo thành hình chữ nhật.

Ta có :

$$S_{MNPQ} = S_{MHQ} + S_{QGP} + S_{PFN} + S_{MEN} + S_{EFGH}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{S_{AMHQ} + S_{QGPD} + S_{PFNC} + S_{MENB} + S_{EFGH} + \frac{1}{2}S_{EFGH}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}S_{ABCD} + \frac{1}{2}S_{EFGH} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$\Rightarrow$ S_{MNPQ} đạt giá trị nhỏ nhất khi $S_{EFGH} = 0$ tức là $EF \equiv HG$ hoặc $HE \equiv FG$

Vậy : Tứ giác nội tiếp hình vuông có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi có ít nhất một đường chéo của nó song song với cạnh của hình vuông.

ĐỀ 9.

1.

Cho 6 điểm trong mặt phẳng sao cho bất kỳ 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác có các cạnh có chiều dài khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh vừa là cạnh nhỏ nhất của một tam giác vừa là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

2.

Tìm các hệ số a, b để đa thức $x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 3x + 2$. Tìm đa thức thương.

3.

Hai số 2^{2000} và 5^{2000} được viết liên tiếp nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu chữ số ?

4.

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P tương ứng sao cho :

$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$ ($0 < k \neq 1$ cho trước) và kẻ các đoạn AM, BN, CP. Hãy tìm diện tích tam giác tạo nên bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP, biết diện tích ABC bằng S cho trước.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Tô màu đỏ cạnh nhỏ nhất của tam giác và tô màu xanh hai cạnh kia. Ta chứng minh tồn tại một tam giác có các cạnh cùng màu đỏ.

Từ điểm A trong 6 điểm cho nối với 5 điểm còn lại ta được 5 cạnh, trong 5 cạnh này ít nhất có 3 cạnh cùng màu; giả sử là các cạnh AB, AC, AD.

• Nếu AB, AC, AD cùng màu đỏ, vì ΔBCD có một cạnh màu đỏ, giả sử là BC. Khi đó ta có Δ ABC có các cạnh cùng màu đỏ.

• Nếu AB, AC, AD cùng màu xanh thì ΔBCD có các cạnh cùng màu đỏ.

Cạnh lớn nhất của tam giác này là cạnh cần tìm.

■ **Nhận xét cách giải :**

Đây là bài toán dạng tô màu. Từ các bài toán suy luận chuyển sang hình học và tô màu các đoạn thẳng gọi là giải toán Graph.

Các bài toán cùng dạng trên :

1/ Trong một hội nghị quốc tế có 6 đại biểu ở cùng một khách sạn. Nếu bất cứ ba người nào mà gặp nhau thì trong họ cũng có ít nhất hai người có thể trò chuyện với nhau được. Chứng minh rằng như vậy thì phải có ba người mà từng đôi một có thể trò chuyện với nhau được.

2/ Chứng minh rằng trong 6 góc nhọn bao giờ cũng tìm được ba góc A, B, C sao cho các tổng A + B, A + C , B + C đồng thời lớn hơn 90^0 hoặc đồng thời không lớn hơn 90^0.

3/ Chứng minh rằng trong 6 người bất kì luôn tìm được 3 người đôi một quen nhau hoặc 3 người đôi một không quen nhau.

BÀI 2 :

• *Cách 1 :* (Dùng Bézout)

Gọi $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Ta có : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

f(x) chia hết cho $(x - 1)(x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 16 + 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases}$$

Thực hiện phép chia đa thức $x^4 - 5x^2 + 4$ cho $x^2 - 3x + 2$ ta được đa thức thương $q(x) = x^2 + 3x + 2$

• *Cách 2 :* (Dùng dư $r(x) \equiv 0$)

Lấy đa thức f(x) chia cho đa thức $x^2 - 3x + 2$ ta được đa thức dư $r(x) = (3a + 15)x + (b - 2a - 14)$ và đa thức thương $q(x) = x^2 + 3x + a + 7$

Ta có :

$f(x) : x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow r(x) = (3a + 15)x + (b - 2a - 14) \equiv 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a + 15 = 0 \\ b - 2a - 14 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases}$$

Khi đó : $q(x) = x^2 + 3x + 2$

• *Cách 3 :* (Dùng đồng nhất)

Đa thức thương có dạng : $q(x) = x^2 + cx + d$

Ta có :

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + cx + d)$$
$$= x^4 + (c - 3)x^3 + (d + 2 - 3c)x^2 + (2c - 3d)x + 2d$$

Đồng nhất ta được các hệ số tương ứng bằng nhau :

$$\begin{cases} c - 3 = 0 \\ d + 2 - 3c = a \\ 2c - 3d = 0 \\ 2d = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -5,\ b = 4,\ c = 3,\ d = 2$$

Khi đó : $q(x) = x^2 + 3x + 2$

■ Nhận xét cách giải :

• Định lý Bézout : f(x) chia hết cho $x - a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0$

• Phương pháp đồng nhất :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$
$$f(x) \equiv g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) :$$
$$\forall x \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i \ (i = 1,2\ldots n)$$

• Nếu đa thức chia $g(x)$ phân tích được ra thừa số bậc nhất thì dùng định lý Bézout đưa đến giải hệ.

• Nếu $g(x)$ không phân tích được thì dùng đồng nhất hoặc dùng chia đa thức để có $r(x) \equiv 0$

■ **Bài tập tương tự :**

1/ Định a, b để :

a) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + ax + b$

chia hết cho đa thức $x^2 - 3x + 4$

b) $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$

2/ Định m nguyên để đa thức $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$

chia hết cho $x + y + z$

3/ Xác định đa thức bậc ba $f(x)$ thỏa :

$f(x) - f(x - 1) = x^2$.

Từ đó suy ra công thức tính tổng : $1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

BÀI 3 :

Giả sử 2^{2000} có k chữ số và 5^{2000} có ℓ chữ số (k, ℓ nguyên dương). Tìm $k + \ell$

Ta có :

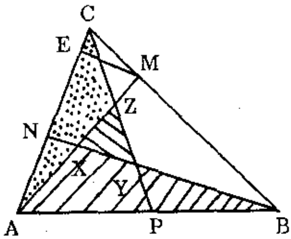
$10^{k-1} < 2^{2000} < 10^k$; $10^{\ell-1} < 5^{2000} < 10^{\ell}$

$\Rightarrow \quad 10^{k+\ell-2} < 10^{2000} < 10^{k+\ell}$

$\Rightarrow \quad k + 1 - 2 < 2000 < k + 1$

$\Rightarrow \quad 2000 = k + \ell - 1 \qquad \Rightarrow \qquad k + \ell = 2001$

BÀI 4 :



Giả sử X, Y, Z là giao điểm của các đoạn thẳng AM, BN và CP.

Ta có :

$S_{XYZ} = S - S_{ABX} - S_{ACZ}$

Áp dụng tỷ số điện tích ta có :

$$\frac{S_{ABM}}{S} = \frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \qquad (1)$$

$$\frac{S_{ABX}}{S_{ABM}} = \frac{AX}{AM} = \frac{AN}{AE} \qquad (2)$$

Mà $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{1}{k}$ và $\dfrac{NE}{CN} = \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{k}{k+1}$

Do đó : $\dfrac{AN}{NE} = \dfrac{k+1}{k^2} \Rightarrow \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{k+1}{k^2+k+1}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $S_{ABX} = \dfrac{k}{k^2+k+1}S$

Tương tự $S_{BCY} = S_{ACZ} = \dfrac{k}{k^2+k+1}S$.

Do vậy : $S_{XYZ} = S - \dfrac{3k}{k^2+k+1}S = \dfrac{(k-1)^2}{k^2+k+1}S$

■ Nhận xét cách giải :

Ta có thể tính tỷ số $\dfrac{AX}{AM}$ bằng cách sử dụng định lý Ménelaus.

Nội dung định lý như sau :

"Cho M, N, P lần lượt nằm trên 3 cạnh AB, BC, CA (hoặc trên các đường thẳng chứa các cạnh) của tam giác ABC. Điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là : $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$".

Áp dụng định lý Ménelaus trong tam giác CAM với cát tuyến BXN ta có : $\frac{XA}{XM}.\frac{BM}{BC}.\frac{NC}{NA}=1$

$$\frac{AX}{XM}=\frac{BC}{BM}.\frac{NA}{NC}=\frac{k+1}{k}.\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k^2} \Rightarrow \quad \frac{AX}{AM}=\frac{k+1}{k^2+k+1}.$$

■ **Bài tập ứng dụng định lí Ménelaus :**

1/ Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên AM lấy điểm I sao cho AI = 4MI. Đường thẳng BI cắt AC tại P. Tính tỷ số PC : PA.

2/ Trong tam giác ABC gọi A' , B' là giao điểm các phân giác trong của góc A và B với các cạnh BC và AC. C' là giao điểm phân giác ngoài của góc AB. Chứng minh rằng A',B',C' thẳng hàng.

ĐỀ 10.

1.

a/ Chứng minh rằng nếu : a + b + c + d = 0 thì :

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ac - bd)(b + d)$$

b/ Tìm các số tự nhiên a, b, c thỏa điều kiện :

$$\begin{cases} \sqrt{a-b+c}=\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \end{cases}$$

2.

Tìm tất cả các số tự nhiên n > 1 thỏa điều kiện : 1.2.3..(n–1) chia hết cho n.

3.

Cho bốn số a, b, c, d khác nhau đôi một.

Biểu thức $A = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2$ có thể nhận bao nhiêu giá trị khác nhau nếu x, y, z, t là hoán vị của các số a, b, c, d ? Với giá trị nào của x, y, z, t thì A đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất ?

4.

a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. x, y , z là độ dài các đường phân giác của các góc đối diện với các cạnh đó. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

a/ $a + b + c = d = 0 \quad \Rightarrow \quad a + c = -(b + d)$

$\Rightarrow \quad (a + c)^3 = -(b + d)^3$

$\Rightarrow \quad a^3 + c^3 + 3ac(a + c) = -b^3 - d^3 - 3b(b + d)$

$\Rightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ac(b + d) - 3bd(b + d)$

$= 3(ac - bd)(b + d)$

b/

• $\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{a-b+c} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{c})^2$

$$\Leftrightarrow \quad b(a - b + c) = ac \Leftrightarrow (b - c)(a - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ b = c \end{array}\right. \quad (*)$$

• Giả sử $a \le b \le c$; ta có : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{3}{a}$

$\Rightarrow \quad a \le 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1,2,3$

+ Nếu $a = 1$ thì : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ (vô lý)

+ Nếu $a = 2$ thì : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \le \frac{2}{b} \Rightarrow \quad b \le 4$

$\Rightarrow \quad a = 2 \; ; b = c = 4$

+ Nếu $a = 3$ thì : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3} \le \frac{2}{b} \Rightarrow \quad b \le 3$

$\Rightarrow \quad a = b = c = 3$

Các cặp (a, b, c) thỏa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ là :

(2, 4, 4) ; (4, 2, 4) ; (4, 4, 2) ; (3, 3, 3)

Kết hợp với (*) ta có nghiệm : (2, 4, 4) ; (4, 4, 2) ; (3, 3, 3)

BÀI 2 :

+ Nếu n nguyên tố thì $1.2...(n - 1)$ không chia hết cho n.

+ Nếu n là hợp số dạng $n = ab$ với $1 < a \ne b < n$ thì trong tích $(n - 1)!$ có hai thừa số a và b; do đó $(n - 1)!$ chia hết cho n.

+ Nếu n là hợp số dạng $n = p^2$ với p nguyên tố :

– Nếu $p = 2$ thì $3!$ không chia hết cho 4

– Nếu $p > 2$ thì $n - 1 = p^2 - 1 \ge 2p$; do đó :

$p^2 / p(2p) / (p^2 - 1)! = (n - 1)! \Rightarrow (n - 1)!$ chia hết cho n.

Vậy $(n - 1)! \,\vdots\, n \quad \Leftrightarrow \quad$ n là hợp số khác 4.

BÀI 3 :

Vì các số a, b, c, d có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $a < b < c < d$.

Ta có : $A + (x - z)^2 + (y - t)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2 + (x - z)^2 + (y - t)^2 = k$ (không đổi vì bằng tổng bình phương tất cả các hiệu trong 4 số a, b, c, d).

$\Rightarrow \quad A + (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2(xz + yt) = k$

Mà $\quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nên giá trị của A phụ thuộc vào giá trị của $xz + yt = V$

Ta có 3 giá trị của V như sau :

$V_1 = ab + cd \;;\; V_2 = ac + bd \;;\; V_3 = ad + bc$

Hơn nữa : $V_1 - V_2 = ab + cd - ac - bd = (b - c)(a - d) > 0$

$V_2 - V_3 = ac + bd - ad - bc = (a - b)(c - d) > 0$

Do đó : $V_1 > V_2 > V_3$

Cho nên A chỉ nhận 3 giá trị khác nhau.

A nhận giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) khi $V = xz + yt$

Nhận giá trị lớn nhất là V_1 (nhỏ nhất là V_3)

■ Nhận xét các giải :

Ở bài trên các số a, b, c, d có vai trò như nhau; có nghĩa là khi hoán vị các số a, b, c, d với nhau thì bài toán có nội dụng không thay đổi.

Cho nên nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tham gia vào một bài toán mà các số $a_1, a_2 \ldots, a_n$ có vai trò như nhau thì ta có thể giải bài toán với giả thiết $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ hoặc $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n$.

Để hiểu thêm về phương pháp giải này, ta xét một vài dạng toán sau :

Bài toán 1 : Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho :

$$abc < ab + bc + ca.$$

Giải :

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $a \le b \le c$; khi đó : $ab + bc + ca \le 3bc$.

$\Rightarrow \quad abc < 3bc \Rightarrow \quad a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a nguyên tố)

Với $a = 2$ ta có : $2bc < 2b + 2c + bc$

$\Rightarrow \quad bc < 2(b + c) \le 4c$

$\Rightarrow \quad b < 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$ hoặc $b = 3$

- Nếu $b = 2$ thì c là số nguyên tố bất kỳ
- Nếu $b = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3$ hoặc $c = 5$

Tóm lại ta có các cặp (a, b , c) cần tìm là :

$(2 ; 2 ; p)$; $(2 ; 3 ; 3)$; $(2 ; 3 ; 5)$ và các hoán vị của chúng.

Bài toán 2 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x + y + z = xyz \qquad (1)$$

Giải :

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử :

$1 \le x \le y \le z$. Từ (1) suy ra : $1 = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} \le \dfrac{3}{x^2}$

$\Rightarrow \quad x^2 \le 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Thay $x = 1$ vào (1) ta được : $1 + y + z = yz$

$\Leftrightarrow \quad (y - 1)(z - 1) = 2 = 1.2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 ; z = 3$

(vì $y - 1 \le z - 1$)

Vậy (1) có 6 nghiệm nguyên dương là các hoán vị của bộ $(1 ; 2 ; 3)$.

- Cách giải phương trình nghiệm nguyên trên còn được gọi là phương pháp cực hạn.

Bài tập tương tự :

1/ Tìm nghiệm nguyên dương.

a) $x + y + z + t = xyzt$

b) $x + y + z + 9 = xyz$

c) $x + y + 1 = xyz$

2/ *a)* Tìm ba số tự nhiên, biết tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.

b) Tìm bốn số tự nhiên biết :

- Tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.
- Tổng bình phương nghịch đảo của chúng bằng 1.

3/ Biết rằng $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_5^2 = 1$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của $(a_i - a_j)^2$ $(1 \le i \ne j \le 5)$ không thể vượt quá $\frac{1}{10}$.

Hướng dẫn :

Giả sử $a_1 \le a_2 \le ... \le a_5$

Gọi $x = \min|a_i - a_j|$, khi đó : $x^2 = \min(a_i - a_j)^2$

Với $i > j$ ta có :

$$a_i - a_j = (a_i - a_{i-1}) + (a_{i-1} - a_{i-2}) + ... + (a_{j+1} - a_j) \ge (i - j)x$$

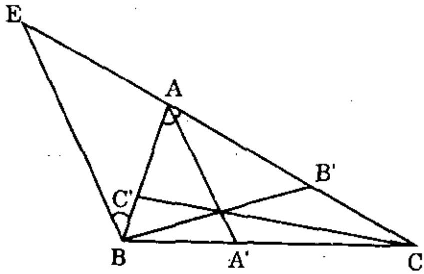
$$\Rightarrow \quad (a_i - a_j)^2 \ge (i - j)^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{5 \ge i > j \ge 1} (a_i - a_j)^2 \ge x^2 \sum_{5 \ge i > j \ge 1} (i - j)^2 = 50x^2$$

Mà $\sum(a_i - a_j)^2 = 5\sum a_i^2 - (\sum a_i)^2 \le 5$

$$\Rightarrow \quad 50x^2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 \le \frac{1}{10}$$

BÀI 4 :



Từ B dựng đường thẳng song song với tia phân giác AA' cắt đường thẳng CA tại E, ta có :

$$AE = AB = c$$

Do AA' // BE nên :

$$\frac{x}{BE} = \frac{AC}{EC} = \frac{b}{b+c}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{b+c} BE$$

Trong ΔABE ta có : $BE < AB + AE = 2c$

Do đó : $x < \dfrac{2bc}{b+c} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Tương tự ta có : $\dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$

và $\quad \dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

Vậy : $\quad \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \quad$ (đpcm)

ĐỀ 11.

1.

Cho N = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n + 1) (n +2).

Chứng minh rằng 4N + 1 là một số chính phương với mọi số nguyên dương n.

2.

Tổng các số chữ số của một số không thay đổi khi nhân số đó với 5. Chứng minh số đó chia hết cho 9.

3.

Cho a, b, c là số đo 3 cạnh của một tam giác. Xác định hình tính của tam giác để biểu thức :

$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4.

Trong mặt phẳng cho 6 hình tròn sao cho tâm của mỗi hình tròn nằm ngoài tất cả các hình tròn khác. Chứng minh rằng không có điểm nào chung cho cả 6 hình tròn đó.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Ta có : k(k + 1) (k + 2) =

$$= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)]$$

$$= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$$

$$\Rightarrow N = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\Rightarrow 4N + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 =$$

$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$$

■ Nhận xét cách giải :

• Đây là dạng toán tính tổng hữu hạn

Phương pháp : Biến đổi số hạng tổng quát u_k về dạng $u_k = a_{k-1} - a_k$

Trong bài trên : $u_k = k(k+1)(k+2)$;

còn : $$a_k = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

Ta có : $u_k = a_k - a_{k-1}$

$$\Rightarrow N = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= a_n - a_0 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Các bạn hãy tính các tổng sau bằng phương pháp trên :

1) $T = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3)$

2) $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

3) $K = 1.1! + 2.2! + \ldots + n.n!$

4) $L = \frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

• *Bài toán trên còn có cách giải khác như sau :*

Gọi $T = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + ... + n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

Ta có :

$$T - 4N = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + ... + n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$- (1.2.3.4 + 2.3.4.4 + ... + n(n+1)(n+2).4$$
$$= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + ... + (n-1)n(n+1)(n+2)$$
$$= T - n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4N + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

BÀI 2 :

Gọi số đã cho là N và ký hiệu S(N) là tổng các chữ số của N.

Ta có : $N \equiv S(N) \pmod 9$

và $5N \equiv S(5N) \pmod 9$

Theo giả thiết $S(N) = S(5n)$, do đó $5N - N \equiv 0 \pmod 9$

$\Rightarrow \quad 4N \,\vdots\, 9 \quad \Rightarrow \quad N \,\vdots\, 9$ (dpcm)

■ Nhận xét cách giải :

• Dư trong phép chia N cho 3 (hoặc 9) cũng chính là dư trong phép chia tổng các chữ số của N cho 3 (hoặc 9) nghĩa là $N \equiv S(N)$ (mod 3) hoặc $N \equiv S(N)$ (mod 9)

■ **Bài tập áp dụng :**

1) Tổng các chữ số một số chính phương có thể bằng 2000 hoặc 2001 được không ? Tại sao ?

2) Ta viết liên tiếp các số 1,2 ..., 2000 thành dãy nhưng theo một thứ tự tùy ý ta nhận được một số có nhiều chữ số. Hỏi số đó có thể là số chính phương hay không ?

3) Chứng minh rằng nếu viết theo thứ tự ngược lại những chữ số của một số nguyên bất kỳ thì hiệu giữa số cũ và mới chia hết cho 9.

BÀI 3 :

Đặt $x = b + c - a$, $y = a + c - b$, $z = a + b - c$ $(x, y, z > 0)$

Khi đó : $a = \dfrac{y+z}{2}$; $b = \dfrac{x+z}{2}$; $c = \dfrac{x+y}{2}$

và $$A = \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 3 \qquad (1)$$

vì $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Dấu bằng của (1) xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$

Vậy $\min A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

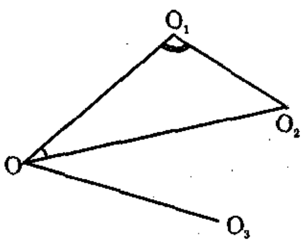
Tương tự các bạn có thể chứng minh các bất đẳng thức sau trong ΔABC có độ dài ba cạnh a, b, c :

1) $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

2) $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \geq 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

với $\quad p = \dfrac{a+b+c}{2}$

BÀI 4 :



Giả sử O là điểm chung của các 6 hình tròn. Gọi O_i $(i = 1,2...,6)$ là tâm các hình tròn sao cho OO_1, OO_2, ... , OO_6

Sắp xếp theo thứ tự theo chiều quay kim đồng hồ quanh O.

Ta có : $\widehat{O_1OO_2} + \widehat{O_2OO_3} + ... + \widehat{O_6OO_1} = 360^0$

$\Rightarrow$ tồn tại một góc giả sử $\widehat{O_1OO_2} \leq 60^0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{OO_1O_2} \geq 60^0$ hoặc $\widehat{O_1O_2O} \geq 60^0$. Giả sử $\widehat{OO_1O_2} \geq 60^0 \quad \Rightarrow \quad OO_2 > OO_1$

$\Rightarrow$ Hình tròn tâm O_2 chứa O_1 (vô lý)

• Bài toán sau đây có cách giải tương tự :

Ở một đất nước nọ có 80 sân hay, khoảng cách giữa các phi trường đôi một khác nhau. Máy bay cất cánh từ mỗi một phi trường và bay tới phi trường gần nó nhất. Chứng minh rằng không thể có quá 5 máy bay cùng bay tới một phi trường.

ĐỀ 12.

1.

Trong một mạng lưới liên lạc có 17 trạm. Mỗi trạm đều liên lạc trực tiếp đến mọi trạm khác. giữa hai trạm chỉ dùng một trong ba phương tiện : điện thoại, điện tín, vô tuyến điện. Chứng minh rằng có ít nhất ba trạm liên lạc với nhau bằng cùng một phương tiện.

2.

Cho đa thức $f(x) = (1 + x + x^2)^{2000}$

Gọi m là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của x và n là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của x.

Hỏi m, n là số chẵn hay số lẻ ?

3.

Giải phương trình : $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

4.

Cho tam giác ABC vuông ở A có độ dài các cạnh là a, b, c. Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai nửa đường tròn đường kính AB và AC. Cát tuyến di động qua A cắt nửa đường tròn đường kính AB ở D và cắt nửa đường tròn đường kính AC ở E.

a) Tìm quỹ tích trung điểm F của DE.

b) Gọi P là chu vi của tứ giác BDEC, tìm giá trị lớn nhất của P theo a, b, c.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Chuyển bài toán sang dạng Graph : "Cho 17 điểm nằm trong mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm này lại bằng các đoạn thẳng và tô màu xanh, đỏ hoặc vàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có các cạnh cùng màu". Ta có 16 đoạn nối cùng một điểm A.

Vì 16 = 5.3 + 1 nên ít nhất có 6 cạnh cùng tô một màu, giả sử là AB, AC, AD, AE, AF, AH cùng màu đỏ. Xét các đoạn thẳng với các mút là 6 điểm B, C, D, E, F, H.

- Nếu tồn tại một cạnh chẳng hạn BC màu đỏ thì ta thu được tam giác ABC cùng màu đỏ.
- Nếu tất cả đều chỉ có hai màu xanh, vàng thì cũng tồn tại tam giác cùng màu (xem bài 1đề 9).

Nhận xét bài giải :

Bài toán có thể nâng lên như sau : "Cho 66 điểm trong mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm này lại bằng các đoạn thẳng và tô màu xanh, đỏ, vàng, tím. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có các cạnh cùng màu".

BÀI 2 :

Giả sử :

$f(x) = (1 + x + x^2)^{2000} = a_{3988}x^{4000} + a_{3987}x^{3999} + ... + a_1x + a_0$

Ta có : $f(1) = a_{4000} + a_{3999} + ... + a_1 + a_0 = m + n$

$f(-1) = a_{4000} - a_{3999} - ... - a_1 - a_0 = m - n$

Mà $f(1) = 3^{4000}$, $f(-1) = 1$

Ta có hệ : $\begin{cases} m + n = 3^{2000} \\ m - n = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow m = \frac{3^{2000} + 1}{2}, \; n = \frac{3^{2000} - 1}{2}$$

Mà $3^{2000} \equiv (-1)^{2000} = 1 \pmod 4$

$\Rightarrow$ $3^{2000} + 1 = 4K + 2$ $\Rightarrow$ $m = 2K + 1$ là số lẻ.

$\Rightarrow$ n chẵn (vì $m + n = 3^{2000}$ lẻ)

■ **Nhận xét cách giải :**

- Tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của đa thức f(x) là:

$$\frac{f(1) + f(-1)}{2}$$

- Tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của đa thức f(x) là :

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

BÀI 3 :

Đặt $a = \sqrt{x+1}$ (với điều kiện $x \geq -1$)

$b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ $(a \geq 0 \; ; b > 0)$

Ta có : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$x^2 + 2 = (x + 1) + (x^2 - x + 1)$

Phương trình đã cho trở thành : $2(a^2 + b^2) = 5ab$.

$\Leftrightarrow$ $(2a - b)(a - 2b) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 2a = b \\ a = 2b \end{array}\right.$

a) Với a = 2b $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 - 5x + 3 = 0$: vô nghiệm

b) Với b = 2a $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa điều kiện $x \geq -1$)

Vậy : $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{37}}{2}$; $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{37}}{2}$

■ Nhận xét cách giải :

Để đi đến (1) ta có thể dùng phương pháp phân tích **tam thức** ra thừa số. Xem $2(a^2 + b^2) - 5ab$ là tam thức bậc hai đối **với a. Ta** tìm nghiệm của tam thức này.

$$f(a) = 2a^2 - 5ab + 2b^2$$

$$\Delta = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$$

$$\Rightarrow \quad a = \left[\begin{array}{l} 2b \\ \dfrac{b}{2} \end{array}\right.$$

Do đó : $f(a) = 2(a - 2b)\left(a - \dfrac{b}{2}\right) = (a - 2b)(2a - b)$

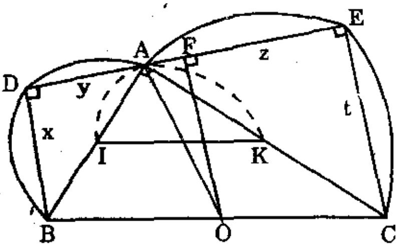
Để rèn luyện bạn đọc hãy giải các phương trình sau :

1/ $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

2/ $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

3/ $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{1 + x^3}$

BÀI 4 :



a) Kẻ OF // DB thì OF là đường trung bình của hình thang DBCE nên FO qua trung điểm O của BC.

Do $\widehat{ADB} = 90^0$

nên $\widehat{AFO} = 90^0$.

AO cố định, F nhìn AO dưới một góc vuông nên F chạy trên đường tròn đường kính AO.

- Phần đảo (chứng minh dành cho bạn đọc).

- Giới hạn khi cát tuyến DE di động đến vị trí AB thì $F \equiv I$. Khi DE trùng với AC thì $F \equiv K$.

Quỹ tích của F là nửa đường tròn đường kính IK. (chú ý AO= IK).

b) Trước hết chứng minh bổ đề : "Trong tất cả các tam giác nội tiếp nửa đường tròn thì tam giác vuông cân có chu vi lớn nhất".

Gọi x, y là độ dài các cạnh góc vuông của tam giác nội tiếp nửa đường tròn đường kính a. Ta có :

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2xy$$

Suy ra : $x + y$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ xy lớn nhất $\Leftrightarrow S_{ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ đường cao AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ $AH = \frac{a}{2}$ $\Leftrightarrow$ ABC vuông cân.

Trở lại bài toán đã cho :

Ta có : $P = (x + y) + (z + t) + a$

$x + y$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x = y = c\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z + t$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $z = t = b\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(x + y)$ và $(z + t)$ đạt giá trị lớn nhất đồng thời khi D, A, E thẳng hàng.

ĐỀ 13.

1.

a) Phân tích biểu thức sau ra thừa số :

$$x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$$

b) Dựa vào kết quả câu trên, hãy chứng minh biểu thức $n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 210 với mọi n tự nhiên.

2.

Cho n số $a_1, a_2..., a_n$; mỗi số trong chúng bằng 1 hoặc – 1 và $a_1a_2 + a_2a_3 +... + a_n a_1 = 0$. Hỏi n có thể bằng 2002 được không ? Tại sao ?

3.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x^2 + (x + y)^2 = (x + 9)^2$$

4.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là trung điểm của BC. Từ đỉnh M vẽ góc 45^0, các cạnh của góc này cắt một trong hai cạnh của tam giác ở E và F.

Hãy xác định vị trí của E và F sao cho diện tích tam giác MEF đạt giá trị lớn nhất. Diện tích lớn nhất đó bằng bao nhiêu ?

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

a) Ta có: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = x[(x^3 - 7)^2 - 6^2] =$

$= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 6x + 6)$

$= x(x + 1)(x^2 - x - 6)(x - 1)(x^2 + x + 6)$

$= x(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

b) Ta có :

$n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên tích chia hết cho.

$2.3.5.7 = 210$

■ **Nhận xét cách giải :** (Xem nhận xét bài 1 đề 8)

Các bạn giải các bài tập tương tự sau :

1/ Chứng minh rằng :

a) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \vdots 24 \quad (n \in Z)$

b) $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n \vdots 384$ với n chẵn > 4

2/ Chứng minh với mọi số tự nhiên lẻ n :

a) $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \vdots 512$

b) $n^8 - n^6 - n^4 + n^2 \vdots 1152$

BÀI 2 :

Vì $a_i = \pm 1$ nên $a_ia_j = \pm 1$

Tổng của n số hạng $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1$ mỗi số hạng bằng 1 hoặc – 1. Tổng này bằng 0 nên n là số chẵn, n = 2k, với k số hạng bằng 1 và k số hạng bằng – 1. Tích của n số hạng đó lại bằng 1 vì :

$(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_na_1) = (a_1a_2...a_n)^2 = 1$

nên số hạng bằng – 1 phải là số chẵn : k = 2p

Vậy : $n = 2k = 4p \vdots 4$

Mà : $2002 \not\vdots 4$ nên n không thể bằng 2002

■ **Nhận xét cách giải :**

Bài toán trên sử dụng tính chẵn lẻ để giải toán.

Sau đây là bài toán cũng các cách giải tương tự.

1) Cho $a_1a_2,...,a_{2001}$ là các số nguyên và $b_1b_2,...,b_{2000}$ **cũng là các** số nguyên đó, nhưng lấy theo thứ tự khác (gọi là một **hoán vị**). Chứng minh rằng :

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) ... (a_{2001} - b_{2001}) \text{ là số chẵn}$$

Hướng dẫn :

Tổng $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_{2001} - b_{2001}) = 0$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

$$(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) = 105.$$

Hướng dẫn : Lập luận đi đến $2^{|x|}$ lẻ $\Rightarrow x = 0$

3) Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa : $x^y + 1 = Z$

4) Tìm số nguyên tố p để $4p + 1$ là một số chính phương.

BÀI 3 :

Phương trình đã cho tương đương với :

$$(x + y)^2 - 18x = 81$$

$\Leftrightarrow \quad (x + y)^2 - 18(x + y) + 81 = 162 - 18y$

$\Leftrightarrow \quad (x + y - 9)^2 = 9(18 - 2y) \qquad (1)$

$\Rightarrow \quad 18 - 2y$ là số chính phương chẵn nhỏ hơn 18 (vì $y > 0$)

- $18 - 2y = 0 \Rightarrow y = 9$. Từ (1) $\Rightarrow x = 0$ (loại)
- $18 - 2y = 4 \Rightarrow y = 7$. Từ (1) $\Rightarrow x = 8$.
- $18 - 2y = 16 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) $\Rightarrow x = 20$

Thử lại phương trình có hai cặp nghiệm nguyên **dương** là (8 ; 7) và (20 ; 1)

■ **Nhận xét cách giải :**

Bài toán được đưa về việc xét các số chính phương trong một giới hạn giữa hai số tự nhiên.

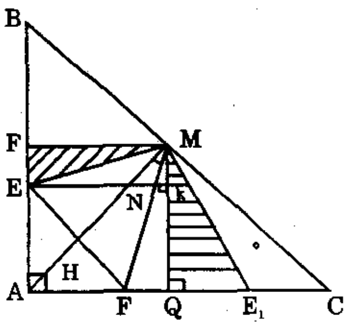
Tương tự như bài toán trên ta có bài toán sau :

• Tìm một số gồm hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Hướng dẫn : $(10a + b)^2 = (a + b)^3 \Rightarrow \left(\dfrac{10a+b}{a+b}\right)^2 = a + b$

$\Rightarrow$ $a + b$ là số chính phương nằm giữa 1 và 8.

BÀI 4 :



Ta sẽ chứng minh :

$$S_{(MEF)} \leq \frac{1}{4} S_{(ABC)}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi E hoặc F trùng với một đỉnh của ABC.

Giả sử E, F không trùng với A, B, C và E, F nằm trên 2 cạnh góc vuông.

(Vì nếu E, F cùng trên AC thì tìm được E trên AB sao cho Δ MEF = Δ ME_1F bằng cách lấy $\widehat{PME} = \widehat{QME}$)

• *Cách 1 :* Ta có :

$$S_{(MPAQ)} = S_{(AEF)} + S_{(MPEH)} + S_{(MQFH)}$$

$$= S_{(AEF)} + 2S_{(MEF)} > 2S_{(MEF)}$$

$$\Rightarrow \quad S_{(MEF)} < \frac{1}{2} S_{(MPAQ)} = \frac{1}{4} S_{(ABC)}$$

(Với H trên tia Ot sao cho $\widehat{PME} = \widehat{tMF}$ và MH = MQ = MP. Khi đó E, H, F thẳng hàng).

** Cách 2 :*

Kẻ EK // QA cắt MQ tại K và MF tại N

Ta có : $S_{(MEN)} < S_{(MEK)} = \frac{1}{2} S_{(MPEK)}$

$$S_{(EFN)} < S_{(QEK)} = \frac{1}{2} S_{(AEKQ)}$$

$$\Rightarrow \quad S_{(MEF)} < \frac{1}{2} S_{(MPAQ)} = \frac{1}{4} S_{(ABC)}$$

** Cách 3 :*

Đặt MP = MQ = AP = AQ = a ; PE = x ; FQ = y $(0 < x, y < a)$

Ta có : $S_{(MPAQ)} = a^2 = S_{(AEF)} + 2(S_{(PME)} + S_{(QMF)})$

$$= \frac{1}{2}(a - x)(x - y) + ax + ay$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{a^2 - ax}{a + x}$$

$$S_{(MEF)} = \frac{1}{2} MH \,.\, EF = \frac{1}{2} a(x + y) = \frac{a(a^2 + x^2)}{2(a + x)}$$

Vì : $x^2 < ax$

nên : $S_{(MEF)} < \frac{a(a^2 + ax)}{2(a + x)} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} S_{(ABC)}$

ĐỀ 14.

1.

Tìm một số có 5 chữ số biết rằng khi ta bỏ ba chữ số cuối cùng thì được căn bậc 3 của số ban đầu.

2.

Chứng minh rằng nếu tích một nghiệm của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ với một nghiệm nào đó của phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$ là nghiệm của phương trình $x^2 + abx + 1 = 0$ thì $\frac{4}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 2$

3.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của :

$$y = \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$$

4.

Các điểm đối xứng với trực tâm của tam giác qua các cạnh của tam giác ấy tạo thành một tam giác. Các giao điểm của các cạnh hai tam giác này tạo thành một lục giác. Chứng minh rằng đoạn thẳng nối các đỉnh đối diện của lục giác này cắt nhau tại một điểm.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Giả sử $A = \overline{abcde}$ là số cần tìm

Đặt : $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cde}$

Theo giả thiết : $A = 1000\overline{ab} + \overline{cde} = \overline{ab}^3$

$\Rightarrow \qquad 1000x + y = x^3 \qquad (1)$

Từ (1) suy ra : $x^3 > 1000x \Rightarrow x^2 > 1000 \Rightarrow x > 31 \qquad (2)$

Vì $y < 1000$ nên từ (1) suy ra $x^3 < 1000x + 1000$

$\Rightarrow \qquad x(x^2 - 1000) < 1000$

Nếu $x \geq 33$ thì $x(x^2 - 1000) \geq 33.89 = 2937 > 1000$

Do đó : $\qquad x < 33 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $x = 32$, khi đó $A = 32^3 = 32768$

Thử lại : $\qquad 32768 = 32^3$

Đáp số : $\qquad 32768$

■ Nhận xét cách giải :

Đây là phương pháp dùng cực hạn để giải bài toán tìm số. Ở đây x là số tự nhiên thỏa : $31 < x < 33$ thì $x = 32$. Khi giải toán loại này, cần thiết phải thử lại vì $x = 32$ là điều kiện cần của bài toán chớ chưa là điều kiện đủ.

■ Bài tập tự giải :

1/ Xét một phân số có mẫu nhỏ hơn bình phương của tử 1 đơn vị. Nếu đồng thời thêm vào tử và mẫu hai đơn vị thì phân số lớn hơn $\frac{1}{3}$. Nếu cùng bớt tử và mẫu ba đơn vị thì phân số vẫn dương và nhỏ hơn $\frac{1}{10}$. Tìm phân số đó.

2/ Hãy tìm tất cả các số có hai chữ số thỏa điều kiện sau :

a) Tổng các chữ số của nó không hơn nhỏ 7.

b) Tổng các bình phương của các chữ số không lớn hơn 30.

c) Số viết theo tứ tự ngược lại nhỏ hơn nửa số phải tìm.

Hướng dẫn :

1/ Giải hệ : $\begin{cases} \dfrac{n+2}{n^2+1} > \dfrac{1}{3} \\ 0 < \dfrac{n-3}{n^2-4} < \dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow n^2 - 3n - 5 < 0 \Leftrightarrow n = 4$

2/ Ta có hệ : $\begin{cases} x + y \geq 7 \\ x^2 + y^2 \leq 30 \\ 10x + y > 2(10y + x) \\ x, y \text{ nguyên và } 0 < x, y \leq 9 \end{cases}$

Đáp số : $\overline{xy} = 52$

BÀI 2 :

Gọi α, β lần lượt là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + bx + 1 = 0$ sao cho α.β là nghiệm của phương trình $x^2 + abx + 1 = 0$. Theo định lý Viète ta có :

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = -a \qquad (1)$$

$$\beta + \frac{1}{\beta} = -b \qquad (2)$$

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} = -ab \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\alpha\beta + \dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = ab$

So sánh với (3) ta được : $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = 2ab \qquad (4)$

Mặt khác từ (1) ta có : $\begin{cases} \alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = a^2 - 2 \\ \beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2} = b^2 - 2 \end{cases}$

Do đó : $$\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = (a^2 - 2)(b^2 - 2) \quad (5)$$

Từ (3) suy ra : $$\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = a^2b^2 - 2 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra :

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = (a^2 - 2)(b^2 - 2) - (a^2b^2 - 2) \quad (7)$$

Cuối cùng từ (4) và (7) suy ra :

$$4a^2b^2 = (a^2 - 2)(b^2 - 2) - a^2b^2 + 2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = \frac{4}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

■ **Nhận xét cách giải :**

Bài toán áp dụng định lý Viète trong phương trình bậc hai.

Dựa vào giả thiết khử hai số α, β để được hệ thức giữa a và b. Sau đây là các bài toán áp dụng định lý Viète.

1) Chứng minh rằng nếu a_1, a_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và b_1, b_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ thì :

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) = q^2 - p^2$$

(Thi học sinh giỏi Toán, 1993)

2) Chứng tỏ rằng hệ thức $kb^2 = (k + 1)^2 (ac)$ $(k \neq -1)$ là điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm, trong đó một nghiệm bằng k lần nghiệm kia.

3) Tính x_1, x_2 biết x_1, x_2 là nghiệm của phương trình :

$x^2 + qx + 1 = 0$ và $[(2-x_1)(\frac{1}{2} - x_1)(2 + x_2)(\frac{1}{2} + x_2)]^2 = 10q + 1$

BÀI 3 :

$$y = \frac{4x+3}{x^2+1} = a + \frac{-ax^2+4x+3-a}{x^2+1}$$

Ta cần tìm a để $-ax^2 + 4x + 3 - a$ là bình phương của nhị thức.

Ta phải có : $\Delta' = 4 + a(3 - a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=4 \end{array}\right.$

- Với a = – 1, ta có :

$$y = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1} = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1}$$

$\Rightarrow \quad y \geq -1$ dấu bằng xảy ra khi $x = -2$.

Vậy $\min y = -1$ khi $x = -2$

- Với a = 4, ta có :

$$y = \frac{4x+3}{x^2+1} = 4 + \frac{-4x^2+4x-1}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Vậy $\quad \text{Max } y = 4 \quad$ khi $x = \frac{1}{2}$

■ Nhận xét cách giải :

Trên đây sử dụng "bình phương" để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Nếu $y = a + [f(x)]^2$ thì $\min y = a$ khi $f(x) = 0$

Nếu $y = a - [f(x)]^2$ thì $\text{Max } y = a$ khi $f(x) = 0$

Bài toán trên có thể dùng phương pháp "tìm miền giá trị" để giải như sau :

Vì $\quad x^2 + 1 \neq 0$ nên

$$y = \frac{4x+3}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad yx^2 - 4x + y - 3 = 0 \qquad (1)$$

y là một giá trị của hàm số $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm.

• Nếu $y = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$

• Nếu $y \neq 0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - y(y-3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (y+1)(4-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ 4-y \leq 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y+1 \leq 0 \\ 4-y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 4$$

Vậy min $y = -1$ và Max $y = 4$

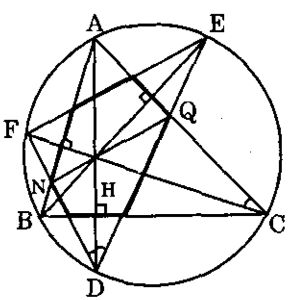
Các bạn hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số sau :

1/ $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ 2/ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2000}{x^2}$

3/ $z = \dfrac{8x^2 + 6xy}{x^2 + y^2}$ 4/ $z = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

Hướng dẫn : Chia tử và mẫu cho x^2, rồi đặt $t = \dfrac{y}{x}$

BÀI 4 :



Gọi Q là giao điểm của AC và DE và N là giao điểm của AB và DF.

Các điểm đối xứng của trực tâm H qua các cạnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Ta chứng minh các đoạn thẳng nối các đỉnh đối diện của lục giác qua H.

Ta có : $\widehat{ADF} = \widehat{ACH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FA}$)

$\widehat{ADE} = \widehat{ABH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AE}$)

Mà $\widehat{ACH} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$)

$\Rightarrow \qquad \widehat{ADF} = \widehat{ADE} \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{AE} \;\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ABH}$

$\Rightarrow$ tứ giác BNHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{BDF}$

Tương tự, tứ giác HDCQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHQ} = \widehat{QDC}$

Mà $\widehat{FHB} = \text{sđ}\dfrac{\widehat{FB} + \widehat{CE}}{2} = \widehat{BDF} + \widehat{QDC} = \widehat{NHB} + \widehat{CHQ}$

$\Rightarrow \qquad \widehat{NHB} = \widehat{EHQ} \Rightarrow$ N, H, Q thẳng hàng (đpcm)

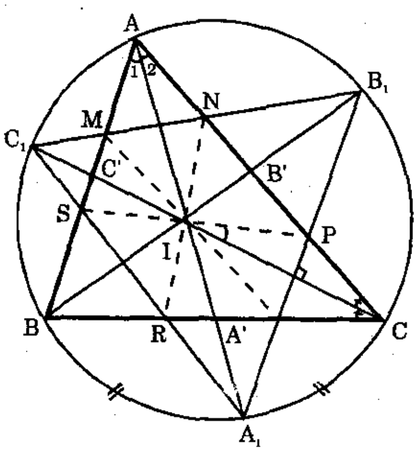
■ Bài tập tương tự :

Các đường phân giác trong của tam giác ABC cắt đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác A_1, B_1, C_1. Các cạnh của tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ cắt nhau tạo thành hình lục giác MNPQRS, với A_1B_1 cắt AC và BC tại P và Q, B_1C_1 cắt AC và AB tại M và N ; A_1C_1 cắt AB và BC tại S và R.

1/ Chứng minh rằng : S, I, P thẳng hàng với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ đó suy ra các đường chéo của lục giác đồng qui tại một điểm.

2/ Chứng minh : $S_{MNPQRS} \geq \dfrac{2}{3} S_{ABC}$

Hướng dẫn :



1/ Gọi I là tâm nội tiếp của Δ ABC.

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow$ sđ $\widehat{BA_1}$ = sđ $\widehat{A_1C}$

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Mặt khác :

$\widehat{B_1IC} = \dfrac{\text{sđ}\,\widehat{BC_1} + \text{sđ}\,\widehat{B_1C}}{2}$

$\widehat{B_1CI} = \dfrac{\text{sđ}\widehat{C_1A} + \text{sđ}\,\widehat{AB_1}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B_1IC} = \widehat{B_1CI} \quad \Rightarrow \quad \Delta\ IB_1C$ cân.

$\Rightarrow B_1Q \perp IC \quad \Rightarrow \quad \Delta\ IPC$ cân.

$\Rightarrow \widehat{PIC} = \widehat{ICQ} \quad \Rightarrow \quad IP \parallel BC$

Tương tự SI // BC. Do đó S, I, P thẳng hàng.

2/ Đặt $x = \dfrac{A'I}{A'A}$; $y = \dfrac{B'I}{B'B}$; $z = \dfrac{C'I}{C'C}$

Khi đó : $x + y + z = \dfrac{S_{(IBC)} + S_{(IAB)} + S_{(IAC)}}{S_{(ABC)}} = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{S_{(IRQ)} + S_{(IPN)} + S_{(IMS)}}{S_{(ABC)}}$$

Áp dụng : $x^2 + y^2 + z^2 \geq \dfrac{1}{3}(x + y + z)^2 = \dfrac{1}{3}$

ĐỀ 15.

1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$y = |x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 2000|$

2.

Giải phương trình :

$2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x + 1}$

3.

Một số cung của một đường tròn được tô màu xanh. Tổng số cung được tô màu xanh nhỏ hơn một nửa độ dài đường tròn. Chứng minh rằng trong đường tròn này còn có ít nhất một đường kính mà hai đầu của nó không bị tô màu xanh.

4.

Cho hình bình hành ABCD. Đường phân giác của góc $\widehat{ABD}$ cắt các cạnh BC và CD (hoặc phần kéo dài của chúng) tại các điểm M và N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Trước hết ta tìm giá trị nhỏ nhất của :

$y = |x - a| + |x - b|$ với $a < b$

Áp dụng bất đẳng thức $|x + y| \le |x| + |y|$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy \ge 0$

Ta có :

$$y = |a - x| + |x - b| \ge |a - x + x - b| = b - a$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$(a - x)(x - b) \ge 0$ hay $a \le x \le b$

Vậy y đạt giá trị nhỏ nhất bằng $b - a$ khi $x \in [a ; b]$

Trở lại bài toán ta viết lại :

$y = (|x - 1| + |x - 2000|) + (|x - 2| + |x - 1999|)\ 1999|) + \dots$
$+ (|x - 999| + |x - 1000|)$

Ta có :

$|x - 1| + |x - 2000|$ nhỏ nhất bằng 1999 khi $x \in [1 ; 2000]$

$|x - 2| + |x - 1999|$ nhỏ nhất bằng 1998 khi $x \in [2 ; 1999]$

$\dots |x - 999| + |x - 1000|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $x \in [999 ; 1000]$

Vậy y đạt nhỏ nhất bằng $1 + 3 + ... + 1999$ khi $x \in [999 ; 1000]$

Kết luận : $\min y = 1000.000$ khi $999 \le x \le 1000$

(Chú ý : $1 + 3 + 5 +...+ (2n - 1) = n^2$)

■ Nhận xét cách giải :

Bài toán trên là *trường hợp* đặc biệt của bài toán sau :

Cho các số khác nhau đôi một $a_1, a_2 ,..., a_n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x - a_1| + |x - a_2| +...+ |x - a_n|$. Cách giải bài toán tổng quát này tương tự như cách giải trên. Giả sử $a_1 < a_2 <...<a_n$, sau đó chia hai trường hợp $n = 2k$ và $n = 2k + 1$.

Cách giải xin dành cho bạn đọc.

BÀI 2 :

• *Cách 1* : (Đưa về hệ)

Điều kiện : $x \ge -\frac{1}{4}$.

Đặt $y = x^2 + x$, phương trình trở thành :

$$2y + 1 = \sqrt{4x+1} \Rightarrow (2y + 1)^2 = 4x + 1 \Rightarrow x = y^2 + y$$

Khi đó ta có hệ : $\begin{cases} y = x^2 + x \\ x = y^2 + y \end{cases}$

Trừ 2 phương trình cho nhau ta được :

$$y - x = x^2 - y^2 + x - y \quad \Rightarrow \quad (x - y)(x + y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \end{array}\right. : \quad \text{vô nghiệm}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất : $x = 0$

• Với phương pháp hệ phương trình các bạn hãy giải các phương trình sau :

1/ $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ (đặt $y = \sqrt[3]{2x-1}$)

2/ $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{2x-\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}-1$

(Đặt $u = \sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}$; $v = \sqrt{2x-\sqrt{x+1}}$)

3/ $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5$

• *Cách 2 :* (Tổng bình phương)

Phương trình đã cho tương đương với :

$$4x^2 + 4x + 1 - 2\sqrt{4x+1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + (\sqrt{4x+1}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{4x+1} - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

• Các bạn giải các phương trình sau :

1. $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

2. $x^2 - 6x + 26 = 6\sqrt{2x+1}$

Đáp số : 1) $x = -1$; 2) $x = 4$

BÀI 3 :

Ta tô màu đỏ các cung đối xứng với các cung tô màu xanh qua tâm đường tròn. Vì tổng các cung tô màu đỏ bằng tổng các cung tô màu xanh, nên tổng các cung được tô màu nhỏ hơn độ dài đường tròn, điều này có nghĩa là trên đường tròn còn ít nhất một điểm không được tô màu, nên điểm đối xứng với nó qua tâm đường tròn cũng không được tô màu. Hai điểm trên là hai đầu của đường kính cần tìm.

■ **Nhận xét :**

Bài toán trên sử dụng nguyên lý sau :

• *Nguyên lý 1 :* "Cho các hình phẳng (H_1), (H_2),...,(H_n) và (K). Nếu tổng diện tích các hình (H_1), (H_2),...,(H_n) mà nhỏ hơn diện tích hình (K) thì phải có một điểm của (K) nằm ngoài tất cả các hình (H_i) (i = 1,2,...n)"

Khi giải toán loại này, ta thường sử dụng một nguyên lý nữa là :

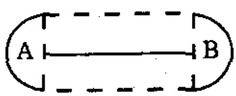
• *Nguyên lý 2 :* "Nếu các hình phẳng (H_i) (i = 1,2,...n) nằm trong hình phẳng (K) sao cho tổng diện tích của chúng lớn hơn diện tích (K) thì phải có hai hình (H_i) và (H_j) nào đó có điểm chung".

Mời các bạn giải các bài toán sau :

1. Trong hình chữ nhật kích thước 10 x 20 có 132 đoạn thẳng độ dài 1. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được 2 điểm nằm trên 2 đoạn khác nhau có khoảng cách không vượt quá 1.

Hướng dẫn : Từ các điểm của mỗi đoạn thẳng vẽ ra ngoài một đoạn dài $\frac{1}{2}$ ta được hình có diện tích :

$$1.1 + \pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\pi}{4} \text{ (đvdt)}$$



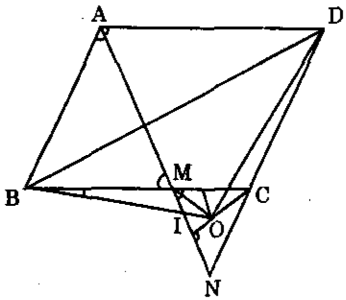
Tổng diện tích các hình chứa các đoạn thẳng bằng.

$$132\left(1+\frac{\pi}{4}\right) > 132\left(1+\frac{3}{4}\right) = 231$$

Các hình này nằm trong hình chữ nhật kích thước 11×21 (giải thích ?). Theo nguyên lý 2, có điểm chung của hai hình.

2/ Trong một hình vuông cạnh 38cm có 100 đa giác lồi, mỗi đa giác có diện tích ≤ πcm^2 còn chu vi thì ≤ $2\pi cm$. Chứng minh rằng trong hình vuông tồn tại một hình tròn bán kính 1cm không cắt đa giác nào.

BÀI 4 :



Từ giả thiết suy ra các Δ ABM và Δ MCN cân.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN.

Ta chứng minh tứ giác BOCD nội tiếp.

Xét hai tam giác MBO và CDO có :

BM = CD (vì cùng bằng AB)

MO = CO (bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ CMN)

$\widehat{BMO} = \widehat{DCO}$ (cùng bù với $\widehat{MCO}$)

$\Rightarrow$ Δ MBO = Δ CDO $\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{CDO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BOCD nội tiếp (đpcm).

ĐỀ 16.

1.

Tìm tất cả các tam giác vuông có các cạnh là những số nguyên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

2.

Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa đẳng thức :

$x^y + 1 = z$

3.

Có 12 vận động viên thi đấu bóng bàn, mỗi người đấu một trận với tất cả các vận động viên khác, trận đấu chỉ có thắng hoặc thua không hòa. Biết rằng không có cây vợt nào thắng tất cả các trận, hãy chứng minh rằng có 3 cây vợt A, B, C sao cho A thắng B, B thắng C và C thắng A.

4.

Cho đường tròn (O) và một điểm P ở bên trong đường tròn đó. Qua P ta kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc nhau.

1/ *a)* Chứng minh : PA. PB = PC. PD

b) Chứng minh tổng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ có giá trị không đổi với bất kỳ vị trí nào của P nằm trong (O).

2/ Gọi chân các đường vuông góc hạ từ điểm P xuống các cạnh AC, BC, BD và DA theo thứ tự là H, I, K, L và gọi trung điểm của các cạnh AC, BC, DB, DA thứ tự là M, N, R, Q. Chứng minh rằng 8 điểm : H, I, K, L, M, N, R, Q nằm trên 1 đường tròn.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Gọi x, y, z là các cạnh của tam giác vuông, ta có $1 \le x \le y < z$ và :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (1) \\ xy = 2(x + y + z) & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra :

$$z^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 4(x + y + z) \text{ (theo (2))}$$

$\Rightarrow \quad (x + y)^2 - 4(x + y) + 4 = z^2 + 4z + 4$

$\Rightarrow \quad (x + y - 2)^2 = (z + 2)^2$

$\Rightarrow \quad x + y - 2 = z + 2$ (do $x + y \geq 2$)

Thay $z = x + y - 4$ vào (2) ta được $(x - 4)(y - y) = 8$

Phân tích $8 = 1.8 = 2.4$ nên ta có :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - 4 = 8 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x - 4 = 2 \\ y - 4 = 4 \end{cases}$$

Suy ra :

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$

Đáp số : (5, 12, 13) ; (6, 8, 10)

■ **Nhận xét cách giải :**

Đây là bài toán hình học cho dưới dạng số học. Trên đây chúng ta đã sử dụng phương pháp phân tích trong khi giải phương trình nghiệm mà phần trước đã có dịp trình bày với các bạn. Sau đây là 2 bài tập cùng dạng :

1/ Tìm tất cả các hình chữ nhật có cạnh nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Đáp số : (3 ; 6) ; (4 ; 4)

2/ Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên và hai lần số đo diện tích bằng ba lần số đo chu vi.

Đáp số : (7 ; 24 ; 25) ; (8 ; 15 ; 17) và (9 ; 12 ; 15)

BÀI 2 :

Vì $x, y \in P$ nên $x \geq 2$; $y \geq 2$, khi đó : $x^y \geq 4 \Rightarrow z \geq 5$

Vì $z = x^y + 1$ là số nguyên tố lẻ (do $z \geq 5$) $\Rightarrow x^y$ chẵn.

$\Rightarrow \quad x$ chẵn $\quad \Rightarrow x = 2 \quad$ (vì $x \in P$)

Nếu $y = 2k + 1$ ($k \in Z$) thì $z = 2^{2k+1} + 1 \vdots 3$ vô lý vì z là số nguyên tố ≥ 5.

Vậy $y = 2$. Khi đó $z = 2^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy : $x = 2$; $y = 2$; $z = 5$.

■ **Nhận xét cách giải :**

Ở trên ta sử dụng kết quả : "Trong tập số nguyên tố, số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất". Kết quả tuy hiển nhiên nhưng sử dụng khá nhiều trong khi giải bài tập về số nguyên tố. Chẳng hạn các bài tập sau :

1. Tìm số nguyên tố P để $4p + 1$ là một số chính phương.

2. Tìm tất cả các số nguyên tố x, y thỏa $x^2 - 2y^2 = 1$.

BÀI 3 :

Xét A là người thắng nhiều trận nhất và C là người thắng A (tồn tại C theo giả thiết). Trong những người thua A phải có ít nhất một người (chẳng hạn B) thắng C vì trái lại thì C có nhiều trận thắng hơn A.

■ **Nhận xét cách giải :**

Phương pháp giải trên sử dụng nguyên tắc cực hạn. Đây là nguyên tắc sử dụng số bé nhất và số lớn nhất trong một tập hợp hữu hạn.

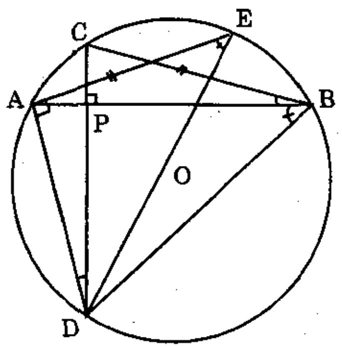
■ **Các bài tập cùng dạng :**

1/ Có n vận động viên thi đấu bóng bàn (kết quả chỉ có thắng hoặc thua không hòa) theo thể thức vòng tròn (mỗi đối thủ đấu với tất cả các đối thủ còn lại). Chứng minh rằng có thể xếp tất cả n vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kế sau.

2/ Trong một buổi dạ hội của trường phổ thông, mỗi học sinh nữ đều nhảy với ít nhất một học sinh nam, và không có học sinh nam nào nhảy với tất cả các học sinh nữ. Chứng minh rằng có thể tìm được một nhóm gồm 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ sao cho mỗi người trong họ chỉ nhảy với một người bạn khác giới cùng nhóm.

(Thi vô địch Toán Hungari, 1964).

BÀI 4 :



1/ *a)* Chứng minh :

$PA.PB = PC.\ PD.$

Ta có (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow$ hai tam giác vuông APD và CPB đồng dạng với nhau.

$$\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

$\Rightarrow PA.\ PB = PC.\ PD$

b) Chứng minh : $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không đổi.

Gọi E là điểm đối xứng của D qua O khi đó Δ DAE vuông tại A.

Ta có : $\widehat{AED} = \widehat{ABD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với $\widehat{AED}$)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CB} \qquad \Rightarrow \qquad AE = BC$

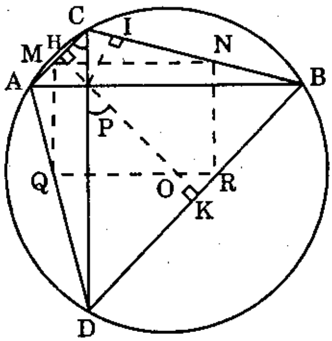
Do đó :

$$(PA^2 + PD^2) + (PC^2 + PB^2) = AD^2 + BC^2$$
$$= AD^2 + AE^2 = DE^2 = 4R^2$$

Với R là bán kính đường tròn (O).

2/ Ta có MNRQ là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn đường kính MR (hay QN).

Ta chứng minh M, P, K thẳng hàng từ đó suy ra đpcm.



Giả sử PK kéo dài cắt AC tại M ta chứng minh M là trung điểm của BC.

Ta có :

$\widehat{DPK} = \widehat{PBD}$ (cùng phụ với $\widehat{PDB}$)

$\widehat{MPC} = \widehat{DBK}$ (đối đỉnh)

$\widehat{ACP} = \widehat{PBD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{MCP} = \widehat{MPC}$ $\Rightarrow$ Δ CMP cân $\Rightarrow$ MC = MP

Tương tự : MP = MA. Do đó M là trung điểm của AC.

■ **Nhận xét cách giải :**

Để chứng minh nhiều điểm nằm trên đường tròn ta thường chứng minh 4 điểm nằm trên đường tròn (O), sau đó chứng minh các điểm còn lại cũng nằm trên đường tròn (O) này.

■ **Các bạn hãy giải bài toán sau :**

• Chứng minh rằng trong một tam giác bất kỳ, trung điểm của các cạnh, các chân đường cao, trung điểm của các đoạn nối trực tâm và các đỉnh, 9 điểm đó nằm trên một đường tròn (đường tròn Euler).

Chứng minh rằng tâm của đường tròn chín điểm là trung điểm của đoạn nối trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn chín điểm bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp.

ĐỀ 17.

1.

a) Cho $0 \le a, b, c \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $P = a + b + c - ab - bc - ca$.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$2^x + 2^y + 2^z = 2336$

2.

Một tam giác có số đo của đường cao là những số nguyên và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh rằng tam giác đó đều.

3.

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố, chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.

4.

Xác định các góc của tam giác ABC biết rằng đường cao AH và trung tuyến AM chia góc BAC thành ba phần bằng nhau.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

a) • *Cách 1 :* (Phương pháp đại số)

Ta có :

$$P = (a - ab) + (b - bc) + (c - ca)$$
$$= a(1 - b) + (1 - c) + c(1 - a) \ge 0$$

Dấu bằng có thể xảy ra, chẳng hạn $a = b = c = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

Theo giả thiết ta có : $1 - a \geq 0$; $1 - b \geq 0$; $1 - c \geq 0$

$$\Rightarrow \quad (1 - a)(1 - b)(1 - c) =$$

$$= 1 + ab + bc + ca - a - b - c - abc \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad P = a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 - abc \leq 1$$

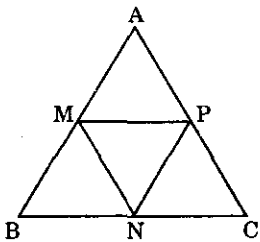
Dấu bằng có thể xảy ra, chẳng hạn $a = 1$; $b = 0$, c tùy ý $\in [0,1]$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1.

• *Cách 2 :* (phương pháp hình học).

Như cách 1, ta có minP = 0. Ta chứng minh Max P = 1.

Xét tam giác ABC cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho AM = a, BN = b, CP = c.



Ta có : $S_{AMP} = \dfrac{1}{2} MA \cdot PA \sin 60^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a(1 - c)$$

Tương tự :

$$S_{BMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} b(1 - a)$$

$$S_{CNP} = \frac{\sqrt{3}}{4} c(1 - b)$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ta có bất đẳng thức :

$$S_{(AMP)} + S_{(BMN)} + S_{(CNP)} \leq S_{(ABC)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{4}(a - ac + b - ab + c - cb) \le \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad P = a + b + c - ab - bc - ca \le 1$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $\Delta MNP = \Delta ABC$ khi hai trong ba số a, b, c bằng 1 và số còn lại bằng 0 hoặc hai trong ba số 0, số còn lại bằng 1.

■ **Nhận xét cách giải :**

Với phương pháp hình học như trên ta có thể giải các bài toán sau :

1/ Cho a, b, c thỏa điều kiện : $a > c > 0$ và $b > c > 0$

Chứng minh : $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$

2/ a, b, c > 0; chứng minh : $\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \ge c(a + b)$

b) • Chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên $x = y = z$ cũng như hai trong ba số x, y, z bằng nhau.

• Giả sử : $1 \le x < y < z$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^5 \cdot 73$$

Vì $\quad 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ lẻ nên $2^x = 2^5$ và $2^{y-x} + 2^{z-x} = 72$.

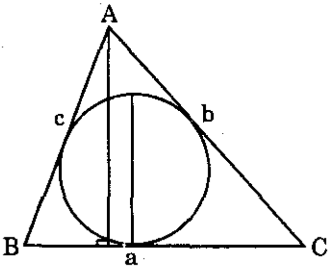
$\Rightarrow \quad x = 5$ và $2^{y-x}(1 + 2^{z-y}) = 2^3 \cdot 9$

$\Rightarrow \quad x = 5,\ y = 8,\ z = 11.$

Thử lại : $2^5 + 2^8 + 2^{11} = 2336$.

Đáp số : (5 ; 8 ; 11)

BÀI 2 :



Đặt a = BC , b = AC, c = AB

Gọi x, y, z là độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của tam giác vì bán kính nội tiếp bằng 1 nên x, y, z > 2.

Giả sử $x \geq y \geq z > 2$.

Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$ (1)

Mặt khác : $S = S_{ABO} + S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $ax = by = cz = a + b + c$

$\Rightarrow \quad a + b + c = \dfrac{a}{\frac{1}{x}} = \dfrac{b}{\frac{1}{y}} = \dfrac{c}{\frac{1}{z}} = \dfrac{a+b+c}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1 \leq \frac{3}{z} \quad \Rightarrow \quad z \leq 3 \quad \Rightarrow \quad z = 3$

Từ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ hay $3(x + y) = 2xy$

$\Rightarrow \quad (2x - 3)(2y - 3) = 9 = 3.3 = 9.1 \quad \Rightarrow \quad x = y = 3$

hoặc x = 6, y = 2 (loại). Vậy : x = y = z = 3.

Khi đó : a = b = c

BÀI 3 :

Giả sử : $\Delta = b^2 - 4ac = m^2$ $(m \in Z)$

Ta có : $4a \,.\, \overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac$

$= (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2$

$= (20a + b - m)(20a + b + m)$

$\Rightarrow \quad 20a + b - m \,\vdots\, \overline{abc}$ hoặc $20a + b + m \,\vdots\, \overline{abc}$

$\Rightarrow \quad 20a + b + m \geq \overline{abc}$

Vì $\quad b^2 - 4ac = m^2 \quad \Rightarrow \quad b > m$, do đó :

$\overline{abc} = 100a + 10b + c > 20a + 2b > 20a + b + m$ (vô lý)

Vậy Δ không là số chính phương nên phương trình không có nghiệm hữu tỷ.

■ **Nhận xét cách giải :**

• Muốn chứng minh phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm nguyên (hữu tỷ) ta chứng minh :

$\Delta = b^2 - 4ac$ là một số chính phương hay là bình phương của một số hữu tỷ.

■ **Chẳng hạn các bài tập sau :**

1/ Cho p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + x + q = 0$ có các nghiệm hữu tỷ thì các nghiệm đó là nghiệm nguyên.

Tổng quát : Nghiệm hữu tỷ (nếu có) của phương trình với hệ số nguyên $x^n + a_1x^{n-1} +\ldots a_{n-1}x + a_0 = 0$ là nghiệm nguyên.

2/ Cho a, b, c là 3 số nguyên lẻ. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.

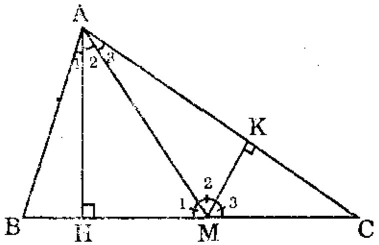
3/ Cho 3 số nguyên a, b, c thỏa a + b + c và c là số lẻ. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm nguyên.

Tổng quát : Cho $a_i \in Z$ $(i = 0,1\ldots,n)$ phương trình $f(x) = a_0x^n + a_1x^{x-1} +\ldots+a_{n-1}x+a_n = 0$ có f(0) và f(1) lẻ thì không có nghiệm nguyên.

• Bài toán trên có thể mở rộng như sau :

Nếu $P = \overline{a_0a_1\ldots a_n}$ $(k \geq 3)$ là số nguyên tố thì phương trình p(x) $= a_0x^k + a_1x^{k-1} +\ldots+ a_{k-1}x + a_k = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.

BÀI 4 :



Kẻ MK ⊥ AC, khi đó :

Δ AHM = Δ AKM

$\Rightarrow$ MH = MK (1)

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \Delta$ ABM cân tại A

$\Rightarrow$ BH = MH (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK = \dfrac{1}{2}MC$

$\Rightarrow$ Δ vuông KMC là nửa tam giác đều cạnh MC đường cao MK :

Do đó : $\widehat{C} = 30^0 \Rightarrow \widehat{M_3} = 60^0$

Ta có : $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (Δ AHM = Δ AKM)

$\Rightarrow \quad \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{HMK} = 60^0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = 30^0$

Vậy Δ ABC vuông tại A và có : $\widehat{B} = 60^0$; $\widehat{C} = 30^0$

ĐỀ 18.

1.

Chứng minh rằng biểu thức $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với n là số tự nhiên.

2.

Cho a, b, c > 0 và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases}\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1\\ \sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}=1\\ \sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}=1\end{cases}$$

3.

Trên mặt phẳng tọa độ (với đơn vị dài ở trục tung và trục hoành bằng nhau), ta gọi điểm M(x , y) là một "điểm nguyên" nếu cả x và y đều là số nguyên. Vẽ đường tròn có tâm O ở gốc tọa độ và bán kính $R \neq 0$.

a) Chứng minh rằng số các "điểm nguyên" nằm trên đường tròn (O,R) chia hết cho 4.

b) Bán kính R của đường tròn phải thuộc tập hợp số nào để số các "điểm nguyên" nằm trên đường tròn khi chia cho 8 thì có số dư là 4 ?

4.

Cho hình vuông ABCD, đường tròn đường kính CD và đường tròn tâm A bán kính AD cắt nhau tại M ($\neq$ D). Chứng minh rằng đường thẳng DM đi qua trung điểm của cạnh BC.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

+ Với n = 0; ta có $10^0 + 18.0 - 1 = 0$ chia hết cho 27.

+ Với $n \geq 1$

Ta có :

$$10^n - 1 + 18n$$
$$= (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 10 + 1) + 18n$$
$$= 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 10 + 1 - n + 3n)$$
$$= 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + ... + (10 - 1) + (1 - 1) + 3n]$$

Vì $10^k - 1 \vdots 3$ và $3n \vdots 3$; do đó $10^n - 1 + 18n \vdots 27$

■ **Nhận xét cách giải :**

Lời giải trên sử dụng đến các công thức khai triển :

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \vdots a - b \quad (a \neq b)$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với n lẻ

$a^n - b^n \vdots a + b$ nếu n chẵn.

■ **Các bài tập áp dụng :**

1/ Với n chẵn chứng minh rằng : $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$

2/ Với n là số tự nhiên, chứng minh rằng :

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$

b) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

c) $7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$

3/ Chứng minh rằng với n là số tự nhiên ≥ 1 và k là số tự nhiên lẻ ta có : $1^k + 2^k + ... + n^k \vdots 1 + 2 + ... + n$

4/ Cho $a_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1 \quad (n \in N)$

$b_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1.$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n có một và chỉ một trong hai số a_n, b_n chia hết cho 5.

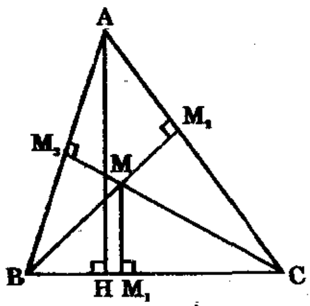
BÀI 2 :

Trước tiên ta chứng minh hệ có nghiệm.

Dựng tam giác đều ABC cạnh 1. Khi đó chiều cao là $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Do $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên tồn tại điểm M trong tam giác sao cho : $MM_1 = \sqrt{a}$, $MM_2 = \sqrt{b}$, $MM_3 = \sqrt{c}$ (xem hình).

(Chú ý : $MM_1 + MM_2 + MM_3 = AH$)

Dễ thấy rằng $x_0 = MA^2$, $y_0 = MB^2$, $z_0 = MC^2$ là nghiệm của hệ phương trình.



Bây giờ ta chứng minh hệ có nghiệm duy nhất.

Thật vậy, giả sử có hai nghiệm $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$.

Giả sử $x_1 < x_2$, ta có :

$\sqrt{x_1 - c} + \sqrt{y_1 - c} = \sqrt{x_2 - c} + \sqrt{y_2 - c}$ (=1)

$\Rightarrow$ $y_1 > y_2$, ta lại có :

$$\sqrt{y_1 - a} + \sqrt{z_1 - a} = \sqrt{y_2 - a} + \sqrt{z_2 - a}$$

$\Rightarrow$ $z_1 < z_2$, lại từ :

$$\sqrt{z_1 - b} + \sqrt{x_1 - b} = \sqrt{z_2 - b} + \sqrt{x_2 - b}$$

$\Rightarrow$ $x_1 > x_2$ (vô lý). Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

BÀI 3 :

Nhận xét :

Nếu x, y thỏa $x^2 + y^2 = R^2$ ($R \neq 0$) thì x, y có vai trò như nhau và $(-x)^2 = x^2$ nên :

• Với mỗi điểm nguyên M(x, y), với $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ có 7 điểm nguyên khác nữa bằng cách hoán vị x, y và đổi dấu của x, y. Như vậy, nếu có những điểm nguyên thuộc đường tròn mà không nằm trên các trục tọa độ và cũng không nằm trên các đường phân giác của góc giữa các trục thì số các điểm nguyên bao giờ cũng chia hết cho 8.

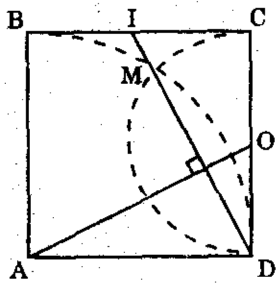
• Với mỗi điểm nguyên M(x, 0) với $x \neq 0$ có 3 điểm nguyên khác nữa, bằng cách đổi dấu và hoán vị x với 0. Số điểm nguyên của đường tròn nằm trên trục tọa độ (nếu có) thì bằng 4.

• Với mỗi điểm nguyên M(x, x) với $x \neq 0$, có ba điểm nguyên khác nữa bằng cách đổi dấu của x. Số điểm nguyên của đường tròn nằm trên các đường phân giác (nếu có) thì bằng 4.

Chú ý : Hai trường hợp cuối cùng loại trừ lẫn nhau. Nếu đường tròn cắt trục tọa độ tại một điểm nguyên (R nguyên dương) thì nó cắt đường phân giác thứ nhất ở điểm $\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}; \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ không là điểm nguyên ; ngược lại nếu đường tròn cắt đường phân giác tại điểm nguyên (x, x) thì nó cắt trục hoành ở điểm $(x\sqrt{2}, 0)$ không là điểm nguyên.

Vậy : Số điểm nguyên trên đường tròn là bội của 8 cộng 4 khi và chỉ khi bán kính R của nó bằng số nguyên dương hoặc bằng $a\sqrt{2}$ với a nguyên dương.

BÀI 4 :



Gọi O là tâm đường tròn đường kính CD nối AO và DM (cho tới cắt BC tại I) ta có $AO \perp DI$ (đường nối tâm vuông góc dây chung).

Chứng minh được :

$$\Delta ADO = \Delta DCI$$

$$\Rightarrow IC = DO = \frac{1}{2} BC \quad \Rightarrow \quad \text{I là trung điểm BC.}$$

ĐỀ 19.

1.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

2.

Mỗi điểm của mặt phẳng được tô màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh được tô cùng một màu.

3.

Cho đa thức f(x) bậc bốn thỏa hai điều kiện sau :

$$f(-1) = 0 \qquad (1)$$

$$f(x) - f(x-1) = x(x+1)(2x+1) \qquad (2)$$

a) Xác định f(x).

b) Suy ra giá trị của S theo $n (n \in Z^+)$ sau đây :

$$S = 1.2.3 + 2.3.5 + \ldots + n(n+1)(2n+1)$$

4.

Cho tam giác ABC, kẻ đường cao AH. Gọi C' là điểm đối xứng của H qua AB. B' là điểm đối xứng của H qua AC. Gọi giao điểm của B'C' với AC và AB là I và K. Chứng minh các đường BI, CK là đường cao của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

Rõ ràng với x = 0 ; y = ± 1 là nghiệm nguyên của phương trình, ta chứng minh đó là hai nghiệm nguyên duy nhất.

- Với x > 0 :

$$(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1$$
$$= y^4 < x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2$$
$$\Rightarrow \quad = x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2 \qquad \text{(vô lý)}$$

- Với x < 0 :
- Với x = – 1 ; $y^4 = -1$: vô nghiệm
- Với x ≤ – 2 : $(x^3 + 2)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$

$$< x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3 + 1)^2$$
$$\Rightarrow \quad |x^3 + 2| < y^2 < |x^3 + 1| \qquad \text{(vô lý)}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên : (0 ; 1) và (0; –1)

■ **Nhận xét cách giải :**

Trước hết tìm nghiệm rồi chứng minh nghiệm đó duy nhất như cách giải trên đây gọi là phương pháp loại trừ.

Sau đây là các bài tập sử dụng phương pháp này :

1/ Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$1! + 2! + \dots + x! = y^2$$

2/ Tìm nghiệm nguyên : $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$

3/ Tìm nghiệm nguyên phương trình :

$$x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$$

Hướng dẫn :

1/ Với $x \geq 5$ thì $x! \vdots 10$

Nên $1! + 2! + \dots + x! = 33 + 5! + \dots + x!$ tận cùng là 3 không thể là một số chính phương.

Vậy : $x < 5$.

Đáp số : $x = y = 1$; $x = y = 3$

2/ Biến đổi $(x - 3y)^2 = 4(25 - y^2) \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 5$ và $25 - y^2$ là số chính phương.

3/ $y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = z^2 + 7z$ với $z = x^2 + 8x$

Nếu $z > 9$ thì $(z + 3)^2 < z^2 + 7z = y^2 < (z + 4)^2$ vô lý.

Vậy : $z = x^2 + 8x \leq 9 \Rightarrow -9 \leq x \leq 1$.

BÀI 2 :

Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm (i , j) với i, j ∈ Z được gọi là điểm nguyên. Ta chú ý các điểm nguyên (i , j) với $1 \leq i \leq 3$; $1 \leq j \leq 9$. Vì mỗi điểm có hai cách tô màu (xanh hoặc đỏ) nên mỗi dòng có 2^3 cách tô màu khác nhau. Vì có đến $9 = 2^3 + 1$ dòng nên tồn tại hai dòng có cùng cách tô màu (theo thứ tự 1, 2, 3) giả sử dòng thứ 1 và dòng thứ 2. Vậy các điểm (i ; 1) ; (i ; 2) có cùng màu (i = 1,2,3). Vì có 2 màu nên trong 3 điểm (1,1) ; (2,1) ; (3,1) phải có 2 điểm có cùng màu, giả sử là (1,1) và (2,1). Khi đó 4 điểm (1 ; 1) ; (2 ;1) ; (1 ; 2) ; (2 ; 2) lập thành 4 đỉnh của hình chữ nhật có cùng màu (đpcm).

Tổng quát :

Mỗi điểm của mặt phẳng được tô n màu thì tồn tại hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Chọn các điểm nguyên (i ; j) với : $1 \le i \le n + 1$

$1 \le j \le n^{n+1} + 1$

BÀI 3 :

a/ Thay x = 0 vào (2) ta được : $f(0) - f(-1) = 0$

mà $f(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

Thay x = – 1 vào (2) ta được : $f(-1) - f(-2) = 0$

mà $f(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-2) = 0$

Ta có : $f(0) = f(-1) = f(-2) = 0 \Rightarrow f(x) \vdots x(x + 1)(x + 2)$

Vì f(x) là đa thức bậc 4 nên nó có dạng :

$$f(x) = x(x + 1)(x + 2)(ax + b)$$

Do đó :

$$f(x) - f(x - 1)$$

$$= x(x + 1)(x + 2)(ax + b) - (x - 1)x(x + 1)[a(x - 1) + b]$$

$$= x(x + 1)[(x + 2)(ax + b) - (x - 1)(ax - a + b)]$$

Suy ra :

$$x(x + 1)(2x + 1) = x(x + 1)[(x + 2)(ax + b) - (x - 1)(ax - a + b)]$$

Cho x = 1 : $6 = 6(a + b) \Rightarrow a + b = 1$

Cho $x = -\dfrac{1}{2}$: $0 = -\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3}{2}(-\dfrac{a}{2} + b) + \dfrac{3}{2}(-\dfrac{3}{2}a + b)\right]$

$\Rightarrow \quad -a + b = 0 \qquad \Rightarrow \; a = b = \dfrac{1}{2}$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}x(x+1)^2(x + 2)$

b/ Với x = 1 : $f(1) - f(0) = 1.2.3$

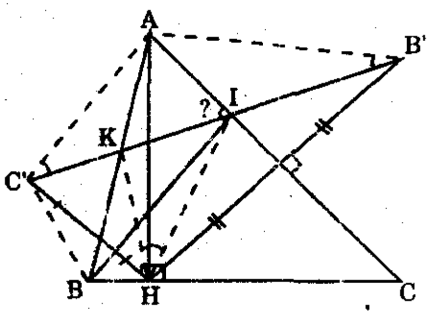
Với x = 2 : $f(2) - f(1) = 2.3.5$

....

Với x = n : $f(n) - f(n - 1) = n(n + 1)(2n + 1)$

Suy ra : $S = f(n) = \dfrac{1}{2}n(n + 1)^2(n + 2)$

BÀI 4 :



• *Cách 1 :*

Ta có :

$\widehat{AC'K} = \widehat{AHK}$ (do đối xứng)

$\widehat{AHI} = \widehat{AB'I}$

Mà $\widehat{AC'K} = \widehat{AB'I}$ (Δ C'AB' cân)

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{AHI}$

$\Rightarrow$ AH là phân giác của góc $\widehat{KHI}$

$\Rightarrow$ BH là phân giác ngoài của Δ HKI

BK cũng là phân giác ngoài của Δ HKI.

Từ định lý 3 đường phân giác suy ra BI là phân giác trong của góc HIK $\Rightarrow$ BI $\perp$ IC (hai đường phân giác trong và ngoài của 1 góc tam giác thì vuông góc nhau).

Vậy BI là đường cao của Δ ABC. Tương tự CK là đường cao của Δ ABC.

• *Cách 2:*

Chứng minh được 5 điểm A, I, H, B, C' nằm trên cùng một đường tròn đường kính AB. Suy ra : $\widehat{BIA} = 90^0$.

Tương tự : $\widehat{CKB} = 90^0$.

ĐỀ 20.

1.

Cho a là tổng các chữ số của $(2^9)^{2001}$, b là tổng các chữ số của a. Tìm tổng các chữ số của b.

2.

Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng : $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}$

3.

Cho n giác lồi với đỉnh là các "điểm nguyên" (M (x,y) là "điểm nguyên" nếu x,y nguyên). Biết rằng n– giác này không chứa "điểm nguyên" nào ở trong và trên biên của nó (ngoại trừ các đỉnh của n giác).

Chứng minh rằng : $n \leq 4$.

4.

Cho tam giác ABC. Giả sử đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại D và K tương ứng. Chứng minh rằng nếu AD = AK thì $AB^2 + AC^2 = 4R^2$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN

BÀI 1 :

Ta có : $N = (2^9)^{2001} = (2^3)^{3.2001} < 10^{6003}$

Vậy N không có quá 6003 chữ số. Do đó :

$a = S(N) \le 9.6003 = 54.027$

$\Rightarrow \quad b = S(a) \le 5 + 9.4 = 41$

$\Rightarrow \quad c = S(b) < 4 + 9 = 13$

Ta có $N \equiv S(N) \pmod 9$

Mặt khác $N = (2^3)^{6003} \equiv -1 \equiv 8 \pmod 9$

Do đó : $N \equiv a \equiv b \equiv c \equiv 8 \pmod 9$. Vậy c = 8

BÀI 2 :

Trước tiên ta chứng minh đẳng thức :

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Thật vậy ta có :

$$VT = \frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{[(a-c)+(c-b)](b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{(a-c)(b+c)(c+a-a-b)+(c-b)(c+a)(b+c-a-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{(a-c)(b+c)(c-b)+(c-b)(c+a)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{(a-c)(b-c)(-b-c+c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VP$$

Vì $|a-b| < c$, $|b-c| < a$; $|a-c| < b$

Nên : $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|$

$$= \left|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right| < \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

Vì a, b, c > 0 nên ta có bất đẳng thức :

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên; ta được :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$\Rightarrow \quad \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8} \text{ (dpcm)}$$

BÀI 3 :

Nhận xét :

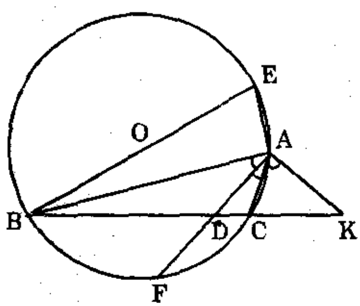
– Cho hai điểm A, B có tọa độ : $A(a_1 ; a_2)$; $B(b_1 ; b_2)$ thì trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ :

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} ; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

– Tọa độ của mỗi điểm nguyên thuộc một trong các dạng sau : (chẵn, chẵn) ; (lẻ , lẻ) ; (chẵn , lẻ) ; (lẻ , chẵn). Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng.

Giả sử $n \geq 5$; theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại 2 đỉnh A, B của n giác mà tọa độ của chúng cùng thuộc vào một trong 4 dạng trên. Suy ra hai tọa độ của trung điểm M của A, B là số nguyên; do đó M là điểm nguyên mà M nằm trên biên hoặc trong n giác đã cho, vô lý. Vậy $n \leq 4$.

BÀI 4 :



Kẻ đường kính BE của đường tròn ngoại tiếp Δ ABC.

$\Rightarrow$ Δ EAB vuông tại A.

Ta có : $AB^2 + AE^2 = 4R^2$

Vậy bài toán đi đến chứng minh AE = AC.

Kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại F. Theo giả thiết Δ ADK vuông cân tại A nên $\widehat{ADC} = 45^0$

$$\Rightarrow \quad \text{sđ}\ \frac{\overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{AC}}{2} = 45^0$$

$$\text{mà} \quad \text{sđ}\ \frac{\overset{\frown}{BE}}{2} = 90^0$$

Do đó :

$$\text{sđ}\ \frac{\overset{\frown}{FC} + \overset{\frown}{AE}}{2} = 45^0$$

Vì $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC}$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AE}$ hay AE = AC (đpcm)

ĐỀ 21.

(Thi học sinh Giỏi Quốc gia lớp 9 năm 1993)

1.

a) Chứng minh rằng nếu a_1, a_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và b_1 ; b_1 là các nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ thì :

$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) = q^2 - p^2$.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình sau :

$1! + 2! + \ldots + x! = y^2$.

2.

Cho x, y, z là các số nguyên khác không.

Chứng minh rằng nếu :

$x^2 - yz = a$; $y^2 - zx = b$; $z^2 - xy = c$

thì tổng $ax + by + cz$ chia hết cho tổng $a + b + c$.

3.

Qua điểm O bất kỳ bên trong tam giác ABC, người ta vẽ ba đường thẳng tương ứng song song với ba cạnh của tam giác đó.

a) Chứng minh hệ thức : $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2$, trong đó a_1, b_1, c_1 là các đoạn thẳng gồm giữa các cạnh và theo thứ tự song song với cạnh a, b, c của tam giác.

b) Tính giá trị của biểu thức : $p = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ trong đó a', b', c' là các đoạn thẳng theo thứ tự nằm trên các cạnh a, b, c và gồm giữa các đường thẳng nói trên.

4.

Một nước có 80 sân bay mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

GIẢI

BÀI 1 :

a) Theo định lý Viète, ta có : $a_1 + a_2 = -p$; $a_1a_2 = 1$;

$b_1 + b_2 = -q$; $b_1b_2 = 1$. Ta có :

$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2)$

$= [(a_1 - b_1)(a_2 + b_2)][(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)]$

$= (a_1a_2 + a_1b_2 - a_2b_1 - b_1b_2)(a_1a_2 + a_2b_2 - a_1b_1 - b_1b_2)$

$= (1 + a_1b_2 - a_2b_1 - 1)(1 + a_2b_2 - a_1b_1 - 1)$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)(a_2b_2 - a_1b_1)$

$= a_1a_2b_2^2 - a_1^2b_1b_2 - a_2^2b_1b_2 + a_1a_2b_1^2 = b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 + b_2^2$

$= ((b_1^2 + b_2^2 + 2) - (a_1^2 + a_2^2 + 2) = (b_1 + b_2)^2 - (a_1 + a_2)^2 = q^2 - p^2$

b) Với $x = 1$; $1! = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$

Với $x = 2$; $1! + 2! = y^2 \Rightarrow y^2 = 3$

Phương trình không có nghiệm nguyên.

Với $x = 3$: $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow y^2 = 9$

$\Rightarrow y = \pm 3$

Với $x = 4$: $1! + 2! + 3! + 4! = y^2 \Rightarrow y^2 = 33$

Phương trình không có nghiệm nguyên.

Với $x \geq 5$ thì vế trái của phương trình đã cho có chữ số tận cùng là 3 (vì tổng 4 số hạng đầu là 33 còn mỗi số hạng sau đều có tận cùng bằng (0). Trong khi đó với $y \in Z$ thì y^2 không có chữ số tận cùng là 3.

Phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm :

(1 ; 1) ; (1 ; – 1) ; (3 ; 3) ; (3 : – 3)

BÀI 2 :

Ta có : $ax + by + cz = x(x^2 - yz) + y(y^2 - xz) + z(z^2 - xy)$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y) - 3xy(x + y) - 3xyz$

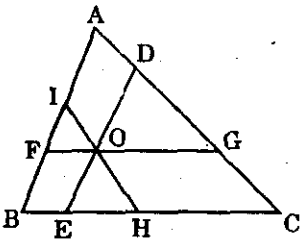
$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (x + y + z)(a + b + c) \vdots a + b + c$ (đpcm).

BÀI 3 :



a) Vẽ qua O các đường thẳng thứ tự song song với các cạnh AB, BC, CA được $FG = a_1$; $IH = b_1$; $DE = c_1$; $EH = a'$; $GD = b'$; $FI = c'$.

Áp dụng định lý Thalès vào các tam giác đồng dạng với tam giác ABC ta có:

$$\frac{FG}{BC} = \frac{AG}{AC} ; \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}$$

Vậy :

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{FG}{BC} + \frac{IH}{AC} + \frac{ED}{AB} = \frac{AG}{AC} + \frac{IH}{AC} + \frac{CD}{AC}$$

$$= \frac{AD + DG + IO + OH + CG + DG}{AC}$$

Theo tính chất các đoạn chắn song song ta được :

OI = AD , OD = AI , OH = CG , OG = HC.

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{2(AD + DG + GC)}{AC} = \frac{2AC}{AC} = 2 \qquad \text{(đpcm)}$$

b) Theo tính chất các đoạn chắn song song ta cũng có :

OE = BF ; OF = BE.

Từ đó :

$$a' = EH = BC - (BE + HC)$$

$$= a - (FO + OG) = a - FG = a - a_1$$

Tương tự : $b' = b - b_1$; $c' = c - c_1$.

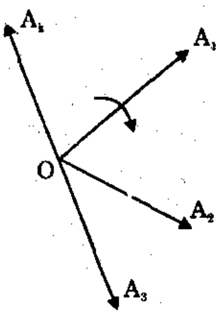
Suy ra :

$$P = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = \frac{a - a_1}{a} + \frac{b - b_1}{b} + \frac{c - c_1}{c}$$

$$= 3 - \left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c}\right) = 1$$

BÀI 4 :

Giả sử có một sân bay O bất kỳ (trong số sân bay đã cho) có k máy bay bay đến với k nguyên, $k \geq 6$. Coi mỗi sân bay là một điểm, ta được các tia chung gốc O : OA_1, OA_2 ,...,AO_k trong đó A_1 A_2, ..., A_k là các sân bay có máy bay bay đến O.



– Trước hết ta chứng minh rằng các tia OA_1, OA_2,...,OA_k là các tia phân biệt. Thật vậy : nếu có tia OA_i, OA_j nào đó trùng nhau thì khoảng cách A_iA_j ít nhất cũng nhỏ hơn một trong hai khoảng cách OA_i hoặc OA_j và do đó theo giả thiết ít nhất một trong hai máy bay từ A_i hoặc A_j sẽ không thể bay đến O, trái với giả thiết là k máy bay đều bay đến O.

– Ta sắp xếp các tia theo cùng chiều kim đồng hồ theo thứ tự OA_1, OA_2,..., OA_k

Ta có : $\widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + ... + \widehat{A_kOA_1} = 360^0$ (1)

Ta chứng minh được :

$$\widehat{A_1OA_2} > 60^0 \;;\; \widehat{A_2OA_3} > 60^0 ,...,\; \widehat{A_kOA_1} > 60^0$$

Từ đó :

$\widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + ... + \widehat{A_kOA_1} > k.\,60^0 \geq 360^0$ (2) (vì $k \geq 6$)

Từ (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến (đpcm).

ĐỀ 22.

1.

a) Tìm tất cả các số dương x, y thỏa : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} \le 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) Tìm tất cả các số dương x, y, z thỏa :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{z} = 3 \\ x + y + z \le 12 \end{cases}$$

2.

Cho ba số nguyên x, y, z thỏa : $x^2 + y^2 = z^2$

Chứng minh rằng $xyz \vdots 60$

3.

Hãy nội tiếp trong tam giác ABC cho trước một tam giác MNP có chu vi nhỏ nhất.

4.

Cho a, b, c thỏa : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$

Tính giá trị biểu thức : $T = (a - 1)^{1999} + b^{2000} + (c + 1)^{2001}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a/ Thay $y = 3 - x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{3 - x} \le 3 \quad \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

với $x = 1$ thì $y = 2$. Vậy : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

B/ Ta có :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)=14+\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{9x}{z}+\frac{z}{x}\right)+$$

$$+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có :

$\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geq 4$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $y=2x$

$\frac{9x}{z}+\frac{z}{x}\geq 6$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $z=3x$

$\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\geq 12$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $2z=3y$

Do đó :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)\geq 36 \quad\Rightarrow\quad x+y+z\geq 12$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra : $x+y+z=12$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=2$; $y=4$; $z=6$

Giải các hệ sau dựa vào bất đẳng thức Cauchy :

1) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2}=x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy} \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$

BÀI 2 :

1) Chứng minh $xyz \vdots 5$

a) Nếu $xy \vdots 5$ thì $xyz \vdots 5$

b) Nếu $x, y \not\vdots 5$ thì $x^2 \equiv 1 ; 4 \pmod 5$

và $y^2 \equiv 1 ; 4 \pmod 5$ suy ra : $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0, 2, 3 \pmod 5$

Vì $z^2 \not\equiv 2,3 \pmod 5 \Rightarrow z \vdots 5$ Vậy $xyz \vdots 5$

2) Chứng minh $xyz \vdots 3$

Nếu $x, y \vdots 3$ thì $x^2, y^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$ (vô lí)

Vậy : $xy \vdots 3 \Rightarrow xyz \vdots 3$

3) Chứng minh $xyz \vdots 4$

a) Nếu x, y chẵn thì $xyz \vdots 4$

b) Nếu $x = 2k$, $y = 2\ell + 1 \Rightarrow$ z lẻ, $z = 2m + 1$

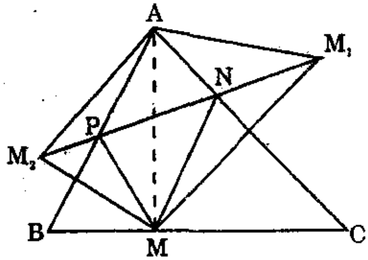
thì $(2m + 1)^2 = 4k^2 + (2\ell + 1)^2 \Rightarrow k^2 = m(m + 1) - \ell(\ell + 1) \vdots 2$

$\Rightarrow \quad x \vdots 4$

c) Nếu x lẻ, y chẵn thì $y \vdots 4$

Vậy : $xyz \vdots 5.3.4 = 60$

BÀI 3 :



Giả sử Δ MNP là tam giác nội tiếp trong Δ ABC. M_1 M_2 lần lượt là hai điểm đối xứng của M qua AC và AB.

Ta có chu vi Δ MNP là :

$MN + NP + PM = M_1N + NP + PM_2 \geq M_1M_2$

Ta cần tìm M trên BC sao cho M_1M_2 nhỏ nhất. Vì ΔM_1AM_2 cân và $\widehat{M_1AM_2} = 2A$ không đổi nên M_1M_2 nhỏ nhất khi M_1A hay MA nhỏ nhất. Vậy M là chân đường cao kẻ từ A xuống ABC.

Từ đó suy ra các điểm N, P.

BÀI 4 :

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0$

$\Rightarrow a = b = c = 0$

Vậy : $T = 0$

ĐỀ 23.

1.

Cho $f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 6m + 1$

a) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi m.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm lớn hơn 2.

2.

a) Cho x, y thỏa : $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ (1)

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = 1$ (2)

b) Từ (2) có thể suy ra (1) được không. Tại sao ?

3.

Cho số nguyên n.

a) Chứng minh rằng $n^2 + 3n + 5$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $n = 11k + 4$ ($k \in Z$)

b) Chứng minh $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121.

4.

Tính độ dài đường chéo của ngũ giác đều cạnh a.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a) $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0$, $\forall m$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm với mọi m

b) Đặt $x = t + 2$ khi đó ta có phương trình :

$$(t + 2)^2 - 2(m + 2)(t + 2) + 6m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 2mt + 2m - 3 = 0 \qquad (1)$$

Ta tìm m để (1) có hai nghiệm dương :

Ta phải có : $\begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 3 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > \dfrac{3}{2}$

BÀI 2 :

a) Áp dụng bất đẳng thức : $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

Ta có: $x\sqrt{1 - y^2} \leq \dfrac{x^2 + 1 - y^2}{2}$ (a) ; dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{1 - y^2}$

$$y\sqrt{1-x^2} \le \frac{y^2+1-x^2}{2} \text{ (b) ; dấu bằng xảy ra khi } y = \sqrt{1-x^2}$$

Cộng (a) và (b) ta được : $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le 1$

Dấu bằng xảy ra thì ta có : $x^2 + y^2 = 1$

b) (2) Không suy ra (1) được. Chẳng hạn lấy $x = 0$, $y = -1$ thì $x^2 + y^2 = 1$ nhưng $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = -1 \neq 1$

BÀI 3:

a) Giả sử : $n = 11k + r$ với $r = 0, 1, 2, \ldots 10$

Khi đó : $n^2 + 3n + 5 = (11k + r)^2 + 3(11k + r) + 5$

$$= 121k^2 + 22kr + r^2 + 33k + 3r + 5 \equiv r^2 + 3r + 5 \pmod{11}$$

Lần lượt thay $r = 0,1,2,..,10$ ta thấy chỉ có $r = 4$ thì :

$r^2 + 3r + 5 = 33$ chia hết cho 11

Vậy : $n^2 + 3n + 5 \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow n = 11k + 4$

b) Giả sử : $n^2 + 3n + 5 \,\vdots\, 121$ theo câu (a)

$n = 11k + 4$, khi đó :

$n^2 + 3n + 5 = (11k + 4)^2 + 3(11k + 4) + 5 =$

$= 121k^2 + 121k + 33 \,\vdots\, 121 \Rightarrow 33 \,\vdots\, 121$ (vô lý)

Vậy : $n^2 + 3n + 5 \,\not\vdots\, 121$

• *Cách khác :*

Giả sử $n^2 + 3n + 5 \,\vdots\, 121$ thì $n^2 + 3n + 5 \,\vdots\, 11$

Ta có : $n^2 + 3n + 5 = (n + 7)(n - 4) + 33 \,\vdots\, 11$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n+7 \,\vdots\, 11 \\ n-4 \,\vdots\, 11 \end{array}\right. \quad \text{mà } n + 7 - (n - 4) = 11$$

nên : $n + 7 \vdots 11$ và $n - 4 \vdots 11$

Do đó : $(n + 7)(n - 4) \vdots 121 \Rightarrow 33 \vdots 121$ (vô lý)

Vậy : $n^2 + 3n + 5 \;\overline{\vdots}\; 121$

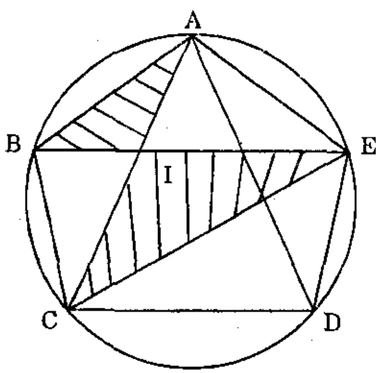
■ **Bài tập tương tự :**

Chứng minh rằng :

a) $n^2 + n + 1 \;\overline{\vdots}\; 9$ **b)** $n^2 + 11n + 39 \;\overline{\vdots}\; 49$

c) $n^2 + 3n + 4 \;\overline{\vdots}\; 49$ **d)** $n^2 + 5n + 16 \;\overline{\vdots}\; 169$

BÀI 4 :



Giả sử AC cắt BE tại I :

Tứ giác CIED là hình bình hành nên IE = CD = a

$\Delta ABI \backsim \Delta CEI$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IE} = \frac{AB}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{a} = \frac{a}{BI + a}$$

$$\Rightarrow \quad BI^2 + aBI - a^2 = 0 \Rightarrow \quad BI = \frac{\sqrt{5} - 1}{1}.a$$

$$\text{Vậy : } BE = BI + a = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1\right) a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.a$$

ĐỀ 24.

1.

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện : $x + y + z = 3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai số x, y, z bằng 3.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \\ y+2z^2=1 \end{cases}$

2.

Giải bất phương trình :

$(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0$

3.

a) Tìm $n \in Z^+$ sao cho $2^n - 1 \vdots 7$

b) Cho số nguyên tố $p \geq 5$ chứng minh rằng :

$3^p - 2^p - 1 \vdots 42p$

4.

Cho lục giác lồi ABCDEF. Các đường thẳng AB và EF, EF và CD, CD và AB lần lượt cắt nhau tại P, Q, R. Các đường thẳng BC và DE, DE và FA, FA và BC lần lượt cắt nhau tại S, T, U.

Chứng minh rằng nếu : $\frac{AB}{PR}=\frac{CD}{QR}=\frac{EF}{QP}$ thì :

$$\frac{BC}{US}=\frac{DE}{TS}=\frac{FA}{TU}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a) Ta có : $\dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y+z} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{x+y}{xy}$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3 \\ x=3 \\ y=3 \end{array}\right.$$

b) Áp dụng câu (a) xét 3 trường hợp, ta lần lượt có các hệ:

$$\begin{cases} x=3 \\ y+z=3 \\ y+2z^2=3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y=3 \\ x+z=0 \\ y+2z^2=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} z=3 \\ x+y=0 \\ y+2z^2=1 \end{cases}$$

BÀI 2 :

Đặt : $t = x^2 + 4x + 10$, ta có bất phương trình :

$t^2 - 7t < 0 \Leftrightarrow \quad 0 < t < 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0$

$\Leftrightarrow -3 < x < -1$

BÀI 3 :

a) • Với $n = 3k$, ta có : $2^n - 1 = 8^k - 1 \vdots 7$

• Với $n = 3k + 1$ thì : $2^n - 1 = 2.\ 8^k - 1 = 2(8^k - 1) + 1 \not\vdots\ 7$

• Với $n = 3k + 2$ thì : $2^n - 1 = 4.\ 8^k - 1 = 4(8^k - 1) + 3 \not\vdots\ 7$

Vậy : $2^n - 1 \vdots 7 \Leftrightarrow n \vdots 3$

b) Ta có : $42p = 2.\ 3.\ 7.\ p$

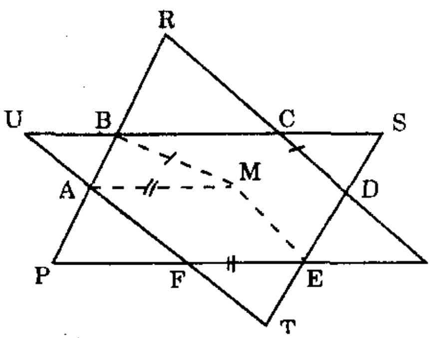
$3^p - 2^p - 1 = 3^p - 3 - (2^p - 2) \vdots p$

$p = 6k + 1$ hoặc $p = 6k + 5$ và $3^6 \equiv 1 \pmod 7$; $2^6 \equiv 1 \pmod 7$

$\Rightarrow\ 3^p - 2^p - 1 \vdots 7$

Vậy : $3^p - 2^p - 1 \vdots 42p$

BÀI 4 :



Qua A, B kẻ các đường thẳng lần lượt song song với EF, CD chúng cắt nhau tại M.

Ta có : $\Delta ABM \backsim \Delta PRQ$

nên $\dfrac{AB}{PR} = \dfrac{AM}{PQ} = \dfrac{BM}{QR}$

mà $\dfrac{AB}{PR} = \dfrac{EF}{QP} = \dfrac{CD}{QR}$

nên $AM = EF$, $BM = CD$, do đó :

AMEF và BMDC là các hình bình hành.

Suy ra : $EM = FA$, $DM = BC$ (1)

ΔDEM ΔSTU, suy ra : $\dfrac{DE}{ST} = \dfrac{DM}{SU} = \dfrac{EM}{TU}$ (2)

Từ (1) và (2) , suy ra : $\dfrac{DE}{ST} = \dfrac{BC}{SU} = \dfrac{FA}{TU}$

ĐỀ 25.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia năm học 1993 – 1994 – Bảng A)

1.

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$7x^2 + 13y^2 = 1820$$

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tổng của tất cả các ước số tự nhiên của số p^4 là một số chính phương.

2.

a) Cho biểu thức : $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$, trong đó $ad - bc = 1$

1) Chứng minh : $S \geq 3$.

2) Tính giá trị của tổng $(a + c)^2 + (b + d)^2$ khi cho biết $S = \sqrt{3}$.

b) Giải hệ phương trình với các ẩn số x, y, z sau đây:

$$\frac{xy}{ay + bx} = \frac{yz}{bz + cy} = \frac{zx}{cx + az} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

(trong đó a, b, c là các số cho trước)

3.

Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c thỏa mãn bất đẳng thức $a > b > c$ và O là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Các đường thẳng AO, BO và CO thứ tự cắt các cạnh của tam giác ABC tại các điểm P, Q và R. Chứng minh rằng : $OP + OQ + OR < a$.

4.

Cho tam giác ABC vuông ở C có $\widehat{A} < \widehat{B}$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Cho biết tam giác BIO là tam giác vuông. Tìm tỉ số các cạnh của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a) $1820 = 7.\ 13.\ 20$

Từ $7x^2 + 13y^2 = 1820 \Rightarrow \begin{cases} x \ \vdots\ 13 \\ y \ \vdots\ 7 \end{cases}$

Đặt $x = 13u,\ \ y = 7v\ (u, v \in Z)$

Phương trình đã cho trở thành : $13u^2 + 7v^2 = 20$ (*)

Suy ra : $u^2 \le \dfrac{20}{13}$ và $v^2 \le \dfrac{20}{7}$

Vì $u, v \in Z$ nên $|u| \le 1$ và $|v| \le 1$

Thử lại chỉ có $|u| = 1$, $|v| = 1$ thỏa mãn (*)

Vậy (*) có 4 nghiệm (u, v) là (1 , 1) ; (1 , – 1) ; (–1 , 1) và (–1 , –1)

Tương ứng với 4 nghiệm của (*) ta có 4 nghiệm của phương trình đã cho là (13, 7) ; (–13, 7) ; (13, –7) ; (–13, –7)

b) p^4 có 5 ước số tự nhiên là $1, p, p^2, p^3, p^4$

Giả sử : $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$

$\Rightarrow (2n)^2 = 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 > 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 = (2p^2 + p)^2$

Mặt khác : $(2n)^2 < 4p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 4p + 4 = (2p^2 + p + 2)^2$

$\Rightarrow \quad (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$

$\Rightarrow \quad (2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1 \quad (1)$

Ta lại có : $(2n)^2 = 4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $p^2 - 2p - 3 = 0$ hay $p = 3$

Với $p = 3$, ta có : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121 = 11^2$

BÀI 2 :

a) Vì $(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

và $ad - bc = 1$

nên ta có : $1 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (1)

Với $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Do đó :

$$S \geq ac + bd + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \quad (2).$$

Từ (1) và (2)

Suy ra $S \geq ac + bd + 2\sqrt{1 + (ac + bd)^2}$

Rõ ràng : $S > 0$ vì $2\sqrt{1 + (ac + db)^2} > |ac + bd|$

Đặt $x = ax + bd$ thì $S \geq x + 2\sqrt{1 + x^2} > 0$

$\Leftrightarrow \quad S^2 \geq x^2 + 4(1 + x^2) + 4x\sqrt{1 + x^2}$

$= (1 + x^2) + 4x\sqrt{1 + x^2} + 4x^2 + 3$

$\geq (\sqrt{1 + x^2} + 2x)^2 + 3 \geq 3$

$\Rightarrow \quad S \geq \sqrt{3}$

b) $S = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ \sqrt{1 + x^2} + 2x = 0 \end{cases}$

Từ $\sqrt{1 + x^2} + 2x = 0$ suy ra $x < 0$

$$\sqrt{1+x^2} = -2x \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (vì } x < 0)$$

Kết hợp giả thiết :

$$S = \sqrt{3} \text{ chỉ khi } \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 & (1) \\ x = ac + bd = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (2) \\ ad - bc = 1 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3) có : $a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd = \frac{1}{3}$

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = 1$$

Cộng lại rồi biến đổi thì được : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \frac{4}{3}$

Từ (1) suy ra : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Từ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ và $2ac + 2bd = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

Cộng từng vế và biến đổi ta được :

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $S = \sqrt{3}$ thì $(a + c)^2 + (b + d)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) Nếu $x = 0$ thì phương trình suy ra : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ hay $x = y = z = 0$; khi đó các biểu thức của phương trình vô nghĩa.

Nếu $y = 0$ hoặc $z = 0$ cũng chứng minh tương tự như trên.

Vậy $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Nghịch đảo các phân thức của phương trình đã cho ta được :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} \qquad (1)$$

Các số a, b, c đều phải khác 0 vì nếu một số bằng 0, giả sử $a = 0$ thì từ (1) ta có $\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{y}=\frac{c}{z}$, suy ra $b = c = 0$

Khi đó các biểu thức ở từng vế của phương trình cũng vô nghĩa.

Vậy : $abc \neq 0$

Từ (1) ta có : $2(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z})=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{x^2+y^2+z^2}$

Hay : $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} \qquad (3)$$

Đặt : $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{1}{t}$ ta có $x = at$, $y = bt$, $z = ct$

Thay các giá trị này vào đẳng thức $\frac{b}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$

ta được : $\frac{b}{bt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)t^2}$

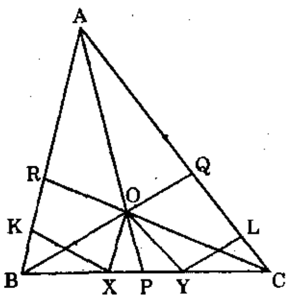
$\Rightarrow \quad \frac{1}{t}=\frac{1}{2t^2}$ hay $2t^2 = t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ (vì $t \neq 0$)

Với $t = \frac{1}{2}$, ta có : $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, $z = \frac{c}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất :

$(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ với giả thiết $abc \neq 0$.

BÀI 3 :



Đặt BC = a , CA = b

AB = c với a > b > c

Kẻ OX // AB (X ∈ BC)

OY // AC (Y ∈ BC)

Kẻ XK // OR (K ∈ AB)

YL // OQ (L ∈ AC)

Ta có : $\Delta\, POX \backsim \Delta\, PAB$

và $\Delta\, OXY \backsim \Delta\, ABC$

Nên : $\dfrac{XY}{BC} = \dfrac{OX}{AB} = \dfrac{OP}{AP}$

hay : $\dfrac{XY}{OP} = \dfrac{BC}{AP} = \dfrac{a}{AP}$

Trong hai góc $\widehat{APB}, \widehat{APC}$ phải có ít nhất một góc tù nếu hai góc không cùng bằng 90^0. Từ đó suy ra AP ít nhất phải nhỏ hơn một trong hai cạnh AB, AC. Từ giả thiết a > b > c, suy ra AP < a.

Từ đó suy ra : $\dfrac{XY}{OP} = \dfrac{a}{AP} > 1$ nên XY > OP (1)

Tương tự chứng minh được : CR < a và BQ < a

$\Delta\, BXK \backsim \Delta\, BCR$ suy ra : $\dfrac{BX}{XK} = \dfrac{BC}{CR} = \dfrac{a}{CR} > 1$

nên BX > XK

Mà XK = OR ; do đó BX > OR (2)

$\Delta\, CYL \backsim \Delta\, CBQ$; suy ra : $\dfrac{YC}{YL} = \dfrac{BC}{BQ} = \dfrac{a}{BQ} > 1$

nên YC > YL

Mà YL = OQ ; do đó : YC > OQ (3)

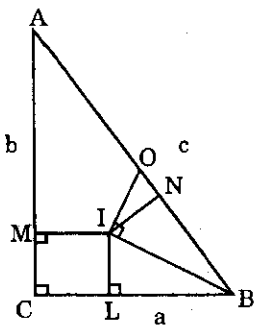
Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$$A = BX + XY + YC > OP + OQ + OR \qquad \text{(đpcm)}$$

BÀI 4 :

a) Đặt AB = c, AC = b, BC = a. vì A < B < C.

nên a < b < c.



Gọi M, N, L là chân các đường vuông góc kẻ từ I xuống các cạnh tương ứng AC, AB, BC. Xét Δ OIB có $\widehat{IBO} < \widehat{CBO} < 90^0$.

Giả sử : ΔIOB vuông ở O hay $\widehat{IOB} = 90^0$ thì AO = BO và O ≡ N

Suy ra : ΔIAO = ΔIBO ⇒ $\widehat{IAB} = \widehat{IBO}$

Hay $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, tức là $\hat{A} = \hat{B}$ (trái

Vậy nếu Δ IOB vuông thì chỉ có thể vuông ở I.

I là tâm đường tròn nội tiếp nên :

$$AM = AN = \frac{b + c - (CM + BN)}{2}$$

$$= \frac{b + c - (CL + LB)}{2} = \frac{b + c - a}{2} \qquad (1)$$

Tương tự : $BL = BN = \dfrac{a + c - b}{2}$ (2)

$$IM = IL = CL = \frac{a + b - c}{2} \qquad (3)$$

Vì $\widehat{A} < \widehat{B}$ nên a < b, do đó : $\dfrac{b+c-a}{2} > \dfrac{c}{2}$ nên N phải ở giữa B và O. Do đó :

$$ON = AN - AO = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}$$

- Δ vuông OIN có :

$$OI^2 = IN^2 + ON^2 = \frac{(a+b-c)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$= \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc}{4}$$

- Δ vuông BIL có :

$$BI^2 = BL^2 + LI^2 = \frac{(a+c-b)^2}{4} + \frac{(a+b-c)^2}{4}$$

$$= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4bc}{4}$$

- Từ Δ vuông BIO, ta có : $OI^2 + BI^2 = BO^2$

$\Rightarrow$ $(2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4bc) = c^2$

hay $2a^2 + 2b^2 + c^2 - ac - 3bc = 0$ (*)

Mặt khác, vì $a^2 + b^2 = c^2$ (Δ ABC vuông ở C), thay vào (*) ta được: $3c = a + 3b$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a + 3b = 3c \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$ (**)

Đặt $x = \dfrac{a}{c}$ và $y = \dfrac{b}{c}$ ta được hệ phương trình : $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta được nghiệm $x = \dfrac{3}{5}$, $y = \dfrac{4}{5}$ (loại nghiệm x = 0).

Vậy : $\frac{a}{c} = \frac{3}{5}$, $y = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$, *từ đó* $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

Tóm lại ta có kết quả : $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$.

ĐỀ 26.

1.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$$

2.

Cho a, b, c > 0, giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} = c - zx \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} = a - xy \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} = b - yz \end{cases}$$

3.

Có thể biểu diễn số 1 thành tổng các hình phương nghịch đảo của n số tự nhiên khác nhau được hay không (với $n \geq 2$) ? Tại sao ?

4.

Cho tam giác ABC có O thuộc miền trong của tam giác sao cho các bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác OAB, OBC và OAC bằng nhau. Chứng minh rằng nếu O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, thì tam giác ABC là tam giác đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

Phương trình đã cho được viết lại như sau :

$$3x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 - 8y = 0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (3y - 1)^2 - 12(3y^2 - 8y) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; -27y^2 + 90y + 1 \geq 0$. Do y nguyên nên từ đây suy ra :

$0 \leq y \leq 3$ hay $y \in \{0, 1, 2, 3\}$

- Với $y = 0$, ta có $x = 0$
- Với $y = 1$, ta có $x = 1$
- Với $y = 2$, $y = 3$ ta không tìm được x nguyên thỏa yêu cầu.

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là : (0, 0) và (1 , 1)

Nhận xét : Cách giải dựa theo phương pháp "đặt tham số mới". Trong một phương trình hai ẩn, ta xem một ẩn là tham số rồi giải phương trình ấy theo ẩn còn lại. Các bài toán sau đây giải bằng phương pháp này.

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 & (2) \end{cases}$

■ *Hướng dẫn giải :*

•

(2) có nghiệm y thì $-1 \le x \le \frac{1}{3}$

(2) có nghiệm x thì $0 \le y \le \frac{3}{4}$

Suy ra : $x^3 + y^2 < 2$. Vậy hệ vô nghiệm.

2) Giải phương trình : $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$

3) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$

BÀI 2 :

Lần lượt nhân các phương trình của hệ cho c, a, b, ta được :

$$\begin{cases} \dfrac{ac}{x} - \dfrac{bc}{z} = c^2 - czx \\ \dfrac{ab}{y} - \dfrac{ca}{x} = a^2 - axy \\ \dfrac{bc}{z} - \dfrac{ab}{y} = b^2 - byz \end{cases}$$

Cộng ba phương trình, ta được : $a^2 + b^2 + c^2 = axy + bzy + cxz$ (1)

Mặt khác ta có : $\begin{cases} az - bx = cxz - z^2x^2 \\ bx - cy = axy - x^2y^2 \\ cy - az = bzy - y^2z^2 \end{cases}$

Cộng chúng lại thì được : $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = axy + byz + czx$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được : $(xy - a)^2 + (yz - b)^2 + (zx - c)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ zx = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ y = \sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ z = \sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ z = -\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là :

$$\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}\,;\sqrt{\frac{ab}{c}}\,;\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)\;;\left(-\sqrt{\frac{ac}{b}}\,;-\sqrt{\frac{ab}{c}}\,;-\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

BÀI 3 :

Giả sử :

$$1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \qquad \text{với} \qquad 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \ (n \geq 2)$$

Bằng qui nạp, ta chứng minh được : $a_k \geq k + 1 \ (k \geq 1)$

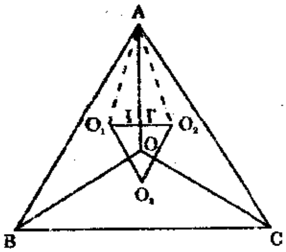
Khi đó ta có : $1 = \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \dots + \dfrac{1}{a_n^2} \leq \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Tuy nhiên ta lại có :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

(vô lý). Vậy số 1 không thể biểu diễn được thành tổng các bình phương nghịch đảo của n số tự nhiên khác nhau (n ≥ 2).

BÀI 4 :



Gọi O_1, O_2 O_3 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác OAB, OAC và OBC. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì AO, BO, CO là phân giác trong các góc A, B, C. Gọi tiếp điểm của đường tròn (O_1) với OA là I và tiếp điểm của đường (O_2) với OA là I'.

Ta có : $\Delta\, AIO_1 = \Delta\, AI'O_2 \Rightarrow AI = AI' \Rightarrow I \equiv I'$

Vậy : (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại một điểm I thuộc đoạn OA. Tương tự đường tròn (O_2) và (O_3) tiếp xúc nhau tại K thuộc đoạn OB và đường tròn (O_2) và (O_3) tiếp xúc nhau tại H thuộc OC.

Từ đó: $O_1I = O_1K$, $O_2I = O_2H$, $O_3K = O_3H$

$\Rightarrow O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$. Vậy $\Delta\, O_1O_2O_3$ là tam giác đều, vì thế ta có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$

Ta có : $\Delta\, AOB = \Delta\, AOC$ (c.g.c). Suy ra : AB = AC

Tương tự : $\Delta\, BOA = \Delta\, BOC$, suy ra : BA = BC

Vậy : $\Delta\, ABC$ là tam giác đều.

ĐỀ 27.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia năm học 1994 – 1995 – bảng A)

1.

a) Chứng minh rằng số N sau đây là số chính phương :

$$N = \underbrace{111...11}_{1995\text{ số } 1} . 1\underbrace{0...0}_{1994 \text{ số } 0}5 + 1$$

b) Tìm số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn điều kiện $(1994!)^{1996} \vdots 1995^k$

2.

a) Chứng minh bất đẳng thức sau đây với x, y là các số thực bất kỳ khác 0 : $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4 \geq 3(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})$

b) Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=37 \\ x^2+z^2+xz=28 \\ y^2+z^2+yz=19 \end{cases}$$

3.

Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh bằng 4 có cho trước 33 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$ có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó ?

4.

Tam giác ABC có góc nhọn A và độ dài các cạnh AB = c, AC = b. Một cát tuyến quay quanh trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N.

a) Gọi độ dài đoạn thẳng AM là x, diện tích tứ giác BMNC là S. Hãy tính S theo b, c, A cho trước và x.

b) Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số S theo biến số x trong khoảng xác định của nó và tính giá trị lớn nhất của hàm số S trong khoảng xác định đó.

c) Dựng tam giác cân AMN sao cho M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, AM = AN và MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a) Ta có :

$$N = \frac{10^{1995}-1}{9}.(10^{1995}+5)+1$$

$$= \frac{(10^{1995})^2+4.10^{1995}-5}{9}+1=\frac{(10^{1995})^2+4.10^{1995}+4}{9}$$

$$= (\frac{10^{1995}+2}{3})^2$$

Mà $10^{1995} + 2 \vdots 3$ nên N là số chính phương.

b) Ta có : $1995^k = (3.\ 5.\ 7.\ 19)^k = 3^k\ .\ 5^k\ .\ 7^k.\ 19^k$

Ta tìm số mũ lớn nhất của mỗi thừa số 3, 5, 7, 19 trong số $(1994\ !)^{1995}$.

Áp dụng định lý :

Trong sự phân tích số n! ra thừa số nguyên tố.

$n! = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ thì số mũ α_i của thừa số p_i nào đó sẽ là :

$$\alpha_i = \left[\frac{n}{p_i}\right]+\left[\frac{n}{p_i^2}\right]+...+\left[\frac{n}{p_i^k}\right]+...$$

Trong đó [x] là phần nguyên của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. (Xem chuyên đề Phần nguyên trong quyển "Số học" của cùng tác giả).

Số mũ của 3 trong 1994 ! bằng :

$$\left[\frac{1994}{3}\right]+\left[\frac{1994}{3^2}\right]+\left[\frac{1994}{3^3}\right]+\left[\frac{1994}{3^4}\right]+\left[\frac{1994}{3^5}\right]+\left[\frac{1994}{3^6}\right]$$

$$+\left[\frac{1994}{3^7}\right] = 664 + 221 + 73 + 24 + 8 + 2 + 0 = 992$$

Số mũ của 5 trong 1994 ! là : 495

Số mũ của 7 trong 1994 ! là : 329

Số mũ của 19 trong 1994 ! là : 109

Vậy trong 1994 ! có các thừa số : 3^{992} , 5^{495} , 7^{329} , 19^{109}

Suy ra : $(1994\,!)^{1995} = (3^{992} \cdot 5^{495} \cdot 7^{329} \cdot 19^{109} \cdot M)^{1995}$

Với M là tích các thừa số không chứa các thừa số nguyên tố 3, 5, 7, 19.

Với k = 109. 1995 thì $(1994\,!)^{1995} \,\vdots\, 1995^k$

Với k = 109. 1995 + 1 thì $(1994\,!)^{1995} \,\not\vdots\, 1995^k$

Vậy 109. 1995 là số tự nhiên lớn nhất cần tìm.

BÀI 2 :

a) $$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

Đặt $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ thì $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = z^2 - 2$

Do đó (1) thành : $z^2 - 2 + 4 \geq 3z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (z - 1)(z - 2) \geq 0 \qquad (2)$

a) Nếu x, y trái dấu thì $\frac{x}{y} < 0$ và $\frac{y}{x} < 0$, do đó : $z < 0$

$\Rightarrow (z - 1)(z - 2) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ (2) đúng.

b) Nếu x, y cùng dấu thì theo bất đẳng thức Cauchy :

$$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$ Từ đó $z - 2 \geq 0$, $z - 1 > 0$.

Suy ra : $(z - 1)(z - 2) \geq 0 \Rightarrow$ (2) đúng.

Vậy (1) đúng với $\forall x, y \neq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

b) Ta có hệ : $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 & (1) \\ x^2 + z^2 + xz = 28 & (2) \\ y^2 + z^2 + yz = 19 & (3) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được : $y^2 - z^2 + x(y - z) = 9$

$\Rightarrow \quad (y - z)(x + y + z) = 9 \quad (*)$

Lấy (2) trừ (3) ta được : $x^2 - y^2 + z(x - y) = 9$

$\Rightarrow \quad (x - y)(x + y + z) = 9 \quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra : $y - z = x - y$ hay $2y = x + z$

hay $x + y + z = 3y$

Từ (**) ta có : $(x - y)(x + y + z) = (x - y)\,3y = 9$

hay $(x - y)y = 3$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{y} + y$

Thay $x = \dfrac{3}{y} + y$ vào (1) ta được :

$$(\frac{3}{y} + y)^2 + y^2 + (\frac{3}{y} + y)y = 37$$

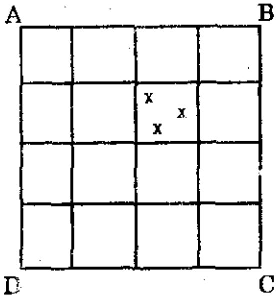
$$\Leftrightarrow \quad 3y^4 - 28y^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y^2 = 9 \\ y^2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = \pm 3 \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 nghiệm :

$$(4\,;\,2\,;\,3)\,;\,(-4\,;\,-3;\,-2)\,;\,\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\,-\frac{\sqrt{3}}{3};\,\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$$

BÀI 3 :



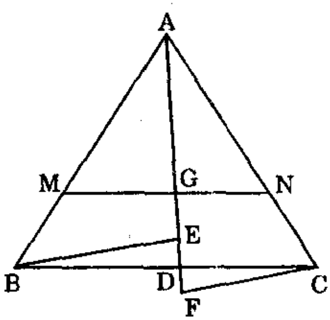
Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông cạnh là 1.

Do có 33 điểm được chứa trong 16 hình vuông nên theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất có một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm ($33 = 2.16 + 1$)

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong hình vuông đơn vị không vượt quá đường chéo của nó, nghĩa là không lớn hơn $\sqrt{2}$.

Gọi O_1, O_2, O_3 là ba điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó, có thể rơi vào cạnh hình vuông. Vẽ 3 đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 bán kính $\sqrt{2}$, chắc chắn 3 điểm O_1, O_2, O_3 đều nằm trong cả ba đường tròn này, nghĩa là nằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm cũng chính là các điểm O_1, O_2, O_3 (đpcm).

BÀI 4 :



a) Từ B, C kẻ các đường thẳng song song với MN chúng cắt trung tuyến AD tại E và F.

Ta có : MN // BE và MN//CF

Nên : $\begin{cases} \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AE}{AG} \\ \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AF}{AG} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AE + AF}{AG} \qquad (1)$$

$$\Delta\, BED = \Delta\, CFD \text{ (g.c.g)} \quad \Rightarrow \; DE = DF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AF + AF = (AD - DE) + (AD - DF) = 2AD$$

Và do đó : $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2AD}{AG} = 3$ (vì $AG = \frac{2}{3}AD$)

$AB = c$; $AC = b$; $AM = x$; ta có :

$$\frac{c}{x} + \frac{b}{AN} = 3 \quad \Rightarrow \quad AN = \frac{bx}{3x - c}$$

Gọi diện tích tứ giác BMNC là S ta có :

$$S = S_{ABC} - S_{AMN} = \frac{1}{2}\, bc.\sin A - \frac{1}{2} AM.AN.\sin A$$

$$= \frac{1}{2}\sin A(\, bc - AM.\, AN) = \frac{1}{2}\sin A\, (bc - x.\, \frac{bx}{3x - c})$$

Vậy : $S = \frac{1}{2}\sin A(\, bc - \frac{bx^2}{3x - c})$

b) Tứ giác BMNC chỉ xác định được khi $M \in AB$, $N \in AC$ do đó : $\frac{c}{2} \le x \le c$. Vậy hàm số S xác định trên đoạn $\left[\frac{c}{2}\,; c\right]$

Xét $\quad y = \frac{x^2}{3x - c} \qquad$ với $\qquad x \in \left[\frac{c}{2}\,;\; c\right]$

Đặt $X = 3x - c$ thì $3\frac{c}{2} - c \le X \le 3c - c$ hay $X \in \left[\frac{c}{2}\,; 2c\right]$

Khi đó : $x = \frac{X + c}{3}$ và $y = \frac{1}{9}\,\frac{(X + c)^2}{X} = \frac{1}{9}\,(X + \frac{c^2}{X} + 2c)$

Gọi $f(X) = X + \frac{c^2}{X}$ với $X \in \left[\frac{c}{2}\,; 2c\right]$

Giả sử:

$\frac{c}{2} \le X_1 < X_2 \le 2c$: $f(X_1) - f(X_2) = X_1 - X_2 + c^2 \left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}\right)$

$= (X_1 - X_2)\left(1 - \frac{c^2}{X_1X_2}\right) = \frac{X_1 - X_2}{X_1X_2}(X_1X_2 - c^2)$

Do đó :

a) $X_1, X_2 \in \left[\frac{c}{2}; c\right]$ thì $f(X_1) - f(X_2) > 0$

(Vì $X_1 - X_2 < 0$, $X_1 X_2 - c^2 < 0$, $X_1 X_2 > 0$)

$\Rightarrow$ $f(X_1) > f(X_2)$ $\Rightarrow$ f giảm trên $\left[\frac{c}{2}; c\right]$

Khi đó S tăng trên $\left[\frac{c}{2}; \frac{2c}{3}\right]$

(Vì $\frac{c}{2} \le X = 3x - c \le c$ thì $\frac{c}{2} \le x \le \frac{2c}{3}$)

b) $X_1, X_2 \in [c\ ; 2c]$ thì $f(X_1) - f(X_2) < 0$

$\Rightarrow$ $f(X_1) < f(X_2)$ $\Rightarrow$ f tăng trên $[c\ ; 2c]$

Khi đó giảm trên $\left[\frac{2c}{3}; c\right]$

(Vì $c \le X = 3x - c \le 2c$ thì $\frac{2c}{3} \le x \le c$)

Tại $x = \frac{2c}{3}$ hàm S xác định nên từ trên suy ra S lấy giá trị lớn nhất tại $x = \frac{2c}{3}$; thay $x = \frac{2c}{3}$, ta có : $S_{max} = \frac{5}{18}bc\sin A$

c) Dựng tam giác cân AMN

– Giả sử dựng được ΔAMN thỏa mãn đề bài, theo chứng minh trên ta có : $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$ hay $\frac{c}{AM} + \frac{b}{AN} = 3$

Với $AM = AN$ ta tính được $AM = \dfrac{b+c}{3}$

– *Cách dựng* : Dựng trên AB đoạn $AM = \dfrac{b+c}{3}$ được điểm M. Nối MG cắt AC ở N ta được Δ AMN thỏa đề bài.

– *Chứng minh* : Từ $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 3$ và $AM = \dfrac{b+c}{3}$, tính được $AN = \dfrac{b+c}{3}$. Vậy Δ AMN cân và có MN qua G.

– *Biện luận* : Bài toán có nghiệm khi :

$$\frac{b+c}{3} \le c \quad \text{và} \quad \frac{b+c}{3} \le b$$

Suy ra : $b \le 2c$ và $c \le 2b$.

ĐỀ 28.

(Thi học sinh giỏi Quốc gia năm học 1994 – 1995, Bảng B)

1.

a) Tìm dư trong phép chia sau đây :

$(1995 + 1)(1995 + 2)\ldots(1995 + 3990) : 3^{1995}$

b) Tìm các giá trị n để $P = (n + 5)(n + 6)$ chia hết cho 6n.

2.

a) Phương trình bậc hai $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Chứng minh rằng : $x_1^2 + x_2^2 \ge 1$, biết rằng : $n \le m - 1$

b) Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2x+2y} + \sqrt{2x-3y}) = 3\sqrt{(2x+2y)(2x-3y)} \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

3.

Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh bằng 4 có cho trước 33 điểm, trong đó có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó ?

4.

Tam giác ABC có góc nhọn A và có độ dài các cạnh AC = b, AB = c. Một cát tuyến quay quanh trọng tâm G của tam giác ABC, cắt các cạnh AB, AC, lần lượt tại M và N.

a) *Chứng minh rằng* : $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}$ có giá trị không đổi.

b) Dựng tam giác cân AMN sao cho $M \in AB$, $N \in AC$, AM = AN và MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a) Đặt $A = (1995 + 1)(1995 + 2)...(1995 + 3990)$ ta có :

$$A = \frac{1.2.3...1995.(1995+1)...(1995+3990)}{1.2.3...1995} = \frac{(3.1995)!}{1995!}$$

$$= \frac{3.6.9...(3.1995).B}{1995!}$$

Trong đó $B = 1.2.4.5.7.8...(3.1995-1)$ gồm tích các thừa số trong $(3.1995)!$ nhưng không chia hết cho 3.

Từ đó : $A = \dfrac{3^{1995}.1995!.B}{1995!} = 3^{1995}.B$

$\Rightarrow$ $A \vdots 3^{1995}$. Vậy số dư trong phép chia đã cho bằng 0.

b) Ta xét trường hợp ($n > 0$, $n < 0$)

• ***Trường hợp n > 0 :***

Ta tìm n để $P = (n + 5)(n + 6) \vdots 6n$

Ta có : $P = (n + 5)(n + 6) = n^2 + 11n + 30$

$= 12n + (n^2 - n + 30)$

$P \vdots 6n \Leftrightarrow n^2 - n + 30 \vdots 6n$

Ta tìm n để sao cho $n^2 - n + 30 \vdots 6n$

$n / n^2 - n$ nên $n / 30$

$6 / 30$ nên $6 / n^2 - n = n(n - 1)$

$n(n - 1)$ là số chẵn vì là tích của hai số tự nhiên liên tiếp $n(n-1) \vdots 3 \Leftrightarrow n \vdots 3$ hoặc $n - 1 \vdots 3$.

Vậy $P \vdots 6n$ thì n là ước của 30 và là bội của 3 hoặc bội của 3 cộng thêm 1. Vậy n chỉ có thể là các số : 1, 2, 3, 6, 10, 15, 30. Thay các giá trị trên vào $P = (n + 5)(n + 6)$ và 6n chỉ có 1, 3, 10, 30 thỏa mãn điều kiện bài toán.

• ***Trường hợp n < 0 :***

Đặt $n' = -n$. Ta tìm n' sao cho :

$(-n' + 5)(-n' + 6) \vdots -6n'$ hay $(5 - n')(6 - n') \vdots 6n'$

Giải như trên ta được thêm các giá trị của n là :

$-2, -5, -6, -15$

Vậy có 8 giá trị của n thỏa điều kiện bài toán là : 1, 3, 10, 30, $-2, -5, -6, -15$.

BÀI 2 :

a) Ta chứng minh rằng với $n \le m - 1$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + mx + n = 0$ thì $x_1^2 + x_2^2 \ge 1$

Thật vậy, theo định lý Viète ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = n \end{cases}$

Từ đó : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2n$

Vì $n \le m - 1$ nên $m^2 - 2n \ge m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2$

hay $x_1^2 + x_2^2 \ge (m - 1)^2 + 1 \ge 1$ (vì $(m - 1)^2 \ge 0$)

b) Điều kiện để các biểu thức có nghĩa :

$2x + 2y \ge 0$ và $2x - 3y \ge 0$

Đặt $X = 2x + 2y$; $Y = 2x - 3y$ ta có :

$X + Y = 4x - y = 5$. Thay vào hệ đã cho ta được :

$$\begin{cases} 2(\sqrt{X} + \sqrt{Y}) = \sqrt{XY} & (1) \\ X + Y = 5 & (2) \end{cases}$$

Bình phương hai vế của (1) ta được :

$4(X + Y + 2\sqrt{XY}) = 9XY \quad (3)$

Thay $X + Y = 5$ vào (3) ta được : $4(5 + 2\sqrt{XY}) = 9XY$

Đặt $\sqrt{XY} = Z$ ta có : $9Z^2 - 8Z - 20 = 0$

$\Rightarrow \quad Z = 2$ (loại $Z < 0$)

Vậy $XY = 4$ và ta có hệ : $\begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = 4 \\ Y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

Giải ra ta được hai nghiệm : $(\frac{7}{5}; \frac{3}{5})$ và $(\frac{11}{10}; \frac{3}{5})$

Bài 3 và **4** : Xem hướng dẫn đề 27

ĐỀ 29.

(Thi học sinh giỏi Toán toàn Quốc gia năm 1996)

1.

a) Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

b) Với 100 số tự nhiên bất kỳ, hỏi có thể chọn ra được hay không 10 số để sao cho hiệu hai số tùy ý trong 10 số này chia hết cho 11 ?

2.

a) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 = b + 3992$ và x, y, z là nghiệm dương của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b \end{cases}$$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P sau đây không phụ thuộc vào x, y, z :

$$P = x\sqrt{\frac{(1996 + y^2)(1996 + z^2)}{1996 + x^2}} + y\sqrt{\frac{(1996 + z^2)(1996 + x^2)}{1996 + y^2}} + z\sqrt{\frac{(1996 + x^2)(1996 + y^2)}{1996 + z^2}}$$

b) Cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và khi thay đổi thứ tự vị trí của n số đó, ta được $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ (n >1). Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}$$

3.

Cho tam giác nhọn ABC và AD, BE, CF là các phân giác trong của nó. Gọi S_0 và S lần lượt là diện tích của các tam giác DEF và ABC.

a) Chứng minh rằng : $4S_0 \leq S$.

b) Với mọi điểm M nằm trong tam giác ABC (M không thuộc các cạnh của tam giác ABC), gọi a', b', c' lần lượt là độ dài của các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC và AB; tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn hệ thức : a' < b' < c'.

4.

a) Cho đường tròn (C) nằm trong góc $\widehat{xOy}$ (đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc $\widehat{xOy}$). Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc $\widehat{xOy}$ là nhỏ nhất.

b) Trong mặt phẳng tọa độ xOy (O là gốc tọa độ) người ta vẽ một đường tròn có tâm là điểm C(3,4) bán kính bằng 2 đơn vị.

Hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ điểm M trên đường tròn tâm C nói trên đến hai tọa độ Ox và Oy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1 :

a) Vì a, b có vai trò như nhau nên giả sử a > b

Giả sử $\dfrac{a.b}{a-b} = p$ (1) Với p là số nguyên tố

$\Rightarrow \quad ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p = 2, 3, 5$ hoặc 7 (1)

$\Leftrightarrow \quad ab = pa - pb \Leftrightarrow (a + p)(p - b) = p^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + p = p^2 \\ p - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p - 1 \end{cases}$$

- Với p = 2, ta có số $\overline{ab} = 21, 22$
- Với p = 3, ta có số $\overline{ab} = 62, 26$
- Với p = 5, p = 7 thì ta có 2 chữ số (loại)

b) Lấy 100 số đã cho chia cho 11 thì được các dư 0, 1,..., 10 Mà 100 = 11.9 + 1 nên theo nguyên tắc Dirichlet có ít nhất 10 số có cùng dư khi chia cho 11; 10 số này có hiệu hai số tùy ý chia hết cho 11.

BÀI 2 :

a) Ta có : $2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

$= a^2 - b = 3992$

$\Rightarrow \quad xy + yz + zx = 1996$

Khi đó : $1996 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$

$1996 + y^2 = xy + yz + zx + y^2 = (y + x)(y + z)$

$1996 + z^2 = xy + yz + zx + z^2 = (z + x)(z + y)$

$P = x(y + z) + y(x + z) + z(x + y) = 2(xy + yz + zx) = 3992$

không phụ thuộc vào x, y, z.

b) • *Cách 1 :*

Đặt $A = \frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + ... + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}$

$B = \frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n})^2}{n}$

$C = x_1 + x_2 + ... + x_n$

Với hai số dương a, b ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + b \geq 2a$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} \geq 2a - b$ (1)

Áp dụng (1) khi cho $a = x_1, x_2 ..., x_n$ và $b = x_{i_1}, x_{i_2}, ... x_{i_n}$

Ta có : $A \geq 2(x_1 + x_2 + ... + x_n) - (x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_n})$

$= x_1 + x_2 + ... + x_n = C$

(vì $x_1 + x_2 + ... x_n = x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_n}$)

Vậy : $A \geq C$ (2)

Ta lại có :

$nB = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... \sqrt{x_n})^2 = x_1 + x_2 + ... + x_n + 2\sqrt{x_1x_2}$

$+ 2\sqrt{x_1x_3} + ... + 2\sqrt{x_1x_n} + 2\sqrt{x_2x_3} + ... + \sqrt{x_{n-1}x_n}$

$\leq x_1 + x_2 + ... + x_n + (x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + ... + (x_1 + x_n) +$

$+ (x_2 + x_3 + ... + (x_{n-1} + x_n)$

$\leq n(x_1 + x_2 + ... + x_n) = nC$ (vì $2\sqrt{ab} \leq a + b$)

Vậy $B \leq C$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra : $A \geq B$ (đpcm).

• ***Cách 2 :***

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2n số $a_1, a_2 ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có :

$$(a_1 b_1 + a_2b_2 + ...+a_nb_n)^2 \le ((a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Ta có :

$$\left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}(1.\sqrt{x_1} + 1.\sqrt{x_2} + ... + 1.\sqrt{x_n})^2$$

$$\le \frac{1}{n}(1^2 + 1^2 + ... + 1^2)(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} + ... + \sqrt{x_n^2}$$

$$\le x_1 + x_2 + .. + x_n \qquad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki lần nữa ta được :

$$(x_1 + x_2 +...+x_n)^2 = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_{i_1}}}.\sqrt{x_{i_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_{i_2}}}.\sqrt{x_{i_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{x_{i_n}}}.\sqrt{x_{i_n}}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + ... + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}\right)(x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_n})$$

Mà $\quad x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_n} = x_1 + x_2 + ... + x_n > 0$

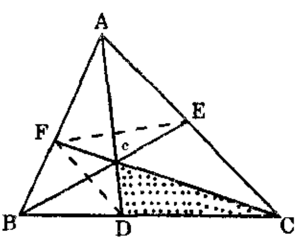
Nên $\quad x_1 + x_2 + ... + x_n \le \dfrac{x_1^2}{x_{i_1}} + \dfrac{x_2^2}{x_{i_2}} + ... + \dfrac{x_n^2}{x_{i_n}} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}\right)^2 \le \frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + ... + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}$$

Từ đó suy ra đpcm.

BÀI 3 :



Ký hiệu AB = c, BC = a, CA = b

$S_0 = S_{DEF}$, $S = S_{ABC}$

$S_1 = S_{AEF}$, $S_2 = S_{BFD}$, $S_3 = S_{CDE}$

Ta có : $\dfrac{S_0}{S} \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{S_1}{S} + \dfrac{S_2}{S} + \dfrac{S_3}{S} \ge \dfrac{3}{4}$

Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{b}{a+b} \text{ (tỉ lệ thức)}$$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{c}{a+c}$$

Suy ra : $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{AF}{AB}.\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$

Tương tự : $\dfrac{S_2}{S}=\dfrac{ac}{(b+a)(b+c)}$; $\dfrac{S_3}{S}=\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}$

Khi đó : $\dfrac{S_1}{S}+\dfrac{S_2}{S}+\dfrac{S_3}{S}\geq\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}\geq\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)$

$\geq \quad 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2b+4ab^2+4b^2c+4bc^2+4c^2a+4ca^2$

$\geq \quad 3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$

$\Leftrightarrow \quad a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geq 6abc$

$\Leftrightarrow \quad b(a^2-2ac+c^2)+a(b^2-2bc+c^2)+c(a^2-2ab+b^2)\geq 0$

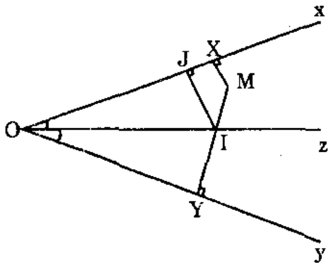
$\Leftrightarrow \quad b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2\geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có đpcm.

b) Trước hết ta chứng minh bổ đề :

Cho góc xOy nhọn và M là một điểm nằm trong góc xOy. Gọi x' và y' lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh Ox, Oy ; gọi Oz là phân giác của góc xOy. Chứng minh rằng x' < y' khi và chỉ khi M thuộc miền trong của góc $\widehat{xOz}$.

Chứng minh :



a) Giả sử M thuộc miền trong của góc $\widehat{xOz}$. Từ M kẻ MX $\perp$ Ox và MY $\perp$ Oy. MY cắt Oz tại I Vì M và Y nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là đường thẳng Oz. Từ I kẻ IJ $\perp$ Ox, ta có:

$$MX = x', \; MY = y' \text{ và } IJ = IY$$

Từ đó : $x' = MX < MJ < IJ + IM = IY + IM$

$= MY = y'$

Vậy : $x' < y'$

b) Ngược lại nếu có điểm N nào đó nằm trong góc $\widehat{xOy}$ mà $NX_1 < NY_1$ (*với* NX_1 và NY_1 *là khoảng cách từ* N *đến các cạnh* Ox và Oy) ta chứng minh N thuộc miền trong của góc $\widehat{xOz}$.

Thật vậy :

– Nếu $N \in Oz$ thì $NX_1 = NY_1$ (trái giả thiết)

– Nếu N thuộc miền trong của góc zOy thì theo chứng minh phần thuận có $NX_1 > NY_1$ (trái giả thiết)

Vậy N thuộc miền trong của góc $\widehat{xOy}$.

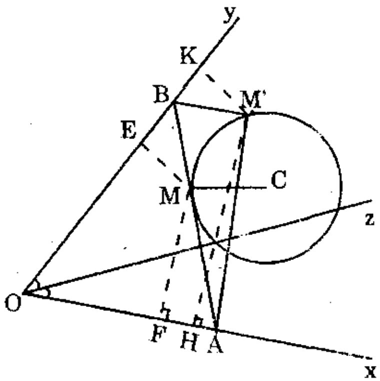
Áp dụng bổ đề chứng minh câu b.

Gọi O là giao điểm của ba đường phân giác trong AD, BE và CF. Theo giả thiết M nằm trong Δ ABC. Vì $a' < b'$ nên M phải nằm trong tam giác BCF.

Vì $b' < c'$ nên M phải nằm trong tam giác CAD.

Vậy M thỏa mãn điều kiện $a' < b' < c' \Leftrightarrow$ M nằm trong Δ COD *không kể các cạnh của nó.*

BÀI 4 :



a) • *Phân tích :*

Từ điểm M' bất kỳ trên đường tròn (C). kẻ $M'H \perp Ox$ và $M'K \perp Oy$. Dựng tiếp tuyến với đường tròn (C) tại M sao cho tiếp tuyến này cắt Ox ở A, cắt Oy ở B với OA = OB và các điểm O và C nằm về hai phía của tiếp tuyến này.

Ta có :

$$S_{OAM'B} = S_{OAM'} + S_{M'BO}$$

$$= \frac{1}{2}M'H.\,OA + \frac{1}{2}M'K.\,OB$$

$$= \frac{1}{2}OA(M'H + M'K)$$

$$\Rightarrow M'H + M'K = \frac{2S_{OAM'B}}{OA}$$

Vì góc $\widehat{xOy}$ cho trước và đường tròn (C) cố định nên tiếp tuyến AB xác định và OA = OB không đổi. Do đó M'H + M'K nhỏ nhất khi $S_{OAM'B}$ nhỏ nhất, muốn vậy diện tích Δ M'AB phải nhỏ nhất (vì Δ OAB cố định)

Muốn vậy $M' \equiv M$ (lúc này đường cao hạ từ M' xuống AB bằng 0).

Vì M là tiếp điểm nên $CM \perp AB$ (1)

Mặt khác Δ OAB cân (OA = OB) nên phân giác Oz của góc $\widehat{xOy}$ phải vuông góc với AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra CM // Oz.

• *Cách dựng* :

– Dựng phân giác Oz của góc $\widehat{xOy}$

– Từ C kẻ đường thẳng song song với Oz cắt (C) tại hai điểm. Điểm M, mà tiếp tuyến tại đó chia mặt phẳng đối nhau có bờ là tiếp tuyến tại M, là điểm cần tìm.

• *Chứng minh* :

Qua M dựng tiếp tuyến AB

Vì CM ⊥ AB và CM // Oz và Oz ⊥ AB. Oz vừa là đường cao vừa là phân giác của góc AOB nên Δ OAB cân (OA = OB). Lấy M' bất kỳ trên (C) ta có :

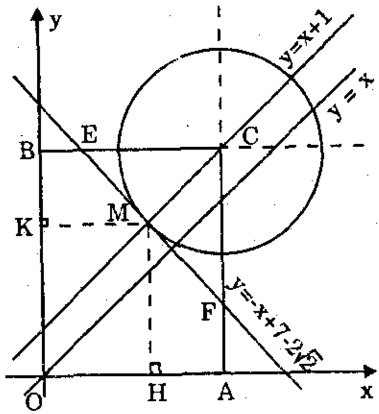
$(M'H + M'K).\ OA = 2S_{M'AOB} \geq 2S_{AOB} = (ME + MF)OA$

$\Rightarrow M'H + M'K \geq ME + MF$. Vậy ME + MF nhỏ nhất.

• *Biện luận* : Dù góc $\widehat{xOy}$ nhọn, vuông hay tù thì giao điểm M nói ở trên luôn xác định. Bài toán luôn có nghiệm hình. Khi C vừa trên Oz thì một trong hai điểm của Oz với đường tròn (C) là điểm phải tìm.

2) Áp dụng kết quả câu (a) điểm M có tổng khoảng cách nhỏ nhất đến hai trục tọa độ Ox, Oy chính là giao điểm của đường thẳng Ct với đường tròn (trong đó Ct // Oz, Oz là phân giác của góc xOy).

Đường thẳng Oz có phương trình y = x. Gọi phương trình của đường CM là y = ax + b. Vì CM // Oz nên a = 1. Thay tọa độ của C vào phương trình ta tìm được b = 1. Vậy phương trình đường thẳng CM là y = x + 1.



Sau đây ta tìm phương trình đường thẳng EF tiếp tuyến qua M (E là giao điểm của tiếp tuyến với đường CB, F là giao điểm của tiếp tuyến với đường CA).

Tam giác CEF cân (CE = CF) vì CM vừa là đường cao vừa là đường phân giác của góc $\widehat{ECF}$.

Ta có :

$$CM^2 = ME.\ MF = ME^2 = MF^2$$

Vì $\quad CM = 2$ nên $ME = MF = 2$

Suy ra : $EF = 4$, do đó : $CE = CF = \dfrac{EF}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Từ đó : $BE = BC - CE = 3 - 2\sqrt{2}$

$\qquad AF = AC - CF = 4 - 2\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng qua $E(3 - 2\sqrt{2}\ ,\ 4)$ và $F(3\ ;\ 4 - 2\sqrt{2})$ là : $y = -x + 7 - 2\sqrt{2}$.

Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 7 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} \\ y = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Gọi S là tổng khoảng cách từ M đến Ox và Oy.

Ta có : $S = 7 - 2\sqrt{2}$.

ĐỀ 30.

1.

Cho phương trình : $x^2 - 2mx + 3m^2 + 4m - 2 = 0$

a) *Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 với mọi m.

b) Tìm m để cho $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2.

Cho 3 số x, y, z.

a) Chứng minh bất đẳng thức :

$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

b) Chứng minh rằng trong ba số :

$(x - y)^2$, $(y - z)^2$, $(z - x)^2$ ít nhất có một số không lớn hơn $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$.

3.

Tính phần nguyên của α, [α] với :

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$$

4.

BC là dây cung của đường tròn tâm O bán kính R (BC ≠ 2R). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong Δ ABC. Các đường cao AD, BE, CF của Δ ABC đồng qui tại H.

a) Chứng minh rằng : Δ AEF $\backsim$ Δ ABC

b) Gọi A' là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: AH = 2A'O.

c) Gọi A_1 là trung điểm của EF, chứng minh rằng : R. AA_1 = AA' . OA'.

d) Chứng minh rằng : R.(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$. Suy ra vị trí của A để chu vi Δ EFD đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN VÀ NHẬN XÉT CÁCH GIẢI

BÀI 1 :

a) $\Delta' = m^2 - (-3m^2 + 4m - 2) = 4m^2 - 4m + 2$

$= (2m - 1)^2 + 1 > 0, \forall m$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Ta có : $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

Áp dụng định lí Vièt ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 4m - 2 \end{cases}$

Do đó : $(x_1 - x_2)^2 = 4m^2 - 4(-3m^2 + 4m - 2) = 16m^2 - 16m + 8$

$= (4m - 2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2$

Vậy : $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất bằng 2 khi $m = \dfrac{1}{2}$

BÀI 2 :

a) Ta có : $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy ta có đpcm.

b) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số bằng nhau, chẳng hạn $x = y$ thì $0 = (x - y)^2 \le \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ bài toán được chứng minh.

• Nếu x, y, z đôi một khác nhau. Giả sử $x < y < z$. Gọi m ($m > 0$) là số nhỏ nhất trong các số : $|x - y|$, $|y - z|$, $|z - x|$

Ta có : $y - x \ge m$ và $z - y \ge m$ nên

$$z - x = (z - y) + (y - x) \ge 2m$$

Từ đó suy ra : $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - z)^2 \ge 6m^2$

Áp dụng câu (a) ta có :

$$6m^2 \le (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \quad m^2 \le \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Mà m^2 là số nhỏ nhất trong các số $(x - y)^2$, $(y - z)^2$, $(z - x)^2$. Vậy ba số trên phải có ít nhất một số không lớn hơn $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$.

BÀI 3 :

Ta có : $\sqrt[k]{\dfrac{k+1}{k}} > 1 \qquad (k = 1,2,3..,n)$

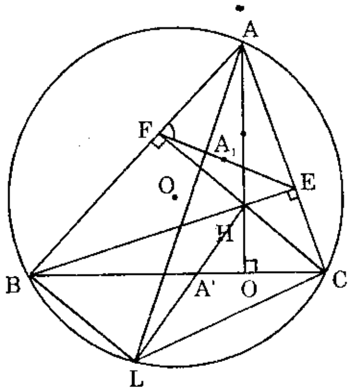
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho k + 1 số, ta có :

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} < \frac{\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ số } 1} + \dfrac{k+1}{k}}{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow \quad n < \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < n + (1 - \frac{1}{n+1}) < n + 1$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha] = n$$

BÀI 4 :



a) Tứ giác BFEC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$, góc A chung

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$

b) Kẻ đường kính AL, tứ giác HBLC là hình bình hành nên A' là trung điểm HL, do đó $A'O = \dfrac{1}{2}AH$

c) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AA'}{AA_1} = \dfrac{R_{ABC}}{R_{AEF}}$ (R_{ABC}, R_{AEF} lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC và ΔAEF)

Mà $R_{ABC} = R$ và $R_{AEF} = \dfrac{1}{2}AH = OA'$ nên :

$\dfrac{AA'}{AA_1} = \dfrac{R}{OA'} \quad \Rightarrow \quad AA'.\ OA' = R.\ AA_1$

d) $2S_{ABC} = 2S_{OBC} + 2S_{OAC} + 2S_{OAB}$

$$= OA'\ .\ BC + OB'\ .\ AC + OC'\ .\ AB$$

$$= R.\ \frac{EF}{BC}\ .\ BC + R\frac{FD}{AC}\ .\ AC + R\frac{ED}{AB}\ .\ AB$$

$$= R\ (EF + FD + ED)$$

Chu vi Δ EFD lớn nhất khi A là trung điểm cung lớn BC.

Mục lục