**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2016**

**Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh chuyên toán - tin)**

**Thời gian:** *150 phút*

**Câu I (3,5 điểm)**

1. Giải hệ phương trình 
2. Giải phương trình 

**Câu II (2,5 điểm)**

1. Với x; y là số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức . Chứng minh rằng chia hết cho 40.
2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x; y) thỏa mãn 

**Câu III (3 điểm)** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm (O). P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt đường thẳng AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt các đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực của DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1. Chứng minh ba điểm K, O, L thẳng hàng.
2. Chứng minh đường thẳng PO đi qua trung điểm EF.
3. Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S, các đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T, đường thẳng ST cắt các đường thẳng PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.

**Câu IV (1 điểm)**

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  luôn tồn tại một cách xếp bộ n số 1, 2, 3, … n thành sao cho với mọi bộ chỉ số  mà 

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2016**

**Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh chuyên toán - tin)**

**Câu 1**.

1. Giải hệ

Hệ đã cho tương đương với 

Đặt ta có 

Từ (2) ta có (vì a khác 0), thay vào (1) ta có 

Với a = 1 thì . Ta có hệ 

Thay từ pt trên xuống pt dưới ta có 

Với thì 

Với thì 

Thử lại thỏa mãn. Vậy hệ có cặp nghiệm là và 

1. Giải phương trình 

Ta có 

Vậy phương trình luôn có nghĩa với mọi x.

Phương trình đã cho tương đương với 

Đặt thay vào phương trình trên ta có



Vì  nên 

Vậy 

Từ đó 

Thử lại với x = 1 thảo mãn phương trình. Kết luận phương trình có nghiệm x = 1.

**Câu II**

1) Cách 1: Theo tính chất tỉ lệ thức ta có 

Từ 



Dễ thấy tử số chia hết cho 8 nên

chia hết cho 8 (2).

Ta có 1 số chính phương chia 5 dư 0,1 hoặc 4. Nếu:



chia hết cho 5 (3).

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: .

Với , và 

Ta có bảng xét số dư sau:

Mod 8:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x2 | 0 | 1 | 4 |
| 3x2 | 0 | 3 | 4 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| y2 | 0 | 1 | 4 |
| 2y2 | 0 | 2 | 0 |

(1)

Mod 5:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x2 | 0 | 1 | 4 |
| 3x2 | 0 | 3 | 2 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| y2 | 0 | 1 | 4 |
| 2y2 | 0 | 2 | 3 |

(2)

Từ (1) và (2) và 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên(đpcm).

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x; y) thỏa mãn 

Ta sử dụng tính chất. *Nếu tích hai số là số chính phương, mà hai số đó nguyên tố cùng nhau thì cả hai số đều là số chính phương*

Phương trình 

Đặt 

Vì d là số nguyên tố nên ta có hai trường hợp

Nếu thì chia hết cho 9

chia hết cho 3chia 3 dư 2 (vô lí vì số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

Vậy (3; d) = 1 mà nên 

Kết hợp với nên 

Vậy trong đó (a; b) = 1, 

Thế y từ pt trên xuống pt dưới ta có (1)

(2)

Từ (1) ta có 

Vậy từ (2) ta có

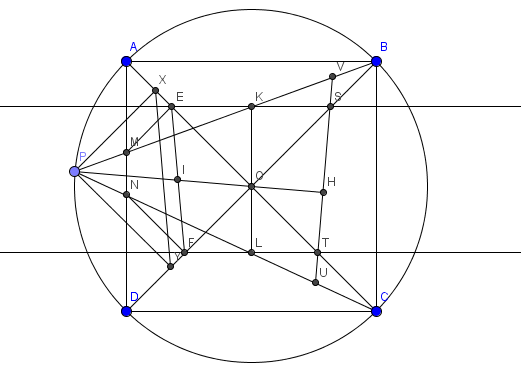
TH1. (loại)

TH2. 

. Thử lại thỏa mãn

Vậy hệ có cặp nghiệm (x; y) là (0; 0).

**Câu III. (3 điểm)**

****

1) Xét  vuông tại A. Trung trực song song và đi qua trung điểm nên là đường trung bình K là trung điểm BM.

có O là trung điểm BD, K là trung điểm BM .

Tương tự có .

Vậy theo tiên đề Ơ-clit ta có O, K, L thẳng hàng (đpcm).

2) Ta có E thuộc đường trung trực AM

cân tại E có 

vuông cân tại E.



Tương tự cũng có 

Ta có: (định lý Ta-lét).

Hạ PX vuông góc với AC, PY vuông góc với BD thì (cùng vuông góc với AC) và (cùng vuông góc với BD)

và 

(định lý Ta-lét đảo).

Ta có nên PXOY là hình chữ nhậtPO đi qua trung điểm XY

Mà nên PO đi qua trung điểm EF (đpcm).

3) Ta có (so le trong)

Mà nên OK là phân giác của 

cân, KS=KE KL là trung trực ES hay E đối xứng S qua KL.

Tương tự ta có F, T đối xứng qua KL.

.

Gọi giao điểm OP và EF là I thì I là trung điểm EF mà vuông tại O

IO = IE = IF.

cân  và 



Gọi OP giao ST tại H.

(đối đỉnh) 

Ta có (vì cùng vuông góc với AD), hay .

Lại có tại H 



hay Tứ giác KLUV nội tiếp (đpcm).

**Câu IV. (1 điểm)**

*Nguyên lý quy nạp Cauchy: Để chứng minh mệnh đề chứa biến P(n) đúng với mọi n lớn hơn hoặc bằng k ta tiến hành 3 bước:*

*Bước 1: Chứng minh P(k) đúng.*

*Bước 2: Chứng minh P(n) đúng suy ra P(2n) đúng với mọi n lớn hơn hoặc bằng k.*

*Bước 3: Chứng minh P(n) đúng suy ra P(n-1) đúng với mọi n lớn hơn k.*

n = 3 ta có cách sắp xếp 1,3,2.

Ta chứng minh rằng nếu bài toán đúng với n sẽ đúng với 2n. Thật vậy, giả sử ta có cách sắp xếp với n thì cách sắp xếp đó có dạngthỏa mãn ta có .

Xét dãy sau: .

Dễ thấy dãy gồm tất cả các số từ 1 đến 2n. Xét a < b bất kỳ cùng thuộc dãy:

Nếu a, b khác tính chẵn lẻ thì không thuộc dãy.

Nếu a, b cùng tính chẵn lẻ thì  thuộc dãy.

Xét a, b cùng chẵn. (TH a, b cùng lẻ tương tự).

TH1: lẻ thì không thể nằm giữa a, b do cách xây dựng dãy.

TH2: chẵn. Giả sử rằng nằm giữa a, b trong dãy khi đó a = 2xi, b = 2xk,với i<j<k với i<j<kDãy ban đầu là cách xếp không thỏa mãn đề bài (mâu thuẫn).

Vậy điều giả sử là sai nên không thể nằm giữa a, b trong dãy.

Vậy với mọi trường hợp, trung bình cộng của a, b không thể nằm giữa a, b suy ra đã xây dựng được cách xếp thỏa mãn cho trường hợp 2n. Như vậy ta đã chứng minh được rằng nếu bài toán đúng với n thì đúng với 2n. Mặt khác nếu bài toán đã đúng với k thì sẽ đúng với k-1.

Theo nguyên lý quy nạp Cauchy, ta có đpcm.