Grafuri orientate

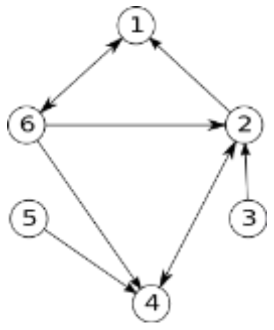
https://www.pbinfo.ro/articole/509/grafuri-orientate

Definiții

Definiție. Se numeşte **graf orientat** sau **digraf** o pereche ordonată de mulțimi notată G=(V, U), unde:

- V este o mulțime finită şi nevidă ale cărei elemente se numesc **noduri** sau **vârfuri**;
- U este o mulțime de perechi **ordonate** de elemente distincte din V ale cărei elemente se numesc **arce**.

Exemplul 1

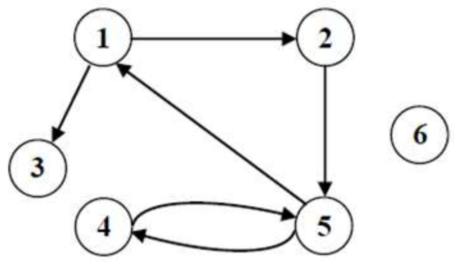


V={1,2,3,4,5,6}
U={(1,6),(2,1),(2,4),(3,2),(4,2),(5,4),(6,1),(6,4)}

Observăm că arcele (1,6) şi (6,1) sunt distincte.

Exemplul 2

Graf orientat $G = (V, E)$.
$V = \{1,2,3,4,5,6\}$.
$E = \{(1,2), (1,3), (2,5), (4,5), (5,1)(5,4)\}$



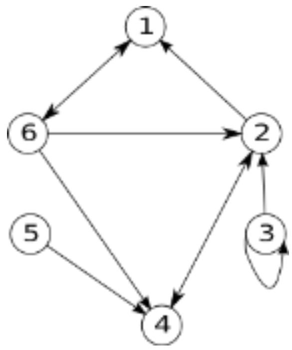
Noțiuni

- **extremități ale unui arc:** pentru arcul u=(x,y), se numesc **extremități** ale sale nodurile x şi y;
  - x se numeşte extremitate inițială;
  - y se numeşte extremitate finală;
  - y se numeşte **succesor** al lui x;
  - x se numeşte **predecesor** al lui y.

- **vârfuri adiacente:** dacă într-un graf există arcul u=(x,y) (sau u=(y,x), sau amândouă), se spune despre nodurile x şi y că sunt adiacente;
- **incidență:**
  - dacă u1 şi u2 sunt două arce ale aceluiaşi graf, se numesc incidente dacă au o extremitate comună. Exemplu: u1=(x,y) şi u2=(y,z) sunt incidente;
  - dacă u1=(x,y) este un arc într-un graf, se spune despre el şi nodul x, sau nodul y, că sunt incidente.

Propoziție. Sunt $4^{n(n-1)/2}$ grafuri orientate distincte cu n vârfuri.

Definiții alternative

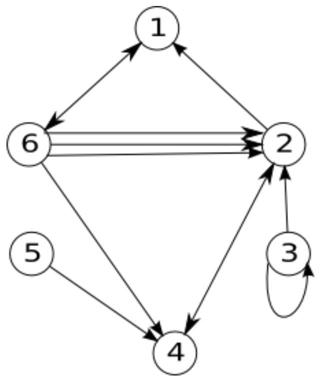


Definiție. Se numeşte **graf orientat** o pereche ordonată de mulțimi notată G=(V, U), unde:

- V este o mulțime, finită şi nevidă, ale cărei elemente se numesc **noduri** sau **vârfuri**;
- U este o mulțime, de perechi ordonate de elemente din V, ale cărei elemente se numesc **arce**.

Această definiție diferă de prima definiție prin faptul ca acum nu se mai spune despre extremitățile unui arc ca trebuie să fie distincte. În baza acestei definiții, sunt permise şi arce de genul: u=(x,x) unde x∈V; aceste arce se numesc **bucle**.

Definiție. Se numeşte **graf orientat** o pereche ordonată de mulțimi notată G=(V, U), unde:



- V este o mulțime, finită şi nevidă, ale cărei elemente se numesc **noduri** sau **vârfuri**;
- U este o multime de perechi ordonate de elemente din V, numită multimea **arcelor**.

Această definiție diferă de cea anterioară prin faptul ca acum nu numai că se admit bucle, dar se admit şi mai multe arce identice.

Observăm că există trei arce (6,2).

Observație. Dacă într-un graf orientat numărul arcelor identice nu depăşeşte numărul p, atunci se numeşte **p-graf**. Graful de mai sus este un **3-graf**.

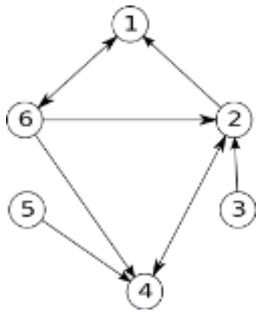
Grade

Definiție. Fie G=(V, U) un graf orientat şi x un nod al său.

- Se numeşte **grad exterior** al nodului x, numărul arcelor de forma (x,y) (adică numărul arcelor care ies din varful x), notat $d^+(x)$.
- Se numeşte **grad interior** al nodului x, numărul arcelor de forma (y,x) (adică numărul arcelor care intră în varful x), notat $d^-(x)$.

Exemplu:

Pentru graful alăturat:



- $d^+(2)=2$
- $d^-(2)=3$

Teoremă: Într-un graf orientat, suma gradelor exterioare a tuturor nodurilor este egală cu suma gradelor interioare a tuturor nodurilor şi cu numărul de arce.

$$\sum d^+(i)=\sum d^-(i)=m$$

Un nod x se numeşte **izolat** dacă $d^+(x)=d^-(x)=0$ (are gradul interior şi gradul exterior egal cu 0).

Reprezentarea grafurilor orientate

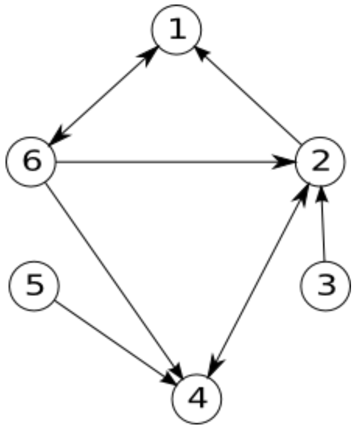
Matricea de adiacență

Fie G=(V,U) un graf orientat cu n noduri, în care nu există mai multe arce de la un nod la altul. Matricea de adiacență a grafului este o matrice cu n linii și n coloane și elemente 0 sau 1, astfel:

- $A_{i,j}=1$ dacă există arcul (i,j)
- $A_{i,j}=0$ dacă nu există arcul (i,j)

Pentru graful alăturat, matricea de adiacență este:

```
0 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0
0 1 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0
1 1 0 1 0 0
```



Observăm că matricea de adiacență:

- are zero pe diagonală (dacă în graf nu avem bucle)
- nu este simetrică față de diagonala principală
- $d^{+}(i)$ = suma elementelor de pe linia i
- $d^{-}(i)$ = suma elementelor de pe coloana i

Pentru reprezentarea în memorie vom folosi un tablou bidimensional ale cărui dimensiuni sunt în concordanță cu numărul de noduri din graf.

Considerăm un graf cu maxim 50 de noduri. În C/C++ vom avea declarația:

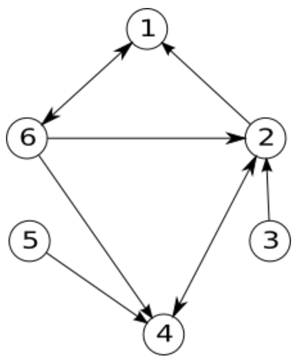
```
int A[51][51];
```

Lista de arce

Lista de arce a unui graf orientat reprezintă o mulțime (familie, dacă arcele se pot repeta) ce conține toate arcele din graf.

Pentru graful alăturat, lista de arce este:

U={(1,6),(2,1),(2,4),(3,2),(4,2),(5,4),(6,1),(6,4)}



Pentru reprezentarea în memorie putem folosi:

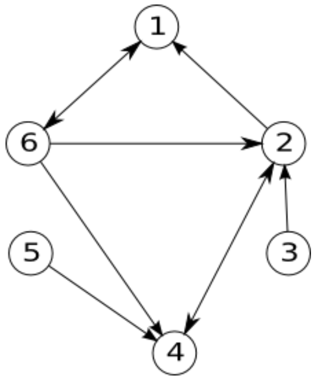
- un tablou unidimensional cu elemente de tip struct {int i,j;}
- două tablouri unidimensionale cu elemente de tip int
- o listă alocată dinamic
- etc.

Listele de adiacență

Pentru un graf orientat cu G=(V,U) se va memora numărul de noduri n și apoi, pentru fiecare nod x, lista succesorilor lui x, adică nodurilor y cu proprietatea că există arcul (x,y).

Pentru graful alăturat, listele de adiacență sunt:

```
1: 6
2: 1, 4
3: 2
4: 2
5: 4
6: 1, 2, 4
```



La reprezentarea în memorie trebui avut în vedere că dimensiunile listelor de succesori sunt variabile. De aceea, este ineficientă utilizarea unor tablouri alocate static. Astfel, putem folosi:

- un șir de n liste liniare simplu (dublu) înlănțuite alocate dinamic;
- un șir de n vectori din STL;

- Matricea drumurilor

Fie G=(V,U) un graf orientat cu n noduri. Algoritmul **Roy-Warshal**l construiește matricea drumurilor: D cu n linii și n coloane, în care:
Di,j = 1, dacă există drum de la i la j
0, dacă nu există drum de la i la j

Pentru a construi această matrice, se pornește de la matricea de adiacență și i se aplică o serie de transformări, pornind de la următoarea idee: dacă nu există drum de la i la j, dar există drum de la i la k și drum de la k la j, atunci va exista și drum de la i la j, prin reuniunea celor două drumuri existente.
Mai exact:

- inițial avem numai drumurile care nu au noduri intermediare (arcele)
- determinăm toate drumurile care îl au eventual ca nod intermediar pe 1
- determinăm toate drumurile care au noduri intermediare numai din mulțimea {1,2}
- determinăm toate drumurile care au noduri intermediare numai din mulțimea {1,2,3}
  …
- pentru un k oarecare, determinăm toate drumurile care au noduri intermediare numai din mulțimea {1,2,…,k}. **Pentru aceasta, vom căuta toate perechile de noduri i,j astfel încât Di,k=1 și Dk,j=1, de unde va rezulta că și Di,j=1.**

Obs. Di,i=1, dacă există un circuit care conține nodul i.

```
// transformarea matricei de adiacență în matricea drumurilor
for(int k = 1 ; k <= n ; ++k)
    for(int i = 1 ; i <= n ; ++i)
        for(int j = 1 ; j <= n ; ++j)
            if(a[i][j] == 0)
                a[i][j] = a[i][k] * a[k][j];
```

Tema: 580 (Roy-Warshall), 587 (Mall)

Graf parțial, subgraf

Definiție. Fie G=(V, U) un graf orientat. Se numește **graf parțial** al grafului G, graful orientat G1=(V, U1), unde U1 ⊆ U.

Din definiție rezultă:

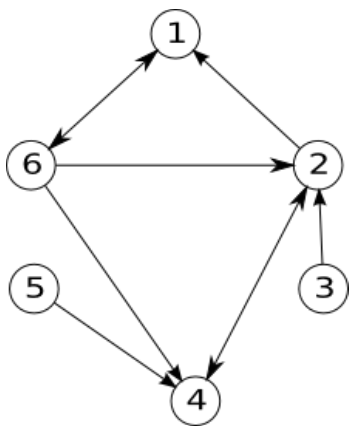
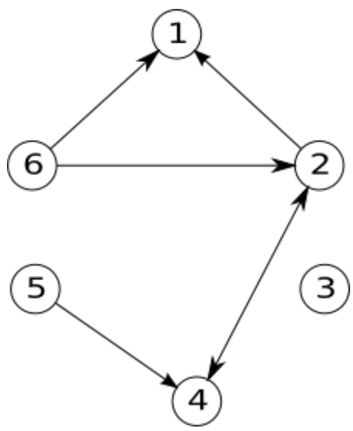
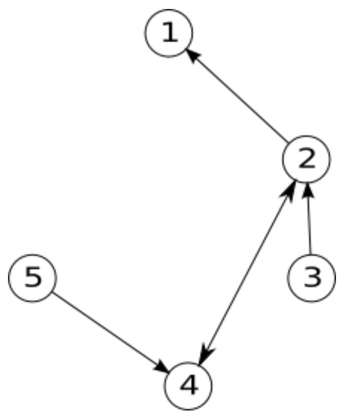
- Un graf parțial al unui graf orientat G=(V,U), are aceeaşi mulțime de vârfuri ca şi G, iar mulțimea arcelor este o submulțime a lui U sau chiar U.
- Fie G=(V, U) un graf orientat. Un graf parțial al grafului G, se obține păstrând vârfurile şi eliminând eventual nişte arce (se pot elimina şi toate arcele sau chiar nici unul).

Definiție. Fie G=(V,U) un graf orientat. Se numeşte **subgraf** al grafului G graful orientat G1=(V1,U1), unde V1 ⊆ V iar U1 conține toate arcele din U care au ambele extremități în V1.

Din definiție rezultă:

- Fie G=(V,U) un graf orientat. Un subgraf al grafului G se obține eliminând o parte din vârfuri şi arcele incidente cu acestea (nu se pot şterge toate vârfurile deoarece s-ar obține un graf cu mulțimea vârfurilor vidă).

Exemplu:

Graful inițial	Graf parțial	Subgraf
		
	S-au eliminat arcele (1,6), (3,2), (6,4)	S-a eliminat nodul 6 şi toate arcele incidente cu el.

Lanț. Drum

Definiție: Fie G=(V, U) un graf orientat. Se numește **lanț**, în graful G, o succesiune de arce, notată $L = (u_1, u_2, ..., u_k)$ cu proprietatea ca oricare două arce consecutive au o extremitate comună (nu are importanță orientarea arcelor)
sau
Se numește **lanț**, în graful G, o succesiune de noduri, notată $L = (x_1, x_2, ..., x_p)$ cu proprietatea ca oricare două noduri consecutive sunt adiacente.

Lungimea unui lanț este egală cu numărul de arce din care este alcătuit.

Primul nod și ultimul nod dintr-un lanț formează **extremitățile** lanțului.

Definiție. Fie $G=(V, U)$ un graf orientat. Se numește **drum** în graful G o succesiune de noduri, notată $D = (x_1, x_2, ..., x_k)$, cu proprietatea că pentru orice $1 \le i < k$, (x_i, x_{i+1}) este arc în G. **Deci, un drum este un lant in care toate arcele au aceeasi orientare.**

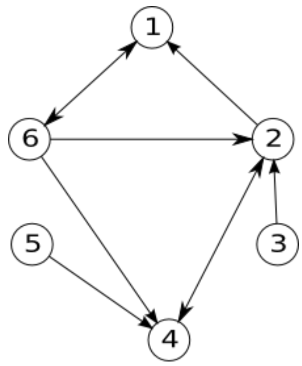
Lungimea unui drum este egală cu numărul de arce din care este alcătuit.

Pentru un drum $D = (x_1, x_2, ..., x_k)$, nodurile x_1 și x_k reprezintă **extremitățile – inițială,** respectiv **finală**.

Un lanț (drum) se numește **elementar** dacă toate nodurile sale sunt distincte două câte două.

Un lanț (drum) se numește **simplu** dacă în el nu se repetă arce.

Exemple În graful alăturat:



L=(5,4,2,6,1) este un lanț elementar, dar nu este drum.

D=(3,2,1,6,4) este drum elementar.

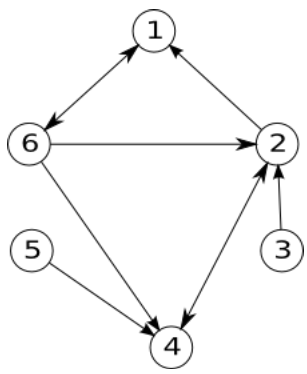
D=(3,2,1,6,2,4) este drum neelementar, dar simplu.

Circuit

Definiție: Se numește **circuit** un **drum simplu** (cu toate arcele distincte doua cate doua) în care extremitatatile coincid. Se numește **circuit elementar** un circuit în care toate nodurile sunt distincte două câte două cu excepția extremităților.

Lungimea unui circuit este reprezentată de numărul de arce din care acesta este alcătuit.

Exemple În graful alăturat:



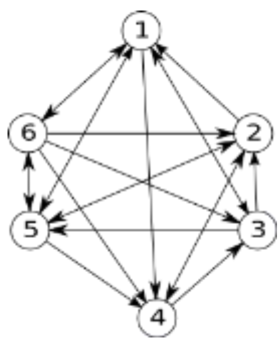
(1,6,2,1) și (1,6,4,2,1) sunt circuite elementare.

Graf complet. Graf turneu.

Definiție. Fie $G=(V, U)$ un graf orientat. Graful G se numește **graf complet** dacă oricare două vârfuri distincte ale sale sunt adiacente.

Două vârfuri x și y sunt adiacente dacă:

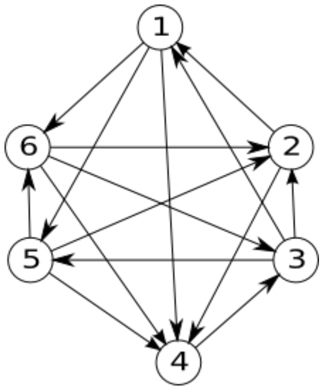
- între ele există arcul (x,y), sau
- între ele există arcul (y,x), sau
- între ele există arcele (x,y) și (y,x).



Teoremă: Numărul de grafuri orientate complete cu n noduri este $3^{n*(n-1)/2}$.

Definiție: Un graf orientat este **turneu**, dacă oricare ar fi două vârfuri i şi j, $i \neq j$, între ele există un singur arc: arcul (i,j) sau arcul (j,i).

Exemplu:



Proprietăți:

1. Orice graf turneu este graf complet.
2. Avem $2^{n*(n-1)/2}$ grafuri turneu cu n noduri.
3. În orice graf turneu există un drum elementar care trece prin toate vârfurile grafului.

Graf hamiltonian. Graf eulerian

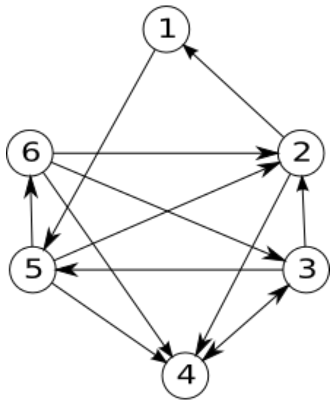
Fie un graf orientat $G=(V,U)$.

Un drum elementar care conține toate nodurile grafului se numește **drum hamiltonian**.

Un circuit elementar care conține toate nodurile grafului se numește **circuit hamiltonian**.

Un graf care conține un circuit hamiltonian se numește **graf hamiltonian**.

Exemplu: Graful orientat din figura este hamiltonian, deoarece conține circuitul hamiltonian $(2, 1, 5, 6, 4, 3, 2)$.



Fie un graf orientat $G=(V,U)$.

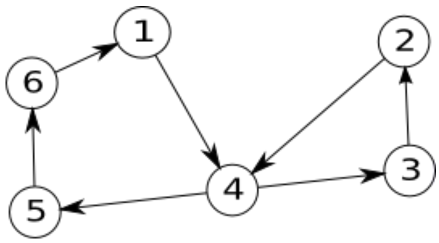
Un drum care conține toate arcele grafului se numește **drum eulerian**.

Un circuit care conține toate arcele grafului se numește **circuit eulerian**.

Un graf care conține un circuit eulerian se numește **graf eulerian**.

Teoremă: Un graf fără noduri izolate este eulerian dacă și numai dacă este conex și pentru fiecare nod, gradul interior este egal cu cel exterior.

Exemplu: Graful orientat din figura este eulerian.



Conexitate. Tare conexitate

Definiții: Fie G=(V,U) un graf orientat.

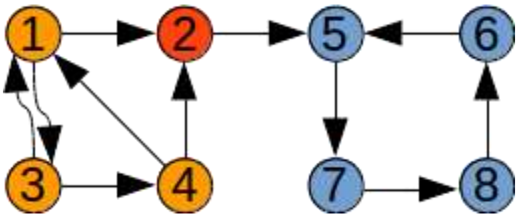
Graful se numește **conex** dacă între oricare două noduri distincte ale sale există cel puțin un **lanț**.

Se numește **componentă conexă** un subgraf conex și maximal cu această proprietate – dacă am mai adauga un nod, nu ar mai fi conex.

Graful se numește **tare conex** dacă între oricare două noduri distincte ale sale există cel puțin un **drum**.

Se numește **componentă tare conexă** un subgraf tare conex ala său, maximal cu această proprietate – dacă am mai adauga un nod, n-ar mai fi tare conex.

Exemplu



Graful de mai sus nu este tare conex. El are trei componente tare conexe.

Tema: Variante Bac neintensiv (II): 3, 4, 8, 9, 11, 20, 21, 24, 32, 37, 42, 44, 46, 48, 49, 53, 71, 79, 85, 95, 96, 99