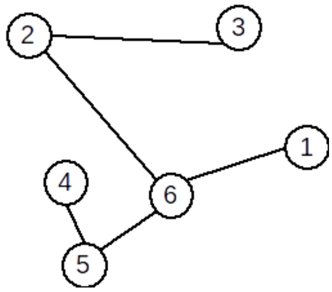
Arbori

Definiție: Se numește **arbore** un graf neorientat **conex** și **fără cicluri** (aciclic).

Exemplu: Graful următor este arbore.



Propoziție. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.

Teorema

Fie G=(X,U) un graf neorientat. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

1. **G este arbore.**
2. **G este graf conex cu n-1 muchii.**
3. **G este fara cicluri cu n-1 muchii.**
4. **G este graf conex, minimal cu această proprietate (dacă s-ar mai elimina o muchie, graful nu ar mai fi conex).**
5. **G este un graf aciclic, maximal cu această proprietate (dacă s-ar mai adăuga o muchie, s-ar obține un ciclu).**
6. **Între oricare două vârfuri ale unui arbore există un lanț elementar unic.**

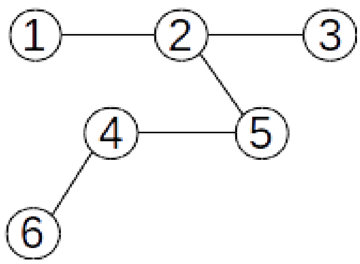
Un graf parțial care este arbore se numește **arbore parțial**.

Un graf care nu conține cicluri se mai numește **pădure**. Într-o pădure fiecare componentă conexă este arbore.

Arbori cu rădăcină (arborescențe)

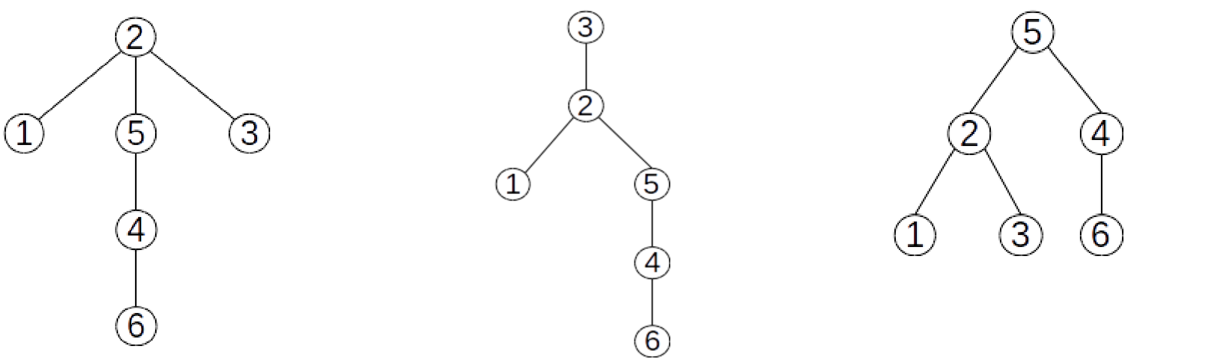
https://www.pbinfo.ro/articole/5982/arbori-cu-radacina (de facut exercitiile de la sfarsitul paginii!)

Pentru un arbore se poate stabili un nod special, numit **rădăcină**. Putem spune că "agățăm" arborele în rădăcină, iar restul nodurilor cad.



Un arbore devine arbore cu rădăcină, prin alegerea arbitrară a unui nod ca rădăcină. Un arbore cu rădăcină are nodurile structurate pe nivele, rădăcina aflâdu-se pe nivelul 0.

Mai jos avem trei arbori cu rădăcină. Toți pornesc de la arborele alăturat, dar diferă prin alegerea rădăcinii.

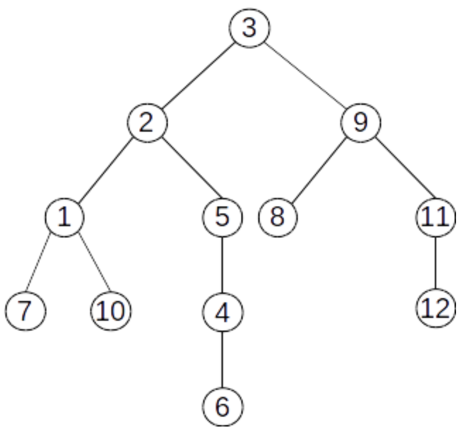


Terminologie

Fie un arbore cu rădăcina r și x un nod în acest arbore. Atunci:

- se numește **ascendent** al lui x orice nod y, diferite de x, aflat pe lanțul de la rădăcină la x;
    - rădăcina nu are ascendenți;
    - rădăcina este ascendent pentru toate nodurile din arbore;
- dacă y este ascendent al lui x și există muchia [y,x], atunci y se numește **ascendent direct** al lui x sau **tatăl** lui x;
    - rădăcina este singurul nod din arbore care nu are tată;
- un nod y este **descendent** al nodului x, diferit de y, dacă x aparține lanțului de la r la y;
    - dacă în plus există muchia [x,y], atunci y este **descendent direct** sau **fiu** al lui x;
    - un nod care nu are niciun descendent se numește **frunză**;
- două noduri care au același tată se numesc **frați**;
- lungimea unui lanț de la rădăcina arborelui la un nod x reprezintă **nivelul** sau **adâncimea** nodului x;
- lungimea maximă a unui lanț de la rădăcină la un nod al arborelui reprezintă **înălțimea** arborelui;
- un nod al arborelui împreună cu toți descendenții săi formează un **subarbore**;

Exemplu



T=(2, 3, 0, 5, 2, 4, 1, 9, 3, 1, 9, 11) – vectorul de tati

- rădăcina arborelui este nodul 3;
- ascendenții nodului 4 sunt 5, 2 și 3. Ascendentul direct (tatăl) al nodului 4 este nodul 5;
- descendenții nodului 2 sunt 1 7 10 5 4 6. Descendenții direcți ai nodului 2 sunt 1și 5;
- nodurile 1 și 5 sunt frați;
- nodurile 6 7 8 10 12 sunt frunze;
- descompunerea pe niveluri:
    - Nivelul 0 conține doar rădăcina: 3;
    - Nivelul 1 conține nodurile 2 9;
    - Nivelul 2 conține nodurile 1 5 8 11;
    - Nivelul 3 conține nodurile 7 10 4 12;
    - Nivelul 4 conține nodul 6;
- Înălțimea arborelui este 4;
- Nodurile 9 8 11 12 formează un subarbore;

Reprezentarea arborilor

Reprezentarea prin referințe ascendente

Pentru fiecare nod se memorează informații despre ascendenții direcți. Vom obține un **vector de tați**, în care:

- t[r] = 0, unde r este rădăcina arborelui
- t[k] = tatăl nodului k

Pentru arborele de mai sus avem:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t[k]	2	3	0	5	2	4	1	9	3	1	9	11

Observații

- În vectorul de tați există o singură valoare 0, corespunzătoare rădăcinii;
- Frunzele corespund valorilor care nu apar în vectorul de tați.
- Vectorul de tați ne permite să determinăm lanțuri în arbore, de la un nod oarecare spre rădăcină:
  - Pornim de la un nod dat x
  - Identificăm tatăl lui x, y = t[x];
  - Identificăm tatăl lui y, t[y]
  - ș.a.m.d.
  - Ajungem într-un nod z pentru care t[z]=0. acesta va fi rădăcina și ne oprim.

Reprezentarea prin referințe descendente

Pentru fiecare nod al arborelui se memorează informații despre descendenții săi direcți. Este similară cu reprezentarea prin liste de adiacențe a grafurilor. Pentru arborele de mai sus avem:

- F[1]={7,10}
- F[2]={1,5}
- F[3]={2,9}
- F[4]={6}
- F[5]={4}
- F[6]={}
- F[7]={}
- F[8]={}
- F[9]={8,11}
- F[10]={}
- F[11]={12}
- F[12]={}

Tema: Var_Bac_Neintensiv, II, itemii cu arbori – primele 30 variante