Grafuri neorientate

https://www.pbinfo.ro/articole/810/grafuri-neorientate

Grafurile au numeroase aplicații în diverse domenii: proiectarea circuitelor electrice, determinarea celui mai scurt drum dintre două localități, rețelele sociale (ex. Facebook) etc.

Pe harta oricărei ţări distingem oraşele şi şoselele care le leagă. Dacă şoselele au câte două benzi de circulaţie, adică pot fi străbătute în ambele sensuri acesta este un exemplu de graf neorientat.

Terminologie

Definiție: Se numește graf neorientat o pereche ordonată de mulțimi G=(X,U), unde:

- X este o mulțime finită și nevidă de elemente numite vârfuri sau noduri;
- U este o mulțime formată din perechi **neordonate** de elemente din X, numite **muchii**.

Vom nota în continuare vârfurile cu valori între 1 și n – unde n este numărul de vârfuri din graf, iar muchiile cu [x,y] , unde x și y sunt vârfuri și se numesc **extremitățile** muchiei.

Un **vecin** al unui vârf x este orice vârf y cu proprietatea că există muchia [x,y].

Două vârfuri între care există muchie se numesc **adiacente**.

Două muchii sunt **incidente** dacă au o o extremitate comună. Un vârf este **incident** cu o muchie dacă vârful este extremitate a acelei muchii.

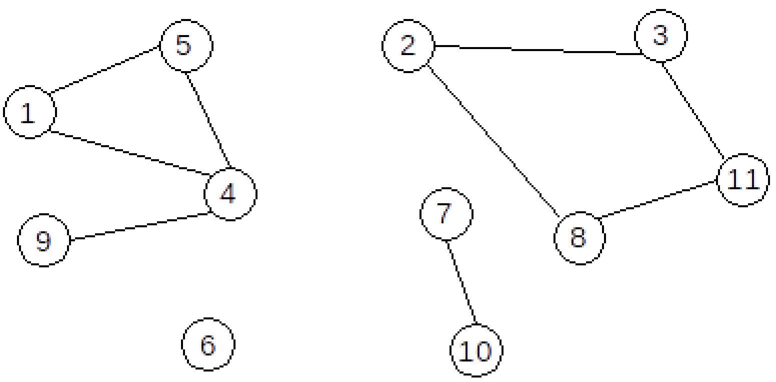
Mulțimea muchiilor are proprietatea de simetrie: dacă [x,y] este muchie, atunci și [y,x] este muchie, adică [x,y] = [y,x].

Conform definiției:

- într-un graf neorientat nu există muchie de la un vârf la el însuși;
- intre două vârfuri distincte există cel mult o muchie.

Exemplu: Fie G=(X,U), unde:

- X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}
- U={[1,4],[1,5],[2,3],[2,8],[3,11],[4,5],[4,9],[7,10],[8,11]}



Propoziție. Sunt $2^{n(n-1)/2}$ grafuri neorientate distincte cu n vârfuri.
(f:A->B -> $|B|^{|A|}$)

Gradul unui vârf

Definiție Într-un graf neorientat se numește **grad** al unui vârf numărul de vârfuri adiacente cu acesta (sau numărul de muchii incidente cu acesta). Gradul unui vărf x se notează d(x) (*degree*).

Exemplu: d(2)=2, d(4)=3, d(7)=d(9)=d(10)=1, d(6)=0

Observații:

- un vârf cu gradul 0 se numește **izolat**. În graful de mai sus, vârful 6 este izolat.
- un vârf cu gradul 1 se numește **terminal**. În graful de mai sus, vârful 9 este vârf terminal.
- gradul maxim al unui vârf într-un graf cu n vârfuri este n-1.

Propoziție. Un graf G=(X,U) cu n noduri și m muchii are suma gradelor egala cu dublul numărului de muchii.

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2m$$

Consecințe:

- Suma gradelor tuturor vârfurilor este număr par.
- Într-un graf neorientat, numărul de vârfuri de grad impar este întotdeauna par.

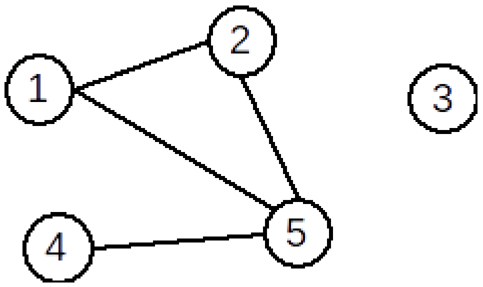
Întrebare: Este posibil ca într-un grup de 5 persoane, fiecare persoană să aibă exact 3 prieteni?

Reprezentarea grafurilor neorientate

Matricea de adiacență

Pentru un graf neorientat G=(X,U) cu n vârfuri, matricea de adiacență este o matrice cu n linii și n coloane și elemente din {0,1}, cu:
A[i][j]={1, dacă [i,j]∈U
0, dacă [i,j]∉U

Exemplu: Pentru graful neorientat de mai jos avem următoarea matrice de adiacență:

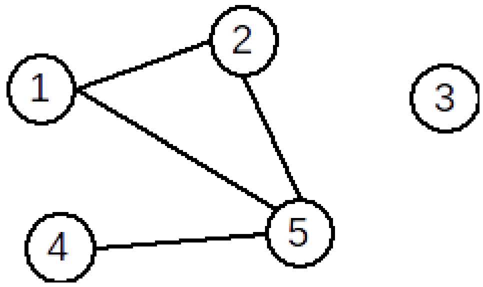


0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
1	1	0	1	0

Observații:

- matricea de adiacență este simetrică față de diagonala principală ⇔ a[i][j]=a[j][i] ;
- elementele de pe diagonala principală sunt 0;
- gradul unui vârf x este egal cu numărul de elemente 1 de pe linia (sau coloana) x;
- suma tuturor elementelor din matricea de adiacență a unui graf neorientat este egală cu dublul numărului de muchii din graf.

Lista de muchii



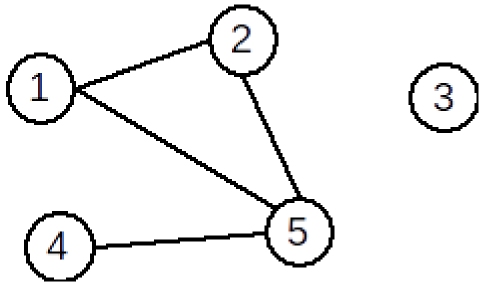
Lista de muchii a unui graf neorientat reprezintă o mulțime ce conține toate muchiile din graf.

Pentru graful alăturat, lista de muchii este: U={[1,2],[1,5],[2,5],[4,5]}

Pentru reprezentarea în memorie putem folosi:

- un tablou unidimensional cu elemente de tip `struct muchie {int x,y;}u[100];`
- două tablouri unidimensionale cu elemente de tip `int`
- o listă alocată dinamic

Liste de adiacențe (de vecini)



Pentru un graf neorientat cu G=(X,U) se va memora numărul de vârfuri n și apoi, pentru fiecare vârf x, lista vârfurilor adiacente cu x, adică a vârfurilor y cu proprietatea că există muchia [x,y].

Pentru graful alăturat, listele de adiacență sunt:

i	L_i
1	2, 5
2	1, 5
3	-
4	5
5	1, 2, 4

La reprezentarea în memorie trebui avut în vedere că dimensiunile listelor de vecini sunt variabile. De aceea, este neeficientă utilizarea unor tablouri alocate static. Astfel, putem folosi:

- un șir de n tablouri unidimensionale alocate dinamic;
- un șir de n vectori din STL;
- un șir de n liste simplu (dublu) înlănțuite alocate dinamic.

Graf parțial. Subgraf. Graf complementar

Definiție. Fie G=(X,U) un graf neorientat. Se numeşte **graf parțial** al grafului G, graful neorientat G1=(X,U1), unde U1 ⊆ U.

Propozitie. Numarul de grafuri partiale ale unui graf neorientat cu n varfuri si m muchii

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m$$

Din definiție rezultă:

- Un graf parțial al unui graf neorientat G=(V,U), are aceeaşi mulțime de vârfuri ca şi G, iar mulțimea muchiilor este o submulțime a lui U sau chiar U.
- **Fie G=(X,U) un graf neorientat. Un graf parțial al grafului G se obține păstrând toate vârfurile şi eliminând eventual o parte din muchii (se pot elimina şi toate muchiile sau chiar nici una).**

Definiție. Fie G=(X,U) un graf neorientat. Se numeşte **subgraf** al grafului G graful neorientat G1=(X1,U1) unde X1⊆X iar U1 conține toate muchiile din U care au ambele extremități în X1.

Din definiție rezultă:

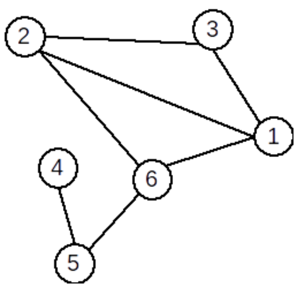
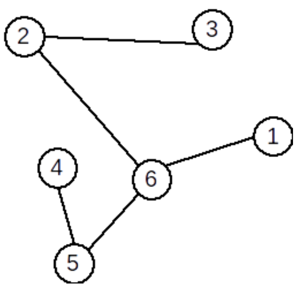
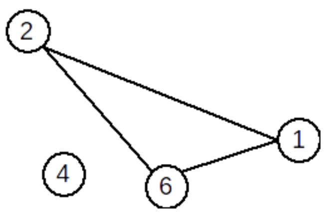
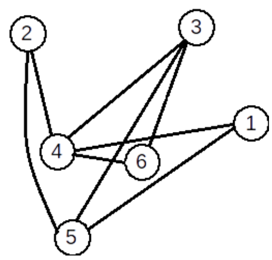
- **Fie G=(X,U) un graf neorientat. Un subgraf al grafului G, se obține eliminand o parte din vârfuri şi odată cu acestea şi muchiile incidente cu ele (nu se pot elimina toate vârfurile deoarece s-ar obține un graf cu mulțimea vârfurilor vidă).**

Propozitie. Numarul de subgrafuri ale unui graf neorientat cu n varfuri si m muchii

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} = 2^n - 1$$

Definiție. Fie G=(X,U) un graf neorientat. Se numeşte **graf complementar** al grafului G, graful neorientat G1=(X,U1), cu proprietatea că două vârfuri x şi y sunt adiacente în G1 dacă şi numai dacă nu sunt adiacente în G.

Exemplu:

Graful inițial	Graf parțial	Subgraf	Graf complementar
			
	S-au eliminat muchiile [1,2], [3,1]	S-a eliminat vârfurile 3 5 şi toate muchiile incidente cu ele.	O muchie [x,y] apare în graful complementar dacă și numai dacă nu apare în graful inițial.

Observații. Un graf neorientat oarecare poate avea mai multe grafuri parțiale și subgrafuri, dar un unic graf complementar. Mai precis:

Teoremă: Fie G un graf neorientat cu n vârfuri și m muchii. Atunci:

- graful G admite 2^m grafuri parțiale;
- graful G admite $2^n - 1$ subgrafuri;
- graful G admite un unic graf complementar.

Justificare:

Să ne amintim că o mulțime cu a elemente are 2^a submulțimi, inclusiv mulțimea vidă și mulțimea inițială. Atunci:

- orice submulțime a mulțimii muchiilor induce un graf parțial. Sunt m muchii, deci 2^m submulțimi, deci 2^m grafuri parțiale.
- orice submulțime a mulțimii vârfuri induce un subgraf, mai puțin mulțimea vidă – un graf nu poate avea 0 vârfuri. Similar ca mai sus, sunt $2^n - 1$ subgrafuri.
- graful complementar este unic determinat, deoarece complementara unei submulțimi față de o mulțime dată este unic determinată.

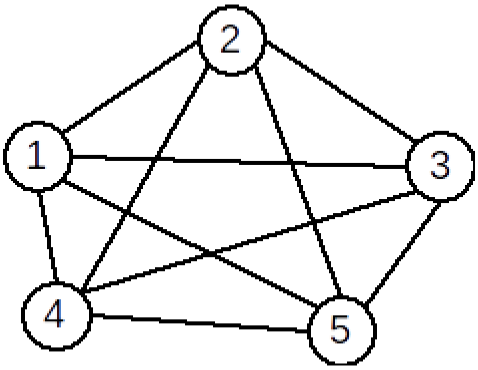
Graf nul. Graf complet. Graf regulat. Graf bipartit

Definiție: Un graf neorientat se numește **graf nul** dacă mulțimea muchiilor este vidă.

Într-un graf nul toate vârfurile sunt izolate.

Definiție. Fie G=(X,U) un graf neorientat. Graful G se numește **graf complet** dacă oricare două vârfuri distincte ale sale sunt adiacente. Un graf complet cu n vârfuri se notează K_n.

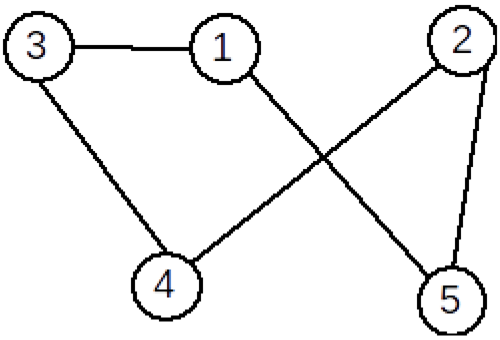
Exemplu: Graful următor este graful K_5.



Propoziție. Într-un graf complet cu n vârfuri sunt C_n^2=n∗(n−1)/2 muchii și fiecare vârf are gradul n-1.

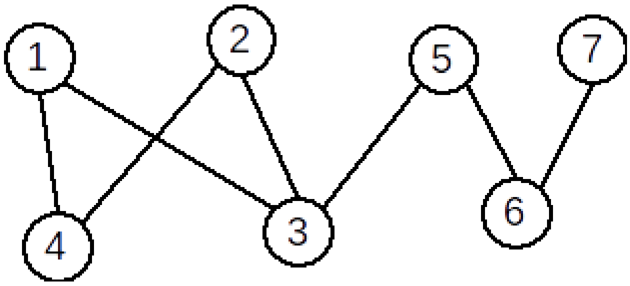
Definiție: Un graf în care toate nodurile au acelaşi grad se numește **graf regulat**.

Exemplu: Graful de mai jos este regulat.

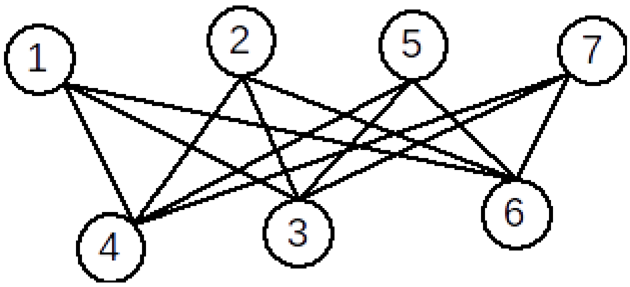


Definiție: Un graf G=(X,U) se numește **graf bipartit** dacă există două mulțimi nevide A și B astfel încât X=A ∪ B, A ∩ B = Ø și orice muchie u a lui G are o extremitate în A iar cealaltă în B. Mulţimile A şi B formează o partiţie a lui X.

Exemplu: Graful următor este bipartit. A={1,2,5,7} şi B={3,4,6}.



Definiție: Un graf bipartit $G=(X,U)$ se numește **bipartit complet** dacă pentru oricare două vârfuri $x \in A$ și $y \in B$, există în graf muchia $[x,y]$; adică $[x,y] \in U$.
Exemplu: Graful următor este bipartit complet.



Lanț, ciclu

Definiție: Se numește **lanț** o succesiune de vârfuri $L=[x1,x2,\cdots xk]$, cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente.
Vârfurile x_1 și x_k se numesc **extremitățile** lanțului. Numărul $k-1$ se numește **lungimea lanțului** și este numărul de muchii din care este format.
Lanțul care conține numai vârfuri distincte, două câte două, este lanț **elementar**. Altfel se numeste **neelementar.**

Lanțul care conține numai muchii distincte este **lanț simplu**. Dacă muchiile unui lanț nu sunt distincte se numește **lanț compus**.

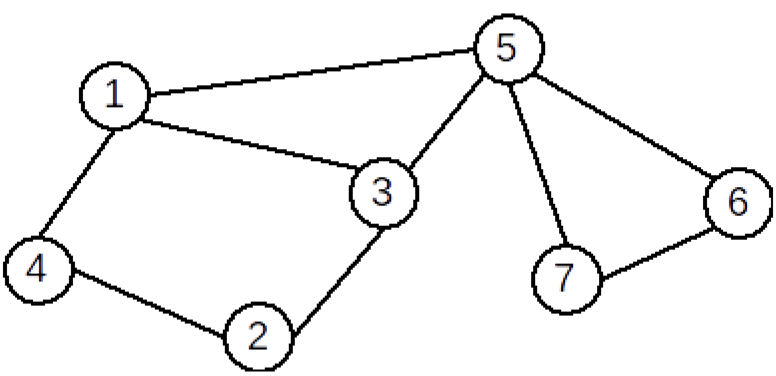
Definiție: Se numește **ciclu** un lanț în care extremitatile coincid si toate muchiile sunt distincte doua cate doua. Dacă toate vârfurile sunt distincte, mai puțin primul și ultimul, se numește **ciclu elementar**.

Lungimea unui ciclu este egală cu numărul de muchii din ciclu. Lungimea minimă a unui ciclu este 3.

Un ciclu se numește **par** dacă lungimea sa este pară, respectiv **impar** în caz contrar.

Un graf neorientat care nu conține niciun ciclu se numește **aciclic**.

Exemple: În graful de mai jos:



- [2,4,1,3,5,7] este un lanț elementar de lungime 5
- [3,5,7,6,5,1] este un lanț neelementar, dar simplu
- [2,3,5,7,6,5,3,1] este un lanț compus
- [1,5,3,2,4,1] este un ciclu elementar de lungime 5
- [1,3,**5**,7,6,**5**,1] este un ciclu neelementar de lungime 6

Tema:

412, 413, 414, 2707, 416, 430, 417, 474, 431 **- Pbinfo**

Var_Bac Neintensiv (II): V2-1, V5-1, V7-2, V9-2, V10-3, V12-1, V13-2, V14-1, V38-3