$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$

$(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$

$K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$

$1, 5, -\frac{3}{2}$

Spații vectoriale

Definiție: O mulțime nevidă V (mulțimea vectorilor), se numește spațiu vectorial peste corpul K (mulțimea scalarilor) dacă:

a) $(u,v) \to u+v \in V$ → suma el.

b) $(u,\alpha) \to \alpha u \in V$, $\forall u \in V$, $\forall \alpha \in K$ → înm. cu scalari

c) $(V,+)$ grup abelian (= comutativ)

$$\begin{cases} 1)\ u+v=v+u,\ \forall u,v\in V \text{ (comutativitate)} \\ 2)\ (u+v)+w = u+(v+w),\ \forall u,v,w \in V \text{ (asociativitate)} \\ 3)\ \exists\, 0 \in V \text{ a.î. } \forall u \in V\quad 0+u = u \text{ (el. neutru)} \\ 4)\ \forall u \in V,\ \exists\, v \in V \text{ a.î. } u+v=0 \text{ (el. simetric)} \end{cases}$$

d) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K$, $\forall u,v \in V$

$$5\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

e) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha,\beta \in K$, $\forall u \in V$

$$5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$$

f) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall \alpha,\beta \in K$, $\forall u \in V$

g) $1 \cdot u = u$, $\forall u \in V$

! Când $K=\mathbb{R}$ spunem V este spațiu vectorial real

$K = \mathbb{C} \to$ s.v complex

Exemple:

a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm mulțimea

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = \overline{1,n} \right\} \to \text{mulț. vect.}$$

Definim operațiile (în mod natural)

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \text{ și respectiv } \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ din $\mathbb{R}^n$ și orice scalar $\underline{\underline{\alpha \in \mathbb{R}}}$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e.n}$$

$$x \to -x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Mulțimea $\mathbb{R}^n$ împ. cu op definite are structură de s.V real $(K=\mathbb{R})$

b) Considerăm mulțimea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$$

Ar. că U împ. cu op. definite la a) are structură de s.V real

Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ și $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ oarecare

Ar că $x + y \in U$ și $\alpha x \in U$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u = x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 + 2u_2 - 3u_3 = (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) = \underbrace{(x_1 + 2x_2 - 3x_3)}_{0} + \underbrace{(y_1 + 2y_2 - 3y_3)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow u = x + y \in U$

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3 = \alpha(x_1 + 2x_2 - 3x_3) = 0 \quad \Rightarrow \alpha x \in U$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ U s.V real.

c) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, un interval deschis și $a, b : I \to \mathbb{R}$, două funcții continue

Considerăm mulțimea $V = \{ f \in C^2(I) \mid f''(t) + a(t) \cdot f'(t) + b(t) \cdot f(t) = 0, \forall t \in I \}$

$C^2(I) \to$ mult. fct. definite pe I, de două ori derivabile, cu derivata continuă

Fie $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oarecare

$\Downarrow$

$$f''(t) + a(t) \cdot f'(t) + b(t) \cdot f(t) = g''(t) + a(t) \cdot g'(t) + b(t) \cdot g(t) = 0$$

Suma funcțiilor f și g e funcția $h = f + g$, $\qquad (f+g)'' = f'' + g''$

$$h''(t) + a(t) \cdot h'(t) + b(t) \cdot h(t) = f''(t) + g''(t) + a(t)(f'(t) + g'(t)) + b(t)(f(t) + g(t))$$

$$= \underbrace{[f''(t) + a(t) \cdot f'(t) + b(t) \cdot f(t)]}_{0} + \underbrace{[g''(t) + a(t) \cdot g'(t) + b(t) \cdot g(t)]}_{0} = 0$$

$\Rightarrow h = f + g \in V$

$(\alpha f(t))'' + a(t)(\alpha f(t))' + b(t)\cdot \alpha f(t) = \alpha(\underbrace{f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)\cdot f(t)}_{0}) = 0$

$\Rightarrow \alpha f \in V$

El. neutru: $e: I \to \mathbb{R}$, $e(t) = 0$

El. sim. a lui $f(t)$ e fct. $v(t) = -f(t)$

V cu op def e s.v real

Sistem de generatori

Def: Fie V, un spațiu vectorial peste corpul K, $v_1, v_2, \dots, v_n$, vectori din V și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ scalari din K

Expresia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ reprezintă o combinație liniară a vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_n$ și este un vector din V

Exemple: a) Considerăm s.v real $\mathbb{R}^3$. Să arătăm că vectorul coloană $v = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e o combinație liniară a vectorilor $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ și $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ -3\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 17 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -4 \\ -3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2 \end{cases} \quad (+)$$

$3\alpha_2 = 15 \Rightarrow \alpha_2 = 5$ și $\alpha_1 = -4 + 2\alpha_2 = -4 + 10 = 6$

$\Rightarrow v = 6v_1 + 5v_2 \to$ comb. liniară

b) Considerăm spațiul $\mathbb{R}_2[X]$. Să arătăm că polinomul $p = -1 + 3x - x^2$ este o combinație liniară a polinoamelor $p_1 = 1 - x$, $p_2 = 1 + x$ și $p_3 = 1 + x + x^2$

$\to$ mult. polinoamelor cu coef. real de grad cel mult 2

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a.î. $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$

$-1 + 3x - x^2 = \alpha_1 - \alpha_1 x + \alpha_2 + \alpha_2 x + \alpha_3 + \alpha_3 x + \alpha_3 x^2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + (\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3)x + \alpha_3 x^2$

$ax^2 + bx + c = Ax^2 + Bx + C \iff \begin{cases} a = A \\ b = B \\ c = C \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-1 \\ \alpha_2-\alpha_1+\alpha_3=3 \\ \alpha_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_2-\alpha_1=4 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2=2,\ \alpha_1=-2$$

$$\Rightarrow p=-2p_1+2p_2-p_3$$

! $\mathbb{R}_2[X] \simeq \mathbb{R}^3$

$$v=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Def: Fie V un spațiu vectorial peste corpul K și $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectori din V. Spunem că mulțimea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este sistem de generatori pentru spațiul V dacă pentru orice $v \in V$, există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ a.î. $v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$

↳ orice vector $v \in V$ este o comb. lin. a vect $\{v_1, \ldots, v_n\}$

$$v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \ldots + 0\cdot v_n$$

$$v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + \ldots + 0\cdot v_n$$

Exemple:

a) $S_1=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ este S.G pt s.v real $\mathbb{R}^3$

Fie $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, un vector oarecare din $\mathbb{R}^3$

Ar că $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3$ a.î. $v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=a\\\alpha_2=b\\\alpha_3=c\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}7\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=7e_1+5e_2+2e_3$$

b) $S_4=\{p_1=1, p_2=x, p_3=x^2\}$ e S.G pt $\mathbb{R}_2[X]$

$p=ax^2+bx+c$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $p=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3$

$$ax^2+bx+c=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_3=a\\\alpha_2=b\\\alpha_1=c\end{cases}$$

Vectori liniar independenți:

Def: Fie V, un spațiu vectorial peste corpul K și $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.
Spunem că vectorii $v_1, \dots, v_n$ sunt liniar independenți dacă singura alegere a scalarilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ este $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Exemple:

a) Considerăm spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$. Ar. că vectorii $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sunt liniar indep.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{l.i}$$

b) Considerăm spațiul vectorial real $\mathbb{R}_2[X]$. Să arătăm că polinoamele $p_1 = 1 - x$, $p_2 = 1 + x + x^2$, $p_3 = 1 - x - x^2$ sunt liniar independente

$\mathbb{R}_2[X] \simeq \mathbb{R}^3$

$p_1 \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$p_2 \to v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$p_3 \to v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{C_2 + C_3}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{dezv } L_3}{=}$$

$$= 0 + 0 + (-1)^6 \cdot (-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{l.i}$$

Def: Fie V un spațiu vectorial peste corpul K și $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.
Spunem că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ sunt liniar dependenți dacă $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ nu toți nuli a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

! Obs: NU TOȚI NULI $\Rightarrow$ cel puțin unul e nenul

Fără a restrânge generalitatea pres $\alpha_1 \neq 0$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n \to v_1 \text{ comb liniară a vect } v_2, \dots, v_n$$

Exemplu

a) Cons. sp. real $\mathbb{R}^3$. Ar că vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ sunt liniar dep.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vdots$$

$$S = \{ (-2\alpha, -3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Propoziția 1: Fie V un spațiu vectorial finit generat peste corpul K și $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un sistem de generatori pentru V. Dacă vectorul v_k este combinație liniară a vectorilor $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_m$ atunci mulțimea $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ este de asemenea S.G pt V.

Dem:

Fie $v \in V$ oarecare

$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ este S.G pt V

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \underbrace{\ldots}_{\alpha_k v_k} + \alpha_m v_m$$

v_k C.L a vect $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_m$

$\Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$ a.î. $v_k = \beta_1 v_1 + \ldots \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots \beta_m v_m$

$\Rightarrow v = (\alpha_1 + \alpha_k \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_{k-1} + \alpha_k \beta_{k-1}) v_{k-1} + (\alpha_{k+1} + \alpha_k \beta_{k+1}) v_{k+1} + \ldots + (\alpha_m + \alpha_k \beta_m) v_m$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ e S.G pt V

Bază:

Definiție: Fie V, un spațiu vectorial finit generat peste corpul K și B o submulțime nevidă, a vectorilor din V. Spunem că B este bază dacă este în același timp S.G pt V și mulțime liniar independentă.

Exemplu: Considerăm s.v real $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \in \text{bază a s.v } \mathbb{R}^3$$

Teoremă: Fie V un s.v finit generat peste corpul K, $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ o bază a lui V și $v \in V$. Atunci $\exists!$ un n-uplu ordonat de scalari $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$v = 2\alpha_1 + 3\alpha_3 + 5\alpha_2 \overset{NU}{=} \alpha_1 + 7\alpha_3 + 2\alpha_2$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

- P.p. abs că $\exists\ \beta_1, \dots, \beta_n$ $\quad v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0 \\ v_1, \dots, v_n \in B \Rightarrow \text{liniar indep.}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_n\end{array}\right.$$

Dimensiune:

Def: Fie V un spațiu vectorial finit generat peste corpul K, diferit de spațiul nul. Numărul elementelor dintr-o bază a lui V reprezintă dimensiunea lui V.

Exemplu: a) S.p. real $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

b) $\mathbb{R}_n[X]$

o bază este $\{\overset{x^0}{\uparrow}{1}, x, x^2, \dots, x^n\}$

$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$