Vectori și valori proprii

Def Un scalar $\lambda \in \mathbb{C}$ s.n. valoare proprie pt. $A \in M_n(\mathbb{C})$ (= $\mathbb{C}^{n\times n}$) dacă $\exists\, x \neq 0,\ x \in \mathbb{C}^n$ ("coloană") a.î. $Ax = \lambda x$. În acest caz x se numește vector propriu asociat lui λ.
Mulțimea valorilor proprii ale lui A se numește spectrul lui A și se notează $\sigma(A)$ sau $spec(A)$.

T. Cayley Hamilton pt $\mathbb{C}^{2\times 2}$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^2 - Tr(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$$

Proof:

$$Tr(A) = a+d$$

$$\det(A) = ad-bc$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

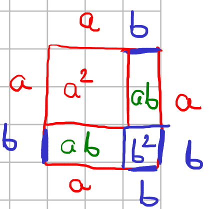
$$\begin{pmatrix} \cancel{a^2}+\cancel{bc} & \cancel{ab}+\cancel{bd} \\ \cancel{ac}+\cancel{dc} & \cancel{bc}+\cancel{d^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cancel{a^2}+\cancel{ad} & \cancel{ba}+\cancel{bd} \\ \cancel{ac}+\cancel{dc} & \cancel{ad}+\cancel{d^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{ad-bc} & 0 \\ 0 & \cancel{ad-bc} \end{pmatrix} = O_2$$

$$A^2 - Tr(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2 \quad |\, Tr(\ )$$

$$Tr(A^2) - Tr^2(A) + 2\det(A) = 0$$

$$\det(A) = \frac{1}{2}\left(Tr(A^2) - Tr^2(A)\right)$$

∇ $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$



la matrici: $(A+B)^2 = A^2+B^2+AB+BA$

$$Tr(A+yB) = Tr(A) + y\,Tr(B)$$

$Tr(A+B) = Tr(A)+Tr(B)$ aditivitate

$Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$, α scalar, omogenitate.

$$f_{A,B}(x) = \det(A+xB) = \frac{1}{2}\left(Tr\left((A+xB)^2\right) - Tr^2(A+xB)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Tr(A^2 + x^2B^2 + xAB + xBA) - \left(Tr^2(A) + x^2Tr^2(B) + 2\,Tr(A)\cdot Tr(xB)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Tr(A^2) + x^2Tr(B^2) + 2x\,Tr(AB) - Tr^2(A) - x^2Tr^2(B) - 2x\,Tr(A)\cdot Tr(B)\right)$$

$$= \det(A) + x^2\det(B) + x\left(Tr(AB) - Tr(A)\cdot Tr(B)\right)$$

Am obținut $\det(A+xB) = \det(A) + x\left(Tr(AB) - Tr(A)\cdot Tr(B)\right) + x^2\det(B)$

Luăm $B = -I_2$: $\det(A - xI_2) = \det(A) - x\left(-Tr(A) + 2Tr(A)\right) + x^2\cdot 1$

$$= x^2 - x\,Tr(A) + \det(A)$$

Polinomul $p_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - x\,Tr(A) + \det(A) \longrightarrow$ polinomul caracteristic asociat matricii A

Rădăcinile polinomului caracteristic se numesc valorile proprii asociate matricii A (eigen values)

Exemple:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Metoda 1: $Tr(A) = 1$
$\det(A) = 0$

$p_A(x) = x^2 - x = x(x-1)$

$p_A(x) = 0 \iff x(x-1) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$ $\quad$ $Spec(A) = \{0, 1\}$

Metoda 2:

$p_A(x) = \det(A - xI_2)$

$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = -x(1-x) = x(x-1)$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 2 & -5 & 4-x \end{vmatrix} \overset{\text{dez } L_2}{=} 0 + (-1)^{2+2} \cdot (-x) \cdot \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$

$= -x \cdot (-x)(4-x) + (-1)(5x - 2)$

$= -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

$p_A(x) = 0 \iff x^3 - \underline{4}x^2 + 5x - \underline{2} = 0$

$x = 1, \; p_A(1) = 0 \implies x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(\ldots)$

$$\Rightarrow p_A(x) = (x-1)(x^2 - \underset{\overset{\Downarrow}{a+b}}{3}x + \underset{\overset{\Downarrow}{a \cdot b}}{2}) = (x-1)(x-1)(x-2)$$

$$= (x-2)(x-1)^2$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-1} \quad -3x^2 + 5x - 2 & \\ \quad +3x^2 - 3x & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 2x - 2 & \end{array}$$

$$p_A(x) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = 2 \\ \searrow \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \end{array}$$

Vom spune că $\lambda = 2$ are multiplicitatea algebrica 1

$\lambda = 1$ are multiplicitatea algebrică 2

Cayley Hamilton pentru matrici $\mathbb{C}^{n \times n}$

Orice matrice pătratică își anulează propriul polinom caracteristic:

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad p_A(A) = O_n$

$$p_A(x) = x^n - E_1(A) \cdot x^{n-1} + E_2(A) \cdot x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} E_{n-1}(A) + (-1)^n E_n(A)$$

$$E_1(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = Tr(A)$$

$$E_2(A) = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \cdot \lambda_j$$

$$E_3(A) = \sum_{1 \le i < j < k \le n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \lambda_k$$

$$\vdots$$

$$E_n(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(A)$$

$\underset{0}{\nabla}$ dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A atunci

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nu neapărat distincte

Def: Prin $GL_n(\mathbb{K})$, definim toate matricele inversabile cu elemente din corpul $\mathbb{K}$. $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

grupul general liniar.

Def: Spunem că matricele A și B sunt asemenea dacă $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ a.î.

$$B = P^{-1} A P$$

Se notează $A \sim B$

Spunem că A e diagonalizabilă dacă e asemenea cu matrice diagonală, $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ a.î. $A = P^{-1} D P$ unde D matrice diagonală

adică $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \to$ matrice diagonală

și $p_A(x) = p_D(x) = (x-d_1)(x-d_2)\dots(x-d_n)$

Criteriu: A diagonalizabilă dacă: Pentru orice valoare proprie λ, multiplicitatea algebrică a lui λ ~~corespunde~~ corespunde cu multiplicitatea geometrică.

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ 1 & 4-x & 1 \\ 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} \overset{L_1+L_2+L_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 6-x & 6-x & 6-x \\ 1 & 4-x & 1 \\ 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3-C_1}{\overset{C_2-C_1}{=}} \begin{vmatrix} 6-x & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{L_1}{\overset{dezv}{=}} (-1)^2 \cdot (6-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 0 \\ 0 & 3-x \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= (3-x)^2 (6-x)$$

$$p_A(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

$\lambda = 3 \rightarrow$ multiplicitatea algebrică egală cu 2

$\lambda = 6 \rightarrow$ m.a egală cu 1

Mult. Geometrică: Algoritm

i) det. valorile proprii

ii) Pt. fiecare valoare proprie, determin subspațiul propriu corespunzător.

! int. geom $\leftarrow$ iii) mult. geom = dim(Subspațiu propriu)

Pt $\lambda = 3$ subspațiul propriu este

$$S_3 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = \lambda v \}$$

Fie $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x + y + z \\ x + 4y + z \\ x + y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{ x + y + z = 0 \quad \text{1 ec și 3 nec.}$$

Notăm $x = \alpha$, $y = \beta$

$\Rightarrow z = -\alpha - \beta$

$$\Rightarrow S_3 = \{ (x,y,z) \mid z = -x - y \} = \{ (\alpha, \beta, -\alpha-\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim(S_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{m. geom.}$$

$$m.a = m.g \quad (1)$$

Pt $\lambda = 6$ subspațiul propriu este:

$$S_6 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = \lambda v \}$$

$$\begin{pmatrix} 4x+y+z \\ 4y+x+z \\ 4z+x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -2y+x+z=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+z) \\ -2z+x+y=0 \end{cases}$$

$(1)+(2)\quad \cancel{-x-y+2z=0}$

$\Rightarrow -2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z+z=0$

$-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}z=0 \Rightarrow \boxed{x=z}$

$-2x+x+y=0 \Rightarrow \boxed{x=y}$

deci $\boxed{x=y=z}$

$S_6=\{(\alpha,\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(1,1,1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

$\dim(S_6)=1 \rightarrow$ m. geom $=$ m. algeb (2)

$\Rightarrow$ A este diagonalizabilă

P matricea de pasaj

$\exists\, P\in GL_n(\mathbb{C})$, a.î. $A=PDP^{-1}$

dacă iau $D=\begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 6 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

dacă iau $D=\begin{pmatrix} 6 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculează A^{5053}

$A^2=(PDP^{-1})^2 = PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$

$\Rightarrow A^{5053} = PD^{5053}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 6^{5053} & & \\ & 3^{5053} & \\ & & 3^{5053} \end{pmatrix}P^{-1}$