Produs scalar

Def: Fie V, un s.v peste corpul $\mathbb{K}$. Un produs scalar pe V este o funcție $<\cdot,\cdot>: V\times V \to \mathbb{K}$ cu prop:

(P_1) $<u,u> \geq 0, \forall u \in V$, cu egal. doar dacă $u=0$

$\boxed{(P_2)}$ $<u,v> = \overline{<v,u>}, \forall u,v \in V$

(P_3) $<\alpha u, v> = \alpha <u,v>, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u,v \in V$

(P_4) $<u, v+w> = <u,v> + <u,w>, \forall u,v,w \in V$

Exemple:

a) Considerăm spațiul vectorial real $\mathbb{R}^n$

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ și } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$<x,y> = x^T \cdot y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \to \text{produs scalar pe } \mathbb{R}^n$$

PRODUS SCALAR EUCLIDIAN

b) Considerăm spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$<x,y> = x_1 y_1 - 3x_2 y_1 - 3x_1 y_2 + 10 \cdot x_2 y_2$$

$$<x,x> = x_1^2 - 3x_2 x_1 - 3x_1 x_2 + 10x_2^2 = x_1^2 - 6x_1 x_2 + 10x_2^2 = (x_1 - 3x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

c) Considerăm spațiul vectorial complex $\mathbb{C}^n$

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ și } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} 3-2i & 5 \\ 6 & 2+3i \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3+2i & 6 \\ 5 & 2-3i \end{pmatrix}$$

$\to$ OPERATOR HERMITIAN $y^* = \overline{y}^T$ (transpusa conjugată)

$$<x,y> = y^* x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

format din toate fct reale și continue definite pe intervalul $[a,b] \subset \mathbb{R}$

d) Considerăm spațiul vectorial real $C([a,b])$

Atunci

$$<f,g> = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \quad , \forall f,g \in C([a,b])$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ g,f,h \in C([a,b])$

(P_1) $<f,f> = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$

(P_2) $<f,g> = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\cdot f(x)\,dx = <g,f> = \overline{<g,f>}$

(P_3) $<\alpha f,g> = \int_a^b \alpha f(x)\cdot g(x)\,dx = \alpha\cdot\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \alpha<f,g>$

(P_4) $<f,g+h> = \int_a^b f(x)(g(x)+h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx + \int_a^b f(x)\cdot h(x)\,dx = <f,g> + <f,h>$

=> e produs scalar pe $C([a,b])$

e) Considerăm spațiul vectorial real $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Atunci $<A,B> = Tr(B^T A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ → produs scalar FROBENIUS

$\forall\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\ ,\ B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$B^T\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{12} + a_{13}\cdot b_{13} & \text{ceva} \\ \text{altceva} & a_{21}\cdot b_{21} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23} b_{23} \end{pmatrix}$$

$$Tr(B^T\cdot A) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\cdot b_{ij}$$

Definiție: Fie V un s.v peste corpul $\mathbb{K}$, înzestrat cu produs scalar.

Norma indusă de produsul scalar este reprezentată de funcția: $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

definită prin $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \forall\, v \in V$

Exemple

a) S.V real $\mathbb{R}^n$. Norma indusa de produsul scalar canonic este

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$a \in \mathbb{C}$, $a \cdot \bar{a} = |a|^2$

$a = x + iy$ $\quad a \cdot \bar{a} = x^2 + y^2$

$\bar{a} = x - iy$

$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) S.V complex $\mathbb{C}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{x}_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

c) S.V real $C([a,b])$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

$\begin{cases} A^T \cdot A = I_n \to \text{ortogonală} \\ A^* \cdot A = I_n \to \text{unitară} \end{cases}$

$A = A^t \to$ simetrică

$A = -A^t \to$ antisimetrică

$A = A^* \to$ hermitiană

$A = -A^* \to$ strâmb hermitiană

d) S.V real $M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\|A\|_F = \sqrt{Tr(A^T \cdot A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

↳ NORMĂ FROBENIUS

Teoremă (Inegalitatea Cauchy-Schwarz)

Fie V, un s.v peste corpul $\mathbb{K}$ înzestrat cu produs scalar. Atunci $u, v \in V$

are loc inegalitatea:

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$$

Proof: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \langle tu + v, tu + v\rangle \ge 0$

$f(t) = \langle tu, tu + v\rangle + \langle v, tu + v\rangle = \langle tu, tu\rangle + \langle tu, v\rangle + \langle v, tu\rangle + \langle v, v\rangle$

$= \underbrace{t^2 \langle u, u\rangle}_{at^2} + \underbrace{2t \langle u, v\rangle}_{2bt} + \underbrace{\langle v, v\rangle}_{c} \ge 0$

$-\frac{\Delta}{4a} \ge 0 \iff -\Delta \ge 0 \iff \Delta \le 0$

$$\Delta = 4(\langle u,v\rangle)^2 - 4\langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle \le 0$$

$$(\langle u,v\rangle)^2 \le \langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle = \|u\|^2\cdot\|v\|^2 \quad |(\,)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$$

Ex

a) S.V real $\mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle} \qquad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$(x_1\cdot y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2) \quad (CBS)$$

(Clasa 8-a)

b) S.V real $C([a,b])$

$$\forall\, f,g\in C([a,b]) \qquad \langle f,g\rangle^2 \le \langle f,f\rangle\cdot\langle g,g\rangle$$

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

(Clasa 12-a)

Teoremă (Ineg. Triunghiului) $\quad |x+y| \le |x|+|y|$

Fie V, un spațiu vectorial peste corpul K, înzestrat cu produs scalar, atunci $\forall\, u,v\in V$ are loc inegalitatea

$$\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$$

Proof:

$$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v,u+v\rangle} \quad |(\,)^2$$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2$$

R: $z\in\mathbb{C}$, $z = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

$Re(z) = a$

$Im(z) = b$

$$= \|u\|^2 + 2Re(\langle u,v\rangle) + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 <$$

$$\Leftrightarrow \|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2 \quad |(\,)^{\frac{1}{2}}$$

$$z+\bar{z} = a+bi+a-bi = 2a = 2Re(z) \le 2|z|$$

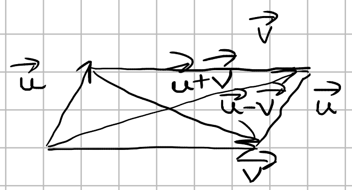
$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

Teoremă (Identitatea Paralelogramului)

Fie V, un s.v peste corpul K, înzestrat cu produs scalar. Atunci $\forall u,v \in V$ are loc

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$ → geometric se referă la faptul că

Suma pătratelor laturilor = suma pătratelor diagonalelor



$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(u,v)$

$\|u-v\|^2 = \|u\| + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\underbrace{(u,-v)}_{}$

$-2\mathrm{Re}(u,v)$

concluzia $(+)$

Definiție: Fie V, un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$.

O normă pe V este o funcție $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ cu prop:

(P_1) $\|u\| \geq 0$, $\forall u \in V$ cu egal. doar dacă $u=0$ (NENEGATIVITATE)

(P_2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\cdot\|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$ (ABSOLUT OMOGENITATE)

(P_3) $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$, $\forall u,v \in V$ (INEG. Δ)

Exercițiu: Să se arate că norma indusă de produsul scalar e o normă pe $\mathbb{R}^n$

(P_1) $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} \geq 0$

(P_2) $\|\alpha u\| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\cdot\langle u,u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\cdot\|u\|^2} = |\alpha|\cdot\|u\|$

(P_3) dem în Teorema cu roz

Exemple:

a) Considerăm spațiul vectorial complex $\mathbb{C}^n$

Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Urm. expresii sunt norme pe $\mathbb{C}^n$

i) norma l_1 a vectorului x este $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

ii) norma l_2 a vectorului x este $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ → norma indusa de produsul canonic

iii) norma l_p a lui x este $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

iv) norma l_∞ a lui x este $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

b) Considerăm spațiul vectorial complex $C_C([a,b])$ unde $[a,b] \subset \mathbb{R}$

Urm. sunt norme pe $C_C([a,b])$

i) L_1: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$

ii) L_2: $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$

iii) L_p: $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Vectori ortogonali

Definiție: Fie V, un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, înzestrat cu produs scalar și $u, v \in V$. Spunem că vectorii u, v sunt ortogonali dacă $\langle u, v \rangle = 0$

Exemplu:

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\langle u, v \rangle = x \cdot (-y) + y \cdot x = 0 \Rightarrow u, v$ ortogonali

b) Pe s.v real $\mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\langle u, v \rangle = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = -2 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow u, v$ ortogonali

c) Pe spațiul vectorial $C([0,2\pi])$ cu produs scalar canonic funcțiile $f_m(x)$, $f_n(x)$ sunt ortogonale cu $f_k(x) = \cos kx$

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \end{cases} \quad (+)$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big|_0^{2\pi} = 0 + 0 = 0$$

Teoremă (Teorema lui Pitagora)

Fie V, un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, înzestrat cu produs scalar și u și $v \in V$. Dacă vectorii u și v sunt ortogonali:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proof: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0}) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Definiție: Fie V, un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$, înz. cu produs scalar și S o mulțime nevidă de vectori din V. Sp. că S este ortogonală dacă oricare doi vectori distincți sunt ortogonali.

Ex: $S = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left.\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= -4 + 2 + 2 = 0 \\ \langle u_1, u_3 \rangle &= 2 + 2 - 4 = 0 \\ \langle u_2, u_3 \rangle &= -2 + 4 - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S \text{ ortogonală}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{2^2 + 1 + 2^2} = 3$$

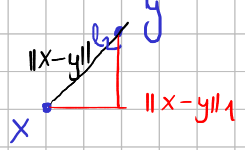
Definiție: Fie V, un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$, înz. cu produs scalar și S o mulțime nevidă de vectori din V. Sp. că S este **ORTONORMALĂ** dacă este ORTOGONALĂ și $\forall\, u \in S$, $\|u\| = 1$

$$S = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\|w_1\| = \left\|\frac{1}{3} u_1\right\| = \frac{1}{3}\|u_1\| = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

Obs: $\mathbb{R}^2$: metrica euclidiană (distanță) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \|x-y\|_1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



metrică Manhattan $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = \|x-y\|_1$

Teoremă: Fie V, un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, înzestrat cu produs scalar și S o mulțime ortogonală formată cu vectori nenuli din V. Atunci S liniar independentă:

$$S = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$\boxed{R}$ $v_1, \dots, v_n \in V$ lin. indep dacă singura alegere a scalarilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ este $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

P.p. abs. că vectorii din S sunt l. dependenți $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ NU TOȚI NULI a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_1 \rangle = \langle 0, v_1 \rangle$$

$$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{>0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_1 \rangle}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\langle \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2 \rangle = \langle 0, v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow$ linear indep.