FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

1 Breviar

Pentru orice e şi orice Γ, notăm cu $e \vDash \Gamma$ (şi spunem că e **satisface** Γ sau e este **model** pentru Γ) dacă, pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $e \vDash \varphi$. Pentru orice Γ, notăm cu $Mod(\Gamma)$ mulţimea modelelor lui Γ.
Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \Gamma$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \Gamma$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ avem că $e \nvDash \Gamma$. O mulţime Γ se numeşte **finit satisfiabilă** dacă există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită satisfiabilă.
Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm $\Gamma \vDash \varphi$ (şi spunem că **din** Γ **se deduce semantic** φ sau că φ **este consecinţă semantică a lui** Γ) dacă pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \Gamma$ avem $e \vDash \varphi$. De asemenea, notăm $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ (şi citim **din** Γ **se deduce semantic finit** φ) faptul că există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.
Pentru orice $v \in V$ şi $e : V \to \{0,1\}$, vom defini

$$v^e := \begin{cases} v, & \text{dacă } e(v) = 1, \\ \neg v, & \text{dacă } e(v) = 0, \end{cases}$$

şi, clar, $e^+(v^e) = 1$.

2 Exerciţii

(S2.1) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(ii) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom mai folosi, pe lângă identităţile introduse în seminarul trecut, şi faptul că, pentru orice $a \in \{0,1\}$, $1 \vee a = 1$ şi $0 \vee a = a$.

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\vee}} (e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\vee}} (e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi)) = 1 \mathbin{\pmb{\vee}} (1 \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi)) = 1 \mathbin{\pmb{\vee}} e^+(\psi) = 1 = e^+(\varphi).$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\vee}} (e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi)) = 0 \mathbin{\pmb{\vee}} (0 \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi)) = 0 \mathbin{\pmb{\vee}} 0 = 0 = e^+(\varphi).$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Avem că

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \pmb{\neg} e^+(\varphi) \pmb{\to} (\pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\pmb{\neg} e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned} \pmb{\neg} e^+(\varphi) \pmb{\to} (\pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} e^+(\varphi))) &= 0 \pmb{\to} (\pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} e^+(\varphi))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \pmb{\neg} e^+(\varphi) \pmb{\to} (\pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} e^+(\varphi))) &= \pmb{\neg} 0 \pmb{\to} (\pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} 0)) \\ &= 1 \pmb{\to} (\pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} 0)) \\ &= \pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} (e^+(\psi) \pmb{\to} 0) \\ &= \pmb{\neg} e^+(\psi) \pmb{\leftrightarrow} \pmb{\neg} e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S2.2) Să se găsească toate modelele fiecăreia dintre mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e \vDash v_n \to v_{n+1} \\ & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots \\ & \text{dacă şi numai dacă} & (\text{pentru orice } v \in V,\ e(v) = 0) \\ & & \text{sau (există } k \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } i < k,\ e(v_i) = 0 \text{ şi,} \\ & & \text{pentru orice } i \geq k,\ e(v_i) = 1). \end{array}$$

Definim $e^\infty : V \to \{0, 1\}$ astfel încât, pentru orice $v \in V$, $e^\infty(v) = 0$ şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : V \to \{0, 1\}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^\infty\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Atunci

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & e \vDash v_0 \text{ şi, pentru orice } 0 \leq n \leq 7,\ e \vDash v_n \to v_{n+1} \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) = 1 \text{ şi } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\},\ e(v_n) = 1\ . \end{array}$$

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0, 1\} \mid e(v_n) = 1 \ \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S2.3) Fie $f : V \to \{0, 1\}$. Găsiţi Γ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.
Demonstraţie: Luăm $\Gamma := V^f = \{v^f \mid v \in V\}$.

Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Avem $e \in Mod(\Gamma)$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in V$, $e \vDash v^f$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Vom arăta că ultima afirmaţie este echivalentă cu $e = f$.
Presupunem că pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in V$. Vrem $e(v) = f(v)$. Dacă $f(v) = 1$, atunci $v^f = v$ şi deci $e(v) = e^+(v) = e^+(v^f) = 1 = f(v)$. Dacă $f(v) = 0$, atunci $v^f = \neg v$ şi deci

$$e(v) = e^+(v) = \neg\neg e^+(v) = \neg e^+(\neg v) = \neg e^+(v^f) = \neg 1 = 0 = f(v).$$

Invers, presupunem că $e = f$ şi vrem să arătăm că pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in Q$. Atunci $e^+(v^f) = f^+(v^f) = 1$. □

(S2.4)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulţime finită de formule care să aibă exact aceleaşi modele.

Demonstraţie:

(i) Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă, deci infinită. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziţia 2.13 pentru φ, e şi e_k, avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \vDash \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită.

(ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulţime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulţime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă e este funcţia constant egală cu 1, funcţie pe care o notăm cu $\mathbf{1}$. Prin urmare, $Mod(\Gamma) = \{\mathbf{1}\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ.

□

(S2.5) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem întâi că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 2.30.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).
Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Σ e nesatisfiabilă (**).
Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).
Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Sigma := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Sigma \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulţime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Sigma = \Sigma \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Sigma \cap \Gamma) \cup (\Sigma \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Sigma \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Σ e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. $\square$

(S2.6) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.
(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.
(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.

Demonstraţie:

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):
$\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 2.30.(i))
$\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$)
$\iff \Gamma \vDash_{fin} \varphi$ (conform (S2.4)).

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):
Γ este nesatisfiabilă $\iff \Gamma \vDash \bot$ (conform Propoziţiei 2.29)
$\iff \Gamma \vDash_{fin} \bot$ (conform (V3) pentru Γ şi $\bot$)
$\iff$ există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \bot$
$\iff$ există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. Δ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 2.29)
$\iff \Gamma$ nu este finit satisfiabilă.

$\square$