Noțiuni introductive

Multiset

Fie **S** o mulțime (finită) nevidă.

Multiset:

- Intuitiv: O “mulțime” unde elementele se pot repeta

Multiset

Fie **S** o mulțime (finită) nevidă.

Multiset:

- $R = (S, r), \; r : S \to \mathbb{N}$ **funcţie de multiplicitate**

Notaţie

- $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

Multiset

Exemplu

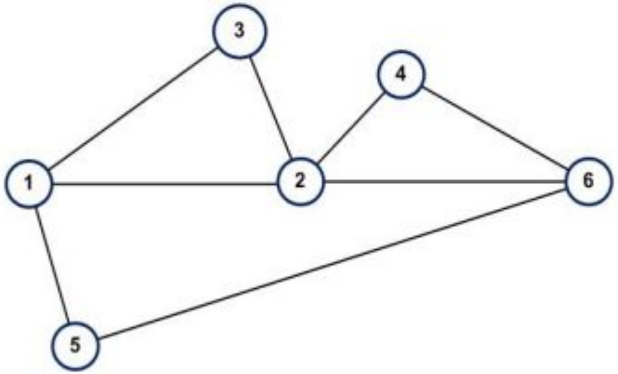
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $R = \{2^2, 3, 5^3\}$

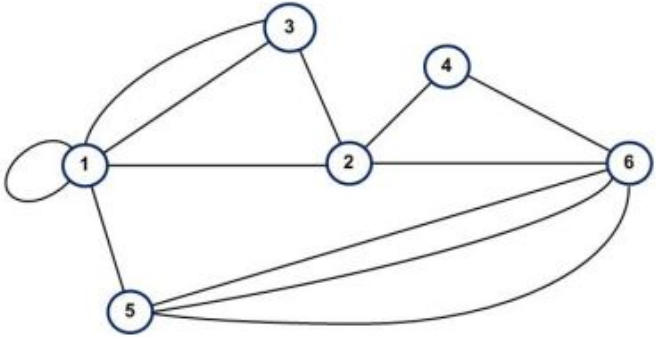
$|R| = 2+1+3 = 6$ – **suma multiplicităților**

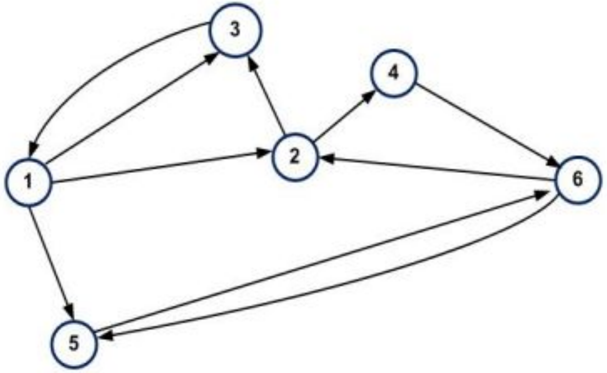
$1 \notin R$

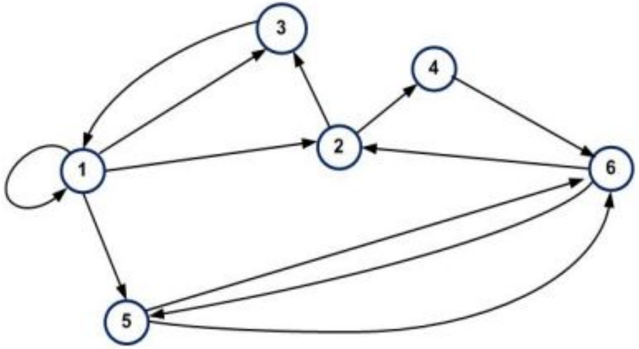
Grafuri

Graf, multigraf

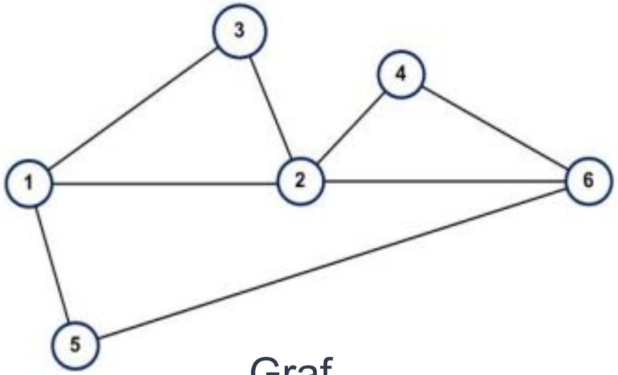




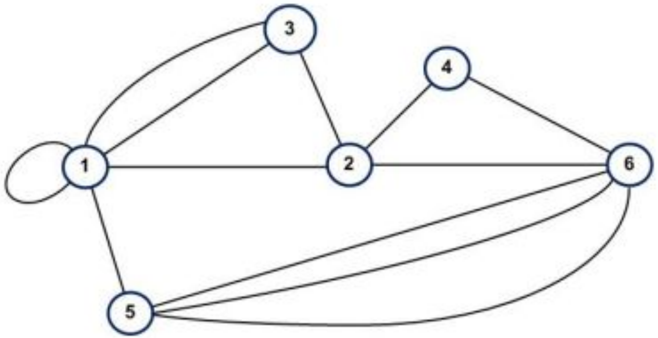




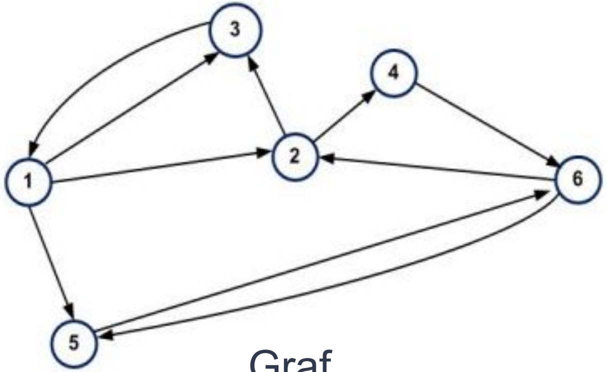
Graf, multigraf



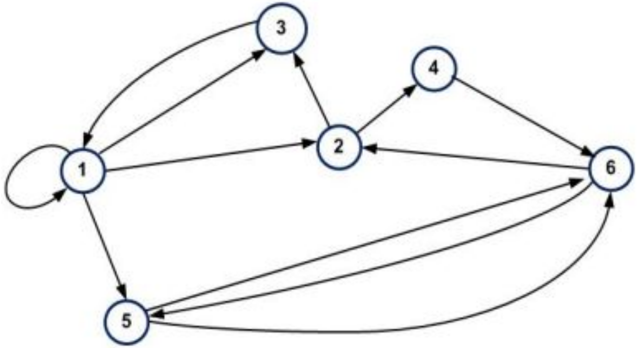
Graf



Multigraf

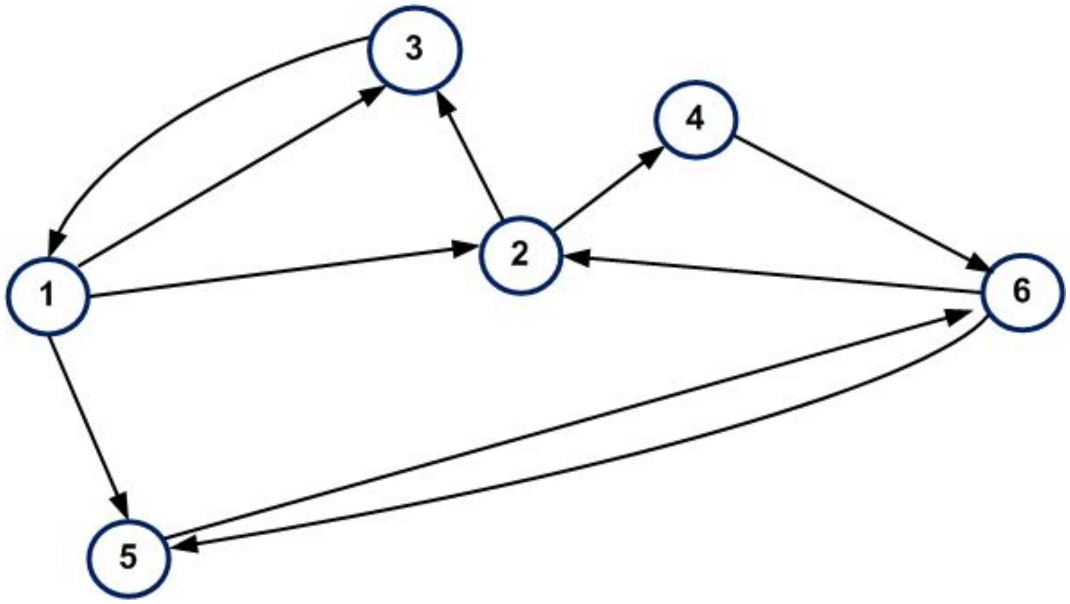


Graf



Multigraf

Graf orientat



Graf orientat

Graf orientat: G = (V, E)

- V – mulțime finită
- E – perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V
- $v \in V$ – vârf
- $e = (u, v) =$ **uv** – arc
- $u = e^-$ – vârf iniţial / origine / extremitate iniţială
- $v = e^+$ – vârf final / terminus / extremitate finală

Graf orientat

G = (V, E)

$d_G^-(u)$ – **grad interior**

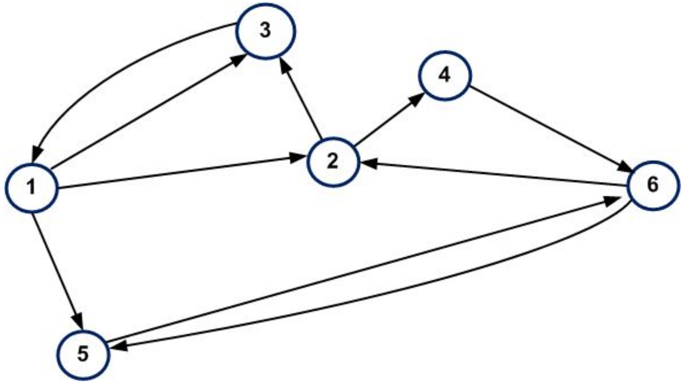
$$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

$d_G^+(u)$ – **grad exterior**

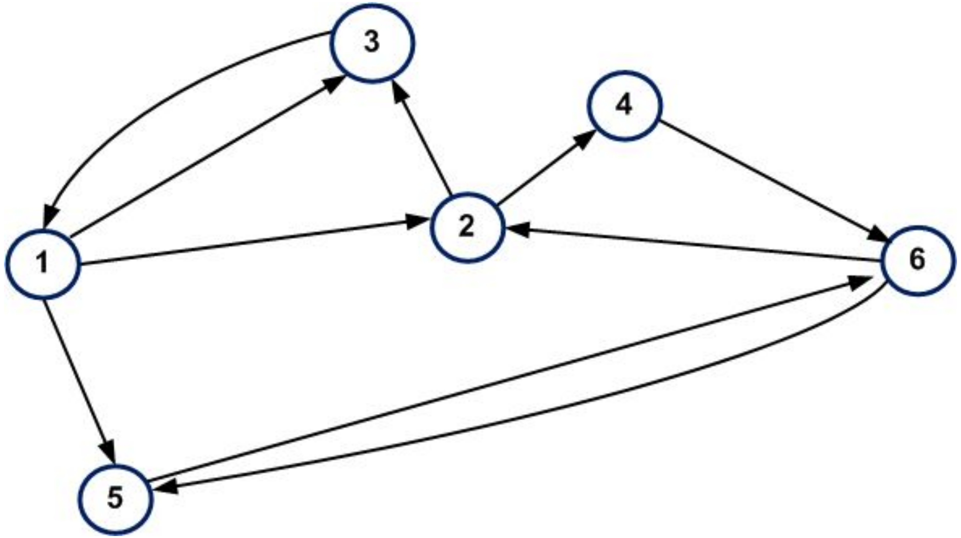
$$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

$d_G(u)$ – **grad**

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$



Graf orientat



$d^{-}(3) = 2$

$d^{+}(3) = 1$

Graf orientat

Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

G orientat, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

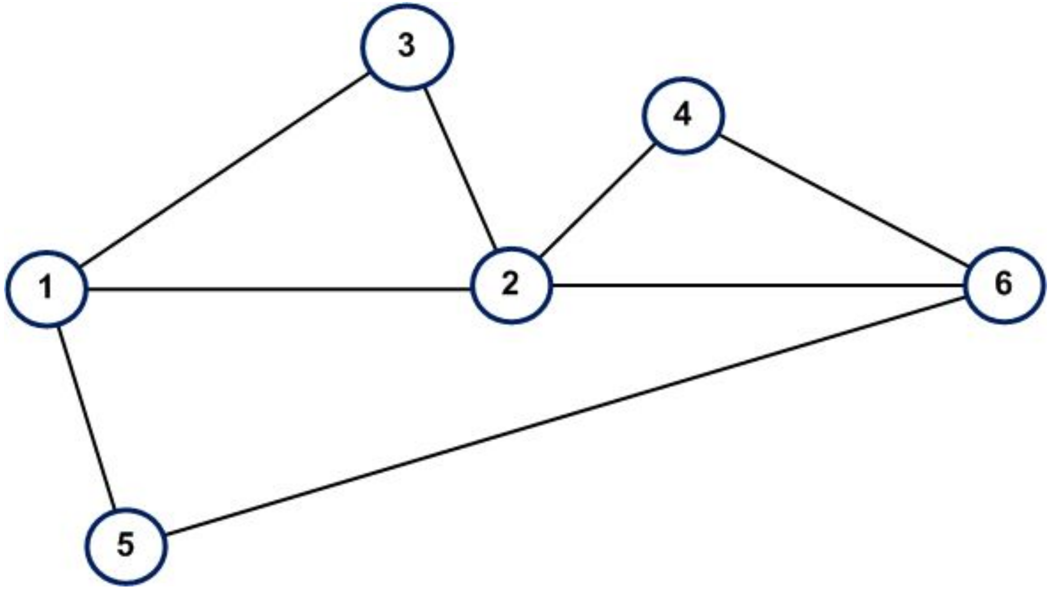
- Multisetul gradelor **interioare**

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$$

- Multisetul gradelor **exterioare**

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \ldots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf neorientat

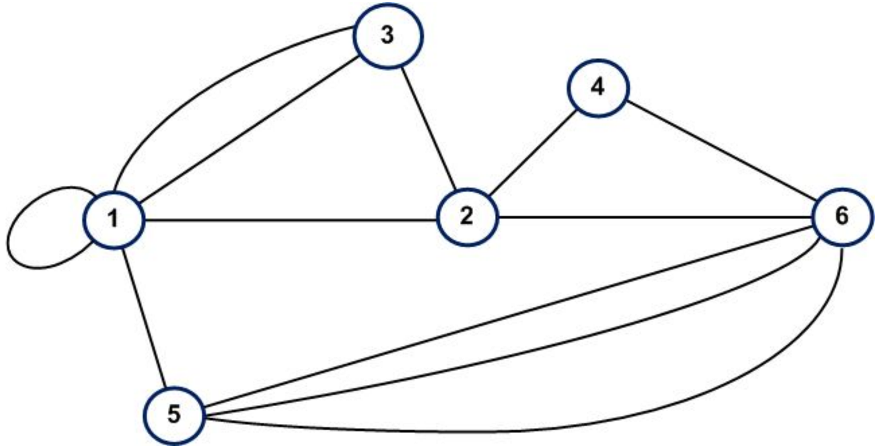


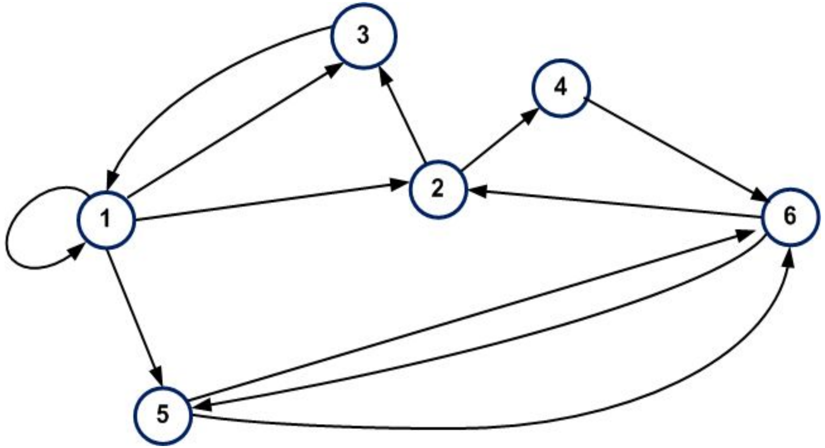
Graf neorientat

Graf neorientat: G = (V, E)

- V – mulțime finită
- E – submulțime de 2 elemente (distincte) din V
- $v \in V$ – vârf / nod
- e = {u,v} = uv – muchie
- u, v – capete / extremităţi

Multigraf neorientat/orientat





Multigraf

G = (V, E, r)

- r(e) – **multiplicitatea muchiei e**

Multigraf

G = (V, E, r)

- r(e) – **multiplicitatea muchiei e**
  - e = {u, u} – **buclă**
  - e cu r(e) > 1 – **muchie multiplă**

$$d_G(u) = |\{ e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 * |\{ e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}|$$

Alte noțiuni fundamentale

Adiacență. Incidență

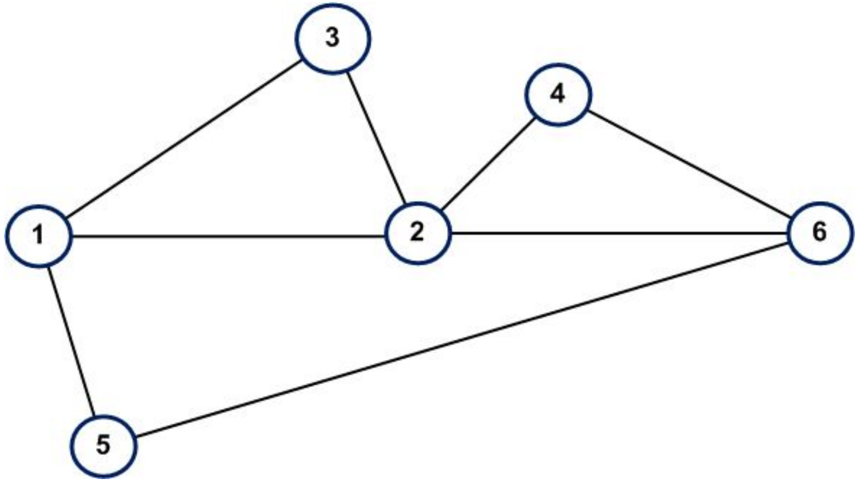
Adiacență. Incidență

Fie G = (V, E) un graf **neorientat**.

- u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
- un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el

Notație

$N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u



Adiacență. Incidență

Fie G = (V, E) un graf **neorientat**.

- o muchie e ∈ E este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
- e și f ∈ E sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Drumuri. Circuite

Drumuri. Circuite

- Drum (walk)
- Drum simplu (trail)
- Drum elementar (path)
- Circuit, circuit elementar
- Lungimea unui drum
- Distanță între două vârfuri

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**.

Un **drum** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

unde $v_1, \ldots, v_k \in V(G)$

cu proprietatea că, între oricare două vârfuri consecutive, există un arc

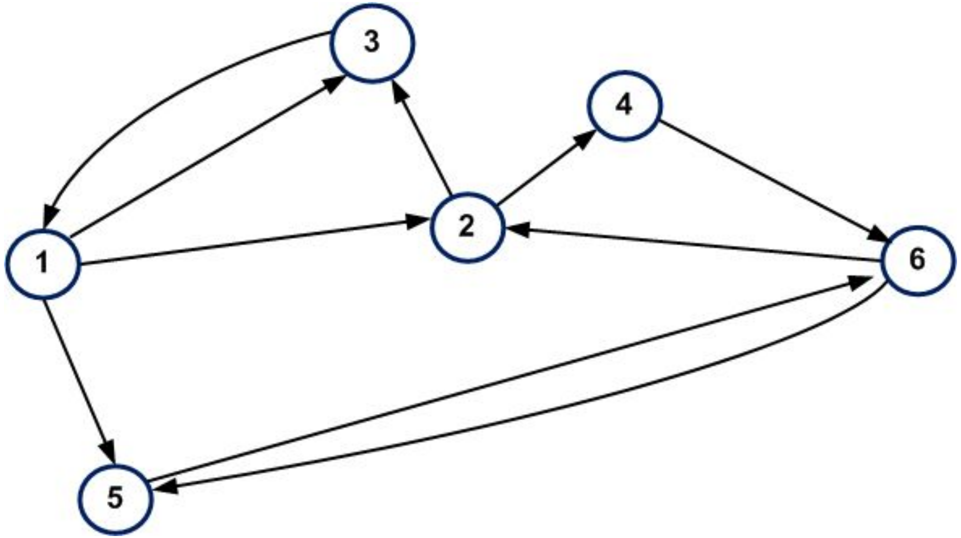
$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \quad \forall \; i \in \{1, \ldots, k-1\}$

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat** și fie un **drum** P = [v_1, v_2, …, v_{k-1}, v_k].

- P este <u>**drum simplu**</u> dacă nu conține un <u>**arc**</u> de mai multe ori ((v_i, v_{i+1}) ≠ (v_j, v_{j+1}), ∀ i ≠ j)
- P este <u>**drum elementar**</u> dacă nu conține un <u>**vârf**</u> de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, ∀ i ≠ j)

Drumuri. Circuite



[1, 2, 4, 6, 2, 4] - drum care nu este simplu

[1, 2, 4, 6, 2, 3] - drum simplu care nu este elementar

[1, 2, 4, 6] - drum elementar

Drumuri. Circuite

$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$

- **Lungimea** lui P este **l(P) = k-1** (cardinalul multisetului arcelor lui P)
- v_1 și v_k se numesc **capetele / extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_k lanț**

Drumuri. Circuite

$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$

Notăm

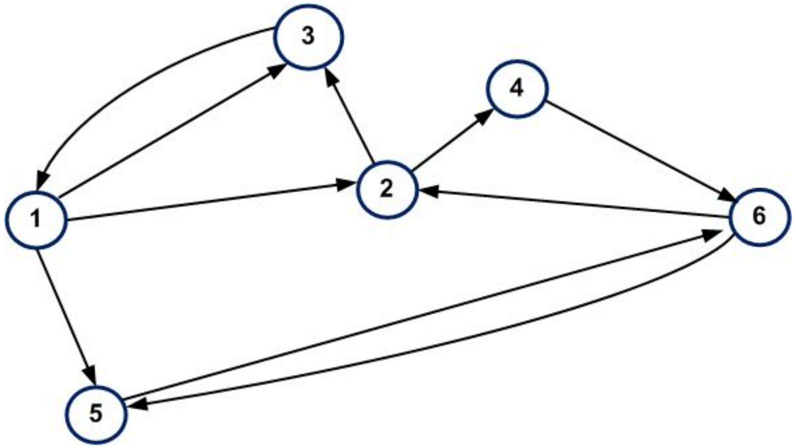
- $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
- $e_i = (v_i, v_{i+1})$
- $E(P) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$

Drumuri. Circuite

Pentru două vârfuri u și v, definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ daca } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\infty}, \text{ daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G} \\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P}) \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

Reprezintă cea mai mică lungime a unui u-v drum.



Drumuri. Circuite

Pentru două vârfuri u și v, definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u\text{-}v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u\text{-}v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Reprezintă cea mai mică lungime a unui u-v drum.

Un u-v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**.

Vom nota și $d(u,v)$ dacă G se deduce din context.

Drumuri. Circuite

Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice.

$$C = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1]$$

C este **circuit simplu** dacă drumul asociat este simplu.

C este **circuit elementar** dacă drumul asociat este elementar.

Notații: $V(C)$, $E(C)$

Lanțuri. Cicluri

Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat**, noțiunile sunt similare.

Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente.

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

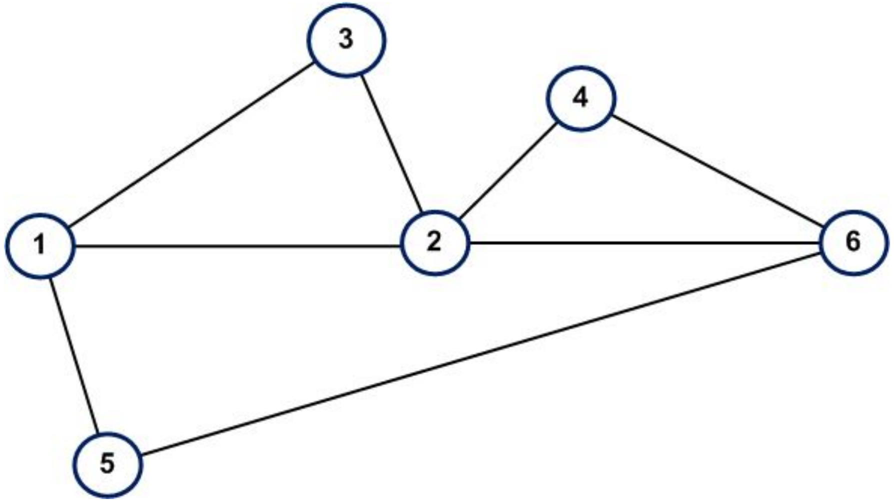
- **lanț simplu, lanț elementar, lungimea unui lanț**
- **ciclu, ciclu elementar**
- **distanță, lanț minim**

Lanțuri. Cicluri

Observație

În cazul unui graf simplu, putem descrie un lanț / ciclu doar ca o **succesiune de vârfuri** (fără a mai preciza și muchiile).

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

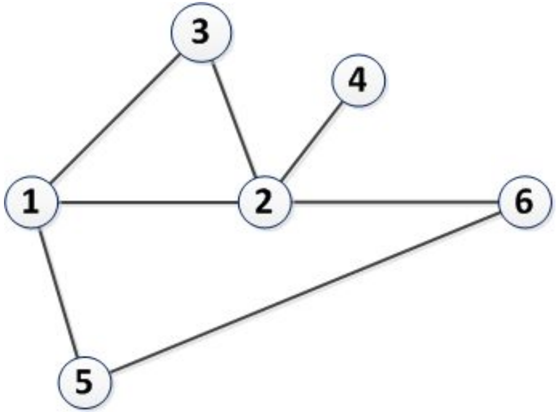


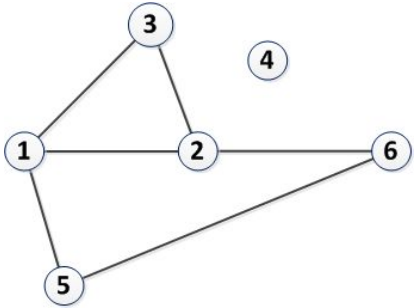
Graf parțial. Subgraf. Conexitate

Graf parțial. Subgraf

- **graf parțial**
- **subgraf**
- **subgraf indus**

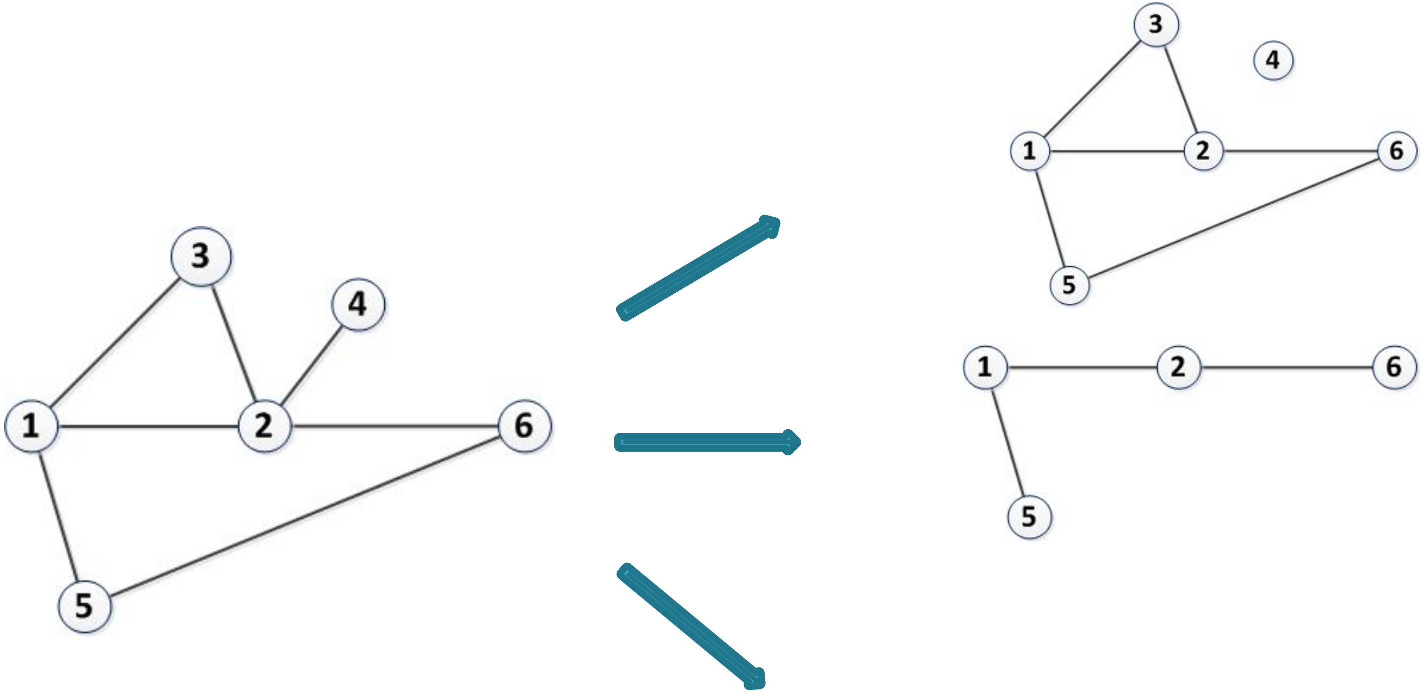
Graf parțial. Subgraf





graf parțial

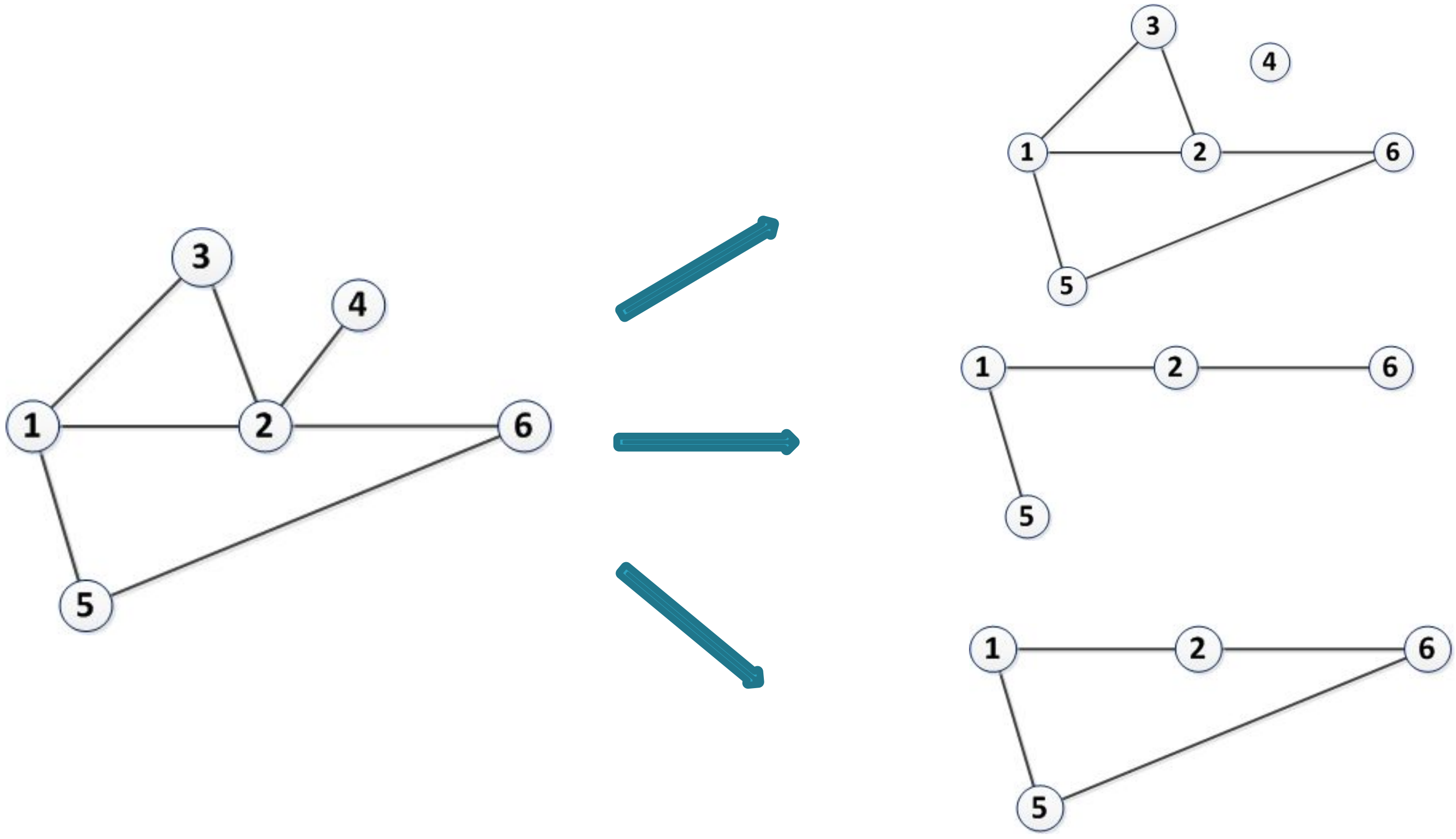
Graf parțial. Subgraf



graf parțial

subgraf

Graf parțial. Subgraf



graf parțial

subgraf

subgraf indus de {1, 2, 5, 6}

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri.

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri.

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri.

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

  $V_1 = V$, $E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

  $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în G** (vom nota $G_1 = G[V_1]$) dacă

  $V_1 \subseteq V$,

  $E_1 = \{e \mid e \in E(G)$, e are ambele extremități în $V_1\}$

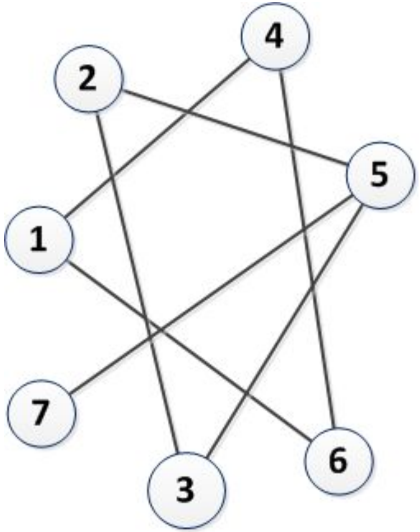
  (toate arcele / muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

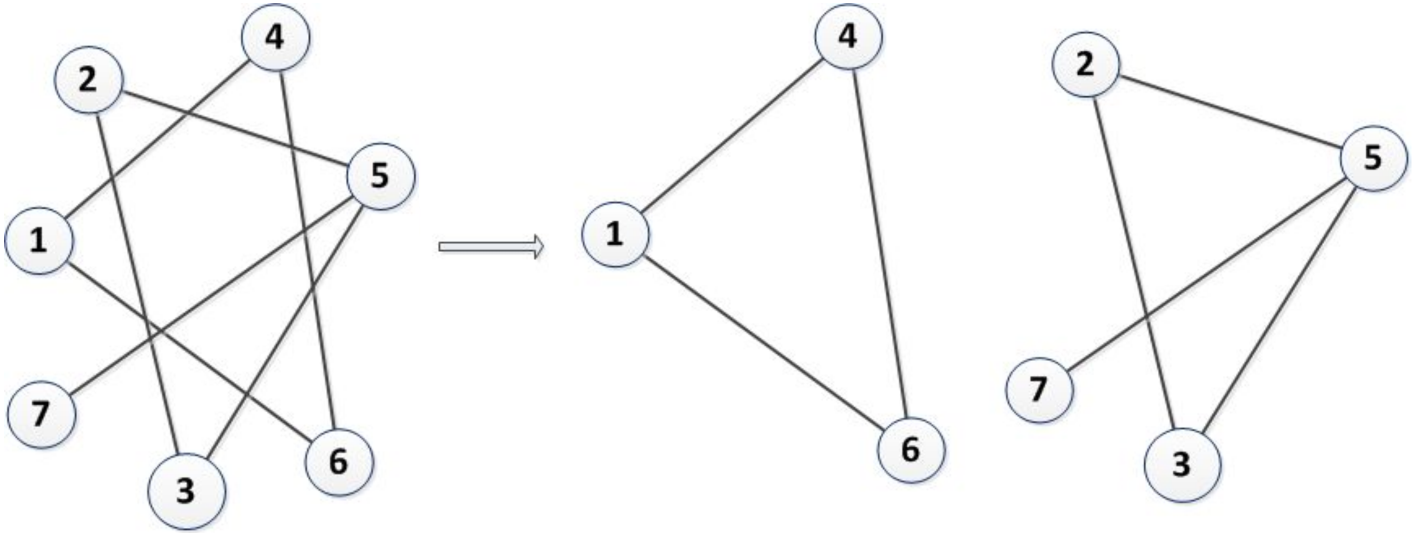
Fie G = (V, E) un graf neorientat

- **graf conex**
- **componentă conexă**

Conexitate



Conexitate



două componente conexe

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este un **graf conex** dacă, între orice două vârfuri distincte, există un lanț

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este un **graf conex** dacă, între orice două vârfuri distincte, există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un **subgraf indus conex maximal** (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este un **graf conex** dacă, între orice două vârfuri distincte, există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un **subgraf indus conex maximal** (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat - **tare-conexitate**

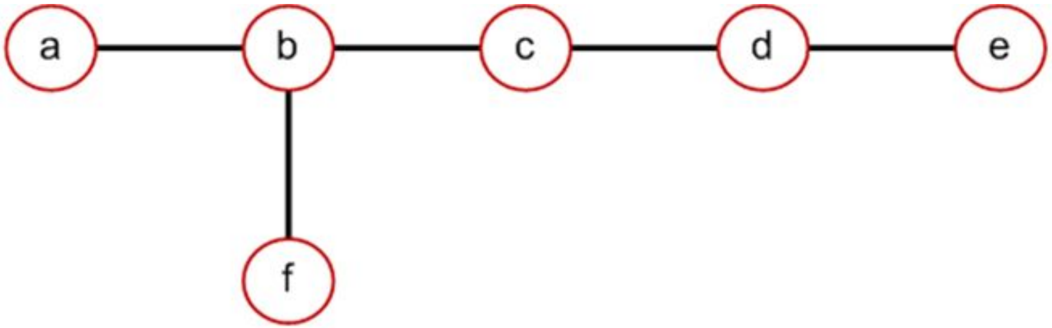
Conexitate

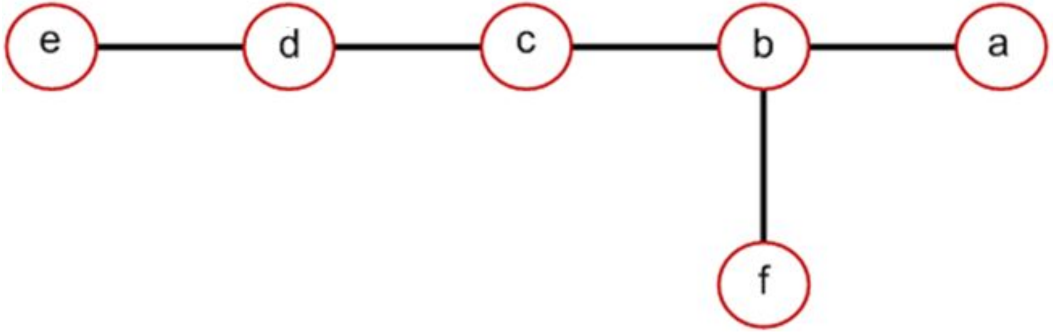
Notații

- **G - v,** v ∈ V(G)
- **G - e,** e ∈ E(G)
- **G - V’,** V’ ⊆ V(G)
- **G - E’,** E’ ⊆ E(G)
- **G + e**

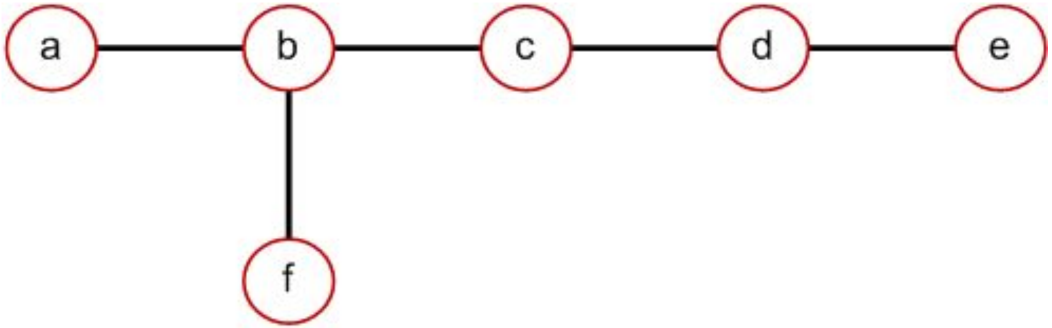
Egalitate. Izomorfism

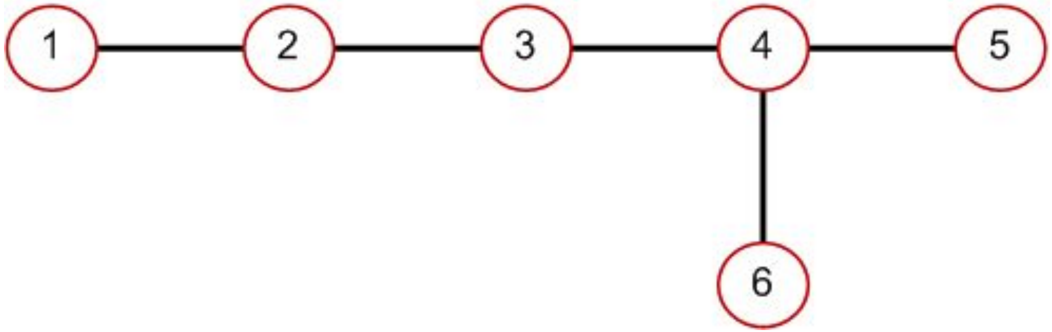
Egalitate





Egalitate?





Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($G_1 \sim G_2$) $\Leftrightarrow$

existǎ $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

$$\mathbf{uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2}$$

pentru orice $u,v \in V_1$

(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism

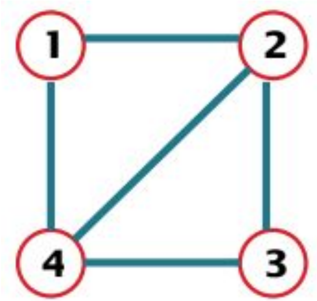
Interpretare

Se pot reprezenta în plan prin același desen

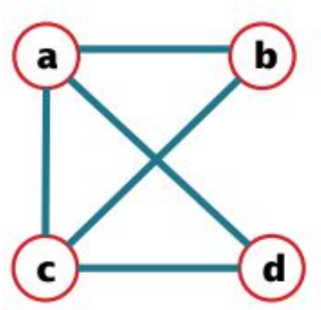
Izomorfism

Interpretare

Se pot reprezenta în plan prin același desen



$\sim$



f:

$2 \rightarrow a$

$4 \rightarrow c$

$1 \rightarrow b$

$3 \rightarrow d$

Izomorfism

- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2$?

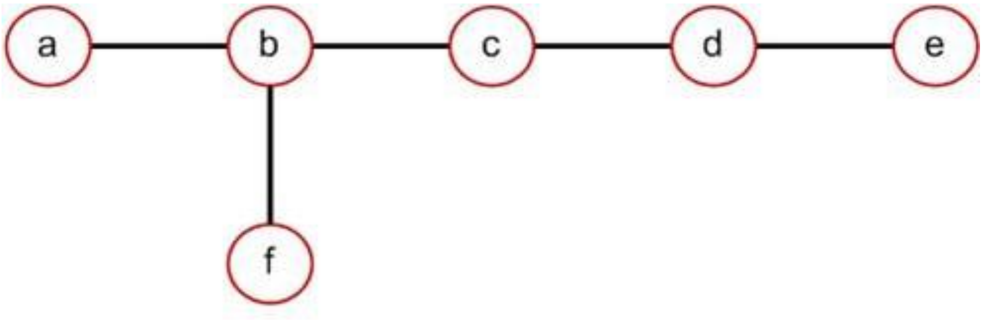
Izomorfism

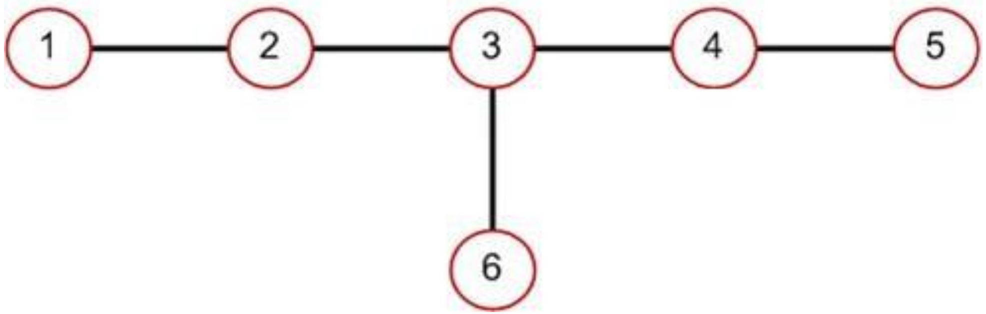
- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2$ **NU**

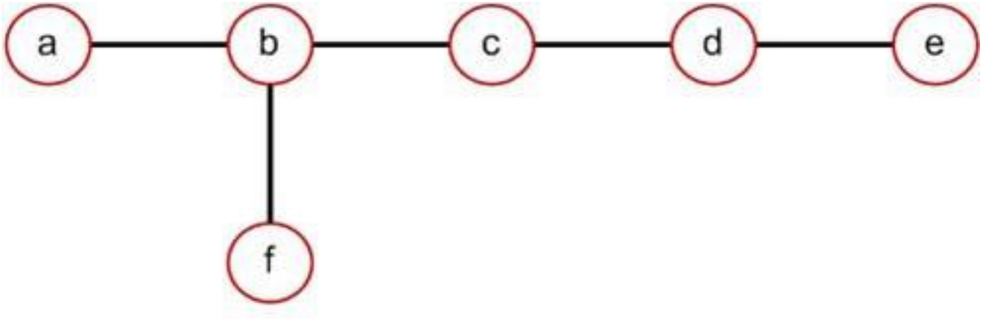
Izomorfism

Izomorfe?



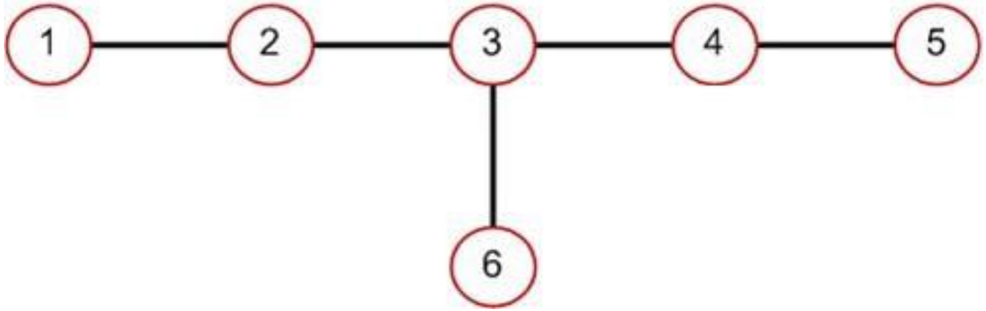


Izomorfism



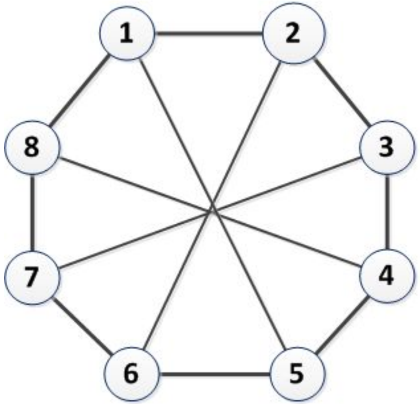
Izomorfe?

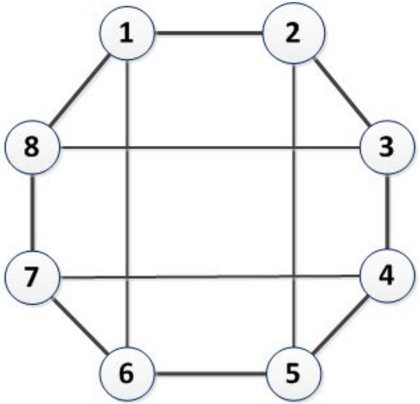
Nu, grafurile nu au aceeași structură.

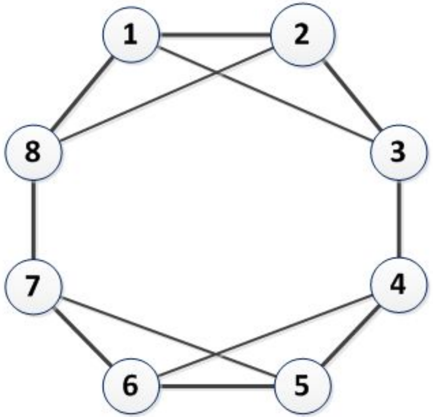


Izomorfism

Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

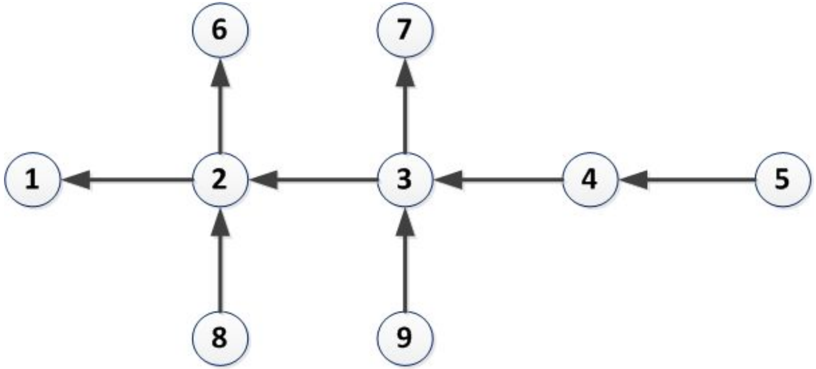


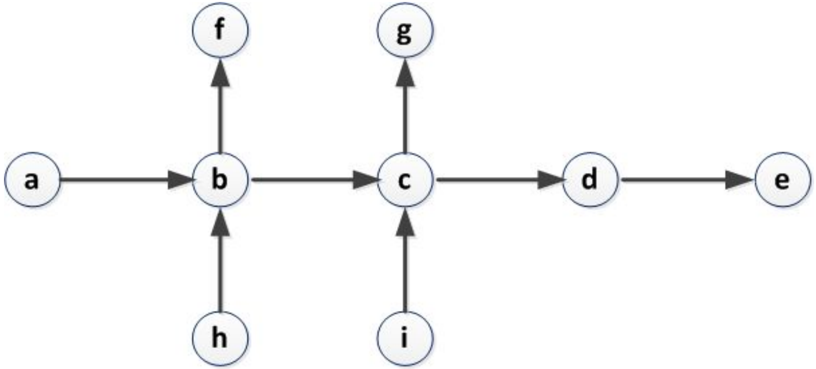




Izomorfism

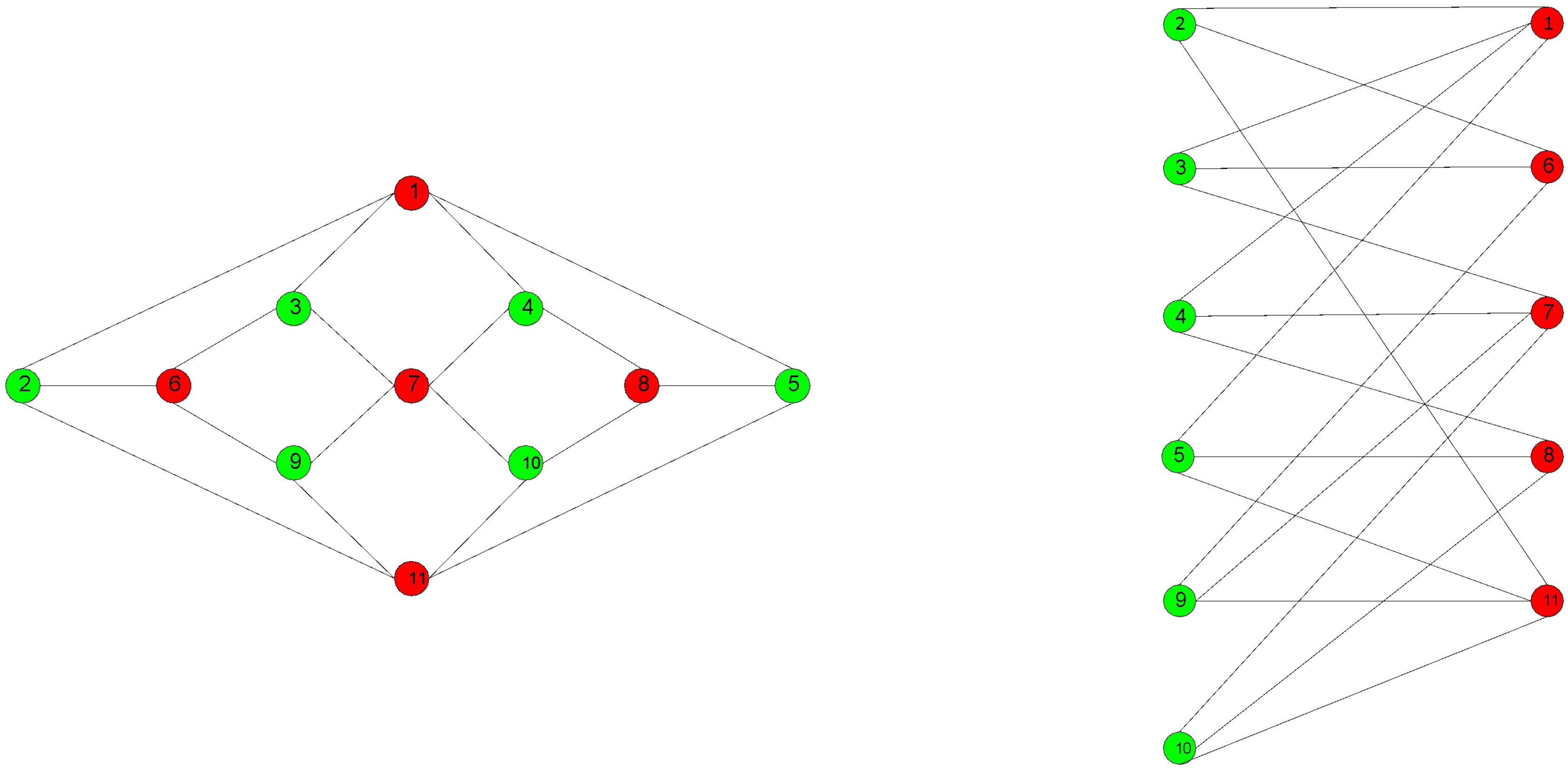
Sunt aceste grafuri izomorfe?





Grafuri standard

Graf bipartit



Graf bipartit

Un graf **neorientat** $G = (V, E)$ se numește **bipartit** ⇔ există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (bipartiție):

- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

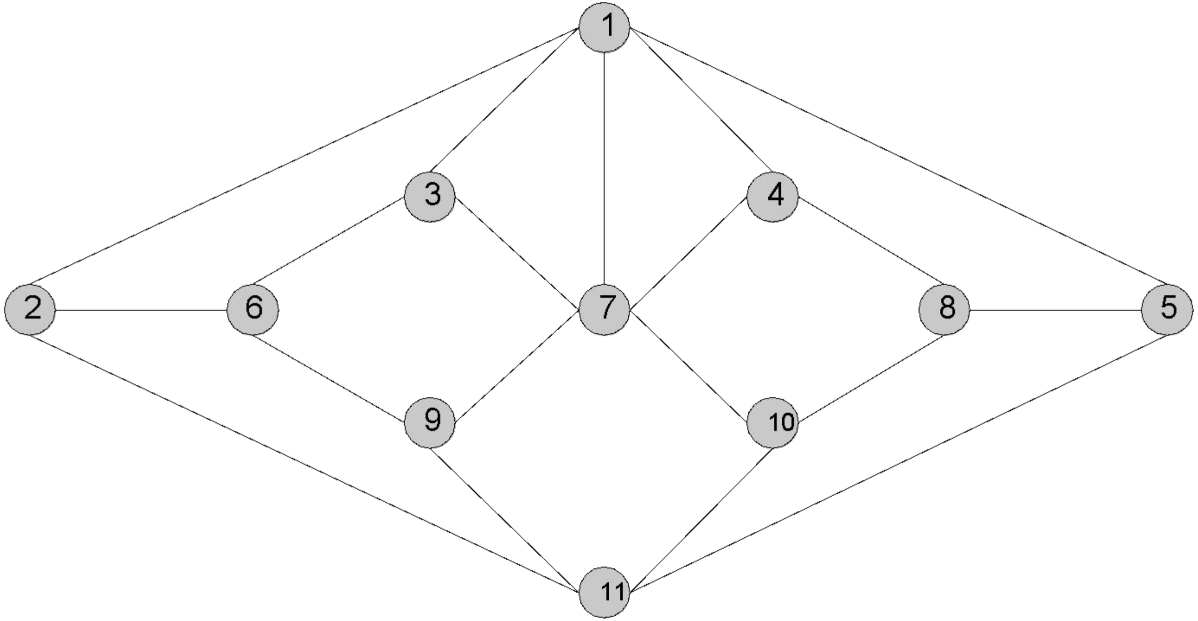
$G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o colorare a vârfurilor cu două culori:

$$c : V \to \{1, 2\}$$

astfel încât, pentru orice muchie $e = xy \in E$, avem

$$c(x) \neq c(y) \qquad \textbf{(bicolorare)}$$

Graf bipartit

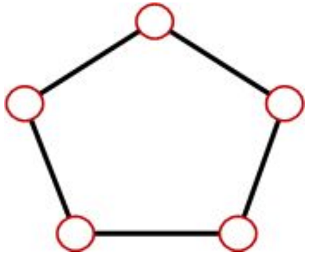


Nu este graf bipartit

Grafuri standard

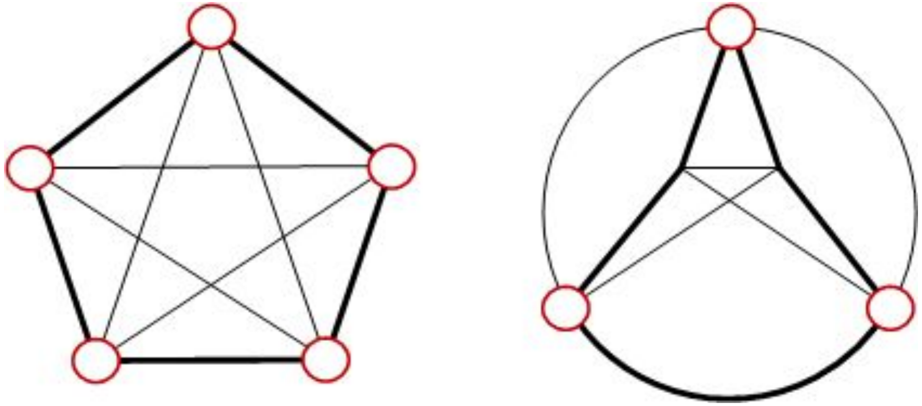
- P_n - lanț elementar

- C_n - ciclu elementar



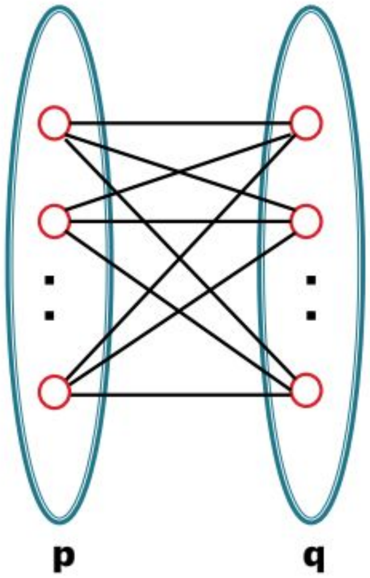
Grafuri standard

- K_n - graf complet de grad n



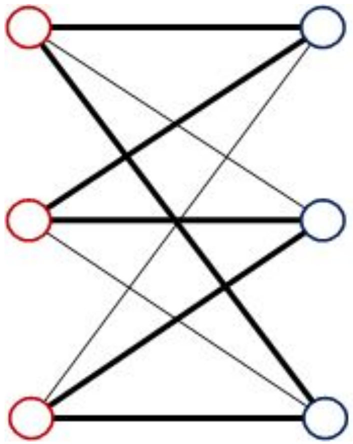
Grafuri standard

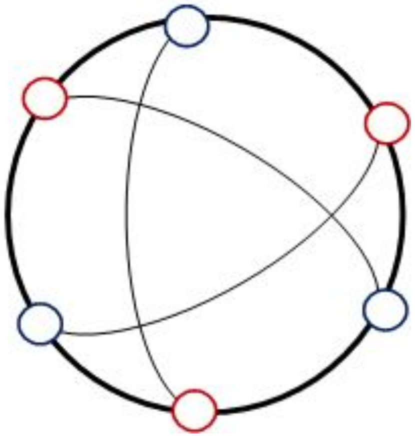
- $K_{p,q}$ - graf bipartit complet



Grafuri standard

- $K_{3,3}$

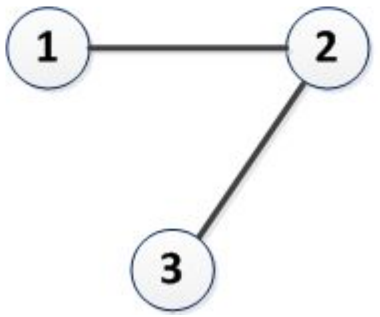




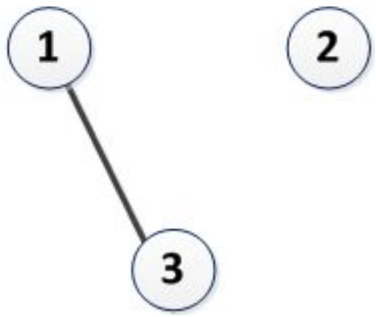
Graful complementar al unui graf neorientat

Fie graful G = (V, E) un graf neorientat.

$\overline{G} = (V, \overline{E})$ **graful complementar** al lui G



G



$\overline{G}$