Aducerea la o formă canonică a unei forme pătratice

Def: Dată fiind forma pătratică $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, spunem că Q are forma canonică într-o bază $B \subset V$, dacă matricea asociată lui Q în raport cu baza B are forma diagonală,

i.e. $A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$Q(x) = x^T A_B x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 .$$

① Metoda Gauss (construcția de pătrate)

② Metoda Jacobi

$\boxed{P}$ Fie forma pătratică $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \;,\; a_{ij} = a_{ji} \, (\forall) \, i,j = \overline{1,n}$$

Notăm: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\ldots$, $\Delta_n = \det A$

Dacă: $\Delta_j \neq 0, (\forall)\, j = \overline{1,n}$ atunci $(\exists)\, \underset{\text{bază}}{B'} \subset V$ a.î. :

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2,$$ unde

$x = (x_1, \dots, x_n)$
în baza $B = \{e_1, \dots, e_n\}$
și $x = (x_1', \dots, x_n')$
în baza $B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$

$\boxed{\text{Apl}}$ Considerăm forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, $(\forall)\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Să se aducă la o formă canonică forma pătratică Q utilizând a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

Rez: a) Matricea asociată f. pătratice Q în raport cu baza canonică este: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3) + 5x_2^2 - 4x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - \underline{x_2^2} - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + \underline{5x_2^2} - 4x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2^2 + x_2x_3) - 8x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\left[(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3)^2 - \tfrac{1}{4}x_3^2\right] - 8x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3)^2 - 9x_3^2 \end{aligned}$$

Efectuăm sch. de coordonate: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

$\Rightarrow Q(x) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$, $(\forall)\, x = \underset{\downarrow}{(y_1, y_2, y_3)} \in \mathbb{R}^3$

coord. în raport cu noua bază de raportare.

b) Avem: $A = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$ $\longrightarrow$ m. asociată lui Q în baza can.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \\ \Delta_3 = \det A = -36 \end{array} \right. \qquad \Delta_i \neq 0,\ (\forall)\ i = \overline{1,3}$$

$$\boxed{P} \Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$$

$$Q(x) = (x_1')^2 + \frac{1}{4}(x_2')^2 - \frac{1}{9}(x_3')^2,\ (\forall)\ x = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$$

$\downarrow$

coord. în raport cu noua bază B' de separatoare

Obs: Prin cele 2 metode (Gauss și Jacobi) se obțin pt. formele canonice coeficienți diferiți ca valoare dar nu și ca semn. (i.e. signatura formei pătratice se păstrează, este un invariant, la sch. de bază)

$\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț, ca în aplicația anterioară pentru f. pătratica $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3,\ (\forall)\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

$\boxed{\text{Apl}}$ Să se aducă la o formă canonică următoarele forme pătratice Q, utilizând : a) metoda Gauss (sch. de coord.)
b) metoda Jacobi

$a_1)$ $Q(x) = \underline{4x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 - \underline{4x_1x_2} + \underline{4x_1x_3} - 3x_2x_3$

$= (4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3$

$= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - \cancel{x_2^2} - \cancel{x_3^2} + 2x_2x_3 + \cancel{x_2^2} + \cancel{x_3^2} - 3x_2x_3$

$= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3$

Efectuăm sch. de coord. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$Q(x) = y_1^2 - y_2y_3$

$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$

$\Longrightarrow \underline{Q(x)} = z_1^2 - (z_2^2 - z_3^2) = \underline{z_1^2 - z_2^2 + z_3^2} \longrightarrow$ forma canonică a f.p. Q

Compunând cele 2 sch. de coord. găsim:

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + 2z_3) \\ x_2 = z_2 + z_3 \\ x_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = \frac{1}{2}(-2) = -1 \neq 0$

$\longrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 1 \text{ (indexul)} \\ s = 2 - 1 = 1 \text{ (signatura)} \end{cases}$

a_2) $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

Efectuăm sch. de coord. $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow Q(x) = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - \cancel{y_2y_3} + y_1y_3 + \cancel{y_2y_3}$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 =$$

$$= (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2$$

$$= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

Facem sch. de coord: $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

$$Q(x) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

Compunând cele 2 sch. de coord. găsim:

$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1(-2) = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $p = 1$

$q = 2$ (indexul)

$s = p - q = 1 - 2 = -1$ (signatura)

$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

b₁) $Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^4$

Matricea asoc. f.p. Q în raport cu baza canonică este:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Minorii diagonali principali sunt:

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$\Delta_i \neq 0, (\forall)\ i = \overline{1,4}$

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_4} y_4^2, (\forall)\ x \in \mathbb{R}^4$$

Deci: $Q(x) = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2 - 4y_4^4$ → forma canonică a f.p. Q

$p = 2$
$q = 2$ (indexul)
$s = p - q = 0$ (signatura)

$b_2)$ $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4,$$

$$(\forall)\, x \in \mathbb{R}^4$$

Matricea asoc. f.p. Q în raport cu baza canonică este:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -17$$

$$\Delta_4 = \det G = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & 6 & -13 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & -13 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -(-37) = 37$$

$\Delta_i \neq 0, (\forall)\, i = \overline{1,4}$

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_4} y_4^2$$

Deci: $Q(x) = \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{3}{5} y_2^2 - \frac{5}{17} y_3^2 - \frac{17}{37} y_4^2 \to$ forma canonică a f.p. Q

$p = 2$

$q = 2$ (indexul)

$s = p - q = 0$ (signatura)

$\boxed{\text{Ap 1.}}$ Fie $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2,$$

$$(\forall)\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Arătați că F este formă biliniară simetrică

b) Scrieți matricea formei bilin. simetrice F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$. (B_0)

c) Scrieți matricea formei bilin. simetrice F în raport cu baza următoare: $B_1 = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{f_1}, \underbrace{(2,-1,2)}_{f_2}, \underbrace{(1,3,-3)}_{f_3} \} \subset \mathbb{R}^3$

d) Determinați forma pătratică Q coresp. lui F și să se aducă la o formă canonică utilizând metodele Gauss, respectiv Jacobi

Rez: a) Se demonstrează liniaritatea lui F în ambele
+b) argumente (ca la aplicații liniare) → $\boxed{\text{TEMĂ}}$

Matricea asociată lui F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ → matrice simetrică ($A = {}^tA$)

⇒ F - formă biliniară simetrică

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, "C"] \arrow[d, squiggly] & B_1 \\ A & \boxed{A' = C^T A C} \end{tikzcd}$$

c) $B_0 \xrightarrow{C} B_1$

m. de trecere de la baza canonică B_0 la baza arbitrară B_1

$\boxed{A' = C^T A C}$ (**) { formule de transf. }

m. asoc. f. bilin. sim. F în rap. cu B_0, resp. B_1

Avem: $C = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{-3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \right)$

! $\boxed{\text{Temă}}$ Efectuați calculul lui A' (după formula (**)).

② Spații vectoriale euclidiene:

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ – spațiu vectorial real

și $F: V\times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită

- F se numește *produs scalar* pe V.
- .. Un spațiu vectorial real V dotat cu un produs scalar se numește *spațiu vectorial euclidian*

Exemplu: Fie sp. vectorial real $(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$

Definim $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{\text{produsul scalar canonic}}, (\forall)\ x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$(\underline{\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}}, \langle , \rangle) \to$ spațiu vectorial euclidian

- $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $(\forall)\ x\in V$
- $d: V\times V \to \mathbb{R}_+$,

$d(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{\langle y-x, y-x\rangle}$, $(\forall)\ x,y\in V$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

În orice sp. vectorial euclidian $(E/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ are loc inegalitatea:

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|, (\forall)\ x,y\in E.$$

„=" $\Leftrightarrow \{x,y\}$ sistem vectorial liniar dependent (i e x și y sunt vectori coliniari)

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt:

$$(\forall)\ \underbrace{\{f_1,\dots,f_n\}}_{\text{bază arbitrară}} \subset E/_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\exists)\ \underbrace{\{e_1,\dots,e_n\}}_{\text{bază ortonormată}} \subset E/_{\mathbb{R}} \text{ a.î.}$$

$$\{e_1,\dots,e_i\} = \{f_1,\dots,f_i\}\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$$

$\boxed{Ap1.}$ În spațiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, <,>)$ să se
$\left\{ \begin{array}{c} \text{produsul} \\ \text{scalar} \\ \text{canonic} \end{array} \right\}$

construiască o bază ortonormată pornind de la baza:

$B = \{f_1 = (-1,1,1), f_2 = (1,-1,1), f_3 = (1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$

folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt (P.O.G-S)

Rez: Avem:

(V$_1$)
$$\begin{cases} e_1' = f_1 \\ e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{<f_i, e_j'>}{\|e_j'\|^2} e_j', (\forall) i = \overline{2,n} \end{cases} \rightarrow \{e_1', \dots, e_n'\} \text{ bază ortogonală}$$

$\{$i.e. $<e_i', e_j'> = 0$, $(\forall) 1 \leq i \neq j \leq n\}$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}, (\forall) i = \overline{1,n} \rightarrow \{e_1, \dots, e_n\} \text{ bază ortonormată}$$

$\{$i.e. $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$, $(\forall) i,j = \overline{1,n}\}$

$\downarrow$

simbolul lui Kronecker

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}}$$

În cazul nostru obținem:

$$\begin{cases} e_1' = f_1 = (-1,1,1) \\ e_2' = f_2 - \frac{<f_2, e_1'>}{\|e_1'\|^2} e_1' = (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2) \\ e_3' = f_3 - \frac{<f_3, e_1'>}{\|e_1'\|^2} e_1' - \frac{<f_3, e_2'>}{\|e_2'\|^2} e_2' = \end{cases} \rightarrow \text{bază ortogonală}$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \cdot 6} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) =$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \\ e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \\ e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \end{cases} \rightarrow \text{bază ortonormată.}$$

(V_2) Avem: $\begin{cases} e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} < f_i, e_j > e_j, \ (\forall)\ i=\overline{2,n} \end{cases}$

Prin calcul obținem:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}, \quad e_2' = f_2 - < f_2, e_1 > e_1$$

$$= (1,-1,1) - \frac{1}{3}(-1)(-1,1,1)$$

$$= (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2)$$

$$\|e_2'\| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$e_2 = \frac{\cancel{3}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(1,-1,2) = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}, \quad e_3' = f_3 - < f_3, e_1 > e_1 - < f_3, e_2 > e_2$$

$$= (1,1,-1) - \frac{1}{3}(-1)(-1,1,1) - \frac{1}{6}(-2)(1,-1,2)$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$

$$\|e_3'\| = \sqrt{2}$$

$$e_3 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$$

Așadar: $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$
bază ortonormată obținută prin $\boxed{\text{P.O.G-S}}$ din baza dată

! $\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț ca în aplicația anterioară pentru baza.

$$B = \{ f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,-1), f_3 = (1,-1,-1) \}$$