CURS #9

UNDE SUNTEM — COMPLEXITATE

$$P = \bigcup_{k \geq 1} DTIME\{n^k\}$$

NP — mașină Turing nedeterministă polinomială

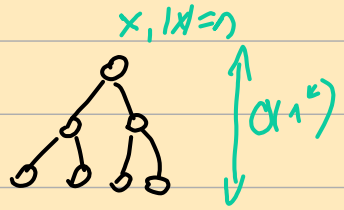
mașină Turing det

$C_1 \to C_2$ $\quad \delta : S \times \Sigma^k \to S \times \Sigma^{k-1} \times \{\leftarrow, \to, \downarrow\}^k$

$C_1 \to C_3$

nedeterministă

$\delta : S \times \Sigma^k \to \mathcal{P}(S \times \Sigma^{k-1} \times \{\leftarrow, \to, \downarrow\}^k)$



SAT — Se dă $\varphi(x_1, \dots x_n)$

Decizie — φ satisfiabilă ?

$\exists \bar{x}_1, \dots \bar{x}_n \in \{T, F\}$ a.î. $\varphi(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = T$

x_1	x_2		x_n	φ
0	0		0	
				1
1	1		1	

SATEXP

Se crede $P \neq NP$

PREMIU 1.000.000 $
(CLAY FOUNDATION)

DE CE NU POT DEM $P \neq NP$ prin

Mașini Turing universale pt P

pot să aibă complexitate pentru TNF

diagonalizare!

SAT $\notin P$ nu înseamnă că nu pot rezolva SAT

Există o mulțime de cazuri care mă interesează

SAT "ușoare"

$P \neq NP$ $\Rightarrow$ nicio SAT solver nu va merge bine TOT TIMPUL

Def $A \leq_m^P B \iff \exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ f calculabilă în TIMP POLINOMIAL

$\forall x \in \Sigma^* \quad x \in A \iff f(x) \in B$

T $B \neq \emptyset, \Sigma^*, \quad B \in P, \quad A \leq_m^P B$

atunci $A \in P$

Dem $f \to O(n^2) \qquad B \to O(n^3)$

$x \longrightarrow f(x) \xrightarrow{B} YES/NO$

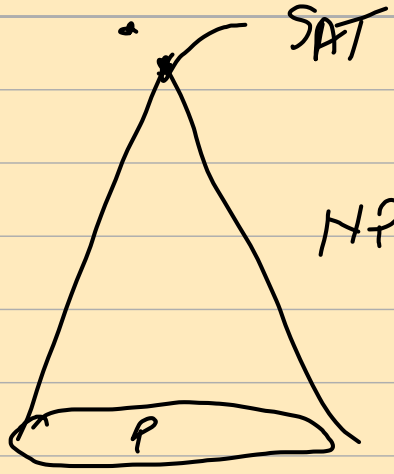
$|x| = n$

$\downarrow$

$|f(x)| \leq n^2$

$y \xrightarrow{B} O(|y|^3)$ pași

$q = f(x) \qquad O(n^6)$



Def A se numește NP-completă

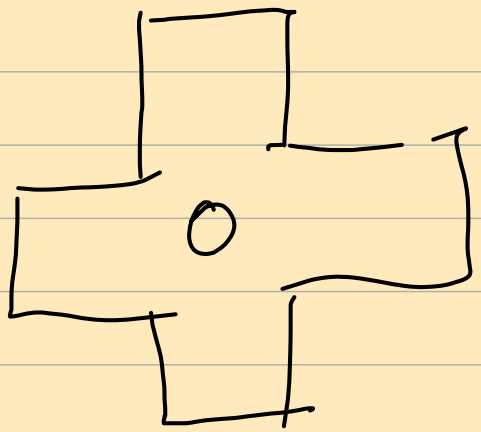
- $A \in NP$
- $\forall B \in NP \quad B \leq_m^P A$

(T) (Cook, Karp) SAT este NP-completă

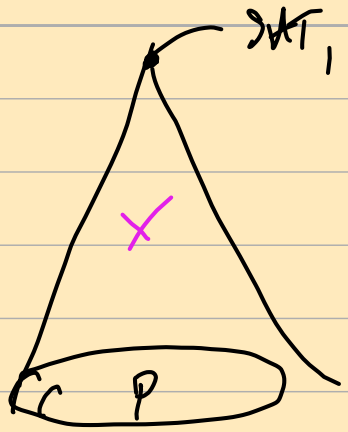
Încă de mii de probleme NP-complete:

- fizică statistică
- biologie computațională
- computational social choice
- ...

$C_1 \rightarrow C_2$



Există probleme care nu sunt în P și nici NP-complete?

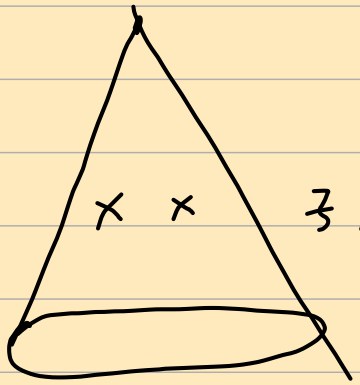


(T) (LADNER) $P \neq NP$

$\Downarrow$

există A care $A \notin P$

A nici este NP-completă



$P \neq NP$

$\Downarrow$

$\exists A, B \in NP \setminus (NPC \cup P)$

$A \not\leq_m^P B$

$B \not\leq_m^P A$

Candidați de probleme intermediare

IZOMORFISMUL DE GRAFURI

Se dau G_1, G_2 (matr adiacență)

De decis există o bijecție $\pi : V_1 \to V_2$

a.î. $(w_1, w_2) \in E_1 \iff (\pi(w_1)\ \pi(w_2)) \in E_2$

(T) (BABAI) $GI \in O(n^{\log^n})$

(T) 3-SAT este NP-completă

3SAT $\phi \in CNF$

$$\phi = \bigwedge C_i$$

$$|C_i| \leq 3$$

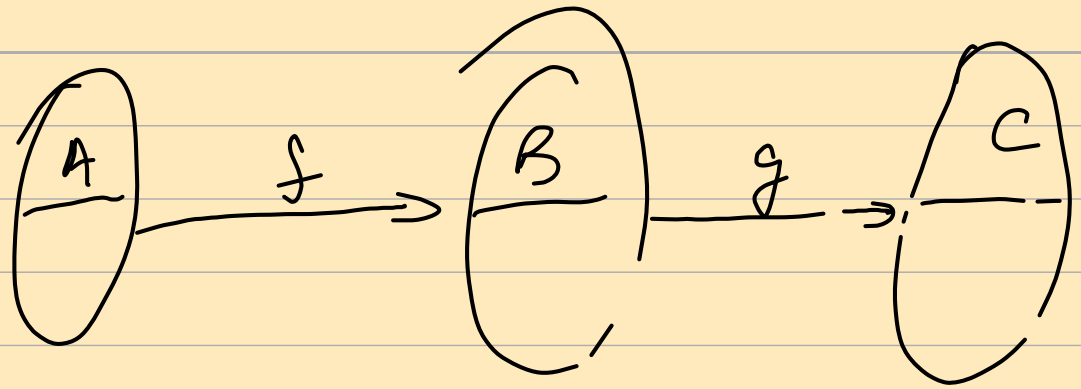
Dem - 3-SAT $\in NP$

- $SAT \leq_m^P$ 3-SAT

(L) $A \leq_m^P B$, $B \leq_m^P C$

$\Downarrow$

$A \leq_m^P C$



$A \leq_m^p C$ via $g \circ f$

$\boxed{x \in A \iff (g \circ f)(x) \in C}$

$x \in A \iff f(x) \in B$

$y \in B \iff g(y) \in C$

$\boxed{y = f(x)}$

$g \circ f$ calculabilă în timp polinomial

$f \quad O(n^4)$

$g \quad O(n^3)$

$g \circ f \to O(n^6)$

$|x| = n \Rightarrow$

$|f(x)| = O(n^4)$

$SAT \leq_m^P 3\text{-}SAT$

$\forall A \in NP \quad A \leq_m^P SAT$

$\Downarrow$

$\forall A \in NP \quad A \leq_m^P 3\text{-}SAT$

$\phi \in CNF \Rightarrow \tilde{\phi} \in 3\text{-}CNF$

$\phi \in SAT \Leftrightarrow \tilde{\phi} \in 3\text{-}SAT$

IDEE

$x \vee y \vee \bar{z} \vee t$

$\downarrow$

clauză $\rightarrow$ ϕ

α variabilă nouă

$x \vee y \vee \alpha$

$\bar{\alpha} \vee \bar{z} \vee t$

$x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t} \vee \varphi$,

$x \vee y \vee \alpha$

$\bar{\alpha} \vee \bar{z} \vee \bar{t} \vee \varphi$

$\Downarrow$

clause de lg 3

(T) 2-SAT $\in P$

Obs k-SAT $k \geq 3$ NP-complete

Exp 3-SAT $\leq_m^P$ 4-SAT

$\phi = \bigwedge C_i$

$x \vee y \vee \bar{z}$

ϕ

$x \vee y \vee \bar{z} \vee \alpha$ (α vaz nouv.)

$x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{\varphi}$

Def 1-in-3 SAT

INPUT $\phi = \bigwedge C_i$

$C_i(x,y,z)$ = TRUE $\Leftrightarrow$ există x,y,z = TRUE

restul sunt FALSE

(T) 1-IN-3 SAT este NP-completă

Dem $\boxed{\text{1-IN-3 SAT} \in NP}$ (1)

3-SAT $\leq_m^P$ 1-IN-3 SAT (2)

(1) alg care ghicește $\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n \in \{T,F\}$

și verifică că $\forall C_i$ C_i adevărată.

(2) 3-SAT $\leq_m^P$ 1-IN-3 SAT

ϕ $\quad\quad$ $\tilde{\phi}$

$x \vee y \vee z$

T F F

$C(x, a, d)$ $\quad$ T ≠ F

C(g, b, d) ≠ T F

C(a, b, e) F T F

C(c, d, f) T F F

C(z, c, FALSE) F T F

a, b, c, d, e, f voz. noi

F F T F F F