PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 03

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ, FFT

Cristian Rusu

DATA TRECUTĂ

- clarificări despre funcții continue, discrete și eșantionare
- numere complexe, formula lui Euler
- corelația între semnale
    - discrete
    - continue
- transformatele Fourier

CUPRINS

- transformata Fourier discretă
- perspectiva dinspre informatică
- transformata Fourier rapidă

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- **ni se dă un vector $\mathbf{x}$, de dimensiune n**

- **Transformata Fourier Discretă:**
  - **componenta Fourier 0 $=$ (exponențiala complexă 0$)^T\mathbf{x}$**
  - **componenta Fourier 1 $=$ (exponențiala complexă 1$)^T\mathbf{x}$**

  …
  - **componenta Fourier $n-1 =$ (exponențiala complexă $n-1)^T\mathbf{x}$**

- **formula pentru componenta Fourier m**

$$X[m] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi jk\frac{m}{n}} \textbf{ pentru } m = 0,\ldots,n-1$$

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- **formula pentru componenta Fourier** m

$$X[m] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi j k \frac{m}{n}} \textbf{ pentru } m = 0, \ldots, n-1$$

- **transformata inversă**

$$x[k] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X[m] e^{2\pi j k \frac{m}{n}} \textbf{ pentru } k = 0, \ldots, n-1$$

faptul că transformata Fourier are semnul minus este o convenție
ideea este ca transformata directă și inversă să aibă semne diferite

EXEMPLU DFT

- **când** $n = 4$ **avem** $k, m \in \{0,1,2,3\}$

$$X[m] = \sum_{k=0}^{3} x[k]\left[\cos(2\pi mk/4) - j\sin(2\pi mk/4)\right]$$

- **care sunt cele 4 componente ale DFT?**

$$\begin{aligned}
X[0] = x[0]&\left[\cos(2\pi \underbrace{0\cdot 0}_{m\cdot k}/4) - j\sin(2\pi \underbrace{0\cdot 0}_{m\cdot k}/4)\right] \\
&+x[1]\left[\cos(2\pi 0\cdot 1/4) - j\sin(2\pi 0\cdot 1/4)\right] \\
&+x[2]\left[\cos(2\pi 0\cdot 2/4) - j\sin(2\pi 0\cdot 2/4)\right] \\
&+x[3]\left[\cos(2\pi 0\cdot 3/4) - j\sin(2\pi 0\cdot 3/4)\right] \\
&= ?
\end{aligned}$$

EXEMPLU DFT

- **când** $n = 4$ **avem** $k, m \in \{0,1,2,3\}$

$$X[m] = \sum_{k=0}^{3} x[k]\left[\cos(2\pi mk/4) - j\sin(2\pi mk/4)\right]$$

- **care sunt cele 4 componente ale DFT?**

$$X[0] = x[0]\left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot k}/4) - j\sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot k}/4)\right]$$

$$+x[1]\left[\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 0 \cdot 1/4)\right]$$

$$+x[2]\left[\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 0 \cdot 2/4)\right]$$

$$+x[3]\left[\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 0 \cdot 3/4)\right]$$

$$= x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$$

EXEMPLU DFT

- **celelalte componente:**

$$X[1] = x[0][\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot k} /4) - j\sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot k} /4)]$$

$$+x[1]\left[\cos(2\pi 1 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 1/4)\right]$$

$$+x[2]\left[\cos(2\pi 1 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 2/4)\right]$$

$$+x[3]\left[\cos(2\pi 1 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 3/4)\right]$$

$$X[2] = x[0][\cos(2\pi 2 \cdot 0/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 0/4)]$$

$$+x[1]\left[\cos(2\pi 2 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 1/4)\right]$$

$$+x[2]\left[\cos(2\pi 2 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 2/4)\right]$$

$$+x[3]\left[\cos(2\pi 2 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 3/4)\right]$$

$$X[3] = x[0][\cos(2\pi 3 \cdot 0/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 0/4)]$$

$$+x[1]\left[\cos(2\pi 3 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 1/4)\right]$$

$$+x[2]\left[\cos(2\pi 3 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 2/4)\right]$$

$$+x[3]\left[\cos(2\pi 3 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 3/4)\right]$$

EXEMPLU DFT

- **forma matriceală**

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi j 0\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 2\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 3\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

EXEMPLU DFT

- **forma matriceală**

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi j 0\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 2\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 3\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- **o simplificare**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi j 1\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 3/4} \\ 1 & e^{-2\pi j 2\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 3/4} \\ 1 & e^{-2\pi j 3\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 3/4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

- **forma compactă: $\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, $\mathbf{F}$ se numește matricea Fourier**

EXEMPLU DFT

- **forma matriceală**

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi j 0\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 0\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 2\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2\cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 3\cdot 0/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3\cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- **o simplificare**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

- **forma compactă:** $\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, $\mathbf{F}$ **se numește matricea Fourier**

AL DOILEA EXEMPLU DFT

- matricea Fourier este câteodată scalată (fie cu $\frac{1}{n}$ și atunci prima componentă e chiar media semnalului $\mathbf{x}$, fie cu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ și atunci matricea este ortonormală: $\mathbf{F}^H\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^H = \mathbf{I}_n$)

- pentru $n = 8$

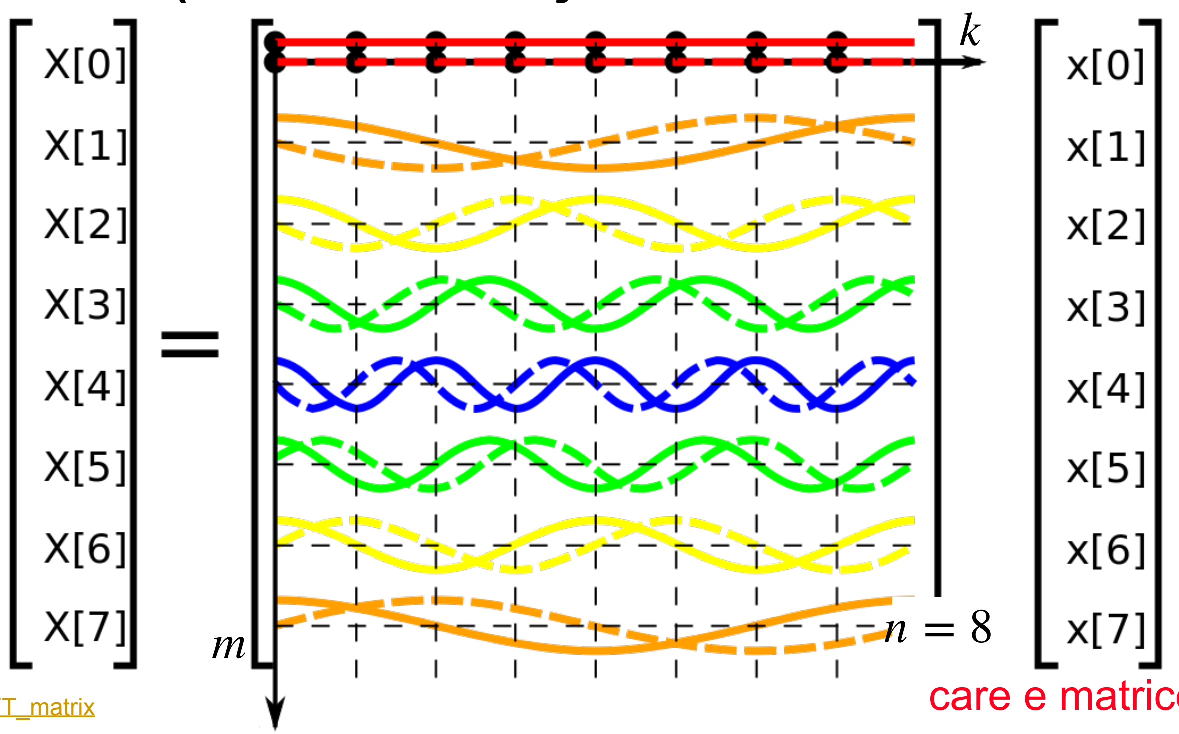
$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/DFT_matrix

AL DOILEA EXEMPLU DFT

- matricea Fourier este câteodată scalată (fie cu $\frac{1}{n}$ și atunci prima componentă e chiar media semnalului $\mathbf{x}$, fie cu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ și atunci matricea este ortonormală: $\mathbf{F}^H\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^H = \mathbf{I}_n$)

- pentru $n = 8$ (undele de mai jos sunt artificial "netede")



https://en.wikipedia.org/wiki/DFT_matrix

care e matricea Fourier 2×2?

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- **ce înseamnă elementele din $X[m]$?**

- **Transformata Fourier Discretă:**
  - **componenta Fourier 0 $=$ (exponențiala complexă 0)$^T\mathbf{x}$**
  - **componenta Fourier 1 $=$ (exponențiala complexă 1)$^T\mathbf{x}$**

    …
  - **componenta Fourier $n-1 =$ (exponențiala complexă $n-1)^T\mathbf{x}$**

- **care este frecvența pe care o măsoară componenta m?**

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- **pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem frecvența fundamentală:**

$$f = \frac{f_s}{n} = \frac{500}{16} = 31.25Hz$$

- **frecvențele analizate sunt:**

$X[0]$ **reprezintă** $0 \cdot 31.25 = 0Hz$ **(prima componentă în frecvență)**

$X[1]$ **reprezintă** $1 \cdot 31.25 = 31{,}25Hz$ **(a doua componentă în frecvență)**

$X[2]$ **reprezintă** $2 \cdot 31.25 = 62{,}5Hz$ **(a treia componentă în frecvență)**

$X[3]$ **reprezintă** $3 \cdot 31.25 = 93{,}75Hz$ **(a patra componentă în frecvență)**

$\vdots$

$X[15]$ **reprezintă** $15 \cdot 31.25 = 468{,}75Hz$**(a 16-a componentă în frecvență)**

CALCUL DFT

- **vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:**

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

- **vom avea nevoie de 8 componente în frecvență și alegem frecvența de eșantionare** $f_s = 8000Hz$

- **atunci frecvențele analizate sunt:**

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz\ ,1kHz,\ 2kHz,\ \ldots,\ 7kHz\}$$

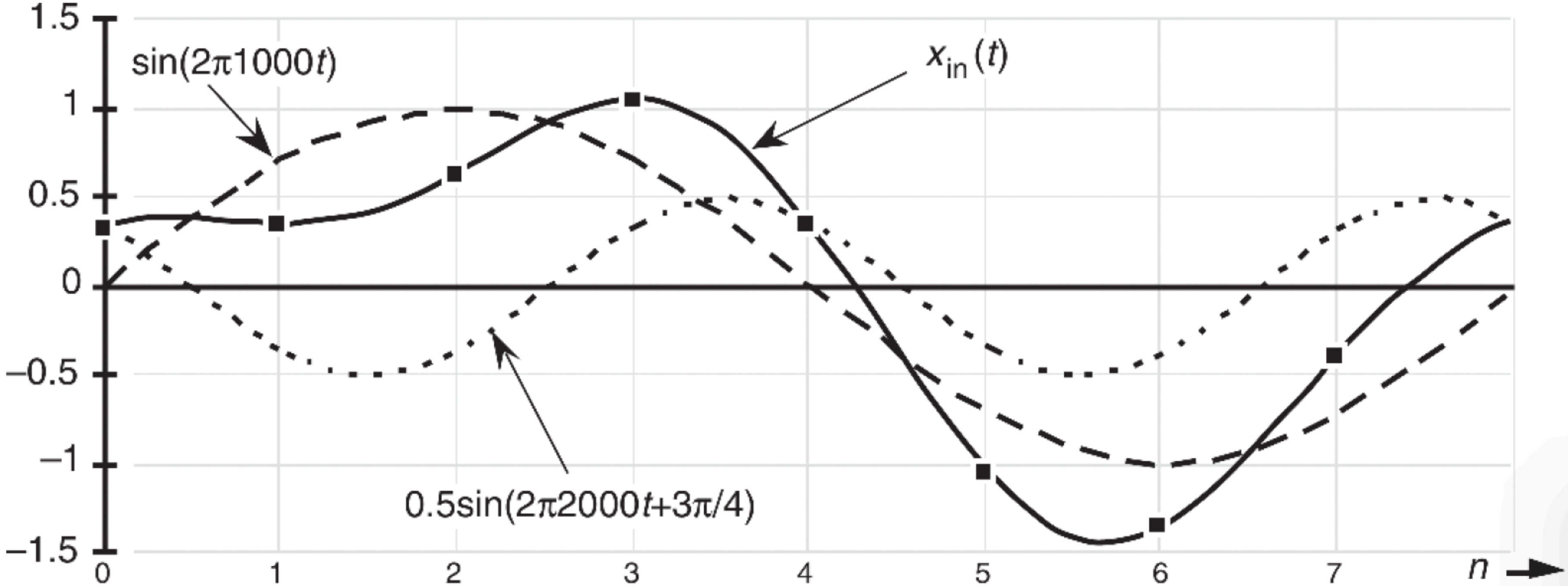
- **transformata Fourier discretă este**

$$X[m] = \sum_{k=0}^{7} x[k]\left[\cos(2\pi mk/8) + j\sin(2\pi mk/8)\right]$$

CALCUL DFT

- **cele 8 eșantioane în timp:**

$$x[0] = 0.3535 \qquad x[1] = 0.3535$$
$$x[2] = 0.6464 \qquad x[3] = 1.0607$$
$$x[4] = 0.3535 \qquad x[5] = -1.0607$$
$$x[6] = -1.3535 \qquad x[7] = -0.3535$$



Sursă: (Lyons04_udsp)

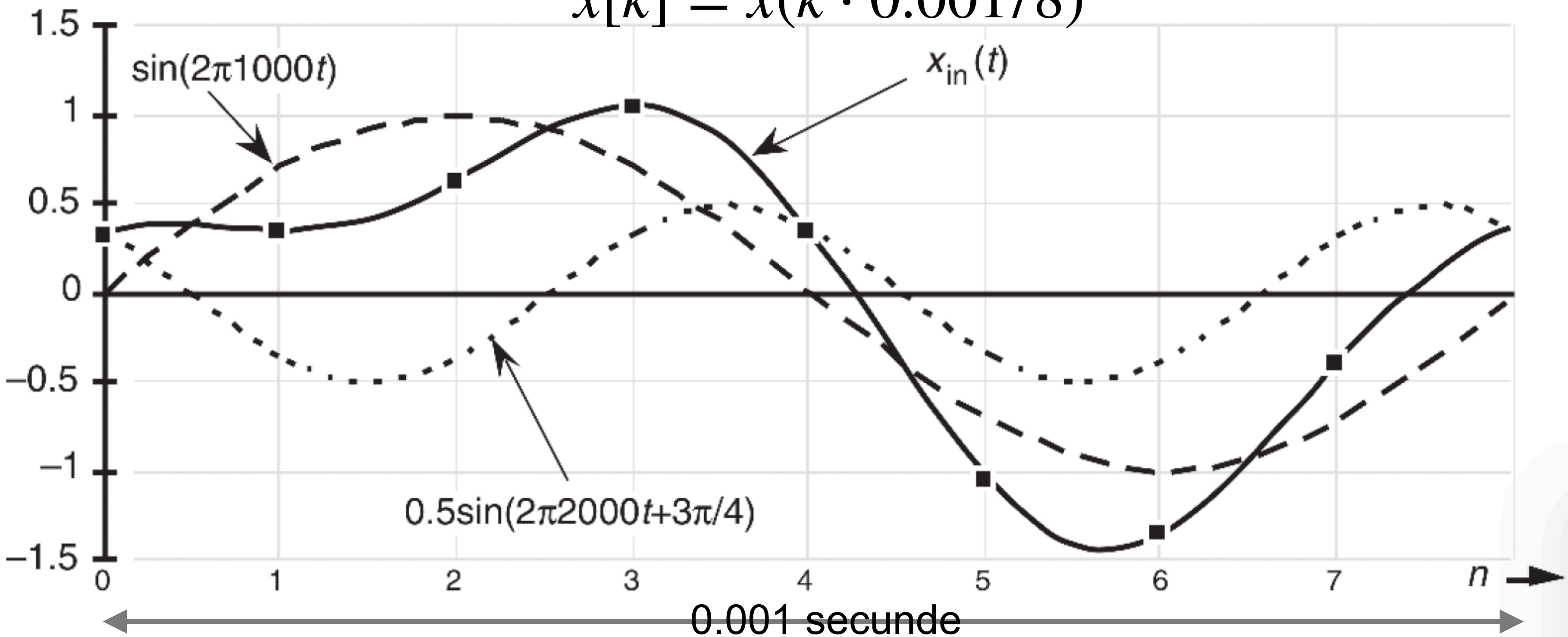
pe acest grafic timpul este eșantionat
care este timpul “real”?

CALCUL DFT

- **cele 8 eșantioane în timp:**

$$x[0] = 0.3535 \qquad x[1] = 0.3535$$
$$x[2] = 0.6464 \qquad x[3] = 1.0607$$
$$x[4] = 0.3535 \qquad x[5] = -\,1.0607$$
$$x[6] = -\,1.3535 \qquad x[7] = -\,0.3535$$

$$x[k] = x(k \cdot 0.001/8)$$



Sursă: (Lyons04_udsp)

CALCUL DFT

- **componentele Fourier sunt:**

$$X[1] = 0.0 - j4.0$$
$$X[2] = 1.414 + j1.414$$
$$X[3] = 0.0 + j0.0$$
$$X[4] = 0.0 + j0.0$$
$$X[5] = 0.0 + j0.0$$
$$X[6] = 1.414 - j1.414$$
$$X[7] = 0.0 + j4.0$$

- **cât sunt valorile absolute ale componentelor?**
- **cât este $X[0]$?**
- **ce relație observați între componente?**

CALCUL DFT

- **componentele Fourier sunt:**

$$X[1] = 0.0 - j4.0 \qquad \textbf{abs}(X[1]) = 4$$
$$X[2] = 1.414 + j1.414 \qquad \textbf{abs}(X[2]) = 2$$
$$X[3] = 0.0 + j0.0 \qquad \textbf{abs}(X[3]) = 0$$
$$X[4] = 0.0 + j0.0 \qquad \textbf{abs}(X[4]) = 0$$
$$X[5] = 0.0 + j0.0 \qquad \textbf{abs}(X[5]) = 0$$
$$X[6] = 1.414 - j1.414 \qquad \textbf{abs}(X[6]) = 2$$
$$X[7] = 0.0 + j4.0 \qquad \textbf{abs}(X[7]) = 4$$

- **cât sunt valorile absolute ale componentelor?**
- **cât este $X[0]$?**
- **ce relație observați între componente?**

CALCUL DFT

- **ce se întâmplă acum dacă avem:**

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi \cdot 1500 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

- **din nou cu 8 componente în frecvență și alegem frecvența de eșantionare** $f_s = 8000Hz$

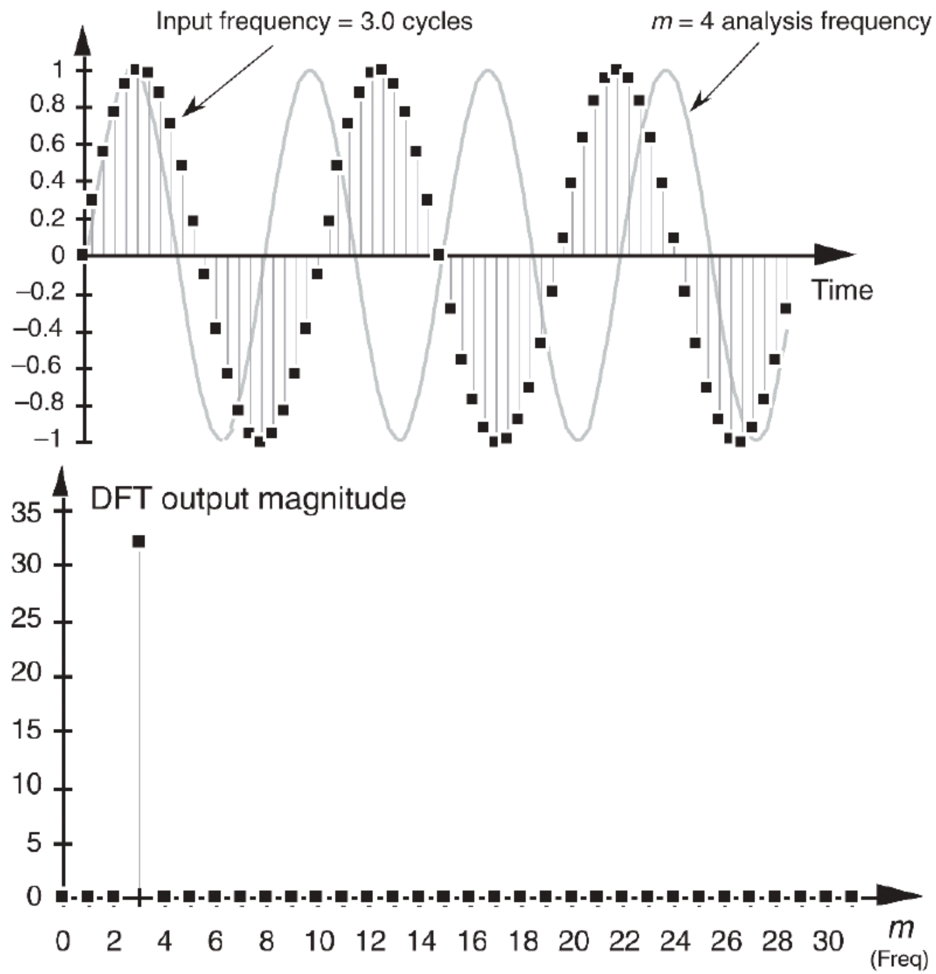
- **atunci frecvențele analizate sunt:**

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \ldots, 7kHz\}$$

- **1500Hz nu mai apare printre frecvențele analizate**

CALCUL DFT

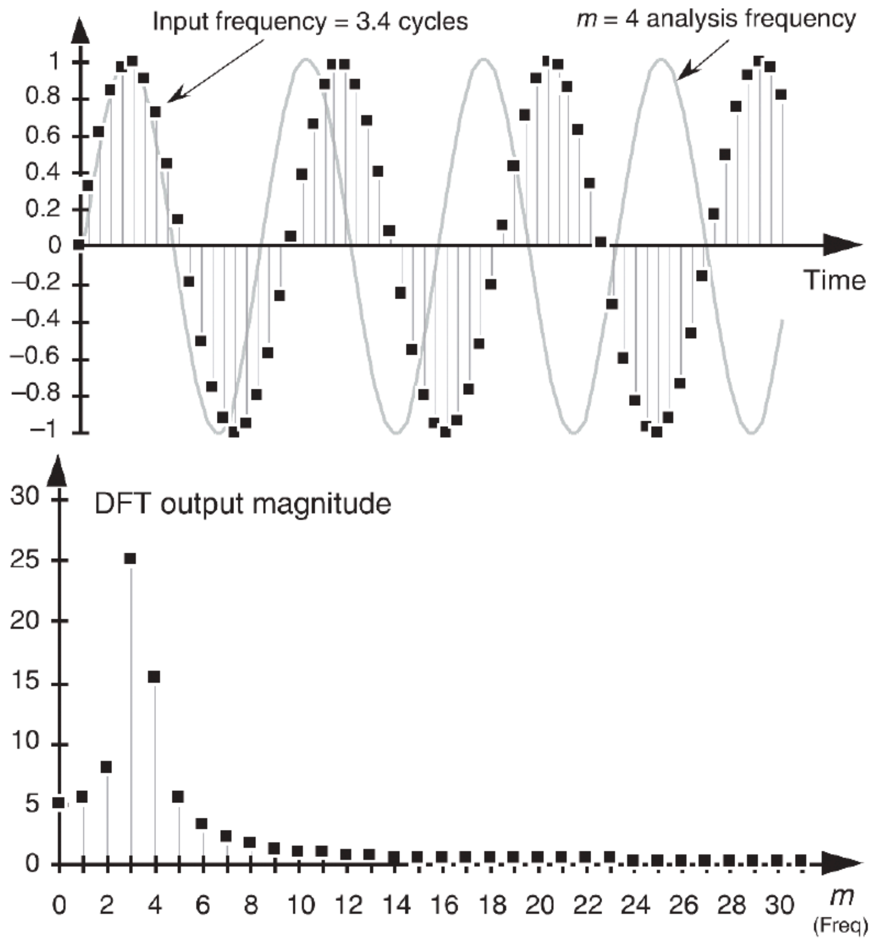
- 1500Hz nu mai apare printre frecvențele analizate
- apare fenomenul de leakage



Sursă: (Lyons04_udsp)

CALCUL DFT

- 1500Hz nu mai apare printre frecvențele analizate
- apare fenomenul de leakage



Sursă: (Lyons04_udsp)

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **perspectiva matematică**

$$X[m] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi jk\frac{m}{n}}$$

$$= \sum_{k=2t}^{n-1} x[2t] e^{-2\pi j2t\frac{m}{n}} + \sum_{k=2t+1}^{n-1} x[2t+1] e^{-2\pi j(2t+1)\frac{m}{n}}$$

$$= \sum_{k=2t}^{n-1} x[2t] e^{-2\pi jt\frac{m}{n/2}} + e^{-2\pi j\frac{m}{n}} \sum_{k=2t+1}^{n-1} x[2t+1] e^{-2\pi jt\frac{m}{n/2}}$$

-

$$= \mathbf{DFT}(\mathbf{x}_{\mathbf{even}})[m] + e^{-2\pi j\frac{m}{n}} \mathbf{DFT}(\mathbf{x}_{\mathbf{odd}})[m]$$

$$= X_{\mathbf{even}}[m] + e^{-2\pi j\frac{m}{n}} X_{\mathbf{odd}}[m]$$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- perspectiva din informatică
- reprezentările polinoamelor
- operații cu polinoame
- operația de convoluție
- un algoritm divide and conquer pentru transformata Fourier
- transformata Fourier rapidă (Fast Fourier Transform)

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **se dă un polinom:**

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \\ &:= [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{n-1}] \end{aligned}$$

- $n - 1$ **se numește gradului polinomului**
- a_k **se numesc coeficienți**
- **exemplu:** $P(x) = \frac{1}{2} + 2x - 3x^2 + \pi x^3$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **se dă un polinom:**

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + x^{n-1}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} (x - r_k)$$

- r_k **se numesc rădăcinile polinomului**

- **exemplu:** $P(x) = 2 - 2x - x^2 + 2x^3 = (x-1)(x^2-2)$

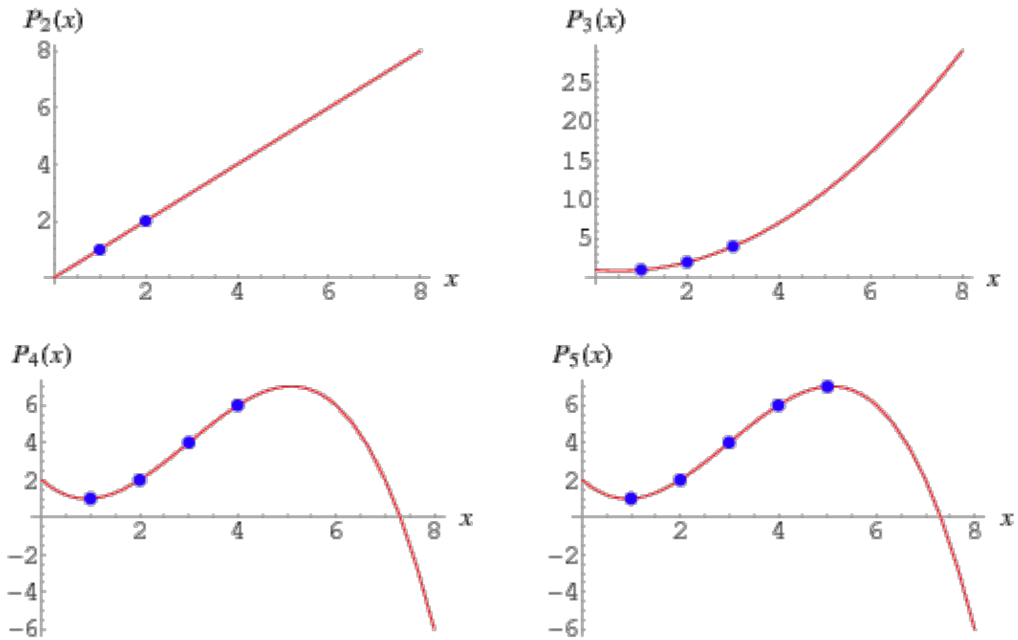
  iar soluțiile sunt: $r_0 = 1,\ r_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **se dă un polinom:**

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

- **polinomul are n grade de libertate (coeficienții)**
- **acestea sunt descrise unic de către n constrângeri diferite**
- **exemple:**



imaginea https://mathworld.wolfram.com/LagrangeInterpolatingPolynomial.html

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **se dă un polinom:**

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

- **polinomul are** n **grade de libertate (coeficienții)**
- **exemplu:** $P(x) = 1 + 2x + 2x^2$
  - **pentru** $x_1 = 0,\ y_1 = P(x_1) = 2$
  - **pentru** $x_2 = 1,\ y_2 = P(x_2) = 5$
  - **pentru** $x_3 = -1,\ y_3 = P(x_3) = 1$

  - **deci, punctele sunt (0, 2), (1, 5) și (-1, 1)**

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- reprezentarea polinoamelor:

1. coeficienți

2. rădăcini

3. puncte pe grafic (eșantioane)

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **operații cu polinoame:**

- **evaluarea la un punct**
  - **se dă un punct** x_0
  - **evaluăm** $y_0 = P(x_0)$

- **adunarea a două polinoame**
  - **se dau** $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ **și** $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$
  - **se calculează** $R(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k) x^k$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **operații cu polinoame:**

- **înmulțirea a două polinoame**
  - **se dau** $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ **și** $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

  - **se calculează**

    $$R(x) = P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_k x^k,$$ **unde** $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

  - **exemplu** $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ **și** $Q(x) = 1 - 2x - x^2$ **și rezultă** $R(x) = 1 - 2x^2 - 8x^3 - 3x^4$

câte operații avem nevoie pentru a calcula $R(x)$?

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **operații cu polinoame:**
- **înmulțirea a două polinoame**
  - **se dau** $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ **și** $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$
  - **se calculează**

$$R(x) = P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_k x^k, \text{ unde } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

  - **exemplu** $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ **și** $Q(x) = 1 - 2x - x^2$ **și rezultă** $R(x) = 1 - 2x^2 - 8x^3 - 3x^4$

câte operații avem nevoie pentru a calcula $R(x)$? $O(n^2)$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **operații cu polinoame:**

- **înmulțirea a două polinoame**
  - **se calculează**

$$R(x) = P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_k x^k, \text{ unde } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

  - **operația este una de convoluție**

  - **convoluția se poate realiza în $O(n \log n)$ operații**

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **Rezumat**

	coeficienți	rădăcini	eșantioane
evaluare	O(n)	O(n)	$O(n^2)$
adunare	O(n)	dificil	O(n)
înmulțire	$O(n^2)$	O(n)	O(n)

obiectivul: vrem înmulțirea în coeficienți să ia mai puțin de $O(n^2)$
ideea: transformăm din coeficienți în eșantioane și acolo e ușor să înmulțim, apoi ne întoarcem înapoi la coeficienți

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **e mult mai ușor să facem înmulțirea dacă avem eșantioane**
- **deci, dacă avem coeficienți vrem să trecem la eșantioane**
  - **avem puncte** $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$
  - **vrem să calculăm** $y_0 = P(x_0), y_1 = P(x_1), \ldots, y_{n-1} = P(x_{n-1})$

$$n \; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{n} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Va} = \mathbf{y}$$

dar înmulțirea matrice-vector $\mathbf{Va}$ necesită O(n^2) operații

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **e mult mai ușor să facem înmulțirea dacă avem eșantioane**
- **deci, dacă avem coeficienți vrem să trecem la eșantioane**
  - **avem puncte** $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$
  - **vrem să calculăm** $y_0 = P(x_0), y_1 = P(x_1), \ldots, y_{n-1} = P(x_{n-1})$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{n} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

n

$$\mathbf{Va} = \mathbf{y}$$

dar înmulțirea matrice-vector $\mathbf{Va}$ necesită $O(n^2)$ operații

dar, noi putem alege punctele x_k

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **cum să alegem punctele x_k astfel încât $\mathbf{Va}$ să fie rapid?**

- **un algoritm divide and conquer**
  - **vrem să calculăm $P(x),\ x \in \mathbb{X}$**

  1. divide

  2. conquer

  3. combine

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **cum să alegem punctele x_k astfel încât $\mathbf{V}$a să fie rapid?**

- **un algoritm divide and conquer**
  - **vrem să calculăm $P(x),\ x \in \mathbb{X}$**

1. divide

$$P_{\textbf{par}}(x) = \sum_{k=0}^{\lceil n/2-1 \rceil} a_{2k} x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \ldots]$$

$$P_{\textbf{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2-1 \rfloor} a_{2k+1} x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \ldots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(\ ?\ ) + P_{\textbf{impar}}(\ ?\ )$$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **cum să alegem punctele x_k astfel încât $\mathbf{V}$a să fie rapid?**

- **un algoritm divide and conquer**
  - **vrem să calculăm $P(x),\ x \in \mathbb{X}$**

1. divide

$$P_{\textbf{par}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} a_{2k} x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \ldots]$$

$$P_{\textbf{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k+1} x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \ldots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + P_{\textbf{impar}}(\ ?\ )$$

am folosit faptul că $(x^2)^k = x^{2k}$

.

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- cum să alegem punctele x_k astfel încât $\mathbf{V}$a să fie rapid?

- un algoritm divide and conquer
  - vrem să calculăm $P(x)$, $x \in \mathbb{X}$

1. divide

$$P_{\textbf{par}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} a_{2k} x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \ldots]$$

$$P_{\textbf{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k+1} x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \ldots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2), \ \forall x \in \mathbb{X}$$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **cum să alegem punctele x_k astfel încât $\mathbf{V}$a să fie rapid?**

- **un algoritm divide and conquer**
  - **vrem să calculăm $P(x),\ x \in \mathbb{X}$**

1. divide

$$P_{\textbf{par}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} a_{2k}x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots]$$

$$P_{\textbf{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k+1}x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \mathbb{X}$$

3. conquer

calculează recursiv $P_{\textbf{par}}(y)$ și $P_{\textbf{impar}}(y)$ unde $y \in \mathbb{X}^2 = \{x^2 \,|\, x \in \mathbb{X}\}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **OK, acum avem $P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \mathbb{X}$**
- **ce am câștigat dacă am scris așa?**
  - **cele două subprobleme cu polinoame de dimensiune $n/2$**
  - **dar tot trebuie să evaluăm în $|\mathbb{X}|$ puncte**
  - **deci recursia nu reduce complet dimensiunea problemei**

  - **soluția: când trecem de la $\mathbb{X}$ la $\mathbb{X}^2$ vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $|\mathbb{X}| > |\mathbb{X}^2|$**
  - **dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $|\mathbb{X}^2| = |\mathbb{X}|/2$**

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- OK, acum avem $P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \mathbb{X}$
- soluția: când trecem de la $\mathbb{X}$ la $\mathbb{X}^2$ vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $|\mathbb{X}| > |\mathbb{X}^2|$
- dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $|\mathbb{X}^2| = |\mathbb{X}|/2$
- exemple:
  - $|\mathbb{X}| = 1$, atunci $\mathbb{X} = \{1\}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **OK, acum avem** $P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția: când trecem de la** $\mathbb{X}$ **la** $\mathbb{X}^2$ **vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică** $|\mathbb{X}| > |\mathbb{X}^2|$
- **dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică** $|\mathbb{X}^2| = |\mathbb{X}|/2$
- **exemple:**
  - $|\mathbb{X}| = 1$, **atunci** $\mathbb{X} = \{1\}$
  - $|\mathbb{X}| = 2$, **atunci** $\mathbb{X} = \{-1, +1\}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **OK, acum avem** $P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2), \forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția: când trecem de la** $\mathbb{X}$ **la** $\mathbb{X}^2$ **vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică** $|\mathbb{X}| > |\mathbb{X}^2|$
- **dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică** $|\mathbb{X}^2| = |\mathbb{X}|/2$
- **exemple:**
  - $|\mathbb{X}| = 1$, **atunci** $\mathbb{X} = \{1\}$
  - $|\mathbb{X}| = 2$, **atunci** $\mathbb{X} = \{-1, +1\}$
  - $|\mathbb{X}| = 4$, **atunci** $\mathbb{X} = \{-1, +1, -i, i\}$
  - **…**

deci? care e secretul? care e formula pentru elementele x_k?

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **OK, acum avem** $P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2), \ \forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția: când trecem de la** $\mathbb{X}$ **la** $\mathbb{X}^2$ **vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică** $|\mathbb{X}| > |\mathbb{X}^2|$
- **dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică** $|\mathbb{X}^2| = |\mathbb{X}|/2$
- **exemple:**
  - $|\mathbb{X}| = 1$, **atunci** $\mathbb{X} = \{1\}$
  - $|\mathbb{X}| = 2$, **atunci** $\mathbb{X} = \{-1, +1\}$
  - $|\mathbb{X}| = 4$, **atunci** $\mathbb{X} = \{-1, +1, -i, i\}$
  - **…**

deci? care e secretul? care e formula pentru elementele x_k? $x_k = \exp(2\pi jk/n)$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ dar elementele x_k din $\mathbf{V}$ sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, $\mathbf{V}$ se notează cu $\mathbf{F}$ și se numește matricea Fourier

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{D} \\ \mathbf{I}_{n/2} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2), \ \forall x \in \{\textbf{rădăcini a unității}\}$$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ dar elementele x_k din $\mathbf{V}$ sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, $\mathbf{V}$ se notează cu $\mathbf{F}$ și se numește matricea Fourier

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{D} \\ \mathbf{I}_{n/2} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \{\textbf{rădăcini a unității}\}$$

.

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector $\mathbf{V}$a dar elementele x_k din $\mathbf{V}$ sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, $\mathbf{V}$ se notează cu $\mathbf{F}$ și se numește matricea Fourier

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{D} \\ \mathbf{I}_{n/2} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \ \forall x \in \{\text{rădăcini a unității}\}$$

.

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ dar elementele x_k din $\mathbf{V}$ sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, $\mathbf{V}$ se notează cu $\mathbf{F}$ și se numește matricea Fourier

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{D} \\ \mathbf{I}_{n/2} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

de ce apare D și -D? dacă
$a \in \{$rădăcini a unității$\}$ atunci și
$-a \in \{$rădăcini a unității$\}$

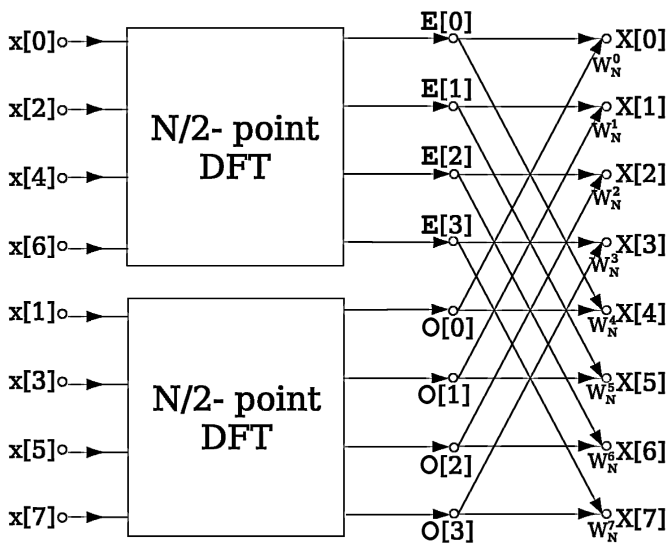
$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \{\textbf{rădăcini a unității}\}$$

.

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ dar elementele x_k din $\mathbf{V}$ sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, $\mathbf{V}$ se notează cu $\mathbf{F}$ și se numește matricea Fourier



pentru că la fiecare pas dimensiunea problemei se înjumătățește, complexitatea totală este $O(n \log n)$

$$P(x) = P_{\textbf{par}}(x^2) + xP_{\textbf{impar}}(x^2),\ \forall x \in \{\textbf{rădăcini a unității}\}$$

imaginea: from https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_diagram

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **calculul convoluției:**
  - **X = FFT(P)**
  - **Y = FFT(Q)**

    de la coeficienți mergem la eșantioane $O(n \log n)$
  - **Z = XY**

    înmulțirea pe eșantioane $O(n)$
  - **R = IFFT(Z)**

    de la eșantioane mergem înapoi la coeficienți $O(n \log n)$

- **am obținut ce doream, convoluție în** $O(n \log n)$
  - **defapt este** $2 \times O(n \log n) + O(n)$

REFERINȚE

- **But what is the Fourier Transform? A visual introduction, 3Blue1Brown, Youtube**
- **Lecture 3 Divide and Conquer: Fast Fourier Transform, Design and Analysis of Algorithms, E. Demain, MIT**
- **Lecture 31: Fast Fourier Transform, Convolution, Computational Science and Engineering I, G. Strang, MIT**
- **The Fast Fourier Transform (FFT): Most Ingenious Algorithm Ever?, Reducible**
- **Complex Matrices; Fast Fourier Transform, G. Strang, MIT**
- **The Fast Fourier Transform Algorithm, Barry Van Veen**
- **Prelucrarea semnalelor, B. Dumitrescu, UPB (Capitolul 5.3)**