$\boxed{\text{Apl. 1}}$ Considerăm transf. liniară

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x-y+2z, -x+2y-z, x+y+z),$$
$$(\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Scrieți matricea asociată lui f în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) Determinați valorile proprii și subsp. proprii coresp.

c) Verificați dacă f este diagonalizabilă.

d) În caz afirmativ, scrieți matricea (forma) diagonală și baza în care se realizează.

Rez: a)
$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$
$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$

b) Polinomul caracteristic:
$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Ec. caracteristică: $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \underline{\in \mathbb{R}} \ \underline{\text{valorile proprii}} \quad Spec(f) = \{0, 2, 3\}$$

și $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile algebrice}

<u>Subspații proprii:</u>

$$S'_\lambda : \begin{cases} (2-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ -x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$S'_{\lambda_1} : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \{\lambda_1 = 0\}$$

$\to$ sistem liniar omogen, cu 3 ec. și 3 nec.

$$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies$$

x, y nec principale

$z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundare

$$\implies \begin{cases} 2x - y = -2\alpha \mid \cdot 2 \\ -x + 2y = \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ \boxed{z = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \underbrace{(-1, 0, 1)}_{\substack{\text{not} \\ v_1}} / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Analog, rezolvând sistemele S'_{λ_2} și S'_{λ_3} vom obține

$$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(1, -2, 1)}_{\substack{\text{not} \\ v_2}} / \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1, -1, 0)}_{\substack{\text{not} \\ v_3}} / \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Deci: $\dim V_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_2} = \dim V_{\lambda_3} = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile geometrice}

Avem $\begin{cases} 1)\ m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + m_a(\lambda_3) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \\ 2)\ m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i),\ (\forall)\ i = \overline{1,3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f este diagonalizabilă, deci $(\exists)$ $B \subset \mathbb{R}^3$ {bază formată din vectori proprii coresp. lui $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care sunt liniar indep. deoarece valorile proprii sunt distincte)}

În raport cu care, matricea asociată lui f are formă diagonală:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

$B = \{ v_1 = (-1, 0, 1),\ v_2 = (1, -2, -1),\ v_3 = (1, -1, 0) \}$

Suplimentar:

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, "C"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_f & \boxed{D = C^{-1} A_f C} \end{tikzcd}$$

$C \to$ m. de trecere de la baza canonică B_0 la baza B, i.e. $C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$

$\boxed{Apl.\ 2}$ Același enunț ca în apl. $\boxed{1}$ pentru transf. liniară:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x + y - z, 2y, x + y + z)$,

$(\forall)\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Rez: a) $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_2)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3$$

Ec. caracteristică:

$P(\lambda) = 0 \iff -(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 2}_{\text{valoare proprie}}, \ m_a(\lambda_1) = 3$

$Spec(f) = \{2\}$

Subspații proprii

$$S_\lambda : \begin{cases} (3-\lambda)x + y - z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\lambda_1} : \{\lambda_1 = 2\} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 1 \Rightarrow$ Luăm $\left| \begin{array}{l} x \text{ nec. principală} \\ y = \alpha \\ z = \beta, \end{array} \right.$ nec. secundare

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha+\beta, \alpha, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha \underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + \beta \underbrace{(1, 0, 1)}_{v_2} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Rezultă că:

$\Longrightarrow B_1 = \{v_1, v_2\} \subset V_{\lambda_1}$

sistem de gen. + sistem $\underbrace{\text{lin. indep.}}_{\text{(se verifică!)}} \longrightarrow \underbrace{\text{bază}} \longrightarrow \dim V_{\lambda_1} = 2$

i.e. $m_g(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 2 < 3 = m_a(\lambda_1)$, deci f $\boxed{\text{nu}}$ este diagonalizabilă.

$\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț, ca în ap. $\boxed{1}$ pentru următoarele transf. liniare

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-x+3y-z, -3x+5y-z, -3x+3y+z)$,
$(\forall)(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (6x-5y-3z, 3x-2y-2z, 2x-2y)$,
$(\forall)(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

c) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (x+y+z+t, x+y-z-t, x-y+z-t, x-y-z+t)$,
$(\forall)(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Ap. 3}}$ Fie f transf. liniară în $\mathbb{R}^3$ dată de rotația spațiului în jurul axei Oz cu un unghi $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Determinați valorile proprii și subsp. proprii corespunzătoare și interpretați geometric rezultatele obținute.

Rez: $A_f = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\downarrow$

m. asoc. rotației de $\not\!\!\;\frac{\pi}{3}$, în sens direct trigonometric, în jurul axei Oz $\{$de ec. $x=y=0\}$

$$\Rightarrow \underset{\{\theta=\frac{\pi}{3}\}}{A_f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii. Rezolv. ec. caract. în corpul $\mathbb{R}$.

Ec. caract. $\det(A_f - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$ singura valoare proprie reală $\Rightarrow Spec(f) = \{1\}$

$\{\lambda_2 = \overline{\lambda_3} \to$ rădăcini pur complexe $\}$

Subsp. proprii

$$S_\lambda : \begin{cases} \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)y = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = 1} \Rightarrow S_{\lambda_1} : \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{|l} x, y \text{ nec. princ.} \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ nec. sec.} \end{array}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(0, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0, 0, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

<u>Interpretare geometrică:</u>

Evident: $V_{\lambda_1} = Oz$, i.e. singurul subsp. propriu (invariant) este axa Oz ($\equiv$ axa de rotație)

C) <u>PROBLEME PROPUSE PENTRU TEMA ONLINE</u>

1. Determinaţi valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatoari(e) pentru matricele urmatoare:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Stabiliţi dacă matricele de la exerciţiul precedent sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, determinaţi forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicaţia $T: R^3 \to R^3, T(x,y,z) = (x + 4y, 2y + 3z, y)$.

a) Aratati că T este transformare (aplicatie) liniară.
b) Scrieţi matricea asociata lui T, A_T.
c) Determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzatori(e) lui A_T.
d) Precizaţi subspaţiile proprii corespunzătoare transformării (aplicatiei) T şi stabiliţi dacă aceasta este diagonalizabila.
e) Scrieţi, dacă există, matricea diagonalizatoare C şi matricea diagonală D.
f) Verificati rezultatul obtinut.

① Forme biliniare. Forme pătratice

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ sp. vectorial real, n-dimensional.

Se numește <u>formă biliniară</u> o aplicație $F: V\times V \to \mathbb{R}$, a.î.

$$\begin{cases} 1)\ F(\alpha x_1+\beta x_2, y) = \alpha F(x_1,y) + \beta F(x_2,y) \\ 2)\ F(x, \alpha y_1+\beta y_2) = \alpha F(x,y_1) + \beta F(x,y_2) \end{cases} \quad (\forall)\ x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V,\ (\forall)\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

(i.e. liniară în ambele argumente)

$$\boxed{F(x,y) = x^T A y}\ (\forall)\ x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\in V \longrightarrow \text{forma matriceală}$$

$\underbrace{B=\{e_1,\dots,e_n\}\subset V}_{\text{bază}}$

$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$y=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$A=(F(e_i,e_j))_{i,j=\overline{1,n}}$

$\downarrow$

matricea asociată formei bilin. F, în raport cu baza $B\subset V$.

- Dacă $B \xrightarrow{C} B'$ $\Longrightarrow \boxed{A' = {}^tCAC}$

C: matricea de trecere de la baza B la baza B'

{formula de transf. a matricei asoc. unei f. bilin. la sch. de bază}

A, A' — m. asoc. f. bilin. F în raport cu bazele B, resp. B'.

Def: Forma biliniară $F: V\times V \to \mathbb{R}$ s.n. <u>simetrică</u> dacă:

$$F(x,y) = F(y,x),\ (\forall)\ x,y\in V$$

Pentru o formă biliniară simetrică $F: V\times V\to\mathbb{R}$ se definește formă pătratică $\left| \begin{array}{l} Q: V \to \mathbb{R}, \\ Q(x) = F(x,x), (\forall)\, x \in V \end{array} \right.$

Formule de polarizare:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right], (\forall)\, x, y \in V$$

$$Q(x) = F(x,x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$\boxed{Ap\ 1}$ Fie forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3,$$
$$(\forall)\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determinați forma biliniară simetrică asociată lui Q (not. cu F) folosind formula de polarizare

b) Scrieți matricea asociată formei bilin. simetrice F, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Rez: (a) V_1 Utilizăm formula de polarizare

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right], (\forall)\, \underset{(x_1,x_2,x_3)}{x} = , \underset{(y_1,y_2,y_3)}{y} \in \mathbb{R}^3$$

Avem: $F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - Q(x_1,x_2,x_3) - Q(y_1,y_2,y_3)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)^2 + 3(x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 - 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - 3(x_1+y_1)(x_3+y_3)\right.$$
$$\left. - (x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3) - (y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 4y_2y_3 - 3y_1y_3)\right]$$

$$= \ldots = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1$$

V_2 Metoda DEDUBLĂRII:

$x_1^2 \rightsquigarrow x_1y_1 \qquad x_1x_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$

$x_2^2 \rightsquigarrow x_2y_2 \qquad x_2x_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$

$x_3^2 \rightsquigarrow x_3y_3 \qquad x_1x_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1)$

$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \tfrac{3}{2}x_1y_3 - \tfrac{3}{2}x_3y_1$$

$$(\forall)\ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{array} \in \mathbb{R}^3.$$

b) $$F(x,y) = (x_1\ x_2\ x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{not}{A}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$A \to$ m. asoc. formei bilin. sim. F, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Aducerea la o formă canonică a unei forme pătratice

Def: Dată fiind forma pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$, spunem că Q are forma canonică într-o bază $B \subset V$, dacă matricea asociată lui Q în raport cu baza B are forma diagonală,

i.e. $$A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = x^T A_B x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

① Metoda Gauss (construcție de pătrate)

② Metoda Jacobi

$\boxed{P}$ Fie forma pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\ ,\quad a_{ij} = a_{ji}\ (\forall)\ i,j = \overline{1,n}$$

Notăm: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\ldots$, $\Delta_n = \det A$

Dacă: $\Delta_j \neq 0$, $(\forall)\ j = \overline{1,n}$ atunci $(\exists)$ $\underset{\text{bază}}{B'} \subset V$ a.î.:

$$Q(x)=\frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2+\dots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2,$$ unde

$x=(x_1,\dots,x_n)$ în baza $B=\{e_1,\dots,e_n\}$

și $x=(x_1',\dots,x_n')$ în baza $B'=\{e_1',\dots,e_n'\}$

$\boxed{\text{Ap1}}$ Considerăm forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$Q(x)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,\ (\forall)\,x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$$

Să se aducă la o formă canonică forma pătratică Q utilizând

a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

Rez: a) Matricea asociată f. pătratice Q în raport cu baza canonică este:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3)+5x_2^2-4x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3+5x_2^2-4x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2^2+4x_2x_3-8x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4(x_2^2+x_2x_3)-8x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4\left[\left(x_2+\tfrac12x_3\right)^2-\tfrac14x_3^2\right]-8x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4\left(x_2+\tfrac12x_3\right)^2-9x_3^2\end{aligned}$$

Efectuăm sch. de coordonate: $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3\\y_2=x_2+\frac12x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

$$\Rightarrow Q(x)=y_1^2+4y_2^2-9y_3^2,\ (\forall)\,x=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$$

coord. în raport cu noua bază de raportare.

b) Avem: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ \hline -2 & 0 & -4 \end{array}\right)$ ⟶ m. asociată lui Q în baza can.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \\ \Delta_3 = \det A = -36 \end{cases} \qquad \Delta_i \neq 0,\ (\forall)\, i = \overline{1,3}$$

$\boxed{P} \Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$

$Q(x) = (x_1')^2 + \frac{1}{4}(x_2')^2 - \frac{1}{9}(x_3')^2,\ (\forall)\, x = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$

↓

coord. în raport cu noua bază B' de reperare

Obs: Prin cele 2 metode (Gauss și Jacobi) se obțin pt. formele canonice coeficienți diferiți ca valoare dar nu și ca semn. (i.e. signatura formei pătratice se păstrează, este un invariant, la sch. de bază)

$\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț, ca în aplicația anterioară pentru f. pătratica $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3,\ (\forall)\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2,$$

$$(\forall)\, x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Arătați că F este formă biliniară simetrică

b) Scrieți matricea formei bilin. simetrice F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$. (B_0)

c) Scrieți matricea formei bilin. simetrice F în raport cu baza următoare: $B_1 = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{f_1}, \underbrace{(2,-1,2)}_{f_2}, \underbrace{(1,3,-3)}_{f_3} \} \subset \mathbb{R}^3$

d) Determinați forma pătratică Q coresp. lui F și să se aducă la o formă canonică utilizând metodele Gauss, respectiv Jacobi

Rez: a) Se demonstrează liniaritatea lui F în ambele +b) argumente (ca la aplicații liniare) $\rightarrow$ $\boxed{\text{TEMĂ}}$

Matricea asociată lui F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ matrice simetrică ($A = {}^tA$)

$\Rightarrow$ F – formă biliniară simetrică

c) $B_0 \xrightarrow{C} B_1$

m. de trecere de la baza canonică B_0 la baza arbitrară B_1

A $\quad$ $\boxed{A' = C^T A C}$ (*) {formule de transf.}

m. asoc. f. bilin. sim. F în rap. cu B_0, resp. B_1

Avem: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix}$

! $\boxed{\text{Temă}}$ Efectuați calculul lui A' (după formula (*)).