$\boxed{\text{Apl. 2}}$ Fie conica :

$$\Gamma : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

Clasificați din pct. de vedere metric (i.e. prin izometrii) conica dată.

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \delta = \det A = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \Delta = \det A' = -1 \neq 0$ $\Big] \to \Gamma$ parabolă

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0$ $< \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$ valorile proprii

Subspații proprii ① $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_1 v\}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -v_1 - v_2 = 0 \implies \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = -\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_1} = \{\alpha(1,-1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = <\underbrace{(1,-1)}_{\substack{\text{not} \\ f_1}}>$

$V_{\lambda_2} = \{v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_2 v\}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = \{\alpha(1,1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = <\underbrace{(1,1)}_{\substack{\text{not} \\ f_2}}>$

$f_1 \to e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$f_2 \to e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Efectuăm rotația :

$$r \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases}$$

$$r(\Gamma):\ 2(x_1')^2 - \sqrt{2}(x_1' + x_2') + 2\sqrt{2}(-x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 - 3\sqrt{2}\, x_1' + \sqrt{2}\, x_2' + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 + \sqrt{2}(-3x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2\left((x_1')^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} x_1'\right) + \sqrt{2}\, x_2' + 1 = 0$$

$$2\left(x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}\, x_2' - \frac{5}{4} = 0$$

Efectuăm translația t :

$$t \begin{cases} x_1'' = x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2'' = x_2' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(t \circ r)(\Gamma):\ 2(x_1'')^2 + \sqrt{2}\, x_2'' - \frac{5}{4} = 0$$

$$2x_1''^2 + \sqrt{2}\left(x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$t' \begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (t' \circ t \circ r)(\Gamma):\ 2x_1'''^2 + \sqrt{2}\, x_2''' = 0$$

$$\boxed{x_1'''^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_2'''} \longrightarrow V(\overset{0}{x_1'''}, \overset{0}{x_2'''})$$

$$\Updownarrow$$

$$t' \circ t \circ r :\ \begin{cases} x_1''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Deci $V\left(\frac{11}{8}, -\frac{1}{8}\right) \to$ vârful PARABOLEI

Axa parabolei: $x_1''' = 0 \Longleftrightarrow 2(x_1 - x_2) - 3 = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - \frac{3}{2} = 0}$

Proprietățile optice ale conicelor:

1. Proprietatea optică a elipsei:

$\boxed{P_1}$ Tangenta și normala la elipsa E în pct. M_0 sunt bisectoarele $\sphericalangle$ determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

Dem: Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $b^2=a^2-c^2$

$M_0(x_0,y_0)\in E \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$

Fie $F(c,0)$ și $F'(-c,0)$ focarele elipsei E.

Suporturile razelor focale sunt dreptele:

$M_0F: y-0=\frac{y_0}{x_0-c}(x-c) \Leftrightarrow y_0x-(x_0-c)y-cy_0=0$

$-y_0x+(x_0-c)y+cy_0=0$

$M_0F': y-0=\frac{y_0}{x_0+c}(x+c) \Leftrightarrow y_0x-(x_0+c)y+cy_0=0$

Dacă: $x_0=0 \Rightarrow \Delta F'M_0F$ isoscel, tangenta M_0T este orizontală, iar normala M_0N este verticală (coincide cu Oy).

Pp. $x_0\neq 0$ și avem identitățile:

$\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}=\frac{a^2+cx_0}{a}=a+ex_0$; $\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}=\frac{a^2-cx_0}{a}=a-ex_0$

$tg_{M_0}: \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\frac{b^2}{y_0}\left(-\frac{x_0}{a^2}x+1\right)$

$m_{tg_{M_0}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$ Dar: $m_{tg}\cdot m_{nor}=-1$ $(\perp)$

Rezultă că: $m_{nor}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}$; $nor_{M_0}: y-y_0=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$

Ec. bisectoarei:

$$\frac{|y_0 x-(x_0+c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{|-y_0 x+(x_0-c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}$$

Rezultă că: panta normalei este egală cu panta bisect., deci aceste 2 dr. coincid.

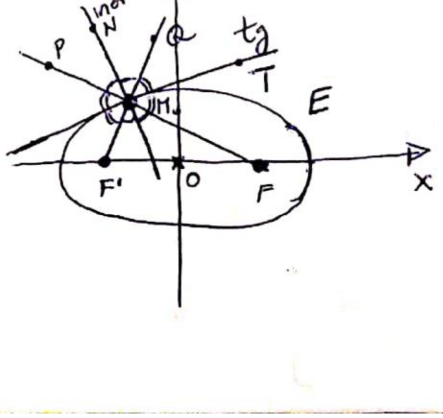
Obs: Proprietatea geometrică anterioară corespunde următorului fenomen optic: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar.

Proprietăți analoage avem și pentru hiperbolă, respectiv parabolă:

$\boxed{P_2}$ Tangenta și normala la o hiperbolă H în pct. M_0 sunt bisectoarele ∡ determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

$\boxed{P_3}$ Tangenta și normala la o parabolă P în pct. M_0 sunt bisectoarele ∡ determinate de suportul razei focale a lui M_0 și de paralela (||) prin M_0 la axa parabolei.

Fig. $\boxed{P_1}$



Geometrie și algebră liniară

$\boxed{\text{Cuadrice}}$ (în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$)

$\boxed{\text{Apl}}$ Fie cuadrica

$$\Gamma: \overbrace{x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z}^{=f(x,y,z)} = 0$$

Să se aducă cuadrica Γ la o formă canonică prin izometrii.

Rez: Avem $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A_3 = -36 \neq 0 \Rightarrow \Gamma$ are centru unic.

$\Delta = \det A = 36 \neq 0 \Rightarrow \Gamma$ cuadrică nedegenerată

Determinăm coordonatele centrului unic, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+6z-2=0 \\ 2x+10y+2z+6=0 \\ 6x+2y+2z+2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=1 \\ x+5y+z=-3 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$$

Sistem Cramer (comp. determinat) cu sol. unică $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$

$P_0\Big(\overset{x_0}{\frown}{-\frac{1}{3}}, \overset{y_0}{\frown}{-\frac{2}{3}}, \overset{z_0}{\frown}{\frac{2}{3}}\Big) \to$ centrul unic al cuadricei Γ

Efectuăm translația $t \begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \\ z'=z-z_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'=x+\frac{1}{3} \\ y'=y+\frac{2}{3} \\ z'=z-\frac{2}{3} \end{cases} \to \begin{cases} x=x'-\frac{1}{3} \\ y=y'-\frac{2}{3} \\ z=z'+\frac{2}{3} \end{cases}$

Obținem:

$$t(\Gamma): x'^2+5y'^2+z'^2+2x'y'+6x'z'+2y'z' \underbrace{-1}_{=\frac{\Delta}{\delta}=f(x_0,y_0,z_0)} = 0$$

Determinăm valorile proprii și subspațiile proprii coresp. matricei A_3:

Valorile proprii

- Ec. caracteristică: (rezolvare în $\mathbb{R}$)

$$\underbrace{\det(A_3-\lambda I_3)}_{P(\lambda)\ \text{(polinomul caracteristic)}} = 0 \iff \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0 \;\; \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$ (multiplicitățile algebrice)

$$V_{\lambda_1=3} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \,/\, A_3 v = \lambda_1 v \}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(A_3 - \lambda_1 I_3) v = O_{(3,1)}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\to$ sistem liniar omogen, $\det(A_3 - \lambda_1 I_3) = 0$ $\to$ admite și sol. nenule

$$(\Delta_p) = \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies rg(A_3 - \lambda_1 I_3) = 2$$

minor principal

$\to x_1, x_2$ necunoscute principale

$x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundară

Rescriem sistemul $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -3\alpha & \mid \cdot(-2) \\ x_1 + 2x_2 = -\alpha \end{cases} \implies 5x_1 = 5\alpha \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

Deci: $V_{\lambda_1=3} = \{ \alpha(1,-1,1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,-1,1)}_{f_1} \rangle$

Analog, obținem: $V_{\lambda_2=6} = \{ \beta(1,2,1) \,/\, \beta \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,2,1)}_{f_2} \rangle$

$V_{\lambda_3=-2} = \{ \gamma(-1,0,+1) \,/\, \gamma \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(-1,0,+1)}_{f_3} \rangle$

Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt vom obține <u>o bază ortonormată</u> pornind de la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ formată din vectori proprii.

<u>Obs</u>: $f_1 \perp f_2$ i.e. $\{f_1, f_2, f_3\}$ bază <u>ortogonală</u>.
$f_2 \perp f_3$
$f_1 \perp f_3$

În consecință, trebuie <u>doar</u> să normăm vectorii f_1, f_2, f_3 pentru a obține baza ortonormată căutată.

Luăm: $$\begin{cases} e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \\ e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) \\ e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \end{cases}$$

Efectuăm rotația r $$\begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x' - y' + z') \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x' + 2y' + z') \\ z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + z') \end{cases}$$

$$\underbrace{R}_{\text{m. rotației}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\det R = 1$

${}^tR R = I_3 \Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'' \\ z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' \end{cases}$$

$(r \circ t)(\Gamma)$: $3x''^2 + 6y''^2 - 2z''^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x''^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{6}} - \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} - 1 = 0}$

$\{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0\}$

$\Rightarrow \Gamma$ este un <u>HIPERBOLOID CU O PÂNZĂ</u>.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie cuadrica:

$$\Gamma: \ 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

Aduceți cuadrica Γ la o formă canonică prin izometrii (i.e. realizați clasificarea izometrică a cuadricei Γ).

Rez: Avem $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A_3 = 0$ (deci, nu există centru unic)

$\Delta = \det A = 16 \neq 0$ (cuadrica Γ este nedegenerată)

• Determinăm valorile proprii și subspațiile proprii coresp. matricei A_3.

– Ec. caracteristică:

$\det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \iff \lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = 0$

Valorile proprii: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$

La fel ca în apl. anterioară determinăm subsp. proprii:

$V_{\lambda_1} = \{\alpha(1,2,-3) \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,2,-3)}_{f_1} \rangle$

$V_{\lambda_2} = \{\beta(4,1,2) \ / \ \beta \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(4,1,2)}_{f_2} \rangle$

$V_{\lambda_3} = \{\gamma(+1,-2,-1) \ / \ \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(+1,-2,-1)}_{f_3} \rangle$

Obs: $\left| \begin{array}{l} f_1 \perp f_2 \\ f_2 \perp f_3 \\ f_1 \perp f_3 \end{array} \right.$ i.e. $\{f_1, f_2, f_3\}$ bază ortogonală.

Considerăm: $\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3) \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4,1,2) \\ e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1) \end{cases}$

Efectuăm rotația: $r \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(x+2y-3z) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4x+y+2z) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y-z) \end{cases}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\det R = 1$

$R\,{}^tR = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{4}{\sqrt{21}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{21}}y' - \dfrac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z = -\dfrac{3}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{21}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$

$r(\Gamma): \; 7y'^2 - 2z'^2 - \dfrac{8}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{24}{\sqrt{21}}y' + \dfrac{12}{\sqrt{6}}z' - 8 = 0$

care se poate pune sub forma:

$$7\left(y' + \frac{12}{7\sqrt{21}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}\left(x' + \frac{293\sqrt{14}}{392}\right) = 0$$

Efectuăm translația:

$$t\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{293\sqrt{14}}{392} \\ y'' = y' + \dfrac{12}{7\sqrt{21}} \\ z'' = z' - \dfrac{3}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t\circ r)(\Gamma): \underline{7y''^2 - 2z''^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}x'' = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{y''^2}{\frac{1}{7}} - \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} - \frac{8}{\sqrt{14}}x'' = 0}$$

$\Rightarrow \Gamma$ reprezintă un <u>PARABOLOID HIPERBOLIC</u>.

$\boxed{\text{Ap1}}$ Fie cuadrica:

$$\Gamma: x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

Aduceți cuadrica Γ la o formă redusă.

<u>Rez:</u> $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Evident: $\delta = \det A_3 = 0 \Rightarrow \Gamma$ <u>nu</u> are centru unic

$\Delta = \det A = 0 \Rightarrow \Gamma$ cuadrică degenerată.

La fel ca în apl. precedentă, determinăm valorile proprii și subsp. proprii coresp. matricei A_3.

- Ec. caracteristică:

$\det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda - 6) = 0$

<u>Valorile proprii</u>

$\lambda_1 = 0,\ m_1 = 2$

$\lambda_2 = 6,\ m_2 = 1$

Obținem:

$V_{\lambda_1} = \{(\alpha, \beta, -\frac{1}{2}(\alpha+\beta)) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\gamma(1,1,2) / \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,1,2)}_{f_3} \rangle$

Din V_{λ_1} extragem 2 vectori proprii liniar indep. (i.e. o bază)

• $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases} \to f_1 = (2,0,-1)$

•• $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \to f_2 = (1,-1,0)$

Utilizăm procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt pentru a obține o bază ortonormată (în V_{λ_1}) pornind de la baza $\{f_1, f_2\}$

Avem: $e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$

$$e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1$$
$$= (1,-1,0) - \frac{2}{5}(2,0,-1) = \frac{1}{5}(1,-5,2)$$
$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{\cancel{5}}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}(1,-5,2) = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-5,2)$$

și $e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată

Efectuăm rotația: $r \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + z) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{30}}(x - 5y + 2z) \\ z' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y + 2z) \end{cases}$ $R = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\det R = 1$

$R \cdot {}^tR = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

Obținem:

$r(\Gamma)$: $z'^2 - \sqrt{6}x' + \sqrt{6}y' + 2\sqrt{6}z' + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z' + \sqrt{6})^2 - \sqrt{6}x' + \sqrt{6}y' - 5 = 0$

Efectuăm izometria:

$$i \begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z'' = z' + \sqrt{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow (i \circ r)(\Gamma): \ z''^2 - 2\sqrt{3}\,x'' - 5 = 0 \iff z''^2 - 2\sqrt{3}\left(x'' + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) = 0$

Efectuăm translația: $t \begin{cases} x''' = x'' + \frac{5}{2\sqrt{3}} \\ y''' = y'' \\ z''' = z'' \end{cases}$

Obținem:

$(t \circ i \circ r)(\Gamma): \ \boxed{z'''^2 - 2\sqrt{3}\,x''' = 0}$

$\Rightarrow \Gamma$ reprezintă un <u>CILINDRU PARABOLIC</u>.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie paraboloidul hiperbolic P de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a,b>0$$

a) Arătați că: (∃) 2 familii de dr. generatoare ale paraboloidului hiperbolic P, a.î. prin fiecare pct. al lui P trece o unică generatoare din fiecare familie. {P este o suprafață dublu riglată}

În plus, (∀) 2 generatoare din aceeași familie sunt dr. necoplanare

b) (∀) pct. al paraboloidului hiperbolic P este regulat și planul tangent în fiecare pct. conține cele 2 dr. generatoare care trec prin acel punct.

Sol: a) Fie familiile de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$, $\{d'_\mu\}_\mu$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ de ec:

$$d_\lambda: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\lambda \\ \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \qquad d'_\mu: \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = z \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2\mu \end{cases}$$

Vom demonstra că orice dr. din familia de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$ este generatoare a paraboloidului hiperbolic

Făcând produsul membru cu membru al celor 2 ec ale unei dr. d_λ și simplificând cu λ $(\lambda\neq 0)$ $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

Interpretarea geometrică: (∀) pct. al unei dr d_λ, $\lambda\neq 0$ este pct. al paraboloidului hiperbolic P.

Dacă $\lambda=0 \Rightarrow d_0: \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z$$

Deci (∀) pct. al dr. d_0 este pe P. În consecință, toate dreptele din familia de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$ sunt generatoare ale paraboloidului hiperb. P.

Analog, se demonstrează că avem același rezultat pt. fam. de dr. $\{d'_\mu\}_\mu$.

Arătăm că $(\forall)\, M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, $(\exists)!\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $M_0 \in d_{\lambda_0}$

$$(S)\ \begin{cases} 2\lambda = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \\ \lambda\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = z_0 \end{cases}$$

(S) sistem compatibil determinat (are sol. unică).

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) \\ \lambda &= \frac{z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \end{aligned}\right| \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \frac{z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0 \Longleftrightarrow M_0 \in P$$

Cond. de compatibilitate a sist. este echivalent cu $M_0 \in P$.

În plus, sistemul are o singură necunoscută și are rang 1, deci are sol. unică.

În concluzie, prin M_0 trece o unică generatoare a paraboloidului hiperbolic P, din familia $\{d_\lambda\}_\lambda$.

Analog, pentru $\{d'_\mu\}_\mu$.

Două dr. generatoare din aceeași familie de generatoare a paraboloidului hiperbolic P nu pot fi concurente deoarece ar rezulta că prin pct. lor de concurență $M_0 \in P$ ar trece 2 generatoare din aceeași familie ⨳.

Vom demonstra că: 2 dr. generatoare din aceeași familie nu sunt nici paralele.

Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$, presupunem $d_{\lambda_1} \parallel d_{\lambda_2}$

$$d_\lambda : \begin{cases} \frac{1}{a}x - \frac{1}{b}y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\lambda}{a}x + \frac{\lambda}{b}y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{dir } d_\lambda = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{\lambda}{a} & \frac{\lambda}{b} & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{b}, +\frac{1}{a}, \frac{2\lambda}{ab}\right)$$

$$d_{\lambda_1} \parallel d_{\lambda_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{2\lambda_1}{ab}}{\frac{2\lambda_2}{ab}} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ abs.}$$

b) $f(x,y,z) \overset{not}{=} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{x}{a^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \rightarrow$ sistem incompatibil

Deci, toate pct. paraboloidului hiperbolic P sunt regulate.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

Planul tg. în M_0 la P se scrie:

$$\pi: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - z - z_0 = 0$$

$$d_{\lambda_0} \parallel \pi \Leftrightarrow \left\langle \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{2\lambda_0}{ab}\right), \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}, -1\right) \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{1}{b} - \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2}{ab}\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y_0}{b} = 2\lambda_0$ ✓ Deci: $d_{\lambda_0} \parallel \pi$, Dar: $M_0 \in d_{\lambda_0} \cap \pi$ $\Rightarrow d_{\lambda_0} \subset \pi$.

Analog, se procedează și cu dr. d_{μ_0} din a 2-a familie de gen., care trece prin M_0 și obținem și $d_{\mu_0} \subset T$.

! Proprietăți similare sunt valabile și pentru hiperboloidul cu o pânză.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$d_\lambda \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases} \qquad d'_\mu \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{z}{b} \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză este o suprafață dublu riglată.

{Familiile de dr. generatoare sunt $\{d_\lambda\}_\lambda, \{d'_\mu\}_\mu$ }