

## **Geometrie si algebra liniara**

### **A) EXERCITII ÎN CLASA ONLINE**

1. Determinați valorile și vectorii (subspațiile) proprii corespunzatori(e) pentru matricele următoare:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Stabiliți dacă matricele de la exercițiul precedent sunt diagonalizabile și, în caz afirmativ, precizați forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicația  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2y + z)$ .

- a) Arătați că  $T$  este transformare (aplicație) liniară.
  - b) Scrieți matricea asociată lui  $T$ ,  $A_T$ .
  - c) Determinați valorile și vectorii proprii corespunzatori(e) lui  $A_T$ .
  - d) Scrieți subspațiile proprii corespunzătoare transformării (aplicației) liniare  $T$  și stabiliți dacă aceasta este diagonalizabilă.
  - e) Scrieți, dacă există, matricea diagonalizatoare  $C$  și matricea diagonală  $D$ .
-

## B) REZOLVĂRI ONLINE

1. a) Construim polinomul caracteristic,  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ .

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Deci,  $P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14$ . Rezolvăm ecuația caracteristică,  $P(\lambda) = 0$ , adică  $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$  și obținem rădăcinile reale

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7,$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = -2$ : căutăm  $v \in \mathbb{R}^2$ , v de forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,

pentru care  $Av = \lambda_1 v$ . Înlocuim și obținem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3a+4b = -2a \\ 5a+2b = -2b \end{cases} \Rightarrow 5a+4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}a, a \in \mathbb{R}^*$$

Atunci,  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{5}{4}a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow v = a' \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = a' v_1, a' \in \mathbb{R}^*$  este forma generală a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = -2$ .

$$V(\lambda_1 = -2) = sp < v_1 >.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = 7$ : căutăm  $v \in \mathbb{R}^2$ , v de forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,

pentru care  $Av = \lambda_2 v$ . Înlocuim și obținem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a \\ 7b \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3a+4b = 7a \\ 5a+2b = 7b \end{cases} \Rightarrow b = a, a \in \mathbb{R}^*$$

Atunci,  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = a' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a' v_2, a' \in \mathbb{R}^*$  este forma generală a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = 7$ .

$$V(\lambda_2 = 7) = sp < v_2 >.$$

---

b) Construim polinomul caracteristic,  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ .

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Deci,  $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$ . Rezolvăm ecuația caracteristică,  $P(\lambda) = 0$ , de unde obținem rădăcinile cu multiplicitățile algebrice aferente:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = -1$ : căutăm  $v \in \mathbb{R}^3$ , v de forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,

pentru care  $Av = \lambda_1 v$ . Înlocuim și obținem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = -a \\ b = -b \\ a = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}^*$$

Atunci,  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a v_0$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  este forma generală a

vectorilor proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = -1$ .

$$V(\lambda_1 = -1) = \text{span} \langle v_0 \rangle.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = 1$ : căutăm  $v \in \mathbb{R}^3$ , v de forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,

pentru care  $Av = \lambda_2 v$ . Înlocuim și obținem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = a \\ b = b \\ a = c \end{cases} \Rightarrow c = a, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Atunci,  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Deci vectorii proprii

corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = 1$  sunt o combinație liniară de vectorii  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  și  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$V(\lambda_2 = 1) = sp < v_1, v_2 >.$$

2. Studiem dacă matricea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  este diagonalizabilă:

valorile proprii pe care le-am obținut sunt  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 7$ , ambele cu ordin de multiplicitate algebrică egal cu 1 în ecuația caracteristică, deci  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ .

Vectorii proprii generează următoarele subspații proprii:

$$V(\lambda = -2) = sp < v_1 > \Rightarrow \dim V(\lambda = -2) = 1 = \mu_1$$

$$V(\lambda = 7) = sp < v_2 > \Rightarrow \dim V(\lambda = 7) = 1 = \mu_2$$

Deci, A este diagonalizabilă și forma ei diagonală este

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Pentru matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , valorile proprii sunt

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

cu ordinele de multiplicitate  $\mu_1 = \mu(\lambda = -1) = 1$  și  $\mu_2 = \mu(\lambda = 1) = 2$ . Vectorii proprii generează următoarele subspații proprii:

$$V(\lambda = -1) = sp < v_0 > \Rightarrow \dim V(\lambda = -1) = 1 = \mu_1$$

Pentru  $V(\lambda = 1) = sp < v_1, v_2 >$ , dimensiunea o vom putea determina abia după ce vom studia linia independentența vectorilor  $v_1, v_2$ . Fie B matricea construită cu acești doi vectori,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Un calcul simplu arată că ea are rangul 2, egal cu numărul de vectori din care a

fost construită. Deci,  $v_1, v_2$  sunt liniar independenți și deci  $\dim V(\lambda = 1) = 2 = \mu_2$ .

Prin urmare, și pentru cazul b) de la exercițiul 1, matricea A este diagonalizabilă.

Forma ei diagonală este:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Arătăm că T este transformare (aplicație) liniară.

Fie  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  și fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Arătăm că

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) \\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 &\Rightarrow \begin{cases} v_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ v_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow \\ \alpha v_1 + \beta v_2 &= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha (x_1 + 2y_1, 2y_1 - 2y_1 + z_1) + \\ &+ \beta (x_2 + 2y_2, 2y_2 - 2y_2 + z_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) \end{aligned}$$

Deci, aplicația T este aplicație liniară.

b) Matricea asociată aplicației T în raport cu baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  este  $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) Calculăm valorile și vectorii (subspațiile) proprii corespunzător(e) lui  $A_T$ .

Construim polinomul caracteristic,  $P(\lambda) = \det(A_T - \lambda I_2)$

$$A_T - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Deci,  $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ . Rezolvăm ecuația caracteristică,  $P(\lambda) = 0$ , de unde obținem rădăcinile reale:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A, cu ordinele de multiplicitate algebrică  $\mu_1(\lambda = 1) = 2$  și  $\mu_2(\lambda = 2) = 1$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = 1$ : căutăm  $v \in \mathbb{R}^3$ , v de forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,

pentru care  $A_T v = \lambda_1 v$ . Înlocuim și obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2b \\ 2b \\ -2b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = a \\ 2b = b \\ -2b + c = c \end{cases} \Rightarrow b = 0, (a, c) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$\text{Atunci, } v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (a, c) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Deci, vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = 1$  sunt o combinație liniară de vectorii  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = 2$ : căutăm  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $v$  de forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,

pentru care  $A_T v = \lambda_2 v$ . Înlocuim și obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2b \\ 2b \\ -2b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ b \in \mathbb{R}^* \\ c = -2b \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ -2b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b v_3, b \in \mathbb{R}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

este forma generală a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = 2$ .

d) Subspațiile proprii sunt:  $V(\lambda_1 = 1) = sp \langle v_1, v_2 \rangle$  și  $V(\lambda_2 = 2) = sp \langle v_3 \rangle$ .

Evident,  $\dim V(\lambda_2 = 2) = \dim sp \langle v_3 \rangle = 1 = \mu(\lambda_2 = 2)$ .

Pentru a determina  $\dim V(\lambda_1 = 1)$ , studiem liniară independența vectorilor  $v_1$  și  $v_2$ .

Matricea construită cu ajutorul acestor doi vectori este  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și are rangul doi, egal cu numărul de vectori din care a fost construită.

Atunci,  $\dim V(\lambda_1 = 1) = 2 = \mu(\lambda_1 = 1)$ .

Prin urmare, matricea  $A_T$  și implicit transformarea (aplicația) liniară  $T$  sunt diagonalizabile.

Matricea diagonală este  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , iar matricea diagonalizatoare este

$$C = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Apl. 1 Considerăm transf. liniară

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x - y + 2z, -x + 2y - z, x + y + z),$$
$$(\forall) (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

- Scrieți matricea asociată lui  $f$  în raport cu baza canonică  $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ .
- Determinați valorile proprii și subsp. proprii coresp.
- Verificați dacă  $f$  este diagonalizabilă.
- În caz afirmativ, scrieți matricea (forma) diagonală și baza în care se realizează.

Rez: a)  $A_f = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{2} \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Ec. caracteristică:  $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \in \mathbb{R} \quad \text{valorile proprii} \quad S_{\text{pec}}(f) = \{0, 2, 3\}$$

1



$$\text{și } m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$$

$$\{\text{multiplicități algebrice}\}$$

Subspații proprii:

$$S'_\lambda : \begin{cases} (2-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ -x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$S'_{\lambda_1} : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sistem linear omogen,}$$

$$\{\lambda_1 = 0\} \quad \text{cu 3 ec. și 3 nec.}$$

$$\text{rg}(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x, y \text{ nec principale} \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{nec. secundară} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -2\alpha \quad | :2 \\ -x + 2y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}}$$

$$\text{Deci: } V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\{ \underbrace{\alpha(-1, 0, 1)}_{\text{unit } v_1} / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Analog, rezolvând sistemele  $S'_{\lambda_2}$  și  $S'_{\lambda_3}$  vom obține

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \beta \underbrace{(1, -2, 1)}_{\text{unit } v_2} / \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ \gamma \underbrace{(1, -1, 0)}_{\text{unit } v_3} / \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\text{Deci: } \dim V_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_2} = \dim V_{\lambda_3} = 1$$

$$\Rightarrow m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$$

{multiplicitățile geometrice}

$$\text{Avem } \begin{cases} 1) m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + m_a(\lambda_3) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \\ 2) m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i), (\forall) i = \overline{1, 3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$  este diagonalizabilă, deci  $(\exists) B \subset \mathbb{R}^3$   
 {bază formată din

vectori proprii coresp. lui  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (care sunt liniar indep.  
 deoarece valorile proprii sunt distincte)}

În raport cu core, matricea asociată lui  $f$  are formă diagonală:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \{ v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, -2, -1), v_3 = (1, -1, 0) \}$$

Suplimentar:

$$B_0 \xrightarrow{C} B$$

$$\downarrow$$

$$A_f$$

$C \rightarrow$  m. de trecere de la

bază canonică  $B_0$  la bază  $B$ ,

$$D = C^{-1} A_f C$$

$$\text{i.e. } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \hline v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline \end{matrix}$$

A<sub>f</sub> | 2 Aceleși enunț, ca în ex. 1 pentru transf. liniară:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (3x + y - z, 2y, x + y + z),$$

$$(\forall) (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Rez: a)  $A_f = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3$$

Ec. caracteristică:

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \underbrace{m_c(\lambda_1) = 3}_{\text{valoare proprie}}$$

$$\text{Spec}(f) = \{2\}$$

Subspațiul propriu:

$$S_{\lambda} : \begin{cases} (3-\lambda)x + y - z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\lambda_1} : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \{\lambda_1 = 2\}$$

$$\text{rg}(A_f - \lambda_1 I_3) = 1 \Rightarrow \text{Luăm } \begin{cases} x \text{ nec. principal} \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \text{ nec. secundar}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Dec: } V_{\lambda_1} &= \{ (-\alpha + \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \underbrace{\alpha(-1, 1, 0)}_{v_1} + \underbrace{\beta(1, 0, 1)}_{v_2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \alpha v_1 + \beta v_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\Rightarrow B_1 = \{v_1, v_2\} \subset V_{\lambda_1}$$

sistem de gen. + sistem lin. indep.  $\rightarrow$  baze  $\rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 2$   
(se verifică!)

i.e.  $m_g(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 2 < 3 = m_a(\lambda_1)$ , deci  $f$  nu este diagonalizabilă.

Tema Acelor enunț, ca în 1 pentru funcțiile transf. liniare

a)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (-x + 3y - z, -3x + 5y - z, -3x + 3y + z)$ ,  
 $(\forall) (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

b)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (6x - 5y - 3z, 3x - 2y - 2z, 2x - 2y)$ ,  
 $(\forall) (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

c)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t)$ ,  
 $(\forall) (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

Ex. 3 Fie  $f$  transf. liniară în  $\mathbb{R}^3$  dată de rotație spațială în jurul axei  $Oz$  cu un unghi  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Determinați valorile proprii și subsp. proprii corespunzătoare și interpretați geometric rezultatele obținute.



Rez:  $A_f = \left( \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

m. axe rotatiei de  $\neq \frac{\pi}{3}$ , în sens direct trigonometric, în jurul axei Oz  
de ec.  $x=y=0$

$\Rightarrow A_f = \left( \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{\theta=\frac{\pi}{3}}$

Valoarea proprie Rezolv ec. caract. în corpul  $\mathbb{R}$ .

Ec. caract.  $\det(A_f - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda) \left[ \left( \frac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \frac{3}{4} \right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$  singura valoare proprie reală  $\Rightarrow \text{Spec}(f) = \{1\}$

$\{\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 \rightarrow \text{reducini par complexe}\}$

Subsp. propriu

$S_{\lambda_1} : \begin{cases} \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) x - \frac{\sqrt{3}}{2} y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x + \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) y = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$

$\boxed{\lambda_1 = 1} \Rightarrow S_{\lambda_1} : \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (A_f - \lambda_1 I_3) = 2$

$\Delta_f = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x, y \text{ nec. p. line.} \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ nec. nec.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(0, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0, 0, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Interpretare geometrică:

Evident:  $V_{\lambda_1} = 0z$ , i.e. singurul subsp. propriu (invariant) este axa  $0z$  ( $\equiv$  axa de rotație)

### C) PROBLEME PROPUSE PENTRU TEMA ONLINE

1. Determinați valorile și vectorii (subspațiile) proprii corespunzatori(e) pentru matricele următoare:

a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ; b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ; c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ; d)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Stabiliți dacă matricele de la exercițiul precedent sunt diagonalizabile și, în caz afirmativ, determinați forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicația  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + 4y, 2y + 3z, y)$ .

- Aratați că  $T$  este transformare (aplicație) liniară.
- Scrieți matricea asociată lui  $T$ ,  $A_T$ .
- Determinați valorile și vectorii proprii corespunzatori(e) lui  $A_T$ .
- Precizați subspațiile proprii corespunzătoare transformării (aplicației)  $T$  și stabiliți dacă aceasta este diagonalizabilă.
- Scrieți, dacă există, matricea diagonalizatoare  $C$  și matricea diagonală  $D$ .
- Verificați rezultatul obținut.