Cheat Sheet Seminar

- Seminar 0x00

7. Am discutat la curs de modul în care aflăm valoarea unui număr scris în format complement față de 2: inversăm biții și adunăm 1. Demonstrați că această procedură este corectă.

Let's examine two useful shortcuts when working with two's complement numbers. The first shortcut is a quick way to negate a two's complement binary number. Simply invert every 0 to 1 and every 1 to 0, then add one to the result. This shortcut is based on the observation that the sum of a number and its inverted representation must be $111 \ldots 111_{\text{two}}$, which represents -1. Since $x + \bar{x} = -1$, therefore $x + \bar{x} + 1 = 0$ or $\bar{x} + 1 = -x$. (We use the notation $\bar{x}$ to mean invert every bit in x from 0 to 1 and vice versa.)

care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?

este 0, cărțile sunt ordonate crescător

amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?

- în câte feluri putem combina cele 52 de cărți?
- 52!
- deci informația este $\log_2(52!)$
  - cum calculăm valoarea asta?
  - $\log_2(a \times b) = \log_2(a) + \log_2(b)$
  - $\log_2(52!) = 225.6$ biți
  - cu aproximarea lui Stirling: $\log_2(52!) \approx 52\log_2(52) - 52\log_2 e = 221.4$ biți
- algoritmic, cum amestecăm cărțile (eficient)?
  - aveți la dispoziție o funcție care returnează o valoare aleatoare în intervalul [0,1]

- Seminar 0x01

5. Se dă un număr natural x pe N biți. Câtă informație am câștigat dacă:

   (a) ni se spune despre x că are exact două valori "1" în reprezentarea sa binară;

   (b) ni se spune despre x că are exact $N/2$ valori "1" în reprezentarea sa binară;

   (c) ni se spune despre x că are o secvență continuă de $N/4$ biți de "1" în reprezentarea sa binară (restul biților sunt "0");

   (d) ni se spune despre x că are MSB setat la "1";

   (e) ni se spune despre x că este impar;

   (f) ni se spune despre x că este o putere a lui 2;

   (g) ni se spune despre x că are primii $N/2$ biți din reprezentarea sa binară setați la "0";

   (h) ni se spune despre x că este un număr prim (aici doar o estimare aproximativă este posibilă);

   (i) ni se spune despre x că are în reprezentarea sa binară un număr par de biți setați la "1";

   (j) ni se spune că $x = 42$.

a) $p = C_2^N / 2^N$

b) $p = C_{N/2}^N / 2^N$, presupunem N par

c) $p = (¾N + 1) / 2^N$, presupunem N divizibil la 4

d) $p = 2^{N-1} / 2^N = 1 / 2$

e) $p = 2^{N-1} / 2^N = 1 / 2$

f) $p = N / 2^N$

g) $p = 2^{N/2} / 2^N = 1 / 2^{N/2}$, presupunem N par

h) $p \approx [(2^N - 1) / \ln(2^N - 1)] / 2^N \approx [2^N / \ln(2^N)] / 2^N = 1 / \ln(2^N)$

i) $p = (1 + \sum_{i=1}^{N/2} C_{2i}^N) / 2^N = 1 / 2$, presupunem N par

j) $p = 1 / 2^N$

- Seminar 0x02

DE MORGAN, EX 3

- !(!A+!B) = AB
- !(!A!B) = A+B
- !(A+B+C) = !A!B!C
- !(ABC) = !A+!B+!C
- !(A+B)!A!B = !A!B
- !(AB)(!A+!B) = !A+!B
- !(A+B)(!A+!B) = !A!B
- !A!B!(AB) = !A!B
- C+!(CB) = 1
- !(AB)(!A+B)(!B+!B) = !A!B

SIMPLIFICĂRI, EX 4

a) A+0 = A

b) !Ax0 = 0

c) A+!A = 1

d) A+A = A

e) A+AB = A

f) A+!AB = A+B

g) A(!A+B) = AB

h) AB+!AB = B

i) (!A!B+!AB) = !A

j) A(A+B+C+...) = A

k) subpuncte

   a) A+B

   b) 1

   c) 1

l) A+A!A = A

m) AB+A!B = A

n) !A+B!A = !A

o) (D+!A+B+!C)B = B

p) (A+!B)(A+B) = A

q) C(C+CD) = C

r) A(A+AB) = A

s) !(!A+!A) = A

t) !(A+!A) = 0

u) D+(D!CBA) = D

v) !D!(DBCA) = !D

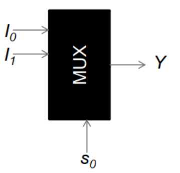
w) AC+!AB+BC = AC+!AB

x) (A+C)(!A+B)(B+C) = AB+!AC

y) !A+!B+AB!C = !A+!B+!C

$(A+B)^2+(A+B)^3+A+3!A+A^3 = 1$

MUX, două intrări, un semnal s de selecție și o ieșire

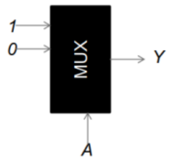


I_0	I_1	s_0	Y
*	*	0	I_0
*	*	1	I_1

care este relația ieșire-intrare?

- $Y = I_0\bar{s}_0 + I_1 s_0$

MUX, două intrări, un semnal s de selecție și o ieșire

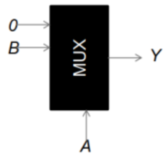


I_0	I_1	s_0 (A)	Y
1	0	0	I_0
1	0	1	I_1

un MUX este un circuit universal, adică poate implementa porți NOT, OR și AND

- implementați o poartă NOT cu un MUX: Y = NOT A
- Y = $I_0\bar{s}_0 + I_1 s_0 = 1\bar{A} + 0A = \bar{A}$

MUX, două intrări, un semnal s de selecție și o ieșire

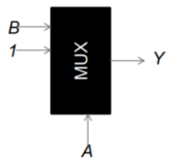


I_0	I_1 (B)	s_0 (A)	Y
0	B	0	I_0 (0)
0	B	1	I_1 (B)

un MUX este un circuit universal, adică poate implementa porți NOT, OR și AND

- implementați o poartă AND cu un MUX: Y = A AND B
- Y = $I_0\bar{s}_0 + I_1 s_0 = 0\bar{A} + BA = AB$

MUX, două intrări, un semnal s de selecție și o ieșire

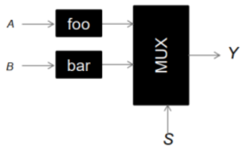


I_0 (B)	I_1	s_0 (A)	Y
B	1	0	I_0 (B)
B	1	1	I_1 (1)

un MUX este un circuit universal, adică poate implementa porți NOT, OR și AND

- implementați o poartă OR cu un MUX: Y = A OR B
- Y = $I_0\bar{s}_0 + I_1 s_0 = B\bar{A} + 1A = A + B\bar{A} = A + B$ [vezi ex. 4 f)]

- **Y = S ? foo(A) : bar(B)**



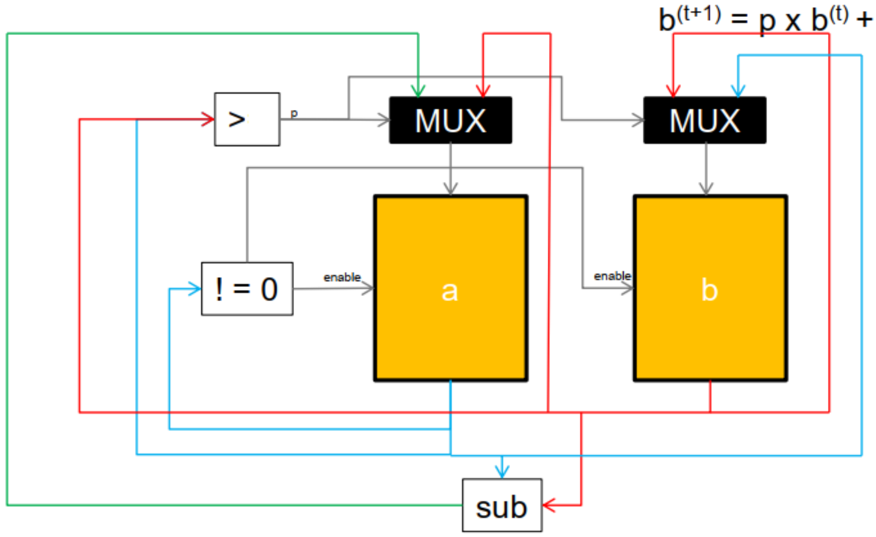
I_0 foo(X)	I_1 bar(Y)	S	Y
*	*	0	I_1
*	*	1	I_0

- **care e diferența cu un limbaj de programare?**
  - indiferent de valoarea lui S, se execută foo(A) și bar(B)
  - doar că la ieșire vedem doar una dintre funcții (cea selectată de S)

- **codul python:**

```
def cmmdc(a, b):
    if a == b: return b
    elif a > b: return cmmdc(a-b, b)
    else: return cmmdc(b, a)
```

p = $(a^{(t)} > b^{(t)})$
$a^{(t+1)} = p \times (a^{(t)} - b^{(t)}) + !p \times b^{(t)}$
$b^{(t+1)} = p \times b^{(t)} + !p \times a^{(t)}$



- Seminar 0x03

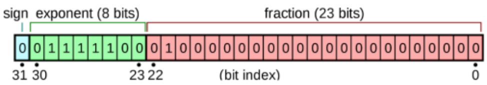
- **a x 2**
  - soluția: a << 1, sau a + a
- **a x 16**
  - soluția: a << 4
- **a x 3**
  - soluția: a << 1 + a
- **a x 7**
  - soluția: a << 3 – a
- **a / 8**
  - soluția: a >> 3
- **a mod 16**
  - soluția: a & 0x000F
- **a x 72**
  - soluția: a << 6 + a << 3

- **a mod 16**
  - soluția: a & 0x000F
- **a div 16**
  - soluția: (a & FFF0) >> 4, sau doar a >> 4
  - de asemenea: a = a & FFF0 + a & 000F = div cu 16 + mod cu 16

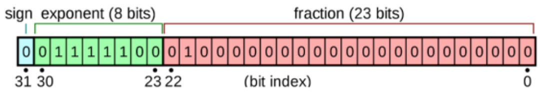
- **a x 2**
  - soluția: a = (a < 0) ? -((-a) << 1)) : a << 1

, pentru a numar intreg

CONVERSIA ÎN IEEE FP, EX. 7



- -1313.3125
  - partea întreagă este: 1313
  - partea fracționară: 0.3125
    - 0.3125 × 2 = 0.625 => 0
    - 0.625 × 2 = 1.25 => 1
    - 0.25 × 2 = 0.5 => 0
    - 0.5 × 2 = 1.0 => 1
  - deci, $1313.3125_{10} = 10100100001.0101_2$
  - normalizare: $10100100001.0101_2 = 1.01001000010101_2 \times 2^{10}$
  - mantisa este 01001000010101000000000
  - exponentul este $10 + 127 = 137 = 10001001_2$
  - semnul este 1



- **împărțiți a la 4**
  - **soluția:**
    - **vrem exponentul, unde se află?**
      - **MASK = 0x7F800000**
    - **extragem exponent = (a & MASK) >> 23**
    - **dacă exponent > 1 atunci exponent = exponent – 2, altfel a = 0**
    - **trebuie să actualizăm a**
      - **a = (a & ~MASK) I (exponent << 23)**

- **0.2 + 0.3**

- **primul pas, trecem fiecare număr în format**
  - $0.2 = +\ 1.10011001100110011001100 \times 2^{-3} = 0.19999998807907104$
  - $0.3 = +\ 1.00110011001100110011001 \times 2^{-2} = 0.29999998211860657$
- **al doilea pas, alinierea**
  - $0.2 = +\ 0.11001100110011001100110I000 \times 2^{-2}$
  - $0.3 = +\ 1.00110011001100110011001I000 \times 2^{-2}$
- **al treilea pas, adunăm**
  - $0.2 + 0.3 = 1.11111111111111111111111I000 \times 2^{-2}$
- **al patrulea pas, normalizare (dacă e necesar)**
  - $0.2 + 0.3 = 1.11111111111111111111111I00 \times 2^{-2}$
- **pasul final: + $1.11111111111111111111111 \times 2^{-2}$ = 0.4999999701976776**

0x44361000 = 0b01000100001101100001000000000000

- S = 0
- E = 10001000
- M = 01101100001000000000000
- (-1)^S 1.M * 2^{E-127} = (1) 1. 01101100001000000000000 $2^{136-127}$
  = 1. 01101100001000000000000 2^{9}
  = 728.25

ÎMPĂRȚIREA RAPIDĂ, EX. 12

- **a / 19**

$$a \times \frac{1}{19} \approx \frac{a \times \frac{2938661835}{2^{32}} + \frac{a - a \times \frac{2938661835}{2^{32}}}{2^1}}{2^4}$$

$$a \times \frac{1}{19} \approx (a \times 2938661835 \times 2^{-32} + (a - a \times 2938661835 \times 2^{-32}) \times 2^{-1}) \times 2^{-4}$$

$$a \times \frac{1}{19} \approx a \times \frac{7233629131}{137438953472}$$

- **soluția generală**

$$\frac{a}{D} \approx \frac{\frac{aC}{2^X} + \frac{a - \frac{aC}{2^X}}{2^Y}}{2^Z}$$

$$D \approx \frac{2^{X+Y+Z}}{C \times (2^Y - 1) + 2^Z}$$

- Seminar 0x04

- **un algoritm simplu de toUpper()**

```
void toUpper(char *buff, int count) {
    for (int i = 0; i < count; ++i)
    {
        if (buff[i] >= 'a' && buff[i] <= 'z')
            buff[i] -= 32;
    }
}
```

- **branchless?**

```
void toUpper(char *buff, int count) {
    for (int i = 0; i < count; ++i)
    {
      buff[i] -= 32*(buff[i] >= 'a' && buff[i] <= 'z');
    }
}
```

- Seminar 0x05

a) timpul total de acces memorie este (din curs)

1 ns + (0.1 x (5 ns + (0.01 x (10 ns + (0.002 x 50 ns)))))

în cazul nostru

1 ns + (A x (5 ns + (0.01 x (10 ns + (0.002 x 50 ns))))) = t_{RAM} / 2

b) 1 ns + (0.1 x (A ns + (0.01 x (10 ns + (0.002 x 50 ns))))) = t_{RAM} / 10

c) 1 ns + (0.1 x (5 ns + (0.01 x (10 ns + (A x 50 ns))))) = t_{RAM}

d) pentru L1, să trecem de la 1ns la 0.9ns ne costă 100$

pentru L2, să trecem de la 5ns la 4.5ns ne costă 25$

pentru L3, să trecem de la 10ns la 9ns ne costă 5$

$1 \times 0.9^A + (0.1 \times (5 \times 0.9^B + (0.01 \times (10 \times 0.9^C + (0.002 \times 50))))) = t_{RAM}/1000$

vrem: minimize 100 x A + 25 x B + 5 x C

rezolvați pentru A, B și C

Test	Program A	Program B	A/B	B/A
1	9	3	3	0.33
2	8	2	4	0.25
3	2	20	0.1	10
4	10	2	5	0.2
Media	(a) 7.25	(a) 6.75	(g) 1.57	(g) 0.64

Concluzia: Program B este de 3 ori mai rapid decât Program A
Concluzia: Program A este de 2.7 ori mai rapid decât Program B

Nu luați media aritmetică a rapoartelor A/B sau B/A
Luați media geometrică a rapoartelor A/B sau B/A
- în acest caz, media rapoartelor este raportul medilor

Test	Program A	Program B	A/B	B/A
1	9	3	3	0.33
2	8	2	4	0.25
3	2	20	0.1	10
4	10	2	5	0.2
Media	(a) 7.25	(a) 6.75	(g) 1.57	(g) 0.64

Vrem să comparăm Program A vs. Program B: cine este mai rapid? A sau B?
- rulăm programele de mai multe ori
- comparăm linie cu linie în tabelul de mai sus
- pentru fiecare linie decidem cine câștigă (A sau B)
- apoi calculăm: care este probabilitatea ca A să fie mai rapid decât B dacă am observat că în n cazuri (din totalul de N) A este mai rapid decât B
- p-value

4. Se dau două numere complexe $x = a + bi$ și $y = c + di$. Răspundeți la următoarele întrebări:

(a) scrieți explicit formula pentru $z = x \times y$;

(b) câte adunări și înmulțiri se realizează pentru calculul lui z?

(c) puteți să calculați z cu mai puține înmulțiri?

(d) de câte ori ar trebui să fie mai lentă o înmulțire față de a adunare pentru ca rezultatul de la punctul precedent să fie eficient?

(e) ideea de a înlocui o înmulțire cu mai multe adunări (în general, o operație dificilă cu o serie de operații simple) apare de mai multe ori în algoritmică (vedeți algoritmul lui Strassen).

a) z = (a+bi)x(c+di) = ac – bd + i(ad + bc)

b) 2 adunări, 4 înmulțiri

c) calculăm S1 = ac, S2 = bd și S3 = (a+b)x(c+d)

z = S1-S2 + i(S3-S1-S2)

5 adunări, 3 înmulțiri

d) C1 – costul unei adunări

C2 – costul unei înmulțiri

2C1 + 4C2 > 5C1 + 3C2

C2/C1 > 3