

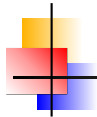


Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2022/2023

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <http://cs.unibuc.ro/~lleustean/>



PRELIMINARII



Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$C_T A = T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}$$

Notății: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale;
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; \mathbb{Z} este mulțimea numerelor întregi; \mathbb{R} este mulțimea numerelor reale; \mathbb{Q} este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar,
 $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.



Operații cu mulțimi

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$;
 $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă $a = c$ și $b = d$.

Definiție

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$



Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție.

Spunem că $f : A \rightarrow B$ este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** sau **codomeniul** lui f .

Fie $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .
- ▶ Fie $f|_X : X \rightarrow B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este **restricția** lui f la X .

Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $\text{Fun}(A, B)$ sau B^A .



Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție.

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcția identică a lui A : $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$



$f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

f este bijectivă ddacă f este inversabilă.

Observație

- (i) Pentru orice mulțime A , $\text{Fun}(\emptyset, A)$ are un singur element, **funcția vidă**.
- (ii) Pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$.

Definiția 1.1

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$



Definiția 1.2

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notatie:** $A \sim B$.

Propoziția 1.3

Pentru orice mulțimi A, B, C , avem

- (i) $A \sim A$;
- (ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.
- (iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B dacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.



Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Definiția 1.5

*O mulțime A se numește **finită** dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{1, \dots, n\}$.*

*Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și **cardinalul** lui A .*

Definiția 1.6

*O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.*



Mulțimi (cel mult) numărabile

Definiția 1.7

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu \mathbb{N} .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple de mulțimi numărabile: \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{Q} .

Teorema Cantor

\mathbb{R} , $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt mulțimi numărabile.

Se poate demonstra că

Propoziția 1.8

\mathbb{R} este echipotentă cu $2^{\mathbb{N}}$.



Mulțimi (cel mult) numărabile

Propoziția 1.9

- (i) Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.*
- (ii) Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.*
- (iii) O mulțime A este cel mult numărabilă dacă există o funcție injectivă de la A la o mulțime numărabilă.*
- (iv) Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.*
- (v) Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

Corolar 1.10

Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.



Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Pentru orice mulțime A , **cardinalul** lui A (sau **numărul cardinal** al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- ▶ $|A|$ este unic determinat de A .
- ▶ pentru orice mulțimi A, B , avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A .

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.



Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A .

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A , $|A|$ este tot o mulțime.

- ▶ Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele **transfinite** sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează \aleph_0 (se citește **alef zero**).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează \mathfrak{c} și se mai numește și **puterea continuumului**.
- ▶ O mulțime A este numărabilă dacă $|A| = \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Fie I o mulțime nevidă.

Definiția 1.11

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$



Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Definiția 1.12

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \}.\end{aligned}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

► $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un **n -tuplu (ordonat)**

► $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$

► $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$



Propoziția 1.13

- (i) *Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.*
- (ii) *Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.*
- (iii) *Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.*



Definiția 1.14

O **relație n -ară** între A_1, \dots, A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n -ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n -ară, spunem că n este **aritatea** lui R .

Definiția 1.15

O **relație binară** între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A^2 = A \times A$.

Exemple

- ▶ relația de divizibilitate pe \mathbb{N} :
 $| = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$
- ▶ relația de ordine strictă pe \mathbb{N} :
 $< = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$



Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A .

Notăție: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiția 1.16

- ▶ R este **reflexivă** dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **ireflexivă** dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx .
- ▶ R este **antisimetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$,
 xRy și yRx implică $x = y$.
- ▶ R este **tranzitivă** dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
 xRy și yRz implică xRz .
- ▶ R este **totală** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx .



Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A .

Definiția 1.17

R este **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiția 1.18

R este relație de

- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu \leq , iar relațiile de ordine strictă cu $<$.



LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm

p, q, r, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici \neg (negația), \rightarrow (implicația), \vee (disjuncția), \wedge (conjuncția), \leftrightarrow (echivalența).

Exemple:

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = *Azi este vineri, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Azi este vineri.* q = *Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = *Azi este vineri și nu avem curs de logică.*



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*

q = *Sunt taxiuri la gară.*

r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**



Definiția 2.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de *variabile*;
 - ▶ conectori logici: \neg (se citește *non*), \rightarrow (se citește *implică*)
 - ▶ paranteze: $(,)$.
- Mulțimea *Sim* a *simbolurilor* lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$



Definiția 2.2

Mulțimea *Expr* a *expresiilor* lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$(((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$



Operația de bază pentru expresii este **concatenarea**: dacă $\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$.

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in \text{Sim}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j) -**subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ .



Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 2.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notății: Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 2.5

Mulțimea Form a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.



Principiul inducției pe formule

Propoziția 2.6 (Principiul inducției pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea P .
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea P , atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea P .
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea P , atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P .

Atunci orice formulă φ are proprietatea P .

Dem.: Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P .

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**.
Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**. □



Principiul inducției pe formule

Propoziția 2.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ $V \subseteq \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \neg , adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \rightarrow , adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = \text{Form}$.

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,
 φ are proprietatea **P** dacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 2.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă φ este în Γ . Așadar, $\Gamma = \text{Form}$. □



Definiția 2.8

Fie φ o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $\text{SubForm}(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$\text{SubForm}(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Conectorii derivați \vee (se citește **sau**), \wedge (se citește **și**), \leftrightarrow (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - \neg are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.



Principiul recursiei pe formule

Propoziția 2.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .

(R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : \text{Form} \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ ,
 $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ .

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned}c(v) &= 0 && \text{pentru orice variabilă } v \\c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 && \text{pentru orice formulă } \varphi \\c(\varphi \rightarrow \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 && \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.\end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \rightarrow A$, $G_0(v) = 0$,

$$\begin{aligned}G_{\neg} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, && G_{\neg}(n) = n + 1, \\G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, && G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.\end{aligned}$$



Notăție:

Pentru orice formulă φ , notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.



SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

1 pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.



Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.10

O *evaluare* (sau *interpretare*) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 2.11

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶ $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.
- ▶ $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \text{Form}$,
- ▶ $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in \text{Form}$.

Dem.: Aplicăm Principiul recursiei pe formule (Propoziția 2.9) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\neg}(p) = \neg p$ și $G_{\rightarrow} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\rightarrow}(p, q) = p \rightarrow q$. □



Propoziția 2.12

Dacă $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** ddacă pentru orice evaluări
 $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

► $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.



Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \neg\psi$ și ψ satisface **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î.
 $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece
 $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice
 $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ , obținem că
 $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.



Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$ și pentru orice $v \in \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.

