Ap1 Fie $V_1 = \{(x, y, 0, 0) / x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$
$V_2 = \{(0, 0, z, t) / z, t \in \mathbb{R}\}$

a) Arătați că: $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ ssp. vectoriale și precizați dimensiunile lor.

b) Dem. că: $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$

Sol: Fie $u_1, u_2 \in V_1 \Rightarrow u_1 = (x_1, y_1, 0, 0)$, $u_2 = (x_2, y_2, 0, 0)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, 0, 0)$, unde $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in V_1 \Rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^4$ ssp. vect.

$V_1 \ni (x, y, 0, 0) = x e_1 + y e_2$, $x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow B_1 = \{e_1, e_2\} \subset V_1$ bază $\Rightarrow \dim V_1 = 2$ (plan vectorial)

Analog se arată că: $V_2 \subset \mathbb{R}^4$ ssp. vect. și $\dim V_2 = 2$ (—"—)
$B_2 = \{e_3, e_4\} \subset V_2$ bază

Aplicăm th dimensiunii (Grassmann):
$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Obs: $V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow x = y = z = t = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 0 = 4$
Dar: $V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ ssp. vect.
$\Rightarrow \boxed{V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4}$

• $(\forall)\ v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(\exists)!\ v_1 = (x, y, 0, 0) \in V_1$, $v_2 = (0, 0, y, z) \in V_2$ a.î. $v = v_1 + v_2$

$\boxed{Ap1.}$ Fie $\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, {}^tA = A \} \subset \mathcal{M}_n(K)$

$\mathcal{A} = \{ B \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, {}^tB = -B \}$

a) Dem. că: $\mathcal{S}, \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(K)$ ssp. vectoriale

b) Arătați că: $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

c) Verificați teorema dimensiunii în acest caz.

Sol: a) $\mathcal{S} \to$ mulțimea matricelor simetrice

$\mathcal{A} \to$ —"— antisimetrice

$\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(K)$
ssp. vectorial

Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow {}^tA_1 = A_1$
$\alpha_1, \alpha_2 \in K \qquad {}^tA_2 = A_2$

Avem: ${}^t(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = {}^t(\alpha_1 A_1) + {}^t(\alpha_2 A_2) =$

$= \alpha_1 \, {}^tA_1 + \alpha_2 \, {}^tA_2 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \Rightarrow \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in \mathcal{S}$

Deci: $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(K)$
ssp. vectorial (al matricelor simetrice)

Analog se arată că: $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(K)$
ssp. vectorial (al matricelor antisimetrice)

Evident: $\mathcal{S} + \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(K)$. Vom demonstra că: $\mathcal{M}_n(K) \subset \mathcal{S} + \mathcal{A}$

i.e. $(\forall)\, C \in \mathcal{M}_n(K), (\exists)\, A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{A}$ a.î. $C = A + B$

Obs: Fie $C \in \mathcal{M}_n(K)$ $\qquad C = A + B$

${}^tC = {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A - B$

$\Rightarrow 2A = C + {}^tC \Rightarrow A = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$

$2B = C - {}^tC \Rightarrow B = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$

Luăm: $A = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ $\{{}^tA = A\}$

și $B = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$ $\{{}^tB = -B\}$

Deci: $(\forall)\ C \in \mathcal{M}_n(K)$, $(\exists)\ A \in \mathcal{S}$ și $B \in \mathcal{A}$ a.î. $C = A + B$,

i.e. $\mathcal{M}_n(K) \subset \mathcal{S} + \mathcal{A}$

În concluzie, $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$

Arătăm că: $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{O_n\}$

Fie $C \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} {}^tC = C \\ {}^tC = -C \end{array}\right| \Rightarrow C = -C \Rightarrow 2C = O_n \Rightarrow \underline{C = O_n}$

Așadar: $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

$\uparrow$ <u>suma directă</u>

c) Verificarea th. dimensiunii în acest caz presupune verificarea următoarei egalități:

$$\dim_K \mathcal{M}_n(K) = \dim_K \mathcal{S} + \dim_K \mathcal{A}$$

Știm că: $\dim_K \mathcal{M}_n(K) = n^2$

Determinăm dimensiunile celor 2 sp. vectoriale $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{A}$.

. Fie $A \in \mathcal{S}$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

${}^tA = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$, $(\forall)\ i,j = \overline{1,n}$ (S)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \le j \le i \le n} a_{ij} E'_{ij}, \text{ unde } E'_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \end{pmatrix} \\ (i) \end{array}$$

$\downarrow$

matricea care are 1 pe pozițiile (i,j) și (j,i) și în rest 0.

$(\forall)\ 1 \le j \le i \le n$

$$B_{\mathcal{S}} = \{E'_{ij}\}_{1\le j\le i\le n} \subset \mathcal{S}$$

$$\underset{(T)}{\underline{\text{bază}}} \Rightarrow \dim \mathcal{S} = \operatorname{card} B_{\mathcal{S}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Fie $B \in \mathcal{A}$, $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$${}^{t}B = -B \Leftrightarrow b_{ji} = -b_{ij},\ (\forall)\ i,j=\overline{1,n}$$

<u>Obs</u>: Pt. $i=j \Rightarrow b_{ii} = -b_{ii} \Rightarrow 2b_{ii} = 0 \Rightarrow b_{ii} = 0,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$

{$(\forall)$ matrice antisimetrică are diagonala principală nulă}

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b_{21} & \cdots & -b_{n1} \\ b_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1\le j<i\le n-1} b_{ij} E''_{ij}, \text{ unde } E''_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & \boxed{-1} \\ & \ddots & \\ \boxed{1} & & 0 \end{pmatrix}$$

matricea care are 1 pe poz (i,j) $\{j>i\}$ și -1 pe poz. (j,i), 0 în rest.

$$B_{\mathcal{A}} = \{E''_{ij}\}_{1\le j<i\le n-1} \subset \mathcal{A}$$

$$\underset{(T)}{\underline{\text{bază}}} \Rightarrow \dim \mathcal{A} = \operatorname{card} B_{\mathcal{A}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Avem: $\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$ ✓

(verificarea th. dimensiunii, în acest caz).