LABORATOR #8

EX#1 Fie $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in (0, \infty)$. Creaţi un fişier în Python® prin care să se genereze un număr aleator X distribuit normal $N(\mu, \sigma^2)$

(a) $X = \mu + \sqrt{-2\sigma^2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$, cu U_1, U_2 numere generate aleator uniform în $[0, 1]$;

(b) $X = \mu + \sqrt{-2\sigma^2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$, cu U_1, U_2 numere generate aleator uniform în $[0, 1]$;

(c) folosind algoritmul de generare din Python®.

Creaţi un fişier în Python® prin care

(d) să se realizeze N simulări pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c);

(e) să se afişeze în aceeaşi figură histrogramele corespunzătoare simulărilor realizate la (d) (pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c));

(f) să se afişeze în aceeaşi figură de la (e) graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$;

(g) să se estimeze numeric media şi varianţa variabilei aleatoare distribuită normal $N(\mu, \sigma^2)$ folosind simulările de la (d) (pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c)).

EX#2 Fie $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in (0, \infty)$, X un număr aleator distribuit normal $N(\mu, \sigma^2)$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Creaţi un fişier în Python® prin care să se genereze un număr aleator Y

(a) $Y = \alpha + X$;

(b) $Y = \beta X$;

(c) $Y = \alpha + \beta X$.

Creaţi un fişier în Python® prin care

(d) să se realizeze N simulări pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c);

(e) să se afişeze în aceeaşi figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (d) pentru cazul (a) şi graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[x-(\alpha+\mu)]^2}{2\sigma^2}}$;

(f) să se afişeze în aceeaşi figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (d) pentru cazul (b) şi graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\beta\mu)^2}{2\beta^2\sigma^2}}$;

(g) să se afişeze în aceeaşi figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (d) pentru cazul (c) şi graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2\sigma^2}} e^{-\frac{[x-(\alpha+\beta\mu)]^2}{2\beta^2\sigma^2}}$.

EX#3 Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare reale independente şi identic distribuite (i.i.d.), de medie $\mu \coloneqq \mathbb{E}[X_i]$ şi varianţă finită. Fie

$$Z \coloneqq \sqrt{n}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right).$$

Creaţi un fişier în Python® prin care:

(a) să se genereze N simulări pentru Z;

(b) să se afişeze în aceeaşi figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (a) şi graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, unde $\sigma^2 = Var(X_i)$.

EX#4 Fie mersul aleator $(Y_n)_n$ ce porneşte din 0 (i.e. $Y_0 = 0$) şi se deplasează la fiecare pas +1 sau -1 cu probabilitate $p \in [0, 1]$, respectiv $1 - p$, i.e.

$$Y_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 1.$$

Creaţi un fişier în Python® prin care

(a) să se simuleze o traiectorie a mersului aleator corespunzătoare primilor n paşi şi să se afişeze într-o figură graficul traiectoriei;

(b) să se simuleze N poziţii ale mersului aleator după primii n paşi;

(c) să se afişeze în aceeaşi figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (b) şi graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}$, unde $\mu = \mathbb{E}[X_1], \sigma^2 = Var(X_1)$.

EX#5 Fie mersul aleator $(Y_n)_n$ ce porneşte din 0 (i.e. $Y_0 = 0$) şi

$$Y_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \sim \begin{pmatrix} -1/\sqrt{0.5} & 0 & 1/\sqrt{0.5} \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 1.$$

Creaţi un fişier în Python® prin care

(a) să se simuleze o traiectorie a mersului aleator corespunzătoare primilor n paşi şi să se afişeze într-o figură graficul traiectoriei;

(b) să se simuleze N poziţii ale mersului aleator după primii n paşi;

(c) să se afişeze în aceeaşi figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (b) şi graficul funcţiei de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}$, unde $\mu = \mathbb{E}[X_1], \sigma^2 = Var(X_1)$;

(d) comparaţi rezultatele cu cele obţinute la Ex#4 corespunzătoare lui $p = 0.5$.

Indicaţii Python®: `numpy`, `numpy.random`, `scipy.stats`, `matplotlib.pyplot`, `matplotlib.pyplot.hist`