FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen ianuarie 2023

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Indicaţii:

- Bifaţi doar variantele pe care le consideraţi corecte şi folosiţi un singur stil de bifare! Spre exemplu, o variantă bifată poate arăta aşa: ☒. În cazul în care aţi greşit, scrieţi de mână, sub variante: “Răspuns(uri) corect(e): [lista răspunsurilor]”. **Atenţie:** în acest caz, doar răpunsurile scrise de mână vor fi luate în considerare pentru acel subiect.
- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f;
  - un simbol de constantă c.

Varianta 5.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

1 Logica propoziţională

(P1) [1 punct] Fie g, $h : V \to \{0, 1\}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$g(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ 1 & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

şi $h(v_n) = 1 - g(v_n)$. Să se găsească $\Sigma \subseteq Form$ cu $Mod(\Sigma) = \{g, h\}$. Să se justifice răspunsul.

(P2) [1,5 puncte] Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi $\varphi \in Form$. Să se arate că $\Gamma \vDash \neg\varphi$ este echivalent cu faptul că $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(P3) [1 punct] Fie δ, $\chi \in Form$. Să se arate, fără a face apel la Teorema de completitudine, că $\vdash (\delta \vee \chi) \to (\chi \vee \delta)$.

2 Logica de ordinul I

(P4) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice $\mathcal{L}$-formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$, $\forall x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\psi \to \varphi$.

(P5) [1,5 puncte] Fie x o variabilă. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule ρ, θ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\exists x\rho \wedge \exists x\theta \not\vDash \exists x(\rho \wedge \theta)$.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P6) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunţ în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \exists u\forall x\forall z\exists v((T(x) \to R(x,y)) \vee (S(v) \to R(z,v)))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru φ?
☐ A: $\forall x\forall z((T(x) \to R(x,l)) \vee (S(n(x,z)) \to R(z,n(x,z))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operaţie binară.
☐ B: $\forall x\forall z((T(x) \to R(x,l)) \vee (S(h(z)) \to R(z,h(z))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar h este simbol nou de operaţie unară.
☐ C: $\forall x\forall z((T(x) \to R(x,e)) \vee (S(h(x,z)) \to R(z,h(x,z))))$, unde e este simbol nou de constantă, iar h este simbol nou de operaţie binară.
☐ D: $\forall x\forall z((T(e(x)) \to R(e(x),u)) \vee (S(h(v)) \to R(z,h(v))))$, unde e este simbol nou de constantă, iar h este simbol nou de operaţie unară.
☐ E: $\forall x\forall z((T(x) \to R(x,l(x))) \vee (S(h(x,z)) \to R(z,h(z))))$, unde h şi l sunt simboluri noi de operaţii binare.

(P7) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \forall xS(x) \vee \neg\exists yS(y)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\exists x\forall y(\neg S(x) \vee \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\forall x\forall y(S(x) \vee S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\forall x\forall y(S(x) \vee \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\exists x\exists y\neg(\neg S(x) \wedge S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\exists x\exists y(S(x) \wedge S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P8) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_2, \neg v_4\}, C_2 = \{v_1, v_2, v_3\}, C_3 = \{\neg v_2, v_4\}, C_4 = \{\neg v_1, v_3\}, C_5 = \{v_1, v_4\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluţie?
☐ A: $C_6 = \{v_1, v_2\}$ (rezolvent al C_1, C_5) şi $C_7 = \{v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).
☐ B: $C_6 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_4, C_5) şi $C_7 = \{v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_6).
☐ C: $C_6 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_2, C_5) şi $C_7 = \{\neg v_1, v_2, v_4\}$ (rezolvent al C_4, C_6).
☐ D: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_3, C_4).
☐ E: $C_6 = \{v_1, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_2, C_3) şi $C_7 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_4, C_6).

(P9) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \neg\forall y\,((f(y) = c) \to \neg\forall xS(x)) \to (\exists xT(x) \vee \forall yT(y))$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\exists y \forall x \forall u \exists v\, ((((\neg f(y)) = c) \to S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\forall y \exists x \exists u \forall v\, (((f(y) = c) \to S(x)) \vee \neg\, (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\forall y \forall x \exists u \forall v\, (\neg\, ((f(y) = c) \to \neg S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\forall y \exists x \exists u \forall v\, (\neg\, ((f(y) = c) \to S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\forall y \exists x \exists u \forall v\, (\neg\, ((f(y) = c) \to \neg S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P10) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\varphi := (v_1 \wedge v_3) \to (\neg v_2 \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3))$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: φ este tautologie.
☐ B: φ nu este satisfiabilă.
☐ C: φ nu este tautologie.
☐ D: Dacă e este o evaluare astfel încât $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.
☐ E: Dacă e este o evaluare astfel încât $e(v_1) = e(v_3) = 0$ şi $e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\varphi) = 1$.

(P11) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \to (v_2 \vee v_3)) \to (v_2 \wedge \neg v_3)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee v_2 \vee \neg v_3$ este FND a lui φ.
☐ B: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FND a lui φ.
☐ C: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_2 \vee \neg v_3)$ este FND a lui φ.
☐ D: $(v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3) \vee (v_2 \wedge v_3)$ este FND a lui φ.
☐ E: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_2 \wedge \neg v_3)$ este FND a lui φ.

(P12) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_4\}, \{v_1, \neg v_2\}, \{v_1, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_4$, $x_3 := v_2$, $x_4 := v_3$ obţinem:
☐ A: $U_3 = \{\{v_3, \neg v_3\}\}$.
☐ B: $U_4 = \{v_3\}$.
☐ C: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ D: $\mathcal{S}_5 = \{\{v_4\}\}$.
☐ E: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_3\}, \{\neg v_3\}\}$.

(P13) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (v_1 \vee v_2) \to (\neg v_3 \to v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ B: $v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ C: $\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ D: $v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ E: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ.

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := x \dot{<} \dot{3} \text{ şi } \psi := \neg(x \dot{<} \dot{5}), \text{ unde } \dot{3} := \dot{S}\dot{S}\dot{S}\dot{0},\ \dot{5} := \dot{S}\dot{S}\dot{3}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow 4}]$.
☐ B: $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$.
☐ C: $\mathcal{N} \vDash (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e]$.
☐ D: $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$.
☐ E: $\mathcal{N} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow 7}]$.

(P15) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\theta := \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \rightarrow (v_1 \rightarrow v_2)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $e^+(\theta) = e^+(v_1 \rightarrow (\neg v_1 \rightarrow v_2))$ pentru orice evaluare e.
☐ B: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \wedge v_2) \rightarrow (\neg v_2 \vee \neg v_1))$ pentru orice evaluare e.
☐ C: $e^+(\theta) = e^+(\neg(v_1 \vee v_2) \rightarrow \neg v_1)$ pentru orice evaluare e.
☐ D: $e^+(\theta) = e^+(\neg(v_1 \vee v_2) \rightarrow v_1)$ pentru orice evaluare e.
☐ E: $e^+(\theta) = e^+(v_1 \vee (\neg v_1 \rightarrow v_2))$ pentru orice evaluare e.