

Algoritmi avansați

Seminar 7 (săpt. 13 și 14)

1. Dați exemplu de mulțime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din \mathbb{R}^2 astfel ca diagrama Voronoi asociată lui \mathcal{M} să conțină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conțină exact cinci semidrepte. Justificați alegerea făcută.

2. a) Fie o mulțime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi \mathcal{D} asociată unei mulțimi cu cinci puncte din \mathbb{R}^2 știind că \mathcal{D} are exact cinci semidrepte? Analizați toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificați!

3. Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulțimii $\{O, A, B, C, D\}$.

4. (i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeți două drepte distincte d, g care trec prin A , determinați dualele A^*, d^*, g^* și verificați că A^* este dreapta determinată de punctele d^* și g^* .

(ii) Determinați duala următoarei configurații: Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se alege două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte. Desenați ambele configurații. Completați configurația inițială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obțineți o configurație autoduală (i.e. configurația duală să aibă aceleași elemente geometrice și aceleași incidențe ca cea inițială).

5. a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ și $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Dați exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecția $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuațiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \quad H_2 : y - 5 \leq 0; \quad H_3 : -x \leq 0; \quad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de parametrul a , natura intersecției $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

6. *Scrieți inecuațiile semiplanelor corespunzătoare și studiați intersecția acestora, dacă normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1).$$

7. (Suplimentar) *Demonstrați că arborele parțial de cost minim al lui \mathcal{P} este un subgraf al triangulării Delaunay.*