② Spații vectoriale euclidiene:

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ – spațiu vectorial real

și $F: V\times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită

• F se numește produs scalar pe V.

•• Un spațiu vectorial real V dotat cu un produs scalar se numește spațiu vectorial euclidian

Exemplu: Fie sp. vectorial real $(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$

Definim $<,> : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, (\forall)\ x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\downarrow$

produsul scalar canonic

$(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, <,>) \to$ spațiu vectorial euclidian

• $\|x\| = \sqrt{<x,x>}, (\forall)\ x\in V$

• $d: V\times V \to \mathbb{R}_+$,

$$d(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{<y-x, y-x>}, (\forall)\ x,y\in V$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

În orice sp. vectorial euclidian $(E/_{\mathbb{R}}, <,>)$ are loc inegalitatea:

$$|<x,y>| \le \|x\|\ \|y\|, (\forall)\ x,y\in E.$$

„=" $\Leftrightarrow \{x,y\}$ sistem vectorial liniar dependent (i.e x și y sunt vectori coliniari)

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt:

$(\forall)\ \underbrace{\{f_1,\dots,f_n\}}_{\text{bază arbitrară}} \subset E/_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\exists)\ \underbrace{\{e_1,\dots,e_n\}}_{\text{bază ortonormată}} \subset E/_{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\overline{\{e_1,\dots,e_i\}} = \{f_1,\dots,f_i\}, (\forall)\ i=\overline{1,n}$$

$\boxed{Ap1}$ În spațiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \underbrace{<,>}_{\text{produsul scalar canonic}})$ să se construiască o bază ortonormată pornind de la baza:

$$B = \{f_1 = (-1,1,1),\ f_2 = (1,-1,1),\ f_3 = (1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt (P.O.G-S)

Rez: Avem:

(V1)
$$\begin{cases} e_1' = f_1 \\ e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{<f_i, e_j'>}{\|e_j'\|^2} e_j',\ (\forall)\ i = \overline{2,n} \end{cases} \to \{e_1', \dots, e_n'\} \text{ bază ortogonală}$$

$\{$i.e. $<e_i', e_j'> = 0$, $(\forall)\ 1 \le i \ne j \le n\}$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|},\ (\forall)\ i = \overline{1,n} \to \{e_1, \dots, e_n\} \text{ bază ortonormată}$$

$\{$i.e. $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$, $(\forall)\ i,j = \overline{1,n}\}$

δ_{ij} → simbolul lui Kronecker

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}}$$

În cazul nostru obținem:

$$\begin{cases} e_1' = f_1 = (-1,1,1) \\ e_2' = f_2 - \frac{<f_2, e_1'>}{\|e_1'\|^2} e_1' = (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2) \\ e_3' = f_3 - \frac{<f_3, e_1'>}{\|e_1'\|^2} e_1' - \frac{<f_3, e_2'>}{\|e_2'\|^2} e_2' = \end{cases} \to \text{bază ortogonală}$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \cdot 6} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) =$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \\ e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \\ e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \end{cases} \to \text{bază ortonormată.}$$

$\textcircled{V_2}$ Avem: $\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \dfrac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \langle f_i, e_j \rangle e_j, \ (\forall)\ i = \overline{2,n} \end{cases}$

Prin calcul obținem:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}, \quad e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$$
$$= (1,-1,1) - \frac{1}{3}(-1)(-1,1,1)$$
$$= (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2)$$
$$\|e_2'\| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$e_2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}, \quad e_3' = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2$$
$$= (1,1,-1) - \frac{1}{3}(-1)(-1,1,1) - \frac{1}{6}(-2)(1,-1,2)$$
$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$
$$\|e_3'\| = \sqrt{2}$$

$$e_3 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$$

Așadar: $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ bază ortonormată obținută prin (P.O.G-S) din baza dată.

! $\boxed{\text{Temă}}$ Aceelași enunț ca în aplicația anterioară pentru baza

$$B = \{ f_1 = (1,1,1),\ f_2 = (1,1,-1),\ f_3 = (1,-1,-1) \}$$

Spații vectoriale euclidiene

Ap 1. Pornind de la baza

$$B = \{ f_1 = (0,1,1),\ f_2 = (1,0,1),\ f_3 = (1,1,0) \} \subset E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underbrace{<,>}_{\text{produsul scalar canonic}}),$$

determinați o bază ortonormată prin utilizarea procedeului de ortonormalizare Gram-Schmidt

Rez. Reamintim
$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \dfrac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} <f_i, e_j> e_j, \ (\forall)\, i = \overline{2,n} \end{cases}$$

Avem: $\|f_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

$$e_2' = f_2 - <f_2, e_1> e_1 = (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) =$$
$$= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2,-1,1)$$

$$\|e_2'\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Rezultă $e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{1}{2}(2,-1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

$$e_3' = f_3 - \underbrace{<f_3, e_1>}_{=1/\sqrt{2}} e_1 - \underbrace{<f_3, e_2>}_{=1/\sqrt{6}} e_2 =$$
$$= (1,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) =$$
$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1,1,-1)$$

$\| e_3' \| = \frac{2}{3}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\underset{\sim}{e_3} = \frac{e_3'}{\| e_3' \|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(1,1,-1) = \underset{\sim}{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}$

<u>Verificare</u>: $\begin{cases} < e_1, e_2 > = < e_1, e_3 > = < e_2, e_3 > = 0 \\ \| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1 \end{cases}$

adică: $< e_i, e_j > = \delta_{ij}, (\forall)\, i,j = \overline{1,3} \Leftrightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată.

În concluzie, baza ortonormată obținută prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt din baza inițială $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ este $B' = \{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \}$

$\boxed{A_p 1.}$ Considerând spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{p.s.c}{<,>})$ și baza ortonormată B' obținută în aplicația anterioară, să se determine coordonatele următorilor vectori în această bază:

a) $v = (1,2,3)$

b) $w = (-1,1,2) \longrightarrow \boxed{\text{TEMA}}$

<u>Rez</u>: Considerăm scrierea vectorului v în baza B' dată:

$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

Atunci: $< v, e_1 > = v_1 \overbrace{< e_1, e_1 >}^{=1} + v_2 \overbrace{< e_2, e_1 >}^{=0} + v_3 \overbrace{< e_3, e_1 >}^{=0} = v_1$

$\Rightarrow v_1 = < v, e_1 >$

Analog $\Rightarrow v_2 = < v, e_2 >$

$v_3 = < v, e_3 >$

Deci: $v = < v, e_1 > e_1 + < v, e_2 > e_2 + < v, e_3 > e_3$, unde $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată

Calculând, obținem:

$v_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}$, $v_3 = 0$

Deci: $[v]_{B'} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

$\boxed{A_p 1}$ În spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, < >)$

{produsul scalar canonic}

se consideră vectorii $f_1 = (2,2,1)$ și
$f_2 = (-2,-1,2)$.

a) Calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre f_1 și f_2.

b) Determinați un vector nenul $f_3 \in E_3$ a.î. f_3 să fie perpendicular pe f_1 și f_2.

c) Pentru f_3 obținut la punctul (b), ortonormați sistemul $\{f_1, f_2, f_3\}$ prin procedeul de ortonormalizere Gram-Schmidt.

<u>Rez:</u> a) $\|f_1\| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$

$\|f_2\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2} = 3$

Not: $\theta = \sphericalangle(f_1, f_2)$

Avem: $\cos\theta = \frac{<f_1, f_2>}{\|f_1\| \|f_2\|} = -\frac{4}{9} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$
$= \pi - \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$

b) Fie $f_3 = (\alpha, \beta, \gamma) \in E_3$ a.î. $\begin{cases} f_3 \perp f_1 \\ f_3 \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} <f_3, f_1> = 0 \\ <f_3, f_2> = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ α, β nec. principale; $\gamma = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ nec. secundară

$\operatorname{rg} A = 2$

Rescriem sistemul:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = -\lambda \\ -2\alpha - \beta = -2\lambda \end{cases} \Bigg| \overset{+}{\Rightarrow} \Bigg| \begin{array}{l} \beta = -3\lambda \\ \alpha = \frac{5}{2}\lambda \\ \gamma = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow f_3 = \lambda\left(\frac{5}{2}, -3, 1\right), \lambda \in \mathbb{R}^*$ (deoarece $f_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$)

Așadar, determinarea lui f_3 nu este unică.

Luăm $\boxed{\lambda = 2} \Rightarrow f_3 = (5, -6, 2)$

(pentru ușurința rezolvării apl. la pct. c)

c) $\boxed{\text{TEMĂ}}$ Ortonormați sistemul:

$\{f_1 = (2,2,1), f_2 = (-2,-1,2), f_3 = (5,-6,2)\}$

prin $\underline{\text{P.O.G-S}}$.

$\boxed{\text{Obs}}$ $\langle f_1, f_3 \rangle = \langle f_2, f_3 \rangle = 0$ (așa a fost construit f_3)

$\Rightarrow$ raționament $\underline{\text{simplificat}}$.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$

$\boxed{\text{produsul scalar canonic}}$

Determinați suplementul ortogonal al următoarelor subspații vectoriale:

a) $U = \langle \overset{u_1}{(0,0,1)}, \overset{u_2}{(1,1,0)} \rangle = Sp\{u_1, u_2\}$

b) $V = \langle \underbrace{(1,2,3)}_{v} \rangle = Sp\{v\}$

<u>Rez:</u> ~~Fie~~ Reamintim: $(E/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ sp. vectorial euclidian

$U \subset E$
subspațiu vectorial

$U^{\perp} = \{y \in E / y \perp x, (\forall) x \in U\}$
$\downarrow$
s.n. complementul ortogonal al lui U

Dacă $U \oplus U^{\perp} = E \Rightarrow U^{\perp}$ s.n. suplementul ortogonal al lui U.

$\boxed{P}$ $(\forall)\ U \subset E \Rightarrow (\exists)!$ suplementul ortogonal $U^{\perp}$
subsp. vectorial

Revenim la rezolvarea aplicației date:

a) $U^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^3 / y \perp x, (\forall) x \in U\}$

$B = \{u_1, u_2\} \subset U$
bază

E suficient să verificăm rel. pe bază.

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\begin{cases} y \perp u_1 \\ y \perp u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y, u_1 \rangle = 0 \\ \langle y, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

$\Rightarrow$ | y_2, y_3 nec principale
| $y_1 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ nec secundară

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda \\ y_2 = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ y_3 = 0 \end{cases}$

Deci $y = \lambda(1, -1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$U^{\perp} = \{\lambda(1,-1,0) / \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,0) \rangle$
$\searrow$ suplementul ortogonal al lui U (ssp. vect. 1-dimensional)

b) $V^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^3 / y \perp x, (\forall) x \in V \}$

$B = \{ v \} \subset V$ baz$\breve{a}$

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $y \perp v \Leftrightarrow \langle y, v \rangle = 0$

$\Leftrightarrow y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$

Deci: $V^{\perp} = \{ \underset{(y_1, y_2, y_3)}{\overset{}{y}} \in \mathbb{R}^3 / y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \}$

suplement ortogonal al lui V (este un ssp. vectorial 2-dimensional)

$\boxed{\text{Temă:}}$ Același enunț ca în aplicația anterioară pentru:

a) $U = \langle (1,2,1), (1,-1,2) \rangle$

b) $V = \langle (2,-3,1) \rangle$

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{p.s.c}{\langle , \rangle})$,

$B_0 = \{ e_1, e_2, e_3 \} \subset E_3$ bază canonică

Stabiliți dacă următoarele aplicații liniare sunt transformări ortogonale.

a) $T: E_3 \to E_3$,
$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 \\ T(e_2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \end{cases}$$

b) $T: E_3 \to E_3$,
$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 + e_2 \\ T(e_2) = e_2 + e_3 \\ T(e_3) = e_3 + e_1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{TEMA}}$

c) $T: E_3 \to E_3$,
$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{2}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3 \\ T(e_2) = \frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \end{cases}$$

Rez: $\boxed{\text{Th}}$ Un endomorfism $T: E \to E$ este transf. ortogonală $\Leftrightarrow A$ - matricea sa asociată într-un reper ortonormat este matrice ortogonală (i.e. ${}^tA \cdot A = I_n$, $\dim_{\mathbb{R}} E = n$)

Rez: a) $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$

bază ortonormată ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\forall) i, j = \overline{1,3}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ $\to$ m. asoc. endomorf. T în raport cu baza canonică B_0.

Avem: ${}^tA \cdot A = I_3 \Rightarrow A$ m. ortogonală

Deci: T este transf. ortogonală (mai exact, o rotație de $\measuredangle \frac{\pi}{3}$, în jurul axei Ox)

b) Raționament analog!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\to$ m. asoc. endm. T în raport cu baza canonică B_0.

Dar: ${}^tA \cdot A \neq I_3 \Rightarrow A$ nu este m. ortogonală

$\Rightarrow T$ nu este transf. ortogonală (în schimb este o transf. ciclică)

Aducerea unei forme pătratice la o formă canonică

$\mapsto$ Metoda transformărilor ortogonale (sau metoda valorilor proprii)

– constă în determinarea valorilor proprii ale matricei A_B (pentru că aceasta este simetrică $\Rightarrow$ toate valorile proprii vor fi reale)

Atunci, în baza B' formată din vectori proprii ortonormați (prin P.O.G-S) Q are forma canonică următoare:

$$Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2,$$ unde $x = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ coord. în baza B'.

$\boxed{A_p 1}$ Fie forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, $(\forall)\ x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

Să se aducă Q la o formă canonică utilizând:

a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

c) $\boxed{\text{metoda transf. ortogonale}}$

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p Q în raport cu baza canonică $B_0=\{e_1,e_2,e_3\}\subset\mathbb{R}^3$

a) $Q(x) = (x_1-2x_2)^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3 = (x_1-2x_2)^2-2(x_2^2+2x_2x_3)+3x_3^2$

$= (x_1-2x_2)^2-2(x_2+x_3)^2+5x_3^2 = \underbrace{(x_1')^2-2(x_2')^2+5(x_3')^2}$

Sch. de coordonate $\begin{cases} x_1' = x_1-2x_2 \\ x_2' = x_2+x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1'+2x_2'-2x_3' \\ x_2 = x_2'-x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p. Q în raport cu baza B'.

$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-3\\-1\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}$, $B'=\{e_1'=(1,0,0),\ e_2'=(2,1,0),\ e_3'=(-3,-1,1)\}$

m. de trecere de la baza B_0 la B'

b) $\begin{cases} \Delta_1 = 1 \neq 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \Delta_3 = \det A = -10 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \Delta_i \neq 0, (\forall)\ i=\overline{1,3}$

$\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$

$Q(x) = \underbrace{(x_1')^2 - \tfrac{1}{2}(x_2')^2 + \tfrac{1}{5}(x_3')^2}$, $(\forall)\ x = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$

↳ coord. în raport cu noua bază B'

e) Metoda transf. ortogonale

Determinăm valorile proprii coresp. lui A

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

Ec. caract.: $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$ valorile proprii

Subspațiile proprii:

$V_{\lambda_1} = \{\alpha \underbrace{(2,2,1)}_{v_1} / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha v_1 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(-2,1,2)}_{v_2} / \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta v_2 / \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1,-2,2)}_{v_3} / \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\gamma v_3 / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

bază ortogonală (i.e. $\langle v_i, v_j \rangle = 0, (\forall) 1 \le i \ne j \le 3$)

$\xrightarrow{\text{P.O. G-S}} B' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}(2,2,1), \frac{1}{3}(-2,1,2), \frac{1}{3}(1,-2,2) \right\}$

bază ortonormată

Avem: $Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2$

$= \underbrace{-(x_1')^2 + 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2}$, unde $x = (x_1', x_2', x_3')$

Coord. lui x în raport cu baza ortonormată B' formată din vectori proprii

Signatura f. pătratice se conservă, indiferent de metoda folosită pt. aducerea la o formă canonică.

$\underline{sgn(Q)} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{nr. termeni pozitivi}}}{p} - \underset{\substack{\downarrow\\ \text{nr. termeni negativi}}}{q} = 2 - 1 = \underline{1}$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Același enunț, ca în apl. precedentă pentru forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3, (\forall) x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$