I Spații vectoriale:

Definiție: Un spațiu vectorial este o colecție de vectori, care pot fi adunați între ei și înmulțiți cu scalari

Definiție: Fie K un corp comutativ (de exemplu: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ cu p prim)

O mulțime nevidă V se numește spațiu vectorial peste K (sau K - spațiu vectorial) dacă pe V se poate defini o operație algebrică internă, astfel încât $(V, +)$ e grup abelian, adică îndeplinește axiomele:

- $x + y = y + x$
- $(x+y)+z = x+(y+z)$
- $\exists\ 0_V \in V$ a.î. $x + 0_V = x$
- $\forall x \in V$, $\exists -x \in V$ a.î. $x + (-x) = 0_V$

$\forall x, y, z \in V$

și

- $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$
- $(a+b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$
- $1 \cdot v = v$

$\forall a, b \in K$
$\forall v_1, v_2 \in V$

Exemple :

1) V vectori din plan

2) K corp, $K^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in K, \forall i = \overline{1,n}\}$
e un K - spațiu vectorial cu operațiile uzuale
$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$
$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$
$\forall \lambda \in K, a_i \in K$
$i = \overline{1,n}$

3) $M_{m,n}(K)$ e un K - spațiu vectorial cu operațiile uzuale
$A + B = (a_{ij}) + b(_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ $i = \overline{1,m}$
$j = \overline{1,n}$
$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$, $\lambda \in K$

4) $K[X]$ polinoamele în nedeterminanta X cu coeficientul în corpul K

5) $\mathcal{C}((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f$ continuă $\}$

Reguli de calcul într-un ~~K~~ spațiu vectorial:

1) $a(x-y) = ax - ay$
2) $(a-b)x = ax - ab$
3) $0_K \cdot v = 0_V$
4) $a \cdot 0_V = 0_V$
5) Regula semnelor
$(-a)v = a(-v) = -av$
6) Dacă $a \in K, x \in V$ a.î. $ax = 0_V$
$\Rightarrow a = 0_K$ sau $x = 0_V$

Pentru $\forall a, b \in K$
$\forall x, y \in V$

Subspații vectoriale:

Definiție: Fie V un K-spațiu vectorial, o submulțime nevidă $W \subseteq V$ se numește subspațiu vectorial în V dacă W cu restricțiile operațiilor de pe V este un K-spațiu vectorial.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) W e subspațiu vectorial în V
2) $\forall x, y \in W$, $x + y \in W$
3) $\forall a \in K$ și $x \in W$, $ax \in W$
4) $\forall a, b \in K$ și $\forall x, y \in W$, $ax + by \in W$

Exemple:

1) $\{0_V\}$, V sunt subgrupuri vectoriale în V
2) $K[X] = \{P(x) \in K[X] \mid \text{grad } p \leq n\} \cup \{0\}$ în $K[X]$
3) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$
4) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 7y = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$
5) Fie $A \in M_{m,n}(K)$ și notăm $\text{Ker} A =$
$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{Ker} A$ e subgrup vectorial în K^n

Demonstrație:

$\text{Ker} A \neq \emptyset$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker} A$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{Ax}_{0} + \beta \underbrace{Ay}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A \leq K^n$

Definiție: Fie V_1, V_2 subspații vectoriale în V

Notăm $V_1 + V_2 = \{ x + y \mid x \in V_1, y \in V_2 \}$

Atunci $V_1 + V_2$ e un spațiu vectorial în V numit suma subspațiilor V_1 și V_2

Definiție: Dacă $V_1 + V_2 + \dots + V_m = V$, spunem că V e suma subspațiilor $V_1, \dots, V_m$.

Atunci $\forall x \in V$, $\exists x_i \in V_i$ cu $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$

Baze:

Fie $S = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V/_K$ o submulțime finită de vectori din V K-spațiu vectorial.

$\langle S \rangle$ = un subspațiu vectorial al lui V numit subspațiul generat de S

Dacă $\langle S \rangle = V$ spunem că S e un sistem de generatori pentru V

Definiții:

1) $v_1, \dots, v_m \in V$ sunt un sistem liniar independent dacă $\forall\, a_1, \dots, a_m \in K$ cu $a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$

2) $S \subset V$ e sistem liniar independent dacă
$\forall\, S_1 \subseteq S$ e sistem liniar independent conform punctului 1)

3) Dacă $S \subset V$ nu e sistem liniar independent, spunem că vectorii din S sunt liniar dependenți

Observație: $S \subset V$ este sistem liniar independent $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ niciun vector din S nu e combinație liniară a celorlalți vectori din S

Combinație liniară: Fie V un K-spațiu vectorial
$v_1, \dots, v_m \in V$
$a_1, \dots, a_m \in K$
Vectorul: $(a_1v_1 + \dots + a_mv_m)$ s.n. o combinație liniară de $v_1, \dots, v_m$

Lemă: Dacă S e un sistem liniar independent în V și $x \in V \Rightarrow S \cup \{x\}$ este sist. liniar. ind. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \langle S \rangle$

Exemple :

1) $\{0_V\}$ nu e SLI (sistem liniar independent) deoarece $1_K \cdot 0_V = 0_V$ și $1_K \neq 0_K$

2) Dacă $0_V \in S \subset V \Rightarrow S$ nu e SLI

3) $S = \{v\} \subset V$ este SLI $\Leftrightarrow v \neq 0_V$

4) Fie $v_1, v_2 \in V$ nenuli

$\{v_1, v_2\}$ SLI $\Leftrightarrow$ v_1 și v_2 nu sunt proporționali

$\{v_1, v_2\}$ nu e SLI $\Leftrightarrow v_1 \in \langle v_2 \rangle$ sau $v_2 \in \langle v_1 \rangle$

$v_1 = a v_2$ sau $v_2 = b v_1$

$a, b \in K$

5) În K^n, $\{e_1, \dots, e_n\}$ sunt SLI

Definiție: O submulțime a lui V care este SLI și SG (sistem de generatori) se numește bază în V

Dimensiunea lui V este numărul de elemente dintr-o bază a lui $V \overset{not}{=} \dim_K V$

Teoremă: Fie V un K-spațiu vectorial și $S \subset V$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) S e bază

2) S e SLI maximal față de incluziune
($\forall x \in V \setminus S \Rightarrow S \cup \{x\}$ nu e SLI)

3) S e SG minimal față de incluziune
($\forall x \in S \Rightarrow \langle S \setminus \{x\} \rangle \subset V$)

Teoremă: Teorema schimbului (Steinitz)

Fie V un K - spațiu vectorial

$S = \{v_1, \dots, v_m\}$ un SLI în V

$S_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ un SG pentru V

Atunci:

1) $m \leq n$

2) Eventual renumerotând elementele lui S_1

$\{v_1, v_2, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ e un SG pentru V

~~Corolar~~

Corolar: $\forall$ 2 baze în V au același număr de elemente (deci $\dim V$ e bine definită)

Teoremă: $\forall$ spațiu liniar are măcar o bază

Cum construim o bază?

Să presupunem că $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle \leq K^m$

Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

calculăm forma eșalon E

Atunci $\{v_i \mid \exists$ pivot pe coloana i din $E\}$

formează o bază în spațiul V

În particular $\dim V =$ numărul de pivoți din E

SLI $\Leftrightarrow$ sistem omogen, are soluție unică $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ în forma eșalon pentru matricea extinsă avem pivot pe toate coloanele înafară de ultima $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ în forma eșalon pt. A avem pivot pe toate coloanele

Matricea de trecere de la o bază canonică la o bază arbitrară se obține scriind pe coloane vectorii bazei arbitrare în raport cu baza canonică

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V/K$

$B' = \{e_1', \dots, e_n'\} \subset V/K$ $\quad \dim_K V = n < \infty$

$\forall j = \overline{1,n}, \quad e_j' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \quad \alpha_{ij} \in K$

$$S = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ [e_1']_B & [e_2']_B & & [e_n']_B \end{pmatrix}$$

S = matricea schimbării de reper

Matricea de trecere de la o bază la alta e o matrice nesingulară.

Fie 2 baze $B, \tilde{B}$

și M matricea de trecere de la B la $\tilde{B}$

$B \overset{M}{\leadsto} \tilde{B}$

Formula de trecere: $\tilde{A} = M^{-1} A M$

Considerăm $B' = \{e_1', \dots, e_n'\} \subset V/\mathbb{R}$ $\quad$ 2 baze

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V/\mathbb{R}$

$g \Leftrightarrow f$ forma biliniară

Q
q $\Leftrightarrow$ φ forma pătratică

$g : V \times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică

Fie $x, y \in V$

$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j$

$$g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g(e_i, e_j) x^i y^j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j$$

$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \Rightarrow G$ e matrice simetrică

$(G^t = G)$ sau $(g_{ij} = g_{ji})$

matricial $g(x,y) = X^t G Y$, unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{S} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & & G' = S^t G S \end{array}$$

formula de transformare a matricei asociate unei forme biliniare simetrice g la schimbarea de bază

matricele asociate formei biliniare simetrice g în raport cu bazele B, B'

Spații afine:

Numim spațiu afin tripletul (A, V, φ) în care A e o mulțime nevidă de puncte, V un K-spațiu vectorial și funcția $\varphi : A \times A \to A$, $\varphi(A,B) = \overline{v} \in V$ care satisface condițiile:

1) $\forall A, B, C \in A$, $\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,A)$

2) $\exists$ un punct O din A a.î. φ_O e bijecție

Subspațiu afin:

Fie (A, V, φ) un spațiu afin, A' o submulțime nevidă a lui A și φ' restricția lui φ la $A' \times A'$).

S.n. subspațiu afin al spațiului afin (A, V, φ) un triplet (A', V', φ') unde $A' \subset A$ e o submulțime nevidă, $V' = \varphi(A' \times A')$ e un subspațiu vectorial al lui V, iar φ' e restricția lui φ la $A' \times A'$