$\boxed{\text{Ap1.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{p.s.c}{<,>})$,

$B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{E}_3$

bază canonică

Stabiliți dacă următoarele aplicații liniare sunt transformări ortogonale.

$\boxed{\text{TEMA}}$

a) $T: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$,

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 \\ T(e_2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \end{cases}$$

b) $T: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$,

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 + e_2 \\ T(e_2) = e_2 + e_3 \\ T(e_3) = e_3 + e_1 \end{cases}$$

c) $T: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$,

$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{2}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3 \\ T(e_2) = \frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \end{cases}$$

<u>Rez:</u> $\boxed{\text{Th}}$ Un endomorfism $T: E \to E$ este transf. ortogonală $\Leftrightarrow$ A – matricea se asociată într-un reper ortonormat este matrice ortogonală (i.e. ${}^tA \cdot A = I_n$, $\dim_{\mathbb{R}} E = n$)

<u>Rez</u>: a) $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$
bază ortonormată ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\forall) i, j = \overline{1,3}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ → m. asoc. endomorf. T în raport cu baza canonică B_0.

Avem: ${}^tA \cdot A = I_3 \Rightarrow A$ m. ortogonală

Deci: T este transf. ortogonală (mai exact, o rotație de $\sphericalangle \frac{\pi}{3}$, în jurul axei Ox)

b) <u>Raționament analog!</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → m. asoc. endm. T în raport cu baza canonică B_0.

Dar: ${}^tA \cdot A \neq I_3 \Rightarrow A$ <u>nu</u> este m. ortogonală.

$\Rightarrow T$ <u>nu</u> este transf. ortogonală (în schimb este o transf. <u>ciclică</u>)

<u>Aducerea unei forme pătratice la o formă canonică</u>

→ <u>Metoda transformărilor ortogonale</u> (sau metoda <u>valorilor proprii</u>)

– constă în determinarea valorilor proprii ale matricei A_B (pentru că aceasta este simetrică ⇒ toate valorile proprii vor fi reale)

Atunci, în baza B' formată din vectori proprii <u>ortonormați</u> (prin P.O.G–S) Q are forma canonică următoare:

$$Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2,$$ unde $x = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ coord. în baza B'.

$\boxed{A_p 1}$ Fie forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3, \quad (\forall)\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Să se aducă Q la o formă canonică utilizând:

a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

c) $\boxed{\text{metoda transf. ortogonale}}$

<u>Rez</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p Q în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$

a) $Q(x) = (x_1 - 2x_2)^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 - 2x_2)^2 - 2(x_2^2 + 2x_2x_3) + 3x_3^2$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2 = \underbrace{(x_1')^2 - 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2}$$

Sch. de coordonate $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_2 = x_2' - x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p. Q în raport cu baza B'.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \{e_1' = (1,0,0), e_2' = (2,1,0), e_3' = (-3,-1,1)\}$

$\downarrow$
m. de trecere de la baza B_0 la B'

b) $\begin{cases} \Delta_1 = 1 \neq 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \Delta_3 = \det A = -10 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \Delta_i \neq 0, (\forall)\, i = \overline{1,3}$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$$

$\underline{Q(x) = (x_1')^2 - \frac{1}{2}(x_2')^2 + \frac{1}{5}(x_3')^2}$, $(\forall)\, x = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$
↳ coord. în raport cu noua bază B'

e) Metoda transf. ortogonale

Determinăm valorile proprii coresp. lui A

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

Ec. caract.: $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$ valorile proprii

Subspațiile proprii:

$V_{\lambda_1} = \{\alpha \underbrace{(2,2,1)}_{v_1} / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha v_1 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(-2,1,2)}_{v_2} / \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta v_2 / \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1,-2,2)}_{v_3} / \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\gamma v_3 / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

bază ortogonală (i.e. $\langle v_i, v_j \rangle = 0, (\forall) 1 \le i \ne j \le 3$)

$\xrightarrow{\text{P.O. G-S}} B' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\} = \left\{\frac{1}{3}(2,2,1), \frac{1}{3}(-2,1,2), \frac{1}{3}(1,-2,2)\right\}$

bază ortonormată

Avem: $Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2$

$= \underbrace{-(x_1')^2 + 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2}$, unde $x = (x_1', x_2', x_3')$

Coord. lui x în raport cu baza ortonormată B' formată din vectori proprii

$\boxed{\text{Signatura f. pătratice se conservă}}$, indiferent de metoda folosită pt. aducerea la o formă canonică.

$\underline{\text{sgn}(Q)} = p - q = 2 - 1 = \underline{1}$

p: nr. termeni pozitivi

q: nr. termeni negativi

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Același enunț, ca în apl. precedentă pentru forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3, (\forall) x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Conice

Apl 1 Fie conica Γ de ecuație:

$$\overbrace{x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 - 1}^{\overset{not}{=} f(x_1,x_2)} = 0$$

Să se aducă la o formă canonică conica Γ prin izometrii

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$; $\delta = \det A = -\frac{5}{4}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -2 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\Delta = \det A' = \frac{9}{4}$

$\left.\begin{matrix} \delta < 0 \\ \Delta \neq 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \Gamma$ este HIPERBOLĂ (CLASIFICAREA CONICELOR)

Centrul conicei Γ este $P_0(x_1^0, x_2^0)$, unde coord. (x_1^0, x_2^0) se determină ca sol. unică a sist. de ec. liniare:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Deci: $P_0(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5})$ - centrul conicei Γ.

Efectuăm $\underline{\text{translația}}$ t:

$$t \begin{cases} x_1' = x_1 - x_1^0 \\ x_2' = x_2 - x_2^0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{2}{5} \\ x_2' = x_2 + \frac{8}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_1' - \frac{2}{5} \\ x_2 = x_2' - \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$t(\Gamma): (x_1')^2 - 3x_1'x_2' + (x_2')^2 \underbrace{- \frac{9}{5}}_{} = 0$$

$$f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\Delta}{\delta}$$

Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale lui A

Rezolv: $\boxed{\det(A - \lambda I_2) = 0}$, în $\mathbb{R}$.

(ec. caracteristică)

$$\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\iff \left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(-\lambda + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$

$\lambda_2 = \frac{5}{2}$

valorile proprii

Determinăm subsp. proprii corespunzătoare:

$$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, Av = \lambda_1 v \}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \Updownarrow \quad (A - \lambda_1 I_2) v = 0_{(2,1)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \frac{3}{2} v_1 - \frac{3}{2} v_2 = 0 \iff v_1 - v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1) \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, Av = \lambda_2 v \}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \Updownarrow \quad (A - \lambda_2 I_2) v = 0_{(2,1)}$$

$$\begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -\frac{3}{2} v_1 - \frac{3}{2} v_2 = 0 \iff v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} v_1 = -\alpha \\ v_2 = +\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{vmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = \{ \alpha(-1,+1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (-1,+1) \rangle$$

Considerăm vectorii proprii:

$$\begin{cases} f_1 = (1,1) \\ f_2 = (-1,+1) \end{cases} \qquad \underline{\text{Obs}}: \langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow f_1 \perp f_2$$

Normăm vectorii f_1, f_2 și obținem un reper ortonormat:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,+1) \end{cases}$$

Efectuăm rotația r:

$$r \begin{cases} x_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \to \text{m. rotație}$$

$R\,{}^tR = I_2 \to R$ m. ortogonală

$$\to R^{-1} = {}^tR \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' - x_2'') \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' + x_2'') \end{cases}$$

$$(r \circ t)(\Gamma): -\frac{1}{2}(x_1'')^2 + \frac{5}{2}(x_2'')^2 - \frac{9}{5} = 0 \quad \Big|: \frac{9}{5}$$

$$-\frac{(x_1'')^2}{\frac{18}{5}} + \frac{(x_2'')^2}{\frac{18}{25}} - 1 = 0$$

i.e. $-\dfrac{(x_1'')^2}{a^2} + \dfrac{(x_2'')^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $a = \sqrt{\frac{18}{5}}$, $b = \frac{\sqrt{18}}{5}$

forma canonică a conicei Γ obținută prin izometrii (clasif. metrică)

$\boxed{\text{Temă}}$: Aceleași cerințe ca în aplicația anterioară pentru conica:

$$\Gamma: x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 - 17 = 0$$

Cerințe suplimentare apl. 1 :

• Determinați (centrul), direcțiile asimptote ale lui Γ și ec. planului tangent la Γ într-un pct. $P(x_1^0, x_2^0) \in \Gamma$

Rez: Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Centrul lui Γ:

$$Ax + B = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 - 2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$P_0\left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ centrul conicei Γ.

Axele (direcțiile asimptote)

$${}^t v A v = 0$$

$$(v_1\ v_2)\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 - 3v_1v_2 + v_2^2 = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{3}{2}v_2\right)^2 - \frac{5}{4}v_2^2 = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}v_2\right)\left(v_1 + \frac{\sqrt{5}-3}{2}v_2\right) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}v_2 \\ v_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}v_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} v = \lambda\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \\ v = \lambda\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \end{matrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Axele:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{v_1^1} = \frac{x_2 - x_2^0}{v_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \frac{2}{5}}{1} = \frac{x_2 + \frac{8}{5}}{1} \Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - \frac{6}{5} = 0}$$

$$\frac{x_1 - x_1^0}{v_2^1} = \frac{x_2 - x_2^0}{v_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \frac{2}{5}}{1} = \frac{x_2 + \frac{8}{5}}{-1} \Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 + 2 = 0}$$

$$T_{P_0}\Gamma : x_1^0 x_1 - \frac{3}{2}(x_1 x_2^0 + x_1^0 x_2) + x_2^0 x_2 - 4 \cdot \frac{x_1 + x_1^0}{2} + 2 \cdot \frac{x_2 + x_2^0}{2} - 1 = 0$$

$\boxed{\text{Apl. 2}}$ Fie conica

$$\Gamma : x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

Clasificați din pct. de vedere metric (i.e. prin izometrii) conica dată.

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \delta = \det A = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \Delta = \det A' = -1 \neq 0$

$\Big] \to \Gamma$ parabolă

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \quad < \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$ valorile proprii

Subspații proprii ① $V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, Av = \lambda_1 v \}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -v_1 - v_2 = 0 \implies \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = -\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,-1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,-1)}_{\substack{\text{unit} \\ f_1}} \rangle$

$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, Av = \lambda_2 v \}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = \{ \alpha(1,1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,1)}_{\substack{\text{unit} \\ f_2}} \rangle$

$f_1 \to e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$f_2 \to e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Efectuăm rotația:

$$r \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases}$$

$$r(\Gamma): \ 2(x_1')^2 - \sqrt{2}(x_1' + x_2') + 2\sqrt{2}(-x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 - 3\sqrt{2}\,x_1' + \sqrt{2}\,x_2' + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 + \sqrt{2}(-3x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2\left((x_1')^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x_1'\right) + \sqrt{2}\,x_2' + 1 = 0$$

$$2\left(x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}\,x_2' - \frac{5}{4} = 0$$

Efectuăm translația t:

$$t \begin{cases} x_1'' = x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2'' = x_2' \end{cases} \Rightarrow$$

$$(t \circ r)(\Gamma): \ 2(x_1'')^2 + \sqrt{2}\,x_2'' - \frac{5}{4} = 0$$

$$2{x_1''}^2 + \sqrt{2}\left(x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$t' \begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t' \circ t \circ r)(\Gamma): \ 2{x_1'''}^2 + \sqrt{2}\,x_2''' = 0$$

$$\boxed{{x_1'''}^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'''} \rightarrow V(\overset{0}{x_1'''}, \overset{0}{x_2'''})$$

$$\Updownarrow$$

$$t' \circ t \circ r: \begin{cases} x_1''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Deci $V\left(\frac{11}{8}, -\frac{1}{8}\right) \rightarrow$ vârful PARABOLEI

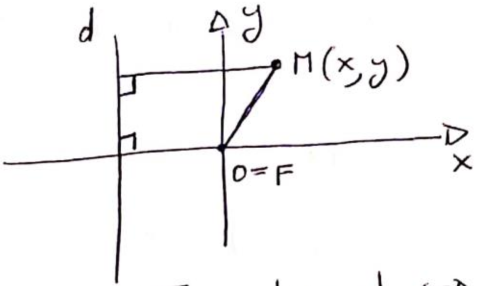
Axa parabolei: $x_1''' = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - \frac{3}{2} = 0}$

Definiția unitară a conicelor nedegenerate:

Locul geometric al pct. din planul afin euclidian $\mathbb{R}^2$, pentru care raportul distanțelor la un pct. fix F (focar) și la o dreaptă fixă d (directoare) cu $F \notin d$, este o constantă $e \in (0, \infty)$ (excentricitate) este o conică nedegenerată.

Avem cazurile:
1) $e = 1 \to$ conica este o PARABOLĂ
2) $e \in (0,1) \to$ conica este o ELIPSĂ
3) $e \in (1, +\infty) \to$ conica este o HIPERBOLĂ.

Considerăm un reper a.î. F este originea și prima axă de coordonate (Ox) este $\perp d$.



$d: x = \kappa,\ \kappa \neq 0\ (F \notin d)$

$$\frac{d(M,F)}{d(M,d)} = e \iff \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x-\kappa|} = e$$

$$\iff \sqrt{x^2+y^2} = e|x-\kappa| \iff \underbrace{(1-e^2)x^2 + y^2 + 2\kappa e^2 x - e^2\kappa^2}_{\text{not } f(x,y)} = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-e^2$$

$$\boxed{\Gamma : f(x,y) = 0 \quad \{\text{ec. unei CONICE}\}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 & \kappa e^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa e^2 & 0 & -e^2\kappa^2 \end{vmatrix} = -e^2\kappa^2(1-e^2) - \kappa^2 e^4 =$$

$$= -e^2\kappa^2 + \cancel{\kappa^2 e^4} - \cancel{\kappa^2 e^4} = -e^2\kappa^2 \neq 0$$

$\Delta \neq 0 \iff \Gamma$ conică $\boxed{\text{NEDEGENERATĂ}}$

- Γ elipsă $\iff \delta > 0 \iff 1-e^2 > 0 \underset{\{e>0\}}{\Longrightarrow} e \in (0,1)$
- Γ parabolă $\iff \delta = 0 \iff 1-e^2 = 0 \underset{\{e>0\}}{\Longrightarrow} e = 1$
- Γ hiperbolă $\iff \delta < 0 \iff 1-e^2 < 0 \underset{\{e>0\}}{\Longrightarrow} e \in (1,+\infty)$

Proprietățile optice ale conicelor:

1. Proprietatea optică a elipsei:

$\boxed{P_1}$ Tangenta și normala la elipsa E în pct. M_0 sunt bisectoarele $\sphericalangle$ determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

Dem: Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $b^2=a^2-c^2$

$M_0(x_0,y_0)\in E \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$

Fie $F(c,0)$ și $F'(-c,0)$ focarele elipsei E.

Suporturile razelor focale sunt dreptele:

$M_0F: y-0=\frac{y_0}{x_0-c}(x-c) \Leftrightarrow y_0x-(x_0-c)y-cy_0=0$

$-y_0x+(x_0-c)y+cy_0=0$

$M_0F': y-0=\frac{y_0}{x_0+c}(x+c) \Leftrightarrow y_0x-(x_0+c)y+cy_0=0$

Dacă: $x_0=0 \Rightarrow \Delta F'M_0F$ isoscel, tangenta M_0T este orizontală, iar normala M_0N este verticală (coincide cu Oy).

Pp. $x_0\neq 0$ și avem identitățile:

$\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}=\frac{a^2+cx_0}{a} = a+ex_0$; $\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}=\frac{a^2-cx_0}{a}=a-ex_0$

$tg_{M_0}: \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\frac{b^2}{y_0}\left(-\frac{x_0}{a^2}x+1\right)$

$m_{tg_{M_0}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$ Dar: $m_{tg}\cdot m_{nor}=-1$ ($\perp$)

Rezultă că: $m_{nor}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}$; $nor_{M_0}: y-y_0=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$

Ec. bisectoarei:

$$\frac{|y_0 x-(x_0+c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{|-y_0 x+(x_0-c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}$$

Rezultă că: panta normalei este egală cu panta bisect., deci aceste 2 dr. coincid.

Obs: Proprietatea geometrică anterioară corespunde următorului fenomen optic: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar.

Proprietăți analoage avem și pentru hiperbolă, respectiv parabolă:

$\boxed{P_2}$ Tangenta și normala la o hiperbolă H în pct. M_0 sunt bisectoarele ∢ determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

$\boxed{P_3}$ Tangenta și normala la o parabolă P în pct. M_0 sunt bisectoarele ∢ determinate de suportul razei focale a lui M_0 și de paralela (||) prin M_0 la axa parabolei.

Fig. $\boxed{P_1}$