$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie paraboloidul hiperbolic P de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,\ a,b>0$$

a) Arătați că: $(\exists)$ 2 familii de dr. generatoare ale paraboloidului hiperbolic P, a.î. prin fiecare pct. al lui P trece o unică generatoare din fiecare familie. {P este o suprafață dublu riglată}

În plus, $(\forall)$ 2 generatoare din aceeași familie sunt dr. necoplanare

b) $(\forall)$ pct. al paraboloidului hiperbolic P este regulat și planul tangent în fiecare pct. conține cele 2 dr. generatoare care trec prin acel punct.

Sol: a) Fie familiile de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda, \{d'_\mu\}_\mu$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ de ec:

$$d_\lambda: \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\lambda \\ \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z \end{cases} \qquad d'_\mu: \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\mu \end{cases}$$

Vom demonstra că orice dr. din familia de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$ este generatoare a paraboloidului hiperbolic

Făcând produsul membru cu membru al celor 2 ec ale unei dr. d_λ și simplificând cu λ $(\lambda\neq 0)$ $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

Interpretarea geometrică: $(\forall)$ pct. al unei dr d_λ, $\lambda\neq 0$ este pct. al paraboloidului hiperbolic P.

Dacă $\lambda=0 \Rightarrow d_0: \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z$$

Deci $(\forall)$ pct. al dr. d_0 este pe P. În consecință, toate dreptele din familia de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$ sunt generatoare ale paraboloidului hiperb. P.

Analog, se demonstrează că avem același rezultat pt. fam. de dr. $\{d'_\mu\}_\mu$.

Arătăm că $(\forall) M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, $(\exists)! \lambda_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $M_0 \in d_{\lambda_0}$

$$(S) \begin{cases} 2\lambda = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \\ \lambda\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = z_0 \end{cases}$$

(S) sistem compatibil determinat (are sol. unică).

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) \\ \lambda &= \frac{z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \end{aligned}\right| \to \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \frac{z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \iff \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0 \iff M_0 \in \Gamma$$

Cond. de compatibilitate a sist. este echivalentă cu $M_0 \in \Gamma$.

În plus, sistemul are o singură necunoscută și are rang 1, deci are sol. unică.

În concluzie, prin M_0 trece o unică generatoare a paraboloidului hiperbolic Γ, din familia $\{d_\lambda\}_\lambda$.

Analog, pentru $\{d'_\mu\}_\mu$.

Două dr. generatoare din aceeași familie de generatoare a paraboloidului hiperbolic Γ nu pot fi concurente deoarece ar rezulta că prin pct. lor de concurență $M_0 \in \Gamma$ ar trece 2 generatoare din aceeași familie ~~X~~.

Vom demonstra că: 2 dr. generatoare din aceeași familie nu sunt nici paralele.

Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$, presupunem $d_{\lambda_1} \parallel d_{\lambda_2}$

$$d_\lambda : \begin{cases} \frac{1}{a}x - \frac{1}{b}y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\lambda}{a}x + \frac{\lambda}{b}y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{dir } d_\lambda = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{\lambda}{a} & \frac{\lambda}{b} & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{b}, +\frac{1}{a}, \frac{2\lambda}{ab}\right)$$

$$d_{\lambda_1} \parallel d_{\lambda_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{2\lambda_1}{ab}}{\frac{2\lambda_2}{ab}} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ abs.}$$

b) $f(x,y,z) \overset{\text{not}}{=} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{x}{a^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \rightarrow$ sistem incompatibil

Deci, toate pct. paraboloidului hiperbolic P sunt regulate.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

Planul tg. în M_0 la P se scrie:

$$\pi : \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - z - z_0 = 0$$

$$d_{\lambda_0} \parallel \pi \Leftrightarrow \left\langle \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{2\lambda_0}{ab}\right), \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}, -1\right) \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{1}{b} - \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2}{ab}\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y_0}{b} = 2\lambda_0 \checkmark \quad \text{Deci: } d_{\lambda_0} \parallel \pi$$

$$\text{Dar: } M_0 \in d_{\lambda_0} \cap \pi \; \Big| \Rightarrow d_{\lambda_0} \subset \pi.$$

Analog, se procedează și cu dr. d_{μ_0} din a 2-a familie de gen., ce trece prin M_0 și obținem și $d_{\mu_0} \subset \Gamma_1$.

! Proprietăți similare sunt valabile și pentru hiperboloidul cu o pânză.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$d_\lambda \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases} \qquad d'_\mu \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{z}{b} \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză este o suprafață dublu riglată.

$\{$Familiile de dr. generatoare sunt $\{d_\lambda\}_\lambda, \{d'_\mu\}_\mu$ $\}$