Notaţii şi formule matematice

1. Repartiţii de probabilitate multidimensionale

Fie $E = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleator format din n variabile discrete. Repartiţia sa, $P_0(X_1, \ldots, X_n)^{-1}$, este complet specificată de valorile

$$p(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, \ldots, x_n)} p(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

unde $(x_1, \ldots, x_n)$ este o ”realizare” a lui E.

În general, pentru a desemna $P_0(X_1, \ldots, X_n)^{-1}$, se foloseşte notaţia simplificată $P(E)$.

În acest context, are loc următoarea formulă de înmulţire a probabilităţilor:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \cdot \ldots$$
$$\cdot P(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

2. Repartiţii condiţionate

Fie Y o variabilă aleatoare discretă şi $E = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleator cu componente discrete. Corpul de evenimente generate de E este finit, având ca generatori pe $\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$.

Pentru fiecare realizare $(x_1,\ldots,x_n)$ a lui E, notăm probabilitatea condiţionată a unui eveniment A cu

$$P\left(A \mid (x_1,\ldots,x_n)\right) = \frac{P\left(A \cap \{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\}\right)}{P\left(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\right)}$$

Corespunzător variabilei Y putem lua în consideraţie:

- repartiţia lui Y, $P(Y)$, dată de valorile
$$p(y) = P(Y = y)\ ;$$
- repartiţia lui Y condiţionată de E, $P(Y \mid E)$, care este dată, pentru fiecare realizare $(x_1,\ldots,x_n)$, de valorile
$$p\left(y \mid (x_1,\ldots,x_n)\right) = P\left(\{Y = y\} \mid (x_1,\ldots,x_n)\right).$$

În acest context se verifică versiunea condiţionată a formulei de înmulţire a probabilităţilor:

$$P\left(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n \mid C\right) = P\left(X_1 = x_1 \mid C\right)\cdot P\left(X_2 = x_2 \mid C, X_1 = x_1\right)\cdot\ldots$$
$$\cdot P\left(X_n = x_n \mid C, X_1 = x_1,\ldots,X_{n-1} = x_{n-1}\right).$$

3. Formula lui Bayes

Fie E şi Y cu aceeaşi semnificaţie din §1 şi §2.

- Formula lui Bayes în *versiune necondiţionată* este utilizată pentru a exprima o repartiţie a posteriori
$$P(E \mid Y = y) = \frac{P(E)\cdot P\left(\{Y = y\} \mid E\right)}{P\left(\{Y = y\}\right)}$$

unde:

$P(E)$ este repartiţia a priori a lui E ;

$\{Y = y\}$ este evenimentul observat ;

$P(E \mid Y = y)$ este repartiţia a posteriori a lui E ;

$P(\{Y = y\} \mid E)$ este complet determinată de valorile

$$P(\{Y = y\} \mid \{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}).$$

- Formula lui Bayes în *versiune condiţionată* este utilizată pentru a exprima o repartiţie a posteriori condiţionată

$$P(Y \mid E, e) = \frac{P(Y \mid E) \cdot P(e \mid E, Y)}{P(e \mid E)}$$

unde:

$P(Y \mid E)$ este o probabilitate condiţionată, a priori ;

e reprezintă o nouă dovadă ;

$P(Y \mid E, e)$ este o probabilitate condiţionată, a posteriori.