II Aplicații liniare:

Fie V/K, W/K 2 spații vectoriale

Funcția $f: V \to W$ se numește aplicație liniară (sau morfism de spații vectoriale) dacă:

1) f este aditivă

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$$

2) f este omogenă

$$f(\alpha v) = \alpha f(v), \forall v \in V, \alpha \in K$$

$1, 2 \Leftrightarrow \begin{rcases} \forall v_1, v_2 \in V \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \end{rcases} \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

Exemplu:

Fie $A \in M_{(m,n)}(K)$

$$f: K^n \to K^m, f(x) = \underset{(m,n)}{A}\ \underset{(n,1)}{X}, \forall x \in K^n$$

este o aplicație liniară

Endomorfism: Dacă $V = W$, atunci spunem că funcția f este un endomorfism al spațiului vectorial V

$f: V \to V$, aplicație liniară, endomorfism

$\dim_K V = n < \infty$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este injectivă

b) f este surjectivă

c) f este o bijecție (izomorfism)

Endomorfism diagonalizabil:

Fie V spațiu vectorial, $\dim_K V < \infty$

$f: V \to V$ endomorfism

Un vector $v \in V^*$ se numește vector propriu corespunzător endomorfismului $f(A_f)$ dacă $\exists\ \alpha$ astfel încât $f(v) = \alpha v$, unde $A_f =$ = matricea asociată funcției f

Matricea asociată unei aplicații liniare raportată la 2 baze:

$f: V \to$ ~~W~~ W

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$

$B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$

$\forall j = \overline{1,n}$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, $(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \overset{\text{not}}{=} A$

$A \in M_{(m,n)}(K)$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(v_1)]_{B_W} & \cdots & [f(v_n)]_{B_W} \end{pmatrix}$$

Continuând:

α = valoare proprie corespunzătoare lui v

Spectrul endomorfismului f = mulțimea tuturor valorilor proprii

Polinomul caracteristic endomorfismului $f(A_f)$:

$P(x) = \det(xI_n - A_f)$

$P(x) = 0$ s.n. ecuația caracteristică

α valoare proprie pentru $f(A_f) \Leftrightarrow \alpha$ e rădăcină pentru ecuația caracteristică $\Leftrightarrow \det(\alpha I_n - A_f) = 0$

Definiție: $f: V \to V$ endomorfism diagonalizabil dacă $\exists$ $B \subset V$, astfel încât A_f este diagonală $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Teoremă: $f: V \to V$ endomorfism diagonalizabil $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) toate rădăcinile ecuației caracteristice $\in K$

2) $ma(\alpha) = mg(\alpha)$, $\forall \alpha \in Spec(f)$

ma = multiplicitatea algebrică

mg = multiplicitatea geometrică

Teoremă: $f: V \to V$, $\dim_K V < \infty$

f endomorfism diagonalizabil $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{Spec}(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \neq j$

Teoremă: Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este matrice simetrică $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ este diagonalizabilă

Endomorfism antiinvolutiv:

Fie $V/\mathbb{R}$ spațiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

Considerăm un endomorfism $J: V \to V$ astfel încât $J^2 = J \circ J = -1_V \Rightarrow$

$\Rightarrow J$ e endomorfism antiinvolutiv

Schimbarea reprezentării la schimbarea bazei:

Fie 2 baze B_0, B_0'

și o aplicație liniară f

$[f]_{B_0, B_0'} \overset{not}{=} A_f$

$[f]_{B_1, B_2} \overset{not}{=} A_f'$

$B_0 \overset{S}{\rightsquigarrow} B_1 \qquad B_0' \overset{T}{\rightsquigarrow} B_2$

Conform Teoremei: $A_f' = T^{-1} A_f S$