CALCULABILITATE & COMPLEXITATE

gabriel.istrate@unibuc.ro

7srfuvy TEAMS

7srfuvy

EXAMEN

prima dată

NIVELUL 1 grilă 4 → 7

26/52 minute

NIVEL 2 probleme 7 → 10

(3pb / 1h)

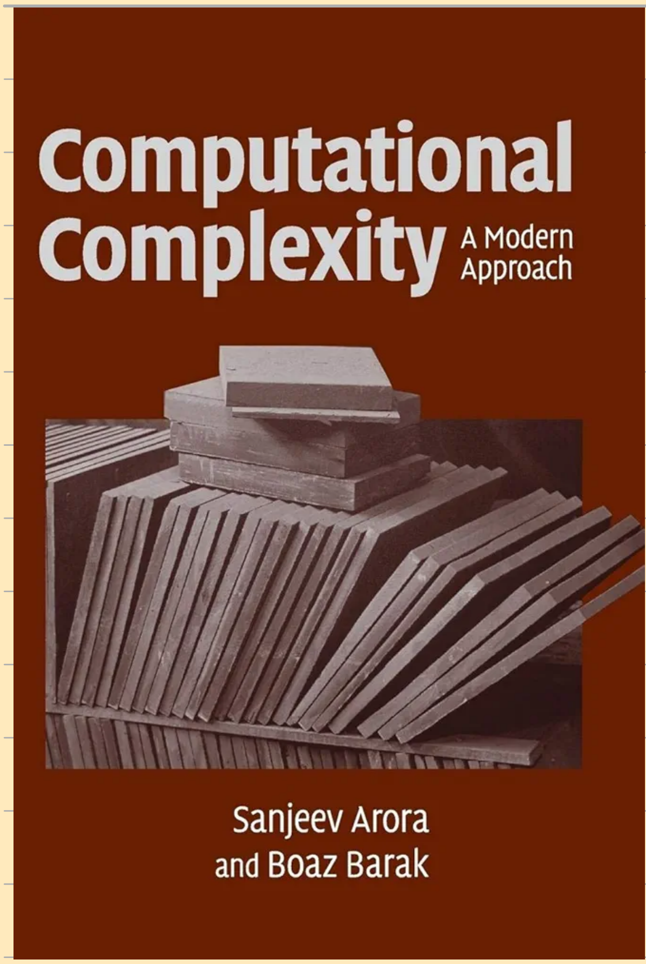
CALCULABILITATE & COMPLEXITATE

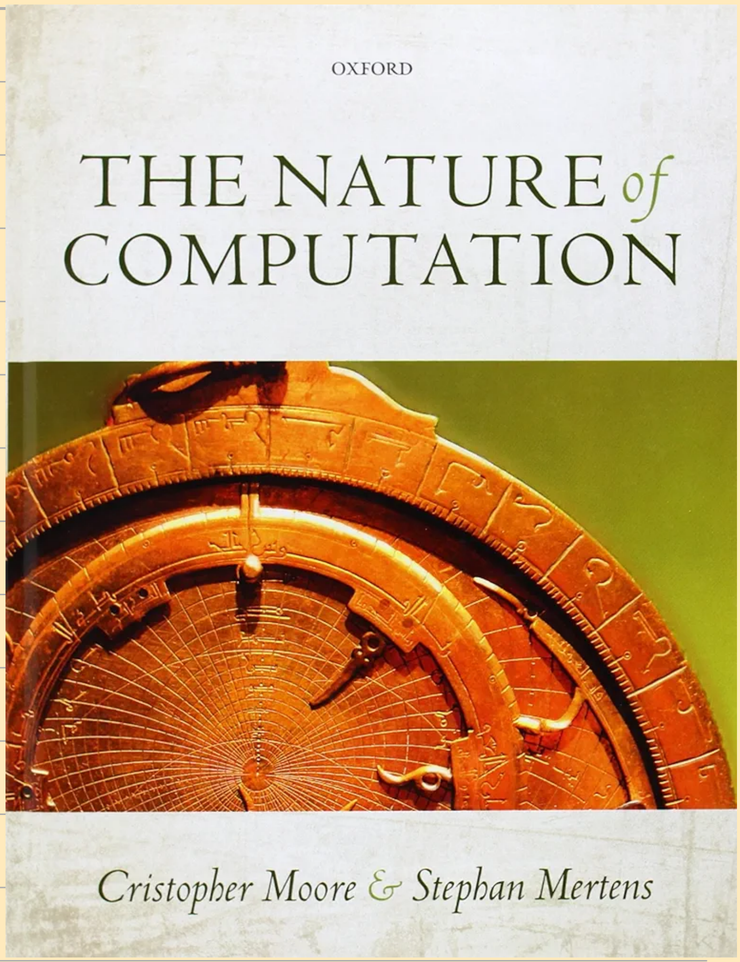
1/2

ce putem/nu putem calcula în principiu, cu resurse oricât de mari de timp/memorie

a doua jumătate

ce putem/nu putem calcula eficient





CALCULABILITATE

"PATOLOGICA"

① FUNCTIA LUI ACKERMANN

$$A(0,n) = n+1$$

$$A(m+1,0) = A(m,1)$$

$$A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n))$$

calculabilă. Dar $A(1,n+1) = A(1,n)+1$

$$A(1,0) = A(0,1) = 2$$

$$\boxed{A(1,n) = n+2}$$

$$A(2,n+1) = A(2,n)+2$$
$$A(2,0) = A(1,1) = 3$$

$$\boxed{A(2,n) = 2n+3}$$

$$A(3,n+1) = 2A(3,n)+3$$
$$A(3,0) = A(2,1) = 5$$

$$[\ A(3,n+1)+3 = 2(A(3,n)+3)$$

$$\boxed{A(3,n) = 2^{n+3} - 3}$$

$$A(4,n+1) = 2^{A(4,n)+3} - 3$$

$\boxed{A(5,5) \text{ număr imens}}$

2 ȘIRURI DE TIP GOODSTEIN

Exemplu

$$X_0 = 13 = 8+4+1 = 2^3+2^2+2^0 = 2^{2^1+2^0} + 2^{2^1} + 2^0$$

$$X_1 = 3^{3^1+3^0} + 3^{3^1} + 3^0 - 1$$
$$= 3^4 + 3^3 + \cancel{1} - \cancel{1} = 81 + 27 = 108$$
$$= 3^{3^1+3^0} + 3^{3^1}$$

$$X_2 = 4^{4^1+4^0} + 4^{4^1} - 1 = 4^5 + 4^4 - 1$$

Regula: X_n scris în baza $n+2$

X_{n+1} înlocuiesc $n+2$ cu $n+3$ în scrierea lui X_n

scad 1

TEOREMĂ $\forall m \geq 2$ şirul lui Goodstein cu $X_0 = m$ are un termen X_k cu $X_k = 1$

Demonstraţie : doar cu "numere infinite"

(3) $\boxed{\text{ŞIRURI DE TIP COLLATZ}}$

$$X_0 = m$$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n / 2 & \text{dacă } X_n \text{ par} \\ 3X_n + 1 & \text{altfel} \end{cases}$$

PROBABIL $\forall m \geq 1 \; \exists n$ cu $X_n = 1$

$\boxed{\text{NU cunoaştem o demonstraţie!}}$

CONCLUZIE PROGRAME "SIMPLE" pot avea comportament complicat

ÎNTREBARE $\boxed{\text{Ce funcţii } f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ pot fi calculate în principiu (resurse oricât de mari de TIMP/MEMORIE)?}}$

$\boxed{\text{EXISTĂ FUNCŢII } f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ care nu pot fi calculate?}}$

RĂSPUNS . DA . INTUITIV "MAI MULTE FUNCŢII

DECÂT PROGRAME"

$\boxed{\text{GEORG CANTOR}}$ Cardinalul mulțimilor infinite

$\boxed{|A| \le |B|}$ $\exists f: A \to B$ injective

$\boxed{|A| = |B|}$ $\exists f: A \to B$ bijective

Exemplu $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}|$

$f(n) = 2n$

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ (bijecția lui Cantor, seminar)

$\boxed{|\text{Programe în C (Python, etc)}| = |\mathbb{N}|}$

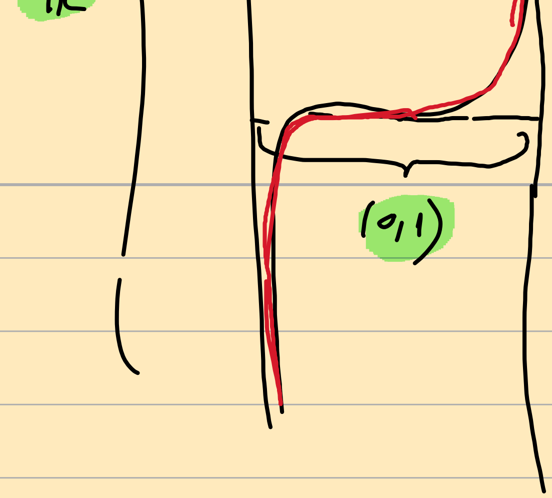
Idee Program $\to$ fișier $\to$ nr în baze 256

$\boxed{|\{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}| = |[0,1]|}$

IDEE $f: \mathbb{N} \to \{0,1\} \rightsquigarrow$ nr. în $[0,1]$

$0, f(1) f(2) - f(n) ..$ (baze 2)

$\boxed{|\mathbb{R}| = |(0,1)|}$



T (CANTOR) Nu există o bijecție între $\mathbb{N}$ și $(0,1)$

DEM DIAGONALIZARE

Presupunem că există o bijecție $f: \mathbb{N} \to (0,1)$

Construim $x \in (0,1)$ $x \neq f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to (0,1)$ șir de nr reale

cifre 0..9

$0 \longrightarrow 0.a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots$ (baza 10)

$1 \longrightarrow 0\,a_{21}a_{22}\ \ a_{2n}\ldots$

$n \longrightarrow 0.a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots$

$\vdots$

CONSTRUIM $x = 0.b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

$b_1 \neq a_{11}, 9, 0$ (posibil: $b_1 \in \underbrace{0..9}_{10\text{ variante}}$)

$b_n \neq a_{nn}, 9, 0$

$x \in (0,1)$ $\quad b_i \neq 0, 9$

$\forall n \geq 1 \quad x \neq f(n)$ $\quad$ A n-a cifră a lui x: b_n

A n-a cifră a lui $f(n)$ a_{nn}

$b_n \neq a_{nn}$

CONCLUZIE $\quad$ Programe $\Longleftrightarrow \mathbb{N}$

$$\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \Longleftrightarrow \mathbb{R} \Longleftrightarrow (0,1)$$

EXEMPLU DE PROBLEMA CARE NU poate fi rezolvată de un algoritm

(TEOREMA LUI MATIYASEVICH)

SE DĂ: $p(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots x_n]$

DE DECIS: Are ecuația $p(x_1, \ldots x_n) = 0$ soluții în $\mathbb{N}$?