Geometrie analitică euclidiană

Apl. Să se scrie ecuația planului determinat de punctele: $A(-1,2,3)$, $B(3,2,-1)$, $C(-1,-1,-3)$

Rez: $\vec{AB} = (4,0,-4)$

(V1) $\vec{AC} = (0,-3,-6)$

$$(ABC): \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-12)(x+1) + 24(y-2) - 12(z-3) = 0 \mid :(-12)$$

$$x+1 - 2(y-2) + (z-3) = 0$$

$$\boxed{x - 2y + z + 2 = 0} \rightarrow \text{ec. carteziană generală a planului } (ABC)$$

(V2)
$$\begin{cases} x = -1 + 4s \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 4s - 6t \end{cases}, s,t \in \mathbb{R}$$

ec. parametrice ale planului (ABC)

Apl. Să se scrie ec. planului știind că pct. $P(3,-5,2)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe acest plan

Rez: $\vec{OP} = (3,-5,2)$

$n_\pi = \vec{OP} \rightarrow$ normala la planul π

$\pi: 3x - 5y + 2z + d = 0$

$P(3,-5,2) \in \pi \Rightarrow 9 + 25 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -38$

$\pi: 3x - 5y + 2z - 38 = 0$

Apl Să se scrie ec. planului care trece prin pct. $A(1,2,-1)$ și este paralel cu direcțiile $\vec{v_1}(-1,2,1)$ și $\vec{v_2}(2,1,-3)$

Rez: $\pi:\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (-7)(x-1) - 1\cdot(y-2) - 5(z+1) = 0 \quad |\cdot(-1)$

$7x - 7 + y - 2 + 5z + 5 = 0$

$\boxed{7x + y + 5z - 4 = 0}$

Apl. Să se scrie ec. carteziană a unui plan care trece prin pct. $A(1,-1,2)$ și are ca vectori directori $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (2,1,-1)$

Rez: $\pi:\ \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) + (y+1) + 3(z-2) = 0$

$\boxed{x + y + 3z - 6 = 0}$

Apl. Să se scrie ec. planului care trece prin pct. $A(1,-1,2)$ și este paralel cu planul yOz.

Rez: $\pi \parallel (yOz) \Rightarrow \vec{j} = (0,1,0)$ vectori directori ai planului.
$\vec{k} = (0,0,1)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$

$\boxed{Apl.}$ Să se scrie ec. planului ce conține dreapta

$$d \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+3t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

și este normal la vectorul $\vec{n} = (1,1,-1)$

Rez: $P_0(1,-1,2) \in d \subset \pi$

$n_\pi = (1,1,-1)$

$\pi: x+y-z+d=0$

$P_0 \in \pi \Rightarrow \cancel{1}-\cancel{1}-2+d=0 \Rightarrow \underline{d=2}$

$\pi: x+y-z+2=0$

$\boxed{Apl.}$ Să se scrie ec. planului care conține dreapta

$d: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ și este paralel cu planul

$\pi: x+y-z+15=0$

Rez: $\pi' \parallel \pi \Rightarrow \pi': x+y-z+d=0$

$P(-5,2,0) \in \pi' \Rightarrow -5+2+d=0 \Rightarrow d=3$

$\pi': x+y-z+3=0$

$\boxed{Apl.}$ Să se scrie ec. planului care trece prin pct. $M(1,2,-1)$ și este perpendicular pe dreapta:

$$(d) \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 3x+y+z+2=0 \end{cases}$$

$\vec{n_1} = (2,-1,3)$
$\vec{n_2} = (3,1,1)$ > vectori normali ai celor 2 plane ce definesc dr. d

Direcția dr. d este dată de:

$$v = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4, +7, 5)$$

$$\vec{v} = \vec{n_\pi} \Rightarrow \pi : -4x + 7y + 5z + d = 0$$

$$M(1,2,-1) \in \pi \Rightarrow -4 + 14 - 5 + d = 0 \Rightarrow d = -5$$

$$\pi : -4x + 7y + 5z - 5 = 0$$

$$\boxed{4x - 7y - 5z + 5 = 0}$$

$\boxed{Ap]}$ Să se scrie ec. planului determinat de dreptele paralele:

$$(d_1) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$$

$$(d_2) : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

Rez: Avem: $\vec{v_1} = (2,3,2)$

$P_1(-1,2,-3) \in d_1$
$P_2(3,-1,1) \in d_2$ $\Rightarrow \vec{v_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (4,-3,4)$

$$\pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot 18 - (y-2)\cdot 0 + (z+3)(-18) = 0$$

$$x + 1 - z - 3 = 0$$

$$\boxed{x - z - 2 = 0}$$

Scanned with CamScanner

Ap1. Să se determine vectorul director al dreptei

$$(d)\ \begin{cases} 2x-y+z+4=0 \\ x+4y+3z-1=0 \end{cases}$$

și un punct de pe dreapta (d).

Rez: (V1) $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, unde $\vec{n_1}=(2,-1,1)$

$\vec{n_2}=(1,4,3)$

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=(-7,-5,9)$$

(V2) Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 2x-y+z+4=0 \\ x+4y+3z-1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+4y+3z=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=9\neq 0 \Rightarrow rg A=2$$

x, y nec. principale

$z=t$ nec. secundare

$$\begin{cases} 2x-y=-4-t \mid \cdot 4 \\ x+4y=1-3t \mid \cdot(-2) \\ z=t, t\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow 9x=-15-7t \\ &x=-\frac{5}{3}-\frac{7}{9}t \\ &-9y=-6+5t \\ &y=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{3}-\frac{7}{9}t \\ y=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Obs: $\langle(-7,-5,9)\rangle=\langle(-\frac{7}{9},-\frac{5}{9},1)\rangle$

$\vec{v}=(-\frac{7}{9},-\frac{5}{9},1)$ $\quad t=0 \Rightarrow P_0(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},0)\in d.$

$\boxed{Ap1.}$ Să se scrie ec. implicite (sub formă de rapoarte) ale dreptei:

$$(d)\ \begin{cases} x-2y+3z-1=0 \\ 2x+y-2z-3=0 \end{cases}$$

Rez: Vectorul director al dr. (d) este: $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

$= (1, +8, 5)$

Luăm: $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=3 \quad /\cdot 2 \end{cases} \xrightarrow{/\cdot(-2)} \begin{matrix} 5x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{5} \\ 5y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{5} \end{matrix}$

$P_0\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) \in d$

$$\boxed{d: \frac{x-\frac{7}{5}}{1}=\frac{y-\frac{1}{5}}{8}=\frac{z-0}{5}}$$

$\boxed{Ap1.}$ Să se scrie ec. dr. care trece prin pct. $M(2,-1,1)$ și este paralelă cu dr: $(d)\ \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$

Rez: $\vec{v_d}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(3,-2,1)$

$d \parallel d' \Rightarrow \vec{v_{d'}}=\vec{v_d}$

$$d': \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$$

Apl Să se scrie ec perpendicularei dusă din pct. $M(-1,2,3)$ pe dreapta $(d): \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$

Rez: Scriem ec. planului (P) ce trece prin pct. M și este perpendicular pe dr (d).

$$\vec{n}_p = \vec{v}_d = (3,1,1)$$

$$P: 3x+y+z+d=0$$

$$M \in P \Rightarrow \cancel{-3}+2+\cancel{3}+d=0 \Rightarrow d=-2$$

$$P: 3x+y+z-2=0$$

Proiecția pct. M pe dr. (d) este intersecția dr. (d) cu planul (P).

$$d \cap P \begin{cases} 3x+y+z-2=0 \\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1} (=t) \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y+z-2=0 \\ x=3t-2 \\ y=t+4 \\ z=t \end{cases}$$

$$3(3t-2)+(t+4)+t-2=0 \Rightarrow 11t=4 \Rightarrow t=\frac{4}{11}$$

$$\Rightarrow M_0\left(-\frac{10}{11}, \frac{48}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

$$MM_0: \frac{x+1}{-\frac{10}{11}+1} = \frac{y-2}{\frac{48}{11}-2} = \frac{z-3}{\frac{4}{11}-3}$$

$$\boxed{\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-3}{-29}}$$

Apl. Dați o reprezentare parametrică dreptei (d)

$$(d): \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}$$

Rez: (V1) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_p = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 \quad \rightarrow \begin{array}{l} x, y \text{ nec. principale} \\ z = t, t \in \mathbb{R} \text{ nec. secundare} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \\ 2x - y = 4 - 3t \end{cases} \Big| \rightarrow 3x = 5 - 2t \Rightarrow x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$$

$$z = t, t \in \mathbb{R} \qquad y = 1 + t - \frac{5}{3} + \frac{2}{3}t = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}t$$

ec. parametrice
$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P_0\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) \in d \\ \vec{v}_d = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) \end{array}$$

$\boxed{\text{Ap1.}}$ Să se arate că dreapta

$$(d) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4}$$

este situată în planul $P: 2x + 2y - z + 3 = 0$

Rez: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4} \; (= t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

$$2(2+3t) + 2(-2-t) - (3+4t) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{6t} + \cancel{4} - \cancel{4} - \cancel{2t} - \cancel{3} - \cancel{4t} + \cancel{3} = 0$$

$$0 = 0 \; (A)$$

Deci $d \subset P$.

$\boxed{\text{Apl}}$

Fie dreapta $d: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ $\quad M(1,-1,2)$

a) Scrieți ec. planului π a.î. $M \in \pi$ și $d \perp \pi$.

b) $d \cap \pi = \{P\}$

<u>Rez:</u> a) $\vec{v_d} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

V_1 $\quad \vec{n_1} = (1,1,1)$

$\vec{n_2} = (1,-1,1)$

$$\vec{v_d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 0\vec{j} - 2\vec{k} = (2,0,-2) = 2(1,0,-1)$$

$\vec{n_\pi} = (1,0,-1)$, $M(1,-1,2) \in \pi$

$\pi: 1(x-1) + 0(y+1) - 1(z-2) = 0$

$\pi: x - z + 1 = 0$

V_2 $\quad d \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$

x, y nec. principale

$z = t$, nec. secundară

$t \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$\begin{cases} x+y=-t \\ x-y=-t \end{cases} \Rightarrow 2x=-2t \Rightarrow x=-t$

$z=t,\ t\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} y=0 \\ z=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

$$d:\ \frac{x}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}\ (=t)$$

b) $d\ \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ $\quad \pi: x-z+1=0$

$d\cap\pi\ \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \\ x-z+1=0 \Rightarrow -t-t+1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\{P\}=d\cap\pi$

$P\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{\text{Ap1.}}$ Fie $\pi: x-2y+z=1$

$P_0(1,1,3)$

a) Scrieți ec. normalei prin P_0 la planul π

b) Calculați $d(P_0,\pi)$

Rez: a) $\vec{n}=(1,-2,1)$

$$n_{P_0}: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

b) $d(P_0,\pi)=?$

$P_0(x_0,y_0,z_0)$

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$$d(P_0,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(P_0,\pi)=\frac{|1-2\cdot1+3-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Perpendiculara comună a 2 dr. necoplanare

Fie dreptele $d_k : \dfrac{x-x_k}{\alpha_k} = \dfrac{y-y_k}{\beta_k} = \dfrac{z-z_k}{\gamma_k} \; (=t_k)$, $k=\overline{1,2}$

$M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1 \quad \vec{v_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2 \quad \vec{v_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

d_1, d_2 necoplanare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2-x_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2-y_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0$

$d = \perp$ comuna

$d \cap d_k = \{P_k\}, \; k=\overline{1,2}$

$P_1(x_1+\alpha_1 t_1, y_1+\beta_1 t_1, z_1+\gamma_1 t_1) \in d_1$

$P_2(x_2+\alpha_2 t_2, y_2+\beta_2 t_2, z_2+\gamma_2 t_2) \in d_2$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1+\alpha_2 t_2-\alpha_1 t_1, \; y_2-y_1+\beta_2 t_2-\beta_1 t_1, \; z_2-z_1+\gamma_2 t_2-\gamma_1 t_1)$

$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v_1} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v_2} \rangle = 0 \end{cases} \longrightarrow$ sist. cu nec. t_1, t_2

$\Rightarrow P_1, P_2$

$d = P_1P_2$

$\text{dist}(d_1, d_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$

$\boxed{Ap1}$

Fie $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1} \ (=t_1)$

$d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \ (=t_2)$

a) d_1, d_2 necoplanare

b) ec. $\perp$ comune (d)

c) dist. (d_1, d_2)

Rez: $v_1 = (1,2,1)$ $\quad v_2 = (2,1,1)$

a) $M_1(2,0,3) \in d_1$ $\quad M_2(1,3,0) \in d_2$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 3, -3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \Rightarrow d_1, d_2 \text{ necoplanare}$$

b) $P_1(2+t_1, 2t_1, 3+t_1) \in d_1$

$P_2(1+2t_2, 3+t_2, t_2) \in d_2$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1+2t_2-t_1, 3+t_2-2t_1, -3+t_2-t_1)$

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t_1+5t_2 = -2 \\ -5t_1+6t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$$

$P_1(4,4,5) \in d$ $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = (1,1,-3)$

$P_2(5,5,2)$

$d : \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{-3}$ ec. perpendicularei comune

c) $\text{dist}(d_1, d_2) = \text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{11}$