

Seminar 7

Pentru primele două exerciții, fixăm \mathcal{L} un limbaj de ordinul I care conține:

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

(S7.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

- (i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d)$;
- (ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$;
- (iii) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;
- (iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$.

(S7.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunțul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

- (i) $\forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;
- (ii) $\forall y \exists z \exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;
- (iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;
- (iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

Se notează cu \mathcal{L}_{Graf} limbajul care conține un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2, notat aici cu \dot{E} . Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Atunci clasa tuturor grafurilor este axiomatizată de Γ , adică este egală cu $Mod(\Gamma)$.

(S7.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

- (i) grafurile complete;
- (ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;
- (iii) grafurile care au cel puțin un ciclu de lungime 3.

Teorema 1 (Teorema de compacitate pentru logica de ordinul I). *Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I și Γ o mulțime de \mathcal{L} -enunțuri. Dacă orice submulțime finită a lui Γ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.*

(S7.4) (Exercițiu suplimentar) Să se arate că clasa grafurilor conexe nu este axiomatizabilă.