CURS #13

UNDE SUNTEM

- NP-complete : instanțe dificile
- tranziții de fază : probleme grele pt DPLL
- alg pt SAT solving - CDCL bine pe instanțe "practice"

$\boxed{\text{PRINCIPIUL CUTIEI (DIRICHLET)}}$

$\not\exists\, f : \{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots, n-1\}$ injectivă

PHP^{n}_{n-1} formule propoziționale, nesatisfiabile
grele pt SAT solvere.

$X_{i,j} = TRUE \iff f(i) = j$

($n(n-1)$ variabile)

(1) $X_{i,1} \vee X_{i,2} \vee \dots \vee X_{i,n-1}$ $\quad i = \overline{1,n}$

(2) $\overline{X}_{i,j} \vee \overline{X}_{i,k}$ $\quad 1 \le j < k \le n-1$, $i = \overline{1,n}$

(3) $\overline{X}_{i_1,j} \vee \overline{X}_{i_2,j}$ $\quad 1 \le i_1 < i_2 \le n$, $j = \overline{1,n-1}$

CLAR $PHP^{n}_{n-1} \notin SAT$

Rezoluție   Metodă de certificare a nesat. unei formule

$$\frac{C_1 \vee x \quad C_2 \vee \bar{x}}{C_1 \vee C_2} \qquad \text{în particular} \qquad \frac{x, \quad \bar{x}}{\square}$$

Dem. prin rezoluție pt $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$

$P_1, P_2, \ldots \qquad P_m$

$P_m = \square$

$\forall i$ $\quad P_i$ era fie o clauză a lui ϕ

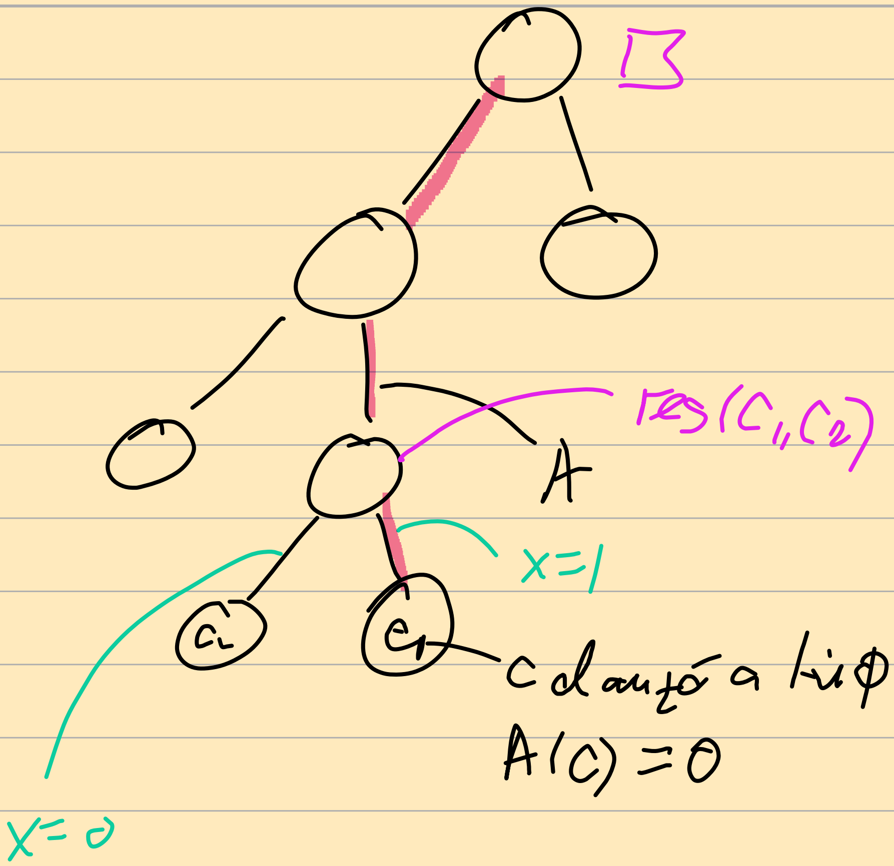
$\qquad P_i = res(P_j, P_k) \quad j, k < i$

$Res(\phi)$ = lungimea celei mai scurte dem. prin rez. pt ϕ

TEOREMĂ (HAKEN 1985) $\exists\, c > 1$ a.î.

$$\boxed{Res(PHP^{n}_{n+1}) \geq c^{n}}$$

Obs Pot vedea rularea unui alg. DPLL pe o formulă nesat. drept o dem. prin rezoluție



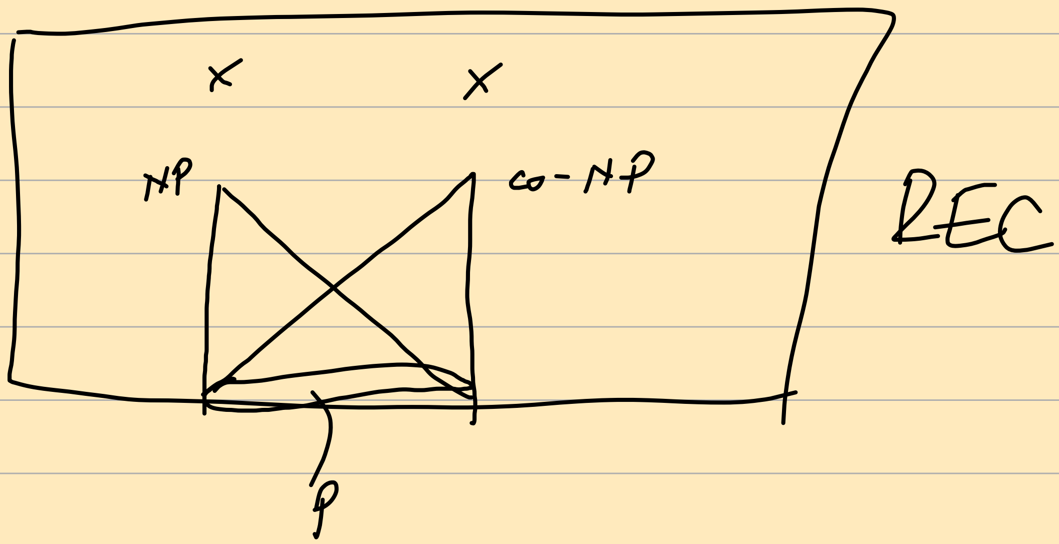
$C_1 = C_1' \vee \bar{x}$

$C_2 = C_2' \vee x$

<u>Concluzie</u> DPLL k noduri $\Rightarrow$ Rez cu k clauze.

<u>IN FINAL</u> Toți algoritmii DPLL au nevoie de timp exponențial în n pt. formulele PHP^{n}_{n-1}

$\boxed{\text{PROBLEME ÎN AFARA CLASEI NP}}$



Motivatie: Ce pot rezolva eficient cu un SAT solver ca black-box (sau brutină)?

Exp Se dă $G=(V,E)$
VREAU I.S. maximal

Exp Se dă $\phi = \bigwedge C_m$ cu n variabile
VREAU să decid
cel puțin $2^{n-1}+1$ asignări A satisfac ϕ?

MAJORITY-SAT

Obs1 MAJORITY-SAT recursivă (are alg. exponențial)

Obs2 MAJORITY-SAT nu pare să fie în NP

Obs3 SAT $\leq_m^?$ MAJORITY-SAT

DEM $\phi \to SAT / \overline{SAT}$?

$\Downarrow$

Φ MAJORITY-SAT

$$\boxed{\Phi \in \text{MAJORITY-SAT} \iff \phi \in SAT}$$

$$\phi = \begin{Bmatrix} x \vee y & x \vee \bar{y} \\ \bar{x} \vee y & \bar{x} \vee y \end{Bmatrix} \qquad \Phi = \begin{Bmatrix} \alpha \vee x \vee y & \alpha \vee x \vee \bar{y} \\ \alpha \vee \bar{x} \vee y & \bar{\alpha} \vee \bar{x} \vee y \end{Bmatrix}$$

$\boxed{\text{COMPLEXITY ZOO}} \to$ PETTING ZOO

$\boxed{\text{IERARHIA POLINOMIALĂ}}$ PH

NP $A \in NP \iff \exists\, \rho(\cdot,\cdot)$ predicat în P

$\exists\, q(\cdot)$ polinom. a.î.

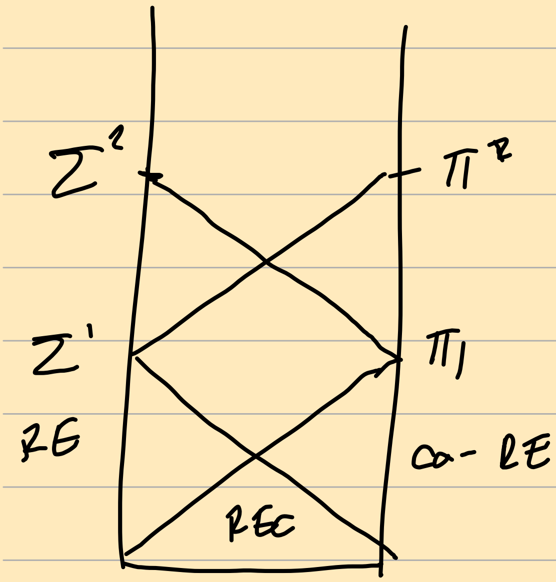
$x \in A \iff \exists y \ |y| \le q(|x|)$ a.î. $\rho(x,y) = TRUE$

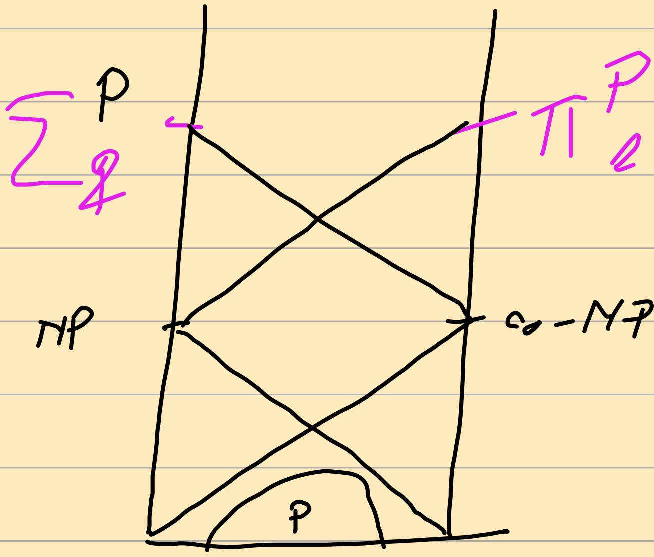
R.E $A \in R.E. \iff \exists\, \rho(\cdot,\cdot)$ predicat recursiv

$x \in A \iff \exists y$ a.î. $\rho(x,y) = TRUE$

$\Sigma^k \quad (\underbrace{\exists \forall \exists \forall \cdots}_{k})\,\rho$

$\Pi^k \quad (\forall \exists \cdots)\,\rho$





$A \in \Sigma_2^P$ $\quad \exists \rho(\cdot,\cdot,\cdot)$ polinomial

$\exists q(\cdot)$ polinom

$$x \in A \iff (\underbrace{\exists y \ |y| \le q(|x|)}) (\underbrace{\forall z \ |z| \le q(|x|)})\, \rho(x,y,z)$$

$A \in \Pi_2^P$

$$\Sigma_k^P \cup \Pi_k^P \subset \Sigma_{k+1}^P \cap \Pi_{k+1}^P$$

Σ_k^P, Π_k^P

$$PH = \bigcup_{k\ge 1} \Sigma_k^P = \bigcup_{k \ge 1} \Pi_k^P$$

Exemplu de pb Σ_2^P

JOC DE DOUĂ PERSOANE

<u>SE DĂ</u> $\phi(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_m)$

<u>PRIMUL</u> setează $x_1 \dots x_n$

<u>AL DOILEA</u> setează $y_1, \dots y_m$

$\phi \in SAT \Rightarrow$ <u>al doilea</u>

$\notin SAT \Rightarrow$ <u>primul</u>

<u>ÎNTREBARE</u> pt input ϕ are primul jucător str de câștig?