Transformări

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2024 - 2025

Funcții pentru transformări în OpenGL

- `glm::translate` Translația $\mathbf{T_t}$ de vector $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$

Funcții pentru transformări în OpenGL

- `glm::translate` Translația $\mathbf{T_t}$ de vector $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{T_t}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Funcții pentru transformări în OpenGL

- `glm::translate` Translația $\mathbf{T_t}$ de vector $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{T_t}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

- `glm::scale` Scalarea $\sigma_{\mathbf{s}}$ de factor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ (de-a lungul celor trei axe, centrul scalării fiind în origine - punct fix al transformării)

Funcții pentru transformări în OpenGL

- `glm::translate` Translația $\mathbf{T_t}$ de vector $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{T_t}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

- `glm::scale` Scalarea $\sigma_{\mathbf{s}}$ de factor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ (de-a lungul celor trei axe, centrul scalării fiind în origine - punct fix al transformării)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\sigma_{\mathbf{s}}}{\mapsto} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Funcții pentru transformări în OpenGL

- `glm::translate` Translația $\mathbf{T_t}$ de vector $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{T_t}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

- `glm::scale` Scalarea $\sigma_\mathbf{s}$ de factor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ (de-a lungul celor trei axe, centrul scalării fiind în origine - punct fix al transformării)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\sigma_\mathbf{s}}{\mapsto} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- `glm::rotate` Rotația $\mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}$ de unghi θ și axă dată de versorul $\mathbf{u}$ //Rotația 2D $\mathbf{R}_{3,\theta}$ de axă Ox_3 (adică $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ și unghi θ (centrul rotației fiind în origine - punct fix al transformării) este dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{R}_{Ox_3,\theta}}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Funcții pentru transformări în OpenGL

- `glm::translate` Translația $\mathbf{T_t}$ de vector $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{T_t}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

- `glm::scale` Scalarea $\sigma_{\mathbf{s}}$ de factor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ (de-a lungul celor trei axe, centrul scalării fiind în origine - punct fix al transformării)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{\sigma_{\mathbf{s}}}{\mapsto} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- `glm::rotate` Rotația $\mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}$ de unghi θ și axă dată de versorul $\mathbf{u}$ //Rotația 2D $\mathbf{R}_{3,\theta}$ de axă Ox_3 (adică $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ și unghi θ (centrul rotației fiind în origine - punct fix al transformării) este dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{R}_{Ox_3,\theta}}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Pot fi reprezentate în mod uniform transformările de mai sus?

Exemplu (1)

Fie aplicația afină f dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Obs. Utilizăm formalismul cu coloane pentru consistența lucrului cu matrice; aplicația se scrie și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$.

Exemplu (1)

Fie aplicația afină f dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Obs. Utilizăm formalismul cu coloane pentru consistența lucrului cu matrice; aplicația se scrie și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$.

(i) Calculați $f(0,0), f(2,5), f(e_1), f(e_2)$.

Exemplu (1)

Fie aplicația afină f dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Obs. Utilizăm formalismul cu coloane pentru consistența lucrului cu matrice; aplicația se scrie și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$.

(i) Calculați $f(0,0), f(2,5), f(e_1), f(e_2)$.

(ii) Scrieți relația (1) sub forma matriceală. Ce observați? (legătura cu $f(e_1), f(e_2)$).

Exemplu (1) - Calcule

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}; \qquad f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$$

(i) Calculați $f(0,0), f(2,5), f(e_1), f(e_2)$.

$$f(0,0) = (0,0); \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(2,5) = (24,1); \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 24 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f(1,0) = (2,3); \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (4,-1); \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplu (1) - Calcule

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}; \qquad f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$$

(ii) Scrieți f folosind reprezentarea matriceală. Ce observați? (legătura cu $f(e_1), f(e_2)$).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{(f(e_1) \;\; f(e_2))} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

coloanele matricei M_f sunt $f(e_1)$ și $f(e_2)$

Exemplu (2)

Aceleași cerințe pentru aplicația afină f dată de

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2 + 5, 3x_1 - x_2 - 2) \tag{2}$$

Proprietăți - de reținut!

(i) Pentru f aplicație afină 2D dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Coloanele matricei sunt exact $f(e_1)$, $f(e_2)$.

Proprietăți - de reținut!

(i) Pentru f aplicație afină 2D dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Coloanele matricei sunt exact $f(e_1)$, $f(e_2)$.

(ii) Pentru f aplicație afină 2D dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Rotații 2D

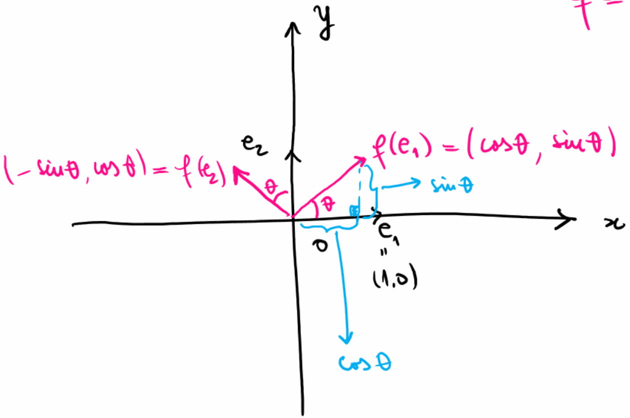
Rotația 2D $\mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}$ (cu axa de rotație $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$) de unghi θ, cu centrul în origine are matricea 2×2 asociată dată de

$$M_{\mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Reprezentată ca matrice 3×3 , aceasta devine

$$M_{\mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Figura - rotații 2D



$f = R_{O,\theta}$ în plan

$\Downarrow$

$M_f =$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- **Motivație:** Pot fi reprezentate în mod uniform translațiile, scalările, rotațiile? Este necesar un cadru în care transformările să fie reprezentate în mod uniform și compunerea lor să fie ușor de descris: **folosind “coordonate omogene” și considerând 4 coordonate**.

Vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- **Motivație:** Pot fi reprezentate în mod uniform translațiile, scalările, rotațiile? Este necesar un cadru în care transformările să fie reprezentate în mod uniform și compunerea lor să fie ușor de descris: **folosind "coordonate omogene" și considerând 4 coordonate**.
- Coordonatele omogene verifică proprietatea fundamentală

  $$[\alpha : \beta : \gamma : \delta] = [\lambda\alpha : \lambda\beta : \lambda\gamma : \lambda\delta], \quad \forall \lambda \neq 0, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0).$$

  De exemplu, $[2 : 3 : -1 : 4] = [4 : 6 : -2 : 8] = [-6 : -9 : 3 : -12]$, dar $[2 : 3 : -1 : 4] \neq [4 : -1 : 3 : 2]$.

Vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- **Motivație:** Pot fi reprezentate în mod uniform translațiile, scalările, rotațiile? Este necesar un cadru în care transformările să fie reprezentate în mod uniform și compunerea lor să fie ușor de descris: **folosind "coordonate omogene" și considerând 4 coordonate**.
- Coordonatele omogene verifică proprietatea fundamentală

  $$[\alpha : \beta : \gamma : \delta] = [\lambda\alpha : \lambda\beta : \lambda\gamma : \lambda\delta], \quad \forall\lambda \neq 0, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0).$$

  De exemplu, $[2 : 3 : -1 : 4] = [4 : 6 : -2 : 8] = [-6 : -9 : 3 : -12]$, dar $[2 : 3 : -1 : 4] \neq [4 : -1 : 3 : 2]$.
- Unui **vârf** de coordonate (x_1, x_2, x_3), notate și (x, y, z) i se asociază **coordonatele omogene**

  $$[x_1 : x_2 : x_3 : 1] \text{ (sau } [x : y : z : 1]).$$

Vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- **Motivație:** Pot fi reprezentate în mod uniform translațiile, scalările, rotațiile? Este necesar un cadru în care transformările să fie reprezentate în mod uniform și compunerea lor să fie ușor de descris: **folosind "coordonate omogene" și considerând 4 coordonate**.
- Coordonatele omogene verifică proprietatea fundamentală

  $$[\alpha : \beta : \gamma : \delta] = [\lambda\alpha : \lambda\beta : \lambda\gamma : \lambda\delta], \quad \forall \lambda \neq 0, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0).$$

  De exemplu, $[2 : 3 : -1 : 4] = [4 : 6 : -2 : 8] = [-6 : -9 : 3 : -12]$, dar $[2 : 3 : -1 : 4] \neq [4 : -1 : 3 : 2]$.
- Unui **vârf** de coordonate (x_1, x_2, x_3), notate și (x, y, z) i se asociază **coordonatele omogene**

  $$[x_1 : x_2 : x_3 : 1] \text{ (sau } [x : y : z : 1]).$$
- Unei **direcții** date de vectorul (v_1, v_2, v_3), i se asociază **coordonatele omogene**

  $$[v_1 : v_2 : v_3 : 0].$$

Transformări – reprezentare matriceală

- Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație afină arbitrară a lui $\mathbb{R}^3$, dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(a da o aplicație afină f revine la a da matricele $(a_{ij})_{i,j}$ și $(b_i)_i$.

Transformări – reprezentare matriceală

- Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație afină arbitrară a lui $\mathbb{R}^3$, dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

  (a da o aplicație afină f revine la a da matricele $(a_{ij})_{i,j}$ și $(b_i)_i$.
- Lui f îi corespunde o matrice 4×4

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformări – reprezentare matriceală

- Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație afină arbitrară a lui $\mathbb{R}^3$, dată prin
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$
(a da o aplicație afină f revine la a da matricele $(a_{ij})_{i,j}$ și $(b_i)_i$.
- Lui f îi corespunde o matrice 4×4
$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- **Principiu:** Dat un vârf / o direcție având coordonate omogene reprezentate de un vector coloană
$$\xi = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{pmatrix},$$
aplicarea transformării f generează un nou vector coloană, și anume
$$M_f \cdot \xi.$$

Exemple

- În momentul apelării funcției `glm::translate3f(`t_1, t_2, t_3`)`, se generează (și manevrează) matricea 4×4

$$M_{\mathbf{T_t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

- În momentul apelării funcției `glm::translate3f(`t_1, t_2, t_3`)`, se generează (și manevrează) matricea 4×4

$$M_{\mathbf{T_t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- În momentul apelării funcției `glm::scale3f(`s_1, s_2, s_3`)`, se generează (și manevrează) matricea 4×4

$$M_{\sigma_{\mathbf{s}}} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Completare

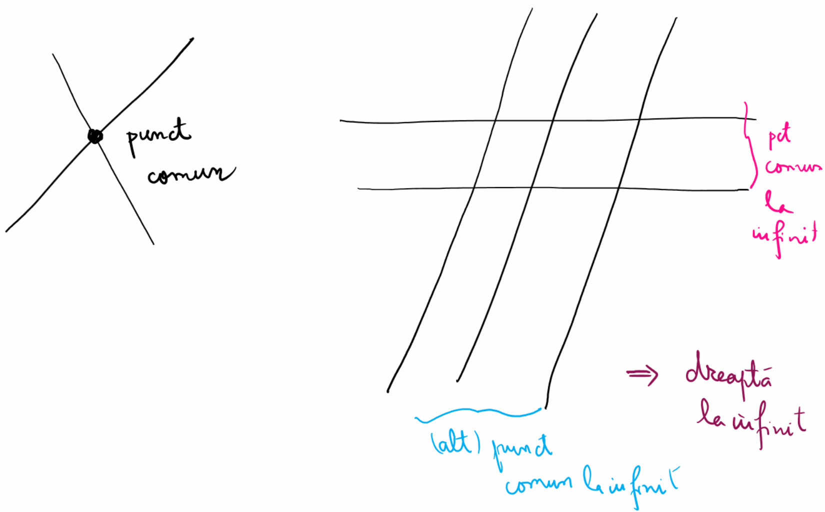
Pe lângă funcțiile din biblioteca glm, transformările de modelare pot fi apelate în codul sursă indicând explicit matricea 4×4 asociată. Prin convenție, elementele sunt introduse pe coloane, de sus în jos, de la stânga la dreapta

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

În continuare...

Cum se ajunge la introducerea coordonatelor omogene? Care sunt fundamentele teoretice care stau la baza utilizării lor?

Construcție I - geometrică



Construcție I - geometrică

- Se obține **dreapta de la infinit** (dată de punctele de la infinit)

Construcție I - geometrică

- Se obține **dreapta de la infinit** (dată de punctele de la infinit)
- Planul $\mathbb{R}^2$, prin reuniune cu dreapta de la infinit (dată de punctele de la infinit) formează **planul proiectiv real, notat** $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

Construcție I - geometrică

- Se obține **dreapta de la infinit** (dată de punctele de la infinit)
- Planul $\mathbb{R}^2$, prin reuniune cu dreapta de la infinit (dată de punctele de la infinit) formează **planul proiectiv real, notat** $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
- Este greu sa ne "reprezentăm intuitiv" planul proiectiv real. Motivul: "nu admite scufundare în spațiul $\mathbb{R}^3$". Alte exemple de suprafețe care nu admit astfel de scufundări: banda lui Möbius (infinită); sticla lui Klein.

Construcție I - geometrică

- Se obține **dreapta de la infinit** (dată de punctele de la infinit)
- Planul $\mathbb{R}^2$, prin reuniune cu dreapta de la infinit (dată de punctele de la infinit) formează **planul proiectiv real, notat** $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
- Este greu sa ne "reprezentăm intuitiv" planul proiectiv real. Motivul: "nu admite scufundare în spațiul $\mathbb{R}^3$". Alte exemple de suprafețe care nu admit astfel de scufundări: banda lui Möbius (infinită); sticla lui Klein.
- Puteți descrie dreapta proiectivă reală $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$? Dar dreapta proiectivă complexă $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$?

Construcție I - geometrică

- Se obține **dreapta de la infinit** (dată de punctele de la infinit)
- Planul $\mathbb{R}^2$, prin reuniune cu dreapta de la infinit (dată de punctele de la infinit) formează **planul proiectiv real, notat** $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
- Este greu sa ne "reprezentăm intuitiv" planul proiectiv real. Motivul: "nu admite scufundare în spațiul $\mathbb{R}^3$". Alte exemple de suprafețe care nu admit astfel de scufundări: banda lui Möbius (infinită); sticla lui Klein.
- Puteți descrie dreapta proiectivă reală $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$? Dar dreapta proiectivă complexă $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$?
- Aplicabilitate a geometriei proiective (de exemplu): curbe eliptice $\longrightarrow$ criptografie și securitate.

Construcție II - algebrică

- $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ poate fi descris **algebric**, folosind **coordonate omogene**.

Construcție II - algebrică

- $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ poate fi descris **algebric**, folosind **coordonate omogene**.
- Pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ se introduce relația de echivalență $\sim$ dată prin $(X_1, X_2, X_0) \sim (Y_1, Y_2, Y_0)$ dacă și numai dacă există $\lambda \neq 0$ astfel ca $Y_0 = \lambda X_0,\ Y_1 = \lambda X_1,\ Y_2 = \lambda X_2$ (este același λ, ca factor de proporționalitate!).

Construcție II - algebrică

- $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ poate fi descris **algebric**, folosind **coordonate omogene**.
- Pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ se introduce relația de echivalență $\sim$ dată prin $(X_1, X_2, X_0) \sim (Y_1, Y_2, Y_0)$ dacă și numai dacă există $\lambda \neq 0$ astfel ca $Y_0 = \lambda X_0$, $Y_1 = \lambda X_1$, $Y_2 = \lambda X_2$ (este același λ, ca factor de proporționalitate!).
- Clasa de echivalență a unui element $X = (X_1, X_2, X_0)$ va fi notată cu $[X_1 : X_2 : X_0]$. Astfel, de exemplu, avem $[1 : 2 : -5] = [2 : 4 : -10]$. În schimb, $[1 : 2 : -5] \neq [1 : 2 : 5]$ și $[1 : 2 : -5] \neq [-5 : 2 : 1]$.

Construcție II - algebrică

- $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ poate fi descris **algebric**, folosind **coordonate omogene**.
- Pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ se introduce relația de echivalență $\sim$ dată prin $(X_1, X_2, X_0) \sim (Y_1, Y_2, Y_0)$ dacă și numai dacă există $\lambda \neq 0$ astfel ca $Y_0 = \lambda X_0,\ Y_1 = \lambda X_1,\ Y_2 = \lambda X_2$ (este același λ, ca factor de proporționalitate!).
- Clasa de echivalență a unui element $X = (X_1, X_2, X_0)$ va fi notată cu $[X_1 : X_2 : X_0]$. Astfel, de exemplu, avem $[1 : 2 : -5] = [2 : 4 : -10]$. În schimb, $[1 : 2 : -5] \neq [1 : 2 : 5]$ și $[1 : 2 : -5] \neq [-5 : 2 : 1]$.
- Se consideră mulțimea claselor de echivalență $\mathcal{C} = \{[X_1 : X_2 : X_0] | (X_1, X_2, X_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$.

Construcție II - algebrică

- $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ poate fi descris **algebric**, folosind **coordonate omogene**.
- Pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ se introduce relația de echivalență $\sim$ dată prin $(X_1, X_2, X_0) \sim (Y_1, Y_2, Y_0)$ dacă și numai dacă există $\lambda \neq 0$ astfel ca $Y_0 = \lambda X_0$, $Y_1 = \lambda X_1$, $Y_2 = \lambda X_2$ (este același λ, ca factor de proporționalitate!).
- Clasa de echivalență a unui element $X = (X_1, X_2, X_0)$ va fi notată cu $[X_1 : X_2 : X_0]$. Astfel, de exemplu, avem $[1 : 2 : -5] = [2 : 4 : -10]$. În schimb, $[1 : 2 : -5] \neq [1 : 2 : 5]$ și $[1 : 2 : -5] \neq [-5 : 2 : 1]$.
- Se consideră mulțimea claselor de echivalență $\mathcal{C} = \{[X_1 : X_2 : X_0] | (X_1, X_2, X_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$.
- **Terminologie.** Pentru un element ξ, dacă $\xi = [X_1 : X_2 : X_0]$, atunci (X_1, X_2, X_0) se numesc **coordonatele omogene ale lui** ξ. Coordonatele omogene sunt definite și sunt unice până la înmulțirea cu un scalar nenul.

Legătura dintre cele două construcții

(i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C},\ \ \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația ι este injectivă.

Legătura dintre cele două construcții

(i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C},\ \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația ι este injectivă.

Justificare:

Fie (x_1, x_2) și (y_1, y_2) cu $\iota(x_1, x_2) = \iota(y_1, y_2)$, adică $[x_1 : x_2 : 1] = [y_1 : y_2 : 1]$. Aceasta înseamnă, conform definiției, că există $\lambda \neq 0$ astfel încât $\lambda(x_1, x_2, 1) = (y_1, y_2, 1)$. Scriind acastă relație pentru fiecare coordonată separat avem

$$\begin{cases} \lambda \cdot x_1 = y_1 \\ \lambda \cdot x_2 = y_2 \\ \lambda \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Se deduce că $\lambda = 1$, deci $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, adică ι este injectivă.

Legătura dintre cele două construcții

(i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C},\ \ \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația ι este injectivă.

Legătura dintre cele două construcții

(i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C},\ \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația ι este injectivă.

(ii) Pe de altă parte, fie $[\delta]$ clasa de echivalență a unei drepte δ modulo relația de paralelism (intuitiv, o astfel de clasă de echivalență poate fi privită ca punct de la infinit al unei drepte, în sensul că două drepte paralele au în comun un punct la infinit, iar prin acest punct trece orice dreaptă paralelă cu ele). Fie (v_1, v_2) un vector director al lui δ (atunci orice vector de forma $(\lambda v_1, \lambda v_2)$, cu $\lambda \neq 0$ este, la rândul său, un vector director al lui δ); acești vectori sunt vectori directori pentru orice dreaptă paralelă cu δ. Avem asocierea

$$[\delta](\textit{alegem } (v_1, v_2)) \mapsto [v_1 : v_2 : 0] \in \mathcal{C}.$$

Definiția este coerentă.

Legătura dintre cele două construcții

(i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C},\ \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația ι este injectivă.

(ii) Pe de altă parte, fie $[\delta]$ clasa de echivalență a unei drepte δ modulo relația de paralelism (intuitiv, o astfel de clasă de echivalență poate fi privită ca punct de la infinit al unei drepte, în sensul că două drepte paralele au în comun un punct la infinit, iar prin acest punct trece orice dreaptă paralelă cu ele). Fie (v_1, v_2) un vector director al lui δ (atunci orice vector de forma $(\lambda v_1, \lambda v_2)$, cu $\lambda \neq 0$ este, la rândul său, un vector director al lui δ); acești vectori sunt vectori directori pentru orice dreaptă paralelă cu δ. Avem asocierea

$$[\delta](\textit{alegem } (v_1, v_2)) \mapsto [v_1 : v_2 : 0] \in \mathcal{C}.$$

Definiția este coerentă.

- **Concluzie:** Există o coresponență naturală 1:1 între planul proiectiv real $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ (construit geometric) și mulțimea $\mathcal{C}$ a claselor de echivalență (construită algebric). Aceasta în seamnă că în $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ sunt folosite coordonate omogene.

Sinteză

În concluzie, planul proiectiv real $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ conține două tipuri de elemente:

Sinteză

În concluzie, planul proiectiv real $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ conține două tipuri de elemente:

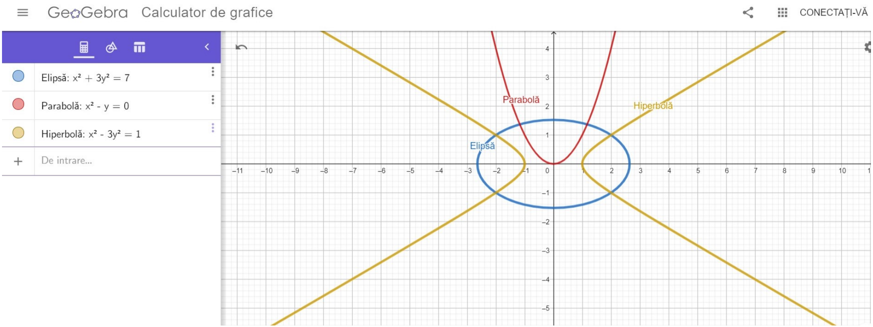
- **"Puncte reale":** elemente de forma $P = [X_1 : X_2 : X_0]$ cu $X_0 \neq 0$; P îi corespunde punctului $\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right)$ din spațiul geometric $\mathbb{R}^2$ (deoarece $[X_1 : X_2 : X_0] = [\frac{X_1}{X_0} : \frac{X_2}{X_0} : 1]$). În codul sursă `04_01_coord_omogene.cpp` punctul $[-100 : -100 : 0 : 0.5]$ coincide cu $[-200 : -200 : 0 : 1]$, deci corespunde punctului $(-200, -200)$.

Sinteză

În concluzie, planul proiectiv real $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ conține două tipuri de elemente:

- **"Puncte reale":** elemente de forma $P = [X_1 : X_2 : X_0]$ cu $X_0 \neq 0$; P îi corespunde punctului $\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right)$ din spațiul geometric $\mathbb{R}^2$ (deoarece $[X_1 : X_2 : X_0] = [\frac{X_1}{X_0} : \frac{X_2}{X_0} : 1]$). În codul sursă `04_01_coord_omogene.cpp` punctul $[-100 : -100 : 0 : 0.5]$ coincide cu $[-200 : -200 : 0 : 1]$, deci corespunde punctului $(-200, -200)$.
- **"Puncte de la infinit":** elemente de forma $Q = [X_1 : X_2 : 0]$. În codul sursă `04_01_coord_omogene.cpp` punctul $[-100 : -100 : 0 : 0]$ este punct de la infinit și corespunde direcției $(-100, -100)$, adică primei bisectoare. Mulțimea punctelor de la infinit formează o dreaptă, numită **dreapta de la infinit**, având ecuația $X_0 = 0$.

Câte puncte au la infinit elipsa, parabola, hiperbola?



Varianta algebrică

- Coordonate omogene: se utilizează polinoame omogene (toate monoamele au același grad).

Variantă algebrică

- Coordonate omogene: se utilizează polinoame omogene (toate monoamele au același grad).
- Oricărui loc geometric din $\mathbb{R}^2$ descris printr-o ecuație polinomială implicită îi corespunde un loc geometric din planul $\mathbb{PR}^2$, descris printr-o ecuație ce se obține "omogenizând" ecuația inițială.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0},\ x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$.
  - Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_2 = 0.$$

Nu este posibil ca $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ (așa am definit relația de echivalență), deci **nu avem puncte la infinit** în acest caz.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$.
  - Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_2 = 0.$$

  Nu este posibil ca $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ (așa am definit relația de echivalență), deci **nu avem puncte la infinit** în acest caz.

- **Exemplul 2:**
  - Hiperbola $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$.
  - Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_2 = 0.$$

  Nu este posibil ca $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ (așa am definit relația de echivalență), deci **nu avem puncte la infinit** în acest caz.

- **Exemplul 2:**
  - Hiperbola $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$.
  - Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_2 = 0.$$

  Nu este posibil ca $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ (așa am definit relația de echivalență), deci **nu avem puncte la infinit** în acest caz.

- **Exemplul 2:**
  - Hiperbola $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0$.

- **Exemplul 1:**
  - Cercul $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$.
  - Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_2 = 0.$$

Nu este posibil ca $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ (așa am definit relația de echivalență), deci **nu avem puncte la infinit** în acest caz.

- **Exemplul 2:**
  - Hiperbola $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.
  - Omogenizare: $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$.
  - Înlocuire + calcule: $X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0$.
  - Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 - X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = t,\ X_2 = \pm t.$$

Se deduce că hiperbola $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ are două puncte la infinit, $[t : t : 0] = [1 : 1 : 0]$ și $[t : -t : 0] = [1 : -1 : 0]$.

Puncte de la infinit: concluzii+exemplu important

- Oricărui loc geometric L din $\mathbb{R}^2$ i se poate asocia un loc geometric $\bar{L}$ din $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, prin **completarea cu puncte de la infinit**. Dacă L este descris prin ecuații implicite, $\bar{L}$ este dat prin **omogenizarea** ecuațiilor lui L.

Puncte de la infinit: concluzii+exemplu important

- Oricărui loc geometric L din $\mathbb{R}^2$ i se poate asocia un loc geometric $\bar{L}$ din $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, prin **completarea cu puncte de la infinit**. Dacă L este descris prin ecuații implicite, $\bar{L}$ este dat prin **omogenizarea** ecuațiilor lui L.
- Astfel, dacă L este dat prin ecuația

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$

omogenizarea ecuației lui L se obține astfel: se notează $x_i = \frac{X_i}{X_0}$ $(i = 1, 2)$ și se efectuează înlocuirile în ecuația lui L, obținând, după eliminarea numitorului, ecuația omogenă a lui $\bar{L}$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_0X_0 = 0.$$

Puncte de la infinit: concluzii+exemplu important

- Oricărui loc geometric L din $\mathbb{R}^2$ i se poate asocia un loc geometric $\bar{L}$ din $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, prin **completarea cu puncte de la infinit**. Dacă L este descris prin ecuații implicite, $\bar{L}$ este dat prin **omogenizarea** ecuațiilor lui L.
- Astfel, dacă L este dat prin ecuația
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$
omogenizarea ecuației lui L se obține astfel: se notează $x_i = \frac{X_i}{X_0}$ $(i = 1, 2)$ și se efectuează înlocuirile în ecuația lui L, obținând, după eliminarea numitorului, ecuația omogenă a lui $\bar{L}$
$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_0X_0 = 0.$$
- Pentru locul geometric
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} = 0 \end{cases}$$
prin omogenizare se obține locul geometric
$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10}X_0 = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20}X_0 = 0 \end{cases}$$
sau matriceal
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix} = 0 \left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} = 0 \end{array} \right)$$

Pentru aplicații

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicația dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} \end{pmatrix}$$

Pentru aplicații

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicația dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} \end{pmatrix}$$

- În coordonate omogene (după omogenizare), această transformare se scrie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10}X_0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20}X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

Pentru aplicații

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicația dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} \end{pmatrix}$$

- În coordonate omogene (după omogenizare), această transformare se scrie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10}X_0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20}X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

- Analog, pentru $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se obține o matrice 4×4.

Pentru aplicații

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicația dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} \end{pmatrix}$$

- În coordonate omogene (după omogenizare), această transformare se scrie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10}X_0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20}X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

- Analog, pentru $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se obține o matrice 4×4.
- Faptul că pe ultima linie este $(0, 0, 1)$ sau $(0, 0, 0, 1)$ se interpretează prin faptul că "nu se schimbă poziția dreptei de la infinit".

De reținut: vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- OpenGL utilizează coordonate omogene, fiind utilizate 4 coordonate. Semnificația:

De reținut: vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- OpenGL utilizeză coordonate omogene, fiind utilizate 4 coordonate. Semnificația:
  - Unui **vârf** de coordonate (x_1, x_2, x_3), notate și (x, y, z), i se asociază **coordonatele omogene** $[x_1 : x_2 : x_3 : 1]$ (sau $[x : y : z : 1]$),

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto [x_1 : x_2 : x_3 : 1](= [\alpha x_1 : \alpha x_2 : \alpha x_3 : \alpha], \forall \alpha \neq 0.$$

De exemplu, pentru **punctul** $(1, 2, 5)$:
$(1, 2, 5) \mapsto [1 : 2 : 5 : 1] = [3 : 6 : 15 : 3] = \ldots$, etc.

De reținut: vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- OpenGL utilizează coordonate omogene, fiind utilizate 4 coordonate. Semnificația:
  - Unui **vârf** de coordonate (x_1, x_2, x_3), notate și (x, y, z), i se asociază **coordonatele omogene** $[x_1 : x_2 : x_3 : 1]$ (sau $[x : y : z : 1]$),

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto [x_1 : x_2 : x_3 : 1](= [\alpha x_1 : \alpha x_2 : \alpha x_3 : \alpha], \forall \alpha \neq 0.$$

    De exemplu, pentru **punctul** $(1, 2, 5)$:
    $(1, 2, 5) \mapsto [1 : 2 : 5 : 1] = [3 : 6 : 15 : 3] = \ldots$, etc.
  - Unei **drepte / direcții** date de vectorul (v_1, v_2, v_3), i se asociază **coordonatele omogene** $[v_1 : v_2 : v_3 : 0]$,

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto [v_1 : v_2 : v_3 : 0].$$

    De exemplu, pentru **direcția** $(1, 4, 3)$:
    $(1, 4, -3) \mapsto [1 : 4 : -3 : 0] = [2 : 8 : -6 : 0] = \ldots$, etc.

De reținut: transformări – reprezentare matriceală

- Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o aplicație afină arbitrară a lui $\mathbb{R}^3$, dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}. \tag{6}$$

(a da o aplicație afină f revine la a da matricele $(a_{ij})_{i,j}$ și $(b_i)_i$.

De reținut: transformări – reprezentare matriceală

- Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație afină arbitrară a lui $\mathbb{R}^3$, dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

  (a da o aplicație afină f revine la a da matricele $(a_{ij})_{i,j}$ și $(b_i)_i$.

- Lui f îi corespunde o matrice 4×4

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De reținut: transformări – reprezentare matriceală

- Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație afină arbitrară a lui $\mathbb{R}^3$, dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

  (a da o aplicație afină f revine la a da matricele $(a_{ij})_{i,j}$ și $(b_i)_i$.

- Lui f îi corespunde o matrice 4×4

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- De exemplu, matricea asociată translației T de vector $(2, -3, 5)$ este

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De reținut: cum acționeză matricele?

- **Principiu:** Dat un vârf / o direcție având coordonate omogene reprezentate de un **vector coloană cu 4 componente**

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{pmatrix},$$

aplicarea transformării f generează un nou vector coloană, și anume

$$M_f \cdot \xi$$

(înmulțire la stânga cu M_f).

De reținut: cum acționează matricele?

- **Principiu:** Dat un vârf / o direcție având coordonate omogene reprezentate de un **vector coloană cu 4 componente**

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{pmatrix},$$

aplicarea transformării f generează un nou vector coloană, și anume

$$M_f \cdot \xi$$

(înmulțire la stânga cu M_f).

- Din punctul de vedere al **implementării**, înmulțirea este realizată în shader-ul de vârfuri:

```
uniform mat4 Mf;

void main(void)
  {
    gl_Position = Mf*in_Position;
```

Compunerea transformărilor

- Dat un vârf / o direcție având coordonate omogene reprezentate de un vector coloană ξ, aplicarea unei transformări f cu matrice M_f generează un nou vector coloană, și anume $M_f \cdot \xi$.

Compunerea transformărilor

- Dat un vârf / o direcție având coordonate omogene reprezentate de un vector coloană ξ, aplicarea unei transformări f cu matrice M_f generează un nou vector coloană, și anume $M_f \cdot \xi$.
- Fie f_1, f_2 transformări cu matrice M_{f_1}, M_{f_2}. Dacă ordinea apelării în cod este f_1, f_2, atunci ordinea aplicării este f_2, apoi f_1 (altfel spus, folosind compunerea funcțiilor, aplicăm $f_1 \circ f_2$). Matriceal avem:

$$\xi \mapsto M_{f_1} \cdot (M_{f_2} \cdot \xi) = (M_{f_1} \cdot M_{f_2}) \cdot \xi, \quad \text{deci}$$

$$M_{f_1 \circ f_2} = M_{f_1} \cdot M_{f_2}.$$

Așadar, compunerea transformărilor (aplicațiilor) $\leftrightarrow$ înmulțirea matricelor (poate fi realizată în shader sau în programul principal).

Compunerea transformărilor: exemplu

Dacă în codul sursă avem o secvență de tipul

m_1 = glm::translate(...);
m_2 = glm::scale(...);
m_3 = glm::rotate(...);
m = (m_1 * m_2) * m_3;

ținând cont că în shader-ul de vârfuri avem

gl_Position = m * in_Position,

ordinea aplicării asupra vârfului (primitivei) este

Compunerea transformărilor: exemplu

Dacă în codul sursă avem o secvență de tipul

```
m1 = glm::translate(...);
m2 = glm::scale(...);
m3 = glm::rotate(...);
m = (m1 * m2) * m3;
```

ținând cont că în shader-ul de vârfuri avem

```
gl_Position = m * in_Position,
```

ordinea aplicării asupra vârfului (primitivei) este

rotația, scalarea, translația.

Sinteză

- Am discutat despre transformări (numite **transformări de modelare**), care sunt aplicate obiectelor din scenă. În OpenGL pot fi utilizate funcții din biblioteca `glm` pentru o serie de transformări (translație, rotație, scalare).

Sinteză

- Am discutat despre transformări (numite **transformări de modelare**), care sunt aplicate obiectelor din scenă. În OpenGL pot fi utilizate funcții din biblioteca `glm` pentru o serie de transformări (translație, rotație, scalare).
- Pentru modelarea / implementarea transformărilor sunt utilizate 4 coordonate. Unei transformări i se asociază o matrice 4×4 care acționează prin înmulțire (la stânga, asupra unui vector coloană 4×1, ce reprezintă coordonate omogene).

Sinteză

- Am discutat despre transformări (numite **transformări de modelare**), care sunt aplicate obiectelor din scenă. În OpenGL pot fi utilizate funcții din biblioteca `glm` pentru o serie de transformări (translație, rotație, scalare).
- Pentru modelarea / implementarea transformărilor sunt utilizate 4 coordonate. Unei transformări i se asociază o matrice 4×4 care acționează prin înmulțire (la stânga, asupra unui vector coloană 4×1, ce reprezintă coordonate omogene).
- Compunerea transformărilor corespunde înmulțirii matricelor.