T. dimensiunii (Grassmann)

Fie $V/_K$ sp. vect. (finit dimensional) și $V_1, V_2 \subseteq V$ ssp. vect.

Atunci $\boxed{\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$

$\boxed{Apl}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) / x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$V_2 = \{(t,0,t) / t \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că $\underset{\text{ssp. vect.}}{V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3}$ și precizați dimensiunile lor

b) Determinați $V_1 + V_2 = ?$

Rez: a) Fie $u_1, u_2 \in V_1 \Rightarrow u_1 = (x_1, y_1, 0)$, $u_2 = (x_2, y_2, 0)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, 0)$, unde $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in V_1 \Rightarrow \underset{\text{ssp. vect.}}{V_1 \subset \mathbb{R}^3}$

$V_1 \ni (x,y,0) = x e_1 + y e_2 \Rightarrow B_1 = \{e_1, e_2\} \subset V_1$ bază $\Rightarrow \dim B_1 = 2$

$x, y \in \mathbb{R}$

(plan vectorial)

Analog se arată că: $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect și $\dim V_2 = 1$ (dr. vect.)

$B_2 = \{(1,0,1)\} \subset V_2$ bază

$V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Aplicăm t. dimensiunii (Grassmann):

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Obs: $V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow x = y = t = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 2 + 1 - 0 = 3$

Dar: $V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ssp. vect. $\Rightarrow \boxed{V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3}$ suma directă

(deoarece $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$)

$\boxed{T}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) / x,y \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(u,0,v) / u,v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect și precizați $\dim V_2$

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ (E adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$?)

$\boxed{Ap1}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) / x,y \in \mathbb{R}\}$

(T) $V_2 = \{(u,0,v) / u,v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect. și precizați $\dim V_2$.

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ (E adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$?)

Rez.

a) Fie $w_1, w_2 \in V_2 \Rightarrow w_1 = (u_1, 0, v_1)$, $w_2 = (u_2, 0, v_2)$, $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, unde $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in V_2 \Rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect.

$V_2 \ni (u,0,v) = u e_1 + v e_3 \Rightarrow B_2 = \{e_1, e_3\}$ bază $\Rightarrow \dim V_2 = 2$ (plan vectorial)

$u, v \in \mathbb{R}$

b) T. dimensiunii (Grassmann)

$$\boxed{\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

$V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow \begin{cases} x = u \ (\stackrel{\text{not}}{=} t) \\ y = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{(t,0,0) / t \in \mathbb{R}\}$
$= \{t e_1 / t \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 \rangle$
$\Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 = 1$

Avem: $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$

Așadar: $\dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

$\left.\begin{array}{l} \dim(V_1+V_2)=3 \\ \text{Dar}: V_1+V_2 \underset{\text{ssp. vect.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_1+V_2=\mathbb{R}^3}$

! Relația $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ nu este adevărată deoarece $V_1 \cap V_2 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (mai exact, $V_1 \cap V_2 = \langle e_1 \rangle$)

(T)* Fie $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \underset{\text{urma}}{Tr} A = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = \lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_1, V_2 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssp. vect.

b) Dem. că $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

c) Verificați teorema dimensiunii în acest caz.

Aplicații liniare

(morfisme de spații vectoriale)

Def: Fie $V, W/_K \to$ spații vectoriale

O aplicație $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară (sau morfism de sp. vect.) dacă: $\begin{cases} 1) & f(x+y)=f(x)+f(y), \\ 2) & f(\lambda x)=\lambda f(x) \end{cases}$ $(\forall) x,y \in V, \lambda \in K \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\, f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), (\forall) x,y \in V, \alpha,\beta \in K \,]$

Obs: $f(0_V)=0_W$.

Exemple:

1) $V/_K$ sp. vect.

$0_V : V \to V,\ 0_V(x) = 0,\ (\forall)\ x \in V$ (apl. nulă)

$1_V : V \to V,\ 1_V(x) = x,\ (\forall)\ x \in V$ (apl. identică)

2) $T_r : \mathcal{M}_n(K) \to K,\ T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (apl. urmă)

Avem: $\begin{cases} T_r(A+B) = T_r(A) + T_r(B) \\ T_r(\lambda A) = \lambda T_r(A) \end{cases},\ (\forall)\ A, B \in \mathcal{M}_n(K),\ \lambda \in K$

3) $f : \mathcal{M}_n(K) \to K^{n^2}$

$f(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}),\ (\forall)\ A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$f_A : K^n \to K^m,\ f_A(X) = AX$

Avem: $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y),\ (\forall)\ x, y \in K^n$

$f_A(\lambda X) = A(\lambda X) = (A\lambda)X = (\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda f_A(X),\ (\forall)\ X \in K^n,\ \lambda \in K$

Obs: 1) $(\exists)$ tot atâtea apl. liniare câte matrice.

2) $(\forall)$ apl. liniară e de tipul acesta.

5) $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ nu e apl. liniară pt. că $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Fie $f : V \to W$ apl. liniară

$\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} \subseteq V$ ssp. vect.
(nucleul)

$\operatorname{Im} f = \{y \in W \mid (\exists)\ x \in V \text{ a.î. } f(x) = y\} \subseteq W$ ssp. vect.
(imaginea)

$\boxed{P}$ a) O apl. lin. $f: V \to W$ e inj. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

b) O apl. lin $f: V \to W$ e surj. $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

c) O apl. lin $f: V \to W$ e bij $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \\ \operatorname{Im} f = W \end{cases}$

T (rang-defect)

Fie $V, W/_K$ - 2 sp. vect. (finit dimensionate).

$f: V \to W$ apl. liniară.

Atunci $\underbrace{\dim_K \operatorname{Ker} f}_{\text{"} \operatorname{def}(f)} + \underbrace{\dim_K \operatorname{Im} f}_{\text{"} \operatorname{rg}(f)} = \dim_K V$

$\boxed{Ap1}$. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x-y, y)$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Ar. că f e aplicație liniară.

b) Scrieți matricea asociată lui f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

Rez

a)

(V_1) Fie $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ $\in \mathbb{R}^2$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Atunci $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2)) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2), \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= \alpha_1 (x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) = \alpha_1 f(x_1, y_1) + \alpha_2 f(x_2, y_2) =$

$= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

(V2) Scriem $f(X) = AX$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(f. matriceală)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$$

Fie: $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$
$\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1) + A(\alpha_2 X_2)$$
$$= (A\alpha_1)X_1 + (A\alpha_2)X_2 = (\alpha_1 A)X_1 + (\alpha_2 A)X_2 = \alpha_1(AX_1) + \alpha_2(AX_2)$$
$$= \alpha_1 f(X_1) + \alpha_2 f(X_2) \implies f \text{ apl. lin. (morf. de sp. vect.)}$$

b) $A = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \right)$ $\to$ m. asoc. apl. lin. f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

$f(e_1)$ $f(e_2)$, unde $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$
b. canonică

$f(e_1) = f(1,0) = (1,1,0)$
$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1,1)$

(T) Aceleași cerințe pentru:
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x-y-z)$

Apl: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x, -y)$ apl. liniară.

a) Determinați $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$
b) Precizați dacă f e injectivă, surjectivă, resp. bijectivă
c) Verificați t. rang-defect în acest caz.

Rez: a) $\operatorname{Ker} f = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$
(nucleul) $\quad v = (x, y)$

$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$ Teorie S.L.O. $\Rightarrow x = y = 0$ sol. unică ($\operatorname{rg} A = 2$)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Deci: $\operatorname{Ker} f = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$

$\operatorname{Im} f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\exists)\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $f(x,y) = (x', y', z') \}$
(imaginea)

$f(x,y) = (x', y', z') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' & (1) \\ x = y' & (2) \\ -y = z' \Leftrightarrow y = -z' & (3) \end{cases}$

(2)(3) în (1)
$\Leftrightarrow y' - z' = x' \Leftrightarrow x' - y' + z' = 0$

Deci: $\operatorname{Im} f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, x' - y' + z' = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$
ssp. vect.

b) $\operatorname{Ker} f = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \} \Leftrightarrow f$ injectivă

$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ nu este surj. $\Big| \Rightarrow f$ nu este nici bijectivă.
subsp. propriu

c) Verificăm T. rang-defect în acest caz, i.e.

$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$

Evident: $\dim \operatorname{Ker} f = 0$

și $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Determinăm $\dim \operatorname{Im} f$.

(V1) $\underline{rg\, f = \dim(\operatorname{Im} f)} = n - rg\, \underset{\substack{\| \\ (1\ -1\ 1)}}{A'} = 3 - 1 = \underline{2}$

<u>sau</u>

(V2) $\operatorname{Im} f \ni (x', y', z') = (x', x'+z', z') = (x', x', 0) + (0, z', z')$

$x' - y' + z' = 0 \iff y' = x' + z'$

$= x'\underbrace{(1,1,0)}_{v_1} + z'\underbrace{(0,1,1)}_{v_2} = x' v_1 + z' v_2 \Rightarrow B = \{v_1, v_2\} \subset \operatorname{Im} f$

$x', z' \in \mathbb{R}$ s. de generatori

+ s.v. <u>lin. indep.</u>

(se verifică ușor)

$\Rightarrow B \subset \operatorname{Im} f$

<u>bază</u> $\Rightarrow \underline{\dim(\operatorname{Im} f) = 2}$

Revenim, și observăm că:

$0 + 2 = 2$, i.e. $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$,

echivalent cu $\boxed{\operatorname{def} f + rg\, f = 2}$.