CURS #7

UNDE SUNTEM: Mulțimi recursive, Mulțimi rec. enumerabile, reducere

A recursivă

$\Updownarrow$

1_A calculabilă de o M.T.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

A recursiv enumerabilă

$\Updownarrow$

f_A calculabilă de o M.T.

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ \uparrow & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Exp $HALT = \{ \langle i, x \rangle \mid M_i(x) \text{ se oprește} \}$, r.e, nu este recursivă

Exp2 $W = \{ p \in \mathbb{Z}[\vec{x}] \mid \text{ecuația } p(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ are sol. întregi} \}$ r.e.

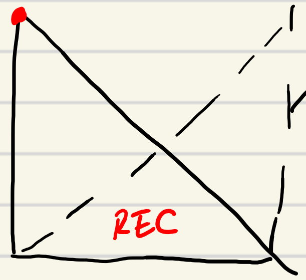
Teorema lui Matiyasevic (curs 1) W nu este recursivă

$A \leq_m B$ $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ recursivă a.î. $\forall x \in \Sigma^*$ $\boxed{x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B}$

$$x \to \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{B} \to \text{DA/NU}$$

$\boxed{A \equiv_m B} \Leftrightarrow A \leq_m B$ și $B \leq_m A$

HALT



$R.E = \exists \cdot REC$

$co\,R.E = \forall \cdot REC = \{A \mid \bar{A} \text{ r.e.}\}$

(T) A r.e. $\Rightarrow A \leq_m HALT$

Dem A r.e. $\Rightarrow \exists\, M_i$ $A = \{x \mid M_i(x)\downarrow\}$

$f(x) = \langle i, x \rangle$ $\quad x \in A \iff \langle i, x \rangle \in HALT$

$Tot = \{ i \mid M_i(x)$ se oprește pt orice $x \}$

$HALT \leq_m TOT$ $\quad$ (dar $TOT \not\leq_m HALT$)

$\langle i, x \rangle \longrightarrow$ input z
simulează
$M_i(x)$
dacă $M_i(x)\downarrow$
acceptă z

$HALT(i,x,t)$ $\boxed{M_i(x) \text{ se oprește în } \leq t \text{ pași}}$ $\to$ recursiv!

$HALT = \{\langle i, x \rangle \mid \exists t \; HALT(i,x,t)\}$ $\to$ recursiv

(T) A este r.e.
$\Updownarrow$
există un pred recursiv $P(x,y)$

$\boxed{x \in A \iff \exists y \; P(x,y)}$

$\boxed{R.E = \exists \cdot REC}$ $\quad co\text{-}R.E. = \forall \cdot REC$

A este co r.e $\Rightarrow$ $\bar{A}$ este r.e există $P(x,y)$ recursiv

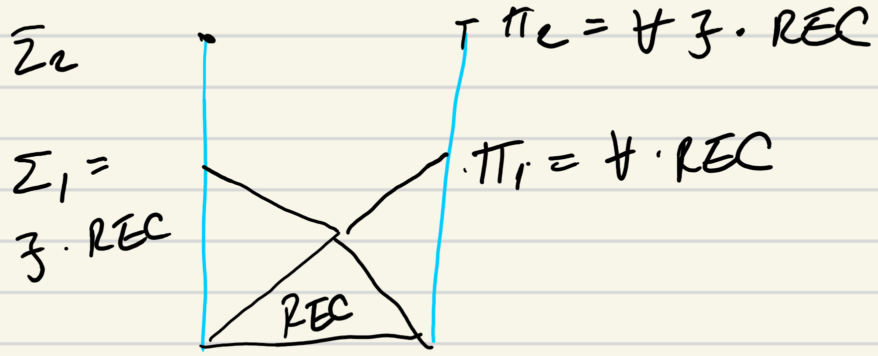
$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists y \; P(x,y)$$

$$x \in A \Leftrightarrow \forall y \; \neg P(x,y)$$

$Tot = \{ i \mid \forall x \; M_i(x) \text{ se oprește} \}$

$Tot = \{ i \mid \forall x \, \exists t \; \underbrace{HALT(i,x,t)}_{\text{rec.}} \}$

$\exists x \, \exists y \Leftrightarrow \exists i = \langle x,y \rangle$



$\Sigma_n = \{ A$ a.î. ex un pred rec P

a.î. $x \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \, \forall y_2 \dots Q y_n$
$P(x, y_1, \dots y_n)$

$\Pi_n = \{ A \; - - -$

$x \in A \Leftrightarrow \forall y_1 \, \exists y_2 \; - - \; Q y_n$
$P(x, y_1 \dots y_n) \}$

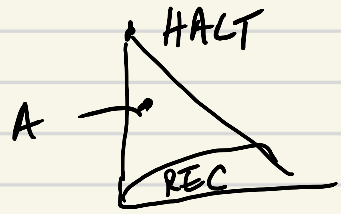
Exp $Tot \in \Pi_2$ ie $Tot \Leftrightarrow \forall x \, \exists t \; HALT(i,x,t)$

IERARHIA ARITMETICĂ

- $\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1}$, $\Sigma_n \subset \Pi_{n+1}$
- Σ_n, Π_n au pb complete
- Exp TOT completă pt Π_2
- există A r.e, A nu este recursivă

$$A \leq_m HALT$$

$$HALT \not\leq_m A$$



Complexitate

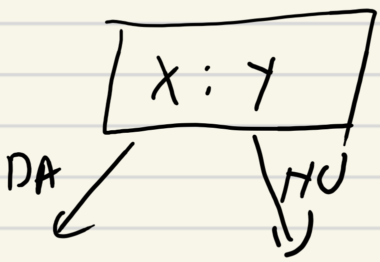
(Capitolul 2 Arora - Barak)

Problemele rezolvabile algoritmic eficient

Exp SORTAREA n numere $\rightarrow O(n\log(n))$

MERGESORT
HEAPSORT
~~QUICKSORT~~

(T) Orice alg de sortare bazat pe comparații are complexitate $\Omega(n\log(n))$



$f = \Omega(n\log n)$ $\quad \exists\, c>0 \quad n_0 \ge 1$

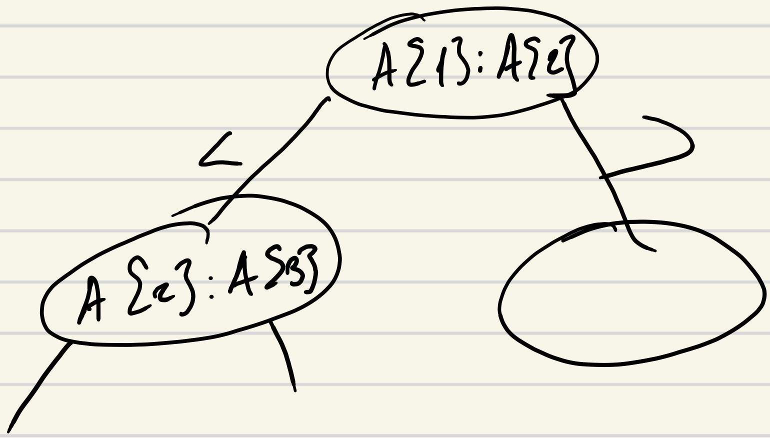
$$\forall n \ge n_0 \quad f(n) \ge c\, n \log(n)$$

Pt orice alg de sortare A

$$T_A(n) = \Omega(n\log(n))$$

Alg sortare $\Rightarrow$ ARBORE de decizie

INPUT $(A[1], \dots A[n])$



$\boxed{\overset{\pi}{(2,1,3)}}$

$(A[2] < A[1] < A[3])$

$\boxed{\text{height}(T) = T_A(n)}$

Afirm Pt orice arbore de decizie pt pb. sortării

$$\text{height}(T) = \Omega(n\log(n))$$

Obs T are $\geq n!$ frunze.

Afirm Un arbore binar cu înălțime h are $\leq 2^h$ frunze.

$\forall T$ $h(T)$ verifică $2^{h(T)} \geq n!$

$\Downarrow$

$\forall T$ $h(T) \geq \log_2(n!)$

FORMULA LUI STIRLING $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$

$h(T) \geq \log_2(n!) \simeq \log_2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$

$\|$

$n \log_2(n/e) + \log_2(\sqrt{2\pi n})$

$\downarrow$

$c \cdot n \log(n)$

REST Despre ce nu pot calcula eficient.