Seminar 1 ① gr. 131-134

Geometrie și Algebră liniară

Sisteme de ecuații liniare

ⓐ Matrice
ⓑ Determinanți

Apl 1

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $AB = BA$.

Arătați că: $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$ au loc relațiile:

i) $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1})$

(T) ii) $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^j B^{k-j}$, unde $A^0 = B^0 = I_n$

Rez: Dem că: $A^r B^s = B^s A^r$, $(\forall)\ r, s \in \mathbb{N}$ $(*)$

$$A^r B^s = \underbrace{A \ldots A}_{\text{"r" ori}} \cdot \underbrace{B \ldots B}_{\text{"s" ori}} = A \ldots B A \ldots B = \ldots = B \underbrace{A \ldots A}_{\text{"r"}} \underbrace{B \ldots B}_{\text{"s-1" ori}} =$$

$$= \ldots = B^s A^r$$

rs - permutări

$(A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1}) =$

$= A^k + A^{k-1}B + \ldots + A^2B^{k-2} + AB^{k-1} - BA^{k-1} - BA^{k-2}B - \ldots - BAB^{k-2} - B^k$

$= A^k + A^{k-1}B + \ldots + A^2B^{k-2} + AB^{k-1} - BA^{k-1} - B^2A^{k-2} - \ldots - B^{k-1}A - B^k$

$\stackrel{(*)}{=} A^k + \cancel{A^{k-1}B} + \ldots + \cancel{A^2B^{k-2}} + \cancel{AB^{k-1}} - \cancel{A^{k-1}B} - \cancel{A^{k-2}B^2} - \ldots - \cancel{AB^{k-1}} - B^k$

$= A^k - B^k$ ✓

Def: 1) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s.n. <u>involutivă</u> dacă $A^2 = I_n$

2) $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s.n. <u>idempotentă</u> dacă $B^2 = B$

Apl. 2

Arătați că: a) Dacă B e idempotentă $\Rightarrow 2B - I_n$ e involutivă.

b) Dacă A e involutivă $\Rightarrow \frac{1}{2}(A+I_n)$ e idempotentă.

Rez: a) B idempotentă $\Rightarrow B^2 = B$

$(2B - I_n)^2 = (2B-I_n)(2B-I_n) = 4B^2 - 2BI_n - 2I_nB + I_n^2$

$= 4B^2 - 4B + I_n^2 = \cancel{4B} - \cancel{4B} + I_n = I_n$

Deci: $(2B - I_n)^2 = I_n \Rightarrow 2B - I_n$ e involutivă

b) A involutivă $\Rightarrow A^2 = I_n$

$\left[\frac{1}{2}(A+I_n)\right]^2 = \frac{1}{4}(\underbrace{A^2}_{I_n} + I_n + 2A) = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cancel{2}(A+I_n) =$

$= \frac{1}{2}(A+I_n) \Rightarrow \frac{1}{2}(A+I_n)$ idempotentă

① Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $A + B = AB$. Dem. că: $AB = BA$

Apl 3

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\det A \neq 0$.

Arătați că: $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$ $\quad \{ A^{**} \overset{not}{=} (A^*)^* \}$

Rez: Th: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

A m. inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \underbrace{A^*}_{\text{m. adjunctă}}$

$\Rightarrow (A^*)^{-1} = \frac{1}{\det A^*} (A^*)^* \Rightarrow A^{**} = (\det A^*)(A^*)^{-1}$

$A^* = (\det A) A^{-1} \Rightarrow \det A^* = (\det A)^n \cdot \underbrace{\det (A^{-1})}_{\frac{1}{\det A}} = (\det A)^{n-1}$ $(*)$

$(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det A} A$ $(**)$

Din rel. $(*)$ și $(**)$ $\Rightarrow A^{**} = (\det A)^{n-2} \cdot A$

Am folosit următoarele propr. ale determinantului:

- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$
- $B = \alpha A \Rightarrow \det B = \alpha^n \det A$ $\quad \{B^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} / \det A \neq 0, \alpha \neq 0\}$
- $\boxed{\det (AB) = (\det A)(\det B)} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Ap. 1.4

Calculați A^{2021}, unde $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Rez: Se dem. că:

T P Dacă $A = \begin{pmatrix} \cos e & +\sin e \\ -\sin e & \cos e \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \cos ne & \sin ne \\ -\sin ne & \cos ne \end{pmatrix}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\begin{cases} \cos e = \frac{1}{2} \\ \sin e = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{\pi}{3}$

$A^{2021} = \begin{pmatrix} \cos(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) & \sin(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) \\ -\sin(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) & \cos(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$

$2021 \frac{\pi}{3} = 673 \frac{2}{3} \pi = 672\pi + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \cdot 336 + \frac{5}{3}\pi$

$\cos \frac{5}{3}\pi = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = +\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ Deci: $A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\sin \frac{5}{3}\pi = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Def: Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, K — corp comutativ

a) Dacă ${}^tA = A$ atunci A s.n. matrice simetrică

b) Dacă ${}^tA = -A$ atunci A s.n. matrice antisimetrică

Ap1 Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ matrice antisimetrică și n — nr. impar.

Calculați $\det A = ?$

Rez: ${}^tA = -A \Rightarrow \det {}^tA = (-1)^n \det A$ $\Rightarrow \det A = -\det A$

Dar $\det {}^tA = \det A$ $\Rightarrow \boxed{\det A = 0}$

n — impar

- $O(n) \overset{not}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(K) \;/\; {}^tA\,A = A\,{}^tA = I_n\}$

  mulțimea matricelor ortogonale

- $GL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \;/ \det A \neq 0\}$ → grupul general liniar

$(GL_n(K), \cdot)$ grup necomutativ.

Fie $A, B \in GL_n(K) \Rightarrow \det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ $\Rightarrow \det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow AB \in GL_n(K)$

- ASOCIATIVITATE (cadru general)
- NECOMUTATIVITATE (înmulțirea matricelor nu este comutativă în general)
- $(\exists)$ ELEM. NEUTRU

  $I_n \in GL_n(K)$, $I_n^{-1} = I_n$
- $(\forall)$ ELEM. ADMITE UN INVERS

  Dacă $A \in GL_n(K) \Rightarrow (\exists)\, A^{-1} \in GL_n(K)$

  $(A^{-1})^{-1} = A$

$\boxed{P}$ (Apl) $(G(n), \cdot) \subset (GL_n(K), \cdot)$

$\underset{\shortparallel}{\text{subgrup}}$ {grupul ortogonal}

Dem: • Fie $A \in G(n) \Rightarrow {}^tA\, A = I_n \overset{\det}{\Longrightarrow} (\det {}^tA)(\det A) = \det I_n$ ($\det {}^tA = \det A$)

$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$

$\not\Leftarrow$ Reciproca nu este, în general, adevărată

• $A \in G(n) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = {}^tA}$

Fie $A, B \in G(n) \Rightarrow AB \in G(n)$

${}^t(AB)(AB) = {}^tB\, \underbrace{{}^tA\, A}_{I_n} B = {}^tB\, I_n\, B = {}^tB B = I_n$ V

$A \in G(n) \Rightarrow {}^tA \in G(n) \Rightarrow A^{-1} \in G(n)$ V

q.e.d.

$SO(n) = \{A \in G(n) \mid \det A = +1\}$

$(SG(n), \cdot) \subset (G(n), \cdot)$

subgrup {grupul special ortogonal}

Obs: $G^-(n) = \{A \in G(n) \mid \det A = -1\} \rightarrow$ NU ESTE PARTE STABILĂ la înmulțirea matricelor

Apl: Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=\overline{1,n}}$

Ar. că: a) $\det \overline{A} = \overline{\det A}$

b) $\det(A\overline{A}) = |\det(A)|^2 \geq 0$

Rez: a) $\overline{\det A} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)}}\, \overline{a_{2\sigma(2)}} \cdots \overline{a_{n\sigma(n)}} = \det \overline{A}$ V

b) $\det(A\overline{A}) = (\det A)(\det \overline{A}) = (\det A)(\overline{\det A}) = |\det(A)|^2 \geq 0$ V

Apl. Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$, $(\forall)\ i,j=\overline{1,n}$

Arătați că: $\det A \in \mathbb{R}$.

Rez: $a_{ij}=\overline{a_{ji}}, (\forall)\ i,j=\overline{1,n} \Leftrightarrow A=\overline{A^T}$

$\Rightarrow \det A = \det \overline{A^T}$

Dar. $\det \overline{A^T} = \overline{\det A^T} = \overline{\det A}$

$\Rightarrow \det A = \overline{\det A} \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$ q.e.d.

Apl. Calculați $\det A$

(I) (a) folosind dezvoltarea după prima linie

(b) folosind regula lui Laplace prin dezv. după primele 2 linii.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rez: $\boxed{\text{Regula lui LAPLACE}}$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $1 \le p \le n$, $p \in \mathbb{N}$

$c_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij} \to$ compl. alg. al elem. a_{ij}

$c = (-1)^s M_c$, $s=(i_1+i_2+\ldots+i_p)+(j_1+j_2+\ldots+j_p)$

Th. LAPLACE Determinantul matricei A e egal cu suma produselor minorilor de ordin p (ce se pot construi cu elem. a p linii (col) fixate ale matricei A) prin compl. lor algebrici.

C.P. $p=1$

$(\forall)\ i=\overline{1,n}$: $\det A = a_{i1}c_{i1}+a_{i2}c_{i2}+\ldots+a_{in}c_{in}$

(reg. de dezv. a det. matricei A după linia i)

$\det A = \sum M\cdot M' = \sum \det(A_{IJ})\cdot(-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p}\det(A_{\bar I \bar J})$

M minor de ordin p în A obț. din liniile $\{i_1,\ldots,i_p\}$ și din p coloane

$1 \le p \le n$; $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$

OBS Suma are C_n^p termeni.

$\boxed{\text{Regula lui LAPLACE}}$

Rez: (5) $\Delta = \det A =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +0 - 1 \cdot 18 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 7 - 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 =$$

$$= -18 + 12 + 7 - 5 - 1 = 19 - 24 = \underline{\underline{-5}}$$

Deci: $\boxed{\Delta = -5}$

$\boxed{T}$ $\boxed{A.1}$ Calculați $\det A$

a) folosind dezvoltarea după coloana 4

b) folosind regula lui Laplace prin dezv. după liniile $i_1=1, i_2=4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rez: b) $\Delta = \det A = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}^{j_1=1,\, j_2=2} \cdot (-1)^{1+4+1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}^{j_1=1,\, j_2=3}}_{=0} \cdot \cancel{(-1)^{1+4+1+3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}^{j_1=1,\, j_2=4} \cdot (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}^{j_1=2,\, j_2=3}}_{=0} \cdot \cancel{(-1)^{1+4+2+3}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}^{j_1=2,\, j_2=4} (-1)^{1+4+2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}^{j_1=3,\, j_2=4}}_{=0} \cdot \cancel{(-1)^{1+4+3+4}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 7 \cdot (-8) + (-1) \cdot 5 + 11(-1) \cdot 7 = -56 - 5 - 77 = \underline{-138}$

Ag!: Considerăm următoarele matrice date pe blocuri:

1) $A = \begin{pmatrix} M_m & N \\ O & P_p \end{pmatrix}, \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{m,p} \end{cases} \Rightarrow \det A = \det M \cdot \det P$

2) $A = \begin{pmatrix} M_m & O \\ N & P_p \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{p\times m} \end{cases} \Rightarrow \det A = \det M \cdot \det P$

3) $A = \begin{pmatrix} N & M_m \\ P_p & O \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{m\times p} \end{cases} \Rightarrow \det A = (-1)^{mp} \det M \cdot \det P$

4) $A = \begin{pmatrix} O & M_m \\ P_p & N \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{p\times m} \end{cases} \Rightarrow \det A = (-1)^{mp} \det M \cdot \det P$

$\boxed{\text{Obs:}}$ 1) $\underset{\text{Transpunere}}{\Rightarrow}$ 2)

Rez: 1) $A = \begin{pmatrix} M_m & N_{m\times p} \\ O_{p\times m} & P_p \end{pmatrix}$

Dem. că: $\boxed{\det A = \det M \cdot \det P}$

Calculăm $\det A$ cu regula lui LAPLACE, dezvoltând după primele "m" linii $(i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_m = m)$.

Obținem: $\det A = \sum B \cdot B' =$

B este un minor de ord. "m" din A determinat de liniile $\{i_1, \dots, i_m\}$ și coloanele $\{j_1 < \dots < j_m\} \subset \{1, \dots, m+p\}$

B' compl. algebric al lui B

$= \det M \cdot \underbrace{(-1)^{2(1+2+\dots+m)}}_{+1} \cdot \det P + 0$

Arătăm că: pt. $\{j_1, \dots, j_m\} \neq \{1, \dots, m\} \Rightarrow \underline{B' = 0}$

Minorii din B' coresp. liniilor $\{m+1, \dots, m+p\}$ și la coloane $\{1, \dots, m+p\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$

Deoarece $\{j_1, \dots, j_m\} \neq \{1, \dots, m\}$

$\underbrace{\qquad}_{\text{"m" elem}}$ $\Rightarrow (\exists)\ \underline{\underline{k}} \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$

Așadar, coloana "k" din matricea A este folosită în minorul B' și deci e o coloană formată doar din $0 \Rightarrow \underline{B' = 0}$

În consecință: $\boxed{\det A = \det M \cdot \det P}$

Analog 3), și 4).

$\boxed{\text{Determinanți VANDERMONDE}}$

Fie $a_i \in K, (\forall) i = \overline{1,n}, n \geq 2$

$$V(a_1, \dots, a_n) \overset{not}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \to \text{det. VANDERMONDE}$$

• Dem. că: $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$: $P(n)$

Dem: $\to$ Inducție după $\underline{\underline{n}}$

I $P(2)$: $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \Rightarrow P(2)$ adev.

II Pp. $P(n-1)$ adev. $\Rightarrow P(n)$ adev.

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_n^2 - a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} C_2' \to C_2 - C_1 \\ C_3' \to C_3 - C_1 \\ \vdots \\ C_n' \to C_n - C_1 \end{cases}$$

Știm că: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Obs: De pe fiecare coloană C_i scoatem factor comun $\boxed{a_i - a_1}$ $\boxed{pt.\ (\forall)\ i = \overline{2,n}}$,

În continuare, dezv. după L_1 și obținem:

$$V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 + a_1 & \dots & a_n + a_1 \\ a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 & \dots & a_n^2 + a_1 a_n + a_1^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} + a_2^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\begin{cases} L_2' = L_2 - a_1 L_1 \\ \vdots \\ L_{n-2}' = L_{n-2} - a_1 L_{n-3} \\ L_{n-1}' = L_{n-1} - a_1 L_{n-2} \end{cases}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \cdot (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) =$$

$$= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) V(a_2, \dots, a_n) \overset{\text{Ip. de ind}}{\underset{P(n-1)}{=}}$$

$$= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \Rightarrow P(n) \text{ adev.}$$

Obs: Fie $a_i \in K$ $(\forall)\ i = \overline{1,n}$
corp com.

$\Rightarrow$ 1) $V(a_1, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ 1 \le i \ne j \le n$ a.î. $a_i = a_j$

2) $V(a_1, \dots, a_n) \ne 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ distincte