Geometrie şi algebră liniară

Spaţii vectoriale

- Liniar indep. Liniar dep.
- Sist. de generatori
- Baze

Def: Fie $V/_K$ sp. vect.

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$

a) S - s.v. lin. indep. dacă:

$(\forall)\ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

$\alpha_i \in K,\ i = \overline{1,m}$

b) S - s.v. lin. dep. dacă:

$(\exists)\ \alpha_i \in K,\ i = \overline{1,m}$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V$

nu toţi nuli

$\boxed{\text{Ap 1}}$. Stabiliţi dacă următoarele siste vect. sunt liniar indep. sau liniar dependente

a) $S_1 = \{v_1 = (-1,1,1),\ v_2 = (1,-1,+1),\ v_3 = (+1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

b) $S_2 = \{v_1 = (1,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (5,4,3)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

c) $S_3 = \{v_1 = e^x,\ v_2 = e^{-x},\ v_3 = \operatorname{sh} x\} \subset C^0(\mathbb{R})$

→ comb. lin. nulă, arbitrară

Rez: a) Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\alpha_i \in \mathbb{R},\ (\forall) i = \overline{1,3}$

$\alpha_1(-1,1,1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(1,1,-1) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow S_1 \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sistem liniar omogen}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\quad\quad\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$\downarrow$

m. sist. S_1

$\det A = 4 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ sol. unică

$\Rightarrow S_1' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$

s.v. lin. indep.

b) Raționament analog

Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow S_2 \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$ S. Liniar Omogen

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\quad\quad\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$\downarrow$

m. sist. S_2

$\det A = 0 \Rightarrow S_2$ admite și sol. nenule

$\Rightarrow S_2' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$

s.v. lin. dep.

$\Delta_p = d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

$$\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 \to \text{nec. princ.} \\ \alpha_3 = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{nec. sec.} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -5\lambda \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -4\lambda \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} \Rightarrow \\ 1\cdot(-2) \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 = -\lambda \\ \alpha_2 = -2\lambda \\ \alpha_3 = \lambda, \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\alpha_3 = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$

$-\lambda v_1 - 2\lambda v_2 + \lambda v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

e.p.

$\lambda = -1 \Rightarrow \underbrace{v_1 + 2v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}}$ → rel. de dep. liniară.

c). $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \ (\forall) \ x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

sinus hiperbolic

$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2 \operatorname{sh} x, \ (\forall) \ x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{v_1 - v_2 - 2v_3 = 0}$ → Rel. de dep. lin. $\Rightarrow S_3' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset C(\mathbb{R})$

s.v. lin. dependent.

$\boxed{P_1}$ Fie $K^n/_K$ sp. aritmetic

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset K^n$, $A = \left(\underset{v_1}{\square} \underset{v_2}{\square} \dots \underset{v_m}{\square} \right) \in \mathcal{M}_{(n,m)}(K)$

a) S s.v. lin. indep. $\overset{dc}{\Longleftrightarrow}$ $rg\, A = m \leq n$ (i.e. $rg\, A$ max. posibil)

b) S s.v. lin. dep. $\overset{dc}{\Longleftrightarrow}$ $rg\, A \neq m$ $(m > n)$

$\boxed{T}$ Determinați valoarea parametrului real m a.î. s.v. următor să fie: a) liniar dependent
b) liniar independent

Sist. de generatori

Def: Fie $V/_K$ sp. vect. (finit generat)

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$

S s.n. sistem de generatori pt. sp. vect. $V/_K$

dacă: $\langle S \rangle = V$ i.e. $(\forall)\, v \in V$, $\underline{(\exists)}\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$

a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$\boxed{A_1}$ Stabiliți dacă următoarele s.v. sunt sisteme de generatori pentru sp. vect. din care fac parte:

a) $S_1 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$

b) $S_2 = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (3,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

T ⓒ $S_3 = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

T ⓓ $S_4 = \{v_1 = 1, v_2 = X-1, v_3 = (X-1)^2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$

Rez: a) $S_1 \subset \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$

sist. de gen $\Longleftrightarrow$ $(\forall)\, v \in \mathbb{R}^2$, $(\exists)\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

Fie $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
vector arbitrar

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Leftrightarrow (x, y) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$$

Deci $(\exists) \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$ a.î. $(\forall)\ v = (x, y) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Rightarrow S_1 = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{R}$
sist. de generatori (pt. $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$)

$\boxed{P_2}$ Fie $K^n/$ sp. aritmetic

$$S' = \{v_1, \dots, v_m\} \subset K^n, \quad A = \begin{pmatrix} \underset{v_1}{\square} & \underset{v_2}{\square} & \cdots & \underset{v_m}{\square} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(K)$$

a) S' - sist. de generatori pt. K^n/K dc. $\operatorname{rg} A = n \le m$
(i.e. $\operatorname{rg} A$ = max posibil)

b) S' - nu este sist. de gen. pt. K^n/K
dc. $\operatorname{rg} A \ne n$ $(n > m)$

b) Aplicăm Ⓟ₂ :

$$A = \begin{pmatrix} \underset{v_1}{\boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}}} & \underset{v_2}{\boxed{\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{rg} A \le 2 < 3 \Rightarrow$$

$\underset{P_2}{\overset{Cf.}{\Longrightarrow}}$ S'_2 nu este sist. de gen. pt. sp. vect. $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

ⓒ, ⓓ → temă pt. acasă.

Def: Fie $V/_K$ sp. vect. (finit generat)

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$

$\mathcal{B}$ s.n. <u>bază</u> pt. sp. vect. $V/_K$ dacă $\begin{cases} 1) \ \mathcal{B} \text{ s.v. lin. indep.} \\ 2) \ \mathcal{B} \text{ s. de gen. pt. } V/_K \end{cases}$

$\boxed{P}$. 1) $(\forall)$ sp. vect. admite (mai multe) baze.

2) Fie $\underset{\text{baze}}{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \subset V/_K \Rightarrow \operatorname{card} \mathcal{B}_1 = \operatorname{card} \mathcal{B}_2$

Def: $\dim_K V \overset{\text{def}}{=} \operatorname{card} \mathcal{B}, \ \underset{\text{bază arb.}}{\mathcal{B} \subset V}$

$\boxed{P_3}$ Fie $K^n/_K$ sp. aritmetic.

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset K^n$

$\mathcal{B}$ bază pt. sp. vect. $K^n/_K \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \mathcal{B} \text{ s.v. lin. indep.} \\ 2) \ \mathcal{B} \text{ s. de gen. pt. } K^n/_K \end{cases}$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \ (\in K^*)$

$\underset{\shortparallel}{A} \in \mathcal{M}_n(K)$

$$\begin{pmatrix} \underset{v_1}{\square} & \underset{v_2}{\square} & \cdots & \underset{v_n}{\square} \end{pmatrix}$$

$\boxed{Ap\ 1}$ Fie vectorii $v_1 = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$

$v_2 = (2, -1, 1)$

Determinați $v_3 \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ <u>bază</u>

Rez: Aplicăm P_3:

$$A = \left(\underset{v_1}{\boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}}} \; \underset{v_2}{\boxed{\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}}} \; \underset{v_3}{\boxed{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}}} \right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Considerăm: $v_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

bază $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow 5x+5y-5z \neq 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x+y-z \neq 0$.

Deci: $(\forall)\ v_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, unde $z \neq x+y$ este sol.

Obs: ∞ - infinitate de sol.

Schimbarea de reper (coordonate)

$\boxed{\text{Ap 1.}}$ Considerăm sistemele vectoriale:

$$B_1 = \{ f_1=(0,1,2),\ f_2=(1,0,2),\ f_3=(2,2,2) \}$$
$$B_2 = \{ g_1=(1,1,-1),\ g_2=(1,-1,1),\ g_3=(-1,1,1) \}$$

a) Ar. că $\underset{\text{baze}}{B_1, B_2} \subset \mathbb{R}^3$

b) Determinați coord. vect. f_1, f_2, f_3 în raport cu baza B_2

c) Determinați matricile de trecere de la baza B_1 la baza B_2, resp. de la B_2 la B_1.

Rez: a) Construim matricile:

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \end{array} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \det A_1 = 6 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază}}{B_1} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \det A_2 = -4 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază}}{B_2} \subset \mathbb{R}^3$$

b) $\underset{\text{bază}}{B_2} \subset \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (\forall)\, v \in \mathbb{R}^3, (\exists)!\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a.î.

$$v = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) = [v]_{B_2}$$

Luăm:

$v = f_1 \Rightarrow (\exists)!\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ a.î. $f_1 = \alpha_1 g_1 + \beta_1 g_2 + \gamma_1 g_3$ (1)

$v = f_2 \Rightarrow (\exists)!\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f_2 = \alpha_2 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_2 g_3$ (2)

$v = f_3 \Rightarrow (\exists)!\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $f_3 = \alpha_3 g_1 + \beta_3 g_2 + \gamma_3 g_3$ (3)

În consecinț: $[f_1]_{B_2}=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$

$[f_2]_{B_2}=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$

$[f_3]_{B_2}=(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$

Pt. determinarea efectivă a coordonatelor, înlocuim în (1),(2),(3) cu datele cunoscute:

După efectuarea calculelor obținem următoarele sist. de ecuații

$$(1) \overset{(S_1)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_1+\beta_1-\gamma_1=0 \\ \alpha_1-\beta_1+\gamma_1=1 \\ -\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2 \end{cases} \quad (2) \overset{(S_2)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_2+\beta_2-\gamma_2=1 \\ \alpha_2-\beta_2+\gamma_2=0 \\ -\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=2 \end{cases}$$

$$(3) \overset{(S_3)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_3+\beta_3-\gamma_3=2 \\ \alpha_3-\beta_3+\gamma_3=2 \\ -\alpha_3+\beta_3+\gamma_3=2 \end{cases}$$

În continuare fie rezolvăm efectiv cele 3 sisteme, fie facem observația că matricea coresp. celor 3 sisteme este aceeași (A_2) recurgem la o scriere matriceală a lor.

$(S_1) \Leftrightarrow A_2\cdot[f_1]_{B_2}=[f_1]_{B_0} \mid \cdot A_2^{-1} \quad - [f_1]_{B_2}=A_2^{-1}[f_1]_{B_0}$

$(S_2) \Leftrightarrow A_2\cdot[f_2]_{B_2}=[f_2]_{B_0} \mid \cdot A_2^{-1} \Rightarrow - [f_2]_{B_2}=A_2^{-1}\cdot[f_2]_{B_0}$

$(S_3) \Leftrightarrow A_2[f_3]_{B_2}=[f_3]_{B_0} \mid A_2^{-1} \quad - [f_3]_{B_2}=A_2^{-1}[f_3]_{B_0}$

Calculând obținem: $A_2^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

respectiv: $[f_1]_{B_2}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$

$[f_2]_{B_2}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$

$[f_3]_{B_2}=(2,2,2)$

Obs: În mod analog se pot determina și coordonatele vect. g_1, g_2, g_3 în raport cu baza B_1.

c) Matricea de trecere (sch. de reper) de la baza B_1 la baza B_2 (not A_{12}) și este formată din exprimarea vect. bazei B_2 în raport cu baza B_1.

Analog pt. matricea de trecere (sch. de reper) de la baza B_2 la B_1.

În cazul nostru: $B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2$, unde $A_{12} = \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert \end{matrix}\right) \\ [g_1]_{B_1}\ [g_2]_{B_1}\ [g_3]_{B_1} \end{array}$

$B_2 \xrightarrow{A_{21}} B_1$

respectiv $A_{21} = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert \end{matrix}\right) \\ [f_1]_{B_2}\ [f_2]_{B_2}\ [f_3]_{B_2} \end{array}$

Așadar: $A_{21} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Analog se face determinarea pt. A_{12}.

- Altă variantă de rezolvare presupune cunoașterea următoarelor rezultate teoretice:

$\boxed{P}$ 1) Dacă $B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2 \Rightarrow B_2 \xrightarrow{A_{12}^{-1}} B_1$

2) Dacă

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "A_{12}"] & B_2 \arrow[r, "A_{23}"] \arrow[l, bend left, "A_{12}^{-1}"] & B_3 \arrow[l, bend left, "A_{23}^{-1}"] \end{tikzcd} \Rightarrow B_1 \xrightarrow{A_{12}A_{23}} B_3$$

$$\Rightarrow B_3 \xrightarrow{\quad} B_1$$

$$\downarrow$$

$$(A_{12}A_{23})^{-1} = A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}$$

$\boxed{\text{Obs:}}$ Matricea de trecere de la reperul canonic la un alt reper al lui K^n/K se găsește f. ușor: coloana sa de indice "i" este formată din coord. vect. $\underline{e_i}$ în reperul canonic.

În consecință, m. de trecere între 2 repere se poate găsi simplu folosind această observație și propr. precedentă: calc. de efectuat fiind inversarea unei matrice și înmulț. ei cu o alta.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] & B' \end{tikzcd} \Rightarrow [v]_B = A \cdot [v]_{B'} \quad \Big| \cdot A^{-1}$$

m. de trecere de la B la B' $\Rightarrow$

$$\boxed{[v]_{B'} = A^{-1}[v]_B}$$

- <u>În cazul nostru:</u>

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, "A_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

m. de trecere de la b. canonică B_0 la baza B_2

$$[f_1]_{B_2} = A_2^{-1}[f_1]_{B_0}$$

$$[f_2]_{B_2} = A_2^{-1}[f_2]_{B_0}$$

$$[f_3]_{B_2} = A_2^{-1}[f_3]_{B_0}$$

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, "A_1"] & B_1 \end{tikzcd}$$

m. de trecere de la b. canonică B_0 la baza B_2

$$[g_1]_{B_1} = A_1^{-1}[g_1]_{B_0}$$

$$[g_2]_{B_1} = A_1^{-1}[g_2]_{B_0}$$

$$[g_3]_{B_1} = A_1^{-1}[g_3]_{B_0}$$

- $$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, mapsto, "A_1"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "A_2"'] & B_1 \arrow[r, mapsto, "A_{12}"] & B_2 \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot A_{12} = A_2 \quad \Big| \cdot A_1^{-1}$$ la stg

$$\Rightarrow A_{12} = A_1^{-1}A_2$$

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[r, "A_{12}^{-1}"] & B_1 \end{tikzcd}$$

$$A_{21} = A_{12}^{-1} = (A_1^{-1}A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1$$

sau

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, mapsto, "A_2"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "A_1"'] & B_2 \arrow[r, mapsto, "A_{21}"] & B_1 \end{tikzcd}$$

$$A_2 \cdot A_{21} = A_1 \quad \Big| \cdot A_2^{-1}$$ la stg

$$\Rightarrow A_{21} = A_2^{-1}A_1$$