LABORATOR #9

EX#1 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Creaţi un fişier în Python® prin care

(a) să se afişeze graficul funcţiei f pe intervalul $[a, b]$;

(b) să se determine şi să se afişeze aproximarea numerică a integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ folosind metoda Monte Carlo cu eşantionare aleatoare uniformă în intervalul $[a, b]$ (folosind $n \in \mathbb{N}$ eşantioane);

(c) să se afişeze graficul aproximărilor integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ în funcţie de numărul n de eşantioane;

(d) pentru $n \in \mathbb{N}$ fixat, să se realizeze N simulări pentru (b);

(e) să se afişeze histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (d);

(f) să se realizeze (a)-(e) pentru

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ şi intervalele $[0, 1]$ şi $[0, 5]$;

(ii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ şi intervalul $[0, \pi]$;

(iii) $f(x) = \sin x^2$, $f(x) = \cos x^2$ şi intervalul $[0, 2\pi]$;

(iv) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ şi intervalul $[0, 1.5]$;

(v) $f(x) = 10\,\mathrm{e}^{-10x}x^2 \sin x$ şi intervalul $[0, 100]$.

EX#2 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Creaţi un fişier în Python® prin care

(a) să se determine şi să se afişeze aproximarea numerică a integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ folosind metoda Monte Carlo cu eşantionare aleatoare după importanţă (folosind $n \in \mathbb{N}$ eşantioane), pentru o distribuţie de importanţă aleasă;

(b) să se afişeze graficul aproximărilor integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ în funcţie de numărul n de eşantioane;

(c) să se realizeze (a)-(b) pentru $f(x) = 10\,\mathrm{e}^{-10x}x^2 \sin x$ şi intervalul $[0, 100]$, cu distribuţia de importanţă $Exp(10)$.

EX#3 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pentru $\sigma^2 < \infty$, considerăm filtrul Gaussian

$$F_{\sigma^2}(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f(x - y)p(y)\,dy, \quad x \in [a, b],$$

unde $p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}$ este funcţia de densitate a normalei $N(0, \sigma^2)$.

Creaţi un fişier în Python® prin care

(a) să se afişeze graficul funcţiei $f(x) = \sin(2x) + 0.3\cos(10x) + 0.05\sin(100x)$ pe intervalul $[0, 5]$;

(b) pentru $\sigma^2 < \infty$ fixat şi pentru o partiţie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = b$ a intervalului $[a, b] = [0, 5]$, să se aproximeze numeric $F_{\sigma^2}(x_i)$, $i = \overline{1, M}$, folosind metoda Monte Carlo cu eşantionare aleatoare după importanţă, folosind distribuţia de importanţă $N(0, \sigma^2)$;

(c) pentru $\sigma^2 < \infty$ fixat, să se afişeze graficul aproximării funcţiei F_{σ^2} obţinută la (b) pe intervalul $[0, 5]$;

(d) să se realizeze (b)-(c) pentru pentru $\sigma \in \{1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05\}$.

Indicaţii Python®: `numpy`, `numpy.random`, `scipy.stats`, `matplotlib.pyplot`, `matplotlib.pyplot.hist`