- Sistemul nu are soluție $\Leftrightarrow$ avem pivot pe ultima coloană

- Nec. secundare = col. unde nu sunt pivoți

- Sist. comp. det $\Leftrightarrow$ avem pivoți pe fiecare coloană, mai puțin ultima

- Sist. comp $\Leftrightarrow$ $\text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A}$ sau toți minorii caracteristici $= 0$

- $\text{rang}\, \bar{A}$ = nr. total de pivoți

- $\text{rang}\, A$ = nr. pivoților de pe coloane (mai puțin ultima)

V spațiu vectorial și $\emptyset \neq W \subset V$

UASE:

1) W e subspațiu vectorial în V
2) $\forall x, y \in W$, $x+y \in W$
3) $\forall a \in K$, $x \in W \Rightarrow ax \in W$
4) $\forall a, b \in K$, $x, y \in W \Rightarrow ax+by \in W$

Obs: Dacă $W \leq V \Rightarrow 0_V \in W$

$\quad$ ↳ subspațiu vectorial

Combinații liniare:

$V = K$ - spațiu vectorial

$v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$

$a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$

Vectorul $(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m)$ s.n. combinație liniară

$\langle S \rangle$ = subspațiu generat de S

Dacă $\langle S \rangle = V \Rightarrow S$ e sist. de generatori p. V

Obs: $V_1, V_2 \leq V \Rightarrow V_1 + V_2 \leq V$

$V_1 \cap V_2 \leq V$

$V_1 \cup V_2 \leq V \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$

- Dacă A e inversabilă $\Rightarrow$ forma eșalon redusă pt matricea $(A \mid I_n)$ este matricea $(I_n \mid A^{-1})$

- Dacă A nu e inversabilă $\Rightarrow$ nu va apărea I_n în forma eșalon redusă

! Forma eșalon redusă a $\forall$ matrici inversabile e matricea unitate de ordin aferent.

- SLI $\Leftrightarrow$ sistem omogen are sol. unică $\Leftrightarrow$ compatibil determinat.
  - $\hookrightarrow$ forma eșalon pt. matricea extinsă avem pivot pe toate coloanele înafară de ultima
  - $\hookrightarrow$ forma eșalon pt $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ avem pivot pe toate coloanele

- Bază = submulțime V care e SLI și SG.
- Dim (bază) = nr. de elemente $\overset{not}{=} \dim_k V$
- $\exists$ bază în $\forall$ spațiu vectorial
- $\forall$ 2 baze în V au același nr. de elemente
- Th. Schimbului (Steinitz):

$$\left.\begin{array}{ll} S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} & \text{SLI} \\ S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} & \text{SG} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ m \le n \\ 2)\ \{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\} \text{ e SG} \end{array}$$

- Cum construiesc o bază?

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle \leq K^n$$

pt. $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ calc. FE

Atunci $\{v_i \mid \exists$ pivot pe col $i\}$ formează o bază în spațiul V.

$$\boxed{\dim V = \text{nr. pivoți}}$$

- Cum văd dacă v aparține $\langle S \rangle$

$$S = \{ v_1 = (1,2,0,3),\ v_2 = (0,1,3,2),\ v_3 = (3,2,1,0) \} \subset \mathbb{R}^4$$

$$v = (1,-1,1,-1)$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v \end{pmatrix} \Rightarrow FE \Rightarrow$$

1) $\in$ s.sp. vect dacă nu are pivot pe ultima col.

2) $\notin$ ——//—— are pivot pe ultima col.

Obs: $\det A \neq 0 \Rightarrow v \notin$ s.sp.v. $\langle S \rangle$

$\det A = 0 \Rightarrow v \in$ s.sp.v. $\langle S \rangle$

- $\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{0_V\}$

- $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n / \mathbb{R}$

  - SLI $\Leftrightarrow$ rang $A = m$

  - SLD $\Leftrightarrow$ rang $A \neq m$

- Alg. Gauss-Jordan $\Rightarrow$ FE $\Rightarrow$ luăm vectorii coresp. coloanelor cu pivot și aceștia vor forma o bază pt V.

- coordonate vector în raport cu baza $\Rightarrow (B_i)^{-1} \cdot (\text{vector})$

- $V, W /_K \to$ 2 sp. vect.

$f : V \to W$ s.n. aplicație liniară (morf. de sp. vect) dacă:

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$

2) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, $\forall v \in V, \alpha \in K$

- $f : V \to V$ (endomorfism) UASE:

a) f inj

b) f surj.

c) f bij

- ca să arăți că B e bază, faci matricea cu vectorii și $\det \neq 0$

- $f: V \to W$ apl. lin $\Rightarrow$ a) $\mathrm{Ker} f \subset V$ s. sp. vect. b) $\mathrm{Im} f \subset W$ s. sp. vect.

- f inj $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

- f surj $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = W$

- f bij $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

  $\mathrm{Im} f = W$

- Th. Rang - defect: $f: V \to W$ apl. lin, $\dim_K V < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim_K \mathrm{Ker} f + \dim_K \mathrm{Im} f = \dim_K V$$

- Th. dimensiunii, Grassmann:

$V_1, V_2 \in V/K$ s.sp.vect $\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$