

# Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2022/2023

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <http://cs.unibuc.ro/~lleustean/>

## PRELIMINARII

### Operații cu mulțimi

Fie  $A, B, T$  mulțimi a.î.  $A, B \subseteq T$ .

$$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$C_T A = T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}$$

**Notări:**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  este mulțimea numerelor naturale;  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;  $\mathbb{Z}$  este mulțimea numerelor întregi;  $\mathbb{R}$  este mulțimea numerelor reale;  $\mathbb{Q}$  este mulțimea numerelor raționale.

**Multimea părților** lui  $T$  se notează  $2^T$  sau  $\mathcal{P}(T)$ . Așadar,  $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$ .

### Operații cu mulțimi

Notăm cu  $(a, b)$  perechea ordonată formată din  $a$  și  $b$  (care sunt componentele lui  $(a, b)$ ).

**Observații:** dacă  $a \neq b$ , atunci  $(a, b) \neq (b, a)$ ;  $(a, b) \neq \{a, b\}$ ;  $(7, 7)$  este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate  $(a, b)$  și  $(c, d)$  sunt egale dacă  $a = c$  și  $b = d$ .

#### Definiție

**Produsul cartezian** a două mulțimi  $A$  și  $B$  este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

#### Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

### Funcții

Fie  $A$  și  $B$  mulțimi și  $f : A \rightarrow B$  o funcție.

Spunem că  $f : A \rightarrow B$  este **definită pe  $A$  cu valori în  $B$** ,  $A$  se numește **domeniu de definiție** al funcției  $f$  și  $B$  se numește **domeniu valorilor sau codomeniu** lui  $f$ .

Fie  $X \subseteq A$  și  $Y \subseteq B$ .

- ▶  $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  este **imagină directă** a lui  $X$  prin  $f$ ;  $f(A)$  este **imagină** lui  $f$ .
- ▶  $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$  este **imagină inversă** a lui  $Y$  prin  $f$ .
- ▶ Fie  $f|_X : X \rightarrow B$ ,  $f|_X(x) = f(x)$  pentru orice  $x \in X$ . Funcția  $f|_X$  este **restricția** lui  $f$  la  $X$ .

Mulțimea funcțiilor de la  $A$  la  $B$  se notează  $\text{Fun}(A, B)$  sau  $B^A$ .

### Funcții

Fie  $f : A \rightarrow B$  o funcție.

- ▶  $f$  este **injectivă** dacă pentru orice  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 \neq x_2$  implică  $f(x_1) \neq f(x_2)$  (sau, echivalent,  $f(x_1) = f(x_2)$  implică  $x_1 = x_2$ ).
- ▶  $f$  este **surjectivă** dacă pentru orice  $y \in B$  există  $x \in A$  a.î.  $f(x) = y$  (sau, echivalent,  $f(A) = B$ ).
- ▶  $f$  este **bijecțivă** dacă  $f$  este injectivă și surjectivă.

**Funcția identică** a lui  $A$ :  $1_A : A \rightarrow A$ ,  $1_A(x) = x$ .

Fie  $f : A \rightarrow B$  și  $g : B \rightarrow C$  două funcții. **Componerea** lor  $g \circ f$  este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

### Funcții

$f : A \rightarrow B$  este **inversabilă** dacă există  $g : B \rightarrow A$  astfel încât  $g \circ f = 1_A$  și  $f \circ g = 1_B$ .

$f$  este bijectivă dacă  $f$  este inversabilă.

#### Observație

- (i) Pentru orice mulțime  $A$ ,  $\text{Fun}(\emptyset, A)$  are un singur element, **funcția vidă**.
- (ii) Pentru orice mulțime nevidă  $A$ ,  $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$ .

#### Definiția 1.1

Fie  $A, T$  mulțimi a.î.  $A \subseteq T$ . **Funcția caracteristică** a lui  $A$  în raport cu  $T$  este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

### Echipotentă

#### Definiția 1.2

Spunem că  $A$  este **echipotentă** cu  $B$  dacă există o bijecție  $f : A \rightarrow B$ . **Notăție:**  $A \sim B$ .

#### Propoziția 1.3

Pentru orice mulțimi  $A, B, C$ , avem

- (i)  $A \sim A$ ;
- (ii) Dacă  $A \sim B$ , atunci  $B \sim A$ .
- (iii) Dacă  $A \sim B$  și  $B \sim C$ , atunci  $A \sim C$ .

**Dem.:** Exercițiu.

#### Observație

Prin urmare,  $A$  este echipotentă cu  $B$  dacă  $B$  este echipotentă cu  $A$ . De aceea, spunem de obicei că  $A$  și  $B$  sunt echipotide.

## Echipotentă

Următorul rezultat este fundamental.

### Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi astfel încât există  $f : A \rightarrow B$  și  $g : B \rightarrow A$  funcții injective. Atunci  $A \sim B$ .

### Definiția 1.5

O mulțime  $A$  se numește **finită** dacă  $A = \emptyset$  sau dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  a.î.  $A$  este echipotentă cu  $\{1, \dots, n\}$ .

Numește și **cardinalul** lui  $A$ .

### Definiția 1.6

O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.

## Mulțimi (cel mult) numărabile

### Definiția 1.7

O mulțime  $A$  este **numărabilă** dacă este echipotentă cu  $\mathbb{N}$ .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple de mulțimi numărabile:  $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ .

### Teorema Cantor

$\mathbb{R}, 2^{\mathbb{N}}$  nu sunt mulțimi numărabile.

Se poate demonstra că

### Propoziția 1.8

$\mathbb{R}$  este echipotentă cu  $2^{\mathbb{N}}$ .

## Mulțimi (cel mult) numărabile

### Propoziția 1.9

- (i) Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.
- (ii) Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.
- (iii) O mulțime  $A$  este cel mult numărabilă dacă există o funcție injectivă de la  $A$  la o mulțime numărabilă.
- (iv) Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.
- (v) Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

### Corolar 1.10

Fie  $A$  o mulțime numărabilă și  $B$  o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci  $A \times B$  și  $A \cup B$  sunt numărabile.

## Cardinale

Un posibil răspuns este:

definim  $|A|$  ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipentente cu  $A$ .

Un alt răspuns este definitia lui von Neumann din teoria axiomaticea a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime  $A$ ,  $|A|$  este tot o mulțime.

- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele **transfinite** sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $|\mathbb{N}|$  se notează  $\aleph_0$  (se citește **alef zero**).
- $|\mathbb{R}|$  se notează  $c$  și se mai numește și **puterea continuumului**.
- O mulțime  $A$  este numărabilă dacă  $|A| = \aleph_0$ .
- $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$ .
- $|2^{\mathbb{N}}| = c$ .

## Cardinale

Numerele **cardinale** sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Pentru orice mulțime  $A$ , **cardinalul** lui  $A$  (sau **numărul cardinal** al lui  $A$ ) este un obiect  $|A|$  asociat lui  $A$  a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- $|A|$  este unic determinat de  $A$ .
- pentru orice mulțimi  $A, B$ , avem că  $|A| = |B|$  dacă  $A \sim B$ .

Această definiție nu specifică natura obiectului  $|A|$  asociat unei mulțimi  $A$ .

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

## Familii de mulțimi

Fie  $I$  o mulțime nevidă.

### Definiția 1.11

Fie  $A$  o mulțime. O **familie** de elemente din  $A$  indexată de  $I$  este o funcție  $f : I \rightarrow A$ . Notăm cu  $(a_i)_{i \in I}$  familia  $f : I \rightarrow A$ ,  $f(i) = a_i$  pentru orice  $i \in I$ . Vom scrie și  $(a_i)$ ; sau  $(a_i)$  atunci când  $I$  este dedus din context.

Dacă fiecărui  $i \in I$  îi este asociată o mulțime  $A_i$ , obținem o **familie (indexată) de mulțimi**  $(A_i)_{i \in I}$ .

Fie  $(A_i)_{i \in I}$  o familie de submulțimi ale unei mulțimi  $T$ . Reuniunea și intersecția familiei  $(A_i)_{i \in I}$  sunt definite astfel:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}\end{aligned}$$

## Familii de mulțimi

Fie  $I$  o mulțime nevidă și  $(A_i)_{i \in I}$  o familie de mulțimi.

### Definiția 1.12

**Produsul cartezian** al familiei  $(A_i)_{i \in I}$  se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Fie  $n$  număr natural,  $n \geq 1$ ,  $I = \{1, \dots, n\}$  și  $A_1, \dots, A_n \subseteq T$ .

- $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$ , un  **$n$ -tuplu (ordonat)**
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$  și  $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$
- $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$  și  $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$

## Familii de mulțimi

### Propoziția 1.13

- (i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.
- (ii) Reuniunea unui număr finit ( $\geq 2$ ) de mulțimi numărabile este numărabilă.
- (iii) Produsul cartezian al unui număr finit ( $\geq 2$ ) de mulțimi numărabile este numărabil.

## Relații

### Definiția 1.14

O **relație n-ară** între  $A_1, \dots, A_n$  este o submulțime a produsului cartezian  $\prod_{i=1}^n A_i$ .

O **relație n-ară pe A** este o submulțime a lui  $A^n$ . Dacă  $R$  este relație n-ară, spunem că  $n$  este **aritatea lui  $R$** .

### Definiția 1.15

O **relație binară** între  $A$  și  $B$  este o submulțime a produsului cartezian  $A \times B$ .

O **relație binară pe A** este o submulțime a lui  $A^2 = A \times A$ .

#### Exemple

- relația de divizibilitate pe  $\mathbb{N}$ :  
 $| = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$
- relația de ordine strictă pe  $\mathbb{N}$ :  
 $< = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$

## Relații binare

Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $R$  o relație binară pe  $A$ .

**Notatie:** Scriem  $xRy$  în loc de  $(x, y) \in R$  și  $\neg(xRy)$  în loc de  $(x, y) \notin R$ .

### Definiția 1.16

- $R$  este **reflexivă** dacă  $xRx$  pentru orice  $x \in A$ .
- $R$  este **ireflexivă** dacă  $\neg(xRx)$  pentru orice  $x \in A$ .
- $R$  este **simetrică** dacă pentru orice  $x, y \in A$ ,  $xRy$  implică  $yRx$ .
- $R$  este **antisimetrică** dacă pentru orice  $x, y \in A$ ,  $xRy$  și  $yRx$  implică  $x = y$ .
- $R$  este **tranzitivă** dacă pentru orice  $x, y, z \in A$ ,  $xRy$  și  $yRz$  implică  $xRz$ .
- $R$  este **totală** dacă pentru orice  $x, y \in A$ ,  $xRy$  sau  $yRx$ .

## Relații binare

Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $R$  o relație binară pe  $A$ .

### Definiția 1.17

$R$  este **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

### Definiția 1.18

$R$  este **relație de**

- **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

**Notații:** Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu  $\leq$ , iar relațiile de ordine strictă cu  $<$ .

## LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

## Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

### Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural  $> 2$  este suma a două numere prime. (Conjectură lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Martienilor le place pizza.

### Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

## Logica propozițională - informal

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm  $p, q, r, \dots$  sau  $p_1, p_2, p_3, \dots$

**Exemplu:**  $p$ =Numărul 2 este par.  $q$ =Mâine plouă.  $r$ =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notează  $\varphi, \psi, \chi, \dots$ ) folosind conectorii logici  $\neg$  (negația),  $\rightarrow$  (implicația),  $\vee$  (disjuncția),  $\wedge$  (conjuncția),  $\leftrightarrow$  (echivalența).

#### Exemplu:

- |                       |   |   |
|-----------------------|---|---|
| $\neg p$              | = | Numărul 2 <b>nu</b> este par.                             |
| $p \vee q$            | = | Numărul 2 este par <b>sau</b> mâine plouă.                |
| $p \wedge q$          | = | Numărul 2 este par <b>și</b> mâine plouă.                 |
| $p \rightarrow q$     | = | Dacă numărul 2 este par, <b>atunci</b> mâine plouă.       |
| $p \leftrightarrow q$ | = | Numărul 2 este par <b>dacă și numai dacă</b> mâine plouă. |

Potem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elibera ambiguitățile, folosim parantezele  $(, )$ .

**Exemplu:**  $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

## Logica propozițională - informal

#### Exemplu:

Fie propoziția:

$\varphi$ =Azi este vineri, deci avem curs de logică.

Considerăm propozițiile atomice

$p$ =Azi este vineri.  $q$ =Avem curs de logică.

Atunci  $\varphi = p \rightarrow q$ . Cine este  $\neg\varphi$ ?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ =Azi este vineri și nu avem curs de logică.

## Logica propozițională - informal

#### Exemplu:

Fie propoziția:

$\varphi$ =Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

$p$  = Trenul întârzie.

$q$  = Sunt taxiuri la gară.

$r$  = Ion întârzie la întâlnire.

Atunci  $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$ .

Presupunem că  $\varphi, p$  sunt adevărate și  $r$  este falsă (deci  $\neg r$  este adevărată). Ce putem spune despre  $q$ ?  $q$  este adevărată.

## Logica propozițională LP - Limbajul

### Definiția 2.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- o mulțime numărabilă  $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de **variabile**;
- conectori logici:  $\neg$  (se citește **non**),  $\rightarrow$  (se citește **implică**)
- paranteze:  $(, )$ .

- Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (\,)\}.$$

- Notăm variabilele cu  $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$

## Logica propozițională LP - Limbajul

### Definiția 2.2

Mulțimea **Expr** a **expresiilor** lui LP este mulțimea tuturor sirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- Expresia vidă se notează  $\lambda$ .
- Lungimea unei expresii  $\theta$  este numărul simbolurilor din  $\theta$ .  $Sim^n$  este mulțimea sirurilor de simboluri ale lui LP de lungime  $n$ .
- Prin convenție,  $Sim^0 = \{\lambda\}$ . Atunci  $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$ .

### Exemple:

$$(((v_1, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2)).$$

## Logica propozițională LP - Limbajul

Operația de bază pentru expresii este **concatenarea**: dacă  $\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$  și  $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$  sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată  $\varphi\psi$ , este expresia  $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$ .

### Definiția 2.3

Fie  $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$  o expresie a lui LP, unde  $\theta_i \in Sim$  pentru orice  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ .

- Dacă  $0 \leq i \leq j \leq k-1$ , atunci expresia  $\theta_i \dots \theta_j$  se numește  $(i, j)$ -**subexpresie** lui  $\theta$ ;
- Spunem că o expresie  $\psi$  apare în  $\theta$  dacă există  $0 \leq i \leq j \leq k-1$  a.î.  $\psi$  este  $(i, j)$ -subexpresie lui  $\theta$ .

## Formule

Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

### Definiția 2.4

**Formulele** lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă  $\varphi$  este formulă, atunci  $(\neg\varphi)$  este formulă.
- (F2) Dacă  $\varphi$  și  $\psi$  sunt formule, atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

**Notății:** Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu  $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$ . Formulele sunt expresiile "bine formate".

## Formule

### Exemple:

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2$  nu sunt formule.
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))$  sunt formule.

### Citire unică (Unique readability)

Dacă  $\varphi$  este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$ , unde  $v \in V$ ;
- $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule.

Mai mult, scrierea lui  $\varphi$  sub una din aceste forme este unică.

### Propoziția 2.5

Mulțimea **Form** a formulelor lui LP este numărabilă.

**Dem.:** Exercițiu.

## Principiul inducției pe formule

### Propoziția 2.6 (Principiul inducției pe formule)

Fie **P** o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea **P**.
- (1) Pentru orice formulă  $\varphi$ , dacă  $\varphi$  are proprietatea **P**, atunci și  $(\neg\varphi)$  are proprietatea **P**.
- (2) Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ , dacă  $\varphi$  și  $\psi$  au proprietatea **P**, atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  are proprietatea **P**.

Atunci orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P**.

**Dem.:** Pentru orice formulă  $\varphi$ , notăm cu  $c(\varphi)$  numărul conectorilor logici care apar în  $\varphi$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  definim proprietatea  $Q(n)$  astfel:

$Q(n)$  e adevărată dacă orice formulă  $\varphi$  cu  $c(\varphi) \leq n$  are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că  $Q(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

## Principiul inducției pe formule

**Pasul initial.**  $Q(0)$  este adevărată, deoarece pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$ , cu  $v \in V$  și, conform ipotezei (0),  $v$  are proprietatea **P**.

**Ipozeta de inducție.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Presupunem că  $Q(n)$  este adevărată.

**Pasul de inducție.** Demonstrăm că  $Q(n+1)$  este adevărată. Fie  $\varphi$  o formulă cu  $c(\varphi) \leq n+1$ . Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$ . Atunci  $\varphi$  are proprietatea **P**, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă. Atunci  $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$ , deci, conform ipotezei de inducție,  $\psi$  are proprietatea **P**.
- Aplicând ipoteza (1), rezultă că  $\varphi$  are proprietatea **P**.
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule. Atunci  $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$ , deci, conform ipotezei de inducție,  $\psi$  și  $\chi$  au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că  $\varphi$  are proprietatea **P**.

Așadar,  $Q(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Deoarece pentru orice formulă  $\varphi$  există  $N \in \mathbb{N}$  a.î.  $c(\varphi) \leq N$ , rezultă că orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P**.

## Principiul inducției pe formule

### Propoziția 2.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- $V \subseteq \Gamma$ ;
- $\Gamma$  este închisă la  $\neg$ , adică  $\varphi \in \Gamma$  implică  $(\neg\varphi) \in \Gamma$ ;
- $\Gamma$  este închisă la  $\rightarrow$ , adică  $\varphi, \psi \in \Gamma$  implică  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ .

Atunci  $\Gamma = Form$ .

**Dem.:** Definim următoarea proprietatea **P**: pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\varphi$  are proprietatea **P** dacă  $\varphi \in \Gamma$ .

Conform definiției lui  $\Gamma$ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 2.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă  $\varphi$  este în  $\Gamma$ . Așadar,  $\Gamma = Form$ .

## Subformule

### Definiția 2.8

Fie  $\varphi$  o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui  $\varphi$  este orice formulă  $\psi$  care apare în  $\varphi$ .

**Notăție:** Mulțimea subformulelor lui  $\varphi$  se notează  $SubForm(\varphi)$ .

### Exemplu:

Fie  $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$ . Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

## Formule

Conecțorii derivați  $\vee$  (se citește sau),  $\wedge$  (se citește și),  $\leftrightarrow$  (se citește dacă și numai dacă) sunt introdusi prin abrevierile:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\ (\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)). \end{aligned}$$

### Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem  $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ , dar scriem  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$ .

- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$  are precedență mai mare decât ceilalți conejtori;
  - $\wedge, \vee$  au precedență mai mare decât  $\rightarrow, \leftrightarrow$ .

Prin urmare, formula  $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$  va fi scrisă  $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$ .

## Principiul recursiei pe formule

### Propoziția 2.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie  $A$  o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

$$(R0) \quad F(v) = G_0(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in V.$$

$$(R1) \quad F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi)) \text{ pentru orice formulă } \varphi.$$

$$(R2) \quad F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi)) \text{ pentru orice formule } \varphi, \psi.$$

## Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

### Exemplu:

Fie  $c : Form \rightarrow \mathbb{N}$  definită astfel: pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $c(\varphi)$  este numărul conectorilor logici care apar în  $\varphi$ .

O definiție recursivă a lui  $c$  este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \rightarrow \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz,  $A = \mathbb{N}$ ,  $G_0 : V \rightarrow A$ ,  $G_0(v) = 0$ ,

$$G_{\neg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\neg}(n) = n + 1,$$

$$G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.$$

## Principiul recursiei pe formule

### Notăție:

Pentru orice formulă  $\varphi$ , notăm cu  $Var(\varphi)$  mulțimea variabilelor care apar în  $\varphi$ .

### Observație

Mulțimea  $Var(\varphi)$  poate fi definită și recursiv.

**Dem.:** Exercițiu.

## SEMANTICA LP

## Tabele de adevăr

### Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: **1** pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este  $\{0, 1\}$ .

Definim următoarele operații pe  $\{0, 1\}$  folosind **tabelele de adevăr**.

$p$	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că  $\neg p = 1 \iff p = 0$ .

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

  

$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Se observă că  $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$ .

## Tabele de adevăr

Operațiile  $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  și  $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  se definesc astfel:

$p$	$q$	$p \vee q$	$p$	$q$	$p \wedge q$	$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

### Observație

Pentru orice  $p, q \in \{0, 1\}$ ,  $p \vee q = \neg p \rightarrow q$ ,  $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$  și  $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

**Dem.:** Exercițiu.

## Evaluări

### Definiția 2.10

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ .

### Teorema 2.11

Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  există o unică funcție

$$e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- $e^+(v) = e(v)$  pentru orice  $v \in V$ ,
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$  pentru orice  $\varphi \in Form$ ,
- $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$  pentru orice  $\varphi, \psi \in Form$ .

**Dem.:** Aplicăm Prinzipiul recursiei pe formule (Propoziția 2.9) cu  $A = \{0, 1\}$ ,  $G_0 = e$ ,  $G_\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $G_\neg(p) = \neg p$  și  $G_\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $G_\rightarrow(p, q) = p \rightarrow q$ .  $\square$

## Evaluare (Interpretare)

### Propoziția 2.12

Dacă  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este o evaluare, atunci pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

**Dem.: Exercițiu.**

## Evaluare (Interpretare)

### Propoziția 2.13

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.:** Definim următoarea proprietate  $P$ : pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\varphi$  are proprietatea  $P$  dacă pentru orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\varphi$  satisfac  $(*)$ .

Demonstrăm că orice formulă  $\varphi$  are proprietatea  $P$  folosind Prinzipiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$ . Atunci  $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$ .

## Evaluare (Interpretare)

### Propoziția 2.13

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.: (continuare)**

- $\varphi = \neg\psi$  și  $\psi$  satisfac  $P$ . Fie  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.i.  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in Var(\varphi)$ . Deoarece  $Var(\varphi) = Var(\psi)$ , rezultă că  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in Var(\psi)$ . Așadar, aplicând  $P$  pentru  $\psi$  și  $\chi$ , obținem că  $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$  și  $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$ . Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci  $\varphi$  satisfac  $P$ .

## Evaluare (Interpretare)

### Propoziția 2.13

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.: (continuare)**

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$  și  $\psi, \chi$  satisfac  $P$ . Fie  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.i.  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in Var(\varphi)$ . Deoarece  $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$  și  $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$ , rezultă că  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in Var(\psi)$  și pentru orice  $v \in Var(\chi)$ . Așadar, aplicând  $P$  pentru  $\psi$  și  $\chi$ , obținem că  $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$  și  $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$ . Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci  $\varphi$  satisfac  $P$ .  $\square$

## Modele. Satisfiabilitate. Tautologii

Fie  $\varphi$  o formulă.

### Definiția 2.14

- O **evaluare**  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este **model** al lui  $\varphi$  dacă  $e^+(\varphi) = 1$ . **Notatie:**  $e \models \varphi$ .
- $\varphi$  este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă  $\varphi$  nu este satisfiabilă, spunem și că  $\varphi$  este **nesatisfiabilă** sau **contradicție**.
- $\varphi$  este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui  $\varphi$ . **Notatie:**  $\models \varphi$ .

**Notatie:** Mulțimea tuturor modelelor lui  $\varphi$  se notează  $Mod(\varphi)$ .

### Propoziția 2.15

(i)  $\varphi$  este tautologie dacă  $\neg\varphi$  este nesatisfiabilă.

(ii)  $\varphi$  este nesatisfiabilă dacă  $\neg\varphi$  este tautologie.

**Dem.: Exercițiu.**

## Metoda tabelului

Fie  $\varphi$  o formulă arbitrară și  $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $e^+(\varphi)$  depinde doar de  $e(x_1), \dots, e(x_k)$ , conform Propoziției 2.13.

Așadar,  $e^+(\varphi)$  depinde doar de restricția lui  $e$  la  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ :

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt  $2^k$  astfel de funcții posibile  $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$ . Asociem fiecărei o linie într-un tabel:

$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	... subformule ale lui $\varphi$ ...	$\varphi$
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	...	$e'_1(x_k)$	...	$e'^+(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	...	$e'_2(x_k)$	...	$e'^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	...	$e'_{2^k}(x_k)$	...	$e'^{2^k}(\varphi)$

Pentru orice  $i$ ,  $e'^i(\varphi)$  se definește similar cu Teorema 2.11.

$\varphi$  este tautologie dacă  $e'^i(\varphi) = 1$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, 2^k\}$ .

## Metoda tabelului

### Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că  $\models \varphi$ .

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

$v_1$	$v_2$	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	$\varphi$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

## Tautologii

### Definiția 2.16

Fie  $\varphi, \psi$  două formule. Spunem că

- $\varphi$  este **consecință semantică** a lui  $\psi$  dacă  $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$ . **Notăție:**  $\psi \models \varphi$ .
- $\varphi$  și  $\psi$  sunt (*logic*) **echivalente** dacă  $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$ . **Notăție:**  $\varphi \sim \psi$ .

### Observație

Relația  $\sim$  este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

### Propoziția 2.17

Fie  $\varphi, \psi$  formule. Atunci

- (i)  $\psi \models \varphi$  dacă  $\models \psi \rightarrow \varphi$ .
- (ii)  $\psi \sim \varphi$  dacă  $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$  dacă  $\models \psi \leftrightarrow \varphi$ .

**Dem.**: Exercițiu.

## Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

### Propoziția 2.18

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

<i>terțul exclus</i>	$\models \varphi \vee \neg \varphi$	(1)
<i>modus ponens</i>	$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$	(2)
<i>afirmarea concluziei</i>	$\psi \models \varphi \rightarrow \psi$	(3)
<i>contradicția</i>	$\models (\varphi \wedge \neg \varphi)$	(4)
<i>dubla negație</i>	$\varphi \sim \neg \neg \varphi$	(5)
<i>contrapoziția</i>	$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$	(6)
<i>negarea premizei</i>	$\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi$	(7)
<i>modus tollens</i>	$\neg \psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg \varphi$	(8)
<i>tranzitivitatea implicației</i>	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$	(9)

## Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

<b>legile lui de Morgan</b>	$\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$	(11)
<b>exportarea și importarea</b>	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$	(12)
<b>idempotența</b>	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
<b>slăbirea</b>	$\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$	(14)
<b>comutativitatea</b>	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
<b>asociativitatea</b>	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
<b>absorbția</b>	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)
<b>distributivitatea</b>	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	(21)

## Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (1):  $\models \varphi \vee \neg \varphi$ .

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că  $e^+(\varphi \vee \neg \varphi) = 1$ . Observăm că  $e^+(\varphi \vee \neg \varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$ . Putem demonstra că  $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$  în două moduri.

### I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

### II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$ . Atunci  $\neg e^+(\varphi) = 0$  și, prin urmare,  $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ .
- $e^+(\varphi) = 0$ . Atunci  $\neg e^+(\varphi) = 1$  și, prin urmare,  $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ .

## Substituția

### Definiția 2.19

Pentru orice formule  $\varphi, \chi, \chi'$ , definim

$\varphi_\chi(\chi') :=$  expresia obținută din  $\varphi$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui  $\chi$  cu  $\chi'$ .

$\varphi_\chi(\chi')$  se numește **substituția lui  $\chi$  cu  $\chi'$  în  $\varphi$** . Spunem și că  $\varphi_\chi(\chi')$  este o **instantă de substituție** a lui  $\varphi$ .

- $\varphi_\chi(\chi')$  este de asemenea formulă.
- $\varphi_\chi(\chi') = \chi'$ .
- Dacă  $\chi$  nu este subformulă a lui  $\varphi$ , atunci  $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$ .

### Exemplu:

Fie  $\varphi = (v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)$ .

- $\chi = v_1 \rightarrow v_2$ ,  $\chi' = v_4$ .  $\varphi_\chi(\chi') = v_4 \rightarrow \neg v_4$
- $\chi = v_1$ ,  $\chi' = \neg v_2$ .  $\varphi_\chi(\chi') = (\neg v_2 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(\neg v_2 \rightarrow v_2)$
- $\chi = v_1 \rightarrow v_2$ ,  $\chi' = v_4 \vee v_1$ .  $\varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \rightarrow \neg(v_4 \vee v_1)$

## Substituția

### Propoziția 2.20

Pentru orice formule  $\varphi, \chi, \chi'$ ,

$$\chi \sim \chi' \text{ implică } \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

### Propoziția 2.21

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$  și orice variabilă  $v \in V$ ,

- $\varphi \sim \psi$  implică  $\varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$ .
- Dacă  $\varphi$  este tautologie atunci și  $\varphi_v(\chi)$  este tautologie.
- Dacă  $\varphi$  este nesatisfiabilă, atunci și  $\varphi_v(\chi)$  este nesatisfiabilă.

## Conjuncții și disjuncții finite

### Notății

Scriem  $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$  în loc de  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ . Similar, scriem  $\varphi \vee \psi \vee \chi$  în loc de  $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ .

Fie  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  formule. Pentru  $n \geq 3$ , notăm

$$\begin{aligned}\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n &:= ((\dots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n \\ \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n &:= ((\dots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.\end{aligned}$$

- ▶  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$  se mai scrie și  $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$  sau  $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ .
- ▶  $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$  se mai scrie și  $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$  sau  $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ .

## Conjuncții și disjuncții finite

### Propoziția 2.22

Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

- ▶  $e^1(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$  dacă  $e^1(\varphi_i) = 1$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- ▶  $e^1(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$  dacă  $e^1(\varphi_i) = 1$  pentru un  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Dem.: Exercițiu.

### Propoziția 2.23

$$\begin{aligned}\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n \\ \neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

## Mulțimi de formule

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.

### Definiția 2.24

- ▶ O evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este model al lui  $\Gamma$  dacă este model al fiecărei formule din  $\Gamma$  (adică  $e \models \gamma$  pentru orice  $\gamma \in \Gamma$ ).
- ▶ Notație:  $e \models \Gamma$ .
- ▶  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă are un model.
- ▶  $\Gamma$  este finit satisfiabilă dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- ▶ Dacă  $\Gamma$  nu este satisfiabilă, spunem și că  $\Gamma$  este nesatisfiabilă sau contradictorie.

Notații: Mulțimea tuturor modelelor lui  $\Gamma$  se notează  $Mod(\Gamma)$ .

Notăm  $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  în loc de  $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ .

- ▶  $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$ .

## Proprietăți

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

### Observație

- ▶  $\psi \models \varphi$  dacă  $\{\psi\} \models \varphi$  dacă  $\{\psi\} \models \{\varphi\}$ .
- ▶  $\psi \sim \varphi$  dacă  $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$ .

### Propoziția 2.27

- ▶  $Mod(\emptyset) = Fun(V, \{0, 1\})$ , adică orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- ▶  $Cn(\emptyset)$  este mulțimea tuturor tautologiilor, adică  $\varphi$  este tautologie dacă  $\emptyset \models \varphi$ .

Dem.: Exercițiu ușor.

## Mulțimi de formule

Fie  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule.

### Definiția 2.25

O formulă  $\varphi$  este consecință semantică a lui  $\Gamma$  dacă  $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ . Notație:  $\Gamma \models \varphi$ .

Dacă  $\varphi$  nu este consecință semantică a lui  $\Gamma$ , scriem  $\Gamma \not\models \varphi$ .

Notăm cu  $Cn(\Gamma)$  mulțimea consecințelor semantice ale lui  $\Gamma$ . Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

### Definiția 2.26

- ▶  $\Delta$  este consecință semantică a lui  $\Gamma$  dacă  $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$ .
- ▶ Notație:  $\Gamma \models \Delta$ .

- ▶  $\Gamma$  și  $\Delta$  sunt (logic) echivalente dacă  $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$ .
- ▶ Notație:  $\Gamma \sim \Delta$ .

## Proprietăți

### Propoziția 2.28

Fie  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$ .

- (i) Dacă  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ , atunci  $\Gamma \models \psi$ .
- (ii)  $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$  dacă  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .
- (iii)  $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$  dacă  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \psi$ .

Dem.: Exercițiu.

### Propoziția 2.29

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $\Gamma$  este nesatisfiabilă.
- (ii)  $\Gamma \models \varphi$  pentru orice formulă  $\varphi$ .
- (iii)  $\Gamma \models \varphi$  pentru orice formulă nesatisfiabilă  $\varphi$ .
- (iv)  $\Gamma \models \perp$ .

Dem.: Exercițiu ușor.

## Proprietăți

### Propoziția 2.30

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.

- (i)  $\Gamma \models \varphi$  dacă  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este nesatisfiabilă.
- (ii)  $\Gamma \models \neg\varphi$  dacă  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă  $\Gamma$  este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  și  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Avem că  $\Gamma \not\models \varphi \iff$  există o evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.i.  $e \models \Gamma$  și  $e \not\models \varphi \iff$  există o evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.i.  $e \models \Gamma$  și  $e \models \neg\varphi \iff$  există o evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.i.  $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie  $e$  un model al lui  $\Gamma$ . Dacă  $e \models \varphi$ , atunci  $e$  este model al lui  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Dacă  $e \not\models \varphi$ , deci  $e \models \neg\varphi$ , atunci  $e$  este model al lui  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . □

## Proprietăți

Fie  $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o mulțime finită de formule.

- (i)  $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ .
- (ii)  $\Gamma \models \psi$  dacă  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ .
- (iii)  $\Gamma$  este nesatisfiabilă dacă  $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$  este tautologie.
- (iv) Dacă  $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$  este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
  - (a)  $\Gamma \sim \Delta$ .
  - (b)  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$ .

Dem.: Exercițiu.

## Teorema de compactitate

### Teorema de compactitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime  $\Gamma$  de formule,  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă  $\Gamma$  este finit satisfiabilă.

### Teorema de compactitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime  $\Gamma$  de formule,  $\Gamma$  este nesatisfiabilă dacă  $\Gamma$  nu este finit satisfiabilă.

### Teorema de compactitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime  $\Gamma$  de formule și pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $\Gamma \models \varphi$  dacă există o submulțime finită  $\Delta$  a lui  $\Gamma$  a.î.  $\Delta \models \varphi$ .

### Propoziția 2.32

Cele trei versiuni sunt echivalente.

**Dem.:** Exercițiu.

## Teorema de compactitate

### Lema 2.33

Fie  $\Gamma$  finit satisfiabilă. Atunci există un sir  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  în  $\{0, 1\}$  care satisfac, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ :

**P<sub>n</sub>** Orice submulțime finită  $\Delta$  a lui  $\Gamma$  are un model  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  cu proprietatea că  $e(v_i) = \varepsilon_i$  pentru orice  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Dem.:** Exercițiu suplimentar.

### Teorema 2.34 (Teorema de compactitate)

Pentru orice mulțime  $\Gamma$  de formule,  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă  $\Gamma$  este finit satisfiabilă.

**Dem.:** " $\Leftarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este finit satisfiabilă. Definim

$$\bar{e} : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad \bar{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde  $(\varepsilon_n)$  este sirul construit în Lema 2.33. Demonstrăm că  $\bar{e}$  este model al lui  $\Gamma$ . Fie  $\varphi \in \Gamma$  arbitrar și fie  $k \in \mathbb{N}$  a.î.

$\text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Avem că  $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$  este o submulțime finită a lui  $\Gamma$ .

## Teorema de compactitate

### Teorema 2.34 (Teorema de compactitate)

Pentru orice mulțime  $\Gamma$  de formule,  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă  $\Gamma$  este finit satisfiabilă.

**Dem.:** (continuare)

Aplicând proprietatea **P<sub>k</sub>**, obținem un model  $e$  al lui  $\varphi$  a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Atunci  $\bar{e}(v) = e(v)$  pentru orice variabilă  $v \in \text{Var}(\varphi)$ . Din Propoziția 2.13 rezultă că  $\bar{e}^\dagger(\varphi) = e^\dagger(\varphi) = 1$ , deci  $\bar{e} \models \varphi$ .

Prin urmare,  $\bar{e}$  este model al lui  $\Gamma$ , deci  $\Gamma$  este satisfiabilă.

" $\Rightarrow$ " Evident.  $\square$

## FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

## Forma normală conjunctivă / disjunctivă

### Definiția 2.35

Un literal este o

- ▶ variabilă (în care caz spunem că este **literal pozitiv**) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este **literal negativ**).

Exemplu:  $v_1, v_2, v_{10}$  literali pozitivi;  $\neg v_0, \neg v_{100}$  literali negativi

Convenție:  $\bigvee_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$  și  $\bigwedge_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$ .

### Definiția 2.36

O formulă  $\varphi$  este în **formă normală disjunctivă (FND)** dacă  $\varphi$  este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar,  $\varphi$  este în FND dacă  $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$ , unde fiecare  $L_{i,j}$  este literal.

## Forma normală conjunctivă / disjunctivă

### Definiția 2.37

O formulă  $\varphi$  este în **formă normală conjunctivă (FNC)** dacă  $\varphi$  este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar,  $\varphi$  este în FNC dacă  $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$ , unde fiecare  $L_{i,j}$  este literal.

### Exemplu

- ▶  $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$  este în FNC
- ▶  $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$  este în FND
- ▶  $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$  este atât în FND cât și în FNC
- ▶  $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$  este atât în FND cât și în FNC
- ▶  $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$  nu este nici în FND, nici în FNC

## Forma normală conjunctivă / disjunctivă

**Notatie:** Dacă  $L$  este literal, atunci  $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

### Propoziția 2.38

(i) Fie  $\varphi$  o formulă în FNC,  $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$ . Atunci  $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$ , o formulă în FND.

(ii) Fie  $\varphi$  o formulă în FND,  $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$ . Atunci  $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$ , o formulă în FNC.

**Dem.:** Exercițiu.

## Funcția asociată unei formule

**Exemplu:** Arătați că  $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$ .

$v_1$	$v_2$	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție  $F : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### Funcția asociată unei formule

Fie  $\varphi$  o formulă și  $Var(\varphi) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , unde  $n \geq 1$  și  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ .

Fie  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ . Definim  $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : Var(\varphi) \rightarrow \{0,1\}$  astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(v_i) = \varepsilon_k \text{ pentru orice } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Definim  $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \in \{0,1\}$  astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde  $e : V \rightarrow \{0,1\}$  este orice evaluare care extinde  $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ , adică,  $e(v_k) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(v_k) = \varepsilon_k$  pentru orice  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Conform Propoziției 2.13, definiția nu este ambiguă.

#### Definiția 2.39

Funcția asociată lui  $\varphi$  este  $F_\varphi : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ , definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Așadar,  $F_\varphi$  este funcția definită de tabela de adevăr pentru  $\varphi$ .

### Caracterizarea funcțiilor booleene

#### Definiția 2.41

O **funcție booleană** este o funcție  $F : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ , unde  $n \geq 1$ . Spunem că  $n$  este **numărul variabilelor** lui  $F$ .

**Exemplu:** Pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $F_\varphi$  este funcție Booleană cu  $n$  variabile, unde  $n = |Var(\varphi)|$ .

#### Teorema 2.42

Fie  $n \geq 1$  și  $H : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă  $\varphi$  în FND a.i.  $H = F_\varphi$ .

**Dem.:** Dacă  $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$  pentru orice  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ , luăm  $\varphi := \bigvee_{i=1}^n (v_i \wedge \neg v_i)$ . Avem că  $Var(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , așadar,  $F_\varphi : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ . Cum  $v_i \wedge \neg v_i$  este nesatisfiabilă pentru orice  $i$ , rezultă că  $\varphi$  este de asemenea nesatisfiabilă. Deci,  $F_\varphi$  este funcția constantă 0.

### Caracterizarea funcțiilor booleene

#### Teorema 2.43

Fie  $n \geq 1$  și  $H : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă  $\psi$  în FNC a.i.  $H = F_\psi$ .

**Dem.:** Dacă  $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$  pentru orice  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ , atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^n (v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

$$\text{Considerăm formula } \psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} \left( \bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right).$$

Se demonstrează că  $H = F_\psi$  (exercițiu suplimentar).  $\square$

### Forma normală conjunctivă / disjunctivă

#### Teorema 2.44

Orice formulă  $\varphi$  este echivalentă cu o formulă  $\varphi^{FND}$  în FND și cu o formulă  $\varphi^{FNC}$  în FNC.

**Dem.:**

Fie  $Var(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$  și  $F_\varphi : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 2.42 cu  $H := F_\varphi$ , obținem o formulă  $\varphi^{FND}$  în FND a.i.  $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$ . Așadar, conform Propoziției 2.40.(ii),  $\varphi \sim \varphi^{FND}$ .

Similar, aplicând Teorema 2.43 cu  $H := F_\varphi$ , obținem o formulă  $\varphi^{FNC}$  în FNC a.i.  $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$ . Prin urmare,  $\varphi \sim \varphi^{FNC}$ .  $\square$

### Funcția asociată unei formule

#### Propoziția 2.40

(i) Fie  $\varphi$  o formulă. Atunci

(a)  $\models \varphi$  dacă  $F_\varphi$  este funcția constantă 1.

(b)  $\varphi$  este nesatisfiabilă dacă  $F_\varphi$  este funcția constantă 0.

(ii) Fie  $\varphi, \psi$  două formule astfel încât  $Var(\varphi) = Var(\psi)$ . Atunci

(a)  $\varphi \models \psi$  dacă  $F_\varphi \leq F_\psi$ .

(b)  $\varphi \sim \psi$  dacă  $F_\varphi = F_\psi$ .

(iii) Există formule diferite  $\varphi, \psi$  a.i.  $F_\varphi = F_\psi$ .

### Caracterizarea funcțiilor booleene

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.

Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} \left( \bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece  $Var(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , avem că  $F_\varphi : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ .

Se demonstrează că  $H = F_\varphi$  (exercițiu suplimentar).  $\square$

### Caracterizarea funcțiilor Booleene

**Exemplu:** Fie  $H : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$  descrisă prin tabelul:

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$$

$$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$$

$$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$$

$$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$$

$$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$$

$$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$$

$$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$$

$$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

$$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5 \text{ în FND a.i. } H = F_\varphi.$$

$$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \text{ în FNC a.i. } H = F_\psi.$$

### Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

**Pasul 1.** Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi).$$

**Pasul 2.** Se înlocuiesc dubile negații, folosind  $\neg \neg \psi \sim \psi$ , și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg \varphi \wedge \neg \psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg \varphi \vee \neg \psi.$$

**Pasul 3.** Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui  $\vee$  față de  $\wedge$ , pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui  $\wedge$  față de  $\vee$ , pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

## Forma normală conjunctivă / disjunctivă

### Exemplu

Considerăm formula  $\varphi := (\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \rightarrow (v_0 \rightarrow v_2)$ .

Aveam

$$\begin{aligned} \varphi &\sim \neg(\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) & \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) & \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 & \text{Pasul 2} \end{aligned}$$

Putem lua  $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$ .

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2). \end{aligned}$$

Putem lua  $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$ . Se observă, folosind idempotența și comutativitatea lui  $\vee$ , că  $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$ .

## CLAUZE ȘI REZOLUȚIE

## Clauze

### Definiția 2.45

O clauză este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \dots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \dots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă  $n = 0$ , obținem clauza vidă  $\square := \emptyset$ .

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

### Definiția 2.46

Fie  $C$  o clauză și  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Spunem că  $e$  este model al lui  $C$  sau că  $e$  satisfacă  $C$  și scriem  $e \models C$  dacă există  $L \in C$  a.t.  $e \models L$ .

### Definiția 2.47

O clauză  $C$  se numește

(i) **satisfiabilă** dacă are un model.

(ii) **validă** dacă orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este model al lui  $C$ .

## Clauze

### Definiția 2.48

O clauză  $C$  este **trivială** dacă există un literal  $L$  a.t.  $L \in C$  și  $L^c \in C$ .

### Propoziția 2.49

(i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.

(ii) Clauza vidă  $\square$  este nesatisfiabilă.

(iii) O clauză este validă dacă este trivială.

**Dem.:** Exercițiu.

Notăm  $\text{Var}(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}$ .

Dacă  $x \in \text{Var}(C)$ , spunem că  $x$  apare în  $C$ .

►  $\text{Var}(C) = \emptyset$  ddacă  $C = \square$ .

## Clauze

$S = \{C_1, \dots, C_m\}$  este o mulțime finită de clauze.

Dacă  $m = 0$ , obținem mulțimea vidă de clauze  $\emptyset$ .

$S$  este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

### Definiția 2.50

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Spunem că  $e$  este model al lui  $S$  sau că  $e$  satisfacă  $S$  și scriem  $e \models S$  dacă  $e \models C_i$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

### Definiția 2.51

$S$  se numește

(i) **satisfiabilă** dacă are un model.

(ii) **validă** dacă orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este model al lui  $S$ .

### Propoziția 2.52

► Dacă  $S$  conține clauza vidă  $\square$ , atunci  $S$  este nesatisfiabilă.

►  $\emptyset$  este validă.

**Dem.:** Exercițiu.

Notăm  $\text{Var}(S) := \bigcup_{C \in S} \text{Var}(C)$ .

Dacă  $x \in \text{Var}(S)$ , spunem că  $x$  apare în  $S$ .

►  $\text{Var}(S) = \emptyset$  ddacă ( $S = \emptyset$  sau  $S = \{\square\}$ ).

## Clauze

### Exemplu

$S = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$  este satisfiabilă.

**Dem.:** Considerăm  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.t.  $e(v_1) = e(v_2) = 1$ . Atunci  $e \models S$ .  $\square$

### Exemplu

$S = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$  este nesatisfiabilă.

**Dem.:** Presupunem că  $S$  are un model  $e$ . Atunci  $e(v_1) = e(v_3) = 1$  și, deoarece  $e \models \{\neg v_3, \neg v_2\}$ , trebuie să avem  $e(v_2) = 0$ . Rezultă că  $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$ , deci  $e$  nu satisfacă  $\{\neg v_1, v_2\}$ . Am obținut o contradicție.  $\square$

## Clauze și FNC

Unei formule  $\varphi$  în FNC îi asociem o mulțime finită de clauze  $S_\varphi$  astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

unde fiecare  $L_{i,j}$  este literal. Pentru orice  $i$ , fie  $C_i$  clauza obținută considerând toți literalii  $L_{i,j}, j \in \{1, \dots, k_i\}$  distincți. Fie  $S_\varphi$  mulțimea tuturor clauzelor  $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$  distințe.

$S_\varphi$  se mai numește și **forma clauzală** a lui  $\varphi$ .

### Propoziția 2.53

Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $e \models \varphi$  ddacă  $e \models S_\varphi$ .

## Cluze și FNC

Unei mulțimi finite de cluze  $\mathcal{S}$  îi asociem o formulă  $\varphi_{\mathcal{S}}$  în FNC astfel:

- $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ ,  $n \geq 1 \mapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ .
- $\square \mapsto \varphi_{\square} := v_0 \wedge \neg v_0$ .

Fie  $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$  o mulțime nevidă de cluze. Formula asociată lui  $\mathcal{S}$  este

$$\varphi_{\mathcal{S}} := \bigwedge_{i=1}^m \varphi_{C_i}.$$

Formula asociată mulțimii vide de cluze este  $\varphi_{\emptyset} := v_0 \vee \neg v_0$ . Formula  $\varphi_{\mathcal{S}}$  nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în cluze și în  $\mathcal{S}$ , dar se observă imediat că:  $\mathcal{S}'$  implică  $\varphi_{\mathcal{S}} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}$ .

### Propoziția 2.54

Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $e \models \mathcal{S}$  dacă și numai dacă  $e \models \varphi_{\mathcal{S}}$ .

## Rezoluția

### Definiția 2.55

Fie  $C_1, C_2$  două cluze. O cluză  $R$  se numește rezolvent al cluzelor  $C_1, C_2$  dacă există un literal  $L$  a.î.  $L \in C_1, L^c \in C_2$  și

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

### Regula Rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu  $\text{Res}(C_1, C_2)$  mulțimea rezolvenților cluzelor  $C_1, C_2$ .

- Rezoluția a fost introdusă de **Blake** (1937) și dezvoltată de **Davis, Putnam** (1960) și **Robinson** (1965).
- Multe demonstrații automate de teoreme folosesc rezoluția. Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluție.

## Rezoluția

### Exemplu

$C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}$ ,  $C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}$ .

- Luăm  $L := \neg v_5$ . Atunci  $L \in C_1$  și  $L^c = v_5 \in C_2$ . Prin urmare,  $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$  este rezolvent al cluzelor  $C_1, C_2$ .
- Dacă luăm  $L' := v_2$ , atunci  $L' \in C_1$  și  $L'^c = \neg v_2 \in C_2$ . Prin urmare,  $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$  este rezolvent al cluzelor  $C_1, C_2$ .

### Exemplu

$C_1 = \{v_7\}$ ,  $C_2 = \{\neg v_7\}$ . Atunci cluză vidă  $\square$  este rezolvent al cluzelor  $C_1, C_2$ .

## Rezoluția

Fie  $\mathcal{S}$  o mulțime finită de cluze.

### Definiția 2.56

O derivare prin rezoluție din  $\mathcal{S}$  sau o  $\mathcal{S}$ -derivare prin rezoluție este o secvență  $C_1, C_2, \dots, C_n$  de cluze a.î. pentru fiecare  $i \in \{1, \dots, n\}$ , una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i)  $C_i$  este o cluză din  $\mathcal{S}$ ;
- (ii) există  $j, k < i$  a.î.  $C_i$  este rezolvent al cluzelor  $C_j, C_k$ .

### Definiția 2.57

Fie  $C$  o cluză. O derivare prin rezoluție a lui  $C$  din  $\mathcal{S}$  este o  $\mathcal{S}$ -derivare prin rezoluție  $C_1, C_2, \dots, C_n$  a.î.  $C_n = C$ .

## Rezoluția

### Exemplu

Fie  $\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}$ .

O derivare prin rezoluție a cluzei vide  $\square$  din  $\mathcal{S}$  este următoarea:

$C_1 = \{\neg v_4\}$	$C_1 \in \mathcal{S}$
$C_2 = \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}$	$C_2 \in \mathcal{S}$
$C_3 = \{\neg v_2, \neg v_3\}$	$C_3$ rezolvent al cluzelor $C_1, C_2$
$C_4 = \{v_3\}$	$C_4 \in \mathcal{S}$
$C_5 = \{\neg v_2\}$	$C_5$ rezolvent al cluzelor $C_3, C_4$
$C_6 = \{\neg v_1, v_2\}$	$C_6 \in \mathcal{S}$
$C_7 = \{\neg v_1\}$	$C_7$ rezolvent al cluzelor $C_5, C_6$
$C_8 = \{v_1\}$	$C_8 \in \mathcal{S}$
$C_9 = \square$	$C_9$ rezolvent al cluzelor $C_7, C_8$ .

## Rezoluția

Notăm  $\text{Res}(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} \text{Res}(C_1, C_2)$ .

### Propoziția 2.58

Pentru orice orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $e \models \mathcal{S} \Rightarrow e \models \text{Res}(\mathcal{S})$ .

Dem.: Dacă  $\text{Res}(\mathcal{S}) = \emptyset$ , atunci este validă, deci  $e \models \text{Res}(\mathcal{S})$ . Presupunem că  $\text{Res}(\mathcal{S})$  este nevidă și fie  $R \in \text{Res}(\mathcal{S})$ . Atunci există cluze  $C_1, C_2 \in \mathcal{S}$  și un literal  $L$  a.î.  $L \in C_1, L^c \in C_2$  și  $R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$ . Avem două cazuri:

- $e \models L$ . Atunci  $e \not\models L^c$ . Deoarece  $e \models C_2$ , există  $U \in C_2$ ,  $U \neq L^c$  a.î.  $e \models U$ . Deoarece  $U \in R$ , obținem că  $e \models R$ .
- $e \not\models L$ . Deoarece  $e \models C_1$ , există  $U \in C_1$ ,  $U \neq L$  a.î.  $e \models U$ . Deoarece  $U \in R$ , obținem că  $e \models R$ .  $\square$

## Rezoluția

### Teorema 2.59 (Teorema de corectitudine a rezoluției)

Dacă  $\square$  se derivează prin rezoluție din  $\mathcal{S}$ , atunci  $\mathcal{S}$  este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie  $C_1, C_2, \dots, C_n = \square$  o  $\mathcal{S}$ -derivare prin rezoluție a lui  $\square$ . Presupunem că  $\mathcal{S}$  este satisfiabilă și fie  $e \models \mathcal{S}$ .

Demonstrăm prin inducție după  $i$  că:

pentru orice  $1 \leq i \leq n$ ,  $e \models C_i$ .

Pentru  $i = n$ , obținem că  $e \models \square$ , ceea ce este o contradicție.

Cazul  $i = 1$  este evident, deoarece  $C_1 \in \mathcal{S}$ .

Presupunem că  $e \models C_j$  pentru orice  $j < i$ . Avem două cazuri:

- $C_i \in \mathcal{S}$ . Atunci  $e \models C_i$ .
- există  $j, k < i$  a.î.  $C_i \in \text{Res}(C_j, C_k)$ . Deoarece, conform ipotezei de inducție,  $e \models \{C_j, C_k\}$  aplicăm Propoziția 2.58 pentru a conduce că  $e \models C_i$ .

## Algoritmul Davis-Putnam (DP)

Intrare:  $\mathcal{S}$  mulțime finită nevidă de cluze nestriviale.  $i := 1$ ,  $S_1 := \mathcal{S}$ .

Pi.1 Fie  $x_i$  o variabilă care apare în  $S_i$ . Definim

$$T_i^1 := \{C \in S_i \mid x_i \in C\}, \quad T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 if  $(T_i^1 \neq \emptyset \wedge T_i^0 \neq \emptyset)$  then

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in T_i^1, C_0 \in T_i^0\}.$$

else  $\mathcal{U}_i := \emptyset$ .

Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} S_{i+1}' &:= (S_i \setminus (T_i^0 \cup T_i^1)) \cup \mathcal{U}_i; \\ S_{i+1} &:= S_{i+1}' \setminus \{C \in S_{i+1}' \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 if  $S_{i+1} = \emptyset$  then  $\mathcal{S}$  este satisfiabilă.

else if  $\square \in S_{i+1}$  then  $\mathcal{S}$  este nesatisfiabilă.

else  $i := i + 1$ ; go to Pi.1.

## Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ .  $i := 1$ ,  $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$ .

- P1.1  $x_1 := v_3$ ;  $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ ;  $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$ .
- P1.2  $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$ .
- P1.3  $\mathcal{S}'_2 := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$ ;  $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$ .
- P1.4  $i := 2$  and go to P2.1.
- P2.1  $x_2 := v_2$ ;  $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$ ;  $\mathcal{T}_2^0 := \{\}$ .
- P2.2  $\mathcal{U}_2 := \emptyset$ .
- P2.3  $\mathcal{S}_3 := \emptyset$ .
- P2.4  $\mathcal{S}$  este satisfiabilă.

## Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ .  
 $i := 1$ ,  $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$ .

- P1.1  $x_1 := v_1$ ;  $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$ ;  $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$ .
- P1.2  $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$ .
- P1.3  $\mathcal{S}_2 := \{\{v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$ .
- P1.4  $i := 2$  and go to P2.1.
- P2.1.  $x_2 := v_2$ ;  $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$ ;  $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$ .
- P2.2.  $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$ .
- P2.3.  $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$ .
- P2.4.  $i := 3$  and go to P3.1.
- P3.1.  $x_3 := v_3$ ;  $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$ ;  $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$ .
- P3.2.  $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$ .
- P3.3.  $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$ .
- P3.4.  $i := 4$  and go to P4.1.
- P4.1.  $x_4 := v_4$ ;  $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$ ;  $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$ .
- P4.2.  $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$ .
- P4.3.  $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$ .
- P4.4.  $\mathcal{S}$  nu este satisfiabilă.

## Algoritmul DP - terminare

### Propoziția 2.60

Fie  $n := |\text{Var}(\mathcal{S})|$ . Atunci algoritmul DP se termină după cel mult  $n$  pași.

**Dem.:** Se observă imediat că pentru orice  $i$ ,

$$\text{Var}(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq \text{Var}(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subseteq \text{Var}(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare,  $n = |\text{Var}(\mathcal{S}_1)| > |\text{Var}(\mathcal{S}_2)| > |\text{Var}(\mathcal{S}_3)| > \dots \geq 0$ .  $\square$

Fie  $N \leq n$  numărul de pași după care se termină DP. Atunci  $\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$  sau  $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$ .

## Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

### Propoziția 2.61

Pentru orice  $i \leq N$ ,

$$\mathcal{S}_{i+1} \text{ este satisfiabilă} \iff \mathcal{S}_i \text{ este satisfiabilă.}$$

**Dem.:** Exercițiu suplimentar.

### Teorema 2.62

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$\mathcal{S}$  este nesatisfiabilă dacă  $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$ .

**Dem.:** Aplicăm Propoziția 2.61. Obținem că  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  este nesatisfiabilă dacă  $\mathcal{S}_{N+1}$  este nesatisfiabilă dacă  $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$ .  $\square$

## SINTAXA LP

## Sistemul deductiv

Folosim un **sistem deductiv** de tip Hilbert pentru LP.

### Axiomele logice

Mulțimea **Axm** a **axiomelor** lui LP constă din toate formulele de forma:

- (A1)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (A3)  $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ , unde  $\varphi, \psi$  și  $\chi$  sunt formule.

### Regula de deducție

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

din  $\varphi$  și  $\varphi \rightarrow \psi$  se inferă  $\psi$  (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}.$$

## $\Gamma$ -teoreme

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule. Definiția  $\Gamma$ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

### Definiția 2.63

**$\Gamma$ -teoremele** sunt formulele lui LP definite astfel:

- (T0) Orice axiomă este  $\Gamma$ -teoremă.
- (T1) Orice formulă din  $\Gamma$  este  $\Gamma$ -teoremă.
- (T2) Dacă  $\varphi$  și  $\varphi \rightarrow \psi$  sunt  $\Gamma$ -teoreme, atunci  $\psi$  este  $\Gamma$ -teoremă.
- (T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt  $\Gamma$ -teoreme.

Dacă  $\varphi$  este  $\Gamma$ -teoremă, atunci spunem și că  $\varphi$  este dedusă din ipotezele  $\Gamma$ .

## $\Gamma$ -teoreme

### Notății

$\text{Thm}(\Gamma)$	:=	mulțimea $\Gamma$ -teoremelor	$\text{Thm}$	:=	$\text{Thm}(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$\Leftrightarrow$	$\varphi$ este $\Gamma$ -teoremă	$\vdash \varphi$	$\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$ .			

### Definiția 2.64

O formulă  $\varphi$  se numește **teoremă** a lui LP dacă  $\vdash \varphi$ .

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația  $\vdash$ , obținem

### Propoziția 2.65

- (i) dacă  $\varphi$  este axiomă, atunci  $\Gamma \vdash \varphi$ ;
- (ii) dacă  $\varphi \in \Gamma$ , atunci  $\Gamma \vdash \varphi$ ;
- (iii) dacă  $\Gamma \vdash \varphi$  și  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ , atunci  $\Gamma \vdash \psi$ .

## Γ-teoreme

Definiția Γ-teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ-teoreme.

### Versiunea 1

Fie  $P$  o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisfacă  $P$  astfel:

- (i) Demonstrăm că orice axiomă are proprietatea  $P$ .
- (ii) Demonstrăm că orice formulă din  $\Gamma$  are proprietatea  $P$ .
- (iii) Demonstrăm că dacă  $\varphi$  și  $\varphi \rightarrow \psi$  au proprietatea  $P$ , atunci  $\psi$  are proprietatea  $P$ .

### Versiunea 2

Fie  $\Sigma$  o mulțime de formule. Demonstrăm că  $\text{Thm}(\Gamma) \subseteq \Sigma$  astfel:

- (i) Demonstrăm că orice axiomă este în  $\Sigma$ .
- (ii) Demonstrăm că orice formulă din  $\Gamma$  este în  $\Sigma$ .
- (iii) Demonstrăm că dacă  $\varphi \in \Sigma$  și  $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ , atunci  $\psi \in \Sigma$ .

## Γ-teoreme

### Propoziția 2.66

Fie  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule.

- (i) Dacă  $\Gamma \subseteq \Delta$ , atunci  $\text{Thm}(\Gamma) \subseteq \text{Thm}(\Delta)$ , adică, pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\Gamma \vdash \varphi$  implică  $\Delta \vdash \varphi$ .

- (ii)  $\text{Thm} \subseteq \text{Thm}(\Gamma)$ , adică, pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\vdash \varphi$  implică  $\Gamma \vdash \varphi$ .

- (iii) Dacă  $\Gamma \vdash \Delta$ , atunci  $\text{Thm}(\Delta) \subseteq \text{Thm}(\Gamma)$ , adică, pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\Delta \vdash \varphi$  implică  $\Gamma \vdash \varphi$ .

- (iv)  $\text{Thm}(\text{Thm}(\Gamma)) = \text{Thm}(\Gamma)$ , adică, pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\text{Thm}(\Gamma) \vdash \varphi$  ddacă  $\Gamma \vdash \varphi$ .

Dem.: Exercițiu ușor.

## Γ-demonstrații

### Definiția 2.67

O  $\Gamma$ -demonstrație (demonstrație din ipotezele  $\Gamma$ ) este o secvență de formule  $\theta_1, \dots, \theta_n$  a.î. pentru fiecare  $i \in \{1, \dots, n\}$ , una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i)  $\theta_i$  este axiomă;
- (ii)  $\theta_i \in \Gamma$ ;
- (iii) există  $k, j < i$  a.î.  $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$ .

O  $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu demonstrație.

### Lema 2.68

Dacă  $\theta_1, \dots, \theta_n$  este o  $\Gamma$ -demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

## Proprietăți sintactice

### Propoziția 2.71

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formulă  $\varphi$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ddacă există o submulțime finită } \Sigma \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Sigma \vdash \varphi.$$

Dem.: " $\Leftarrow$ " Fie  $\Sigma \subseteq \Gamma$ ,  $\Sigma$  finită a.î.  $\Sigma \vdash \varphi$ . Aplicând Propoziția 2.66.(i) obținem că  $\Gamma \vdash \varphi$ .

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma \vdash \varphi$ . Conform Propoziției 2.70,  $\varphi$  are o  $\Gamma$ -demonstrație  $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ . Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci  $\Sigma$  este finită,  $\Sigma \subseteq \Gamma$  și  $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$  este o  $\Sigma$ -demonstrație a lui  $\varphi$ , deci  $\Sigma \vdash \varphi$ .  $\square$

## $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

### Propoziția 2.72

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ .

Dem.:

- (1)  $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$   
(A2) (cu  $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$ ,  $\chi := \varphi$ ) și Propoziția 2.65.(i)
- (2)  $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$   
(A1) (cu  $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$ ) și Propoziția 2.65.(i)
- (3)  $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$   
(1), (2) și Propoziția 2.65.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4)  $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$   
(A1) (cu  $\varphi, \psi := \varphi$ ) și Propoziția 2.65.(i)
- (5)  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$   
(MP): (3), (4)  $\square$

## Teorema deducției

### Teorema 2.73 (Teorema deducției)

Fie  $\Gamma \subseteq \text{Form}$  și  $\varphi, \psi \in \text{Form}$ . Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

## Câteva consecințe

### Propoziția 2.74

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} &\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ &\quad \Downarrow \\ &\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ &\quad \Downarrow \\ &\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ &\quad \Downarrow \\ &\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

## Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- (1)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$  Propoziția 2.65.(ii)
- (2)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$  Propoziția 2.65.(ii)
- (3)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$  (MP): (1), (2)
- (4)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$  Propoziția 2.65.(ii)
- (5)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$  (MP): (3), (4).  $\square$

## Câteva consecințe

### Propoziția 2.75

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi.$$

**Dem.:**

- (1)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  ipoteză
- (2)  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$  P.2.74 și P.2.66.(ii)
- (3)  $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$  (MP): (1), (2)
- (4)  $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$  ipoteză
- (5)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$  (MP): (3), (4).  $\square$

## Câteva consecințe

### Propoziția 2.76

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \quad (36)$$

**Dem.:** Exercițiu.

### Propoziția 2.77

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

**Dem.:** Exercițiu.

## Câteva consecințe

### Propoziția 2.78

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$  (37)
- $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$  (38)
- $\vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$  (39)
- $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$  (40)
- $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$  (41)
- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  (42)
- $\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$  (43)
- $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$  (44)
- $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$  (45)

**Dem.:** Exercițiu.

## Câteva consecințe

### Propoziția 2.79

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

**Dem.:**

- (1)  $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$  ipoteză
- (2)  $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$  Teorema deducției
- (3)  $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$  ipoteză
- (4)  $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$  Teorema deducției
- (5)  $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$  (42) și P.2.66.(ii)
- (6)  $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$  (MP): (2), (5)
- (7)  $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$  (6), (4) și P.2.75
- (8)  $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$  (45) și P.2.66.(ii)
- (9)  $\Gamma \vdash \varphi$  (MP): (7), (8).

## Câteva consecințe

### Propoziția 2.80

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$  (46)
- $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$  (47)
- $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$  (48)
- $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$  ddacă  $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$  (49)
- $\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$  (50)

**Dem.:** Exercițiu.

## SINTAXA și SEMANTICA

## Corectitudine

### Teorema 2.81 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice  $\Gamma$ -teoremă este consecință semantică a lui  $\Gamma$ , adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

pentru orice  $\varphi \in \text{Form}$  și  $\Gamma \subseteq \text{Form}$ .

**Dem.:** Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Trebuie să demonstreăm că  $\text{Thm}(\Gamma) \subseteq \Sigma$ . O facem prin inducție după  $\Gamma$ -teoreme.

- Axiomele sunt în  $\Sigma$  (exercițiu).
- Evident,  $\Gamma \subseteq \Sigma$ .
- Demonstrează acum că  $\Sigma$  este închisă la modus ponens.  
Presupunem că  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ , adică,  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .  
Conform Propoziției 2.28.(i), obținem că  $\Gamma \models \psi$ , adică,  
 $\psi \in \Sigma$ .  $\square$

## Sintaxă și semantică

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare și  $v \in V$  o variabilă.

Definim

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar,  $e^+(v^e) = 1$ .

Pentru orice mulțime  $W = \{x_1, \dots, x_k\}$  de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}.$$

Pentru orice  $a \in \{0, 1\}$ , definim evaluarea  $e_{v \mapsto a} : V \rightarrow \{0, 1\}$  prin

$$e_{v \mapsto a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

## Sintaxă și semantică

### Propoziția 2.82

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare. Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

- (i) Dacă  $e^+(\varphi) = 1$ , atunci  $\text{Var}(\varphi)^e = \varphi$ .
- (ii) Dacă  $e^+(\varphi) = 0$ , atunci  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$ .

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$ . Atunci  $\text{Var}(\varphi)^e = \{v^e\}$  și  $e^+(v) = e(v)$ .  
Dacă  $e(v) = 1$ , atunci  $v^e = v$ , deci,  $\{v^e\} \vdash v$ .  
Dacă  $e(v) = 0$ , atunci  $v^e = \neg v$ , deci,  $\{v^e\} \vdash \neg v$ .
- $\varphi = \neg\psi$ . Atunci  $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$ , deci  $\text{Var}(\varphi)^e = \text{Var}(\psi)^e$ .  
Dacă  $e^+(\varphi) = 1$ , atunci  $e^+(\psi) = 0$ , deci, conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$ ,  $\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi$ , adică,  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$ .  
Dacă  $e^+(\varphi) = 0$ , atunci  $e^+(\psi) = 1$ , deci, conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$ ,  $\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi$ , adică,  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi$ .  
Deoarece  $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$  ((41) din Propoziția 2.78), putem aplica (MP) pentru a obține  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$ .

## Sintaxă și semantică

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ . Atunci  $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi) \cup \text{Var}(\chi)$ , deci  $\text{Var}(\psi)^e, \text{Var}(\chi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$ .  
Dacă  $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$ , atunci  $e^+(\psi) = 1$  și  $e^+(\chi) = 0$ . Avem
  - $\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi$  ipoteza de inducție pentru  $\psi$
  - $\text{Var}(\chi)^e \vdash \neg\chi$  ipoteza de inducție pentru  $\chi$
  - $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$   $\text{Var}(\psi)^e, \text{Var}(\chi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$  și P. 2.66.(i)
  - $\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$  (43) din Propoziția 2.78
  - $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$  Propoziția 2.66.(iv).

## Sintaxă și semantică

Dacă  $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$ , atunci  $e^+(\psi) = 0$  sau  $e^+(\chi) = 1$ .

În primul caz, obținem

- $\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi$  ipoteza de inducție pentru  $\psi$
  - $\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$  (38) din P. 2.78 și P. 2.66.(ii) În
  - $\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$  (MP)
  - $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$   $\text{Var}(\psi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$  și P. 2.66.(i).
- al doilea caz, obținem
- $\text{Var}(\chi)^e \vdash \chi$  ipoteza de inducție pentru  $\chi$
  - $\text{Var}(\chi)^e \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$  (A1) și Propoziția 2.65.(i)
  - $\text{Var}(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$  (MP)
  - $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$   $\text{Var}(\chi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$  și P. 2.66.(i). □

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui  $\varphi$  sau  $\neg\varphi$  din premizele  $\text{Var}(\varphi)^e$ .

## Teorema de completitudine

### Teorema 2.83 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

Dem.: " $\Rightarrow$ " Se aplică Teorema de corectitudine 2.81 pentru  $\Gamma = \emptyset$ . " $\Leftarrow$ " Fie  $\varphi$  o tautologie și  $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Demonstrăm prin inducție după  $k$  următoarea proprietate:

- (\*) pentru orice  $k \leq n$ , pentru orice  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi$ .

Pentru  $k = n$ , (\*) ne dă  $\vdash \varphi$ .

**$k = 0$ .** Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Deoarece  $\varphi$  este tautologie,  $e^+(\varphi) = 1$ . Aplicând Propoziția 2.82, obținem că

$$\text{Var}(\varphi)^e = \{x_1^e, \dots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

## Teorema de completitudine

**$k \Rightarrow k+1$ .** Presupunem că (\*) este adeverată pentru  $k$  și fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Trebuie să arătăm că  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$ . Considerăm evaluarea  $e' := e_{x_{n-k} \mapsto e(x_{n-k})}$ . Așadar,  $e'(v) = e(v)$  pentru orice  $v \neq x_{n-k}$  și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că  $x_i^{e'} = x_i^e$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n-k-1\}$  și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (\*) pentru  $e$  și  $e'$ , obținem

$$\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 2.79 cu  $\Gamma := \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\}$  și  $\psi := x_{n-k}$  pentru a conduce că  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$ . □

## Consecință utilă

### Propoziția 2.84

Fie  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ . Presupunem că  $\varphi \sim \psi$ . Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

- $\varphi \sim \psi \iff \vdash \varphi \rightarrow \psi$  și  $\vdash \psi \rightarrow \varphi$   
Propoziția 2.17
- $\iff \vdash \varphi \rightarrow \psi$  și  $\vdash \psi \rightarrow \varphi$   
Teorema de completitudine.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma \vdash \varphi$ . Deoarece  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ , rezultă din Propoziția 2.66.(ii) că  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Aplicăm acum (MP) pentru a obține că  $\Gamma \vdash \psi$ .

" $\Leftarrow$ " Similar. □

## Notări

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule și  $\varphi$  o formulă.

### Notări

- $\Gamma \not\models \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este  $\Gamma$ -teoremă
- $\not\models \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este teoremă
- $\Gamma \not\models \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este consecință semantică a lui  $\Gamma$
- $\not\models \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este tautologică.

## Mulțimi consistente

### Definiția 2.85

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.

- $\Gamma$  este **consistentă** dacă există o formulă  $\varphi$  astfel încât  $\Gamma \not\vdash \varphi$ .
- $\Gamma$  este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică,  $\Gamma \vdash \varphi$  pentru orice formulă  $\varphi$ .

### Observație

Fie  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule a.i.  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

- Dacă  $\Delta$  este consistentă, atunci și  $\Gamma$  este consistentă.
- Dacă  $\Gamma$  este inconsistentă, atunci și  $\Delta$  este inconsistentă.

## Mulțimi consistente

### Propoziția 2.86

- (i)  $\emptyset$  este consistentă.
- (ii) Mulțimea teorelor este consistentă.

Dem.::

(i) Dacă  $\vdash \perp$ , atunci, conform Teoremei de corectitudine 2.81, ar rezulta că  $\vdash \perp$ , o contradicție. Așadar  $\not\vdash \perp$ , deci  $\emptyset$  este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 2.66.(iv) pentru  $\Gamma = \emptyset$ , obținem că  $\text{Thm} = \text{Thm}(\text{Thm})$ , adică, pentru orice  $\varphi$ ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } \text{Thm} \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că  $\text{Thm}$  este consistentă.  $\square$

## Mulțimi consistente

### Propoziția 2.87

Pentru o mulțime de formule  $\Gamma$  sunt echivalente:

- (i)  $\Gamma$  este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .
- (iii) Există o formulă  $\psi$  a.i.  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .
- (iv)  $\Gamma \vdash \perp$ .

Dem.: (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) și (i)  $\Rightarrow$  (iv) sunt evidente.  
(iii)  $\Rightarrow$  (i) Fie  $\varphi$  o formulă. Conform (38) din Propoziția 2.78,

$$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că  $\Gamma \vdash \varphi$ .  
(iv)  $\Rightarrow$  (iii). Presupunem că  $\Gamma \vdash \perp$ . Avem că  $\perp = \neg T$ . Deoarece  $T$  este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conchide că  $\vdash T$ , deci și  $\Gamma \vdash T$ .  $\square$

## Mulțimi consistente

### Propoziția 2.88

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule și  $\varphi$  o formulă.

- (i)  $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este inconsistentă.
- (ii)  $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$  este inconsistentă.

Dem.::

(i) Avem

$$\begin{aligned} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp \\ &\iff \Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp \\ &\text{Teorema deducției} \\ &\iff \Gamma \vdash \varphi \\ &\text{Pentru} \quad \neg\varphi \rightarrow \perp \sim \varphi \text{ și P. 2.84.} \end{aligned}$$

(ii) Similar.  $\square$

## Mulțimi consistente

### Propoziția 2.89

Fie  $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o mulțime finită de formule.

- (i) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  ddacă  $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$  ddacă  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$ .
- (ii)  $\Gamma$  este consistentă ddacă  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este consistentă.

Dem.: Exercițiu.

## Mulțimi consistente

### Propoziția 2.90

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.  $\Gamma$  este inconsistentă ddacă  $\Gamma$  are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: " $\Leftarrow$ " este evidentă.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 2.87.(iv),  $\Gamma \vdash \perp$ . Aplicând Propoziția 2.71, obținem o submulțime finită  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  a lui  $\Gamma$  a.i.  $\Sigma \vdash \perp$ . Prin urmare,  $\Sigma$  este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

### Propoziția 2.91

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.  $\Gamma$  este consistentă ddacă orice submulțime finită a lui  $\Gamma$  este consistentă.

## Consecință a Teoremei de completitudine

### Teorema 2.92

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă} \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$\begin{aligned} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\text{Propoziția 2.88.(ii)} \\ &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\text{Teorema de completitudine} \\ &\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{Propoziția 2.30.(ii).} \end{aligned}$$

Așadar,  $\{\varphi\}$  este consistentă  $\iff \{\varphi\}$  este satisfiabilă.  $\square$

## Teorema de completitudine tare

### Teorema 2.93 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$ ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: " $\Leftarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este satisfiabilă, deci are un model  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Presupunem că  $\Gamma$  nu este consistentă. Atunci  $\Gamma \vdash \perp$  și, aplicând Teorema de corectitudine 2.81, rezultă că  $\Gamma \vdash \perp$ . Ca urmare,  $e \vdash \perp$ , ceea ce este o contradicție.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este consistentă. Demonstrăm că  $\Gamma$  este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compactitate 2.34 pentru a conchide că  $\Gamma$  este satisfiabilă.

Fie  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o submulțime finită a lui  $\Gamma$ . Atunci  $\Sigma$  este consistentă, conform Propoziției 2.91. Din Propoziția 2.89.(ii), rezultă că  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este consistentă. Aplicând acum Teorema 2.92 obținem că  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este satisfiabilă.

Deoarece, conform Propoziției 2.31.(i),  $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ , avem că  $\Sigma$  este satisfiabilă.  $\square$

### Teorema de completitudine tare

**Teorema 2.94 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)**  
Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formulă  $\varphi$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

**Dem.:**

- $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este inconsistentă  
Propoziția 2.88.(i)
- $\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este nesatisfiabilă  
Teorema de completitudine tare - versiunea 1
- $\iff \Gamma \vDash \varphi$   
Propoziția 2.30.(i).  $\square$

#### Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente ([exercițiu](#)).

## LOGICA DE ORDINUL ÎNTÂI

### Limbaje de ordinul întâi

#### Definiția 3.1

Un **limbaj  $\mathcal{L}$  de ordinul întâi** este format din:

- o mulțime numărabilă  $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de variabile;
- conectorii  $\neg$  și  $\rightarrow$ ;
- parantezele  $(\ )$ ;
- simbolul de egalitate  $=$ ;
- cuantificatorul universal  $\forall$ ;
- o mulțime  $\mathcal{R}$  de **simboluri de relații**;
- o mulțime  $\mathcal{F}$  de **simboluri de funcții**;
- o mulțime  $\mathcal{C}$  de **simboluri de constante**;
- o funcție **aritată**  $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$ .

$\mathcal{L}$  este unic determinat de cvadruplul  $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$ .  
 $\tau$  se numește **signature** lui  $\mathcal{L}$  sau **tipul de similaritate** al lui  $\mathcal{L}$

### Limbaje de ordinul întâi

#### Definiția 3.2

Mulțimea **Expr $\mathcal{L}$**  a **expresiilor** lui  $\mathcal{L}$  este mulțimea tuturor sirurilor finite de simboluri ale lui  $\mathcal{L}$ .

Expresia vidă se notează  $\lambda$ . O expresie nevidă este de forma  $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$ , unde  $k \geq 1$  și  $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$  pentru orice  $i = 0, \dots, k-1$ .

Fie  $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$  și  $\sigma = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{l-1}$  două expresii ale lui  $\mathcal{L}$ .  
 $\theta = \sigma$  dacă  $k = l$  și  $\theta_i = \sigma_i$  pentru orice  $i = 0, \dots, k-1$ .

#### Definiția 3.3

Fie  $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$  o expresie a lui  $\mathcal{L}$ . Spunem că o expresie  $\sigma$  apare în  $\theta$  dacă există  $0 \leq i \leq j \leq k-1$  a.î.  $\sigma = \theta_i \dots \theta_j$ . Notăm cu **Var( $\theta$ )** mulțimea variabilelor care apar în  $\theta$ .

### Termeni

#### Propoziția 3.6 (Inducția pe termeni)

Fie  $\Gamma$  o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- $\Gamma$  conține variabilele și simbolurile de constante.
- Dacă  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  și  $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$ , atunci  $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$ .  
Atunci  $\text{Term}_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$ .

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate  $\mathcal{P}$ : definim  $\Gamma$  ca fiind mulțimea tuturor expresiilor care satisfac  $\mathcal{P}$  și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că  $\text{Term}_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$ .

### Limbaje de ordinul întâi

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi.

- Mulțimea **Sim $\mathcal{L}$**  a simbolurilor lui  $\mathcal{L}$  este

$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui  $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$  se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui  $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$  se numesc **simboluri logice**.

- Notăm variabilele cu  $x, y, z, v, \dots$ , simbolurile de relații cu  $P, Q, R, \dots$ , simbolurile de funcții cu  $f, g, h, \dots$  și simbolurile de constante cu  $c, d, e, \dots$

- Pentru orice  $m \in \mathbb{N}^*$  notăm:

$$\mathcal{F}_m := \text{mulțimea simbolurilor de funcții de aritate } m;$$

$$\mathcal{R}_m := \text{mulțimea simbolurilor de relații de aritate } m.$$

### Termeni

#### Definiția 3.4

**Termenii** lui  $\mathcal{L}$  sunt expresiile definite astfel:

- (T0) Orice variabilă este termen.
- (T1) Orice simbol de constantă este termen.
- (T2) Dacă  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  și  $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$  sunt termeni, atunci  $ft_1 \dots t_m$  este termen.
- (T3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.

#### Notății:

- Mulțimea termenilor se notează **Term $\mathcal{L}$** .
- Termenii se notează  $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$

#### Definiția 3.5

Un termen  $t$  se numește **închis** dacă  $\text{Var}(t) = \emptyset$ .

### Termeni

#### Propoziția 3.7 (Citire unică (Unique readability))

Dacă  $t$  este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- $t = x$ , unde  $x \in V$ ;
- $t = c$ , unde  $c \in \mathcal{C}$ ;
- $t = ft_1 \dots t_m$ , unde  $f \in \mathcal{F}_m$  ( $m \geq 1$ ) și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni.

*Mai mult, scrierea lui  $t$  sub una din aceste forme este unică.*

## Formule

### Definiția 3.8

**Formulele atomică** ale lui  $\mathcal{L}$  sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$ , unde  $s, t$  sunt termeni;
- $(Rt_1 \dots t_m)$ , unde  $R \in \mathcal{R}_m$  ( $m \geq 1$ ) și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni.

### Definiția 3.9

**Formulele** lui  $\mathcal{L}$  sunt expresiile definite astfel:

- (F0) Orice formulă atomică este formulă.
- (F1) Dacă  $\varphi$  este formulă, atunci  $(\neg\varphi)$  este formulă.
- (F2) Dacă  $\varphi$  și  $\psi$  sunt formule, atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  este formulă.
- (F3) Dacă  $\varphi$  este formulă, atunci  $(\forall x\varphi)$  este formulă pentru orice variabilă  $x$ .
- (F4) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.

## Formule

### Notății

- Mulțimea formulelor se notează  $\text{Form}_{\mathcal{L}}$ .
- Formulele se notează  $\varphi, \psi, \chi, \dots$

### Propoziția 3.10 (Inducția pe formule)

Fie  $\Gamma$  o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- $\Gamma$  conține toate formulele atomică.
- $\Gamma$  este închisă la  $\neg, \rightarrow$  și  $\forall x$  (pentru orice variabilă  $x$ ), adică: dacă  $\varphi, \psi \in \Gamma$ , atunci  $(\neg\varphi), (\varphi \rightarrow \psi), (\forall x\varphi) \in \Gamma$ .

Atunci  $\text{Form}_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$ .

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate  $\mathcal{P}$ : definim  $\Gamma$  ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac  $\mathcal{P}$  și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că  $\text{Form}_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$ .

## Formule

### Propoziția 3.11 (Citire unică (Unique readability))

Dacă  $\varphi$  este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = (s = t)$ , unde  $s, t$  sunt termeni;
- $\varphi = (Rt_1 \dots t_m)$ , unde  $R \in \mathcal{R}_m$  ( $m \geq 1$ ) și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni;
- $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule;
- $\varphi = (\forall x\psi)$ , unde  $x$  este variabilă și  $\psi$  este formulă.

Mai mult, scrierea lui  $\varphi$  sub una din aceste forme este unică.

## Formule

### Conecțori derivați

Conecțorii  $\vee, \wedge, \leftrightarrow$  și **cuantificatorul existențial**  $\exists$  sunt introdusi prin următoarele abrevieri:

- $\varphi \vee \psi := (\neg\varphi) \rightarrow \psi$
- $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\exists x\varphi := \neg\forall x\neg\varphi$ .

## Formule

În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem  $s = t, Rt_1 \dots t_m, \forall x\varphi, \neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ . Pe de altă parte, scriem  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$ .

Pentru a reduce din folosirea parantezelor, presupunem următoarele:

- Canticulatorii  $\forall, \exists$  au precedență mai mare decât ceilalți conectori. Așadar,  $\forall x\varphi \rightarrow \psi$  este  $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$  și nu  $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ .
- $\neg$  are precedență mai mare decât  $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ .
- $\wedge, \vee$  au precedență mai mare decât  $\rightarrow, \neg, \leftrightarrow$ .

## Formule

- Scriem uneori  $f(t_1, \dots, t_m)$  în loc de  $ft_1 \dots t_m$  și  $R(t_1, \dots, t_m)$  în loc de  $Rt_1 \dots t_m$ .
- Simbolurile de funcții sau relații de aritate 1 se numesc **unare**.
- Simbolurile de funcții sau relații de aritate 2 se numesc **binare**.
- Dacă  $f$  este un simbol de funcție binară scriem  $t_1 ft_2$  în loc de  $ft_1 t_2$ .
- Analog, dacă  $R$  este un simbol de relație binară, scriem  $t_1 R t_2$  în loc de  $Rt_1 t_2$ .

Vom identifica un limbaj  $\mathcal{L}$  cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și vom scrie  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ .

## $\mathcal{L}$ -structura

### Definiția 3.12

O  **$\mathcal{L}$ -structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A, \mathcal{C}^A)$$

unde

- $A$  este o mulțime nevidă;
- $\mathcal{F}^A = \{f^A \mid f \in \mathcal{F}\}$  este o mulțime de operații pe  $A$ ; dacă  $f$  are aritatea  $m$ , atunci  $f^A : A^m \rightarrow A$ ;
- $\mathcal{R}^A = \{R^A \mid R \in \mathcal{R}\}$  este o mulțime de relații pe  $A$ ; dacă  $R$  are aritatea  $m$ , atunci  $R^A \subseteq A^m$ ;
- $\mathcal{C}^A = \{c^A \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$ .
- $A$  se numește **universal** structurii  $\mathcal{A}$ . **Notăție:**  $A = |A|$
- $f^A$  (respectiv  $R^A, c^A$ ) se numește **denotație** sau **interpretarea** lui  $f$  (respectiv  $R, c$ ) în  $\mathcal{A}$ .

## Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}), \text{ unde}$$

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_-$ -structurile sunt mulțimile nevide

### Exemplu de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universal are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z ((x = y \wedge y = z) \wedge (z = x))$$

### Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}; \dot{<} este simbol de relație binară;$
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}; \dot{+}, \dot{\times} sunt simboluri de funcții binare și  $\dot{S}$  este simbol de funcție unară;$
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<} ; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  sau  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<} ; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ .

Exemplul natural de  $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $S(m) = m + 1$  este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <, \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de  $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:  $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$ .

### Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binară

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- $\mathcal{R} = \{R\}; R$  simbol de relație binară
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$ -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

► Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate  $(A, \leq)$ , folosim simbolul  $\dot{\leq}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\leq}$ .

► Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate  $(A, <)$ , folosim simbolul  $\dot{<}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{<}$ .

► Dacă suntem interesați de grafuri  $G = (V, E)$ , folosim simbolul  $\dot{E}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{Graf}$ .

► Dacă suntem interesați de structuri  $(A, \in)$ , folosim simbolul  $\dot{\in}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\in}$ .

### Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde  $\mathcal{R} = \emptyset$  și

- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{^{-1}}\}; \dot{*}$  simbol de funcție binară,  $\dot{^{-1}}$  simbol de funcție unară
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{^{-1}}; \dot{e})$  sau  $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{^{-1}}, \dot{e})$ .

Exemple naturale de  $\mathcal{L}_{Gr}$ -structuri sunt grupurile:  $\mathcal{G} = (G, \cdot, \dot{^{-1}}, e)$ . Prin urmare,  $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$ ,  $\dot{^{-1}}^{\mathcal{G}} = \dot{^{-1}}$ ,  $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$ .

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul  $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$ ;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}; \dot{+}$  simbol binar,  $\dot{-}$  simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$ .

### Interpretare (evaluare)

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi și  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură.

#### Definiția 3.13

O **interpretare** sau **evaluare** a (variabilelor) lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$  este o funcție  $e : V \rightarrow A$ .

În continuare,  $e : V \rightarrow A$  este o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ .

#### Definiția 3.14 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește **interpretarea**  $t^A(e) \in A$  a termenului  $t$  sub evaluarea  $e$ :

- dacă  $t = x \in V$ , atunci  $t^A(e) := e(x)$ ;
- dacă  $t = c \in \mathcal{C}$ , atunci  $t^A(e) := c^A$ ;
- dacă  $t = ft_1 \dots t_m$ , atunci  $t^A(e) := f^A(t_1^A(e), \dots, t_m^A(e))$ .

### SEMANTICA

### Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^A(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei  $\varphi$  sub evaluarea  $e$ .

$$(s = t)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^A(e) = t^A(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^A(t_1^A(e), \dots, t_m^A(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

### Interpretarea formulelor

#### Negarea și implicația

- $(\neg\varphi)^A(e) = 1 - \varphi^A(e)$ ;
- $(\varphi \rightarrow \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \rightarrow \psi^A(e)$ , unde,

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\Rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^A(e) = 1 \iff \varphi^A(e) = 0$ .
- $(\varphi \rightarrow \psi)^A(e) = 1 \iff (\varphi^A(e) = 0 \text{ sau } \psi^A(e) = 1)$ .

### Interpretarea formulelor

#### Notăție

Pentru orice variabilă  $x \in V$  și orice  $a \in A$ , definim o nouă interpretare  $e_{x \mapsto a} : V \rightarrow A$  prin

$$e_{x \mapsto a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

#### Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^A(e_{x \mapsto a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

## Relația de satisfacere

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ .

### Definiția 3.15

Fie  $\varphi$  o formulă. Spunem că:

- $e$  **satisfacă**  $\varphi$  în  $\mathcal{A}$  dacă  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$ . **Notatie:**  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .
- $e$  **nu satisfacă**  $\varphi$  în  $\mathcal{A}$  dacă  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ . **Notatie:**  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ .

### Corolar 3.16

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x$ ,

- (i)  $\mathcal{A} \models (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ .
- (ii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implica } \mathcal{A} \models \psi[e]$   
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$ .
- (iii)  $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ .

**Dem.**: Exercițiu ușor.

## Relația de satisfacere

Fie  $\varphi, \psi$  formule și  $x$  o variabilă.

### Propoziția 3.17

- (i)  $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$ ;
- (ii)  $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$ ;
- (iii)  $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$ ;
- (iv)  $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.t. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

**Dem.**: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.t. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.t. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1. \end{aligned}$$

## Relația de satisfacere

### Corolar 3.18

- (i)  $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e]$ .
- (ii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$ .
- (iii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e]$ .
- (iv)  $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.t. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ .

## Semantica

Fie  $\varphi$  formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 3.19

Spunem că  $\varphi$  este **satisfiabilă** dacă există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.i.

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că  $(\mathcal{A}, e)$  este un **model** al lui  $\varphi$ .

**Atenție!** Este posibil ca atât  $\varphi$  cât și  $\neg\varphi$  să fie satisfiabile.

Exemplu:  $\varphi := x = y$  în  $\mathcal{L}_-$ .

## Semantica

Fie  $\varphi$  formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 3.20

Spunem că  $\varphi$  este **adevărată** într-o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  dacă pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că  $\mathcal{A}$  **satisfacă**  $\varphi$  sau că  $\mathcal{A}$  este un **model** al lui  $\varphi$ .

**Notatie:**  $\models \varphi$

### Definiția 3.21

Spunem că  $\varphi$  este formулă **universal adevărată** sau **(logic) validă** dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

**Notatie:**  $\models \varphi$

## Semantica

Fie  $\varphi, \psi$  formule ale lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 3.22

$\varphi$  și  $\psi$  sunt **logic echivalente** dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

**Notatie:**  $\varphi \equiv \psi$

### Definiția 3.23

$\psi$  este **consecință semantică** a lui  $\varphi$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e].$$

**Notatie:**  $\varphi \vdash \psi$

### Observație

$$(i) \varphi \models \psi \text{ ddacă } \models \varphi \rightarrow \psi.$$

$$(ii) \varphi \models \psi \text{ ddacă } (\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi) \text{ ddacă } \models \psi \leftrightarrow \varphi.$$

## Echivalență și consecințe logice

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabile  $x, y$ ,

$$\neg\neg x\varphi \models \forall x\neg\varphi \quad (51)$$

$$\neg\forall x\varphi \models \exists x\neg\varphi \quad (52)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \quad (53)$$

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \models \forall x(\varphi \vee \psi) \quad (54)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \quad (55)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \exists x\varphi \vee \exists x\psi \quad (56)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (57)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (58)$$

$$\forall x\varphi \models \exists x\varphi \quad (59)$$

## Echivalență și consecințe logice

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (60)$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \quad (61)$$

$$\forall x\forall y\varphi \models \forall y\forall x\varphi \quad (62)$$

$$\exists x\exists y\varphi \models \exists y\exists x\varphi \quad (63)$$

$$\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi. \quad (64)$$

**Dem.**: Exercițiu.

### Propoziția 3.24

Pentru orice termeni  $s, t, u$ ,

$$(i) \models t = t;$$

$$(ii) \models s = t \rightarrow t = s;$$

$$(iii) \models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

**Dem.**: Exercițiu ușor.

## Mulțimi de formule

Fie  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  o mulțime de formule ale lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 3.25

Spunem că  $\Gamma$  este **satisfiabilă** dacă există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.î.

$$\mathcal{A} \models \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem că  $(\mathcal{A}, e)$  este un **model** al lui  $\Gamma$ .

**Notăție:**  $\mathcal{A} \models \Gamma[e]$

### Definiția 3.26

Spunem că  $\varphi$  este **consecință semantică** a lui  $\Gamma$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \Gamma[e] \implies \mathcal{A} \models \varphi[e].$$

**Notăție:**  $\mathcal{A} \models \varphi$

## Variabile legate și libere

**Notăție:**  $FV(\varphi) :=$  mulțimea variabilelor libere ale lui  $\varphi$ .

### Definiție alternativă

Mulțimea  $FV(\varphi)$  a variabilelor libere ale unei formule  $\varphi$  poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= \text{Var}(\varphi), \text{ dacă } \varphi \text{ este formulă atomică}; \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\ FV(\varphi \rightarrow \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\ FV(\forall x\varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

**Notăție:**  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  dacă  $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ .

## Variabile legate și libere

### Definiția 3.27

Fie  $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$  o formulă a lui  $\mathcal{L}$  și  $x$  o variabilă.

- Spunem că variabila  $x$  apare legată pe poziția  $k$  în  $\varphi$  dacă  $x = \varphi_k$  și există  $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$  a.î.  $\varphi_i \dots \varphi_j$  este de forma  $\forall x\psi$  cu  $\psi$  formulă.
- Spunem că  $x$  apare liberă pe poziția  $k$  în  $\varphi$  dacă  $x = \varphi_k$ , dar  $x$  nu apare legată pe poziția  $k$  în  $\varphi$ .
- $x$  este **variabilă legată** (bounded variable) a lui  $\varphi$  dacă există un  $k$  a.î.  $x$  apare legată pe poziția  $k$  în  $\varphi$ .
- $x$  este **variabilă liberă** (free variable) a lui  $\varphi$  dacă există un  $k$  a.î.  $x$  apare liberă pe poziția  $k$  în  $\varphi$ .

### Exemplu

Fie  $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$ . Variabile libere:  $x, y, z$ . Variabile legate:  $x$ .

## Interpretarea termenilor

### Propoziția 3.28

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice interpretări  $e_1, e_2 : V \rightarrow A$ , pentru orice termen  $t$ ,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in \text{Var}(t), \text{ atunci } t^A(e_1) = t^A(e_2).$$

**Dem.:** Exercițiu.

## Interpretarea formulelor

### Propoziția 3.29

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ , orice interpretări  $e_1, e_2 : V \rightarrow A$ , pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in FV(\varphi), \text{ atunci } \mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

**Dem.:** Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$ .

Atunci  $\text{Var}(t_1) \subseteq FV(\varphi)$ ,  $\text{Var}(t_2) \subseteq FV(\varphi)$ , deci putem aplica Propoziția 3.28 pentru a obține că

$$t_1^A(e_1) = t_1^A(e_2) \quad \text{și} \quad t_2^A(e_1) = t_2^A(e_2).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff t_1^A(e_1) = t_2^A(e_1) \iff t_1^A(e_2) = t_2^A(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

## Interpretarea formulelor

### Propoziția 3.28

Atunci  $\text{Var}(t_i) \subseteq FV(\varphi)$  pentru orice  $i = 1, \dots, m$  și aplicăm din nou Propoziția 3.28 pentru a obține că

$$t_i^A(e_1) = t_i^A(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff R^A(t_1^A(e_1), \dots, t_m^A(e_1)) \\ &\iff R^A(t_1^A(e_2), \dots, t_m^A(e_2)) \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

### Propoziția 3.29

Deoarece  $FV(\psi) = FV(\varphi)$ , putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2].$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

### Propoziția 3.29

Deoarece  $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$ , putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \chi[e_2].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

## Interpretarea formulelor

### Propoziția 3.29

Rezultă că pentru orice  $a \in A$ ,

$$e_{1x \mapsto a}(v) = e_{2x \mapsto a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările  $e_{1x \mapsto a}, e_{2x \mapsto a}$  pentru a obține că

$$\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1x \mapsto a}] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{2x \mapsto a}].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{2x \mapsto a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

## Echivalențe și consecințe logice

### Propoziția 3.30

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x \notin FV(\varphi)$ ,

$$\varphi \vdash \exists x\varphi \quad (65)$$

$$\varphi \vdash \forall x\varphi \quad (66)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \forall x\psi \quad (67)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \vee \forall x\psi \quad (68)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi \quad (69)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \vee \exists x\psi \quad (70)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (71)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (72)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (73)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (74)$$

**Dem.**: Exercițiu.

## Enunțuri

### Definiția 3.31

O formulă  $\varphi$  se numește **enunț** (sentence) dacă  $FV(\varphi) = \emptyset$ , adică  $\varphi$  nu are variabile libere.

**Notatie:**  $Sent_{\mathcal{L}} :=$  mulțimea enunțurilor lui  $\mathcal{L}$ .

### Propoziția 3.32

Fie  $\varphi$  un enunț. Pentru orice interpretări  $e_1, e_2 : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

**Dem.**: Este o consecință imediată a Propoziției 3.29 și a faptului că  $FV(\varphi) = \emptyset$ .  $\square$

### Definiția 3.33

O  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  este un **model** al lui  $\varphi$  dacă  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  pentru o (orice) evaluare  $e : V \rightarrow A$ . **Notatie:**  $\mathcal{A} \models \varphi$

## Mulțimi de enunțuri

Fie  $\varphi$  un enunț al lui  $\mathcal{L}$  și  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri.

$\Gamma$  este **satisfiabilă** dacă există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  a.î.

$$\mathcal{A} \models \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că  $\mathcal{A}$  este un **model** al lui  $\Gamma$ . **Notatie:**  $\mathcal{A} \models \Gamma$

$\varphi$  este **consecință semantică** a lui  $\Gamma$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models \Gamma \implies \mathcal{A} \models \varphi.$$

**Notatie:**  $\Gamma \models \varphi$

## Mulțimi de enunțuri

**Notatie:** Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Gamma$ , notăm

$$Mod(\Gamma) :=$$
 clasa modelelor lui  $\Gamma$ .

Notăm  $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  în loc de  $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ .

### Lema 3.34

Pentru orice mulțimi de enunțuri  $\Gamma, \Delta$  și orice enunț  $\psi$ ,

$$(i) \Gamma \models \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi).$$

$$(ii) \Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma).$$

$$(iii) \Gamma \text{ este satisfiabilă} \iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset.$$

**Dem.**: Exercițiu ușor.

## TAUTOLOGII

## Tautologii

Noțiunile de **tautologie** și **consecință semantică** din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectorilor  $\neg, \rightarrow$ .

### Definiția 3.35

O  $\mathcal{L}$ -evaluare de **adevăr** este o funcție  $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$  cu următoarele proprietăți: pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\blacktriangleright F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi);$$

$$\blacktriangleright F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi).$$

### Propoziția 3.36

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ , funcția  $V_{e, \mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$  este o  $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr.

## Tautologii

### Definiția 3.37

$\varphi$  este **tautologie** dacă  $F(\varphi) = 1$  pentru orice  $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr  $F$ .

Exemple de tautologii:  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

### Propoziția 3.38

Orice tautologie este validă.

**Dem.**: Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o evaluare. Deoarece  $\varphi$  este tautologie și  $V_{e, \mathcal{A}}$  este  $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr, rezultă că  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = 1$ , adică  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .  $\square$

### Exemplu

$x = x$  este validă, dar nu este tautologie.

## Tautologii

### Definiția 3.39

Două formule  $\varphi$  și  $\psi$  sunt **tautologic echivalente** dacă  $F(\varphi) = F(\psi)$  pentru orice  $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr  $F$ .

### Exemplul 3.40

$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)$  și  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$  sunt tautologic echivalente.

### Definiția 3.41

O formulă  $\varphi$  este **consecință tautologică** a unei mulțimi de formule  $\Gamma$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr  $F$ ,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \implies F(\varphi) = 1.$$

### Propoziția 3.42

Dacă  $\varphi$  este consecință tautologică a lui  $\Gamma$ , atunci  $\Gamma \models \varphi$ .

## SUBSTITUȚII

### Substituția

Fie  $x$  o variabilă a lui  $\mathcal{L}$  și  $u$  termen al lui  $\mathcal{L}$ .

#### Definiția 3.43

Pentru orice termen  $t$  al lui  $\mathcal{L}$ , definim  
 $t_x(u) :=$  expresia obținută din  $t$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui  $x$  cu  $u$ .

#### Propoziția 3.44

Pentru orice termen  $t$  al lui  $\mathcal{L}$ ,  $t_x(u)$  este termen al lui  $\mathcal{L}$ .

### Substituția

- Vrem să definim analog  $\varphi_x(u)$  ca fiind expresia obținută din  $\varphi$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui  $x$  cu  $u$ .
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie  $\varphi := \exists y\neg(x = y)$  și  $u := y$ . Atunci  $\varphi_x(u) = \exists y\neg(y = y)$ . Avem

- Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  cu  $|\mathcal{A}| \geq 2$ , avem  $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$ .
- $\varphi_x(u)$  nu este satisfiabilă.

### Substituția

Fie  $x$  o variabilă,  $u$  un termen și  $\varphi$  o formulă.

#### Definiția 3.45

Spunem că  $x$  este **liberă pentru  $u$**  în  $\varphi$  sau că  $u$  este **substituibil pentru  $x$**  în  $\varphi$  dacă pentru orice variabilă  $y$  care apare în  $u$ , nici o subformulă a lui  $\varphi$  nu conține apariții libere ale lui  $x$ .

#### Observație

$x$  este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$  în oricare din următoarele situații:

- $u$  nu conține variabile;
- $\varphi$  nu conține variabile care apar în  $u$ ;
- nici o variabilă din  $u$  nu apare legată în  $\varphi$ ;
- $x$  nu apare în  $\varphi$ ;
- $\varphi$  nu conține apariții libere ale lui  $x$ .

### Substituția

Fie  $x$  o variabilă,  $u$  termen și  $\varphi$  o formulă a.i.  $x$  este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$ .

#### Definiția 3.46

$\varphi_x(u) :=$  expresia obținută din  $\varphi$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui  $x$  cu  $u$ .  
Spunem că  $\varphi_x(u)$  este o **substituție liberă**.

#### Propoziția 3.47

$\varphi_x(u)$  este formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

### Substituția

#### Propoziția 3.48

Pentru orice termeni  $u_1$  și  $u_2$  și orice variabilă  $x$ ,

- (i) pentru orice termen  $t$ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

- (ii) pentru orice formulă  $\varphi$  a.i.  $x$  este liberă pentru  $u_1$  și  $u_2$  în  $\varphi$ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

#### Propoziția 3.49

Fie  $\varphi$  o formulă și  $x$  o variabilă.

- (i) Pentru orice termen  $u$  substituibil pentru  $x$  în  $\varphi$ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

- (ii)  $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi$ ,  $\models \varphi \rightarrow \exists x\varphi$ .

- (iii) Pentru orice simbol de constantă  $c$ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

### Substituția

În general, dacă  $x$  și  $y$  sunt variabile,  $\varphi$  și  $\varphi_x(y)$  nu sunt logic echivalente: fie  $\mathcal{L}_{ar}$ ,  $\mathcal{N}$  și  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  a.i.  $e(x) = 3$ ,  $e(y) = 5$ ,  $e(z) = 4$ . Atunci

$$\mathcal{N} \models (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflictele.

### Substituția

#### Propoziția 3.50

Pentru orice formulă  $\varphi$ , variabile distincte  $x$  și  $y$  a.i.  $y \notin FV(\varphi)$  și  $y$  este substituibil pentru  $x$  în  $\varphi$ ,

$$\exists x\varphi \models \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \models \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 3.50 astfel: dacă  $\varphi_x(u)$  nu este substituție liberă (i.e.  $x$  nu este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$ ), atunci înlocuim  $\varphi$  cu o formulă  $\varphi'$  logic echivalentă a.i.  $\varphi'_x(u)$  este substituție liberă.

## Substituția

### Definiția 3.51

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice variabile  $y_1, \dots, y_k$ , **varianta**  $y_1, \dots, y_k$ -**liberă**  $\varphi'$  a lui  $\varphi$  este definită recursiv astfel:

- dacă  $\varphi$  este formulă atomică, atunci  $\varphi'$  este  $\varphi$ ;
- dacă  $\varphi = \neg\psi$ , atunci  $\varphi'$  este  $\neg\psi'$ ;
- dacă  $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ , atunci  $\varphi'$  este  $\psi' \rightarrow \chi'$ ;
- dacă  $\varphi = \forall z\psi$ , atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altele;} \end{cases}$$

unde  $w$  este prima variabilă din sirul  $v_0, v_1, \dots$ , care nu apare în  $\psi'$  și nu este printre  $y_1, \dots, y_k$ .

## Substituția

### Definiția 3.52

$\varphi'$  este **variantă** a lui  $\varphi$  dacă este varianta  $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui  $\varphi$  pentru anumite variabile  $y_1, \dots, y_k$ .

### Propoziția 3.53

- (i) Pentru orice formulă  $\varphi$ , dacă  $\varphi'$  este o variantă a lui  $\varphi$ , atunci  $\varphi \models \varphi'$ ;
- (ii) Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice termen  $t$ , dacă variabilele lui  $t$  se află printre  $y_1, \dots, y_k$  și  $\varphi'$  este varianta  $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui  $\varphi$ , atunci  $\varphi'_x(t)$  este o substituție liberă.

## FORME NORMALE

### Forma normală prenex

#### Teorema 3.56 (Teorema de formă normală prenex)

Pentru orice formulă  $\varphi$  există o formulă  $\varphi^*$  în formă normală prenex a.î.  $\varphi \models \varphi^*$  și  $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$ .

**Dem.:** Exercițiu suplimentar.

## Forma normală prenex

### Definiția 3.54

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

### Definiția 3.55

O formulă  $\varphi$  este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \psi,$$

unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  sunt variabile și  $\psi$  este formulă liberă de cuantificatori. Formula  $\psi$  se numește **matricea** lui  $\varphi$  și  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$  este **prefixul** lui  $\varphi$ .

**Exemple de formule în formă normală prenex:**

- Formulele **universale**:  $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$ , unde  $n \in \mathbb{N}$  și  $\psi$  este liberă de cuantificatori
- Formulele **existențiale**:  $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$ , unde  $n \in \mathbb{N}$  și  $\psi$  este liberă de cuantificatori

### Forma normală prenex

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare  $R, S$  și două simboluri de relații binare  $P, Q$ ;
- un simbol de funcție unară  $f$  și un simbol de funcție binară  $g$ ;
- două simboluri de constante  $c, d$ .

### Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y, z) = c) \wedge \neg \exists x(f(x) = d)$$

Amen

$$\begin{aligned} \varphi &\models \exists y(g(y, z) = c \wedge \neg \exists x(f(x) = d)) \\ &\models \exists y(g(y, z) = c \wedge \forall x(\neg(f(x) = d))) \\ &\models \exists y \forall x(g(y, z) = c \wedge \neg(f(x) = d)) \end{aligned}$$

Prin urmare,  $\varphi^* = \exists y \forall x(g(y, z) = c \wedge \neg(f(x) = d))$  este o formă normală prenex pentru  $\varphi$ .

### Forma normală prenex

#### Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y(S(y) \rightarrow \exists zR(z)) \wedge \forall x(\forall yP(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned} \varphi &\models \exists y(\neg(S(y) \rightarrow \exists zR(z)) \wedge \forall x(\forall yP(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\models \exists y \neg \exists z(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x(\forall yP(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \neg \exists z(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \forall z \neg(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \forall z \forall x(\neg(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists y(P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\models \exists y \forall z \forall x(\neg(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists v(P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\models \exists y \forall z \forall x \exists v(\neg(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v(\neg(S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$  este o formă normală prenex pentru  $\varphi$ .

### Forma normală Skolem

**Skolemizarea** este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante **Skolem**.

### Observație

Orice formulă liberă de cuantificatori este universală.

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi și  $\varphi$  un enunț al lui  $\mathcal{L}$  care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  sunt variabile distincte două căte două și  $\theta$  este formulă liberă de cuantificatori.

### Forma normală Skolem

Asociem lui  $\varphi$  un enunț universal  $\varphi^{Sk}$  într-un limbaj extins  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ : Dacă  $\varphi$  este universal, atunci  $\varphi^{Sk} = \varphi$  și  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$ .

Altfel,  $\varphi$  are una din formele:

- $\varphi = \exists x \psi$ . Introducem un nou simbol de constantă  $c$  și considerăm  $\varphi^1 = \psi_x(c)$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$ .
- $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$  ( $k \geq 1$ ). Introducem un nou simbol de funcție  $f$  de aritate  $k$  și considerăm  $\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi_x(x_1 \dots x_k)$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$ .

În ambele cazuri,  $\varphi^1$  are cu un cuantificator existențial mai puțin decât  $\varphi$ .

Dacă  $\varphi^1$  este enunț universal, atunci  $\varphi^{Sk} = \varphi^1$ . Dacă  $\varphi^1$  nu este enunț universal, atunci formăm  $\varphi^2, \varphi^3, \dots$ , până ajungem la un enunț universal și acesta este  $\varphi^{Sk}$ .

$\varphi^{Sk}$  este o formă normală Skolem a lui  $\varphi$ .

### Forma normală Skolem

#### Exemple

► Fie  $\theta$  o formulă liberă de cuantificatori a.î.  $FV(\theta) = \{x\}$  și  $\varphi = \exists x \theta$ . Atunci  $\varphi^1 = \theta_x(c)$ , unde  $c$  este un nou simbol de constantă. Deoarece  $\varphi^1$  este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că  $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$ .

► Fie  $R$  un simbol de relație de aritate 3 și  $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$ . Atunci

$$\varphi^1 = \forall y \forall z (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z R(c, y, z),$$

unde  $c$  este un nou simbol de constantă. Deoarece  $\varphi^1$  este un enunț universal, rezultă că  $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z R(c, y, z)$ .

► Fie  $P$  un simbol de relație de aritate 2 și  $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$ . Atunci  $\varphi^1 = \forall y (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y P(y, f(y))$ , unde  $f$  este un simbol nou de funcție unară. Deoarece  $\varphi^1$  este un enunț universal, rezultă că  $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$ .

### Forma normală Skolem

#### Exemplu

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj care conține un simbol de relație binară  $R$  și un simbol de funcție unară  $f$ . Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\ &= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v), \\ &\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\ \varphi^2 &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u)) \\ &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)), \\ &\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}\end{aligned}$$

Deoarece  $\varphi^2$  este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$

### Forma normală Skolem

#### Theoremă 3.57 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie  $\varphi$  un enunț în formă normală prenex și  $\varphi^{Sk}$  o formă normală Skolem a sa.

(i)  $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$ , deci  $\varphi^{Sk} \models \varphi$  în  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ .

(ii)  $\varphi$  este satisfiabilă dacă  $\varphi^{Sk}$  este satisfiabilă.

#### Observație

În general,  $\varphi$  și  $\varphi^{Sk}$  nu sunt logic echivalente ca enunțuri în  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ .

## SINTAXA

### Sintaxa

#### Definiția 3.58

Mulțimea  $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$  a axiomelor (logice) ale lui  $\mathcal{L}$  constă din:

(i) toate tautologiile.

(ii) formulele de forma

$$t = t, \quad s = t \rightarrow t = s, \quad s = t \wedge t = u \rightarrow s = u,$$

pentru orice termeni  $s, t, u$ .

(iii) formulele de forma

$$\begin{aligned}t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m &\rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m, \\ t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m &\rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m), \\ &\text{pentru orice } m \geq 1, f \in \mathcal{F}_m, R \in \mathcal{R}_m \text{ și orice termeni } t_i, u_i \\ (i &= 1, \dots, m).\end{aligned}$$

(iv) formulele de forma

$$\varphi_x(t) \rightarrow \exists x \varphi,$$

unde  $\varphi_x(t)$  este o substituție liberă ( $\exists$ -axioame).

### Sintaxa

#### Definiția 3.59

Regulele de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

(i) din  $\varphi$  și  $\varphi \rightarrow \psi$  se inferă  $\psi$  (modus ponens sau (MP));

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

(ii) dacă  $x \notin FV(\psi)$ , atunci din  $\varphi \rightarrow \psi$  se inferă  $\exists x \varphi \rightarrow \psi$  ( $\exists$ -introducere);

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi} \quad \text{dacă } x \notin FV(\psi).$$

### Sintaxa

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule ale lui  $\mathcal{L}$ .

#### Definiția 3.60

$\Gamma$ -teoremele lui  $\mathcal{L}$  sunt formulele definite astfel:

(T0) Orice axiomă logică este  $\Gamma$ -teoremă.

(T1) Orice formulă din  $\Gamma$  este  $\Gamma$ -teoremă.

(T2) Dacă  $\varphi$  și  $\varphi \rightarrow \psi$  sunt  $\Gamma$ -teoreme, atunci  $\psi$  este  $\Gamma$ -teoremă.

(T3) Dacă  $\varphi \rightarrow \psi$  este  $\Gamma$ -teoremă și  $x \notin FV(\psi)$ , atunci  $\exists x \varphi \rightarrow \psi$  este  $\Gamma$ -teoremă.

(T4) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0) (T1), (T2) și (T3) sunt  $\Gamma$ -teoreme.

Dacă  $\varphi$  este  $\Gamma$ -teoremă, atunci spunem și că  $\varphi$  este dedusă din ipotezele  $\Gamma$ .

**Sintaxa**

**Notății**

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \varphi$  este  $\Gamma$ -teoremă     $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

**Definiția 3.61**  
O formulă  $\varphi$  se numește **teoremă (logică)** a lui  $\mathcal{L}$  dacă  $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ .

Reformulând condițiile din definiția  $\Gamma$ -teoremelor folosind notația  $\vdash$ , obținem

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi$ , au loc următoarele:

- (i) Dacă  $\varphi$  este axiomă, atunci  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ;
- (ii) Dacă  $\varphi \in \Gamma$ , atunci  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ;
- (iii) Dacă  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  și  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ , atunci  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ .
- (iv) Dacă  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$  și  $x \notin FV(\psi)$ , atunci  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x \varphi \rightarrow \psi$ .

**Sintaxa**

**Definiția 3.62**  
O  $\Gamma$ -demonstrație (demonstrație din ipotezele  $\Gamma$ ) a lui  $\mathcal{L}$  este o secvență de formule  $\theta_1, \dots, \theta_n$  astfel încât pentru fiecare  $i \in \{1, \dots, n\}$ , una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i)  $\theta_i$  este axiomă;
- (ii)  $\theta_i \in \Gamma$ ;
- (iii) există  $k, j < i$  astfel încât  $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$ ;
- (iv) există  $j < i$  astfel încât  $\theta_j = \varphi \rightarrow \psi$  și  $\theta_i = \exists x \varphi \rightarrow \psi$ , unde  $x \notin FV(\psi)$ .

O  $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu **demonstrație**.

**Sintaxa**

**Definiția 3.63**  
Fie  $\varphi$  o formulă. O  $\Gamma$ -demonstrație a lui  $\varphi$  sau **demonstrație a lui  $\varphi$  din ipotezele  $\Gamma$**  este o  $\Gamma$ -demonstrație  $\theta_1, \dots, \theta_n$  astfel încât  $\theta_n = \varphi$ .

**Propoziția 3.64**  
Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule. Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  dacă există o  $\Gamma$ -demonstrație a lui  $\varphi$ .

**Sintaxa**

**Propoziția 3.65 (Teorema Tautologiei (Post))**  
Fie  $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  astfel încât

- (i)  $\psi$  este consecință tautologică a mulțimii  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ .
- (ii)  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_2, \dots, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$ .

Atunci  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ .

**Teorema 3.66 (Teorema Deducției)**  
Fie  $\psi$  o formulă și  $\varphi$  un enunț. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \quad \text{dacă} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi.$$

**Sintaxa**

**Propoziția 3.67**  
Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice variabilă  $x$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \forall x \varphi.$$

**Mulțimi consistente**

**Definiția 3.71**  
Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule. Spunem că

- (i)  $\Gamma$  este **consistentă** dacă există o formulă  $\varphi$  astfel încât  $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ .
- (ii)  $\Gamma$  este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică  $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  pentru orice formulă  $\varphi$ .

**Propoziția 3.72**  
Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$ , următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $\Gamma$  este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg \psi$ .
- (iii) Există o formulă  $\psi$  astfel încât  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg \psi$ .

**TEOREMA DE COMPLETITUDINE**

**Teorema de completitudine**

**Teorema de completitudine - prima versiune**  
Fie  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri.

$\Gamma$  este consistentă  $\iff \Gamma$  este satisfiabilă.

**Teorema de completitudine - a doua versiune**  
Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Gamma$  și orice enunț  $\varphi$ ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi.$$

**Teorema de completitudine**

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în teza sa de doctorat din 1947 o demonstrație simplificată.

## TEORII

### Teorii

#### Definiția 3.73

O  **$\mathcal{L}$ -teorie** este o mulțime  $T$  de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}$  care este închisă la consecință semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

#### Definiția 3.74

Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Gamma$ , **teoria generată de  $\Gamma$**  este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

### Teorii

#### Propoziția 3.75

Fie  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri.

- (i)  $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$ .
- (ii)  $Th(\Gamma)$  este cea mai mică teorie  $T$  a.i.  $\Gamma \subseteq T$ .

**Dem.: Exercițiu.**

- O teorie prezentată ca  $Th(\Gamma)$  se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatice**.  $\Gamma$  se numește mulțime de **axiome** pentru  $Th(\Gamma)$ .
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

### Teorii

#### Definiția 3.76

O teorie  $T$  este **finit axiomatizabilă** dacă  $T = Th(\Gamma)$  pentru o mulțime de enunțuri finită  $\Gamma$ .

#### Definiția 3.77

O clasă  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}$ -structuri este **axiomatizabilă** dacă  $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$  pentru o mulțime de enunțuri  $\Gamma$ . Spunem și că  $\Gamma$  **axiomatizează**  $\mathcal{K}$ .

#### Definiția 3.78

O clasă  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}$ -structuri este **finit axiomatizabilă** dacă  $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$  pentru o mulțime finită de enunțuri  $\Gamma$ .

### Exemple - Teoria egalității

Pentru orice  $n \geq 2$ , notăm următorul enunț cu  $\exists^{\geq n}$ :

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)).$$

#### Propoziția 3.79

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $n \geq 2$ ,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

**Dem.: Exercițiu ușor.**

Pentru uniformitate, notăm  $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$ .

### Exemple - Teoria egalității

#### Notări

Fie  $n \geq 1$ .

- $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

#### Propoziția 3.80

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \exists^{\leq n} &\iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \models \exists^{=n} &\iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{aligned}$$

**Dem.: Exercițiu ușor.**

#### Propoziția 3.81

Fie  $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$ . Atunci pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

**Dem.: Exercițiu ușor.**

### Exemple - Teoria grafurilor

Un **graf** este o pereche  $G = (V, E)$  de mulțimi a.i.  $E$  este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui  $V$ . Elementele lui  $V$  se numesc **vârfuri**, iar elementele lui  $E$  se numesc **muchii**.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
  - $\mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, E)$ , unde  $E$  este relație binară.
- Fie  $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$ , unde
- (IREFL)  $\vdash \forall x \neg \dot{E}(x, x)$
  - (SIM)  $\vdash \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x))$ .

#### Definiție

Teoria grafurilor este  $T := Th(\Gamma)$ .

- $T$  este finit axiomatizabilă.
- modelele lui  $T$  sunt grafurile.
- $\Gamma$  axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.

### Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\leq} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\leq}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, \leq)$ , unde  $\leq$  este relație binară.

Fie  $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$ , unde

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x(x \dot{\leq} x) \\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z) \end{aligned}$$

#### Definiție

Teoria ordinii parțiale este  $T := Th(\Gamma)$ .

- $T$  este finit axiomatizabilă.
- modelele lui  $T$  sunt mulțimile parțial ordonate.
- $\Gamma$  axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.

### Exemple - Teoria ordinii totale

Fie  $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$ , unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$$

#### Definiție

Teoria ordinii totale este  $T := Th(\Gamma)$ .

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile total ordonate.
- ▶  $\Gamma$  axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.

### Exemple - Teoria ordinii stricte

$$\mathcal{L}_{\prec} = (\prec, \emptyset, \emptyset) = (\prec)$$

$\mathcal{L}_{\prec}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, \prec)$ , unde  $\prec$  este relație binară.

Fie  $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$ , unde

$$(IREFL) := \forall x \neg(x \prec x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z)$$

#### Definiție

Teoria ordinii stricte este  $T := Th(\Gamma)$ .

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶  $\Gamma$  axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.

### Exemple - Teoria ordinii dense

Fie  $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$ , unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x \prec y \vee y \prec x)$$

$$(DENS) := \forall x \forall y (x \prec y \rightarrow \exists z (x \prec z \wedge z \prec y)).$$

#### Definiție

Teoria ordinii dense este  $T := Th(\Gamma)$ .

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶  $\Gamma$  axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.

### Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

$$\mathcal{L}_{\equiv} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$$

$\mathcal{L}_{\equiv}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, \equiv)$ , unde  $\equiv$  este relație binară.

Fie  $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$ , unde

$$(REFL) := \forall x (x \dot{\equiv} x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (x \dot{\equiv} y \rightarrow y \dot{\equiv} x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \rightarrow x \dot{\equiv} z)$$

#### Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este  $T := Th(\Gamma)$ .

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ Fie  $\mathcal{K}$  clasa structurilor  $(A, \equiv)$ , unde  $\equiv$  este relație de echivalență pe  $A$ . Avem că  $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ , așadar  $\Gamma$  axiomatizează  $\mathcal{K}$ . Prin urmare,  $\mathcal{K}$  este finit axiomatizabilă.

### Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \wedge x \dot{\equiv} y \wedge \forall z (z \dot{\equiv} x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

## TEOREMA DE COMPACITATE

### Teorema de compacitate

#### Teorema 3.82 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- ▶ unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

### Teorema de compacitate - aplicații

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi.

#### Propoziția 3.83

Clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri  $\Gamma$  astfel încât

(\*) pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$  este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există  $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$  a.î. (\*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că  $\Delta$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Delta_0$  o submulțime finită a lui  $\Delta$ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură finită a.î.  $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Atunci  $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$  pentru orice  $i = 1, \dots, k$  și  $\mathcal{A} \models \Gamma$  deoarece  $\mathcal{A}$  este finită.

### Teorema de compactate - aplicații

Prin urmare,  $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{>n_1}, \dots, \exists^{>n_k}\}$ , de unde rezultă că  $\mathcal{A} \models \Delta_0$ . Așadar,  $\Delta_0$  este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compactate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{>n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model  $\mathcal{B}$ .

Deoarece  $\mathcal{B} \models \Gamma$ ,  $\mathcal{B}$  este finită.

Deoarece  $\mathcal{B} \models \{\exists^{>n} \mid n \geq 1\}$ , rezultă că  $\mathcal{B}$  este infinită.

Am obținut o contradicție.  $\square$

#### *Corolar 3.84*

*Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_-$ .*

### Teorema de compactate - aplicații

#### *Propoziția 3.85*

*Clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.*

**Dem.:** Notăm cu  $\mathcal{K}_{Inf}$  clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor infinite.

Conform Propoziției 3.81, pentru orice  $\mathcal{L}$ -struktură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{>n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{>n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

234

### Teorema de compactate - aplicații

Presupunem că  $\mathcal{K}_{Inf}$  este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie  $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ . Atunci  $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$ .

Rezultă că pentru orice  $\mathcal{L}$ -struktură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 3.83.  $\square$ .

#### *Corolar 3.86*

*Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_-$ .*

235