Mathematik WI

PD Dr. Maren Hantke, Dr. Helmut Podhaisky

Wintersemester 2021/2022

Version vom 01. Oktober 2021

Organisatorisches

Termine

- Vorlesung:
  - Montags wöchentlich: 13.00 - 14.30 Uhr AudiMax
  - Donnerstags zweiwöchentlich ab 14.10.: 10.30 - 12.00 Uhr AudiMax
- Es gibt sieben Übungsserien, die in den jeweiligen Übungsgruppen diskutiert werden:

  Serie 1: 11.10.-22.10., Serie 2: 25.10.-05.11., Serie 3: 08.11.-19.11, Serie 4: 22.11.-03.12., Serie 5: 06.12.-17.12., Serie 6: 10.01.-21.01., Serie 7: 24.01.-04.02.

  Bitte die Aufgaben vor den Übungen ansehen und versuchen, sie zu lösen (ideale Klausurvorbereitung).
- Nach den Übungen können Sie uns sprechen. Per E-mail erreichen Sie uns mit

  helmut.podhaisky@mathematik.uni-halle.de

  maren.hantke@mathematik.uni-halle.de

Vorlesung

Die Teilnahme ist empfohlen, aber nicht verpflichtend. Mitschreiben der Formeln und Mitrechnen erleichtern das Verständnis.

Klausuren

- Klausurtermine: Werden in Stud.IP angekündigt
- Klausuraufgaben ähneln den Übungsaufgaben, aber mit Lösungsschlüssel mit sechs Varianten, von denen eine richtig ist, siehe Beispiel 1.
- Probeklausur am Ende der Vorlesungszeit
- Als Hilfsmittel ist zugelassen 1 Blatt A4 beidseitig mit handschriftlichen Notizen. Weitere Hilfsmittel, auch Taschenrechner, sind nicht erlaubt.

Beispiel 1. Sei $x + y = 11$ und $2x - y = 7$. Bestimmen Sie $x^2 - y^2$.
Die Lösung lautet:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 5 ☑ 11 ☐ 16 ☐ es gibt keine Lösung

Literatur

- Folien zur Vorlesung, Übungsblätter und Zusatzmaterial im StudIP. Bitte melden Sie uns Fehler per e-mail!
- Fred Böker: Mathematik für Wirtschaftswissenschaft + Übungsbuch, Person Studium
- Sydsaeter, Hammond, Strom: Mathematik für Wirtschaftswissenschaften (auch für „Mathematik WII“ geeignet)
- Ingolf Terveer: Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, UTB, (digital verfügbar)
- Guido Walz: Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen: Klartext für Nichtmathematiker (digital verfügbar)
- Göllmann, Henig: Arbeitsbuch zur linearen Algebra (digital verfügbar)
- Hans M. Dietz: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer 2012, Campuszugang: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-29985-8`
- Sydsæter, Hammond, Strøm: Essential Mathematics for Economic Analysis, Pearson

digital verfügbar über `https://bibliothek.uni-halle.de`, wenn man mit VPN bzw. über die Uni im Internet ist

Einführungsbeispiel

Problemstellung: Eine Firma produziert aus den Rohmaterialien R_1 (leichtes Rohöl, Kosten: 25 GE/ME) und R_2 (schweres Rohöl, Kosten: 20 GE/ME) die Endprodukte E_1 (Heizöl, Bedarf: 6 ME), E_2 (Benzin, Bedarf: 10 ME) und E_3 (Kerosin, Bedarf: 3 ME).
Dabei werden 20% / 40% / 30% des eingesetzten leichten Rohöls R_1 für die Produktion von E_1 / E_2 / E_3 sowie 50% / 25% / 10% des eingesetzten schweren Rohöls R_2 für die Produktion von E_1 / E_2 / E_3 verwendet.

Frage: Welche Mengen x_1 und x_2 der zu verarbeitenden Rohstoffe sind einzusetzen, wenn die Kosten minimiert und die Lieferverpflichtung eingehalten werden sollen?

Die Lieferverpflichtung im obigen Beispiel kann zum einen durch Eigenproduktion abgedeckt werden. Andererseits ist es auch denkbar, der Lieferverpflichtung durch Zukauf von E_1, E_2, E_3 nachzukommen.

Frage: Zu welchen Marktpreisen y_1, y_2, y_3 je ME von E_1, E_2, E_3 würde sich aus Sicht des Unternehmens ein Zukauf lohnen?

Hierbei handelt es sich um ein sog. **lineares Optimierungsproblem** mit Ungleichungsnebenbedingungen. **Ziel** der Mathematik W1 ist es u.a., Probleme dieses Typs zu lösen. Dafür sind verschiedene Kenntnisse aus der **Linearen Algebra** (Teil 1 der Vorlesung) erforderlich. Konkrete Lösungsverfahren werden im Teil 2 der Vorlesung **Lineare Optimierung** besprochen.

1 Lineare Algebra

1.1 Vektoren und Skalarprodukte

Beispiel 2 (Einkaufen)**.**
Welche Kosten K entstehen, wenn vom Produkt i mit $i = 1, \dots, n$ jeweils v_i Stück zum Preis p_i gekauft werden?

Lösung. Definiere Vektoren für Preis und Anzahl und berechne das Skalarprodukt $K = \langle p, v \rangle$:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad K = \langle p, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$$

$\square$

Bemerkung 3.

- Das Beispiel ist trivial, interessant ist die Notation und die anschließende Abstraktion.
- Die Dimension n des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ ist oft hoch, also $n \gg 3$.

- Sinnvolle Operationen:
  - Vektoraddition $v + w$, Vektorsubtraktion $v - w$
  - Multiplikation mit Skalar, z.B., $b = 1{,}19 \cdot p$ oder $r = (-1) \cdot p = -p$
  - Skalarprodukte

$\square$

1.1.1 Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Definition 4 (Vektoraddition und Multiplikation mit Skalar)**.**
Seien x, y Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Definiere komponentenweise Addition und Multiplikation mit Skalar:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad ax = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

Setze $x - y = x + (-1)y$. □

Satz 5 (Vektorraumeigenschaft des $\mathbb{R}^n$)**.** Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $x + y = y + x$ (Kommutativität)

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativität)

(iii) $a(x + y) = ax + ay$ (Distributivität)

(iv) $(a + b)x = ax + bx$ (Distributivität)

(v) $(ab)x = a(bx)$

Beweis. Für (iii) an der Tafel. □

1.1.2 Euklidisches Skalarprodukt

Definition 6 (Euklidisches Skalarprodukt)**.**
Seien x und y Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

Euklidisches Skalarprodukt. $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ bezeichnet die Länge des Vektors x. $\square$

Das Skalarprodukt ist demnach eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Hinter der Definition der Länge verbirgt sich der Satz des Pythagoras.

Satz 7 (Eigenschaften des Euklidischen Skalarprodukts)**.**
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)

(ii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ sowie $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$ (Linearität)

(iii) $|x| > 0$ für $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (Definitheit)

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

$\square$

Satz 8 (Weitere Eigenschaften des Euklidischen Skalarproduktes)**.**
Für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(i) $\langle x, y\rangle = |x||y| \cos(\measuredangle(x, y))$, (Allgemeiner Kosinus-Satz)

wobei $\measuredangle(x, y)$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren x und y ist.

(ii) $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$\square$

Definition 9 (Orthogonalität)**.**
Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal zueinander*, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ ist. $\square$

Bemerkung 10. Nach Satz 8 beträgt der Winkel zwischen orthogonalen Vektoren $90°$. $\square$

Beispiel 11. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

- $\langle x, x \rangle = 9 \quad \Rightarrow \quad |x| = 3$
- $\langle y, y \rangle = 25 \quad \Rightarrow \quad |y| = 5$
- $\langle x, y \rangle = -6$
- $\cos(\measuredangle(x, y)) = \frac{-6}{3 \cdot 5} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(x, y) = \arccos(-\frac{6}{15}) \approx 113{,}6°.$

□

Bemerkung 12. Einstellung des Taschenrechners beachten! □

Bemerkung 13. Der Winkel zwischen Vektoren lässt sich zur Bildung von Gruppen verwenden, z.B. für Kundenprofile:

modebewusste / preisbewusste / „Ökos“ / Kunden mit Geld / ...

□

Definition 14 (Einheitsvektoren)**.**
Die Vektoren
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
heißen *Einheitsvektoren* des $\mathbb{R}^n$. Der i-te Einheitsvektor hat an der Stelle i eine Eins und sonst nur Nullen. □

Satz 15. Die Einheitsvektoren $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, d.h., jeder Vektor x besitzt eine eindeutige Darstellung der Form:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

□

Bemerkung 16. Den Begriff **Basis** erklären wir in Kürze genauer. □

1.2 Matrizen

Beispiel 17. Auf Lebensmittelverpackungen findet man z.B. die Zusammensetzung des Produktes in Gramm pro 100 Gramm:

	Schokolade	Erdnüsse	Gummitiere
Fett	36	31	0,5
Kohlenhydrate	48	40	77
Eiweiß	6	14	7
Salz	0,04	2,28	0,07

Wie viel (Fett, Kohlenhydrate, Eiweiß, Salz) haben (400g Schokolade, 200g Erdnüsse und 500g Gummitiere) zusammen?

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 36 & 31 & 0{,}5 \\ 48 & 40 & 77 \\ 6 & 14 & 7 \\ 0{,}04 & 2{,}28 & 0{,}07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208{,}5 \\ 657 \\ 87 \\ 5{,}07 \end{pmatrix}$$

□

Beispiel 18 (Lineares Produktionsmodell, Formalisierung von Beispiel 17)**.**
Wir betrachten m verschiedene Produkte, die aus n verschiedenen Rohstoffen hergestellt werden. Die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bezeichnen die Produktions- und die zugehörige Rohstoffmenge. Der Anteil am Rohstoff i im Produkt j sei a_{ij}. Dann haben wir die Tabelle

$$\begin{array}{r|ccc} & & \text{Produkt} & \\ & 1 & \dots & m \\ \hline 1 & & & \\ \text{Rohstoff}\ \vdots & & (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} & \\ n & & & \end{array}$$

und es gilt $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$. $\square$

Definition 19 (Matrix)**.**
Ein rechteckiges Schema mit n Zeilen und m Spalten der Form

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

mit Elementen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt (n, m)-Matrix. □

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ beschreibt eine *lineare* Abbildung:

$$\begin{aligned} A \colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax = y \end{aligned}$$

Definition 20 (Matrix–Vektor–Produkt)**.**
Für $x \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ heißt $y \in \mathbb{R}^n$

$$y = Ax, \quad \text{mit} \quad y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

Matrix–Vektor–Produkt. □

Beispiel 21. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad Ax = ?$$

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Bemerkung 22. Das Produkt Ae_j ergibt gerade die j-te Spalte von A. $\square$

Satz 23 (Linearität)**.**
Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix ist eine *lineare Abbildung*, d.h., es gilt

$$\begin{aligned} A(x+\widehat{x}) &= Ax + A\widehat{x} \quad \text{sowie} \\ A(\alpha x) &= \alpha(Ax) \end{aligned}$$

für $x, \widehat{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Kurz: Verdoppelt man die Produktion, so sind doppelt so viele Rohstoffe nötig usw.

Bemerkung 24. Linearität ist eine sehr wichtige Eigenschaft. In Anwendungen gilt sie oft nur für kleine Änderungen: Zwei Köche sind doppelt so produktiv wie einer. Zehn Köche sind aber nicht unbedingt zehnmal so produktiv. $\square$

Definition 25 (Transponierte Matrix)**.**
Sei A eine (n, m)-Matrix. Die (m, n)-Matrix, die entsteht, wenn man die Rolle von Zeilen und Spalten vertauscht, heißt *transponierte Matrix*. Man schreibt A^T. Es gilt $(A^T)^T = A$. $\square$

Definition 26. Sei A eine quadratische Matrix. Gilt $A = A^T$, so heißt A *symmetrisch*. $\square$

Bemerkung 27. Fasst man Vektoren als $(n, 1)$-Matrizen auf („Spaltenvektoren"), so werden sie beim Transponieren zu $(1, n)$-Matrizen („Zeilenvektoren"). $\square$

Beispiel 28.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T =? \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T =?$$

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Definition 29 (Addition von Matrizen, Multiplikation mit Skalar, Nullmatrix, Gleichheit)**.**
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $c \in \mathbb{R}$.

- Addition von Matrizen

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

- Multiplikation mit Skalar

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nm} \end{pmatrix}.$$

- Die Matrix $O \in \mathbb{R}^{n,m}$, die nur aus Nullen besteht, heißt *Nullmatrix*.

- Zwei Matrizen sind *gleich*, wenn $A - B = O$ ist.

$\square$

1.2.1 Matrizenmultiplikation

Definition 30 (Matrizenmultiplikation)**.**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,k}$ und $B \in \mathbb{R}^{k,m}$. Setze $C \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit

$$C = AB \quad \text{mit} \quad c_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} a_{i,l} b_{l,j}.$$

□

Bemerkung 31. Die Matrizen A und B müssen *verkettet* sein, damit AB existiert, d.h., die Anzahl der Spalten von A ist gleich der Anzahl der Zeilen von B. Das Ergebnis C hat so viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B. □

Beispiel 32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =? \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =?$$

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{nicht verkettet}$$

□

Definition 33 (Einheitsmatrix)**.**
Die quadratische Matrix $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

heißt *Einheitsmatrix* der Dimension n. □

Satz 34. Für die Matrizenmultiplikation gilt

(i) $AI = IA = A$ (Einheitsmatrix ist neutrales Element)

(ii) $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativität)

□

Achtung: Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht kommutativ**, d.h. $AB \neq BA$. D.h., es ist stets darauf zu achten, ob man von links oder von rechts multipliziert.

Beispiel 35.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =?$$

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Beispiel 36.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$\square$

Der folgende Satz erklärt, warum die Multiplikation so (kompliziert) definiert wird: Sie entspricht der Hintereinanderausführung von zwei linearen Abbildungen, aus $x \stackrel{B}{\to} y \stackrel{A}{\to} z$ wird ein Schritt $x \stackrel{C}{\to} z$ mit $C = AB$.

Satz 37. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,k}$, $B \in \mathbb{R}^{k,m}$ und $C \in \mathbb{R}^{n,m} = AB$. Dann gilt $Cx = A(Bx)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$.

Beweis. Mit Satz 15 genügt es, für x Einheitsvektoren e_j zu wählen. Dann ist

$$Bx = Be_j = j\text{-te Spalte von } B.$$

Aus $A(Bx)$ wird dann $A(j$-te Spalte von $B)$ und dieses Matrix-Vektor-Produkt ergibt die obige Formel für $c_{i,j}$. □

Satz 38. $(AB)^T = B^T A^T$

Beweis. Sei $C = AB$.

$$\begin{aligned} C^T_{ij} = C_{ji} &= \langle j\text{-te Zeile von } A, i\text{-te Spalte von } B \rangle \\ &= \langle i\text{-te Zeile von } B^T, j\text{-te Spalte von } A^T \rangle = (B^T A^T)_{ij}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 39. Seien $x^T = (1, 2)$ und $y^T = (3, 4)$. $x^T y =?$, $y^T x =?$, $xy^T =?$

Lösung.

$$\begin{aligned} x^T y = y^T x = \langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 11 \\ xy^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Beispiel 40 (Nullteiler)**.**

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also gibt es Matrixprodukte, die Null sind, obwohl kein Faktor null ist: $AB = 0$, mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$. □

Beispiel 41. Im einführenden Beispiel 17 hatten wir $y = Ax$ mit Nährstoffe $y \xleftarrow{A}$ Lebensmittel x betrachtet, wobei die Matrix $A = (a_{ij})$ ausdrückt, wie viel Nährstoff i im Lebensmittel j enthalten ist.
Wir nehmen jetzt an, dass aus Rohstoffen/Ressourcen y zunächst Zwischenprodukte z hergestellt werden. In einem zweiten Schritt werden daraus, und unter Verwendung weiterer Ressourcen, Endprodukte x gefertigt. Wie viele Ressourcen y sind für die Produktion von x einzusetzen?

Lösung. (i) Zwischenprodukte $z = Cx$

(ii) Endprodukte $y = Az + Bx$

Also ist $y = A(Cx) + Bx = (AC + B)x$.

Für gegebene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad AC + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 22 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Bemerkung 42 (Octave)**.** Software für Vektor- und Matrizenrechnung, auch online unter https://octave-online.net/.
Das Beispiel 17 kann wie folgt gerechnet werden:

```
A = [36 31 0.5; 48 40 77; 6 14 7; 0.04 2.28 0.07]
b = [4; 2; 5]
A*b
```

1.2.2 Linearkombination, Basis und Dimension

Definition 43 (Linearkombination)**.**
Seien v_i, $i = 1, \dots, m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Ein Ausdruck der Form

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

mit Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ heißt *Linearkombination* der Vektoren. $\square$

Die Menge aller Linearkombinationen ist ein linearer Raum. Z.B. spannen zwei Vektoren, die nicht zueinander parallel sind, eine Ebene auf.

Definition 44 (Linearer Raum)**.**
Eine Menge M heißt *linearer Raum*, falls M bezüglich Addition und bezüglich Multiplikation mit einem Skalar abgeschlossen ist. Also

$$x, y \in M \quad \Rightarrow \quad x + y \in M$$

und

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in M$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Beispiel 45. Die Menge M aller Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x, w \rangle = 0$ mit $w^T = (1, 2, 3)$ ist ein linearer Raum. Es handelt sich um eine Ebene durch den Ursprung, die senkrecht zum Normalenvektor w ist.
Aus der impliziten Form können wir durch Lösen einer linearen Gleichung auch eine Parameterdarstellung gewinnen:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -2x_2 - 3x_3.$$

Also sind $v_1 = (-2, 1, 0)^T$ und $v_2 = (-3, 0, 1)^T$ Richtungsvektoren (in M) und es gilt

$$M = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \colon \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

□

Definition 46 (Linear abhängig)**.**
Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_m\}$ heißt *linear abhängig*, wenn eine Linearkombination existiert, so dass

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei mindestens ein α_i nicht Null ist. □

Definition 47 (Basis)**.**
Sei M ein linearer Raum. Eine Menge $B \subset M$ mit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_d\}$ heißt *Basis von* M, falls sich jedes Element $x \in M$ auf eindeutige Weise als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i b_i$, $b_i \in B$ darstellen lässt. Die Anzahl d der Element von B heißt Dimension von M, in Zeichen $\dim(M) = |B| = d$. □

Bemerkung 48. Die Vektoren einer Basis sind linear unabhängig. □

Beispiel 49. Sei $M = \mathbb{R}^n$. Dann ist $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis und $\dim(M) = n$. Man nennt diese Basis aus Einheitsvektoren kanonische Basis. □

Beispiel 50. Untersuchen Sie, ob die Menge $B = \{(1,2,3)^T, (3,4,5)^T, (-1,0,1)^T\}$ linear unabhängig ist.

Lösung. Wir bestimmen die Koeffizienten α_1, α_2 und α_3 durch ein lineares Gleichungssystem: Sei

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion des Doppelten bzw. Dreifachen der ersten Zeile von den beiden anderen Zeilen liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können α_3 frei wählen, z.B. $\alpha_3 = 1$ und erhalten durch Rücksubstitution die Lösung $\alpha_2 = 1$ und $\alpha_1 = -2$. Also ist B linear abhängig und die Dimension des Raumes der Linearkombinationen ist 2. $\square$

1.2.3 Gaußsches Eliminations-Verfahren

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in der Darstellung auf den quadratischen Fall, $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Die Lösungsmenge ändert sich nicht beim Vertauschen von Zeilen in der erweiterten Matrix $[A, b]$ und auch nicht bei der Addition vom Vielfachen einer Zeile auf eine andere. Ziel des Eliminationsverfahrens ist eine *Stufenform*, weil dann die Lösungsstruktur abgelesen werden kann, vgl. Abbildung 1.

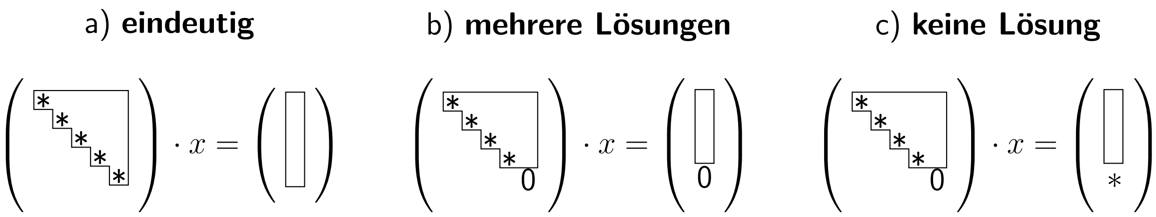


Abbildung 1: Die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems in Stufenform, wobei $* \neq 0$.

Der Algorithmus läuft in zwei Phasen:

- [Phase 1: Eliminination] Transformiere die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|b]$ in Stufenform durch Addition von Vielfachen von Zeilen auf andere.

- [Phase 2: Rücksubstitution] Löse das System in Stufenform schrittweise auf.

Beispiel 51 (Lösung des LGS $Ax = b$).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Rechnerei}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösung ist somit eine Ebene im $\mathbb{R}^5$:

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{linearer Raum der Dimension 2} \\ = \text{Lösung des homogenen Systems } Ax = 0 \\ = \text{Kern der Matrix } A}}$$

Von ursprünglich fünf Gleichungen sind drei übrig geblieben. Folglich können wir zwei Variablen frei wählen und dann, mit Hilfe der drei unabhängigen Gleichungen, nach den drei restlichen Variablen auflösen. Diese Rechnung mit den Dimensionen, $5 = 3 + 2$, gilt auch allgemein. $\square$

Definition 52 (Rang)**.** Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen einer Matrix heißt *Rang der Matrix*. Ist $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $\operatorname{rang}(A) = \min(n, m)$, so hat A *Vollrang*. □

Der Rang einer Matrix kann mit Hilfe des Gaußalgorithmus bestimmt werden, weil die Zeilenumformungen den Rang nicht verändern. An der Dreiecksform kann der Rang dann abgelesen werden, siehe Abbildung 2. Man sieht auch, dass $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$ ist, d. h., Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix stimmen überein.

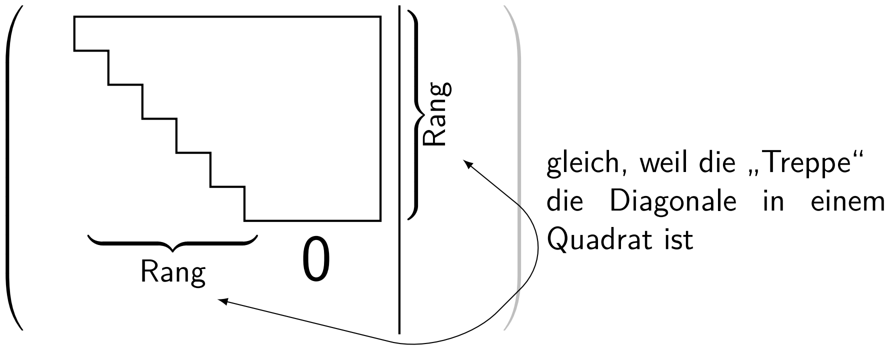


Abbildung 2: Rang einer Matrix in Stufenform

Satz 53. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dann gilt

$$n = \text{Rang von } A + \text{Dimension des Lösungsraums } \{x\colon Ax = 0\}. \quad \square$$

1.3 Matrixinverse

Satz 54. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = n$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Beweis. Zur Existenz: Die j-te Spalte von A^{-1} kann mittels des Gaußalgorithmus aus dem linearen Gleichungssystem $A(A^{-1}e_j) = e_j$ bestimmt werden. Für die praktische Berechnung können diese Gleichungssysteme gleichzeitig gelöst werden, d. h., man berechnet $X = A^{-1}$ als Lösung von $AX = I$.

Auch die Eindeutigkeit folgt direkt aus dem Gaußalgorithmus: Seien $AX = A\widehat{X} = I$. Dann ist $A(X - \widehat{X}) = 0$. Aus $\operatorname{rang}(A) = n$ folgt, dass die Stufenform von A nicht verschwindende Diagonalelemente hat und somit $X = \widehat{X}$ gilt.

Bleibt noch zu zeigen, dass die Linksinverse X mit $AX = I$ mit der Rechtsinversen Y (deren Existenz noch separat zu begründen wäre) mit $YA = I$ übereinstimmt. Das folgt mittels der Assoziativität, denn

$$Y = YI = Y(AX) = (YA)X = X,$$

d. h., wir können das Symbol A^{-1} sowohl für X als auch für Y verwenden, da beide Inverse übereinstimmen. $\square$

Definition 55. Existiert die Inverse, so heißt eine quadratische Matrix *regulär* und andernfalls *singulär*.

Satz 56. Seien A und B regulär. Dann ist AB auch regulär und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Beispiel 57. Für 2×2-Matrizen kann man die Inverse sofort angeben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass eine 2×2-Matrix genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$.
Schon bei 3×3 wird es wesentlich aufwendiger, so dass der Gaußalgorithmus angewandt auf $AX = I$ die Methode der Wahl ist. □

Beispiel 58. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^{-1} =?$

Lösung.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Probe. ✓)

□

Beispiel 59 (Das Gauß-Jordan-Verfahren zur Berechnung von Inversen)**.** Bisher haben wir Vielfache von Zeilen auf darunterliegende addiert, um Nullen zu erzeugen. Beim *Gauß-Jordan-Verfahren* erzeugt man zusätzlich Nullen oberhalb der aktuellen Zeile durch Addition auf darüberliegende Zeilen und erhält so am Ende eine Diagonalmatrix. Wir betrachten als Beispiel die Berechnung der Inversen von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Durch Zeilenoperation transformieren wir nun die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $AX = I$ auf die Einheitsmatrix.

Lösung.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle kann man z.B. Octave bemühen via

```
format rat   % Ausgabe mit Brüchen formatieren
inv([1 -1 -1; 1 0 1; 1 2 -1])
```

Beispiel 60 (Leontief-Modell)**.** Angenommen, ein Betrieb stellt Produkte her, die er teilweise selbst verbraucht (ein Kraftwerk produziert und benötigt Wärme und Strom, ein Koch muss essen und eine Universität stellt ihre eigenen Absolventen ein ...), dann unterscheiden sich Bruttoproduktion x und Nettoproduktion y um den Eigenbedarf z, der selbst von der Höhe der Bruttoproduktion abhängt, $z = Ax$. Welche Bruttoproduktion x ist nötig, um eine gewünschte Nettoproduktion y zu erzeugen?

Lösung. $y = x - z = x - Ax = (I - A)x$, also $x = (I - A)^{-1}y$.

□

1.3.1 Determinanten

Die Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ spannen ein Volumen V auf, für $n = 2$ ist V die Fläche des Parallelogramms, für $n = 3$ ist V das Volumen des Parallelepipeds (mitunter auch Spatprodukt genannt). Fasst man die Vektoren spaltenweise in einer quadratischen $n \times n$ Matrix $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ zusammen, **so ist** $V = \det(A)$ **das verallgemeinerte (vorzeichenbehaftete) Volumen.**

Definition 61 (Antisymmetrische Multilinearform)**.** Die Funktion $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit

$$\det(I) = 1 \tag{1a}$$
$$\det([\alpha a_1 + \beta b_1, a_2, \ldots, a_n]) = \alpha \det([a_1, a_2, \ldots, a_n]) + \beta \det([b_1, a_2, \ldots, a_n]) \tag{1b}$$
$$\det([\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots]) = -\det([\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots]), \quad i \neq j. \tag{1c}$$

heißt *Determinante*. □

Die Linearität (1b) gilt wegen (1c) nicht nur für die erste, sondern für alle Spalten.
Durch (1) ist die Determinante bereits eindeutig festgelegt, für $n \leq 3$ ergibt sich folgende Tabelle:

n	$A \in \mathbb{R}^{n,n}$	$\det(A)$
1	a	a
2	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Der Fall $n = 3$ heißt *Regel von Sarrus*.

Beispiel 62.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =? \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =?$$

Lösung.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = -2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 6 + 10 - 6 - 4 - 0 = 6$$

□

Satz 63. (i) Skaliert man eine Spalte mit α, so wird auch die Determinante mit α skaliert. Speziell: Besteht eine Spalte einer Matrix nur aus Nullen, so verschwindet die Determinante.

(ii) Sind zwei Spalten Vielfache voneinander, so verschwindet die Determinante.

(iii) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn ein Vielfaches von einer Spalte auf eine andere Spalte addiert wird.

Beweis. (i) Die Aussage ist ein Spezialfall von (1b) für $\beta = 0$,

$$\det([\alpha \cdot a_1, a_2, \dots, a_n]) = \alpha \cdot \det([a_1, a_2, \dots, a_n])$$

(ii) Wegen (i) genügt es, zwei gleiche Spalten zu betrachten. Tauscht man die, so erhält man dieselbe Matrix, deren Determinate aber das Negative der Determinante der Ausgangsmatrix sein muss:

$$\det([a_1, a_1, \dots]) = -\det([a_1, a_1, \dots]), \quad \Longrightarrow \det([a_1, a_1, \dots]) = 0.$$

(iii) Aussage (iii) ist eine Verallgemeinerung des Prinzips von Cavalieri; sie ergibt sich unmittelbar aus (ii), denn

$$\det([a_1, a_2 + \alpha_1 a_1, \dots]) = \det([a_1, a_2, \dots]) + \det([a_1, \alpha_1 a_1, \dots]) = \det([a_1, a_2, \dots]) + 0.$$

Anschaulich: Das Volumen eines Stapels Bücher ändert sich bei Scherung nicht, mit der Operation $a_2 \mapsto a_2 + \alpha_1 a_1$ wird der schiefe Turm gerade (ohne, dass das Volumen geändert wird).

□

1.3.2 Elementarmatrizen

Wir haben beim Gaußalgorithmus Operationen auf den Zeilen einer Matrix A ausgeführt, nämlich Vielfache von Zeilen auf andere addiert, Zeilen getauscht und Zeilen skaliert. Dieser Operationen können wir durch quadratische Matrizen, die von links an die Matrix A multipliziert werden, formal beschreiben. Die zu diesen Operationen gehörenden *Elementarmatrizen* sind Additionsmatrizen $R_{ij}(\alpha) = I + \alpha e_j e_i^T$ (die das α-fache der i-Zeile auf die j-te addieren), Vertauschungsmatrizen $T_{ij} = I - e_i e_i^T - e_j e_j^T + e_i e_j^T + e_j e_i^T$ (die Zeilen i und j tauschen) und Skalierungsmatrizen $S_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)e_i e_i^T$ (die Zeile i mit Faktor α multiplizieren). Um das einzusehen, überlegt man sich, dass $e_i^T A$ gerade die i-te Zeile von A ist und somit $e_j e_i^T A$ eine Matrix, die in der j-Zeile die i-te Zeile der Matrix A enthält und sonst nur Nullen.
Multipliziert man mit den Elementarmatrizen von rechts, so ergeben sich Spaltenoperationen.

Beispiel 64. Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren können wir jede quadratische Matrix als Produkte von Elementarmatrizen darstellen: Wir transformieren die Matrix auf Diagonalform und klammern anschließend die Diagonalelemente, die auch Null sein können, aus. Weil wir die Determinate als Funktion von Spalten auffassen, arbeiten wir jetzt mit Spaltenoperationen von rechts:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_2(-2) R_{12}(1) R_{21}(3) T_{12}.$$

□

Die Aussagen von Satz 63 können wir in der Sprache der Elementarmatrizen so ausdrücken:

$$\det(AS_i(\alpha)) = \alpha \det(A), \quad \det(AR_{ij}(\alpha)) = \det(A), \quad \det(AT_{ij}) = -\det(A) \quad (i \neq j). \tag{2}$$

Mit $A = I$ erhält man

$$\det(S_i(\alpha)) = \alpha, \quad \det(R_{ij}(\alpha)) = 1, \quad \det(T_{ij}) = -1 \quad (i \neq j)$$

und (2) wird zu

$$\det(AE) = \det(A) \cdot \det(E)$$

für jede Elementarmatrix E.

Beispiel 65 (Fortsetzung von Beispiel 64)**.**

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \det \left(IS_2(-2)R_{12}(1)R_{21}(3)T_{12} \right) = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 2$$

□

Satz 66 (Determinantenmultiplikationssatz)**.** Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Beweis. Wir stellen A und B jeweils als Produkte von Elementarmatrizen dar. Seien $A = E_1 \cdots E_k$ und $B = \widehat{E}_1 \cdots \widehat{E}_l$. Wegen der Assoziativität der Matrizenmultiplikation können wir dann umklammern, alles mittels (2) in Einzelteile zerlegen und schließlich neu zusammenfügen:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k \cdot \widehat{E}_1 \cdots \widehat{E}_l) \\ &= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \cdot \det(\widehat{E}_1) \cdots \det(\widehat{E}_l) = \det(A) \cdot \det(B)\end{aligned}$$

□

Wenn wir A und B als lineare Abbildungen interpretieren, besagt der Multiplikationssatz, dass die Volumenänderung bei Hintereinanderausführung das Produkt der Volumenänderungen der beiden Teilabbildungen ist.

Satz 67. Transponieren ändert den Wert einer Determinante nicht, $\det(A) = \det(A^T)$ und sämtliche Determinatenrechenregeln aus Satz 63 gelten gleichermaßen für Spalten wie für Zeilen.

Beweis. Die Aussage gilt für die Elementaroperationen, in die wir alles zerlegen können. □

Satz 68 (Bedeutung der Determinante)**.** Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(ii) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(iii) $\mathrm{rang}(A) = n$.

(iv) Die Inverse A^{-1} existiert.

(v) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.

(vi) Aus $Ax = 0$ folgt $x = 0$.

(vii) $\det(A) \neq 0$

1.3.3 Entwicklung von Determinanten nach Laplace

Bei Prismen ist das Volumen gleich Grundfläche mal Höhe. Die Verallgemeinerung dazu ist der Satz von Laplace:

Satz 69 (Entwicklungssatz von Laplace)**.** Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$\det(A) = (-1)^{j+1}(a_{1j}\det(A_{1j}) - a_{2j}\det(A_{2j}) + \cdots) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})\,.$$

A_{ij} ist diejenige Teilmatrix von A, die durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.
□

Analog: Entwicklung nach der i-ten Zeile, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$.

Beispiel 70. Wir entwickeln nach der ersten Spalte:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -19 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot (-2)\det\begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 43 = -86$$

□

Beispiel 71. Wir entwickeln nach der 4-ten Zeile:

$$\det\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 9 & 2\\ 5 & 2 & 7 & 4\\ 2 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} = (-1)(2)\det\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 3 & 9 & 2\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix} + 0 - 3\det\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix} = 32 - 96 = -64$$

$\square$

Für große Matrizen $n > 3$, die wenig Nullen enthalten, ist die Berechnung der Determinante mit Hilfe des Entwicklungssatzes rechenaufwendig. Effizienter ist es, die Matrix durch Zeilen- oder Spaltenoperationen auf Dreiecksform zu bringen und dann die Hauptdiagonalelemente miteinander zu multiplizieren.

Satz 72. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix (d. h., $a_{ij} = 0$ für $i > j$). Dann ist die Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente, also:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich durch $n-1$-maliges Entwickeln nach der ersten Spalte. □

1.3.4 Cramersche Regel, Formel für die Inverse

Beispiel 73.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Angenommen, wir wollen x_1 bestimmen. Um den Koeffizienten vor x_2 auszulöschen, multiplizieren wir über Kreuz und ziehen dann voneinander ab: die erste Gleichung mal a_{22} und die zweite mal a_{12}. Es ergibt sich

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = (b_1a_{22} - b_2a_{12})$$

also

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems ist somit der Quotient von zwei Determinanten. □

Satz 74 (Cramersche Regel)**.**
$Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Dann ist

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)},$$

mit der Matrix $A_k = [a_1, a_2, \ldots, b, \ldots, a_n]$, die entsteht, indem die k-te Spalte von A durch die rechte Seite b ersetzt wird.

Beweis. Aus

$$\det(A(I - e_i e_i^T) + b e_i^T) = \det(A(I - e_i e_i^T) + Axe_i) = \det(A) \cdot \det(I + (x - e_i)e_i^T) = \det(A) \cdot x_i$$

folgt $x_i = \det(A)^{-1} \det(A$ mit i-ter Spalte durch b ersetzt). □

Beispiel 75 (Matrixinverse)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Suche $X = A^{-1}$. Also ist $AX = I$. Die j-te Spalte dieses Gleichungssystems ist $AXe_j = e_j$. Mit der Cramerschen Regel erhalten wir das (i, j) Element von A^{-1}, indem wir in A die i-te Spalte durch e_j ersetzen, d. h.,

$$a_{ij}^{-1} = \frac{\det([a_1, \ldots, e_j, \ldots, a_n])}{\det(A)}.$$

Die i-te Spalte hat nur eine 1, und wir können entwickeln

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

wobei die Matrix A_{ji} aus A entsteht, indem man die j-te Zeile und die i-te Spalte streicht. □

Beispiel 76.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 21 & -15 \\ 0 & -18 & 12 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$\square$

1.4 Komplexe Zahlen

Der Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen lässt sich durch Einführung der sog. **imaginären Einheit** i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ derart erweitern, dass Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ lösbar werden. Dieser erweiterte Zahlenbereich wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und umfasst die **komplexen Zahlen**.

- In $\mathbb{C}$ lässt sich jede algebraische Gleichung lösen.
- Mit Hilfe der komplexen Zahlen lassen sich Additionstheoreme einfach beweisen bzw. herleiten.
- Die komplexen Zahlen sind hilfreich in den Ingenieurswissenschaften, der Physik und anderen Naturwissenschaften.

Definition 77. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in der Form

$$z = a + ib$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen. Dabei heißen

$$a = \operatorname{Re} z \qquad \text{und} \qquad b = \operatorname{Im} z$$

der **Realteil** bzw. **Imaginärteil** von z. Die Zahl

$$\bar{z} = a - bi$$

ist die zu z **komplex konjugierte Zahl** und

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ist der **Betrag** von z. $\square$

Es gelten die üblichen Rechengesetze: Kommutativgesetz Addition/Multiplikation, Assoziativgesetz Addition/Multiplikation, Distributivgesetz. Die komplexen Zahlen lassen sich in der sog. komplexen Zahlenebene graphisch darstellen mit dem Realteil auf der x-Achse und dem Imaginärteil auf der y-Achse. Dies gestattet folgende Interpretationen:

- Addition komplexer Zahlen: Vektoraddition
- Konjugieren: Spiegelung an der reellen Achse
- Betrag: Abstand zum Ursprung
- Multiplikation komplexer Zahlen: Drehung um den Ursprung

Beispiel 78. Gesucht: $(3+2i)(4-6i)$, $\frac{3+i}{4-6i}$, $|4-6i|$

Lösung.

$$
\begin{aligned}
(3+2i)(4-6i) &= 12-18i+8i-12i^2 = 24-10i \\
\frac{3+i}{4-6i} = \frac{(3+i)(4+6i)}{(4-6i)(4+6i)} = \frac{12+18i+4i+6i^2}{16-36i^2} = \frac{6+22i}{52} &= \frac{3}{26}+\frac{11}{26}i \\
|4-6i| &= \sqrt{4^2+(-6)^2} = \sqrt{52}
\end{aligned}
$$

□

1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 79. Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A mit zugehörigem *Eigenvektor* $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, wenn

$$Av = \lambda v \tag{3}$$

erfüllt ist. Die Menge aller Eigenwerte eine Matrix heißt *Spektrum*, $\sigma(A) := \{\lambda\colon \text{ es gibt } v \neq 0 \text{ mit } Av = \lambda v\}$. □

Bemerkung 80. Wir werden uns auf reelle Matrizen beschränken. **Beachte:** Auch reelle Matrizen können komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen. Auch diese spielen in den Anwendungen wichtige Rollen. □

Satz 81. Die Eigenwerte einer Matrix A sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Das Polynom $\det(A - \lambda I)$ heißt *charakteristisches Polynom*, es hat Grad n in λ. Jede Matrix hat genau n Eigenwerte, wenn man die Vielfachheiten mitzählt.

Beweis. $Av = \lambda v$ ist äquivalent zu $(A - \lambda I)v = 0$. Letzteres ist ein homogenes lineare Gleichungssystem und genau dann nichttrivial lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Durch Entwickeln sieht man, dass die höchste Potenz im charakteristischen Polynom gerade $(-1)^n \lambda^n$ ist. Dass ein Polynom von Grad n genau n Nullstellen hat, ist der Fundamentalsatz der Algebra.

$\square$

Beispiel 82. Gesucht: Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$. Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Durch anschließendes Lösen der Eigenvektorgleichung (3) erhält man $v_1 = (1, 1)^\top$ und $v_2 = (1, -1)^\top$.

$\square$

Beispiel 83. Gesucht: Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$. Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Durch anschließendes Lösen der Eigenvektorgleichung (3) erhält man $v_1 = (1, -i)^\top$ und $v_2 = (1, i)^\top$.

$\square$

Bemerkung 84. Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ (mit $\lambda \notin \mathbb{R}$) Eigenwert der **reellen** Matrix A ist, dann ist auch $\bar{\lambda}$ Eigenwert von A. $\square$

Beispiel 85 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren)**.** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = (0,0,1)^\top, v_2 = (-2,1,0)^\top, v_3 = (-3,2,1)^\top.$$

Setzt man

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so gilt

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Eigenschaften von Eigenwerten

(i) Die Eigenwerte von A und $A^\top$ sind gleich. Beweis: $\det(A - \lambda I) = \det(A^\top - \lambda I)$. Die Eigenvektoren von A und $A^\top$ sind i. Allg. *nicht* gleich.

(ii) Angenommen, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ hat n linear unabhängige Eigenvektoren (d. h., zu jedem q-fachen Eigenwert gibt es q Eigenvektoren). Dann ist

$$A \underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_n]}_{=:V} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] D$$

mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Also ist $A^n = V D^n V^{-1}$

(iii) Die Eigenwerte von Diagonalmatrizen sind die Diagonaleinträge, da für $D \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ gilt $De_j = d_j e_j$.

(iv) Die Eigenwerte von A und $V^{-1}AV$ sind gleich. Beweis: $\det(A - \lambda I) = \det(V^{-1}AV - \lambda V^{-1}V) = \det(V^{-1}AV - \lambda I)$.

(v) A ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte ungleich null sind. Beweis: Genau dann, wenn $Av = 0$ nichttrival lösbar ist, sind die Spalten von A linear abhängig und A nicht invertierbar.

(vi) Die Eigenwerte von A^{-1} sind Eins durch die Eigenwerte von A: $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \colon \lambda \in \sigma(A)\}$.

(vii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sigma(A^k) = \{\lambda^k \colon \lambda \in \sigma(A)\}$.

(viii) Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte reell.

(ix) Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, so sind die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal zueinander.

Beweis. Sei $Av = \lambda v$ und $Aw = \mu w$. Wegen $A = A^T$ ist dann auch $w^T A = \mu w^T$. Also:

$$\mu w^T v = (w^T A)v = w^T(Av) = \lambda w^T v.$$

Mit $\mu \neq \lambda$ folgt $w^\top v = 0$. □

(x) Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar, d. h., es gibt V mit $V^T AV = D$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (ohne Beweis).

Beispiel 86. Auf einem Markt konkurrieren zu einem Zeitpunkt $t = 0$ zwei Produkte mit den Marktanteilen $0{,}3$ und $0{,}7$. Bezeichne $a_{ij} = P(j \to i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde in einem Zeitschritt vom Produkt j auf Produkt i wechselt (bzw. nicht wechselt, für $j = i$). Die Matrix $A = (a_{ij})$ der Käuferfluktuation sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}35 \\ 0{,}25 & 0{,}65 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Marktanteile zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$, sowie für $t \to \infty$.

Lösung. Sei $x(t)$ der Markt zum Zeitpunkt t. Dann gilt: $x(0) = (0{,}3, 0{,}7)^T$ und $x(t+1) = Ax(t)$. Wir erhalten $x(1) = (0{,}47, 0{,}53)^T$ und $x(2) = (0{,}538, 0{,}462)^T$. Allgemein ergibt sich $x(t) = A^t x(0)$. Für die stationären Markt y gilt $Ay = y$. Also ist y ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, d.h. $-0{,}25 y_1 + 0{,}35 y_2 = 0$. Als zweite Gleichung normieren wir $y_1 + y_2 = 1$, weil es sich um eine Verteilung handelt. Lösung ist $y = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})^T = (0{,}58\overline{3}, 0{,}41\overline{6})$. Da der zweite Eigenwert von A kleiner als 1 ist ($\lambda_2 = \frac{2}{5}$) strebt der Markt schnell zum Gleichgewichtszustand.

$\square$

Beispiel 87 (Die Fibonacci–Folge)**.** Durch $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ erhält man die Folge der Fibonacci–Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$$

Mit Matrizenrechnung wollen wir nun eine Formel für das n-te Glied der Reihe bestimmen. Wir bilden $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und erhalten wegen

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Beziehung $A^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}$.
Um A auf Diagonalform zu transformieren berechnen wir die Eigenwerte aus $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, d. h., $\lambda_{1/2} = \left(\sqrt{5} \pm 1\right)/2$. Die Eigenvektoren sind $v_1 = (\lambda_1, 1)^\top$ und $v_2 = (\lambda_2, 1)^T$.
Mit $V = [v_1, v_2]$ gilt $V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Wir erhalten schließlich die *Formel von Binet*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

$\square$

Rechnung in OCTAVE:

```
>> A = [1 1; 1 0]; A^10, [V, Lam] = eig(A); inv(V)*Lam^10*V
```

1.6 Verallgemeinerte Eigenvektoren - Hauptvektoren

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ besitzt n Eigenwerte. Dies garantiert jedoch nicht die Existenz von n linear unabhängigen Eigenvektoren.

Beispiel 88. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ aber nur den einen Eigenvektor $v = (1\,,\,0)^T$ (bzw. skalare Vielfache). Man sagt: Der Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt die algebraische Vielfachheit 2, aber nur die geometrische Vielfachheit 1. $\square$

Definition 89. Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwertes λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Die **geometrische Vielfachheit** ist die Anzahl der zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren. $\square$

Bemerkung 90. Ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix kleiner als dessen algebraische Vielfachheit, dann ist diese Matrix nicht diagonalisierbar. $\square$

Definition 91. Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Der Vektor $w \in \mathbb{C}^n$ heißt **Hauptvektor** von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls

$$(A - \lambda I)^m w = 0 \qquad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Sei v ein zu λ gehöriger Eigenvektor, dann heißt $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ eine **Kette von Hauptvektoren**, wenn gilt

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I)v &= 0 \\
(A - \lambda I)w_1 &= v \\
(A - \lambda I)w_2 &= w_1 \\
&\vdots \\
(A - \lambda I)w_k &= w_{k-1}
\end{aligned}$$

und $(A - \lambda I)x = w_k$ keine Lösung besitzt. □

Beispiel 92. Gesucht: Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren und Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = (-\lambda + 4)^3 \,.$$

Folglich besitzt A den 3-fachen Eigenwert $\lambda = 4$. Wir finden den Eigenvektor $v = (1, 1, 1)^T$, aber keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor. Löse

$$(A - 4I)w_1 = v \qquad \text{und anschließend} \qquad (A - 4I)w_2 = w_1 \,.$$

Wir finden $w_1 = (0, -1, -1)^T$ und $w_2 = (-2, 0, 1/2)^T$.

Wir bilden die Matrix $V = (v, w_1, w_2)$ und berechnen

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die sog. **Jordansche Normalform** der Matrix A.

□

1.7 Quadratische Formen

Definition 93. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann heißt der Ausdruck $x^T Ax$ *quadratische Form*. $\square$

Definition 94. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt

- *positiv–definit*, wenn für $x^T Ax > 0$ für alle $x \neq 0$,
- *positiv–semidefinit*, wenn für $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \neq 0$,
- *negativ–definit*, wenn für $x^T Ax < 0$ für alle $x \neq 0$,
- *negativ–semidefinit*, wenn für $x^T Ax \leq 0$ für alle $x \neq 0$,
- *indefinit*, wenn es x mit $x^T Ax > 0$ und $\widehat{x}$ mit $\widehat{x}^T A\widehat{x} < 0$ gibt.

$\square$

Satz 95. Ist A positiv–definit/–semidefinit so ist $-A$ negativ–definit/–semidefinit.

Beweis. $x^T(-A)x = -x^T Ax$. $\square$

Satz 96. Eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ ist genau dann positiv–definit, wenn alle Diagonaleinträge positiv sind.

Beweis. Sei D positiv–definit. Dann ist $0 < e_i^T De_i = d_i$. Seien umgekehrt alle d_i positiv. Dann ist $x^T Dx = \sum d_i x_i^2 > 0$. $\square$

Satz 97. Eine **symmetrische Matrix** ist genau dann positiv–definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Beweis. Sei $V^TAV = D$ die Diagonalisierung von A. Dann ist $x^TAx = x^TVV^TAVV^Tx = y^TDy$ mit $y = V^Tx$. Die Behauptung folgt nun mit Satz 96. □

Beispiel 98. Für nicht symmetrische Matrizen kann die quadratische Form bei positiven Eigenwerten auch indefinit sein:

$$(1,1)\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = -8$$

und $\sigma\left(\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \{1,1\}$. □

Satz 99 (Hesse–Determinanten–Satz)**.** Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist genau dann positiv–definit, wenn $\det(H_k) > 0$ für $k = 1,\dots,n$ ist, wobei $H_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ die quadratische Untermatrix von A der Größe k mit $(H_k)_{ij} = A_{ij}$ ist. □

Beispiel 100. Die Matrix $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$ ist symmetrisch, positiv–definit, da die Hesse–Determinanten

$$\det(3) = 3, \quad \det\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix} = 11, \quad \det(A) = 43$$

sämtlich positiv sind. □

Satz 101. Eine symmetrische Matrix A ist negativ–definit, wenn die Hesse-Determinanten abwechselnd positiv und negativ sind.

Beweis. Die Behauptung folgt mit Satz 95 und $\det(-H_k) = (-1)^k \det(H_k)$. □

Beispiel 102. Untersuchen Sie

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

Lösung (mit OCTAVE, https://octave-online.net).

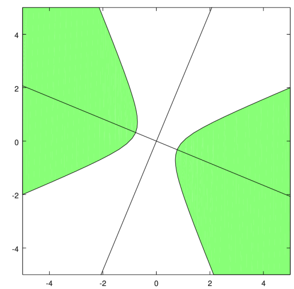
```
>> A = [-4 2 -2; 2 -2 0; -2 0 -3];
>> eig(A)
ans =

-6.20147
-2.54510
-0.25343

>> for k = 1:3, det(A(1:k,1:k)), end
ans = -4, ans =  4, ans = -4
```

Die Eigenwerte sind alle negativ, also ist A symmetrisch, negativ definit. Das gleiche Ergebnis ergibt sich aus den alternierenden Vorzeichen der Hesse–Determinanten.

$\square$

Beispiel 103 (Für Interessierte)**.**
Welche Punktmenge der Ebene erfüllt die Ungleichung $x^2 - y^2 - 2xy = 1$?

Lösung. Bilde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist $\{(x,y)\colon (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\}$. Wenn man A diagonalisiert, erhält man $\lambda = \pm\sqrt{2}$, also eine Hyperbel. Die Eigenvektoren sind die zugehörigen Hauptachsen.




```
A = [1 -1; -1 -1];
[x,y] = meshgrid(linspace(-5,5,50),linspace(-5,5,50));
contourf(x,y,x.^2-y.^2-2*x.*y,[1,1]);
hold on
[V, lam] = eig(A);
for k = 1:2
    v = 20*V(k,:);
    plot([-v(1),v(1)],[-v(2),v(2)],'k-');
end
axis square
```

□