

**Aufgabe 1** (Skalarprodukt). Zu den Vektoren  $x = (4, -1, 0)^T$  und  $y = (2, 0, 3)^T$  berechne man  $\langle x + \alpha y, \beta x + y \rangle$  für

(1)  $\alpha = 2, \beta = -1$

(2)  $\alpha = -3, \beta = 2$

**Aufgabe 2** (Skalarprodukt). In einem Monat verkauft ein Unternehmen von 4 Artikeln die Mengen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  zu den Preisen  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Der Erlös  $E$  soll mindestens  $E^*$  betragen. Schreiben Sie diese Bedingung mit Hilfe des Skalarproduktes.

**Aufgabe 3** (Winkel). Ein Dreieck im Raum besitze die Eckpunkte  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 5, 0)$  und  $C(0, 3, 7)$ . Bestimmen Sie die Winkel des Dreiecks.

**Aufgabe 4** (Matrizenmultiplikation). Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -9 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 41 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & -9 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5** (Matrizenmultiplikation). Gegeben sind die Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Berech-

nen Sie  $A \cdot B$ ,  $A \cdot B^T$ ,  $A^T \cdot A$ ,  $(A \cdot B^T)^T$ ,  $B \cdot A^T$

**Aufgabe 6** (Lineare Produktionsmodelle). Ein technologischer Prozess gliedert sich in Bearbeitungsstufen. In der ersten Stufe werden aus vier Typen von Einzelteilen  $E_1, E_2, E_3, E_4$  Halbfabrikate  $H_1, H_2, H_3$ , aus diesen Baugruppen  $B_1, B_2, B_3$  und  $B_4$  und daraus schließlich Finalprodukte  $F_1, F_2, F_3$  hergestellt. Eine bestimmte Anzahl von Halbfabrikaten  $H_i$  geht außerdem direkt in die Finalprodukte ein. Die folgenden Tabellen geben an, welche Erzeugnismengen der unteren Stufen in jeweils eine Einheit der höheren Stufe direkt eingehen:

	je Einheit				je Einheit					je Einheit				je Einheit		
$M_1$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$M_2$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$M_3$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$M_4$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
$E_1$	1	2	1	$H_1$	5	1	2	0	$H_1$	10	0	0	$B_1$	0	2	3
$E_2$	0	2	0	$H_2$	0	0	4	2	$H_2$	0	20	0	$B_2$	1	0	1
$E_3$	1	0	2	$H_3$	1	0	2	1	$H_3$	0	0	8	$B_3$	1	2	0
$E_4$	0	3	3										$B_4$	0	1	0

- Welche Mengen an Einzelteilen sind nötig, um insgesamt 10  $F_1$ , 10  $F_2$  und 20  $F_3$  herzustellen?
- Alternative Fragestellung: Welche Mengen an Einzelteilen  $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)^T$  sind nötig, um insgesamt 10  $F_1$ , 10  $F_2$  und 20  $F_3$  herzustellen?

**A**  $(80, 20, 30, 20)^T$

**B**  $(1580, 680, 1210, 1950)^T$

**C**  $(80, 30, 30, 10)^T$

**D**  $(1580, 620, 1110, 1950)^T$

**E**  $(80, 680, 1210, 20)^T$

Hinweis: Es ist jeweils genau eine Kreuz richtig. Dies gilt auch für nachfolgende Aufgaben dieses Typs.

**Aufgabe 7** (Lineare Produktionsmodelle, Selbststudium). Gegeben sei ein zweistufiger Produktionsprozess, der durch die Produktionsmatrizen  $P_1$  und  $P_2$  beschrieben werden kann. Dabei entstehen aus den Rohstoffen  $R_1, R_2$  zunächst die Zwischenprodukte  $Z_1, Z_2, Z_3$  und schließlich die Endprodukte  $E_1, E_2$ .

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffpreise betragen  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 4$  und die Endproduktpreise  $p_1 = 70$ ,  $p_2 = 95$ .

- (i) Bestimmen Sie die Matrix der Gesamtverarbeitung.
- (ii) Welche Rohstoffkosten entstehen je Einheit des Endproduktes?
- (iii) Welche Rohstoffmengen werden für 10 Einheiten des ersten und 5 Einheiten des zweiten Endproduktes benötigt?
- (iv) Welcher Erlös wird für die unter (iii) angegebenen Endproduktmengen erzielt?