Aufgabe 8 (Lineare Abhängigkeit). Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$a)\quad \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\alpha\\-2\end{pmatrix} \quad,\quad b)\quad \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\1\\-2\end{pmatrix}$$

linear abhängig?

Aufgabe 9 (Lineare Abhängigkeit). Gegeben sind die Vektoren

$$a=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \quad,\quad b=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} \quad,\quad c=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Stellen Sie (falls möglich) den Vektor $v=\begin{pmatrix}7\\-3\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren a, b, c dar.

(ii) Sind die Vektoren a, b, c linear unabhängig?

(iii) Bilden a, b, v bzw. a, c, v eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 10. Eine Matrix A heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A = -A^T$.

(i) Geben Sie eine schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass bei schiefsymmetrischen Matrizen alle Hauptdiagonalelemente a_{ii} Null sind.

Aufgabe 11 (Matrixgleichungen). Lösen Sie folgende Gleichungen jeweils nach der Matrix X auf:

$$\text{a)}\quad 6XA + B + 2X = 2C \qquad \text{b)}\quad 3A(2X+B) + 2X = C(X+2I)$$

$$\text{c)}\quad 3ABXC = -BXC + 4BC \qquad \text{d)}\quad 3X + A(2X+C) = B(X+5D).$$

Die Matrizen A, B, C, D, I und X seien quadratisch und von gleicher Dimension. Was müssen Sie für Ihre Umformungen jeweils noch voraussetzen?
Alternative Fragestellung: Lösen die Gleichung c) nach X auf.

A $X = 4(3A+I)^{-1}$

B $X = 4BC(3ABC+BC)^{-1}$

C $X = 4(3ABC+BC)^{-1}BC$

D $X = 4B(3AB+B)^{-1}$

E $X = 4(3AB+B)^{-1}B$

Aufgabe 12 (Lineares Gleichungssystem). Bestimmen Sie zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1\\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3\\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

den reellen Parameter a so, dass das Gleichungssystem

(i) keine Lösung besitzt.

(ii) unendlich viele Lösungen besitzt und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(iii) eine eindeutige Lösung besitzt und geben Sie diese an.

Aufgabe 13 (Matrixinverse). Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14 (Rangbestimmung). Ermitteln Sie die Ränge der Matrizen A, B und B^T mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 & -6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15 (Matrixinverse). Ein Produkt p_j, $j = 1, 2, 3$ enthalte a_{ij} Einheiten des Rohstoffs r_i, $i = 1, 2, 3$ mit

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In unterschiedlichen Produktzeiträumen stehen folgenden Rohstoffmengen zur Verfügung

$$\text{a)} \quad r = (5, 6, 7)^T \quad \text{b)} \quad r = (5, 6, 8)^T \quad \text{c)} \quad r = (5, 5, 7)^T.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Inversen von A die daraus produzierbaren Produktmengen unter der Annahme, dass die Rohstoffe jeweils restlos aufgebraucht werden.
d) Geben Sie eine Kombination von Rohstoffen r an, die nicht restlos aufgebraucht werden kann.

Aufgabe 16 (Leontief-Modell). Ein Unternehmen besteht aus drei Werken, welche drei Produkte herstellen. Der Eigenbedarf $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ lässt sich beschreiben durch $y = Ax$ mit der Inputmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die notwendige Gesamtproduktion $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, wenn $z = (z_1, z_2, z_3)^T = (14, 7, 7)^T$ Mengeneinheiten der produzierten Güter verkauft werden sollen.