จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

2301482 Queueing Theory

2301482 ทฤษฎีคิว

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

เนื้อหา

1. ทฤษฎีคิวคืออะไร
2. ตัวอย่างของตัวแบบคิว
3. เนื้อหาที่เรียน
4. ตัวอย่างข้อสอบ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

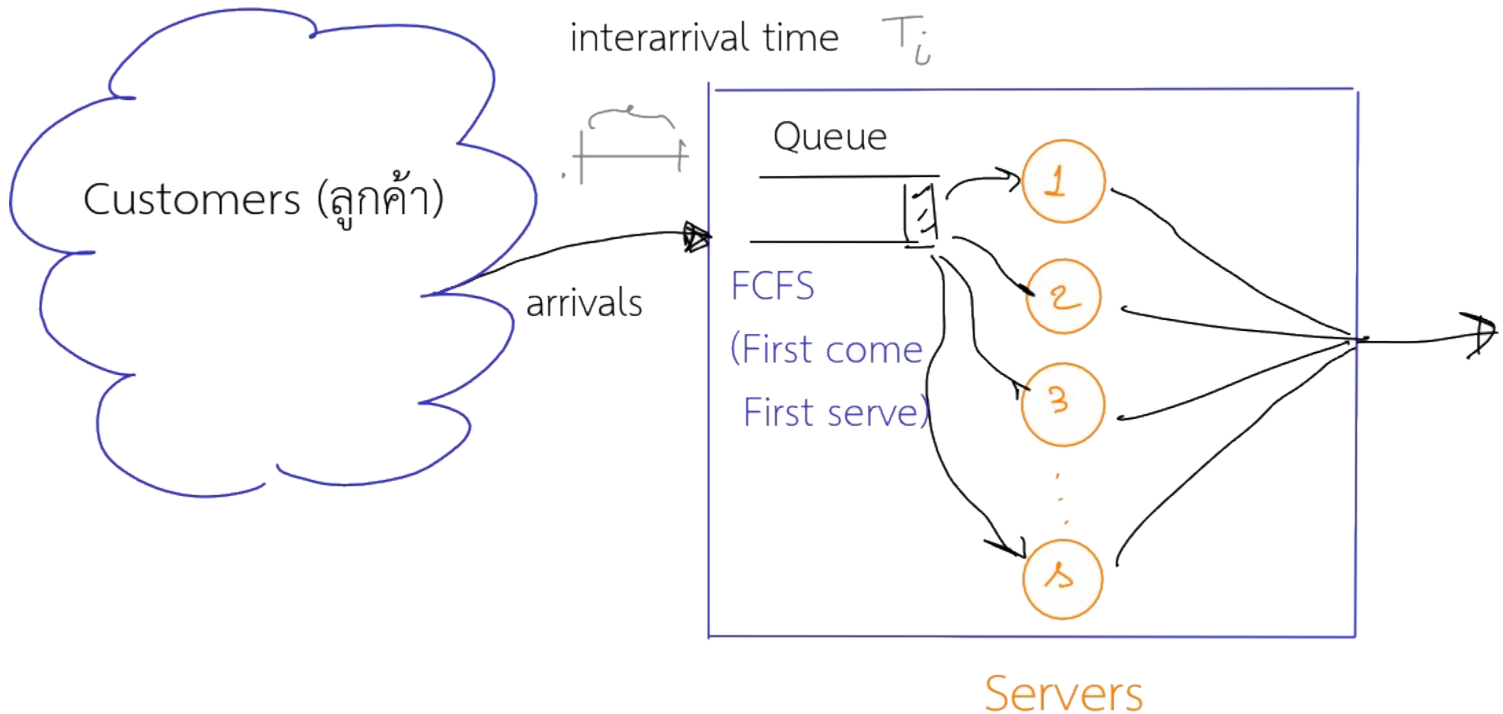
ทฤษฎีคิว

- ทฤษฎีคิว = การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์กับระบบที่การปรากฏและขนาดของแถวคอยอธิบายได้ด้วยความน่าจะเป็น
  - เป็นสาขาหนึ่งของการประยุกต์ทฤษฎีความน่าจะเป็น
  - ชื่อที่ปรากฏ traffic theory, congestion theory, the theory of mass service, the theory of stochastic service system

ตัวอย่างเช่น ระบบโทรศัพท์บ้าน ระบบจราจร ณ แยกหนึ่งแยก ระบบการใช้งานเครือข่าย ระบบการประมวลผลภายในคอมพิวเตอร์ที่มีการประมวลผลหลายซีพียู

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

นามธรรมของคิว



Queueing system

ทฤษฎีคิวตอบคำถาม

- ปริมาณโดยเฉลี่ยของผู้ใช้คู่สาย ณ เวลาใด ๆ
- สัดส่วนของผู้โทรที่ไม่สามารถติดต่อได้เนื่องจากสายไม่ว่าง
- ปริมาณโดยเฉลี่ยรถแท็กซี่ที่อยู่บนถนนของกรุงเทพ ฯ ณ วันหนึ่ง ๆ
- ปริมาณเตียงผู้ป่วยของโรงพยาบาลที่ควรมี

ทฤษฎีคิวสนใจ

- ตัวอย่างเช่น ระบบโทรศัพท์บ้าน
- เป็นระบบที่เชื่อมโยงการสื่อสารระหว่างลูกค้าต่างสถานที่
- เป็นระบบที่ใช้การเชื่อมต่อร่วมกันของคนในสังคม

ทฤษฎีคิว ตัวอย่าง

- การสื่อสารผ่านการเชื่อมต่อระหว่างสองเมือง

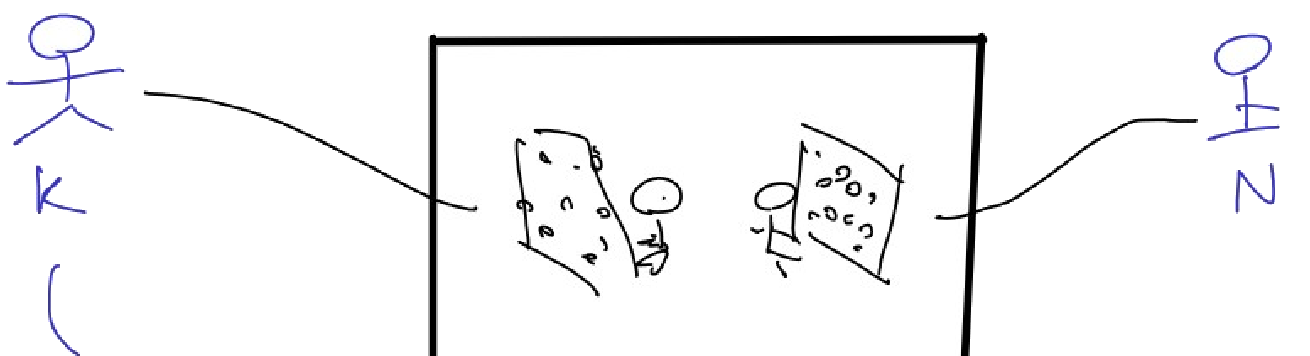
City 1

Owner

Home Telephone system

servers?

City 2

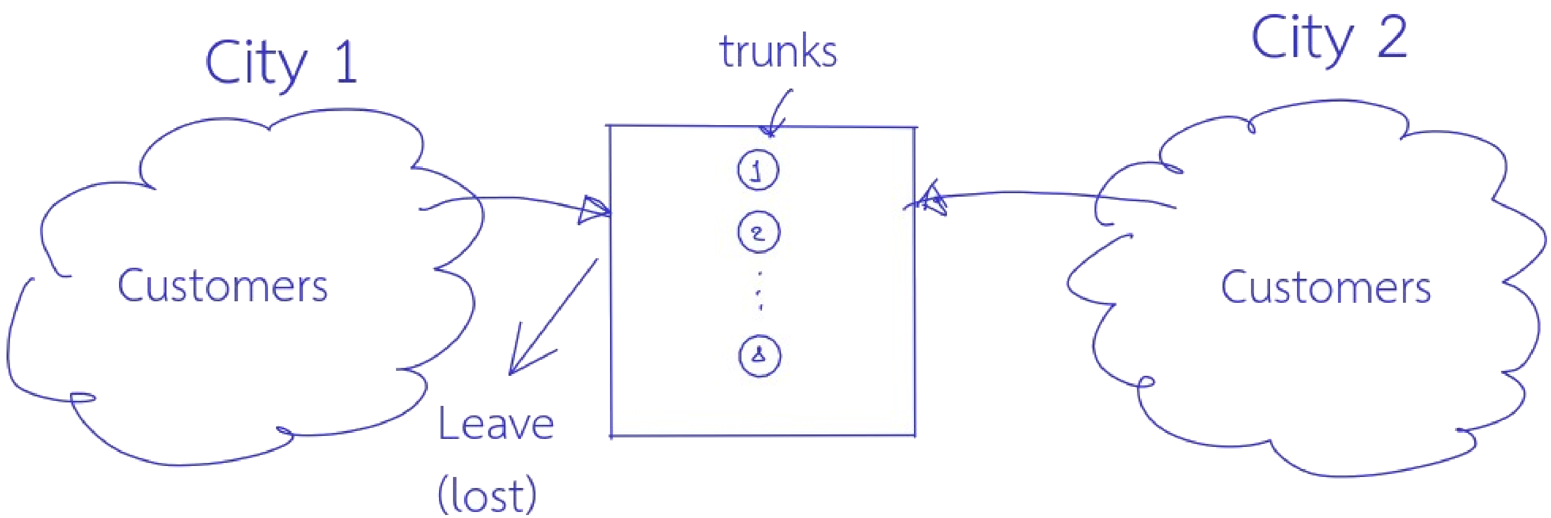


Waiting time

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

แนวคิดการวิเคราะห์

- การสื่อสารผ่านการเชื่อมต่อระหว่างสองเมือง



100% → % of lost

E_j = state of the system having j customers

สร้างระบบสมการ

- $j < s$:อัตราการเปลี่ยนสถานะจาก $\mathrm{E}_j \to \mathrm{E}_{j+1}$ คำนวณได้เป็น λP_j
- $j = s$: เนื่องจากสถาน E_{s+1} ไม่เกิดขึ้นแน่ ๆ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนสถานะจาก $\mathrm{E}_s \to \mathrm{E}_{s+1}$ คือ 0
- สรุปได้ว่า

$$\text{rate of } E_j \rightarrow E_{j+1} = \begin{cases} \lambda P_j & \text{if } j = 0, 1, \ldots, s-1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

สร้างระบบสมการ

- อัตราการเปลี่ยนสถานะจาก $\mathrm{E}_{j+1} \rightarrow \mathrm{E}_j$
- เวลาเฉลี่ยที่ถูกใช้ (ระยะเวลาเฉลี่ยที่ผู้โทรใช้บริการ) คือ τ
  - ถ้าคู่สายแรกไม่ว่าง จำนวนครั้งที่ผู้โทรใช้บริการเสร็จในช่วง τ คือ 1 กล่าวได้ว่าอัตราการเลิกใช้บริการของหนึ่งการโทรคือ $1/\tau$
  - ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีสองสายกำลังใช้บริการอยู่ จำนวนครั้งที่ผู้โทรใช้บริการเสร็จในช่วง τ คือ 2 กล่าวได้ว่าอัตราการเลิกใช้บริการของสองการโทรคือ $2/\tau$
  - ด้วยเหตุผลเดียวกัน อัตราการเลิกใช้บริการของ j+1 การโทรคือ $(j+1)/\tau$
- เนื่องจากสถานะ E_{j+1} มีโอกาสเกิด P_{j+1} ได้ว่า $\mathrm{E}_{j+1} \rightarrow \mathrm{E}_j$ คือ $(j+1)\tau^{-1}P_j$

หลักอนุรักษ์การไหล

- จากหลักอนุรักษ์การไหล ณ ภาวะสมดุล
- สำหรับดัชนี j
  - อัตราการเปลี่ยนขึ้น $\mathrm{E}_j \rightarrow \mathrm{E}_{j+1}$ ต้องเท่ากับอัตราการเปลี่ยนลง $\mathrm{E}_{j+1} \rightarrow \mathrm{E}_j$
  - สมการในภาวะสมดุลย์เชิงสถิติคือ

$$\lambda P_j = (j+1)\,\tau^{-1} P_{j+1}, (j=0,1,\ldots,s-1)$$

- กลุ่มของสมการดังกล่าวหาผลเฉลยได้ในเทอมของ P_0 คือ

$$P_j = \frac{(\lambda\,\tau)^j}{j!} P_0 (j=1,2,\ldots,s)$$

หลักอนุรักษ์การไหล

- ได้ว่า

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} P_0 \right)^{-1}$$

- สำหรับดัชนี j
  - สัดส่วนของ P_j ที่ j คู่สายไม่ว่างคือ

$$P_j = \frac{(\lambda\tau)^j / j!}{\sum_{k=0}^{s} (\lambda\tau)^k / k!} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, s)$$

- ข้อสังเกตุ การคำนวณค่า P_j จะขึ้นกับอัตราการเข้ารับบริการ λ และเวลาเฉลี่ยที่ใช้บริการ τ
- และอยู่ในรูปของผลคูณระหว่าง $\lambda\tau$ เป็นค่าวัดความต้องการของระบบเรียกโหลดเสนอ (offered load) ใช้สัญลักษณ์ $a = \lambda\tau$ ค่าดังกล่าวมีหน่วยเป็นเออร์แลง (erlang)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

หลักอนุรักษ์การไหล

- ได้ว่า

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} P_0 \right)^{-1}$$

- สำหรับดัชนี j
  - สัดส่วนของ P_j ที่ j คู่สายไม่ว่างคือ

$$P_j = \frac{(\lambda \tau)^j / j!}{\sum_{k=0}^{s} (\lambda \tau)^k / k!} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, s)$$

- ข้อสังเกตุ การคำนวณค่า P_j จะขึ้นกับอัตราการเข้ารับบริการ λ และเวลาเฉลี่ยที่ใช้บริการ τ
- และอยู่ในรูปของผลคูณระหว่าง $\lambda\tau$ เป็นค่าวัดความต้องการของระบบเรียกโหลดเสนอ (offered load) ใช้สัญลักษณ์ $a = \lambda\tau$ ค่าดังกล่าวมีหน่วยเป็นเออร์แลง (erlang)

เนื้อหา

- ขอบเขตและลักษณะของทฤษฎีคิว ทบทวนทฤษฎีความน่าจะเป็นและกระบวนการสโทแคสติก
- กระบวนการเกิด-ดับ
- ความน่าจะเป็น-ฟังก์ชันก่อกำเนิด
- สัญกรณ์เคนดัล
- กระบวนการปัวซง ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงที่ผู้สังเกตุ-การณ์ภายนอกเห็นกับการแจกแจงที่ลูกค้าพบ
- ตัวแบบคิว ระบบเอร์แลงสอสและระบบเอร์แลงดีเลย
- ตัวแบบคิว M/G/1 และระบบคิวบุริมภาพ
- เครือข่ายคิว

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

ตัวอย่างข้อสอบกลางภาค

4. (10 points) Consider M/M/∞ queue with the arrival rate λ if the system has i customers and the average service time is τ for all servers. Your solution must be in the term of λ and τ.
   4.1 Determine the probability distribution for p_i where p_i is the probability that there are i customers in the system.
   4.2 Determine the proportion of customer loss of this system.
   4.3 Find E[N] and V[N] where N is the number of the customers in the system.

Note that $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ and $e^x=\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

<u>Solution</u>:This is a Birth-and-Death process.

Let p_i be the probability that there are i customers in the system.

Note that $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$ .... (0)

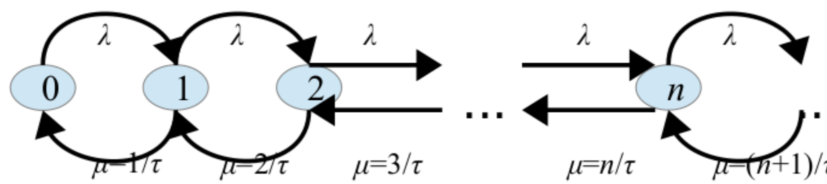
$\lambda p_0 = p_1/\tau$ ....(1)

$\lambda p_1 = 2p_2/\tau$ ....(2)

...

$\lambda p_{n-1} = np_n/\tau$ ....(n)

...



From (1), $p_1 = \lambda\tau\, p_0$ and from (2), $p_2 = \lambda\tau\, p_1/2 = \lambda^2\tau^2 p_0/2!$, ..., from ($n$), $p_n = \lambda\tau\, p_{n-1}/n = \lambda^n\tau^n p_0/n!$.

Then from (1), $1=\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda\tau)^n}{n!} p_0 = e^{\lambda\tau} p_0$ implies $p_0 = e^{-\lambda\tau}$.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

ตัวอย่างข้อสอบปลายภาค

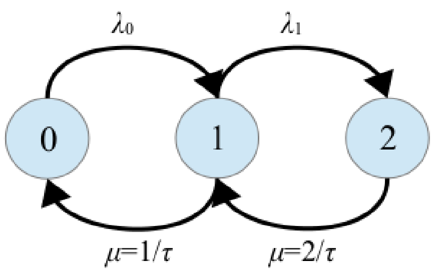
2. **(10 points)** Consider the Erlang loss system of M/M/2/2 queue with the arrival rate λ_i if the system has i customers and the average service time is τ for both servers. Your solution must be in the term of λ_i and τ.

2.1. Determine the probability distribution for p_i where p_i is the probability that there are i customers in the system.

2.2. Determine the proportion of customer loss of this system.

2.3. Find E[N] and V[N] where N is the number of the customers in the system. Your answer must be the division of two expressions.

<ins>Solution</ins>:This is a Birth-and-Death process. (2 points)



Let p_i be the probability that there are i customers in the system.

Note that $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ ....(1)

$\lambda_0 p_0 = p_1/\tau$ ....(2)

$\lambda_1 p_1 = 2p_2/\tau$ ....(3)

From (2), $p_1 = \lambda_0\tau p_0$ and from (3), $p_2 = \lambda_1\tau p_1/2 = \lambda_0\lambda_1\tau^2 p_0/2$

Then from (1) , $p_0(1 + \lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2/2) = 1$

4.1. (3 points) so $p_0 = 2/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2)$, $p_1 = 2\lambda_0\tau/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2)$, $p_2 = \lambda_0\lambda_1\tau^2/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2)$

4.2. (1 point) The proportion of customer loss is $p_2 = \lambda_0\lambda_1\tau^2/(2 + \lambda_0\tau + 2\lambda_0\lambda_1\tau^2)$

4.3. (2 points) $E[N] = 0p_0 + 1\,p_1 + 2\,p_2 = 2\lambda_0\tau/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2) + 2\lambda_0\lambda_1\tau^2/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2) = (2\lambda_0\tau + 2\lambda_0\lambda_1\tau^2)/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2) = 2\lambda_0\tau\,(1 + \lambda_1\tau)/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2)$

(2 points) $V[N] = E[N^2] - (E[N])^2 = 0^2\,p_0 + 1^2 p_1 + 2^2 p_2 - 4\lambda_0^2\tau^2(1 + \lambda_1\tau)^2/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2)^2$

$= (\lambda_0\tau + 4\lambda_0\lambda_1\tau^2)/(2 + 2\lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2) - 4\lambda_0^2\tau^2(1 + \lambda_1\tau)^2/(1 + \lambda_0\tau + \lambda_0\lambda_1\tau^2)^2$

$=$

$$\frac{2\left(\lambda_0^2\lambda_1\tau^3 + 4\,\lambda_0\lambda_1\tau^2 + 2\,\lambda_0\tau\right)}{\lambda_0^2\lambda_1^2\tau^4 + 4\,\lambda_0^2\lambda_1\tau^3 + 4\left(\lambda_0^2 + \lambda_0\lambda_1\right)\tau^2 + 8\,\lambda_0\tau + 4}$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University
Pillar of the Kingdom

ลงทะเบียน 2301482

ช่องทางติดต่อ

Assoc. Prof. Krung Sinapiromsaran
MHVH 1208/6
254 Phayathai Road, Pathumwan,
Bangkok Thailand. 10330
https://math.sc.chula.ac.th/faculty/krung-s/
Email:Krung.S@chula.ac.th
Phone:02-218-7123