

Metody symulacji

Testowanie generatorów liczb losowych

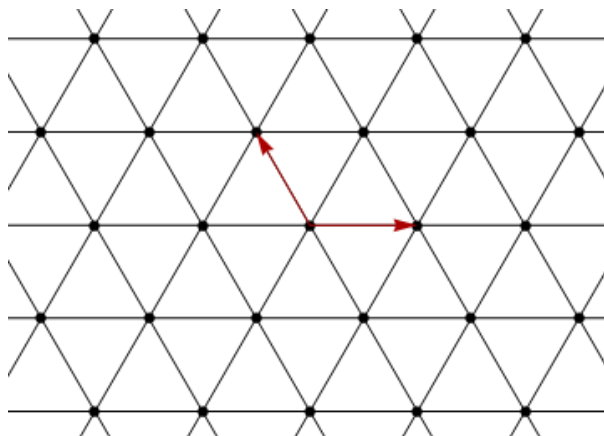
Temat II d

Rafał Skrzypiec

263957

Opis testu

Do testowania generatorów liczb losowych ran3 oraz r250 wykorzystano test oparty na zjawisku błędzenia losowego na sieci trójkątnej. Wędrowniczek startuje z punktu (0,0) i po wykonaniu L kroków kończy spacer w punkcie (x,y) . Dokonując podziału płaszczyzny na 6 równych części, sprawdzamy, w której z nich wędrowniczek zakończył spacer. Nasza hipoteza zakłada trajektoria cząstki startującej z początku układu współrzędnych powinna z jednakowym prawdopodobieństwem kończyć się w jednej z 6 części płaszczyzny. Aby sprawdzić jej prawdziwość przeprowadzimy test zgodności χ^2 .



Rysunek 1: Przykład sieci trójkątnej [1]

Biorąc pod uwagę fakt, że prawdopodobieństwo p_i zakończenia spaceru w części i wynosi $1/6$ możemy obliczyć wartość statystyki χ^2 ze wzoru:

$$V = \frac{6}{n} \sum_{i=0}^5 \left(n_i - \frac{n}{6} \right)^2$$

Wybierając poziom istotności na poziomie 0.02, dla przypadku z 5 stopniami swobody zbiór krytyczny wynosi [2]:

$$\chi < \chi_{0.01} = 0.55 \quad \text{lub} \quad \chi > \chi_{0.99} = 15.09$$

Metodyka

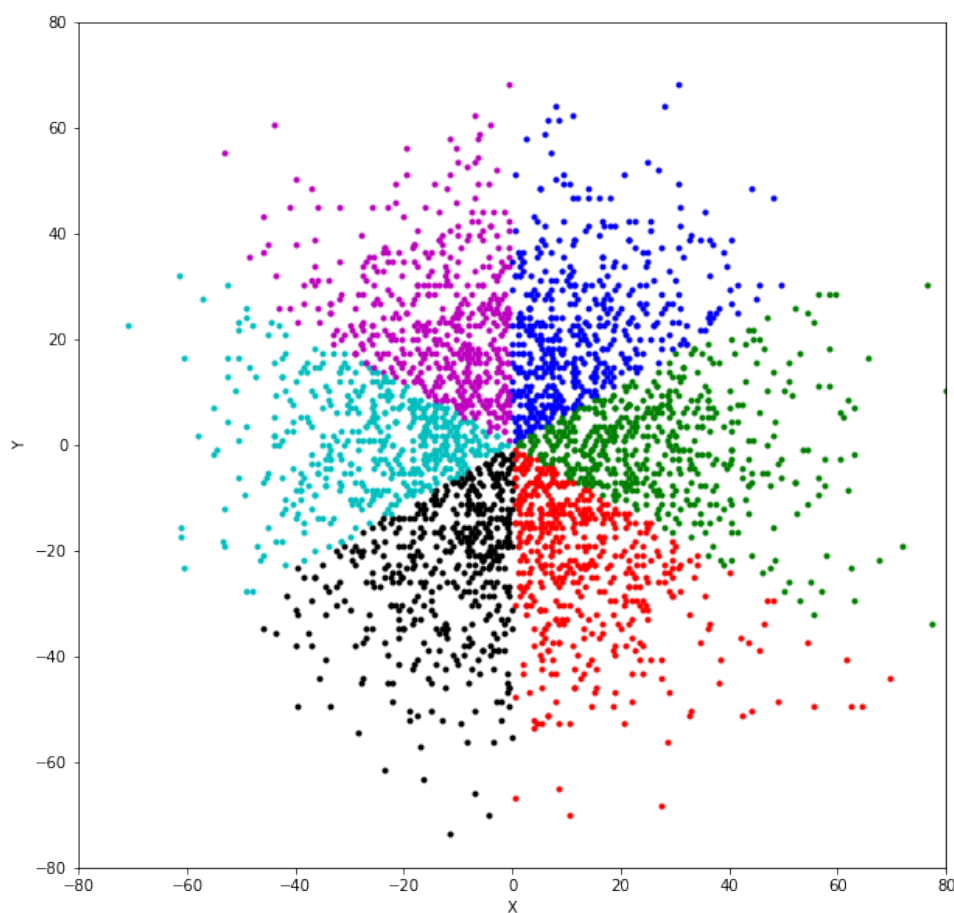
Aby symulować ruch hipotetycznej cząstki wprowadziłem 6 wektorów, o które może zmienić położenie:
 $e_0 = (1, 0)$, $e_1 = (0.5, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $e_2 = (-0.5, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $e_3 = (-1, 0)$, $e_4 = (-0.5, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $e_5 = (0.5, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Następnie losowałem w L krokach losowałem numery wektora sieciowego, zmieniając położenie wędrowniczka o wylosowany wektor. Całą płaszczyznę podzieliłem na 6 równych części oraz punkt $(0,0)$ według zasad:

Tablica 1: Zdefiniowane obszary płaszczyzny

Obszar	Warunki
0	$x \geq 0$ i $y > \frac{x}{\sqrt{3}}$
1	$y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$ i $y > -\frac{x}{\sqrt{3}}$
2	$y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$ i $x > 0$
3	$x \leq 0$ i $y < \frac{x}{\sqrt{3}}$
4	$y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$ i $y < -\frac{x}{\sqrt{3}}$
5	$y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}$ i $x < 0$
6	$y = 0$ i $x = 0$

Następnie zliczałem ilość zakończeń wędrowki po L krokach w każdym z obszarów, zakończenie wędrowki w obszarze nr 6 powodowało powtórzenie spaceru.



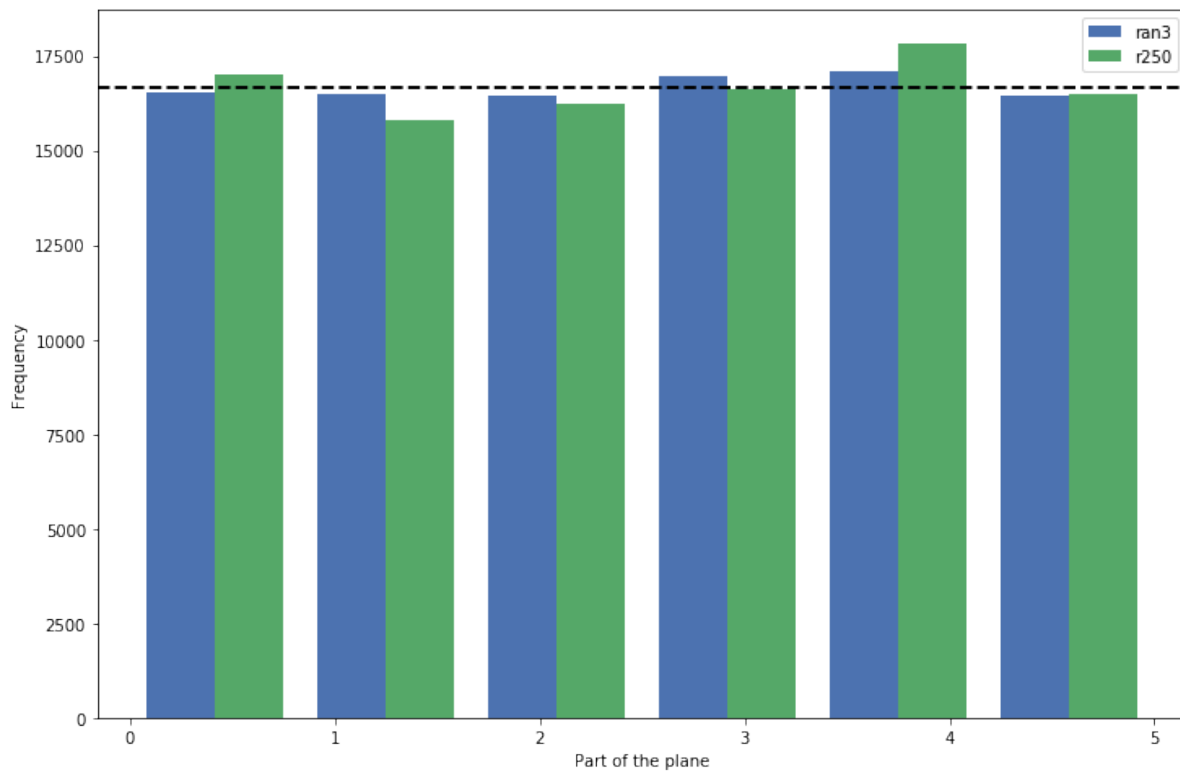
Rysunek 2: Płaszczyzna, na której zaznaczono 3000 punktów, w których wędrowniczek zakończył wędrowkę po 1000 kroków, każdy z kolorów odpowiada innemu obszarowi.

Wyniki

Wykonano po 50 powtórzeń symulacji dla każdego z testów dla 10^5 spacerów, które miały po 1000 kroków.

Tablica 2: Przykładowe wyniki symulacji dla 10^5 spacerów

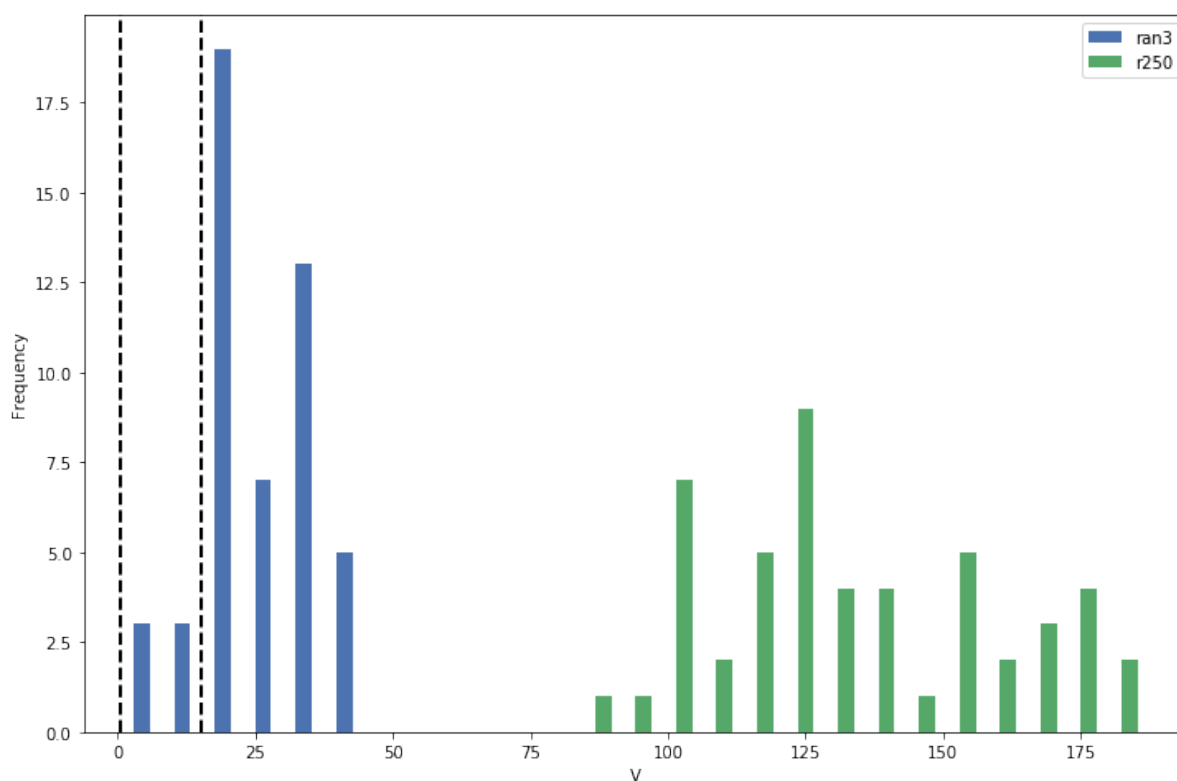
Generator	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	V
r250	17007	15812	16219	16625	17847	16490	148.37
ran3	16555	16495	16443	16958	17095	16454	24.33



Rysunek 3: Przedstawienie wyników z powyższej tabeli na histogramie, przerywana linia zaznacza wartość $10^5/6$.

Tablica 3: Podsumowanie wyników symulacji

Generator	Ilość symulacji	Średnie V	Odchylenie standardowe V
r250	50	133.26	12.93
ran3	50	26.06	10.01



Rysunek 4: Rozkład wartości V dla 50 prób, każda po 10^5 spacerów, dla generatorów ran3 i r250. Przerywane linie wyznaczają granice zbioru krytycznego.

Wnioski

Analizując powyższe wyniki, zauważamy, że generator r250 nie zdaje testu zgodności χ^2 , średnia wartość statystyki V wynosi 133.26, głęboko trafiając w zbiór krytyczny, który wynosi $V < 0.55$ lub $V > 15.09$. Na 50 wykonanych testów, wszystkie z nich trafiły w zbiór krytyczny, co pozwala z całą pewnością stwierdzić, że generator r250 oparty na przesuwanym rejestrze nie jest dobrym generatorem liczb losowych.

Generator ran3 poradził sobie w teście nieco lepiej, jednak również nie zdał testu zgodności χ^2 , średnia wartość statystyki V , wynosi 26.06 i trafia w zbiór krytyczny, który wynosi $V < 0.55$ lub $V > 15.09$. Na 50 wykonanych testów, 44 z nich trafiły w zbiór krytyczny, pozwala to z całą pewnością stwierdzić, że generator Fibonacciego ran3 nie jest dobrym generatorem liczb losowych.

Literatura

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_lattice
- [2] <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda3674.htm>
- [3] Wykład z Metod symulacji, prof. Czesław Oleksy