



## IEL – protokol k projektu

Patrik, Skaloš  
xskalo01

8. mája 2021

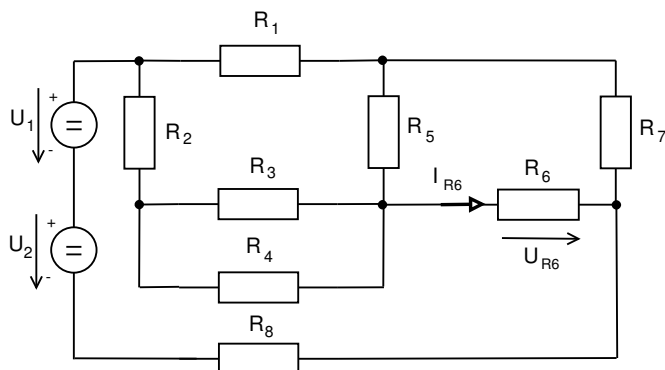
### Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	4
3	Příklad 3	6
4	Příklad 4	8
5	Příklad 5	10
6	Shrnutí výsledků	12

## Příklad 1

Stanovte napětí  $U_{R6}$  a proud  $I_{R6}$ . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]	$R_7$ [ $\Omega$ ]	$R_8$ [ $\Omega$ ]
C	100	80	450	810	190	220	220	720	260	180



Napětia dvoch sériovo zapojených zdrojov môžeme zjednodušiť jednoduchým sčítaním:

$$U = U_1 + U_2 = 100 + 80 = \mathbf{180V}$$

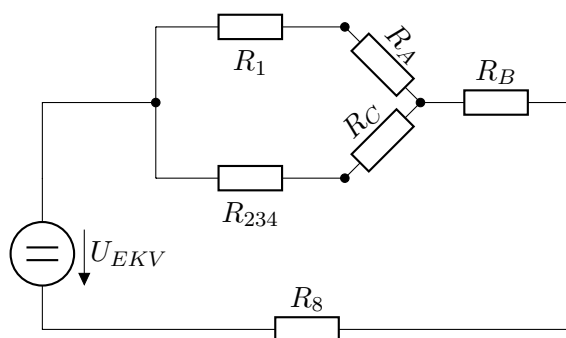
Zjednodušíme paralelné rezistory  $R_3$  a  $R_4$ :

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{190 \cdot 220}{190 + 220} = \mathbf{101.9512\Omega}$$

Zjednodušíme paralelné rezistory  $R_{34}$  a  $R_2$ :

$$R_{234} = R_{34} + R_2 = 101.9512 + 810 = \mathbf{911.9512\Omega}$$

Transfigurácia z trojuholníka na hviezdu:



$$R_A = \frac{R_5 R_7}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{220 \cdot 260}{220 + 720 + 260} = \mathbf{47.6667\Omega}$$

$$R_B = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{220 \cdot 720}{220 + 720 + 260} = \mathbf{132\Omega}$$

$$R_C = \frac{R_6 R_7}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{260 \cdot 720}{220 + 720 + 260} = \mathbf{156\Omega}$$

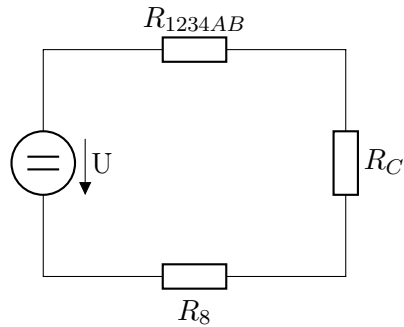
Ďalej môžeme sčítať rezistory  $R_1$  a  $R_A$  a rezistory  $R_{234}$  a  $R_B$ :

$$R_{1A} = R_1 + R_A = 450 + 47.6667 = \mathbf{497.6667\Omega}$$

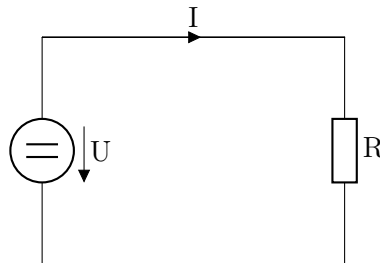
$$R_{234B} = R_{234} + R_B = 911.9512 + 132 = \mathbf{1043.9512\Omega}$$

Ďalej zjednodušíme rezistory  $R_{1A}$  a  $R_{234B}$  zapojené paralelne:

$$R_{1234AB} = \frac{R_{1A} R_{234B}}{R_{1A} + R_{234B}} = \frac{497.6667 \cdot 1043.9512}{497.6667 + 1043.9512} = \mathbf{337.0094\Omega}$$



Nakoniec nám ostáva sčítať tri sériovo zapojené rezistory  $R_{1234AB}$ ,  $R_C$  a  $R_8$ :

$$R = R_{1234AB} + R_C + R_8 = 337.0094 + 156 + 180 = \mathbf{673.0094\Omega}$$


Pomocou Ohmovho zákona, hodnotami  $U$  a  $R$  môžeme vypočítať celkový prúd:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{180}{673.0094} = \mathbf{0.2675A}$$

K ďalším výpočtom budeme potrebovať  $U_{1A}$ , ktoré vypočítame Ohmovým zákonom:

$$U_{1A} = R_{1234AB} * I = 337.0094 * 0.2675 = \mathbf{90.1349V}$$

Ďalej vypočítame prúd  $I_{R_1}$  pomocou Ohmovho zákona:

$$I_{R_1} = \frac{U_{1A}}{R_{1A}} = \frac{90.1349}{497.6667} = \mathbf{0.1811A}$$

Vypočítame si prúd  $I_{R_{234}}$  ako rozdiel celkového prúdu  $I$  a prúdu  $I_{R_{234}}$ :

$$I_{R_{234}} = I - I_{R_1} = 0.2675 - 0.1811 = \mathbf{0.08634A}$$

Teraz si môžeme vypočítať  $I_{R_6}$  ako rozdiel  $I_{R_1}$  a  $I_{R_{234}}$ :

$$I_{R_6} = I_{R_1} - I_{R_{234}} = 0.1811 - 0.08634 = \mathbf{0.07378A}$$

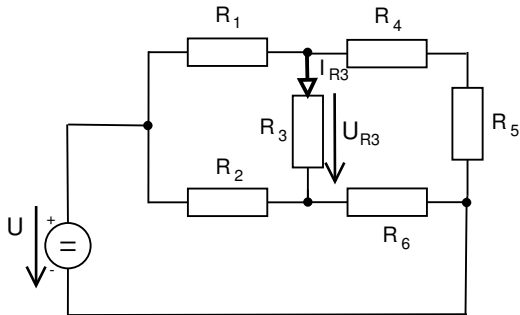
A napätie na rezistore  $R_6$  vypočítame Ohmovým zákonom:

$$U_{R_6} = R_6 * I_{R_6} = 720 * 0.07378 = \mathbf{53.1194V}$$

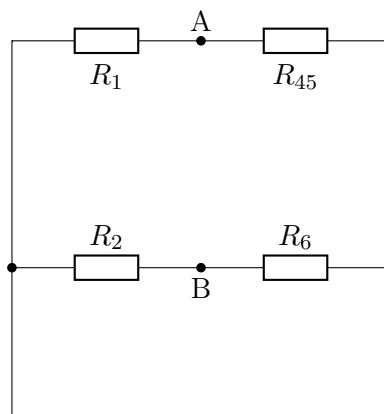
## Příklad 2

Stanovte napětí  $U_{R3}$  a proud  $I_{R3}$ . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	$U$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]
E	250	150	335	625	245	600	150

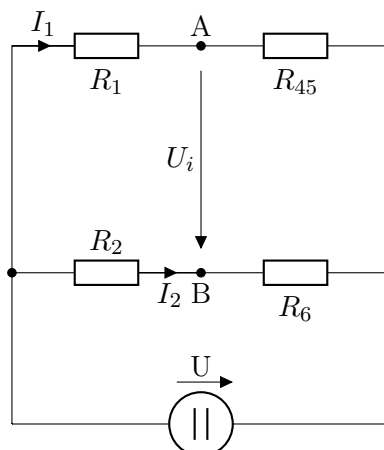


V obvodu skratujeme zdroj napětí a  $R_3$  a spočítáme  $R_{th}$ :



$$R_{th} = \frac{R_1(R_4+R_5)}{R_1+R_4+R_5} + \frac{R_2R_6}{R_2+R_6} = \frac{150(845)}{995} + \frac{335 \cdot 150}{485} = \mathbf{230.9952\Omega}$$

Do obvodu vrátíme zdroj napětí a vzniknú nám dve slučky, pomocou ktorých môžeme vypočítať prúdy v obvodu:



$$S_1 : U = R_2 I_2 + R_6 I_2$$

$$335 I_2 + 150 I_2 = U$$

$$482 I_2 = 250 V$$

$$I_2 = \frac{250}{482} = \mathbf{0.5154 A}$$

$$S_2 : R_2 I_2 + R_6 I_2 = R_1 I_1 + R_4 I_1 + R_5 I_1$$

$$485 I_2 = 995 I_1 = 249.969$$

$$I_1 = \frac{249.969}{995} = \mathbf{0.2512 A}$$

$$I_{th} = I_1 + I_2 = 0.5154 + 0.2512 = \mathbf{0.7666 A}$$

Ďalej chceme zistiť  $U_{th}$ , takže si do obvodu na miesto  $R_3$  zapojíme imaginárny zdroj. Stačí nám jedna slučka, pomocou ktorej vieme následne vypočítať Theveninovo napätie:

$$U_{R_1} + U_{th} - U_{R_2} = 0$$

$$U_{th} = U_{R_2} - U_{R_1} = I_2 R_2 - I_1 R_1 = \mathbf{137.979 V}$$

Teraz si môžeme prekresliť obvod na ekvivalentný a vypočítať  $I_{R_3}$  a  $U_{R_3}$ :

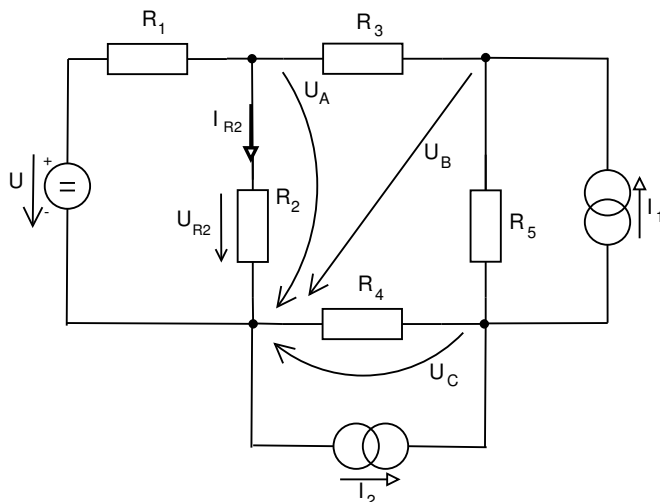
$$I_{R_3} = \frac{U_{th}}{R_{th} + R_3} = \frac{134.979}{230.9951 + 625} = \mathbf{0.1577 A}$$

$$U_{R_3} = R_3 I_3 = 625 * 0.1577 = \mathbf{98.5625 V}$$

### Příklad 3

Stanovte napětí  $U_{R2}$  a proud  $I_{R2}$ . Použijte metodu uzlových napětí ( $U_A, U_B, U_C$ ).

sk.	$U$ [V]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
C	110	0.85	0.75	44	31	56	20	30



Nakreslíme si do obvodu šípky proudů a napíšeme rovnice těchto proudů pro tři z uzlov:

$$I_{R1} = I_{R3} + I_{R2}$$

$$I_{R5} = I_{R3} + I_1$$

$$I_{R4} + I_1 = I_{R5} + I_2$$

Vyjadríme si prúdy:

$$I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$I_{R3} = \frac{U_A - U_B}{R_3}$$

$$I_{R4} = \frac{U_C}{R_4}$$

$$I_{R5} = \frac{U_B - U_C}{R_5}$$

Dosadíme vyjadrené prúdy do rovníc:

$$I_{R1} = I_{R3} + I_{R2}$$

$$\frac{U - U_A}{R_1} = \frac{U_A - U_B}{R_3} + \frac{U_A}{R_2}$$

$$(U - U_A)R_2R_3 = (U_A - U_B)R_1R_2 + U_AR_1R_3$$

$$UR_3R_2 - U_AR_2R_3 = U_AR_1R_2 - U_BR_1R_2 + U_AR_1R_3$$

$$190960 = 5564U_A - 1364U_B$$

$$I_{R5} = I_{R3} + I_1$$

$$\frac{U_B - U_C}{R_5} = \frac{U_A - U_B}{R_3} + I_1$$

$$U_BR_3 - U_CR_3 = U_AR_5 - U_BR_5 + 0.85R_3R_5$$

$$56U_B - 56U_C = 30U_A - 30U_B + 1428$$

$$-30U_A + 86U_B - 56U_C = 1428$$

$$I_{R4} + I_1 = I_{R5} + I_2$$

$$\frac{U_C}{R_4} + I_1 = \frac{U_B - U_C}{R_5} + I_2$$

$$U_CR_5 + 0.85R_4R_5 = U_BR_4 - U_CR_4 + 0.75R_4R_5$$

$$30U_C + 510 = 20U_B - 20U_C + 450$$

Následne si vyjadríme  $U_C$ ,  $U_B$  a  $U_A$ :

$$30U_C + 510 = 20U_B - 20U_C + 450$$

$$60 = 20U_B - 50U_C$$

$$50U_C = 20U_B - 60$$

$$U_C = \frac{20U_B - 60}{50}$$

$$1428 = -30U_A + 86U_B - 56U_C$$

$$1428 = -30U_A + 86U_B - 56\left(\frac{20U_B - 60}{50}\right)$$

$$5 * 1428 = -30 * 5U_A + 86 * 5U_B - 56\left(5 * \frac{20U_B - 60}{50}\right)$$

$$7140 = -150U_A + 430U_B - 112U_B + 336$$

$$6804 = -150U_A + 318U_B$$

$$U_B = \frac{150U_A + 6804}{318}$$

$$190960 = 5564U_A - \left(\frac{150U_A + 6804}{318}\right)$$

$$190960 = 5564U_A - 643.3962U_A - 29184.4528$$

$$220144.4528 = 4920.6038U_A$$

$$U_A = \mathbf{44.7393V}$$

Teraz je už jednoduché dopočítat  $U_{R_2}$  a  $I_{R_2}$

$$U_{R_2} = U_A = \mathbf{44.7393V}$$

$$I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{44.7393}{31} = \mathbf{1.4432A}$$

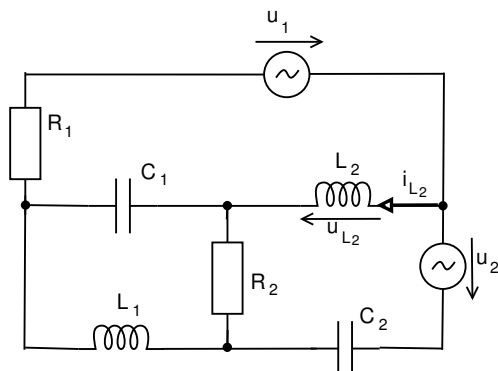
## Příklad 4

Pro napájecí napětí platí:  $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$ ,  $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$ .

Ve vztahu pro napětí  $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$  určete  $|U_{L_2}|$  a  $\varphi_{L_2}$ . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$L_1$ [mH]	$L_2$ [mH]	$C_1$ [ $\mu$ F]	$C_2$ [ $\mu$ F]	$f$ [Hz]
C	35	45	10	13	220	70	230	85	75



Najprv si vypočítame impedancie kondenzátorov a cievok:

$$Z_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega} = -9.2264j$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega} = -24.9655j$$

$$Z_{L_1} = jL_1\omega = 103.6726j$$

$$Z_{L_2} = jL_2\omega = 32.9867j$$

Do obvodu si zakreslíme slučky  $S_A$ ,  $S_B$  a  $S_C$  a slučky:

!!Obvod so slučkami

$$S_A : I_A(R_1 + Z_{L_2} + Z_{C_1}) - I_B Z_{C_1} - I_C Z_{L_2} = -35$$

$$S_B : -I_A Z_{C_1} + I_B(Z_{C_1} + R_2 + Z_{L_1}) - I_C R_2 = 0$$

$$S_C : -I_A Z_{L_2} - I_B R_2 + I_C(Z_{L_2} + R_2 + Z_{C_2}) = -45$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + Z_{L_2} + Z_{C_1} & -Z_{C_1} & -Z_{L_2} \\ -Z_{C_1} & Z_{C_1} + R_2 + Z_{L_1} & -R_2 \\ -Z_{L_2} & -R_2 & Z_{L_2} + R_2 + Z_{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ -45 \end{pmatrix}$$

Maticu vyriešime pomocou Sarrusovho a Cramerovho pravidla, aby sme dostali  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$ :

$$I_C = -1.0484 - 1.3494j$$

$$I_B = -0.161 + 0.2761j$$

$$I_A = -1.2093 - 1.638j$$

Teraz si môžeme vypočítať  $I_{L_2}$ ,  $u_{L_2}$ ,  $|U_{L_2}|$  a nakoniec  $\varphi_{L_2}$

$$I_{L_2} = I_A - I_C = 0.1609 + 0.2886j$$

$$u_{L_2} = Z_{L_2} I_{L_2} = -9.52 + 5.3076j$$

$$|U_{L_2}| = \sqrt{\operatorname{Re}(u_{L_2})^2 + \operatorname{Im}(u_{L_2})^2} = -0.5086 \text{ rad} = -29^\circ 8' 24''$$



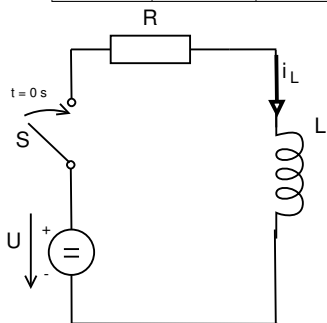
!!Skontrolovať uhol!

## Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase  $t = 0[\text{s}]$  sepne spínač  $S$ . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení  $i_L = f(t)$ . Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

sk.	$U$ [V]	$L$ [H]	$R$ [ $\Omega$ ]	$i_L(0)$ [A]
F	22	30	15	10



Rovnice, pomocou ktorých budeme riešiť tento obvod:

$$i_L' = \frac{u_L}{L}$$

$$U = u_R + u_L$$

$$i_L = i_R = \frac{U_R}{R}$$

Vyjadríme si z toho  $i_L'$ :

$$u_L = U - u_R$$

$$Li_L' = U - Ri_L$$

$$U = Li_L' + Ri_L - \text{diferenciálna rovnica prvého rádu (nehomogénna)}$$

$$i_L(0) = i_{LP}$$

Očakávaný tvar riešenia:

$$i_L(t) = K(t)e^{t\lambda}$$

Charakteristická rovnica:

$$Li_L' + Ri_L = U - \text{za } i_L' \text{ dosadíme } \lambda, \text{ a za } i_L \text{ jednotku:}$$

$$L\lambda + R * 1 = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

Nasledujú derivácie:

$$i_L' = K'(t)e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{R}{L}K(t)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$LK'(t)e^{-\frac{Rt}{L}} - L\frac{R}{L}K(t)e^{-\frac{Rt}{L}} + RK(t)e^{-\frac{Rt}{L}} = U$$

$$LK'(t)e^{-\frac{Rt}{L}} - RK(t)e^{-\frac{Rt}{L}} + RK(t)e^{-\frac{Rt}{L}} = U$$

$$U = LK'(t)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$K'(t)e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{U}{L}$$

$$K'(t) = \frac{\frac{U}{L}}{e^{-\frac{Rt}{L}}}$$

$$K'(t) = \frac{U}{L}e^{\frac{Rt}{L}}$$

Do očakávaného riešenia dosadíme a zderivujeme:

$$\begin{aligned}
i_L &= Ke^{t\lambda} \\
i_L &= Ke^{-\frac{Rt}{L}} \\
i'_L &= K'e^{-\frac{Rt}{L}} + K * \left(-\frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}\right)
\end{aligned}$$

Následne dosadíme do diferenciálnej rovnice:

$$\begin{aligned}
i'_L L + i_L R &= U \\
L(K'e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{R}{L}Ke^{-\frac{Rt}{L}}) + RKe^{-\frac{Rt}{L}} &= U \\
LK'e^{-\frac{Rt}{L}} - RKe^{-\frac{Rt}{L}} + RKe^{-\frac{Rt}{L}} &= U \\
LK'e^{-\frac{Rt}{L}} &= U \\
30K'e^{-\frac{t}{2}} &= 22 \\
15K'e^{-\frac{t}{2}} &= 11 \\
K'e^{-\frac{t}{2}} &= \frac{11}{15} \\
K' &= \frac{\frac{11}{15}}{e^{-\frac{t}{2}}} \\
K &= \frac{\frac{11}{15}}{15e^{-\frac{t}{2}}}
\end{aligned}$$

Nasleduje integrácia:

$$\begin{aligned}
K' &= \frac{11}{\frac{15}{1} \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}}} = \frac{\frac{11}{15}}{\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}}} = \frac{11e^{\frac{t}{2}}}{15} \\
K &= \frac{22e^{\frac{t}{2}}}{15} + C
\end{aligned}$$

Dosadíme do očakávaného riešenia:

$$i_L(t) = K(t)e^{t\lambda} = \left(\frac{22e^{\frac{t}{2}}}{15} + C\right)e^{-\frac{t}{2}} = Ce^{-\frac{t}{2}} + \frac{22e^{\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}}}{15} = \frac{22}{15} + Ce^{-\frac{t}{2}}$$

Dosadíme konštantu a získame tým finálnu rovnicu:

$$i_L = \left(\frac{22e^{\frac{t}{2}}}{15} + \frac{128}{15}\right)e^{-\frac{t}{2}} = \frac{22e^{\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}} + 128e^{-\frac{t}{2}}}{15} = \frac{22}{15} + \frac{128e^{-\frac{t}{2}}}{15}$$

Nakoniec otestujeme rovnicu pre  $t = 0$  a  $t = \infty$ :

$$\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{22}{15} + \frac{128e^0}{15} = 10A \checkmark \\
i_L(\infty) &= \frac{22}{15} + 0' = \frac{U}{R} = \frac{22}{15} \checkmark
\end{aligned}$$

Nakoniec otestujeme platnosť:

$$\begin{aligned}
Li'_L + i_LR &= U \\
22 &= 30\left(-\frac{64e^{-\frac{t}{2}}}{15}\right) + 15\left(\frac{22}{15} + \frac{128e^{-\frac{t}{2}}}{15}\right) = 22 \checkmark
\end{aligned}$$

## Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	C	$U_{R6} =$ $I_{R6} =$
2	E	$U_{R3} =$ $I_{R3} =$
3	C	$U_{R2} =$ $I_{R2} =$
4	C	$ U_{L2}  =$ $\varphi_{L2} =$
5	F	$i_L =$