

1. 以下の問に答えよ.

(1) 次の (i), (ii) の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$(i) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.04 & -0.008 \\ -0.2 & 1.04 & 0.008 & 0.0016 \\ -0.04 & 0.008 & 1.0016 & 0.00032 \\ -0.008 & 0.0016 & 0.00032 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) $f(u, v) = u^3 - 3uv^2$, $g(u, v) = 3u^2v - v^3$, $u = (e^y + e^{-y}) \cos x$, $v = (e^{-y} - e^y) \sin x$ のとき, 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

2. 次の行列で表される線形変換 T の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; T)$ をすべて求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. 次の 2 重積分の値を求めよ. $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$

4. $x = x(t)$ を変数 t の C^∞ 級関数とする. このとき, 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 4 = 0$$

ただし, $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ とする.

5. 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(2) m 桁の自然数のうちで, 0 の文字が入らないものの個数を答えよ. 例えば $m = 3$ のときなら, 111, 112, 113, \dots , 119, 121, \dots , 999 の個数で, 9^3 である.

(3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項, 例えば, $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \dots$ などを抜いた級数を S とする. すなわち,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \dots$$

このとき, S は収束することを示せ.

6. ある集合 X の部分集合 A, B, C について, 次のことを証明せよ. 対称差 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ がともに有限集合であるならば, $A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ も有限集合である. (ただし, $A \setminus B$ は A の元で B に含まれないもの全体を表す.)