1　準同型定理と同型定理

まず，復習として準同型定理を以下に示す.

Thm. 1.1. 準同型定理
群 G から群 G' への準同型写像 $f: G \to G'$ に対して, $N = \mathrm{Ker}(f)$ とすれば,

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f), xN \mapsto f(x)$$

は同型写像となる. すなわち, 剰余群 $G/\mathrm{Ker}(f)$ と f による G の像 $\mathrm{Im}(f)$ は同型となる.

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f).$$

次に標準全射を定義しておく.

Def. 1.1. 標準全射
$N \lhd G$ に対して，全準同型写像

$$f : G \to G/N,\ g \mapsto gN$$

を標準全射という.

次に 3 つの同型定理を示す.

Thm. 1.2. 第 1 同型定理
群 G から群 G' への全射準同型写像 $f: G \to G'$ と正規部分群 $N' \lhd G'$ に対して, $N := f^{-1}(N') \lhd G$ かつ,

$$G/N \simeq G'/N'.$$

Proof. f と標準全射 φ との合成 $\varphi \circ f : G \to G' \to G'/N'$ は全射同型であり，$\mathrm{K}er(\varphi \circ f) = \{x \in G | (\varphi \circ f)(x) = N'\}$ であるから，$x \in \mathrm{K}er(\varphi \circ f) \iff \varphi(f(x)) = N' \iff f(x) \in N' \iff x \in N$. よって，$\mathrm{K}er(\varphi \circ f) = N \lhd G$ で準同型定理より $\overline{\varphi \circ f} : G/N \xrightarrow{\sim} G'/N'$. □

Lem. 1.1. $S, T, U \subset G$ に対して，$(ST)U = S(TU)$，$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Proof. G が群であるから，$(ST)U = \{(st)u \mid s \in S,\ t \in T,\ u \in U\} = \{s(tu) \mid s \in S,\ t \in T,\ u \in U\} = S(TU)$，$(ST)^{-1} = \{(st)^{-1} \mid s \in S,\ t \in T,\ u \in U\} = \{t^{-1}s^{-1} \mid s \in S,\ t \in T,\ u \in U\} = T^{-1}S^{-1}$. □

Lem. 1.2. *(1)*$H, K \leq G$ に対して，$HK \leq G \iff HK = KH$.
(2)$H \leq G$ と $N \lhd G$ に対して，$HN = NH \leq G$.

Proof. (1)$H, K \leq G$ より $H = H^{-1}, K = K^{-1}, HH = H, KK = K$. $(\Rightarrow) HK \leq G$ ならば $HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$. $(\Leftarrow) HK = KH$ ならば，$(HK)(HK) = H(KH)K =$

$H(HK)K=(HH)(KK)=HK$.よって，任意の $hk.h'k' \in HK$ に対して，$(hk)(h'k')$，$(hk)^{-1} \in HK$.部分群の判定条件より，$HK \leq G$.
(2)$N \lhd G$ より，$h^{-1}Nh=N(\forall h \in H)$ であるから，$hN=Nh(\forall h \in H)$ より $HN=NH$.よって (1) より $HN \leq G$. □

Thm. 1.3. 第 2 同型定理
群 G の部分群 $H \leq G$ と $N \lhd G$ に対して，

$$H/(H \cap N) \simeq HN/N.$$

Proof. Lem.1.2.(2) より，$HN \leq G$.また，$N \lhd G$ より $N \leq HN$.全射準同型 $f : H \to HN/N$，$h \mapsto hN$ に対して，$\mathrm{K}er(f)=\{x \in H \mid xN=N\}$ であり，$x \in \mathrm{K}er(f) \iff x \in H \cap N$ より，$\mathrm{K}er(f)=H \cap N \lhd H$.よって，準同型定理より，$\overline{f} : H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} HN/N$. □

Thm. 1.4. 第 3 同型定理
群 G と $N_1, N_2 \lhd G$，$N_2 \leq N_1$に対して，

$$(G/N_2)/(N_1/N_2) \simeq G/N_1.$$

Proof. $f : G/N_2 \to G/N_1$，$xN_2 \mapsto xN_1$は $\mathrm{well-defined}$ かつ全射準同型となる．$\mathrm{well-defined}$ であることは，$N_2 \leq N_1$から，$xN_2=yN_2 \iff y^{-1}x \in N_2 \leq N_1 \Rightarrow y^{-1}x \in N_1 \Rightarrow (y^{-1}x)N_1=N_1 \Rightarrow xN_1=yN_1$のようにわかる．準同型であることは，$f(xN_2)f(yN_2)$ より分かり，全射もよい．また，$\mathrm{K}er(f)=\{xN_2 \in G/N_2 \mid f(xN_2)=N_1\}=\{xN_2 \in G/N_2 \mid xN_1=N_1\}=\{xN_2 \in G/N_2 \mid x \in N_1\}=N_1/N_2 \lhd G/N_2$であるから，準同型定理より$\overline{f} : (G/N_2)/(N_1/N_2) \xrightarrow{\sim} G/N_1$. □