

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えよ。

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、次の問に答えよ。

- (1) A の固有値をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ。
- (3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、次の問に答えよ。

- (1) $A = B {}^tB$ をみだし、すべての対角成分が正の下三角行列 B を求めよ。ただし、 tB は B の転置行列とする。
- (2) A の行列式の値を求めよ。
- (3) B の逆行列を求めよ。
- (4) A^{-1} の第 4 行を求めよ。

3. 次の問に答えよ。

- (1) \mathbb{R}^2 で定義された関数 $g(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の臨界点を全て求め、それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ。
- (2) \mathbb{R}^2 で定義された関数 $f(x, y)$ が回転対称であるとき、 $x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ をみたすことを示せ。ただし、 $f(x, y)$ が回転対称であるとは、任意の $x, y, \theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x, y) = f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

をみたすことをいう。

- (3) 積分 $\iint_{x^2 - xy + y^2 \leq 1} (x - y)^2 dx dy$ の値を求めよ。

4. $(-1, 1)$ で定義された C^∞ -級関数 $f(x)$ は次の微分方程式をみたすとする：

$$(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し、 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) $\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ。ただし、不等式 $1 - x \leq e^{-x} (0 \leq x \leq 1)$ および等式 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい。
- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ。また、収束するときは極限値を求めよ。