微分幾何 to 極小曲面

田邊真郷

更新：2018.9.3

小林昭七『曲線と曲面の微分幾何』（以降［小林］と略記）を用いて，極小曲面に関して調査を行う（取り組む具体的な問題は未定）．その途中，あまり本筋と関係のない概念や結果はその都度省いて進める（たとえば，曲線の幅や結び糸など）．おおまかな予定は下の通り↓↓

Sep.	［小林］第 2 章まで．主に基本形式，外微分形式．
Oct.	［小林］第 3 章まで．主に Riemann 幾何，測地線．
Nov.	［小林］第 4 章まで．主に Stokes の定理，Gauss-Bonnet の定理．
Dec.	［小林］第 5 章まで．主に極小曲面．
Jan.	［小林］を踏まえて，具体的な問題に取り組む．
Feb.	［小林］を踏まえて，具体的な問題に取り組む．

この pdf は，基本的にゼミで話し切れなかった内容を残すためのものとする．何か新しい概念が出たとき，具体例の計算や気持ちを残していく．ほか，何か各単元で質問や要望などあればその都度載せていく予定である．

目 次

0 話す内容のストック

ここの内容はただの自分用のカンペです．毎回更新していきます．話したときに，詳しくは（或いはまったく）話さなかった内容を下の章に更新していく予定です．見なくても話すので見なくていいです．

0.1 曲面の曲率を考えよう（$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{e}$ からの巻）

曲面の曲率？曲線の曲率は 2 階偏微分（$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{p}''$）からわかった……

→曲面上に曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ を考えて，その 2 階偏微分を見てみよう．これが接ベクトルになっているとは限らないので，接成分 $\boldsymbol{k}_g$ と法成分 $\boldsymbol{k}_n$ に分ける:

$$\boldsymbol{p}''(s) = \boldsymbol{k}_g + \boldsymbol{k}_n.$$

このとき，$\boldsymbol{k}_g$ を測地的曲率ベクトル，$\boldsymbol{k}_n$ を法曲率ベクトルと呼ぶ．

【法曲率の定義】$\exists \kappa_n, \boldsymbol{k}_n = \kappa_n \boldsymbol{e}$ 故，

$$\kappa_n = \kappa_n \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{p}''(s) \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}'(s) \cdot \boldsymbol{e}' = L\frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds}$$

κ_n を法曲率と呼ぶ．↑第 2 基本形式っぽいなあということで，第 2 基本形式っぽい表現を考えてみる: 曲面の単位接ベクトル $\boldsymbol{w} = \xi \boldsymbol{p}_u + \eta \boldsymbol{p}_v$ に対して

$$\mathrm{II}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) := L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$$

と定めると，$\kappa_n = \mathrm{II}(\boldsymbol{p}'(s), \boldsymbol{p}'(s))$.（同じベクトル 2 つも続けて書く意味あるのか ??? ）これまでの第 2 基本形式は，この記法に則ると $\mathrm{II} = \mathrm{II}\left(\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\right)$ となる．

【主曲率，Gauss 曲率，平均曲率の定義】単位接ベクトル $\boldsymbol{w}$ をぐるぐる回して，$\mathrm{II}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ の最大，最小を探る．つまり，

《$E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2=1$ 上での $L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2$ の最大，最小》，つまり《$\lambda=\dfrac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}$ の最大，最小》を探る．

solution

$(L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2)-\lambda(E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2)=0$ より，両辺を ξ や η で偏微分して $\dfrac{\partial\lambda}{\partial\xi}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial\eta}=0$ とすると，

$$(*):\begin{cases}(L-\lambda E)\xi+(M-\lambda F)\eta=0\\(M-\lambda F)\xi+(N-\lambda G)\eta=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{pmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であって，$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 故

$$\begin{vmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{vmatrix}=0\quad\Leftrightarrow(EG-F^2)\lambda^2-(EN+GL-2FM)\lambda+(LN-M^2)=0.$$

この解 $\lambda=\kappa_1,\kappa_2$ が求める最大，最小である！（どっちがどっちでもいいけど，$\kappa_1>\kappa_2$ とかしておこう）■

このとき，κ_1,κ_2 を主曲率，$K:=\kappa_1\kappa_2$ を Gauss 曲率，$H:=\dfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ を平均曲率と呼ぶ．2 次方程式の解と係数の関係から K,H は次のように求められる:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}.$$

また $\mathrm{II}(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1)=\kappa_1,\mathrm{II}(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_2)=\kappa_2$ なる $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ の方向を曲面の主方向と呼ぶ．さらに $K\equiv0$ なるときその曲面を平坦曲面と呼び，$H\equiv0$ であるときその曲面を極小曲面と呼ぶ．

次にやりたいこと→ Gauss 曲率を用いて，曲面の形状判定の定理を書き直す！

Theorem

曲面 $\boldsymbol{p}$ に於いて，その Gauss 曲率を K とするとき，

$$\begin{aligned}K>0 &\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{p}\text{ は凸状}\\ K<0 &\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{p}\text{ は鞍状}\end{aligned}$$

が成り立つ．—

proof $EG-F^2>0$ より，$\mathrm{sgn}K=\mathrm{sgn}(LN-M^2)$. ■

次にやりたいこと→主方向の性質を詳しく！

いま，主曲率 $\lambda = \kappa_i$ に対する主方向ベクトルを $\boldsymbol{w}_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$ と置いて，$(*)$ を見直してみる……

$$\begin{cases} L\xi_i + M\eta_i = \kappa_i(E\xi_i + F\eta_i) \\ M\xi_i + N\eta_i = \kappa_i(F\xi_i + G\eta_i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \kappa_2 \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \\ &= \kappa_1 \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \\ &= \kappa_1 \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで，$\kappa_1 \neq \kappa_2$ なら $\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$ 故 $\boldsymbol{w}_1 \perp \boldsymbol{w}_2$.

$\kappa_1 = \kappa_2$ なら $\mathrm{II}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ の最大最小が一致することを意味するので，$\mathrm{II}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ は定数．このときどの方向もが主方向となる．

$\kappa_1 = \kappa_2$ なる点を臍点と呼ぶ．それとはまた別で，$K > 0, K = 0, K < 0$ なる点をそれぞれ楕円点，放物点，双曲点と呼ぶ．

0.2 曲面の曲率を求めよう

Gauss 曲率を見て曲面の形状を示唆する．

example 1（トーラス）

$\boldsymbol{p}(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix} \quad (R > r)$ で，

$$\mathrm{I} = r^2 dudu + (R + r\cos u)^2 dvdv,$$

$$\mathrm{II} = rdudu + (R + r\cos u)\cos u dvdv.$$

$$\therefore \kappa_1 = \frac{\cos u}{R + r\cos u}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r}.$$

$$\therefore K = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}, \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos u}{R + r\cos u} + \frac{1}{r}\right).$$

K の符号は $\cos u$ の符号に一致するが……図で見てみると $\cos u > 0$ なるとき曲面は凸状，$\cos u < 0$ なるとき曲面は鞍状とわかる！（あの定理の図的理解にはとてもよろしい）

example 2（楕円面）

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2c^2\cos^2 u\cos^2 v + c^2a^2\cos^2 u\sin^2 v + a^2b^2\sin^2 u)^2} > 0.$$

したがって，どこもかしこも楕円点である．故に曲面は凸状．

example 3（一葉双曲面）

$$K = \frac{-1}{a^2b^2c^2(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})^2} < 0.$$

したがって，どこもかしこも双曲点である．故に曲面は鞍状．

example 4（二葉双曲面）

$$K = \frac{1}{a^2b^2c^2(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})^2} > 0.$$

したがって，どこもかしこも楕円点である．故に曲面は凸状．

0.3 曲面の曲率を考えよう（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から）

正規直交標構 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を使えばもっと綺麗になるかなという発想．標構の作り方は次の通り（簡単）:

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 : \text{接ベクトル} \to \boldsymbol{e}_3 := \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2.$$

ただし，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}$ となるように接ベクトル 2 つを選ぶこと．

$\to$ 行列 $A := (a^i_j)$ が存在して $(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)A$. 右手系左手系は変わってないから $\det A > 0$.

【I を求める】

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv = (a^1_1 du + a^1_2 dv)\boldsymbol{e}_1 + (a^2_1 du + a^2_2 dv)\boldsymbol{e}_2$$

$$\theta^1 := a^1_1 du + a^1_2 dv, \quad \theta^2 := a^2_1 du + a^2_2 dv.$$

$$\to d\boldsymbol{p} = \theta^1\boldsymbol{e}_1 + \theta^2\boldsymbol{e}_2.$$

$$\therefore \mathrm{I} = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2.$$

【II を求める】

$$d\boldsymbol{e}_1 = \omega^1_1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2_1\boldsymbol{e}_2 + \omega^3_1\boldsymbol{e}_3$$

$$d\boldsymbol{e}_2 = \omega_2^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_3$$
$$d\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3^3\boldsymbol{e}_3$$
$$(\because \mathbb{R}^3 =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 > .\text{ただし}\omega_j^i\text{は } du, dv \text{ の 1 次結合})$$
$$\text{行列 } (\omega_j^i) \text{ は交代行列.}$$
$$(\because \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\text{より } d\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot d\boldsymbol{e}_j = 0 \quad \text{i.e.} \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0)$$
$$\to \mathrm{II} = -d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{e} = -(\theta^1\boldsymbol{e}_1 + \theta^2\boldsymbol{e}_3) \cdot (\omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2) = \theta^1\omega_1^3 + \theta^2\omega_2^3$$
$$B := (b_{ij}) \text{ で } \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}.^1$$
$$\therefore \mathrm{II} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\theta^i\theta^j.$$

第 2 基本形式のほうは大して綺麗になってないかも…….

$\to B$ の調査．$d\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_u du + \boldsymbol{p}_v dv$ より

$$Ldu + Mdv = \omega_1^3 a_1^1 + \omega_2^3 a_1^2$$
$$Mdu + Ndv = \omega_1^3 a_2^1 + \omega_2^3 a_2^2$$
$$\begin{aligned}\therefore \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} &= {}^tA \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} \\ &= {}^tAB \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \\ &= {}^tABA \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\end{aligned}$$
$$\therefore S = {}^tABA \quad \text{i.e.} \quad B = {}^tA^{-1}SA \quad (S := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix})$$

故に，B は対称行列.

【ここからが本題！主曲率の再定義】

B の固有値は実数であるが，そのふたつを κ_1, κ_2 と書き曲面の主曲率と呼ぶ.

natural question（これはもとの定義に一致しているのか？）

これを確認するには，$K := \kappa_1\kappa_2, H := \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ がもとの定義に一致することを確認すればOK.（K, H が OK なら，2 次方程式 $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$ の解 $\lambda = \kappa_1, \kappa_2$ も OK なのである）

[1] ω_1^3, ω_2^3 は du, dv の 1 次結合であったが，θ^1, θ^2 は du, dv の 1 次結合であり独立なので，行列 B が存在して本文のようにできるのである.

$B = AA^{-1t}A^{-1}SA^{-1}$ 故，

$$\det B = (\det {}^tAA)^{-1} \cdot \det S, \quad \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}({}^tAA)^{-1}S.$$

いま簡単な計算により ${}^tAA = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ がわかるから，

$$\det B = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \mathrm{tr}B = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}. \blacksquare$$

行列の固有値，行列式，跡のそれぞれで主曲率，Gauss 曲率，平均曲率が直接的に定義されるからいい感じ．行列 B の出どころは，微分形式と微分形式とをつなぐ係数である．

0.4　曲面の曲率を考えよう（外微分形式から）

1　曲線論

1.1　曲率や捩率はその名にふさわしい働きをしているか？

この話題を考えるには，まず，常螺旋の曲率，捩率を計算するのがよいだろう．

example（常螺旋の曲率，捩率）

常螺旋 $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ に於いて，$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$\left| \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \right| = \sqrt{2} \quad \therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}.$$

したがって弧長径数 s は $s = \sqrt{2}t$ で与えられる．

$$\therefore \boldsymbol{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \kappa = |\boldsymbol{e}_1| = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \boldsymbol{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \tau = \boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}.$$

これより，常螺旋で曲率は一定であるし，捩率は一定であるので，それぞれのふさわしさが際立ってくるように思える．—

次のような定理も，少々技巧的ではあるが簡単な計算によって証明される．言っていることは,《曲線は，曲率と捩率により形状が確定する》ということである．

Theorem

曲率 κ，捩率 τ なる曲線 $\boldsymbol{p}$ と曲率 $\overline{\kappa}$，捩率 $\overline{\tau}$ なる曲線 $\overline{\boldsymbol{p}}$ があったとき，

$$\boldsymbol{p} \equiv \overline{\boldsymbol{p}} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \equiv \overline{\kappa} \wedge \tau \equiv \overline{\tau}$$

が成り立つ．—

sketch

($\Rightarrow$) $\overline{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}$（$A$ は回転行列，$\boldsymbol{a}$ は並進ベクトル）と表せることと，Frenet-Serret の公式を用いてベクトルの等式を立てる．その係数比較を行うことで結論を得る．

($\Leftarrow$) 適切な合同変換によって，或る 1 点で $\boldsymbol{p}$ と $\overline{\boldsymbol{p}}$ との座標，標構が一致するようにする．このとき，実はほかのすべての点までもが一致していること，すなわち

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{p}(s) - \overline{\boldsymbol{p}}(s)) = 0$$

を示せばよい．■

また，次の公式は，曲率，捩率が曲線の変化に対してどのような寄与を有するかを明瞭にする．

Proposition（Bouquet の公式）

曲率 κ，捩率 τ なる曲線 $\boldsymbol{p}$ があったとき，

$$\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(0) \ + \ \boldsymbol{e}_1(0)s \ + \ \kappa(0)\boldsymbol{e}_2(0)\frac{s^2}{2!} \ + \ \{-\kappa(0)^2\boldsymbol{e}_1(0) + \kappa'(0)\boldsymbol{e}_2(0) + \kappa(0)\tau(0)\boldsymbol{e}_3(0)\}\frac{s^3}{3!} \ + \ \cdots$$

が成り立つ．—

sketch

$\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}'''$ を計算することで，ただちに結論を得る．■

最後に，Frenet-Serret の公式からイメージを得てこの説を終わる．

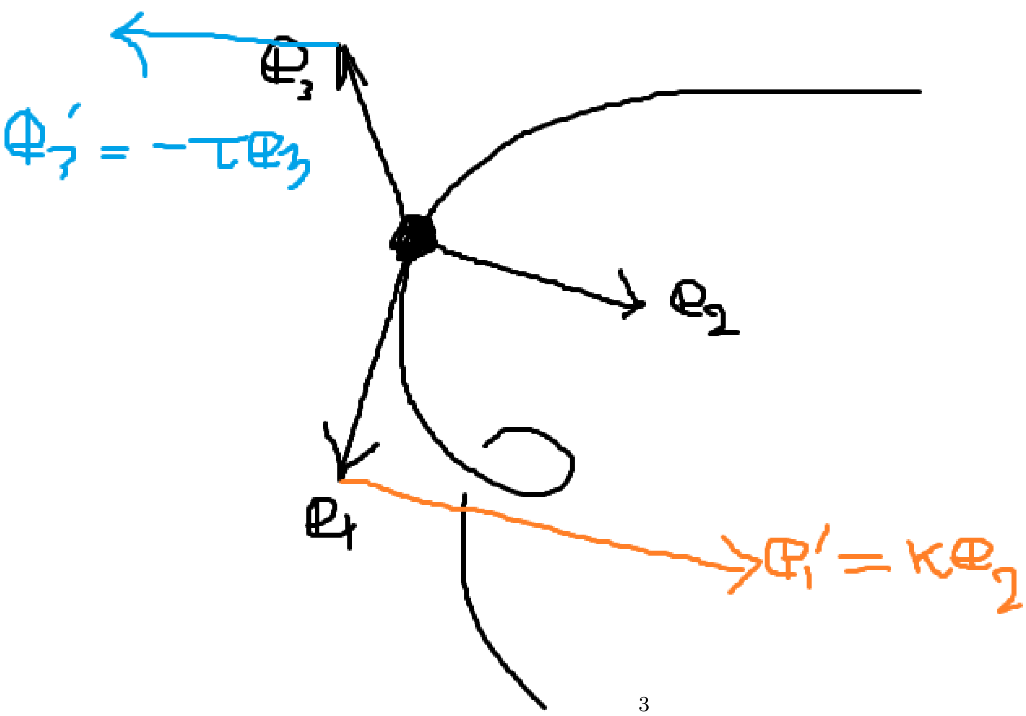
Proposition

曲線 $\boldsymbol{p}$ の標構を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とし，曲率，捩率をそれぞれ κ, τ とすると，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \\ \boldsymbol{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．—

曲線を描いてみて，適当な1点に標構をつくってみよう．$\boldsymbol{e}_1$ の終点から $\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2$ を引く．この $\boldsymbol{e}_1'$ の向きが $\boldsymbol{e}_1$ の引っ張られる向きである．$\boldsymbol{e}_3$ の終点から $\boldsymbol{e}_1' = -\tau \boldsymbol{e}_3$ を引く．この $\boldsymbol{e}_3'$ の向きが $\boldsymbol{e}_3$ の倒される向きである．すると，曲率が大きいほど $\boldsymbol{e}_1$ は強く引っ張られるし，捩率が大きいほど $\boldsymbol{e}_3$ は強く倒される．これによって曲線が「曲がり」「捩れる」ことを納得できるだろう[2]（次図参照）．



[3]

---

[2] $\boldsymbol{e}_2$ のことをあまり気にする必要はない．$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_3$ の変化に合わせて変化するだけである．

[3] 図の貼り付けうまくいった！積極的に載せていきたいが，マウスで描いててうまくいかないのであまり載せない．

2　曲面論 1（基本形式，外微分形式）

2.1　第 1 基本形式の気持ち？

Definition（第 1 基本形式）

曲面 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ に於いて，$E := \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u, F := \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_u, G := \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v$ なるとき，

$$\mathrm{I} := Edudu + 2Fdudv + Gdvdv = d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{p}$$

のことを曲面 $\boldsymbol{p}$ の**第 1 基本形式**と呼ぶ．—

第 1 基本形式は，その曲面上に描かれた曲線の長さを示唆する．実際，uv 平面上に曲線 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ を描き，曲面上に曲線 $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(u(t), v(t))$ を考えると，その曲線長（$t : \alpha \to \beta$）は

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} \left| \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \right| dt = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}} dt = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\mathrm{I}}$$

となるのである．少し迂回りして，$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{p}_u \dfrac{du}{dt} + \boldsymbol{p}_v \dfrac{dv}{dt}$ から丁寧に計算を進めても同じ結果を得る（暇なときに計算してみてください）．第 1 基本形式が曲線長に係わるということは次章の Riemann 計量で再度登場するので，ぜひ覚えておいてもらいたい．

また簡単にわかるが，第 1 基本形式は正値形式である．i.e. $EG - F^2 > 0$.

2.2　第 2 基本形式の気持ち？

第 2 基本形式の定義のために，曲面の単位法ベクトル $\boldsymbol{e}$ を次のように定義しておく:

$$\boldsymbol{e} := \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}.$$

Definition（第 2 基本形式）

曲面 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ に於いて，$L := -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u, M := -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u, N := \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v$ なるとき，

$$\mathrm{II} := Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv = -d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{e}$$

のことを曲面 $\boldsymbol{p}$ の**第 2 基本形式**と呼ぶ．—

remark

L, M, N の箇所を少し詳しく言及しておく．$\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e} = 0 \wedge \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e} = 0$ であるが，それぞれ両辺を u や v で偏微分することで

$$\boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u,$$

$$\boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_v,$$
$$\boldsymbol{p}_{vu} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u,$$
$$\boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v$$

を得る．ここから L, M, N を定義しているのである．—

第 2 基本形式は，その曲面の形状を示唆する．実際，次の定理が成り立っているのである．

Theorem

曲面 $\boldsymbol{p}$ の第 2 基本形式 II に対して，

$$\begin{aligned} LN - M^2 > 0 \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{p}\ \text{は凸状} \\ LN - M^2 < 0 \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{p}\ \text{は鞍状} \end{aligned}$$

が成り立つ．—

sketch

$f(u, v) := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}(u, v)$ で，形状を調査したい点 $\boldsymbol{p}_0 := \boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ を任意にとり，$\boldsymbol{a} := \boldsymbol{e}(u_0, v_0)$ とする．$\boldsymbol{p}_0$ に於いて $df = 0$ がわかるので，Hesse 行列を用いて $\boldsymbol{p}_0$ のまわりの様相を調べる．このとき，Hesse 行列式が実は $LN - M^2$ となっているのである．■

3　曲面論 2（Riemann 幾何，測地線）

4　曲面論 3（Stokes の定理，Gauss-Bonnet の定理）

5　曲面論 4（極小曲面）