1　はじめに

この資料は 11 月 2 日分の発表資料をまとめたものです。次回の発表時、この資料の補足から始めたいと思います。

2　準同型

Def. 2.1. 準同型写像
群 $(G, \circ)$ から群 $(G', *)$ への写像 $f : G \to G'$ が任意の $a, b \in G$ に対して,$f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ を満たすとき,f を G から G' への**準同型写像**という.

Prop. 2.1. $f : G \to G'$ を群の準同型写像, 群 G, G' の単位元をそれぞれ $1, 1'$ とする. このとき, 以下が成り立つ.d
(1) $f(1) = 1'$
(2) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
(3) $a^n = 1$ ならば $f(a)^n = 1'$. 特に,$ord(f(a))|ord(a)$
(4) f が単射ならば,$ord(f(a)) = ord(a)$

Proof. (1) $1 = 1^2$ より,$f(1) = f(1^2) = f(1)f(1)$ であり, 両辺に $f(1)^{-1}$ をかけて,$1' = f(1)$.
(2) $aa^{-1} = 1$ より,(1) より $f(a)f(a^{-1}) = f(1) = 1'$. よって, 逆元の一意性から $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.
(3) $f(a)^n = f(a^n) = f(1) = 1'$.
(4) f が単射であれば,$f(a)^n = 1' \Longrightarrow f(a^n) = f(1) \Longrightarrow a^n = 1$ で (3) の逆が成り立つ. □

Def. 2.2. 群の同型
群 G から群 G'への全単射な準同型写像 $f : G \to G'$が存在するとき,G と G'は**同型**といい,$G \simeq G'$ と書く.また全単射な準同型写像 f を**同型写像**といい,$G \xrightarrow{\sim} G'$と書く.同型は群全体に対する同値関係を与え, この同値関係による同値類を**同型類**という.

Def. 2.3. 準同型写像の核と像
$f : G \to G'$ を群の準同型写像, 群 G, G' の単位元をそれぞれ $1, 1'$ とする.G' の単位元に移る G の元全体

$$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G | f(g) = 1'\}$$

を f の**核**という. また,G から移ってくる G' の元全体

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(g) \in G' | g \in G\}$$

を f の**像**という.

Prop. 2.2. $f : G \to G'$ を群の準同型写像, 群 G, G' の単位元をそれぞれ $1, 1'$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $\mathrm{Im}(f) \leq G'$

(2) $\mathrm{Ker}(f) \lhd G$

(3) f : 単射 $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{1\}$

Proof. (1) $f(g), f(h) \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して, $f(g)f(h) = f(gh) \in \mathrm{Im}(f), f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \in \mathrm{Im}(f)$ であるから, 部分群の判定条件より $\mathrm{Im}(f) \leq G'$.
(2) (1) と同様に, $g, h \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して, $f(g) = f(h) = 1'$であり, $f(gh) = f(g)f(h) = 1', f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = (1')^{-1} = 1'$より $gh, g^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.$\mathrm{Ker}(f) \lhd G$ であることは, $x \in G$ に対して, $f(x^{-1}gx) = f(x^{-1})f(g)f(x) = f(x)^{-1} \cdot 1' \cdot f(x) = 1'$より $x^{-1}gx \in \mathrm{Ker}(f)$.よって $\mathrm{Ker}(f) \lhd G$.
(3) ($\Rightarrow$) Prop1.1.より $f(1) = 1'$であるから, f が単射ならば $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$.
($\Leftarrow$) $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$ とする.$x, y \in G$ に対して, $f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x)f(y)^{-1} = 1' \Longrightarrow f(xy^{-1}) = 1' \Longrightarrow xy^{-1} = 1 \Longrightarrow x = y$. □

3 準同型定理

Thm. 3.1. 準同型定理
群 G から群 G'への準同型写像 $f : G \to G'$に対して, $N = \mathrm{Ker}(f)$ とすれば,

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f), xN \mapsto f(x)$$

は同型写像となる. すなわち, 剰余群 G/Ker*(f)* と fによる G の像 Im*(f)* は同型となる.

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f).$$

Proof. $1'$を G'の単位元とする.Prop.1.2.より $N = \mathrm{Ker}(f) \lhd G$ で G/N は群である.$xN = yN \Longleftrightarrow y^{-1}x \in N \Longleftrightarrow f(y^{-1}x) = 1' \Longleftrightarrow f(y)^{-1}f(x) = 1' \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ であるため、$\overline{f}$は $\mathrm{well-defined}$ かつ全単射である.$\overline{f}$が準同型であることは, $\overline{f}(xN \cdot yN) = \overline{f}(xyN) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(xN)\overline{f}(yN)$ よりわかる. □