対称群の表現論
—対称多項式の視点から—

Naoya Enomoto*

2003.2.

概 要

この paper では，対称多項式の視点から対称群の表現論について述べる．目標は，対称群の複素既約指標が Schur 多項式と呼ばれる対称多項式と同一視されることを示すことである．主に [M]Chapter.I の内容を中心に述べる．まず，$m_\lambda, e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda, s_\lambda$ といった対称多項式を定義する．またこれらの対称多項式が無限変数の対称多項式環 Λ の基底をなすことを証明し，特に Schur 多項式 s_λ については Jacobi-Trudi の公式を証明する．次に，Λ 上に $\mathbb{Z}$-値双線形形式を導入し，対称多項式の直交性について調べる．これを利用して，skew Schur 多項式を導入し，Schur 多項式と tableaux の関係を明らかにする．また Schur 多項式のもうひとつの定義について述べ，その直交性と RSK-対応と呼ばれる組合せ論的な定理の関連について調べ，Jacobi-Trudi 公式の組合せ論的な証明を紹介し，両者が一致することについて説明する．これらの準備のもとで，対称群の表現論について述べ，主定理である複素既約指標と Schur 多項式の対応について証明する．また外部テンソル積表現の誘導表現の既約分解公式である Littlrwood-Richardson rule について説明する．

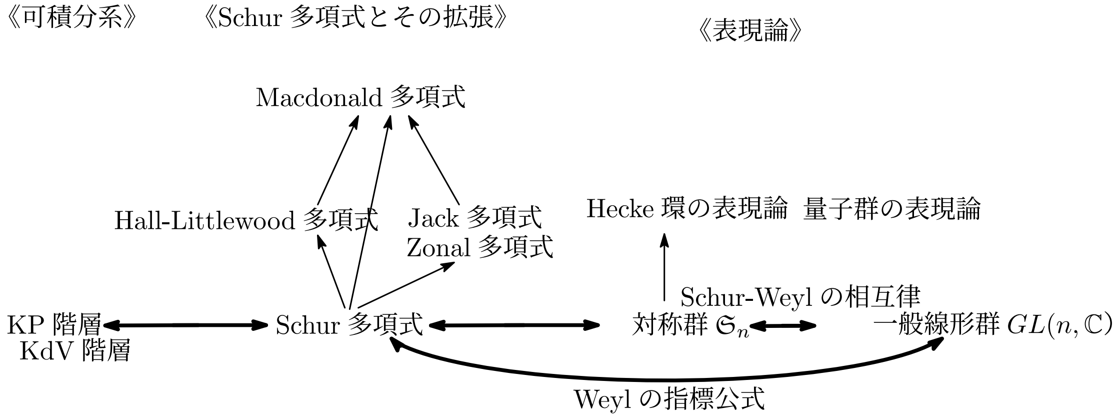
*henon@s00x0427.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

§ 目 次

§ 0　Introduction

対称群の表現論は，単に有限群の表現論の「特論」ではなく，他のいくつかの分野と関連している．まずはそのあたりについて説明し，次に対称群の表現論のいくつかの方法について説明する．

0.1　対称多項式の広がり



0.1.1　Schur 多項式

この paper で主役を演じる対称多項式は"Schur 多項式"と呼ばれる多項式である．これは，次のような形でシンプルに定義される；

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}. \quad \left(a_\alpha = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(w) x^{w(\alpha)}; \alpha \in \mathbb{N}^n \right)$$

これは，この paper で示すように，対称群の複素既約指標と同一視される．しかし，例えば次のように考えることによって，$GL(n,\mathbb{C})$ の指標と思える．

0.1.2　$GL(n,\mathbb{C})$ と Schur 多項式

まず $G = GL(n,\mathbb{C})$ の部分群として $H = \{\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n)\}$ を考える．そこで，$\epsilon_j : \mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n) \mapsto h_j \in \mathbb{C}^\times$ とし，$\sum \lambda_i \epsilon_i : \mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n) \mapsto h_1^{\lambda_1}\cdots h_n^{\lambda_n} \in \mathbb{C}^\times$ とする．形式的 exponential を

$$\exp : \oplus_{j=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_j \to \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1},\cdots,x_n^{\pm 1}]; \lambda = \sum \lambda_j \epsilon_j \mapsto x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_1}$$

と定義する．このとき，

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \\ &= \frac{\det x_i^{\lambda_j+n-j}}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)} \\ &= \frac{\sum_\sigma (\mathrm{sgn}\,\sigma)\sigma(x_1^{\lambda_1+n-1}\cdots x_n^{\lambda_n})}{x^\delta \prod_{i<j}(1 - x_j/x_i)} \\ &= \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\mathrm{sgn}\,\sigma)\exp(\sigma(\lambda+\delta))}{\exp(\delta)\prod_{i<j}(1-\exp(-\epsilon_i+\epsilon_j))} \\ &= \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\mathrm{sgn}\,\sigma)\exp(\sigma(\lambda+\delta)-\delta)}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\exp(-\alpha))} \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\Delta^+ = \{\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j | i < j\}$$

であり，これは positive root である．ここで，

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i<j}(\epsilon_i - \epsilon_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(n-2j+1)\epsilon_j$$

と定義する．また

$$\delta = \sum_{j=1}^{n}(n-j)\epsilon_j = \rho + \frac{1}{2}(N-1)(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$$

となる．このことに注意して，上の Schur 多項式についての式を書き換えると，

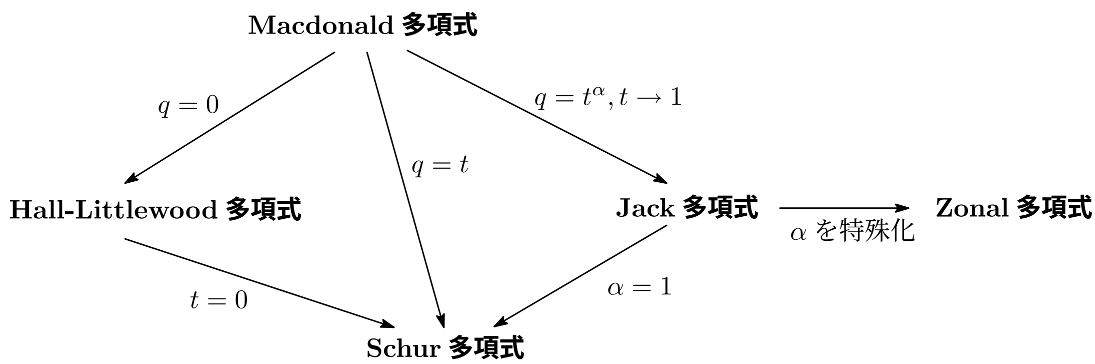
$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma)e^{\sigma(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})}$$

が得られる．この右辺は，Weyl の指標公式そのものであり，$GL(n,\mathbb{C})$ の最高ウェイト λ の既約指標にあたる．こうして Schur 多項式と $GL(n,\mathbb{C})$ の表現論が結びついている．

一方，対称群の表現と $GL(n,\mathbb{C})$ の（有理）表現を結びつけるものとして，"Schur-Weyl の相互律" と呼ばれるものがある．本質的には，$GL_n(n,\mathbb{C})$ のテンソル積表現に $\mathfrak{S}_n$ が作用するとき，両者の標準分解が一致するということを主張する定理である．例えば，[I] などを参照されたい．

0.1.3 対称多項式の"量子化"？

表題は少し大げさかもしれないが，Schur 多項式には，次図に示すような 1-パラメータおよび 2-パラメータの一連の対称多項式への拡張が知られている．



この paper では Schur 多項式を中心にいくつかの結果を紹介するが，議論の枠組み自体は，パラメータを増やしても同様である．2-パラメータへの拡張である Macdonald 多項式については，[M] で詳細に議論されており，Macdonald 多項式およびそのパラメータの特殊化で得られる Jack 多項式，さらにその特殊化から得られる Zonal 多項式は，ある微分作用素の固有関数として実現され，Jack 多項式や Zonal 多項式は，Gelfand-対のような調和解析的な対象とも関係している．

また，対称群の表現環（無限変数対称多項式環と同型）には，Heisenberg 代数や Virasoro 代数が作用することができて，その特異ベクトルがどのような表現や対称多項式に対応しているかということも研究されている．これらもパラメータをつけて拡張したものも知られており，Virasoro 代数の q-analogue や W-代数のような対象と関係し，物理的には（古典＆量子）多体問題の数学的定式化のひとつに相当している．

0.1.4 量子群と標準盤

一般に量子群には組合せ論的に扱いやすい結晶基底と呼ばれるものが存在することが知られている．これはいわば $q=0$ における基底であると標語的には理解できる．特に A 型 Lie 環 $\mathfrak{sl}_n$ の量子展開環 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$

は，その Weyl 群が $\mathfrak{S}_n$ であり，結晶基底についても組合せ論的な記述ができる．

$U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の有限次元既約最高 weight 表現 $V(\lambda)$ は，dominant integral weight によってパラメトライズされるが，dominant integral weight は分割と同一視できる．この分割 λ を shape とする semi-standard tableaux の全体を $\mathcal{B}(\lambda)$ とかくことにする．これには，crystal structure が導入され，$V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ と crystal として同型になるのである．

このような事実は，他の半単純 Lie 環のクラスや affine Lie 環 $A_{n-1}^{(1)}$ 型にも拡張されている．

Classical の場合については [HK]，affine の場合については [HK],[A] などを参照されたい．

0.1.5 可積分系と Schur 多項式

Schur 多項式は，ある無限個の連立変微分方程式系の解として（determinant formula を介して）理解される．これは KP 階層と呼ばれるソリトン型の可積分系であり，KdV 階層などを含むクラスになっている．現在，KP 階層の q-analogue のようなものとそれに付随する対称多項式の構成はいろいろ試みられており，q-Painlevé 方程式などと関連して進行しているが，Jack 多項式，Macdonald 多項式に相当するような，微分ないしは差分形のソリトン型可積分系はまだ知られていないようである．

0.1.6 Virasoro 代数の Fock 表現との関係;Virasoro singular vector

まず，Virasoro 代数の Fock 表現について述べよう．

奇数を添え字に持つような無限変数多項式環

$$V = V(x) = \mathbb{C}[x_j : j \geq 1, j : \text{奇数}]$$

を考える．$\deg(x_j) = j$ として，

$$V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V_d$$

と次数ごとに分解しておく．($\dim V_d$ は d の奇数による分割の個数に等しい.)

この V に対して，

$$a_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_{-j} = jx_j$$

とおいて，

$$L_k := \frac{1}{4} \sum_{j:\text{奇数}} :a_{-j}a_{j+2k}: + \frac{1}{16}\delta_{k,0}\mathbf{1} \ (k \in \mathbb{Z})$$

とおく．ここで :: は正規順序積と呼ばれているもので，

$$:a_i a_j: = \begin{cases} a_i a_j & i \leq j \\ a_j a_i & i > j \end{cases}$$

と定義する．このとき直接の計算によって次が成り立つ；

$$[L_k, L_m] = L_k L_m - L_m L_k = (k-m)L_{k+m} + \frac{1}{12}(k^3 - k)\delta_{k+m,0}\mathbf{1}.$$

これによって，$\{L_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は central charge= 1 の Virasoro 代数の表現を与えていることになる．これを Virasoro 代数の Fock 表現という．

実はこの表現は既約とは限らず，可約の場合には，最高ウェイト加群の直和に分解する．その最高ウェイトベクトルを探すには，

$$L_k f = 0 \ (\forall k \geq 1)$$

という微分方程式を解くことによって見つけることができる．このような f を特異ベクトル (sigular vector) と呼ぶ．

実は，この sigular vector は Schur 多項式として記述できる．すなわち，次のことが成り立つ．

定理 0.1. 上で与えた Virasoro 代数の Fock 表現の斉次 singular vector は，

$$s_{\Delta_r(x)|r\geq 0}$$

なる Schur 多項式の組に一致する．ここで Δ_r とは，階段状分割 $(r, r-1, \cdots, 2, 1)$ である．

一般には $s_\lambda(x) \in \mathbb{C}[x_j : j \geq 1]$ であり，j が奇数になるとはかぎらないが，ここでは $\lambda = (r, r-1, \cdots, 2, 1)$ が良い形をしている（“ 2-core ”などといわれる）ので，奇数添え字の変数しか出てこないことがわかる．

この picture を Jack 多項式や Macdonald 多項式にも拡張する試みもある．Jack 多項式の場合には，Virasoro 代数で三町勝久-山田泰彦の結果がある．また Macdonald 多項式の場合には，Virasoro 代数を少し変形した q-Virasoro 代数なるものを導入する粟田英資らの結果も知られている．

0.2 対称群の表現論三幕劇

さて，対称群の表現論については，大きく分けて 3 つの方法が知られている．

(1) Specht 加群の方法. ([F], [S], [H], [TH] など.)

(2) 群環のベキ等元を利用する方法. ([I] など.)

(3) 対称多項式を利用する方法. ([M] など.)

一般に有限群の表現論のひとつの結果として，有限群の（通常）表現は指標と呼ばれるものによって完全に決定されてしまうことがわかっている．指標がわかることと表現空間を具体的に設定して表現を直接構成することとは難しさが違う．しかし，対称群の表現論の場合には，(1) および (2) のように，具体的に表現を実現する方法がある．(1) の Specht 加群の方法は，多項式空間に表現を具体的に実現するものである．また (2) は半単純環の理論を利用して群環のベキ等元を利用して具体的に構成する方法である．一方 (3) の方法では，複素既約指標と Schur 多項式とが同一視されることを機軸におき，例えば既約表現の次元やテンソル積表現の分解について，組合せ論的に記述する方法である．

これらについてもう少し説明しよう.（未定義語が多く出てくるが，余り気にせずに.）

分割 λ を shape とする tableaux を $\mathrm{Tab}(\lambda)$ とかく．このとき，$T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ の (i,j) 成分を $T(i,j)$ とかくことにすると，$(\sigma \cdot T)(i,j) = \sigma(T(i,j))$ によって $\mathfrak{S}_n$ が $\mathrm{Tab}(\lambda)$ に作用する．

$T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ に対して，

$$f_T(x) := \prod_{j=1}^{\lambda_1} \prod_{1\leq i_1<i_2\leq \lambda'_j} (X_{T(i_2,j)} - X_{T(i_1,j)}) = \prod_{j=1}^{\lambda_1} \det(X_{T(q,j)}^{p-1})_{1\leq p,q\leq \lambda'_j}$$

と定義する．これを T に対応する Specht 多項式という．特に T が標準盤であるとき，f_T を標準 Specht 多項式という．このとき，$\mathfrak{S}_n$ を多項式の変数の入れ替えで $F[X_1, \cdots, X_n]$ に作用させることを考えると，定義から明らかに

$$\sigma \cdot f_T(X) = f_{\sigma \cdot T}(X)$$

が成り立つ．これによって，$F[X]$ の部分加群であって $\{f_T(X) | T \in \mathrm{Tab}(\lambda)\}$ によって生成されるものを λ に付随した Specht 加群といい S^λ などとかく．

$\lambda = (n)$ とすると，$Tab(\lambda)$ は $1, \cdots, n$ を任意の順序で横に並べたものであり，$f_T(X) = 1$ となって $S^{(n)}$ は 1 次元となり $\mathfrak{S}_n$ の自明表現を与える．一方，$\lambda = (1^n)$ の場合，$\mathrm{Tab}(\lambda)$ は $1, \cdots, n$ を任意の順序で縦に並べたものであるから，$f_T(X) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Delta(X_1, \cdots, X_n)$ であり，$S^{(1^n)}$ も 1 次元で $\mathfrak{S}_n$ の符号表現を与える．

$\lambda = (2,1), n = 3$ とすると，

$$T_1 = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}, \quad T_2 = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}, \quad T_3 = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & \end{matrix}$$

とおくとき，$S^\lambda = Ff_{T_1}(X) + Ff_{T_2}(X) + Ff_{T_3}(X)$ の形になり，

$$f_{T_1} = X_2 - X_1, \quad f_{T_2} = X_3 - X_1, \quad f_{T_3} = X_3 - X_2$$

となる．このとき $f_{T_1} + f_{T_3} = f_{T_2}$ だから f_{T_1}, f_{T_3} を基底と見れば，これは $\mathfrak{S}_3$ の standard 表現と呼ばれる既約表現を与える．

後半の例からわかるように，$\{f_T | T \in \mathrm{Tab}(\lambda)\}$ は一般に F 上一次独立にはならない．しかし，特に標準盤の全体 $\mathrm{STab}(lambda)$ とすれば一次独立になる．この結果も含めて，Specht 加群の方法によって次の結果が成り立つ．

定理 0.2. ［**Specht 加群の方法における主定理**］　F は標数 0 の代数的閉体とする．
(1) $\{f_T(X) | T \in \mathrm{STab}(\lambda)\}$ は S^λ の F-基底を与える．
(2) $\{S^\lambda | \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ は $\mathfrak{S}_n$ の F 上の既約表現の同型類の完全代表系を与える．
(3) S^λ の次元は $\mathrm{STab}(\lambda)$ の元の個数に等しい．

さらにこの文脈でテンソル積表現の分解公式などを得ることもできる．こうしたことは，[H] にはきわめて introductry に紹介されており，[TH],[F],[S] などでは詳細に議論されている．

一方，Specht 加群の方法によって構成された S^λ については，群環 $F[\mathfrak{S}_n]$ のある左イデアルと同型となることが知られている．これには半単純環の議論を少し利用しなくてはならないが，ここではごく大雑把に結果を述べる．

まず，$T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ に対して，T の第 i 行に書かれている数字の集合を $R_i(T)$，第 j 行に書かれている数字の集合を $C_j(T)$ とかき，$\{R_i(T) | i \le \ell(\lambda)\}, \{C_j(T) | 1 \le j \le \ell(\lambda')\}$ を保つような $\mathfrak{S}_n$ の部分群を H_T, V_T とかき，水平置換群，垂直置換群と呼ぶことにする．H_T の自明表現，V_T の符号表現から定まる $F[\mathfrak{S}_n]$ のベキ等元を h_T, v_T とかく．このとき次の結果が成り立つ．

定理 0.3. 　$S^\lambda \cong_{F[\mathfrak{S}_n]} F[\mathfrak{S}_n] v_{T_\lambda} h_{T_\lambda}$ が成り立つ．また，$T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ に対し，$v_T h_T$ の生成する左イデアルは T によらず同型となる．この $v_T h_T$ を Young 対称子と呼ぶ．

例えば [I] で述べられていることは，Specht 多項式を用いるのではなく，半単純環の議論を基礎に，直接この左イデアルを構成する方法である．(あとで述べるが，これは水平置換群の自明表現の誘導表現と垂直置換群の符号表現の誘導表現には，ちょうど λ に対応する既約表現のみが共通に，かつ重複度 1 で現れることを背景にしている．) 既約指標の計算や指標表の作製，テンソル積表現の分解や Schur-Weyl の相互律なども，Specht 加群を経由することなく，直接半単純環理論と分割についての考察から推し進めることができる．

一方，[M][1]の方法を用いてこの paper で述べる内容は，具体的な表現を見るというよりは，指標の方を見る．というよりも指標を具体的に対称多項式として記述したもの，すなわち Schur 多項式を見るのである．

この paper の主定理は，無限変数の対称多項式環と対称群の表現環が $s_\lambda \leftrightarrow \chi^\lambda$ なる対応によって環構造もこめて同型になることである．この対応を対称多項式環の方から推し進めてゆき，有限群の表現論について若干の知識を仮定することで主定理の証明に至る．この方法は非常に組合せ論的な側面を強く持っている．

[1]とはいえ，実は [M] には example の箇所に上記の 2 つの方法とも取り上げられている．

§ 1　主役を演じる対称多項式たち

ここでは，以下の対称多項式を導入する；

$$\begin{aligned} m_\lambda &: \text{monomial symmetric function}, \\ e_\lambda &: \text{elementary symmetric function}, \\ h_\lambda &: \text{complete symmetric function}, \\ p_\lambda &: \text{power sum}, \\ s_\lambda &: \text{Schur function}. \end{aligned}$$

これらは皆，無限変数対称多項式環 Λ の基底をなすものであり，以下の議論の中で重要な役割を演じる．

1.0　用語

定義 1.1.　$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots); \lambda_i \in \mathbb{N}$ が分割であるとは，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ を満たすことを言う．$\lambda_i \neq 0$ であるような最大の i を λ の長さといい，$\ell(\lambda)$ とかく．また，$\sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$ であるとき，λ は n の分割であるという．

$m_i = m_i(\lambda) = \mathrm{Card}(j : \lambda_j = i)$ を λ における i の重複度という；$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots r^{m_r} \cdots)$ と表示できる．分割 λ に対し，$\lambda'_i = \mathrm{Card}(j; \lambda_j \geq i)$ としてできる $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots)$ を λ の転置という．

定義 1.2.　n 変数多項式環 $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ に n 次対称群が変数の置換で作用する．この作用に関して不変な多項式の全体を $\Lambda_n := \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ とかいて，n 変数対称多項式環という．これは，k 次同次対称多項式のなす部分空間を Λ_n^k とかくことにしたとき，次のような直和に分解している；

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k.$$

そこで $\rho_{m,n} : \Lambda_m^k \to \Lambda_n^k$ を変数の制限，すなわち，

$$\rho_{m,n}(x_i) = \begin{cases} x_i & (i \leq n) \\ 0 & (i > n) \end{cases}$$

によって定め，これによる逆極限を Λ^k とかく；

$$\Lambda^k := \varprojlim \Lambda_n^k.$$

これらの直和

$$\Lambda := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k$$

を無限変数対称多項式環と呼ぶ．

Remark 1.3.　われわれが定義した対称多項式環は，各次数ごとに逆極限をとったものを直和した．しかし，$(\rho_{m,n}, \Lambda_n)$ の逆極限，すなわち変数の数でそのまま逆極限をとることも可能である．こうしてできる環を $\hat{\Lambda}$ とかくことにする．このとき，$\Lambda \neq \hat{\Lambda}$ である．

例えば，$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \in \Lambda^n$ であるから無限積

$$\prod_i (1 + x_i) \in \hat{\Lambda}$$

である．しかし，左辺は，

$$\sum_i x_i + \sum_{i \neq j} x_i x_j + \cdots$$

というように次数の異なる項が無限個現れてしまうため，直和から得られる Λ には属さない．

1.1 対称多項式たちの定義

ここでは，$m_\lambda, e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda, s_\lambda$ という 5 つの対称多項式を定義する．

1.1.1 monomial symmetric function m_λ

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して，

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

と定義する．このとき monomial symmetric function を次で定義する．

定義 1.4. 長さ n 以下の任意の分割 λ に対して，

$$m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{\alpha \text{は}\lambda\text{の相異なるすべての置換を動く}} x^\alpha$$

を，monomial symmetric function という．

例 1.5. monomial symmetric function についていくつか計算しよう．

$$n=1 \quad m_{(1)} = x \qquad n=2 \quad \begin{aligned} m_{(2)} &= x_1^2 + x_2^2, \\ m_{(2,1)} &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, \\ m_{(1,1)} &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

1.1.2 elementary symmetric function e_λ

定義 1.6. $r \in \mathbb{Z}$ に対し，r 次基本対称式とは，

$$e_r = \begin{cases} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} (= m_{(1^r)}) & r \geq 1 \\ 1 & r = 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

で定義される対称多項式を言う．

母関数表示として次のものがある；

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t). \tag{1.1}$$

定義 1.7. 分割 λ に対して，$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}$ と定義する．

1.1.3 complete symmetric function h_λ

定義 1.8. $r \in \mathbb{Z}$ に対し，r 次完全対称式とは，

$$h_r = \begin{cases} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_r} m_\lambda & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

で定義される対称多項式を言う．

母関数表示として次のものがある；

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{1.2}$$

(右辺の有理式を冪級数に展開して積を計算すればよい．)
また，E と H の関係として，次が成り立つ．

命題 1.9.
(1) $H(t)E(-t)=1$.
(2) $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r h_{n-r}=0\ (n\geq 1)$.

[証明] (1) は定義から．(2) は (1) の t^n の項を比較すればよい． ■

定義 1.10. 分割 λ に対して，$h_\lambda = h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_k}$ と定義する．

例 1.11. 完全対称多項式についていくつか計算する．

$$r=0 \quad h_0=1 \qquad r=2 \quad h_1=m_{(1)}=\sum x_i=e_1 \qquad r=2 \quad h_2=m_(2)+m_{(1,1)}=\sum x_i^2+\sum x_ix_j$$

1.1.4 power sum symmetric function p_λ

定義 1.12. $r\in\mathbb{Z}$ に対し，r 次 power sum とは,

$$p_r=\sum_i x_i^r=m_{(r)}$$

で定義される対称多項式を言う．

r 次 power sum の母関数 $P(t)$ について，次が成り立つ．

命題 1.13.
(1) $P(t)=H'(t)/H(t)$.
(2) $P(-t)=E'(t)/E(t)$.
(3)[Newton の公式] $nh_n=\displaystyle\sum_{r=1}^{n}p_rh_{n-r},\quad ne_n=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}p_re_{n-r}$.

[証明] (1) は,

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{r\geq 1}p_rt^{r-1}=\sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1}x_i^rt^{r-1}=\sum_{i\geq 1}\frac{x_i}{1-x_it}=\sum_{i\geq 1}\frac{d}{dt}\log\left(\frac{1}{1-x_it}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\log\left(\prod_{i\geq 1}(1-x_it)^{-1}\right)=\frac{d}{dt}\log H(t)=\frac{H'(t)}{H(t)}
\end{aligned}$$

から従う．(2) も同様．(3) は，まず (1) から,

$$P(t)=\sum_{r\geq 1}p_rt^{r-1}=\frac{H'(t)}{H(t)}=\frac{\sum_{r\geq 1}rh_rt^{r-1}}{\sum_{s\geq 1}h_st^s}$$

であることに注意し,

$$\left(\sum_{r\geq 1}p_rt^{r-1}\right)\cdot\left(\sum_{s\geq 1}h_st^s\right)=\left(\sum_{r\geq 1}rh_rt^{r-1}\right)$$

の係数を比較すれば良い．後半は E についての (2) の結果から得られる． ■

1.1.5 Schur 多項式 s_λ

まず，$\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対し，単項式 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ の交代化を

$$a_\alpha=a_\alpha(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(w)w(x^\alpha)$$

と定義する．ここで $\varepsilon(w)=\mathrm{sgn}(w), w(x^\alpha)=x_{w(1)}^{\alpha_1}\cdots x_{w(n)}^{\alpha_n}$ である．次の補題は明らかである．

補題 1.14.
(1) $w(a_\alpha) = \varepsilon(w)a_\alpha$ ($\forall w \in \mathfrak{S}_n$).
(2) $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ において，$\alpha_i = \alpha_j$ なる $i \neq j$ があるとき，$a_\alpha = 0$.

定義 1.15. λ を長さ n 以下の分割とし，$\delta = (n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$ とする．このとき，λ に付随する Schur 多項式を

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

と定義する．

補題 1.16. Schur 多項式 s_λ は $|\lambda|$ 次斉次対称多項式である．

[証明] 対称性は先の補題より明らかである．次に，多項式であることを示そう．このため，行列式の定義を思い出せば,

$$a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n}, \quad \text{特に } a_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j); \text{van der Monde 行列式}$$

である．$a_{\lambda+\delta}$ は反対称であることより，$x_i - x_j$ で割り切れることから，s_λ が多項式であることが従う．斉次なのは明らか． ■

1.2 Λ の基底としての対称多項式たち

まず m_λ が Λ_n の基底となることに注意する．

命題 1.17. $\{m_\lambda; \lambda\text{は長さn以下の分割全体を動く}\}$ は Λ_n の $\mathbb{Z}$-基底をなす．

[証明] monomial が一次独立であることは明らか．生成することは，対称多項式を考えていることに注意すれば，任意の対称多項式 f をひとつ取ったとき，f にある項を symmetrize した monomial は f に含まれなければならない．このことから f は $\{m_\lambda; \lambda\text{は長さn以下の分割全体を動く}\}$ の元の $\mathbb{Z}$-係数一次結合でかける． ■

一方，m_λ は，無限変数を考えた際の制限写像に対して，次のように振舞う；

$$\rho_{m,n}; \Lambda_m \to \Lambda_n; m_\lambda(x_1, \cdots, x_m) \mapsto \begin{cases} m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) & \ell(\lambda) \le n \\ 0 & \ell(\lambda) > n \end{cases}.$$

従って，無限変数の monomial symmetric function を定義することができる；すなわち，$\rho_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ から $m_\lambda = (m_\lambda(x_1, \cdots, x_n))_{n\ge1}$ と定義する．さらに次が成り立つ．

命題 1.18. $\{m_\lambda | \lambda\text{は長さ } k \text{ の分割}\}$ が Λ^k の $\mathbb{Z}$-基底をなし，$\{m_\lambda | \lambda\text{は任意の分割}\}$ が Λ の $\mathbb{Z}$-基底をなす．

例 1.19. いくつか計算する．

$$m_{(1)} = x_1 + x_2 + \cdots = \sum_i x_i,\ m_{(1^2)} = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots = \sum_{i<j} x_ix_j,\ m_{(2)} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots = \sum_i x_i^2$$

などとなる．また,

$$m_{(1)}^2 = x_1x_1 + x_1x_2 + \cdots + x_2x_1 + x_2x_2 + \cdots = 2m_{(1^2)} + m_{(2)}$$

もわかる．

次に，e と m の関係を見よう．そのためにまず分割の間の半順序を導入する．

定義 1.20. λ, μ を n の分割とするとき，$\mu \ge \lambda$ であるとは,

$$\mu_1 + \cdots + \mu_i \ge \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \quad (\forall i = 1, 2, \cdots n)$$

が成り立つことと定義する．これを natural ordaring という．

例 1.21.　natural ordaring は全順序ではなく半順序である．具体的に見てみよう．　$n=3$ では，3 つの分割 $(3),(2,1),(1,1,1)$ について i を動かしていくと，$(3,3,3),(2,3,3),(1,2,3)$ となるから，$(3)\geq(2,1)\geq(1,1,1)$ となるので全順序．$n=4$ では，5 個の分割 $(4),(3,1),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)$ に対して，$(4,4,4,4),(3,4,4,4),(2,4,4,4),(2,3,4,4),(1,2,3,4)$ であるから，$(4)\geq(3,1)\geq(2,2)\geq(2,1,1)\geq(1,1,1,1)$ となってやはり全順序．$n=5$ でも $(5)\geq(4,1)\geq(3,2)\geq(3,1,1)\geq(2,2,1)\geq(2,1,1,1)\geq(1,1,1,1,1)$ がわかるので全順序となっている．しかし $n=6$ で事情が変わる．
$(3,1,1,1)$ と $(2,2,2)$ を比較すると $(3,4,5,6),(2,4,6,6)$ だから最初は前者の方が大きいが 3 番目で後者が大きくなっている．従って，これには順序がつかない．従って，natural ordaring は半順序である．

Remark 1.22.　n の分割の全体には，辞書式順序という全順序が入る．すぐにわかるように，natural ordaring に対して，$\mu\geq\lambda$ ならば辞書式順序に関しても μ は λ より大きい．

分割の間の順序に関して，e を m で展開することができる．それが次の命題である．

命題 1.23.　λ を n の分割とするとき，

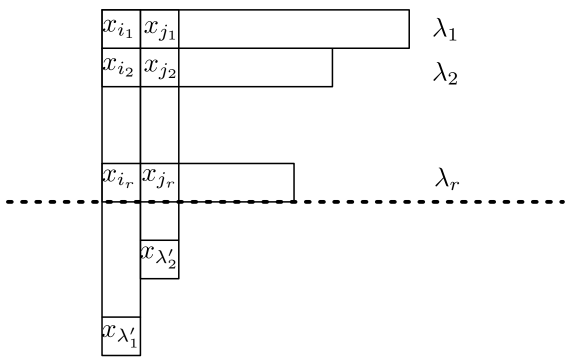
$$e_{\lambda'}=m_\lambda+\sum_{\mu<\lambda なる \mu\in\mathcal{P}_n}c_\mu m_\mu$$

が成り立ち，$c_\mu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる．

[証明]　$e_{\lambda'}=e_{\lambda'_1}e_{\lambda'_2}\cdots$ であり，これは対称多項式だから m_λ で展開できることは前の定理から従う．そこで，$e_{\lambda'}$ が，

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}=(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{\lambda'_1})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{\lambda'_2})\cdots$$
$$(i_1<i_2<\cdots<i_{\lambda'_1},j_1<j_2<\cdots<j_{\lambda'_2},\cdots)$$

の形の monomial の和でかけていることに注意する．ここで，次図のように，λ の Young 図形と各マスに x^α の変数を書き込んだものを考えよう；



条件 $i_1<i_2<\cdots<i_{\lambda'_1},j_1<j_2<\cdots<j_{\lambda'_2},\cdots$ に注意すれば，変数 $x_1,\cdots x_r$ は図の太点線よりも上，すなわち第 r 行よりも上にしか現れない．従って，

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_r\leq\lambda_1+\cdots+\lambda_r\ (1\leq\forall r\leq n)$$

が成り立つ．このことは $\alpha\leq\lambda$ を意味している．よって，

$$e_{\lambda'}=\sum_{\mu\geq\lambda}a_\mu m_\mu$$

の形に展開される．特に m_λ の係数は，$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots$ の項が出てくる個数であるが，これは $i_1=1,i_2=2,\cdots,i_{\lambda'_1}=\lambda'_1,j_1=1,j_2=2,\cdots$ の 1 通りしかありえない．よってその係数は 1 である．　■
このことから次の定理が従う．

定理 1.24.　$\{e_\lambda|\lambda は任意の分割\}$ は，Λ の $\mathbb{Z}$-基底となる．特に，$e_1,e_2,\cdots$ は $\mathbb{Z}$ 上代数的に独立であり，$\Lambda=\mathbb{Z}[e_1,e_2,\cdots]$ となる．

次に，h_λ について考えるために，Λ 上の involution を導入しよう．

定義 1.25. $\omega : \Lambda \to \Lambda$ を $\omega(e_r) = h_r$ を拡張することによって定義する．

補題 1.26. ω は Λ 上の involution，すなわち $\omega^2 = \mathrm{id}$ であり，特に Λ 上の同型写像を与える．

[証明] 命題 1.9(2) の公式を利用する．その両辺に ω を作用させると，

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r \omega(h_{n-r}) = 0$$

が成り立つ．ここで $h_1 = e_1$ に注意すれば，$\omega(h_1) = e_1$．n に関する induction と命題 1.9(2) に注意することで，$\omega(h_r) = e_r$ が従う． ■
このことから h_λ についても次が従う．

定理 1.27. $\{h_\lambda | \lambda$は任意の分割$\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$-基底を与え，特に $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \cdots]$ で与えられる．

p_λ についてはどうだろうか．命題 1.13 の Newton の公式に注意すれば，$h_n \in \mathbb{Q}[p_1, \cdots, p_n], p_n \in \mathbb{Z}[h_1, \cdots, h_n]$ である．このことから次が従う．

定理 1.28. $\{p_\lambda | \lambda$は任意の分割$\}$ は，

$$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

の $\mathbb{Q}$-基底をなす．特に，$\mathbb{Q}[p_1, \cdots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \cdots, h_n]$ が従う．

また，例えば具体的に $h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$ であることなどに注意すれば，$\{p_\lambda\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$-基底とはならない．

p_r が involution ω に対してどのように振舞うか考えよう．ω は $H(t)$ と $E(t)$ とを入れ替えるから，

$$\sum_{r \geq 1} \omega(p_r) t^{r-1} = \frac{E'(t)}{E(t)} = \sum_{r \geq 1} (-1)^{r-1} t^{r-1}$$

であるから，$\omega(p_r) = (-1)^r p_r$ となる．λ を分割とすれば，

$$\omega(p_\lambda) = \omega(p_{\lambda_1}) \omega(p_{\lambda_2}) \cdots = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} p_\lambda$$

となる．ここで $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}$ とおくと

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda$$

となる．また，次の“ 統計的規格化定数 ”を導入しよう；

$$z_\lambda := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i !.$$

このとき，あとで利用する重要な公式を与える．

定理 1.29.

$$H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}, \ E(t) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

が成り立つ．特に，

$$h_n = \sum_{|\lambda| = n} z_\lambda^{-1} p_\lambda, \quad e_n = \sum_{|\lambda| = n} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda$$

が成り立つ．

[証明] $H(t)$ についての式を示せば，$E(t)$ の式は involution ω を施せばよい．また h_n, e_n についての式は係数を見れば明らか．

$P(t) = \frac{d}{dt} \log H(t) = H'(t)/H(t)$ であった．従って，

$$H(t) = \exp\left(\sum_{r \geq 1} p_r \frac{t^r}{r} \right) = \prod_{r \geq 1} \exp\left(\frac{p_r t^r}{r} \right) = \prod_{r \geq 1} \sum_{j_r = 0}^{\infty} \frac{(p_r t^r)^{j_r}}{r^{j_r} j_r !} = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

となる． ■

Schur 多項式について見てみよう．

命題 1.30.
(1) $\{a_{\lambda+\delta}|\lambda$は長さが n 以下の分割 $\}$ は，n 次反対称多項式全体の空間 A_n の $\mathbb{Z}$-基底である．
(2) a_δ をかける写像は $\Lambda_n \to A_n$ なる同型写像である．
(3) $\{s_\lambda|\lambda$は長さが n 以下の分割 $\}$ は Λ_n の $\mathbb{Z}$-基底である．
(4) $\rho_{n+1,n}(s_\lambda(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}) = s_\lambda(x_1,\cdots,x_n)$.
(5) $\{s_\lambda|\lambda$は分割 $\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$-基底をなす．特に，$k \geq 0$ に対して，$\{a_\lambda|\lambda$は k の分割 $\}$ は Λ^k の $\mathbb{Z}$-基底となる．

[証明]
(1) $a_{\lambda+\delta} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+n-1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}$ であるから，$\lambda+\delta \neq \mu+\delta$ であれば，$a_{\lambda+\delta}$ と $a_{\mu+\delta}$ とには共通項がない．よって $a_{\lambda+\delta}|\lambda$は長さ n 以下の分割 は一次独立．次に，交代式 P に対して，P の展開に $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ なる項があれば，P の交代性から a_α の項を含む．もし $\alpha_i = \alpha_j$ なら $a_\alpha = 0$ だから $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geq 0$ としてよく，このときにはある分割 λ が存在して $\alpha = \lambda+\delta$ となり $a_{\lambda+\delta}$ の項を含む．以上から (1) が示された．
(2) 準同型は明らか．全射は，交代式が a_δ で割り切れることから．$a_\delta g = 0$ なる $g \in \Lambda_n$ は 0 しかないので単射も成立．
(3) は (1),(2) から従う．
(4) a_α について考える．α の長さが n 以下，つまり $\alpha_{n+1} = 0, \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > 0$ であるとすれば，

$$\begin{aligned}
a_\alpha(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})|_{x_{n+1}=0} &= \left|\begin{matrix} x_1^{\alpha_1} & \cdots & x_n^{\alpha_1} & x_{n+1}^{\alpha_1} \\ & & & \\ x_1^{\alpha_n} & \cdots & x_n^{\alpha_n} & x_{n+1}^{\alpha_n} \\ x_1^{\alpha_{n+1}} & \cdots & x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} & x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \end{matrix}\right|_{x_{n+1}=0} \\
&= \left|\begin{matrix} & & & 0 \\ & * & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{matrix}\right| \\
&= \det(x_i^{\alpha_j}) = a_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}(x_1,\cdots,x_n)
\end{aligned}$$

となる．従って，$a_\alpha(x_1,\cdots,x_n,0) = a_\alpha(x_1,\cdots,x_n)$ であり，従って s_λ も制限写像 $\rho_{n+1,n}$ に関して整合的である．
(5) は (3),(4) から従う． ■
次に，Schur 多項式に関して重要な公式である Jacobi-Trudi の公式を証明しよう．Schur 関数が完全対称多項式のを用いた行列式表示を持つことが公式の内容であるが，この determinant 公式があることが重要である．例えば，KP 階層と呼ばれるソリトン型可積分系の解として行列式表示を持つものが得られるが，この公式からそれが Schur 関数に他ならないことがわかる．また対称群の表現論でも必要になる．

定理 1.31. ［**Jacobi-Trudi の公式**］
λ を長さが高々N の分割とする．このとき，

$$s_\lambda(x) = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1\leq i,j\leq N}, \quad s_\lambda(x) = \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1\leq i,j\leq N}$$

が成り立つ．

[証明] 第 1 式から第 2 式を導くには，それぞれの右辺同士が等しいことを利用する．これには，Laplace 展開という余因子展開の拡張公式を用いるが，ここでは前半だけが必要なので詳細は省略する．
第 1 式を証明しよう．そのために，記号を準備しよう．
まず $e_r^{(k)}$ で，$x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N$ による r 次基本対称式を表すことにし，

$$\begin{aligned}
M &:= ((-1)^{N-i}e_{N-i}^{(k)})_{1\leq i,k\leq N}, \\
A_\alpha &:= (x_j^{\alpha_i})_{1\leq i,j\leq N}, \\
H_\alpha &:= (h_{\alpha_i-N+j})_{1\leq i,j\leq N}
\end{aligned}$$

とおく．このとき次が成り立つ．

$\boxed{\underline{\textbf{Claim}}.\quad A_\alpha = H_\alpha M.}$

実際，

$$E^{(k)}(t) := \sum_{r=0}^{N-1} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k} (1 + x_i t)$$

だから，$H(t)E^{(k)}(-t) = (1 - x_k t)^{-1} = 1 + x_k t + (x_k t)^2 + \cdots$ となる．左辺で直接 t^{α_i} の係数を見ると，

$$\sum_{s+r=\alpha_i} h_s e_r^{(k)} (-1)^r = \sum_{r=0}^{N-1} h_{\alpha_i - r} e_r^{(k)} (-1)^r = \sum_{j=1}^{N} h_{\alpha_i - N + j} e_{N-j}^{(k)} (-1)^{N-j}$$

となる．これは，$A_\alpha = H_\alpha M$ を意味している． □

ここで両辺の行列式を取ると，$\det A_\alpha = \det H_\alpha \det M$ となる．A_α の定義から，$\det A_\alpha = a_\alpha$ に他ならない．特に $\alpha = \delta$ とすると，

$$a_\delta = \det A_\delta = \det H_\delta \det M$$

となるが，$H_\delta = (h_{\delta_i - N + j}) = (h_{j-i})$ であるから，対角成分 1 の上半三角行列，特にその行列式は 1 である．よって，$\det M = a_\delta$ となる．そこで $\alpha = \lambda + \delta$ とすると，

$$a_{\lambda+\delta} = \det A_{\lambda+\delta} = \det H_{\lambda+\delta} \det M = \det H_{\lambda+\delta} a_\delta$$

であるから，

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \det H_{\lambda+\delta} = \det(h_{(\lambda_i + N - i) - N + j}) = \det(h_{\lambda_i - i + j})$$

となり求める公式が得られた． ■

例 1.32.

$\lambda = (n), \delta = (0)$ とすると，$s_{(n)} = h_n$ がわかる．

$\lambda = (1^n)$ とすると $\lambda' = (n)$ であるから $s_{(1^n)} = e_n$ となる．

§ 2　対称多項式の直交性

2.1　対称多項式の直交性

ここでは Λ 上に $\mathbb{Z}$-値双線形形式を定義し，前章で定義した対称多項式がこの双線形形式に関して直交関係にあることを証明する．この直交性は対称群の表現論の文脈で言えば，指標の直交関係式に相当するものである．

ここでは一貫して次の無限積を考える；

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}.$$

この無限積を対称多項式を用いて表示することができる．これが次の命題である．

命題 2.1.

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y)=\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(x)=\sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y)=\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y).$$

但し，右辺の λ はすべての分割を動く．但し最後の等式は変数を制限した場合に成立するものと思う．

[証明]　まず命題 1.29 の公式 $H(t)=\sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda t^{|\lambda|}$ に注意する．$(x_iy_j)_{i,j}$ をひとつの変数 z_k と思えば，この公式で $t=1$ とすることで，

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda(z)=\sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

となる.（ここで $p_\lambda(z)=p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ を用いた.）

次に，$H(y_i)$ を考えれば，

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\prod_j H(y_j)=\prod_j\sum_{r=0}^\infty h_r(x)y_j^r=\sum_\alpha h_\alpha(x)y^\alpha=\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y)$$

となる．(ここで，α は非負整数の組 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ であって $\sum\alpha_j<\infty$ なる組すべてを動き，λ は分割全体を動く．)x,y の役割を入れ替えて第 4 式が出る．

最後に，変数を n 個に制限し，$\delta=(n-1,\cdots,2,1,0)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
a_\delta(x)a_\delta(y)\prod_{i,j=1}^n(1-x_iy_j)^{-1} &= a_\delta(x)a_\delta(y)\sum_\alpha h_\alpha(x)y^\alpha\\
&= a_\delta(x)\sum_{\alpha,\omega}\varepsilon(\omega)y^{\omega\delta}h_\alpha(x)y^\alpha\\
&= a_\delta(x)\sum_\beta\varepsilon(\omega)y^\beta h_{\beta-\omega\alpha}(x)\\
&= \sum_\beta a_\beta(x)y^\beta\\
&= \sum_{\lambda,\omega,\ell(\lambda)\le n,\lambda:distinct} a_{\omega\lambda}(x)y^{\omega\lambda}\\
&= \sum_{\lambda,\omega}\varepsilon(\omega)a_\lambda(x)y^{\omega\lambda}\\
&= \sum_{\ell(\lambda)\le n,\lambda:distinct} a_\lambda(x)a_\lambda(y)\\
&= \sum_{\lambda:\text{分割}} a_{\lambda+\delta}(x)a_{\lambda+\delta}(y)
\end{aligned}$$

となる．これから第 5 式が従う．　■

さて，Λ 上に $\mathbb{Z}$-値双線形形式を

$$\langle h_\lambda,m_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}$$

を線形に拡張することで定義する．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2.2. $(u_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}_n}, (v_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ が $\Lambda_\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$-基底であるとする．このとき，上で定義した $\mathbb{Z}$-値双線形形式について，次の 2 条件は同値.

(1) $\langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$.

(2) $\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1-x_iy_j)$.

[証明]

$u_\lambda = \sum_\sigma a_{\lambda\sigma}h_\sigma, v_\mu = \sum_\rho b_{\mu\rho}m_\rho$ とおくと，(1) は次と同値；

$$(1') \quad \langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \sum_\sigma a_{\lambda\sigma}b_{\mu\sigma} = \delta_{\lambda\mu}.$$

一方，(2) は,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\lambda,\sigma,\rho} a_{\lambda\sigma}h_\sigma(x)b_{\lambda\rho}m_\rho(y) = \sum_{\sigma,\rho}\left(\sum_\lambda a_{\lambda\sigma}b_{\lambda\rho}\right)h_\sigma(x)m_\rho(y)\\ (\text{右辺}) &= \sum_{\sigma,\rho} h_\sigma(x)m_\rho(y)\end{aligned}$$

から (1') と同値. ■

このことから次の系が従う.

系 2.3. 対称多項式について，次の直交関係式が成立.

(1) $\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$.

(2) $\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = z_\lambda\delta_{\lambda\mu}$.

(3) $\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$

2.2 Heisenberg 代数との関連

$f\in\Lambda$ に対して，$f^\perp : \Lambda\to\Lambda$ を

$$\langle f^\perp u, v\rangle = \langle u, fv\rangle$$

によって定義する．ここで n 次 power sum p_n を考え，$p_n^\perp$ を考える．そこで,

$$\langle p_n^\perp p_\lambda, p_\mu\rangle = \langle p_\lambda, p_np_\mu\rangle = \langle p_\lambda, p_{(n)\cup\mu}\rangle = \begin{cases} 0 & \lambda\neq(n)\cup\mu \\ z_\lambda & \lambda=(n)\cup\mu\end{cases}$$

となる．一方で,

$$p_n^\perp p_\lambda = \sum_\nu d_\nu p_\nu$$

であるとすると,

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda\neq(n)\cup\mu & 0 \\ \lambda=(n)\cup\mu & z_\lambda\end{array}\right\} = \langle p_n^\perp p_\lambda, p_\mu\rangle = \sum_\nu d_\nu\langle p_\nu, p_\mu\rangle = d_\mu z_\mu$$

となるので,

$$d_\mu = \begin{cases} z_\mu^{-1}z_\lambda & \mu=\lambda-(n) \\ 0 & \mu\neq\lambda-(n)\end{cases}$$

となる．従って,

$$p_n^\perp p_\lambda = \begin{cases} z_\lambda z_\mu^{-1}p_\mu & \lambda\text{が } (n) \text{ を含む．また}\mu=\lambda-(n) \\ 0 & \lambda\text{が } (n) \text{ を含まない.}\end{cases}$$

となる．ここで $\mu = \lambda - (n)$ に注意すると，λ, μ の重複度をそれぞれ m_i, m'_j とかくと，

$$z_\lambda {z_\mu}^{-1} \frac{\prod_i i^{m_i} m_i!}{\prod_j j^{m'_j} m'_j!} = n m_n(\lambda)$$

となる．したがって，

$$p_n^\perp p_\lambda = n m_n(\lambda) p_\mu$$

(λ が $m_n(\lambda) = 0$ だからこれで全ての場合を含んでいることに注意．)

このことから，$p_n^\perp$ は $f \in \Lambda$ を p で展開したものに対して，

$$p_n^\perp = n \frac{\partial}{\partial p_n}$$

なる微分作用素となる．

ここで次のようにして作用素 π_n を定義する；

$$\pi_n := \begin{cases} p_n & n > 0 \quad [\text{生成作用素}], \\ \mathrm{id}_\Lambda & n = 0 \quad , \\ p_{-n}^\perp & n < 0 \quad [\text{消滅作用素}]. \end{cases}$$

このとき，次の交換関係が成り立つ；

$$[\pi_m, \pi_n] = n \delta_{n+m,0} \pi_0.$$

実際，$n, m > 0$ ならば $[p_n, p_m] = 0$ が明らか．$m > 0, n < 0$ であるとすると，

$$[p_m, p_{-n}^\perp] = p_m (-n) \frac{\partial}{\partial p_{-n}} + n \frac{\partial}{\partial p_{-n}} p_m$$

となる．$m \neq -n$ なら p_m と $\partial / \partial p_{-n}$ とは可換であるから値は 0．$m = -n$ のとき，右辺は，

$$m p_m \frac{\partial}{\partial p_m} - m \frac{\partial}{\partial p_m} p_m$$

となる．そこで p_m^k に作用させると，

$$m p_m k p_m^{k-1} - m(k+1) p_m^k = (mk) p_m^k - (mk+m) p_m^k = -m p_m^k = n p_m^k$$

となるから

$$[p_m, p_m^\perp] = -m$$

となる．

この $\{\pi_n\}$ は Heisenberg Lie 環と呼ばれる無限次元 Lie 環を与える．

Remark 2.4. これは，対称群の表現論とは直接関係しない余談であるが，ここで登場した Heisenberg 代数や Introduction で紹介した Virasoro 代数は，もともと“ 円周 ”と関連して重要視されてきた無限次元 Lie 環である．Heisenberg 代数は“ 円周＝弦の量子化 ”として超弦理論では盛んに用いられてきた．また Virasoro 代数は，“ 円周上のベクトル場 ”として自然に得られる無限次元 Lie 環である．

例えば，量子力学における正準交換関係とは，

$$[q_m, p_n] = ih\delta_{mn}, \quad [q_m, q_n] = 0, \quad [p_m, p_n] = 0$$

によって与えられる．ここで q_m は座標，p_m は運動量に相当する作用素である $(m = 1, 2, \cdots, N)$．ここで，P_n を $n \geq 0$ のとき $q_n + ip_n$，$n < 0$ のとき $q_{-n} - ip_{-n}$ とし，適当に定数倍を調整することで heisenberg 代数の関係式が得られる．形式的に $N \to \infty$ としたものが，ここで考えている Heisenberg 代数である．また，S^1 上関数で，全体で積分すると 0 となるようなものを Fourier 展開して

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos(n\theta) + q_n \sin(n\theta))$$

とし，p_n, q_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を座標と運動量と思って正準交換関係を考えることで $N = \infty$ としたものが自然に現れる．この意味で，Heiseberg 代数を“ 円周＝弦の量子化 ”と表現している．

一方，Virasoro 代数については，円周上のベクトル場 $f(\theta) d/d\theta$ は，微分作用素として S^1 上関数 $F(\theta)$ に

$$f(\theta) \frac{d}{d\theta} F(\theta) = f(\theta) \frac{dF(\theta)}{d\theta}$$

として作用する．このとき，

$$f(\theta)\frac{d}{d\theta}, g(\theta)\frac{d}{d\theta} \quad = \quad f(\theta)\frac{dg(\theta)}{d\theta} - \frac{df(\theta)}{d\theta}g(\theta) \quad \frac{d}{d\theta}$$

によって円周上のベクトル場は Lie 環をつくる．そこで，

$$L_n = -i\exp(2in\theta)\frac{d}{d\theta}$$

とおくと，

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_[m+n]$$

となる．Virasoro 代数とはこれを中心拡大することによって得られる Lie 環であり，

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_[m+n] + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}K, \quad [L_n, K] = 0$$

なる交換関係を満たすものである.（K の係数は中心拡大によって一意的に決まってしまう.）

ここで Heisenberg 代数が“ 自然に ”作用している対称群の表現環や Introduction で述べたように Schur 多項式で Virasoro singular vector が記述されることは，対称群の表現とこれらの無限次元 Lie 代数との関連性を示唆している．しかし，対称群それ自体は“ 円周＝弦 ”とは直接関係を持っているものではない．[中島] では，この対称群の表現論以外に代数曲線のヒルベルト概型を例に取り上げて，Virasoro 代数や Heisenberg 代数の裏には円周＝弦が隠れているという見方に疑問を呈している．

§ 3　Schur 多項式と Tableaux(その１)

ここでは Schur 多項式と Tableaux の関係について調べる．目標は次の定理である．

λ を分割とするとき，λ に付随した Schur 多項式について，

$$s_\lambda = \sum_T x^T$$

が成り立つ．ここで T は shape が λ の tableaux をすべて走る．また x^T は $x^{\mathrm{wt}\,T}$ を意味する．

上の主張の中には，tableaux などのまだ定義していない用語がある．まずはそれを定義することから始めよう．

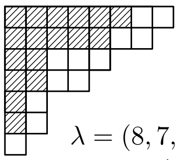
3.1　盤と標準盤

定義 3.1.　shape が λ の tableaux とは，λ の Young 図形の box に正の整数を書き入れたものであって，しかも，その数字について，各行は単調非減少，各列は真に単調増大になっているものを言う．

これをさらに組合せ論的に言い換えることを考える．

定義 3.2.　$\lambda \supset \mu$ であるとき，$\theta = \lambda - \mu$ を skew diagram という．$\theta' := \lambda' - \mu'$ とし，これを θ の転置という．$|\theta| = |\lambda| - |\mu|$ になる．

skew diagramθ 上の path とは，θ のマス目の列 $x_0, x_1, \cdots, x_r$ であって x_i, x_{i+1} は辺を共有しているような場合に言う．$\varphi \subset \theta$ が連結とは，φ のどの 2 つのマス目も φ 上の path でつなげることを言う．

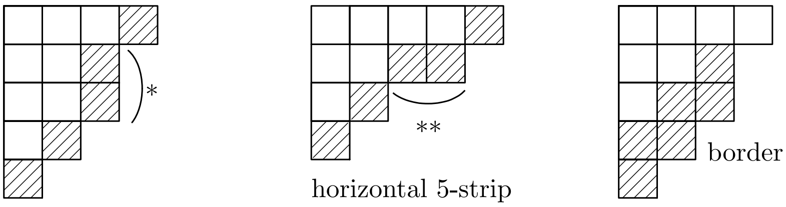


$\lambda = (8, 7, 5, 4, 2, 2, 1)$
$\mu = (6, 5, 2, 2, 1)$

skew daigram に関連した定義をさらに続けよう．

定義 3.3.　skew diagram　θ が horizontal m-strip であるとは，$|\theta| = m$ かつ $\theta'_i \leq 1$ $(\forall i)$ を満たすことを言う．θ が vertical m-strip であるとは，$|\theta| = m$ かつ $\theta_i \leq 1$ $(\forall i)$ を満たすときを言う．

θ が border strip であるとは，θ が連結かつ 2×2 のマス目をもたないときを言う．



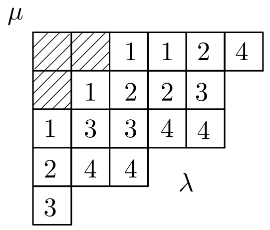
vertical 5-strip　　horizontal 5-strip　　border strip

(**)vertical ではない

(*)horizontal ではない

定義 3.4.　$\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \cdots \subset \lambda^{(r)} = \lambda$ であって，$\theta^{(i)} = \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ が horizontal strip であるようなとき,（column strict）tableau といい，T などとかく．$\lambda - \mu$ を T の shape，$(|\theta^{(1)}|, \cdots, |\theta^{(r)}|)$ を T の weight という．

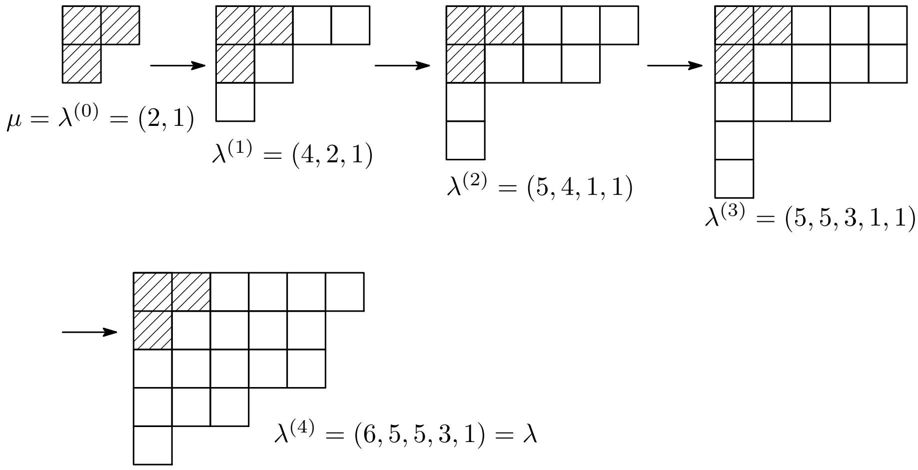
さらに，T が標準盤であるとは，weight が (1^r) の tableaux であるときを言う．



$\mu = (2, 1)$

$shape = (4, 4, 5, 3, 1)$

$weight = (4, 4, 4, 5)$



tableaux は，上図にあるように，Young 図形の”成長過程”であるとも見ることができる．

3.2 skew Schur 多項式

定義 3.5. 2 つの分割 λ, μ に対し，

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle \quad (\forall \nu)$$

によって $s_{\lambda/\mu}$ を定義する．これを skew Schur 多項式という．

$\mu = 0$ のとき $s_{\lambda/\mu} = s_\lambda$ となっている．これには Jacobi-Trudi 公式と呼ばれる行列式表示があった．そこで $s_{\lambda/\mu}$ の行列式表示を求めよう．

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda$$

と展開したとき，

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle \langle s_\lambda, \sum_u c^u_{\mu\nu} s_u \rangle = c^\lambda_{\mu\nu}$$

であるから，

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu$$

となる．これを利用すると，

$$\begin{aligned}\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x)s_\lambda(y) &= \sum_\lambda\left(\sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu}s_\nu(x)\right)s_\lambda(y)\\ &= \sum_\nu s_\nu(x)\left(c^\lambda_{\mu\nu}s_\lambda(y)\right)\\ &= \sum_\nu s_\nu(x)s_\mu(y)s_\nu(y)\\ &= \sum_\nu s_\mu(y)h_\nu(x)m_\nu(y)\end{aligned}$$

となる．この両辺に a_δ をかけて，

$$\begin{aligned}\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}a_{\lambda+\delta}(y) &= \sum_\nu h_\nu(x)h_\nu(y)a_{\mu+\delta}(y)\\ &= \sum_\nu h_\nu(x)\left(\prod_{i\geq 0}\frac{1}{m_i(\nu)}\right)\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}y^{w(\nu)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(w)y^{w(\mu+\delta)}\\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(w)y^{\alpha+w(\mu+\delta)}\end{aligned}$$

となる．ここで $y^{\lambda+\delta}$ の係数を比較すれば，

$$s_{\lambda/\mu}=\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(w)h_{\lambda+\delta-w(\mu+\delta)}=\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{i,j}$$

なる行列式表示が得られる．

これと dual な行列式表示として，

$$s_{\lambda/\mu}=\det(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j})_{i,j}$$

が得られる[2]

skew Schur 多項式について次の命題が成り立つ．

命題 3.6.

(1) 任意の i について $\lambda_i\geq\mu_i$，すなわち $\lambda\supset\mu$ でない限り $s_{\lambda/\mu}=0$ である．

(2) skew daigramθ に対して，$s_\theta=\det(h_{\lambda_i-\mu_i-i+j})$ と便宜的に定義する．このとき，$\lambda\supset$ かつ $r<n$ なる r が存在して $\mu_r\geq\lambda_{r+1}$ が成り立つとき，第 r 行よりも上にある skew diagram の部分 θ と下にある部分 φ に対して，$s_{\lambda/\mu}=s_\theta s_\varphi$ が成り立つ．

(3) $s_{\lambda/\mu}$ は，$\lambda\supset\mu$ のとき，skew diagram　$\lambda-\mu$ のみに応じて定まり，その連結成分 $\{\theta^{(i)}\}$ に対して $s_{\lambda/\mu}=\prod_i s_{\theta^{(i)}}$ が成り立つ．

(4) n 変数に制限した場合,「$0\leq\lambda'_i-\mu'_i\leq n\ (\forall i)$」が成り立たないとき，$s_{\lambda/\mu}=0$ である．

[証明] 行列式表示を利用する．

(1) ある r で $\lambda_r<\mu_r$ であるとすると，$1\leq j\leq r\leq i\leq n$ なる i,j に対して，$\lambda_i\leq\lambda_r<\mu_r\leq\mu_j$ が成り立つから，$\lambda_i-\mu_j-i+j<0$ となって $h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}=0$ となる．これを行列式表示で見ると，左下の $n-r\times r$ 部分がすべて 0 であるから，行列式は 0 である．

(2) (1) と同様に考えると，$1\leq j<r<i\leq n$ のとき，$\lambda_i\leq\lambda_{r+1}\leq\mu_r\leq\mu_j$ であるから，$\lambda_i-\mu_j-i+j<0$ となる．よって行列式表示では，$n-r+1\times r$ 部分が 0 である．このとき第 1 行から第 r 行まででできる $r\times r$ 正方成分が s_θ であり，右下の $n-r+1\times n-r+1$ 部分が s_φ である．

(3) (2) から従う．

(4) e を用いた行列式表示を用いる．まず $e_{n+1}=e_{n+2}=\cdots=0$ であることに注意する．ここで，ある r で $\lambda'_r-\mu'_r>n$ とすると，$1\leq i\leq r\leq j\leq n$ なる i,j に対して，$\lambda'_i-\mu'_j\geq\lambda'_r-\mu'_r>n$ であるから，行列式表示で，右上の $r\times n-r$ 部分が 0 となる．　■

[2] これには行列式の laplace 展開が必要だが，ここでは証明しない．あとで用いるのは 1ヶ所．

命題 3.7.
(1)

$$s_\lambda(x,y) = \sum_\mu s_{\lambda/\mu} s_\mu(y).$$

(2)

$$s_{\lambda/\mu}(x,y) = \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu/\mu}(y)$$

が成り立つ．但し，和は $\lambda \supset \nu \supset \mu$ なる分割 ν をすべて走る．

[証明] x, y, z を変数とする．

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(z) s_\mu(y) &= \sum_{\lambda,\mu,\nu} c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu(x) s_\lambda(z) s_\mu(y) \\
&= \sum_{\nu,\mu} s_\nu(x) \left(\sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda(z) \right) s_\mu(y) \\
&= \sum_{\nu,\mu} s_\nu(x) s_\mu(z) s_\nu(z) s_\mu(y) \\
&= \sum_\mu s_\mu(y) s_\mu(z) \prod_{i,k} (1 - x_i z_k)^{-1} \\
&= \prod_{j,k} (1 - y_j x_k)^{-1} \prod_{i,k} (1 - x_i z_k)^{-1} \\
&= \sum_\lambda s_\lambda(x,y) s_\lambda(z)
\end{aligned}$$

となるから，両辺の係数を比較して (1) を得る．

$$\sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x,y) s_\mu(z) = s_\lambda(x,y,z) = \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x) s_\nu(y,z) = \sum_{\mu,\nu} s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu/\mu}(y) s_\mu(z)$$

であるから両辺の係数を比較して (2) を得る． ■

系 3.8. $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ を変数とする．このとき，

$$s_{\lambda/\mu}(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}) = \sum_{(\nu)} \prod_{i=1}^n s_{\nu^{(i)}/\nu^{(i-1)}}(x^{(i)})$$

が成り立つ．但し，右辺は，$(\nu) : \mu = \nu^{(0)} \subset \nu^{(1)} \subset \cdots \subset \nu^{(n)} = \lambda$ であるような (ν) をすべて動く．

この系を $x^{(i)} = \{x_i\}$ というように各変数が 1 つの変数だけである場合に適用する．
まず予備的考察として，1 変数の場合 $s_{\lambda/\mu}(x)$ を考える．このとき，既に示した命題から，$\lambda - \mu$ が horizontal strip でなければ $s_{\lambda/\mu} = 0$．もし horizontal strip であるならば，$s_{\lambda/\mu}(x) = x^{|\lambda-\mu|}$ となる．
このことから，上の系の右辺は，$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ なる monomial の和でかける．但し，$\alpha_i = |\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}|$ である．したがって，目標であった定理が従う．

定理 3.9. λ を分割とするとき，λ に付随した Schur 多項式について，

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T$$

が成り立つ．ここで T は shape が $\lambda - \mu$ の tableaux をすべて走る．また x^T は $x^{\mathrm{wt}\, T}$ を意味する．特に，

$$s_\lambda = \sum_T x^T$$

となる．(T は shape λ の tablauex を走る．)

ここで Kostka 数と呼ばれる組合せ論的な数を定義しよう．

定義 3.10. λ, μ を分割とする．このとき，shape が λ で wt が μ の標準盤の数を $K_{\lambda,\mu}$ とかき，これを Kostka 数という．

by definition から，

$$s_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} x^\mu$$

である．$s_\lambda(x)$ の対称性から

$$s_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} m_\mu$$

となる．

補題 3.11. Kostaka 数は,

$$K_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 0 & \lambda \not\geq \mu, \\ 1 & \lambda = \mu, \end{cases}$$

を満たす．

[証明] $K_{\lambda,\mu} \neq 0$ であると仮定しよう．標準盤 T は，行方向には真に単調増大であるから，$1, 2, \cdots, r$ は第 r 行以下にすべて現れる．従って，$\mu_1 + \cdots + \mu_r \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ であり，$\mu \leq \lambda$ となる．特に $\mu = \lambda$ なら，第 r 行にしか r は現れないので，$K_{\lambda,\lambda} = 1$ が従う． ■

この補題から

$$s_\lambda(x) = m_\lambda + \sum_{\lambda > \mu} K_{\lambda,\mu} m_\mu$$

が従う．

§4　Schur 多項式と Tableaux(その２)

ここでは Schur 多項式と Tableaux の間の関係について述べる．RSK-対応が重要な鍵を与える．

4.1　Schur 多項式のもう一つの定義

われわれは，Schur 多項式を $a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ によって定義してきた．しかし，この形のままでは Schur 多項式と標準盤の関係は明らかではない．そこで，いま第 2 の定義として次のものを考える．両者が一致することを示すのがこの章の目的である．ここでは便宜的に，ここで定義する Schur 多項式を大文字で S_λ と書くことにする．

定義 4.1.　分割 λ に付随した Schur 多項式を

$$S_\lambda(x) = \sum_T x^T$$

と定義する．ここで T は shape が λ に等しい半標準盤を動く．また x^T とは，$x^{\mathrm{wt}\,T}$ である．

以下，2 つの例で計算してみよう．どちらかというと，半標準盤を数える方が多項式の商を計算するよりも楽であるから，こちらの定義で計算した方が楽なこともわかるだろう．

例 4.2.　$\lambda = (2,1)$ とする．
$n=2$ とすれば，半標準盤は，

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix}$$

の 2 つのみであり，$s_{(2,1)} = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ となる．一方，

$$s_\lambda = \frac{a_{(3,1)}}{a_{(1,0)}} = \frac{x_1^3x_2 - x_1x_2^3}{x_1 - x_2} = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$$

であるから両者の結果は一致している．
一方，特に $n=3$ とすると，半標準盤は，

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & \end{matrix}$$

の 7 個となる．したがって

$$s_{(2,1,0)} = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + 2x_1x_2x_3$$

となる．一方面倒だがきちんと計算すれば

$$s_{(2,1,0)} = \frac{a_{(4,2,0)}}{a_{(2,1,0)}} = (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)$$

となって右辺を展開すれば上の式が得られる．(もちろん $n=3$ の場合に $x_3=0$ とおけば，$n=2$ の場合に一致している．)

例 4.3.　$\lambda = (2,1,1)$ とする．$n=3$ とすれば，半標準盤は，

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}$$

の 3 個となる．よって，

$$s_{(2,1,1)} = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$$

となる．一方，きちんと計算すれば，$s_{(2,1,1)} = a_{(4,2,1)}/a_{(2,1,0)}$ が右辺に一致することも言える．

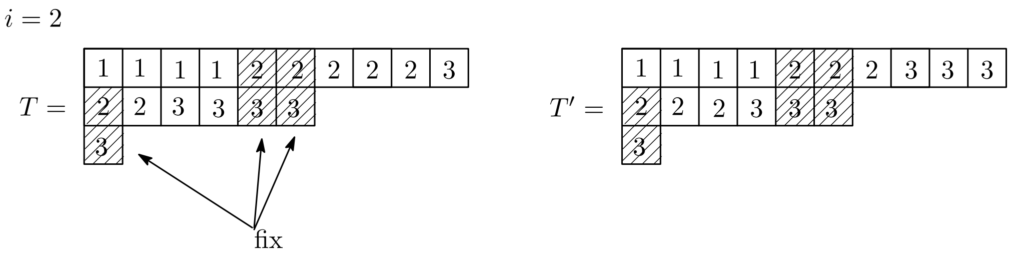
補題 4.4. $S_\lambda(x)$ は対称多項式である．

[証明] 任意の i について $(i, i+1)s_\lambda = s_\lambda$ となることを示せばよい．そのため，semi-standard tableaux T から semi-standard tableaux T' をつくる involution であって，T に現れる i の個数と $i+1$ の個数を丁度 T' で入れ替えるようなものを構成すればよい．それは次のようにして得られる．

実際，まず T の中で，

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{i} \\ \hline \mathrm{i{+}1} \\ \hline \end{array}$$

なる部分をすべて考える．これらは以下の操作では固定する．各行ごとに，固定されていない $i, i+1$ を考え，それらの個数を入れ替える．すなわち k 個の i に続いて ℓ 個の $i+1$ が並んでいるならば，ℓ 個の i に続けて k 個の $i+1$ を並べるのである．例えば，次のようにして行う．



こうしてできる操作 $T \to T'$ は，semi-standard の条件を破らず，かつ可逆である．しかも i の個数と $i+1$ の個数を丁度入れ替えている．よって s_λ が $(i, i+1)$ で不変であることが従う． ■

4.2 Jacobi-Trudi 公式の組合せ論的証明

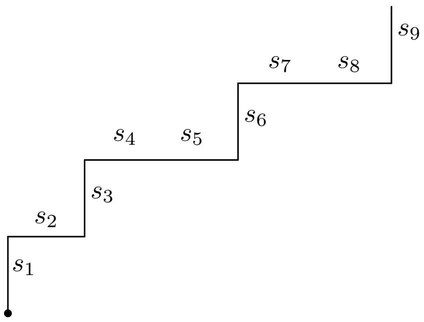
すでに Schur 多項式について，$a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ なる定義に基づいて，Jacobi-Trudi 公式を証明していた．ここでした定義 S_λ のもとでも，この Jacobi-Trudi 公式が成り立つことが示せれば，両者の定義が一致することが言える．ここではそれを証明しよう．

定理 4.5. ［**Jacobi-Trudi 公式**］
$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ を分割とする．このとき，次の行列式表示が成り立つ；

$$S_\lambda(x) = \det(h_{\lambda_i} - i + j)_{i,j}, \quad S_{\lambda'} = \det(\lambda_i - i + j).$$

以下，上記の定理を証明する[3]．

まず，$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-格子を用意する．このとき $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の path であって，始点から上もしくは右にのみ移動することを許してできるものを考えよう．さらに辺に始点の側から順番に番号をつける．



ここで水平な辺に label をつける．そのための 2 つの方法を用意する．

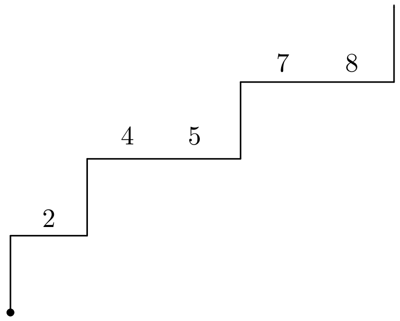
---
[3]証明は [S] による．

定義 4.6. 上で導入した $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の path に対して，水平な辺 s_i に対し，

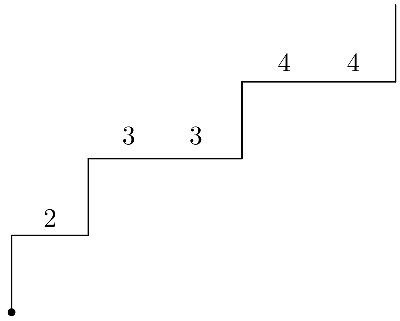
$$L(s_i)=i,\quad \check{L}(s_i)=(s_i\text{よりも添え字が小さい垂直な辺の総数})+1$$

と定義する．前者を e-labeling, 後者を h-labeling と呼ぶ．

例えば上で書いた例に e,h それぞれの labeling を施してみよう．



e-labeling



h-labeling

水平線の数が有限個であるような path p に対して，次のようにして monomial を定義する；

$$x^p=\prod_{s_i\in p}x_{L(s_i)},\quad \check{x}^p=\prod_{s_i\in p}x_{\check{L}(s_i)}.$$

但し，いずれも積は p の水平線全体に渡ってとる．

ここで各垂直軸ごとに，(x,∞) なる無限遠点を設定しておく．(" 無限遠直線 "上を右に移動することはできない．これはあくまでも終点としてしか使えない．十分遠くまでいけばある垂直軸上を上昇しているような path を，終点が (x,∞) にあると思うのである．）このとき，(a,b) を始点とし $(a+n,\infty)$ へゆく path の水平線はいずれも n 個となっており有限個である．このとき，次が成り立つ．

命題 4.7.

$$e_n=\sum_p x^p,\quad h_n(x)=\sum_p \check{x}^p.$$

ただし，p は始点 (a,b), 終点 $(a+n,\infty)$ となるような path の全体を動く．

[証明]

$$e_n(x)=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$$

であった．(a,b) から i_1-1 上昇し水平へひとつ進む．こうして s_{i_1} が水平辺となる．次に i_2-1 上昇し右へ折れる．こうして s_{i_2} が水平線となる．同様に繰り返せば，$x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ は $\sum_p x^p$ の項に含まれるので，e_n 自身が含まれる．一方，任意の path をとった場合，十分 i が大きくなれば，添え字 s_i の辺は $(a+n)$ 軸上にいるので，各 path ごとに $i_1<\cdots<i_n$ なる水平辺の添え字が得られる．よって，これは e_n の項を与える．したがって $\sum_p x^p$ が e_n の項となる．よって最初の等式が示された．

$$h_n=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}m_\lambda=\sum_{i_1\le i_2\le\cdots\le i_n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$$

である．この右辺の各項は，先と同様に考えれば path として実現でき，一方 path を与えると，そこから決まる $\check{x}^p$ は右辺の項となるから，2 番目の等式が従う． ■

次に，始点をある水平軸上に k 点とり，$u_1,\cdots,u_k$ とする．また ∞ 軸上にも同じく k 個の点をとり

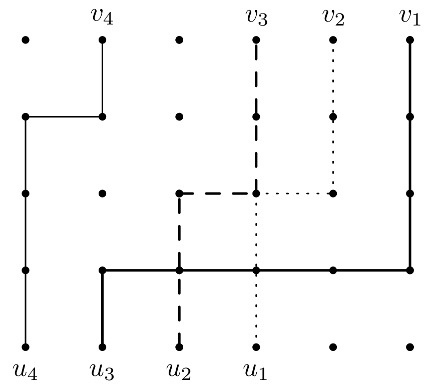
$v_1, \cdots, v_k$ とする．このとき path の組 $P = (p_1, \cdots, p_k)$ を考え，各 p_i は u_i を始点とし，v のいずれかを終点とする path であるとする．p_i の終点を $v_{\sigma(i)}$ とかこう．このとき，

$$x^P = \prod_i x^{p_i}, \quad \check{x}^P = \prod_i \check{x}^{p_i}$$

と定義する.（P の各 path の水平辺が有限個の場合にのみ定義されると考えてよい.）P の符号を

$$(-1)^P = \operatorname{sgn} \sigma$$

と定義しておく．ひとつ例で計算してみよう．



この例の場合 $\sigma = (123)(4)$ であるから $(-1)^P = +1$ となる．さらに

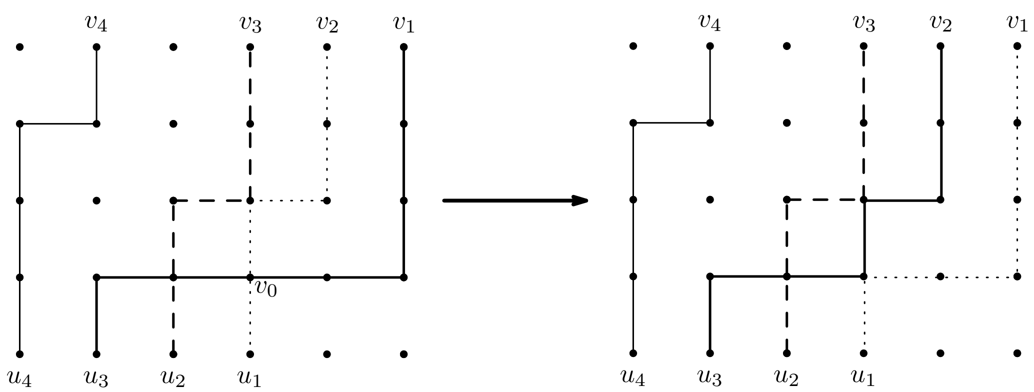
$$x^P = (x_4)(x_2x_3x_4x_5)(x_3)(x_3) = x_2x_3^3x_4^2x_5, \quad \check{x}^P = (x_4)(x_2^4)(x_3)(x_3) = x_2^4x_3^2x_4$$

となる．

さらに P が与えられたとき，新しく P' をつくる操作を考える．それは標語的に言えば“ 交差を解く ”操作に相当する．

定義 4.8. path の族 P が与えられたとき，P' を次のようにして構成する；
(1) $p_i \cap p_j = \phi$ が任意の $i \neq j$ に対して成り立つ場合，$P' := P$ とする．
(2) そうでない場合，他の path と共通点を持つような path のうちで添え字が一番小さいものを p_i とする．p_i と他の path との共通点のうちで一番始点に近いものを v_0 とし，共通点をもつもう一方の path を p_j とする．(共通点が複数ある場合には，行数が一番小さいものをとる．) このとき，P の path である p_i, p_j を次で定義する p'_i, p'_j に置き換えて得られる族を P' と定義する；

$$p'_i = u_i \xrightarrow{p_i} v_0 \xrightarrow{p_j} v_{\sigma(j)}, \quad p'_j = u_j \xrightarrow{p_j} v_0 \xrightarrow{p_i} v_{\sigma(i)}.$$



この操作は，操作後の状態から操作前の状態を復元できる（v_0, p_i, p_j を読み取れる）ので，可逆な操作であり，かつ 2 回施せば元に戻る，すなわち involution である．さらにどの path も共通点をもたないような P は (1) から保たれる．さらに 1 回の操作で 2 個の終点が入れ替わるので符号が逆転する．また，h-labeling で見たときに現れるは，すべて始点がある水平軸上に置かれているので，(各 path ごとには変

わるけれども）全体としては変化しない．

ここまで準備をしておいて，Jacobi-Trudi の公式を証明しよう．

[**Jacobi-Trudi 公式の組合せ論的証明**]

まず，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ に対して，$u_i = (1-i, 0), v_i = (\lambda_i - i + 1, \infty)$ とする．前の命題の結果から，

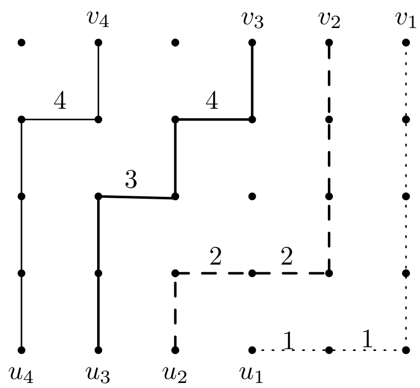
$$h_{\lambda_i - i+j} = \sum_p \check{x}^p \text{ (但し } p \text{ は } u_i \text{から } v_j \text{への path をすべて走る)}$$

が成り立つ．したがって，

$$\det (h_{\lambda_i - i+j})_{i,j} = \sum_P (-1)^P \check{x}^P \tag{4.1}$$

が成り立つ．(但し P は $\{u_i\}$ を始点とし，$\{v_j\}$ を終点とする path の族をすべて走る.)

一方，(4.1) の右辺は，前段の考察によって，どの p_i も他の path と共通点を持たないような族 P 以外は相殺して消えてしまう．したがって，始点と終点の選び方から，$(-1)^P = +1$ かつ $p_i : u_i \to v_i$ なるもののしか残らないのである．このような path の族 P と semi-standard tableaux との間には，次のようにして bujection が構成できる．すなわち，P が与えられたとき，p_i の h-label は単調非減少であるから，これを tableaux の第 i 行に並べるのである．例えば次の例にようにして．



$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

もともとの u_i, v_j のとり方からこうして出来る tableaux がもとの λ を shape に持つことは明らかであり，各行が単調非減少になることも h-labeling のとり方から明らかであるとすでに述べた．各列が狭義単調増大となることは，共通点がないという条件と始点 u_i, u_{i+1} が隣り合っているという選び方から，p_{i+1} の j 番目の水平辺が必ず p_i の j 番目の水平辺よりも高い位置にあることから従う．

こうして Schur 多項式の定義が得られた． ■

4.3 RSK-対応と Cauchy identity

前節までの議論で，2 つの Schur 多項式の定義が一致することは示していた．しかし，Schur 多項式の著しい性質として，直交性があった．したがって，この章で述べたもう一つの定義から直接組み合わせ論的な方法によって直交性を導くことを考えよう．直交性を示すには，S_λ についても Chauthy identity を示せばよい．これは，組み合わせ論的には，RSK-対応と呼ばれるもののひとつの応用として得られる．またこの RSK-対応は，対称群の表現論の結果のひとつの組み合わせ論的見方も提供してくれる．これについては次章を参照．

さて，RSK-対応について説明しよう．

定義 4.9. 正の整数の 2 つの列

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

が「一般化された置換」(generalized permutation) であるとは，1 行目は単調非減少 $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k$ であり，2 行目は $i_k = i_{k+1}$ であるとき $j_k \le j_{k+1}$ であるようなときを言う．これらの全体を GP とかく．

例えば，

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

は GP に属す．

また $\hat{\pi}$ で 1 行目を，$\check{\pi}$ で 2 行目を表すことにする．また，各行に対して，$1, 2, 3, \cdots$ の現れる回数を $n_1, n_2, n_3, \cdots$ とするとき，$(n_1, n_2, n_3, \cdots)$ を cont とかく．上の例では，$\mathrm{cont}\,\hat{\pi} = (3, 2, 1)$，$\mathrm{cont}\,\check{\pi} = (2, 2, 2)$ となる．

このとき，次の一対一対応が成り立つ．これを RSK-対応[4]という．

定理 4.10. ［**RSK-対応**］

任意の GP の元 π に対して，$\mathrm{cont}\,\check{\pi} = \mathrm{cont}\,P, \mathrm{cont}\,\hat{\pi} = \mathrm{cont}\,Q$ をみたすような同じ shape を持つ標準盤の組 (P, Q) が定まり，これは GP と { 同じ shape を持つ 2 つの標準盤の組 } との間の一対一対応を与える．

[対応の作り方の例[5]] 先ほどの例

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

で考える．まず 2 行目を見て，次のように「成長」させていく；

$$\begin{matrix} 2 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 2 & 3 & 3 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & \\ 3 & & \end{matrix}\ .$$

この「成長過程」でどの順番に box に数字が入っていったかを見ると，

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{matrix}$$

となっている．この順番に従って 1 行目の数字を割りふる；

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \\ 3 & & \end{matrix}\ .$$

こうして出来た 2 つの標準盤を (P, Q) とするのである．□

さて，ここで GP の元から行列をつくる方法について述べよう．GP の元 π に対して，$M(\pi)$ を

$$M(\pi)_{i,j} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \text{の現れる回数} \right\}$$

によって定義する．先ほどの例で言えば，

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$M(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[4]Robinson-Schented-Knuth correspondence
[5]これは「厳密な証明」には程遠い．

となる．逆に，非負整数成分の k 次行列 M が与えられたとすれば，次のようにしてもとの GP の元が復元される．実際，まず M の各行の数字の和はそれぞれ 1 行目で $1, 2, \cdots, k$ が現れる回数を示しており，次に，各列の数字の和はそれぞれ 2 行目で $1, 2, \cdots, k$ が現れる回数を示している．ここで GP の元の並べ方は各行ごとに現れる数字の回数がわかれば一意的に決まってしまう.（そのように順序が入っていたことに注意.）従って，

$$GP \ni \pi \leftrightarrow M(\pi) \in \{M | M \text{ は非負整数を成分とする行列 }\}$$

なる一対一対応が成り立つ．RSK-対応から，

$$\{M | M \text{ は非負整数を成分とする行列 }\} \leftrightarrow \{(P, Q) | P, Q \text{ は同じ shape を持つ標準盤 }\}$$

なる一対一対応が成り立つことになる．

ここで変数 $\{x_i\}, \{y_i\}$ に対して，GP の元 π の weight を

$$\mathrm{wt}\,\pi = x^{\hat{\pi}} y^{\check{\pi}} = x^{\mathrm{cont}\,\hat{\pi}} y^{\mathrm{cont}\,\check{\pi}}$$

と定義する．先の例では，

$$\mathrm{wt}\,\pi = x_1^3 x_2^2 x_3 y_1^2 y_2^2 y_3^2$$

である．このとき，$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ が k 回 π の中に現れれば，$x_i^k y_j^k$ の項が $\mathrm{wt}\,\pi$ に現れることになる．従って，

$$\sum_{\pi \in \mathrm{GP}} \mathrm{wt}\,\pi = \prod_{i,j} \sum_{k \geq 0} x_i^k y_j^k = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

が成り立つ．

一方，shape が同じ 2 つの標準盤 (P, Q) に対しても

$$\mathrm{wt}(P, Q) = x^P y^Q = x^{\mathrm{cont}\,P} y^{\mathrm{cont}\,Q}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} \sum_{(P,Q) \text{ は shape の等しい 2 つの標準盤}} \mathrm{wt}(P, Q) &= \sum_{\lambda} \left(\sum_{P \text{ は shape}=\lambda\text{の標準盤}} x^P \right) \sum_{\lambda} \left(\sum_{Q \text{ は shape}=\lambda\text{の標準盤}} y^Q \right) \\ &= \sum_{\lambda} S_\lambda(x) S_\lambda(y) \end{aligned}$$

となる．RSK-対応が wt を変えないことに注意すれば，

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j) = \sum_{\lambda} S_\lambda(x) S_\lambda(y)$$

が示されたことになる．

§ 5　対称群の表現論

ここでは対称群の表現論について述べる．目標は，対称群の既約指標が Schur 多項式と同一視できることの証明および既約表現の次元の組合せ論的記述である．またテンソル積表現の分岐則としての Littlewood-Richardson 規則について説明する．

なお有限群の表現について知識を多少仮定して進めるので注意.

5.1　Schur 多項式と既約指標

5.1.1　用語

まずいくつか用語を準備する．

一般に有限群 G 上の複素数値関数 f, g に対して，

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)g(x^{-1})$$

によって内積を導入する．特に，G 上の類関数の空間にもこれで内積が入る．

有限群 G とその部分群 H，および H の指標 f，G の指標 g とが与えられたとき，$\mathrm{Ind}_H^G(f), \mathrm{Res}_H^G(g)$ をそれぞれ誘導指標，制限指標とする．

次に対称群の共役類などについて復習しよう．

$w \in \mathfrak{S}_n$ は互いに共通する文字を含まない巡回置換の積に一意的に分解するから，各巡回置換の次数を $\rho_1 \geq \rho_2, \cdots$ とすることで，分割 $\rho = (\rho_i)$ が定まる．これを w の cyclic-type という．対称群の場合，cyclic-type が一致することと共役であることとが同値であり，

$$\{\mathfrak{S}_n \text{の共役類}\} \leftrightarrow \{n \text{ の分割}\}$$

なる一対一対応が成り立つ．このことから次のような写像が定義できる；

$$\psi : \mathfrak{S}_n \to \Lambda^n; w \mapsto p_{\rho(w)}.$$

ここで $\rho(w)$ は w の cyclic-type に相当する n の分割である．しかもこれは共役類上で一定値であるから類関数になっている．

次に，$\mathfrak{S}_{n+m}$ の部分群として $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ を実現することを考えよう．これは，$\{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots n+m\}$ にそれぞれ disjoint に作用させれば良い．この実現の仕方はいろいろあるが，実現された部分群はすべて互いに共役になる．（実際，$\{i_1, \cdots, i_n\}, \{i_{n+1}, \cdots, i_{n+m}\}$ にそれぞれ作用するとすれば，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n & i_{n+1} & \cdots & i_{n+m} \end{pmatrix}$ をとることで，$\sigma(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m)\sigma^{-1}$ によって $\{1, \cdots, n\}$ と $\{n+1, \cdots, n+m\}$ に作用するようにできるからである.）

そこで，$u \in \mathfrak{S}_n, v \in \mathfrak{S}_m$ に対し，$\rho(u) \cup \rho(v)$ を cyclic-type として持つような $\mathfrak{S}_{n+m}$ の元が up to conjugate class で定まる．これを $u \times v$ とかく．ここで一般に 2 つの分割 λ, μ に対し，$\lambda \cup \mu$ とは $\{\lambda_i, \mu_j\}_{i,j}$ を減少順に並べなおしてできる分割を意味する．

このとき，

$$\psi(u \times v) = p_{\rho(u)\cup\rho(v)} = p_{\rho(u)}p_{\rho(v)} = \psi(u)\psi(v)$$

となっていることに注意しておこう．

5.1.2　表現環

定義 5.1. R^n を $\mathfrak{S}_n$ の既約指標で生成される自由 $\mathbb{Z}$-加群とする．$\mathfrak{S}_0 = \{1\}, R^0 = \mathbb{Z}$ と約束し，

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} R^n$$

と定義する．これを対称群の表現環 (representation ring) という．

R 上に積を定義しよう．

一般に，群 G_1, G_2 およびその表現 V_1, V_2 が与えられたとき，その外部テンソル積表現と呼ばれるものが定義される．それは，$G_1 \times G_2$ の表現であって，$V_1 \otimes V_2$ を表現空間にもち，

$$(x_1 \times x_2)(v_1 \otimes v_2) = (x_1 v_1) \otimes (x_2 v_2)$$

によって得られるものであり，V_1, V_2 の指標を χ_1, χ_2 とすれば，

$$\chi(x_1 \times x_2) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$$

となる．そこで，f, g を $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m$ の指標とし，$f \times g$ によって $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ の外部テンソル積表現の指標を表すことにする．このとき，

$$f \cdot g := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (f \times g)$$

によって R^{n+m} の元が定まる．これによって積 $R^n \times R^m \ni (f, g) \mapsto f \cdot g \in R^{n+m}$ を定義する．このとき次の命題が成り立つ．これは外部テンソル積表現の指標の定義と誘導表現のテンソル積としての実現からわかる．

命題 5.2. 上で定めた R 上の積によって，R は可換結合的で単位元を持つ次数環となる．

5.1.3 characteristic map

いま R 上に次のようにしてスカラー積を導入しよう．すなわち，$f = \sum f_n, g = \sum g_n$ と書かれているとき，

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle f_n g_n \rangle$$

とする．ここで右辺のスカラー積は $\mathfrak{S}_n$ の指標の内積であり，冒頭で定義したものである．

いよいよ表現環と対称多項式環を結びつける写像— characteristic map —を定義しよう．

定義 5.3. $\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とする．(以後 Λ と略記する.) このとき，

$$\mathrm{ch} : R \to \Lambda_{\mathbb{C}}$$

を以下で定義する．すなわち，$f \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\mathrm{ch}(f) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\psi(w)$$

とする．

上の定義を少し言い換えよう．“ 統計的規格化定数 ”z_λ とは，

$$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} \cdot m_i(\lambda)! = |C_{\mathfrak{S}_n}(\lambda)|$$

である．ρ と共役な元の個数は $|\mathfrak{S}_n|/|C_{\mathfrak{S}_n}(\rho)| = n!/|C_{\mathfrak{S}_n}(\rho)|$ であることに注意すると，

$$\mathrm{ch}(f) = \sum_{|\lambda|=n} z_\rho^{-1} f_\psi p_\rho$$

となる．ここで $f_r ho$ とは，cyclic-type が ρ の元における $\mathfrak{S}_n$ の指標 f の値である．

いま R 上にも Λ 上にもスカラー積が導入されていた．次が成り立つ．

補題 5.4. ch は R と Λ 上のスカラー積に関して等長である．

[証明] $f, g \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ch}(f), \mathrm{ch}(g) \rangle &= \left\langle \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho, \sum_{|\mu|=n} z_\mu^{-1} g_\mu p_\mu \right\rangle \\
&= \sum_{|\rho|=n} \sum_{|\mu|=n} z_\rho^{-1} z_\mu^{-1} f_\rho g_\mu \langle p_\rho, p_\mu \rangle \\
&= \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho g_\rho \quad (\because\ p \text{ の直交性 } \langle p_\rho, p_\mu \rangle = \delta_{\rho,\mu} z_\mu^{-1} \text{に注意.}) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) g(w^{-1}) \quad (\because\ w, w^{-1} \text{の cyclic-type が等しいことに注意.}) \\
&= \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

となる. ■

5.1.4 同型定理

この節が主定理とその証明である.

定理 5.5.
(1) $\mathrm{ch} : R \to \Lambda$ は環としての同型写像である.
(2) λ を n の分割とするとき, λ に付随した $\mathfrak{S}_n$ の既約指標は, λ に付随した Schur 多項式 s_λ の ch による引き戻し $\chi^\lambda := \chi^{-1}(s_\lambda)$ で与えられる. またその次元は, Kostka 数 $K_(\lambda, (1^n))$, すなわち shape が λ の標準盤の個数に等しい.
(3) transition matrix $M(p, s)$ は $\mathfrak{S}_n$ の指標表を与える. すなわち, cyclic-type が ρ で与えられる共役類上での χ^λ の値を χ_ρ^λ とかくとき,

$$p_\rho = \sum_\lambda \chi_\rho^\lambda s_\lambda$$

が成り立つ.

[証明]
(1) まず ch が環としての準同型であることを示そう. これには Frobenius の相互律を用いる. $f \in R^n, g \in R^m$ とするとき,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(f \cdot g) &= \langle \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (f \times g), \psi \rangle_{\mathfrak{S}_{n+m}} \\
&= \langle f \times g, \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} \psi \rangle \quad (\because\ \text{Frobenius の相互律}) \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \cdot \frac{1}{|\mathfrak{S}_m|} \sum_{(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} f(\sigma) f(\tau) \psi(\sigma \times \tau) \\
&= \left(\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma) \psi(\sigma) \right) \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{S}_m|} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} g(\tau) \psi(\tau) \right) \quad (\because\ \psi(\sigma \times \tau) = \psi(\sigma)\psi(\tau)) \\
&= \langle f, \psi \rangle_{\mathfrak{S}_n} \langle g, \psi \rangle_{\mathfrak{S}_m} \\
&= \mathrm{ch}(f)\, \mathrm{ch}(g)
\end{aligned}$$

となる. よって環としての準同型である.
次に同型であることを示そう. そのために基底の間の対応を与える.
まず少し予備的な考察をしよう.
$\mathfrak{S}_n$ の恒等指標を $\mathbf{1}_n$ とかく. このとき,

$$\mathrm{ch}(\mathbf{1}_n) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} \mathbf{1}_n(\rho) p_\rho = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho = h_n$$

である．λ を n の分割とするとき，$\mathbf{1}_\lambda := \mathbf{1}_{\lambda_1}\cdot\mathbf{1}_{\lambda_2}\cdots = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\mathfrak{S}_{\lambda_2}\times\cdots}^{\mathfrak{S}_n}(\mathbf{1}_{\lambda_1}\times\mathbf{1}_{\lambda_2}\times\cdots)$ と定義すると，ch が環準同型だから，

$$\mathrm{ch}(\mathbf{1}_\lambda) = \mathrm{ch}(\mathbf{1}_{\lambda_1})\,\mathrm{ch}(\mathbf{1}_{\lambda_2})\cdots = h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots = h_\lambda$$

となる．そこで，

$$\chi^\lambda := \det(\mathbf{1}_{\lambda_i-i+j})_{i,j}$$

と定めれば，

$$\mathrm{ch}(\chi^\lambda) = \det(h_{\lambda_i-i+j}) = s_\lambda \quad (\because\ \text{Jacobi-Trudi の公式})$$

となる．ここで ch の等長性と Schur 多項式の直交性に注意すると

$$\langle\chi^\lambda,\chi^\mu\rangle = \langle\mathrm{ch}(s_\lambda),\mathrm{ch}(s_\mu)\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

となり，特に $\langle\chi^\lambda,\chi^\lambda\rangle = 1$ であることに注意すれば，χ^λ は正負を除いて $\mathfrak{S}_n$ の既約指標に一致し，これは R の基底．したがって，

$$\chi^\lambda \leftrightarrow s_\lambda$$

なる一対一対応が成り立ち，ch が同型であることが示された．
(2) (1) では χ^λ が既約指標と符号を除いて一致することしか示していなかった．既約指標であることを示すには，$\chi^\lambda(1) > 0$ を示せばよい．
　いま，

$$s_\lambda = \mathrm{ch}(\chi^\lambda) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1}\chi_\rho^\lambda p_\rho$$

であることに注意すると，p_ρ の直交性 $\langle p_\rho, p_\mu\rangle = \delta_{\rho,\mu}z_\mu^{-1}$ に注意すれば，

$$\langle s_\lambda, p_\rho\rangle = \left\langle \sum_{|\mu|=n} z_\mu^{-1}\chi_\mu^\lambda p_\mu, p_\rho \right\rangle = \chi_\rho^\lambda \tag{5.1}$$

となる．特に，

$$\chi^\lambda(1) = \chi_{(1^n)}^\lambda = \langle s_\lambda, p_1^n\rangle$$

である．ここで $p_1^n = h_1^n$ であることに注意すれば，

$$h_1^n = h_{(1^n)} = \sum_{|\lambda|=n}\chi^\lambda(1)s_\lambda$$

となる．したがって，transition matrix について，$M(s,m) = K = (K_{\lambda,\mu}), M(h,s) = K' = {}^tK$ であることに注意すれば，

$$\chi^\lambda(1) = M(h,s)_{1^n,\lambda} = K_{\lambda,(1^n)} > 0$$

となり，(2) の 2 つの主張は同時に示された．
(3) は，(5.1) を言い換えただけである．■
いくつか remark をしよう．

Remark 5.6. (3) のことから，transition matrix $M(p,s)$ を求めれば，$\mathfrak{S}_n$ の指標表が書ける．いまわれわれが知っているのは，$M(s,m) = K$ である．これだけで $M(p,s)$ を計算するのは無理であり，もうひとつ何か情報がないといけないが，例えば [M] では，$L := M(p,m)$ について，次のような組合せ論的な表示を与えている．

命題 5.7. $L := M(p,s)$ の成分 $L_{\lambda,\mu}$ は，$r = \ell(\lambda)$ に対し，

$$\#\left\{f(\lambda) = \mu \text{となる } f : 1, 2, \cdots, r \to \mathbb{N}^+\right\}$$

で与えられる．

このことの証明や指標表を計算する例はひとまず省略するが，この結果を使うと，指標表を組合せ論的に計算することができる．

Remark 5.8. 定理の証明では，ch で h_λ となるような R の元 $\mathbf{1}_\lambda$ を構成した．では，ch で e_λ になるような R の元はどのように与えられるだろうか．

定理の証明にならって予備的考察をしよう．まず，$\mathfrak{S}_n$ の符号指標を $\mathbf{Sgn}_n$ とかく．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(\mathbf{Sgn}_n) &= \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1}(\varepsilon_n)_\rho p_\rho \\
&= \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1}\,\mathrm{sgn}(\rho) p_\rho \\
&= \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1}\varepsilon_\rho p_\rho \ \left(\because\ \mathrm{sgn}(\rho) = \prod_{i=1}^{\ell(\rho)}(-1)^{\rho_i - 1} = (-1)^{|\rho|-\ell(\rho)} = \varepsilon_\rho\right) \\
&= e_n
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\mathbf{Sgn}_\lambda = \mathbf{Sgn}_{\lambda_1} \cdot \mathbf{Sgn}_{\lambda_2} \cdots$ とすれば，

$$\mathrm{ch}(\mathbf{Sgn}_\lambda) = e_\lambda$$

となる．

定理の証明で示したように

$$\mathrm{ch}(\mathbf{1}_\lambda) = h_\lambda$$

であった．ここで，transition matrix について，次の結果が知られている．(証明は容易．[M] 参照.)

命題 5.9. 行列 J を

$$J_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & \lambda' = \mu \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

と定義するとき，$M(e,s) = K'J = {}^tKJ$ が成り立つ．

これと $M(h,s) = {}^tK$ であったこと，および $K_{\lambda,\lambda} = 1$ であったことを利用すると，次のことが従う．

$$\mathbf{1}_\lambda = \chi^\lambda + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu,\lambda}\chi^\mu, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{Sgn}_{\lambda'} = \chi^\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\mu',\lambda'}\chi^\mu. \tag{5.3}$$

これは何を意味しているのだろうか．R における積の定義を思い出すと，$\mathbf{1}_\lambda$ は，$\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots$ の恒等指標の外部テンソル積表現を $\mathfrak{S}_n$ に誘導してできた表現であり，(5.2) はその表現の既約分解を表していると理解できる．一方，$\mathbf{Sgn}_\lambda$ は，$\mathfrak{S}_{\lambda'_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda'_2} \times \cdots$ の符号指標の外部テンソル積表現を $\mathfrak{S}_n$ に誘導してできた表現であり，(5.3) はこの表現の既約分解を表していると理解できる．

λ の Young 図形の box に 1 から n までの n 個の整数を適当に書き入れた状況を考える[6]．このとき，$\mathfrak{S}_n$ の元は box に書かれた数字を入れ替えるという作用で，{Young 図形とそこに書き入れられた数字の組 } に作用する．この作用のもとで，$\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots$ とは，各行ごとにその行に書かれている数字の組を変えないような元のなす部分群であるといえる．(これを水平置換群という.) 一方の $\mathfrak{S}_{\lambda'_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda'_2} \times \cdots$ は各列ごとにその列に書かれている数字の組を変えないような元のなす部分群である．(これを垂直置換群と

[6] tableaux でもそうでなくても良い．とにかく 1 から n までの数字を 1 回ずつ使って n 個の box に数字を書き入れる．

いう.）前者の恒等表現の外部テンソル積を誘導したものが (5.2)，後者の符号表現の外部テンソル積表現を誘導したものが (5.3) というわけである．

そこで (5.2),(5.3) を良く見ると，前者では $\mu > \lambda$，後者では $\mu < \lambda$ なる項のみが第 2 項に現れており，既約分解したときの共通な既約表現は χ^λ のみであることがわかる.（しかもそれは重複度 1 で現れる.）このことを利用すると，対称群の複素既約表現を具体的に群環のベキ等元に着目して構成することができる．これは [I] を参照されたい.

Remark 5.10. 有限群の表現論の基本的な内容から，

$$|G| = \sum_{V \text{ は } G \text{ の既約表現すべてを動く}} (\dim V)^2$$

となる．これを上記の対称群の場合に適用すると，

$$n! = \sum_{\lambda \text{は } n \text{ の分割を動く}} d_\lambda^2$$

となる．ここで d_λ は λ を shape とする標準盤の数である．このことは，Robinson-Schensted 対応によって組合せ論的な意味付けができる．実際，RSK-対応を GP の中でも特に普通の意味での n 次の permutation に対して適用すると，順列から 2 つの標準盤がつくれ，これが一対一対応を与えていたのだった．n 次の順列は $n!$ 個あるのだから，上の式はまさにそれを示しているのである.

5.2 Littlewood-Richardson 規則

さて，ここでは次のような問題を考えよう.

問題：2 つの Schur 多項式の積を Schur 多項式で展開したときの展開係数，すなわち

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$$

という展開の係数 $c_{\mu\nu}^\lambda$ を組合せ論的に記述せよ.

対称多項式の視点から見れば，これは，単に基底で表示する際の係数を（組合せ論的に）計算することを意味しているに過ぎない．しかし，前節で示したように，Schur 多項式は対称群の既約指標であった．この問題の式を ch^{-1} で引き戻すと，

$$\chi^\mu \chi^\nu = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda \chi^\lambda$$

となる．ここで左辺の積は μ と ν から定まる $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m$ の既約指標の外部テンソル積表現の指標を誘導したものであるから，この展開係数は，既約分解に表れる既約表現の重複度を与えていることになる.

したがってこの問題を表現論的に言うならば，

μ, ν から定まる $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m$ の既約表現の外部テンソル積表現を $\mathfrak{S}_{n+m}$ に誘導した表現を既約分解せよ.

ということになる.

これを手で計算するのはしんどい.

例 5.11. 実際に，$n = 2, m = 2$ の場合で愚直に計算をやってみよう.

まず $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ を $\langle(12)\rangle \times \langle(34)\rangle \subset \mathfrak{S}_4$ として実現しておく．$\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ の指標表と $\mathfrak{S}_4$ の指標表は次で

与えられる．

$\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$	(e,e)	$((12),e)$	$(e,(34))$	$((12),(34))$
$\phi_1 = \mathbf{1} \times \mathbf{1}$	1	1	1	1
$\phi_2 = \mathbf{1} \times \mathbf{sgn}$	1	-1	1	-1
$\phi_3 = \mathbf{sgn} \times \mathbf{1}$	1	1	-1	-1
$\phi_4 = \mathbf{sgn} \times \mathbf{sgn}$	1	-1	-1	1

$\mathfrak{S}_4$	e	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
$\chi_1 = \text{trivial}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \text{standard}$	3	1	0	-1	-1
χ_3	2	0	-1	0	2
$\chi_4 = \text{standard} \otimes \text{sgn}$	3	-1	0	1	-1
$\chi_5 = \text{sgn}$	1	-1	1	-1	1

この表を眺めれば，分岐則が次表となる．

$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
χ_1	1	0	0	0
χ_2	1	1	1	0
χ_3	1	0	0	1
χ_4	0	1	1	1
χ_5	0	0	0	1

Frobenius の相互律から，外部テンソル積表現 ϕ_i を誘導した既約表現の分解も上の表で与えられている．

一方，まともに計算することで，例えば，

$$\begin{aligned}
s_{(2)}s_{(1,1)} &= (m_{(2)} + m_{(1,1)})(m_{(1,1)}) \\
&= m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + 3m_{(2,1,1)} + 6m_{(1,1,1,1)} \\
&= (m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + 2m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)}) + (m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)}) \\
&= s_{(3,1)} + s_{(2,1,1)}
\end{aligned}$$

などと計算できる．上の表でみれば，丁度 $\mathrm{Ind}\,\mathbf{1} \times \mathbf{sgn} = \chi_2 + \chi_4$ であることから，この結果は整合している．

このようなことをするのは大変である．まともに計算するのも大変だし，指標表をいちいち書くのも面倒である．LR-規則を用いるとそれを一気に組合せ論的に計算することができる．

定理 5.12. ［**Littlewood-Richardoson rule**］

Littlewood-Richardson 係数 $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ は，次で与えられる；

$$\#\left\{ T \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ は shape が} \lambda - \mu, \text{wt が} \nu \text{の tableaux であって，} \\ T \text{ から定まる word } w(T) \text{ が lattlice permutation となっているもの} \end{array} \right\}.$$

ここで word と lattice permutation の定義をしよう．

定義 5.13. tableaux$T$ を“ Young 図形の成長過程 ”とみなして，各 box に数字が入っているとする．このとき，第 1 行目を右から左に，第 2 行目を右から左にという具合に数字を読み出していくことによって，数字の列ができる．これを T から定まる word といい $w(T)$ とかく．

数字の列 $w(T) = w_1 w_2 \cdots$ が lattice permutation であるとは，

「部分列 $w_1 \cdots w_k$において，任意の ℓに対し, ℓが現れる回数の方が $\ell + 1$ が現れる回数以上である.」

が任意の k について成立するときを言う．

例 5.14.

$$T = \begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 3 & & \\ 1 & 4 & & & \end{array}$$

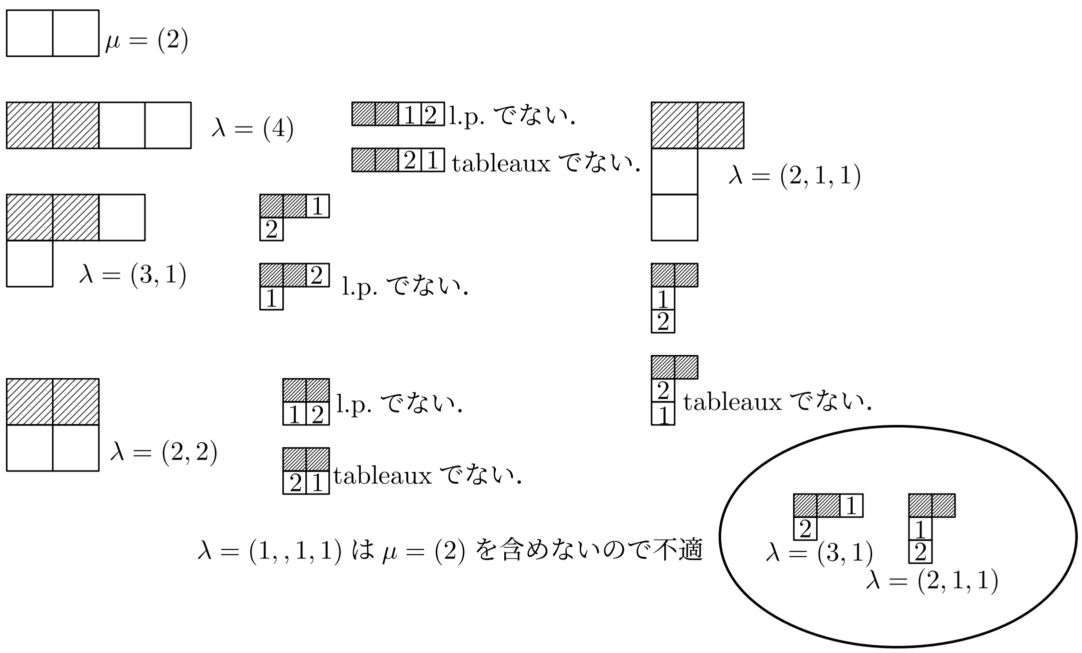
上図のような tableaux を考えよう．このとき，$w(T) = (3,2,1,1,3,2,4,1)$ であり，これは lattice permutation ではない．一方，

$$L = \begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 & & \\ 1 & 3 & & & \end{array}$$

は，$w(L) = (1,1,1,1,2,2,3,1)$ であり，これは lattice permutation である．

LR-規則の証明は組合せ論的な証明の際たるものではあろうが，ここでは省略し，先にあげた例の場合でチェックしてみることにしよう．

例 5.15. $s_{(2)}s_{(1,1)}$ を LR-規則にしたがって計算してみよう．LR-規則によれば，このとき，$c^{\lambda}_{(2),(1,1)}$ は，shape が $\lambda - (2)$ であって，$\mathrm{wt} = (1,1)$ であるような tableaux の個数に等しいのであった．いま $n = 4$ で考えているから，$\lambda = (4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)$ の場合にそれぞれ数えてみよう．



この計算から，

$$s_{(2)}s_{(1,1)} = s_{(3,1)} + s_{(2,1,1)}$$

が従う．これは前に見た例と整合している． □

§ 参考文献

[M] I.G.Macdonald,1995,*Symmetric functions and Hall polynomials*(Second Edition),Oxford Mathematical Monographs.

[F] W.Fulton,1997,*Young Tableaux*,London Mathematical Society Student Texts 35.

[S] B.E.Sagan,1991,*The Symmetric Group-Representations, Combinatorial Algorithms, & Symmetric Functions-*,Wadsworth & Brooks.(GTM 版も有り)

[FH] W.Fulton,J.Harris,1991,*Representation Theory A First Course*,Springer Verlag GTM 129.

[I] 岩堀長慶,1978, 対称群と一般線形群の表現論, 岩波講座基礎数学

[H] 堀田良之,1988, 加群十話, 朝倉書店すうがくぶっくす

[TH] 寺田至・原田耕一郎,1997, 群論, 岩波講座現代数学の基礎

[HK] J.Hong,S-J.Kang,2002,*Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases*,AMS Graduate Studies in Mathematics volume.42

[A] S.Ariki,2002,*Representations of Quantum Algebras and Combinatorics of Young Tableaux*,AMS University Lecture Series volume.26（日本語版は 2000 年,$A_{r-1}^{(1)}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論, 上智大学講究録）

[中島] 中島啓,1998, ヴィラソロ代数とハイゼンベルグ代数をめぐって,「数学のたのしみ」, 日本評論社