

1. 次の各問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}$$

が成り立つを示せ。

(2) 上のことを使って、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

が成り立つことを示せ。

2. x を 0 でない実数とする。このとき、次の等式を示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{1}{n}x \right) + \cos \left(\frac{2}{n}x \right) + \cdots + \cos \left(\frac{n-1}{n}x \right) \right\} = \frac{\sin x}{x}$$

3. 未知関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する微分方程式

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t)$$

を、初期条件 $x(0) = a$, $y(0) = b$ の下で解け。

4. 次の n 次正方行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

5. $\varepsilon > 0$ とし、 $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく。このとき次の値を求めよ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4} dx dy$$

6. ベクトルの組 a, b, c は \mathbf{R}^3 の基底であるとする。

$$u = a + b + c$$

$$v = a + b$$

$$w = a$$

$$x = b$$

とベクトル u, v, w, x を定めるとき、次の各問いに答えよ。

(1) ベクトルの組 u, v, w は \mathbf{R}^3 の基底であることを示せ。

(2) ベクトルの組 u, v, w, x は \mathbf{R}^3 の基底でないことを示せ。