

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

1. 実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

について次の問に答えよ.

- (1) M の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; M)$ を求めよ.
- (2) 固有空間 $W(\lambda; M)$ の正規直交基底を求めよ.

2. \mathbb{R}^3 の部分集合 L を

$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$$

とおく. 次の問に答えよ.

- (1) L を含む最小の \mathbb{R}^3 の部分ベクトル空間 V の基底と次元を求めよ.
- (2) V の直交補空間を求めよ.

3. 実数係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) A^2, A^3, A^4 を求めよ.
- (2)

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_n E + y_n A$ と表すとき,

$$B = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) E + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) A$$

を求めよ. ここで E は単位行列を表す.

- (3) $B = E$ を満すような t を求めよ.

4. 次の問に答えよ.

(1) 領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4, x + y > 0\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$$

を計算せよ.

(2) 正の実数 x に対し $f(x) = x^{x^x}$ と定義する. $f'(x)$ を計算せよ.

5. 未知関数 $y = y(x)$ に関する以下の各微分方程式に対し, その一般解を求めよ. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

(2) $2y'' - 5y' + 2y = e^x.$

6. 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する. \mathbb{Z} は整数全体の集合である. 次の問に答えよ.

(1) 関数 f_0, f_1, f_2 のグラフの概形を書け.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{*}$$

は収束することを示せ.

(3) (*) で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は \mathbb{R} 上で一様連続であることを示せ.