

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという。以下の問いに答えよ。

- (1) u の値を求めよ。
(2) 行列 $A + E$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を求めよ。
(3) $B\mathbf{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\mathbf{x}_1, B\mathbf{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\mathbf{x}_2, B\mathbf{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\mathbf{x}_3$ をみたす行列 B を求めよ。

2. 以下の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ。

- (2) 自然数 n に対して $f_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n$ とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx \leq \frac{1}{2n+3}$$

- (3) 級数の和

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

を求めよ。

3. 以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 9$ の極値を求めよ。
(2) $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 1 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ とおく。積分

$$\int_D \frac{2x^2 + y^2 + x}{z} dx dy dz$$

の値を求めよ。

4. f を \mathbb{R}^3 上の一次変換とすると、原点を通る直線 ℓ で、 ℓ 上の各点が f により ℓ 上に写されるようなものが存在することを示せ。

5. $g(x)$ を \mathbb{R} 上定義された 2 回微分可能な関数とし、 \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $x \neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ。
(2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し、 $f'(0)$ を求めよ。
(3) $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ。