## 1　準同型定理と同型定理

まず，復習として準同型定理を以下に示す.

**Thm. 1.1. 準同型定理**
群 $G$ から群 $G'$への準同型写像 $f:G\to G'$に対して, $N=\mathrm{Ker}(f)$ とすれば,

$$\overline{f}:G/\mathrm{Ker}(f)\to \mathrm{Im}(f), xN\mapsto f(x)$$

は同型写像となる. すなわち, 剰余群 $G/\mathrm{Ker}(f)$ と $f$ による $G$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ は同型となる.

$$\overline{f}:G/\mathrm{Ker}(f)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}(f).$$

次に標準全射を定義しておく.

**Def. 1.1. 標準全射**
$N\lhd G$ に対して，全準同型写像

$$f:G\to G/N,\ g\mapsto gN$$

を標準全射という.

次に 3 つの同型定理を示す.

**Thm. 1.2. 第 1 同型定理**
群 $G$ から群 $G'$への全射準同型写像 $f:G\to G'$と正規部分群 $N'\lhd G'$に対して, $N:=f^{-1}(N')\lhd G$ かつ,

$$G/N\simeq G'/N'.$$

*Proof.* $f$ と標準全射$\varphi$ との合成$\varphi\circ f:G\to G'\to G'/N'$ は全射同型であり，$\mathrm{K}er(\varphi\circ f)=\{x\in G|(\varphi\circ f)(x)=N'\}$ であるから，$x\in \mathrm{K}er(\varphi\circ f)\Longleftrightarrow\varphi(f(x))=N'\Longleftrightarrow f(x)\in N'\Longleftrightarrow x\in N$. よって，$\mathrm{K}er(\varphi\circ f)=N\lhd G$ で準同型定理より$\overline{\varphi\circ f}:G/N\xrightarrow{\sim}G'/N'$. □

**Lem. 1.1.** $S,T,U\subset G$ に対して，$(ST)U=S(TU)$，$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$.

*Proof.* $G$ が群であるから，$(ST)U=\{(st)u\mid s\in S,\ t\in T,\ u\in U\}=\{s(tu)\mid s\in S,\ t\in T,\ u\in U\}=S(TU)$，$(ST)^{-1}=\{(st)^{-1}\mid s\in S,\ t\in T,\ u\in U\}=\{t^{-1}s^{-1}\mid s\in S,\ t\in T,\ u\in U\}=T^{-1}S^{-1}$. □

**Lem. 1.2.** *(1)$H,K\leq G$ に対して，$HK\leq G\Longleftrightarrow HK=KH$.*
*(2)$H\leq G$ と $N\lhd G$ に対して，$HN=NH\leq G$.*

*Proof.* (1)$H,K\leq G$ より $H=H^{-1},K=K^{-1},HH=H,KK=K$. $(\Rightarrow)HK\leq G$ ならば $HK=(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH$.$(\Leftarrow)HK=KH$ ならば，$(HK)(HK)=H(KH)K=$

$H(HK)K=(HH)(KK)=HK$.よって，任意の $hk.h'k'\in HK$ に対して，$(hk)(h'k')$，$(hk)^{-1}\in HK$.部分群の判定条件より，$HK\le G$.
(2)$N\lhd G$ より，$h^{-1}Nh=N(\forall h\in H)$ であるから，$hN=Nh(\forall h\in H)$ より $HN=NH$.よって (1) より $HN\le G$. □

**Thm. 1.3. 第 2 同型定理**
群 $G$ の部分群 $H\le G$ と $N\lhd G$ に対して，

$$H/(H\cap N)\simeq HN/N.$$

*Proof.* Lem.1.2.(2) より，$HN\le G$.また，$N\lhd G$ より $N\le HN$.全射準同型 $f:H\to HN/N$，$h\mapsto hN$ に対して，$\mathrm{K}er(f)=\{x\in H\mid xN=N\}$ であり，$x\in \mathrm{K}er(f)\iff x\in H\cap N$ より，$\mathrm{K}er(f)=H\cap N\lhd H$.よって，準同型定理より，$\overline{f}:H/(H\cap N)\xrightarrow{\sim}HN/N$. □

**Thm. 1.4. 第 3 同型定理**
群 $G$ と $N_1,N_2\lhd G$，$N_2\le N_1$に対して，

$$(G/N_2)/(N_1/N_2)\simeq G/N_1.$$

*Proof.* $f:G/N_2\to G/N_1$，$xN_2\mapsto xN_1$は $\mathrm{well-defined}$ かつ全射準同型となる．$\mathrm{well-defined}$ であることは，$N_2\le N_1$から，$xN_2=yN_2\iff y^{-1}x\in N_2\le N_1\Rightarrow y^{-1}x\in N_1\Rightarrow (y^{-1})N_1=N_1\Rightarrow xN_1=yN_1$のようにわかる．準同型であることは，$f(xN_2)f(yN_2)$ より分かり，全射もよい．また，$\mathrm{K}er(f)=\{xN_2\in G/N_2\mid f(xN_2)=N_1\}=\{xN_2\in G/N_2\mid xN_1=N_1\}=\{xN_2\in G/N_2\mid x\in N_1\}=N_1/N_2\lhd G/N_2$であるから，準同型定理より$\overline{f}:(G/N_2)/(N_1/N_2)\xrightarrow{\sim}G/N_1$. □

## 2 外部直積と内部直積

**Def. 2.1. 外部直積，外部直和** $G_1,\cdots,G_n$を群とする．直積集合

$$G=G_1\times\cdots\times G_n=\{(x_1,\cdots.x_n)\mid x_i\in G_i\}$$

は積 $(x_1,\cdots,x_n)\circ(y_1,\cdots,y_n):=(x_1y_1,\cdots,x_ny_n)$ で群をなし，$G_1,\cdots,G_n$の**外部直積**といい，同じく $G_1\times\cdots\times G_n$とかく．各 $G_i$を $G$ の**直積因子**という．特に，各 $G_i$が加群 $(G_i,\sum)$ のときには，$G_1,\cdots G_n$の**外部直和**といい，$G_1\oplus\cdots\oplus G_n$とかいて，各 $G_i$を $G$ の**直和因子**という．