Lagrangeの定理

清水景太

2018.7.25

定義 1（中心化群・正規化群）　$S \subset G$ に対して

$$C_G(S) = \{g \in G \mid sg = gs, \forall s \in S\}$$
$$N(S) = \{g \in G \mid Sg = gS\}$$

をそれぞれ中心化群、正規化群という。

定義 2（正規部分群）　群 G の部分群 $H \leq G$ が以下の同値な 4 つの条件を満たすとき、H を G の正規部分群といい、$H \triangleleft G$ とかく。

(1) $aH = Ha (\forall a \in G)$

(2) $(aH = a'H) \wedge (bH = b'H) \Rightarrow \{(ab)H = (a'b')H (\forall a, b, a', b' \in G)\}$

(3) $a^{-1}Ha \subset H (\forall a \in G)$

(3) $a^{-1}Ha = H (\forall a \in G)$

定義 3（左剰余類，右剰余類）　$H \leq G$ を群 G の部分群とする。

$a \in G$ に対して、$aH = \{ah \mid h \in H\}$ を H を法とする a の左剰余類 $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ を H を法とする a の右剰余類という。

定義 4（剰余類の集合 G/H, 左 (右) 剰余類分解）　G の部分群 H による左剰余類の集合 $\{aH \mid a \in G\}$ を G/H とかき、右剰余類の集合 $\{Ha \mid a \in G\}$ を $H \setminus G$ とかく。また、ここから得られる G の類別 $G = \cup aH$ を G の H による左剰余類分解、$G = \cup Ha$ を G の H による右剰余類分解という。

定義 5（G における H の指数）　G/H の濃度 (有限の場合は位数) を $[G : H]$ とかいて、G における H の指数という。

定理 1（Lagrangeの定理）　有限群 G とその部分群 H に対して、$|G| = [G : H]|H|$ が成り立つ。