# 有限群の線形表現入門

Introduction to Linear Representation of Finte Groups

Naoya Enomoto[1]

2002

[1]henon@s00x0427.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

## § はじめに

これは，有限群の線形表現について入門的な解説を試みる paper である．

表現論の裾野はあまりにも広く，代数・幾何・解析を問わず様々な分野が交錯する．有限群の線形表現は，そうした表現論へのひとつの入門的な題材であるが，一般に大学の教程では時間の関係などからも真正面からは扱いにくい面もある．すでに有限群の表現については，[Ser] が初等的な入門書として推奨されているし，専門的な内容を書いたものとして，[TH],[近藤],[FH],[JM],[AB] などの該当する章が詳しい．また読み物として [堀田],[平井] なども一読に値する．

一方，有限群の線形表現についてその入門的な内容の理論部分だけを抽出すれば，十数ページでまとめられるくらいの内容しかないとも言える．しかし，それだけでは，具体的な群を用いて表現論の手触りを得ることはできない．

そこでこの paper では，理論をある程度 self-contained に叙述すると同時に，具体的な群を用いて，具体的に表現を構成したり，指標を計算するなど，表現論の手触りを感じてもらうことを目的とする．そのためには，一見無駄の多そうな計算や試行錯誤の過程を述べることもある．読者は，いろいろな例を通して表現論の手触りや基本的な手法を感じてもらうとともに,（やや過重な例で食傷気味になったときには理論に戻って）表現論の最も基本的な指導原理 (1.4.1,1.4.2,1.4.3 など) を理解してもらえればと思う．

また，この paper のタイトルは,「有限群の線形表現入門」であるが，上に述べたように，表現論の手触りを感じてもらうことを目的としているので，有限群以外の対象，例えば有限とは限らない（連続・離散）群，特に位相群や Lie 群，その他に多元環，Lie 環などの表現についても触れることがある．読者は必要ならば付録や他の書物などを利用して理解してもらえればよいが，その部分を飛ばして有限群に関する部分だけを読んでも全体の理解を損なうことはない．

なお，筆者の拙い講義を辛抱強く聞いてくれた自主ゼミのメンバー H.O，S.O の各氏，ならびに日々貴重なアドバイスを頂いている K.K 氏にこの場で感謝したい．もちろんこの paper の内容に関する責任はすべて筆者にある．

## § 理論の概要と構成

「群」の概念は，アーベルやガロアによって生み出されたとされている．彼らは方程式の根の置換という対称性から「群」の概念に至った．その後，今日代数学の教程で学ぶような抽象群としての公理が確立したのは，20 世紀前夜の頃であった．それまでは，群とは専ら何らかの置換全体であると考えられていた[1]．一方，有限群の表現論が生まれたのも，20 世紀前夜であり，それは 1896 年 Frobenius に見ることができる．表現論は，20 世紀数学の中心的な分野に成長し，いまも活発に研究が行われている．

さて，抽象的な定義で言えば「群」とは，集合 G とその上の二項演算の組であって，結合性を満たし，単位元，逆元を持つようなもののことを言うのであった．通常，群論の教程においては，(抽象）群の公理から始まり,（有限）群の構造を調べていくという方法が取られる.（有限）群の表現とは，いわばこれと対になって生じる理論である．つまり，ある群を別の何か良くわかっている対象の中に実現する[2]ことを追求することが群の表現の第一歩である．有限群の場合，その方法として代表的なものが 3 つある．それは「置換表現」,「線形表現」,「射影表現」である．置換表現とは，対称群という代表的な有限群の中に実現するものであり，線形表現は一般線形群，射影表現は射影変換群の中にそれぞれ実現するものである．この paper では，主として有限群の線形表現を扱う．

それでは,「有限群の線形表現入門」において，どのような観点が重要になるのか考えよう．まず第一に考えられることは，どんな表現（＝与えられた群の実現の仕方）があるのかということだろう．この paper では，第 1 章で表現というものを正確に定義し，よく知っている有限群（巡回群，可換群，二面体群，対称群，交代群など）をいくつか例にとって，表現の具体的な構成を見る．群が同じでもその実現の仕方（＝表現）は様々である．群という概念が方程式の根の置換ということから生まれてきたことを見れば明らかであるように，群とは対称性を抽象化した概念である．群の表現とは，群の実現の仕方であると述べたが，むしろわれわれは日常の中ではそうした群の実現の方を見ている[3]．対称性の中に群が棲んでいるのであり，それを捉えるのが表現論であるとも言えるだろう．

物質の構成の基本単位のひとつに原子や分子といったものがあるのと同じように，有限群の線形表現にも基本単位となる表現のクラスがある．それは「既約表現」と呼ばれている[4]．考えている体が良い条件を満たしていれば[5]，有限群の線形表現は，既約表現の直和でかけてしまう．これを「完全可約性」という[6]．そういう意味で既約表現が丁度有限群の線形表現を考える上で基本的な単位となっているのである．このような表現論の基礎的な概念について第 2 章でまとめて述べる．

ここまでくると，ある有限群 $G$ が与えられたとき，$G$ の既約表現はどのくらいあるのかということが自然な問題意識となってくる.（先ほど述べた完全可約性から，既約表現がすべてわかれば，有限群の線形表現はひとまずわかったことになる.）そのためには表現（＝群の実現の仕方）だけをじっと睨んでいるよりも，何かわかりやすい不変量を考えたほうが良い．既約表現を完全にパラメトライズする不変量を見つけられれば幸いである．これが「指標の理論」と呼ばれているものであり，有限群の（既約）表現は指標によって完全にパラメトライズされる．こうしたことが第 3 章の主眼となる．指標を使うことで有限

[1]例えば Burnside の「有限群論」では群の元のことを「作用子」と訳している．

[2]実現が埋め込み（単射）である必要はない．いつでも埋め込みがあるかということは定理になってくることもある.（ex.Lie 環の忠実表現の存在 (Ado-Iwasawa の定理) など.）

[3]図形の対称性から素粒子論における対称性まで．

[4]有限群に限らず，表現論において既約表現は基本的な単位である．もちろん先に進んでいくと必ずしもそれだけではなくて，ユニタリ表現であるとか可積分表現というような新たなクラスを考える必要があり，必ずしも既約表現だけに拘るわけではない.（その辺の事情は素粒子論と似てますね．笑）

[5]例えば複素数体 $\mathbb{C}$ などの標数 0 の代数的閉体であればよい．

[6]考えている体の性質がよければ，例えば，コンパクト位相群の表現，半単純 Lie 環の表現などについてもこの性質は成り立つ．その意味で，こうしたものの表現論においても，既約表現は基本的な単位である．

群の既約表現の情報を詰め込んだ指標表 (character table) がかける．また様々な形で実現されている表現を既約表現の直和に分解することも素早くできる．こうした具体的な群およびその表現において指標の理論を使ってみることも第 3 章で行う．

ところで，ある群 $G$ とその部分群 $H$ が与えられたとしよう．このとき $G$ の表現をその部分群 $H$ に「制限する」(restrict) ことができる．このとき制限した表現は $H$ の表現としてどのような表現になるであろうか．例えば，$G$ の表現として既約ならば $H$ の表現としても既約になるであろうか．これは「大きな群の表現から小さな群の表現をつくっている」のであるが，そのときの表現の振る舞いを記述したい．またこれと対になる考え方として,「小さな群の表現から大きな群の表現をつくる」ことも重要である．これを「誘導表現」という．これらはともに「実用的」な問題であろう．つまり，一般には大きな群の既約表現を指標だけで構成するためには計算をいろいろ繰り返す必要があるが，その部分群の既約表現の分類（指標表）ができていることは十分想定される．そのとき，部分群の表現を大きな群に誘導していくつかの表現を得ておき，そこで大きな群に指標の理論を適用することで様々な情報が得られることになる．一方逆に，大きな群に良く知られた表現が存在する場合がある．それが小さな群に制限したときにどう振舞うかということには興味がある[7]．しかも，こうした表現の誘導と制限とは，本当に対になっている概念である．それを記述してくるのが「Frobenius の相互律」と呼ばれている規則である．こうしたことを述べるのが第 4 章である．

第 5 章では，やや特論的になるが，対称群という具体的な群を取り上げ，その表現論について述べる．対称群の既約表現をすべて求めるには，いくつかの代表的な方法がある．ひとつは，Young 部分群を利用して群環のべき等元を見つける方法 ([岩堀]) であり，もうひとつは，多項式空間への表現を考えて Specht 加群とよばれるものを構成する方法 ([堀田],[Mac]) がある．また，対称多項式を利用する組合せ論的な方法 ([Mac]) もある．ここでは，それらをいわば三幕劇として紹介する．交代群の表現についても若干言及したい．一方，対称群の表現は一般線形群の表現（さらに付け加えるなら Lie 環の表現）とも密接に関係している．このことを示すのが Schur の相互律である．

なお，末尾に付録をつけた．網羅的なものではなく，必要な事柄のいくつかをまとめたものであるが，必要ならば参考にされたい．

[7] 例えば，物理学における「対称性の破れ」を制限の分岐則が記述してくれたりする．

# 目 次

# 1 群の表現とは？

本章では，群の表現の定義を与え，いくつかの具体的な群を取り上げて表現の例を提供する．また，群のある表現が与えられたときに新しい表現を作る方法をいくつか紹介する．これらの例のうちのいくつかや表現の作り方は，以後の章で何度も繰り返し用いられる．さらに表現論の基本的な概念をいくつか導入し，有限群の線形表現論における指導原理を与える．

## § 1.1　群の表現とは？

### 1.1.1　表現の定義

すでに述べてきたように，この paper では，有限群の線形表現を扱う．群の表現とは，群を良く知られた対象の中に実現するものである．特に線形表現とは，一般線形群の中に実現するものである．これは見方を変えれば，群の線形空間への作用を考えることに他ならない．逆から見れば，線形空間の対称性に群が棲んでいるのであり，表現とはその枠組みに光をあてることでもある．

まずは，表現を正確に定義しよう．

**定義 1.1.1.**　（有限）群 $G$ に対し，体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 $V$ と群準同型 $\rho : G \to GL(V)$ の組 $(\rho, V)$ を $G$ の**表現**という．表現空間 $V$ の次元をこの表現の**次数**という．また，群準同型 $\rho : G \to GL(V)$ が単射であるとき，表現が**忠実**であるという．

この定義の意味について述べておこう．$V$ を体 $\mathbb{K}$ 上の $n$ 次元ベクトル空間とするとき，その上の線形同型写像全体を $GL(V)$ とかく．これには写像の合成を積として自然に群の構造が導入される．有限群 $G$ の線形表現とは，$G$ から $GL(V)$ への準同型すなわち，$GL(V)$ の中に，群の構造を保って（＝準同型）$G$ を実現することに他ならない[1]．

次に，$V$ の基底を一組固定することを考えよう．これによって $GL(V)$ の元は $n$ 次正則行列として表示される．これは canonical な対応ではなく，基底をひとつ決めることによって得られる表示である．基底を取り替えることで表示も変わる．これは線形代数の基本的な教程で論じられる．$V$ の基底をひとつ固定しておけば，表現 $\rho : G \to GL(V)$ は，$G$ の各元 $g$ に対して，（群の構造を保って）正則行列 $\rho(g)$ を対応させることに他ならない．$G$ の元を一斉に行列表示していることになる．

実は，この「一斉に行列表示する」ということは，群の表現論が単なる線形代数ではなく，advanced な線形代数の内容を必要とすることを意味している．このことを説明するには，表現の例や基礎概念をいくつか導入した方がわかりやすいので，しばらく我慢しておくことにしよう．

さて，われわれは，ひとまず有限群 $G$ にどんな表現があるかを調べたいのであるが，そのためには，どのような表現を「同じとみなす」かが重要である．そのために，表現の同値性を定義しよう．

[1] ここで注意すべきことは，単に $G$ を $GL(V)$ に単射で埋め込むこととは違うことである．群 $G$ が与えられたとき，$V$ をうまくとって $GL(V)$ に単射で埋め込めるかどうかは，一般に自明ではない．表現とは，確かに $G$ を $GL(V)$ の中に実現することであるが，それは埋め込みである必要はなく，特に埋め込みである場合を忠実表現と呼ぶのである．

**定義 1.1.2.**　群 $G$ の 2 つの表現 $(\rho, V), (\tau, W)$ が存在したとき，この 2 つの表現が**同値**であるとは，$V, W$ への線形同型 $T : V \to W$ であって，

$$\tau_g \circ T = T \circ \rho_g \quad (\forall g \in G)$$

をみたすものが存在するときを言う．

これを可換図式で書けば以下のようになる．

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ {\scriptstyle \rho_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_g} \\ V & \xrightarrow[T]{} & W \end{array}$$

つまり，$V$ を線形同型と整合的 (compatible ＝図式が可換) な表現はすべて同じとみなそうというわけである．例えば，$V$ の基底を取り替えるという線形同型は明らかに表現と整合的であるから，得られる表現は同値である.（このことは，あとで完全可約性と advanced な線形代数の関係を考えるときに重要である.）

特に，次のことに注意しよう．

**系 1.1.3.** 同値な表現の次数は等しい．

これは明らかである．しかし，次のこと（この系の逆）は直ちに明らかというわけではない；

「次数の等しい表現は同値か？」

もしこれが真であったなら，有限群の表現論はもっとずっと楽になっていただろう[2]．しかし，残念ながら（？）この命題は偽である．読者は，すでに表現の定義を知っているし，いくつか知っている有限群をお持ちだろう．しばらく考えて見られると良い．
ここでは，理解の補助のため，対称群で簡単な例を述べる．

**例 1.1.4.**（対称群の 1 次元表現）

$n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考える．1 次元線形空間の線形同型群は $\mathbb{K}^\times$ と自然に同一視される．ここでは，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としよう．すなわち $\mathfrak{S}_n$ の 1 次元表現 $G \to \mathbb{C}^\times$ を考える．

もちろん対称群に限らず有限群の 1 次元表現がどのくらいあるかを記述することはできる．しかしここで考えるのは次の 2 つである．

(1)　[**自明表現**] $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$\rho(\sigma) = 1$ とすることで，自明な表現が定義できる[3]．

(2)　[**符号表現**] $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$\rho(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma \in \{\pm 1\}$ と定義することで 1 次元表現が得られる[4].（$\rho$ の準同型性は，$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$ である．これは線形代数の行列式の定義で扱われる内容である.）

この 2 つはともに 1 次元の表現であるが，同値ではない.（実際，1 次元線形空間 $\mathbb{C}$ 上の線形同型は零でないスカラー倍であるが，符号 $-1$ の元を考えれば，自明表現と符号表現とスカラー倍との可換性は成り立たない.）

---

[2]例えば，有限次元線形空間の同型類はその次元で与えられていたことと比較されたい．

[3]自明表現は，どんな群に対しても定義される．自明表現は，それ自体ではつまらないものであるように見える．しかし，自明表現を侮ることなかれ．表現論では，自明表現を利用していろいろなことがなされる．例えば，群 $G$ とその部分群 $H$ とを考えたとき，あとの章で述べるように，$H$ の自明表現から $G$ の置換表現が誘導される．例えばこれを利用して Hecke 環などが定義される．また，対称群の表現では符号表現も重要である．

[4]但し，考えている体 $\mathbb{K}$ が標数 2 なら $\pm 1 = 1$ だから符号表現は自明表現と一致してしまう．ここでは係数体の標数は 2 でないとしておく．

### 1.1.2 既約性と完全可約性

次に，表現論の基礎概念の中で核をなすもの，すなわち既約性と完全可約性について述べよう．

まず，表現の定義からすぐに定義できることについて述べよう．

**定義 1.1.5.**

(1) $G$ の表現 $(\rho, V)$ に対し，$V$ の部分空間 $W$ で $\rho_g W \subset W$ をみたすものを**$G$-不変部分空間** であるという．

(2) $G$ の表現空間を $W$ に制限したものを，$V$ の**部分表現** という．

(3) $V$ に非自明な不変部分空間が存在しないとき，表現が既約であるという．

これは明らかなことだが，すでに述べた対称群の 1 次元表現は既約であり，さらに，どんな群に対しても 1 次元表現はすべて既約になる．(部分空間が自明なものしかないのだから．)

既約表現とは，それ以上細かい部分表現を含まない表現であるから，既約表現とは表現の基本単位であると考えられる．(これはあとの完全可約性でより一層明らかになる．) ここで 1 次元表現は既約であるのは明らかだが,

「群 $G$ の既約表現はすべて 1 次元か？」

という問題がすぐに思い浮かぶ．そうならば 1 次元表現をすべて分類すればよい．しかし，これも残念ながら（？）偽である．実はあとで見るように，標数 0 の代数的閉体（例えば複素数体 $\mathbb{C}$）上であれば，群 $G$ のすべての既約表現が 1 次元であることと $G$ が可換群であることとは同値である．従って，非可換群であれば，既約でない 1 次元表現が存在する．このことはあとでいろいろな例で見るので，ここでは先へ進もう．

部分表現と同様，群 $G$ の表現から，商表現や直和表現が定義される．商（ベクトル）空間の概念は，剰余群の概念同様,「同値類（代表系）の考え方」が必要なので，通常線形代数の教程では扱われないが，表現論に限らず重要である[5]．

**定義 1.1.6.**

(1) $G$ の表現 $V$ とその部分表現 $W$ とがあるとき，$V/W$ を表現空間とする $G$ の表現 $\bar{\rho}$ が次のようにして構成できる；

$$\bar{\rho} : G \to GL(V/W); g \mapsto \bar{\rho}_g \quad \bar{\rho}_g(\bar{v}) = \overline{\rho_g(v)}.$$

これを**商表現** という．

(2) $G$ の 2 つの表現 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ に対し，**直和表現** が以下で構成できる；

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2); g \mapsto \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$$

但し，写像の直和は$\rho_1(g) \oplus \rho_2(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2))$ で定義する．

商表現，直和表現がそれぞれ表現になっていることの検証は読者に任せる．特に商表現が表現となっていることなど，商空間に不慣れな読者はチェックしておくとよい．

既約表現の直和は，もちろん既約ではない．(それぞれの表現を部分表現として含むから．) また，既約でない表現の商表現も既約とは限らないが，極大な部分表現で商表現をつくれば既約となる．

既約表現と直和表現の言葉が準備ができたので，完全可約性を定式化しよう．

**定義 1.1.7.** 群 $G$ の表現 $(\rho, V)$ が既約表現の直和に分解するとき，表現 $(\rho, V)$ は**完全可約**(complete reducible) であるという．

[5] technical なことを言えば，商表現や部分表現は表現空間の次元に関する帰納法で命題を証明する際に利用される．

一般に群 $G$ の表現が完全可約であるかどうかは自明ではない．

「有限群 $G$ の表現は完全可約か？」

という問題は重要である．この答えは，正確を期すならば，Yes とも言えるし No とも言える．

まずよく掲げられる次の例を見よう．

**例 1.1.8.** 実数全体 $\mathbb{R}$ を加法群とみて，2 次元表現

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

を考える．($\rho$ が群としての準同型となっていることに注意．対角成分が 1 の 2 次上三角行列の積で，$(1,2)$ 成分は和となる．)

この表現は既約ではなく，さらに完全可約でもない．実際，$W := \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^2$ は 1 次元不変部分空間である．しかも，不変部分空間は，自明な $\{0\}, \mathbb{C}^2$ 以外にはこの $W$ しかない．実際，存在すると仮定すると，それは 1 次元であり，$\mathbb{C}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の形でかけるはずである．これを $U$ とかく．

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bx \\ b \end{pmatrix}$$

となるが，$U$ の不変性からこれもまた $U$ に属す．するとその差 ${}^t(a+bx,b) - {}^t(a,b) = {}^t(bx,0)$ となる．もし $b=0$ ならもとから $U=W$ であるから $b \neq 0$ であるとすると，上の差が $W$ に属す．よってやはり $U=W$ となる．こうして不変部分空間が $\{0\}, W, \mathbb{C}^2$ に限られることがわかる．

ところが，$\mathbb{C}^2$ は 1 次元（従って既約）表現の直和には分解しない．$\mathbb{C}^2 \neq W \oplus W = W$ だからである．

ここでは表現の係数体は複素数体 $\mathbb{C}$ であり，標数 0 の代数的閉体であるから，十分良い性質を持っている．完全可約ではない理由は，考えている群 $\mathbb{R}$ の方，すなわち，$\mathbb{R}$ が非コンパクト群であることによる．一般に，係数体が標数 0 の代数的閉体であれば，いかなるコンパクト位相群の表現も完全可約である．あとで証明するように，

**定理** 標数 0 の代数的閉体上で，いかなる有限群の表現も完全可約である．

が成り立つ．(有限群は，離散位相をでみてコンパクト群の一例でもある．) 一般に，正標数の場合[6]には，有限群でも完全可約性が崩れることがある．

また表現の既約性は係数体に依存する．

**例 1.1.9.** 再び加法群 $\mathbb{R}$ を考える．$\mathbb{R}$ の 2 次元表現

$$\rho : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R}); x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

は，$\mathbb{R}$ 上の表現として既約である．しかし，$\mathbb{C}$ 上の 2 次元表現とみれば，既約ではなく，1 次元表現の直和に分解する．

このことを見るには，線形代数における標準化の考え方が重要であり，加えて advanced な内容である同時対角化の考え方があるとわかりやすい．これについてはあとで見ることにする．

群 $G$ の体 $\mathbb{K}$ 上の既約表現が，$\mathbb{K}$ の拡大体 $\mathbb{F}$ 上の表現とみても既約であるとき，$V$ は拡大 $F/K$ に対し

[6] 正確には，群の位数が係数体の標数で割り切れるとき．これをモジュラー表現という．

て絶対既約であると言う．こうしたことは，群の表現論をより進んで学ぶ場合には重要であるが，この paper はあくまでも入門であるので，あまり細かなことには触れない．

### 1.1.3 advanced な線形代数と群の表現論（特に同時性の視点から）

すでに何度か注意を促したように，群の線形表現とは，群の元を一斉に行列表示することであった．ここでは,「一斉に」という言葉で表されている「同時性」の考え方と advanced な線形代数との関係について述べる．こうした考え方は，群だけでなく表現論で本質的に重要なアイデアである．

簡単のため，ひとまず複素数体 $\mathbb{C}$ 上ですべて考えることにしよう．

まず（何でも良いから）群 $G$ とその表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられているとしよう．このとき，$G$ の各元 $g$ に対応して $GL(V)$ の元 $\rho(g)$[7]が定まっていることになる．いま，$g \in G$ をひとつ固定したとき，$\rho_g$ は対角化可能であろうか．

これは線形代数の問題である．注意しなければいけないことは，今の場合考えている群 $G$ が有限群なので，どんな $G$ の元も位数は有限，すなわちある十分大きな $N$ が存在して，$g^N = 1$ となることである．$\rho$ が群準同型であることから，$\mathrm{id}_V = \rho(1) = \rho(g^N) = \rho(g)^N$ となる．従って $V$ 上の線形変換 $\rho_g$ は $\rho_g^N = 1$ をみたすことがわかる．従って，$\rho_g$ の最小多項式は，$X^N - 1$ の因子でなければならない．しかし，$X^N - 1$ の因子は（複素数体の範囲で考える限り）重根を持たない．従って，$\rho_g$ は対角化可能であることが従う[8]．

以上の考察から，群 $G$ の表現がひとつ与えられたとき，$g \in G$ に対応する $GL(V)$ の元は，どれも対角化可能な線形変換であることがわかった．線形空間 $V$ 上の線形変換を対角化するためには，$V$ の基底を取り替えることが必要である．しかし，ある $\rho_g$ を対角化する上手い基底が，別の $\rho_{g'}$ も対角化するような基底になっているという保証はない．

一般に，線形空間 $V$ 上の対角化可能な線形写像の族 $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ が与えられたとき，それらを一斉に対角化するような $V$ の基底が存在するか否かは自明ではない．それについて，やや advamced な線形代数の結果として次のものが知られている（[斎藤 2],[赤尾] など参照）；

**定理 1.1.10.** 有限次元複素線形空間 $V$ とその上の対角化可能な線形変換の族 $\{T_i\}_{i=1}^k$ が与えられたとき，それらが同時対角化可能であることと，互いに可換であることとは必要かつ十分である[9]．

この定理を使えば，有限群 $G$ とその表現 $\rho : G \to GL(V)$ とが与えられたとき，$\{\rho_g | g \in G\}$ という $V$ 上の線形変換の族が同時に対角化されるための必要十分条件は，$\{\rho_g\}$ が互いに可換であること，すなわち $G$ が可換群であることに他ならない．

では，同時対角化可能であるとは，表現論の言葉でかくとどのような意味を持っているのだろうか．一般に，$V$ 上の線形写像 $T$ が与えられたとき，$T$ が対角化可能であることとは，$V$ が $T$ の固有空間の直和に分解することと同値である；

$$V = \bigoplus_i V_i \quad \text{但し}, V_i = \{Tv = \lambda_i v\}.$$

$T$ が対角化可能でない場合には，固有空間まで分解されず広義固有空間（一般固有空間）の直和にしか分解しない.（このあたりのところが Jordan 標準形のミソである.）

いま $\{\rho_g\}$ が同時に対角化することが可能であったとする．すると，$V$ は，$g_0 \in G$ をひとつ固定する

[7]以後，これのことを $\rho_g$ などと書くことがある．例えば $\rho_g(v)$ とかいたときには，$\rho(g)$ という線形変換で $v \in V$ の元を変換してできる $V$ の元を表す，という具合に．

[8]このあたりの線形代数の使い方には慣れが必要かもしれない．例えば [斎藤 1]，[斎藤 2]，[赤尾] などを参照されたい．

[9]一般に $T_i$ が対角化可能であるとは限らなくても，上三角化はできる．その場合，同時上三角化可能であることと互いに可換であることとはやはり必要かつ十分である．

と，$\rho_{g_0}$ の固有空間に分解する．同時対角化可能であるということは，その直和分解が，のこりの $\rho_g$ すべての固有分解に一致するということに他ならない．このとき各固有空間はどれも $G$ の作用で閉じている（固有空間の定義を見よ）から，$G$-不変部分空間となっている．すなわち，$V$ は $G$-不変部分空間の直和に分解している．しかもさらに $\{\rho_g\}$ がすべて対角化されているということは，各固有空間はすべて固有ベクトルがそれぞれ張る 1 次元部分空間の直和に分解していることになるから，結局，

$V$ が 1 次元かつ $G$ で不変な部分空間の直和に分解する

ことに他ならない．これは，$G$ の表現 $(\rho, V)$ が 1 次元（従って既約）表現の直和に分解されることを意味している．

今までの考察から，次の命題が証明できる.（これはあとで Schur の補題を用いてもう一度証明する.）

**命題 1.1.11.** 有限群 $G$ の複素数体上の既約表現が 1 次元に限ることと $G$ が可換群であることとは必要十分である．

[証明] $G$ が可換群であるとすれば，上の考察から，複素数体上の有限次元表現は必ず 1 次元表現の直和に分解する．従って，可換群の既約表現は 1 次元表現に限る.（もし 2 次元以上のものがあれば，1 次元の直和に分解するのは矛盾.）

一方，$G$ のすべての既約表現が 1 次元であるとすると，複素数体上の $G$ のいかなる表現も 1 次元表現の直和に分解する[10]．これは，$G$ の各元に対応する $V$ の線形変換が同時対角化可能であることを意味しており，それは定理 1.1.10 より，$G$ が可換群であることと同値である． ■

このような考察から，同時対角化可能であることと表現が 1 次元（既約）表現の直和に分解することの関連付けをすることができた.

**Remark 1.1.12.** ただし，ここで注意しなければならないことは，$\rho_g$ のある固有値 $\lambda_i$ に対応する固有空間 $V_i$ は，別の $\rho_{g'}$ の固有空間にもなっているけれども，対応する固有値 $\lambda'_i$ は $\lambda_i$ と異なっていても良いということである[11].（固有ベクトルは一致，すなわち同時固有ベクトル.）

では非可換群の場合は，線形代数特に同時性の考え方と表現の考え方とはどう結びつくのだろうか. ここで先の完全可約性の考え方を見直してみる必要がある．

まず，直和表現の行列表示を考えてみよう．

いま，$G$ の 2 つの表現 $\rho, \rho'$ とが与えられているとき，$\rho \oplus \rho'$ によって直和表現を作ることを考える．すると，$\rho_g \in GL(V)$ の行列表示を $R_g$，$\rho'_g \in GL(V')$ の行列表示を $R'_g$ とかけば，$(\rho \oplus \rho')_g \in GL(V \oplus V')$ の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} R_g & 0 \\ 0 & R'_g \end{pmatrix}$$

の形となる.（これは直和 $\rho \oplus \rho'$ の定義を見ればよい.）このような形の行列のことを「ブロック対角型の行列[12]」と呼ぶことにしよう．ここで注意しなければならないことは次のことである．つまり，$g \in G$ をひとつ固定して直和表現の行列表示を考えれば確かにブロック対角型になっている．しかし直和表現を考えている場合には，どんな $g \in G$ をとっても，$(\rho \oplus \rho')_g$ の行列表示は，<u>一斉に</u> ブロック対角型になっているのである．

では，一般に群 $G$ の表現が与えられたとき，$\{\rho_g | g \in G\}$ の行列表示を一斉に「ブロック対角型」にで

[10] ここではまだ証明していない完全可約性を用いていることに注意.

[11] 同時固有空間分解はここが難しい．例えば半単純 Lie 環の表現論でもこの同時固有分解は大事で，ウェイト分解と呼ばれている．そこでは，Lie 環の元 $g$ に対して，その同時固有値を対応させる写像 $\alpha$ は線形写像となる．群の場合には固有値 0 を許すので，同時固有値を対応させる写像 $G \to \mathbb{C}$ は群準同型にはならないが.

[12] 定着している用語ではないと思うが，自然な呼び方だと思われる.

きるだろうか．いま仮にそのようなことができたとしよう．すると，表現空間 $V$ は丁度 $\{\rho_g | g \in G\}$ を同時ブロック対角化するような基底を持つことになる．このことは，$V$ がそのような基底をとることで直和分解されることを意味するが，その各々の部分空間は，$G$-不変部分空間となっている；

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ** \\ 0 \end{pmatrix}.$$

つまり，表現が $G$-不変部分空間の直和に分解することと行列表示が一斉にブロック対角化されることとは同値なのである．例えば，既約表現を考えると，もし行列表示がブロック対角化されてしまえば，それは $G$-不変な部分空間の存在を意味し，これは既約性に反す．つまり，既約表現とは「同時ブロック対角化」における最小単位になっている[13]．ここまで来ると完全可約性の意味もはっきりする．つまり，完全可約性とは，$\{\rho_g\}$ たちを一斉にブロック対角化できるということに他ならない．

既約でない表現の行列表示は，$V$ の基底を上手く選ぶことで，

$$\begin{pmatrix} R & * \\ 0 & R' \end{pmatrix}$$

の形にまではできる．実際，表現が既約ではないのだから，$G$-不変部分空間が少なくともひとつ存在する．これを $V'$ とかくことにすると，$V$ の中で $V'$ の補空間 $W$ がとれる．しかし，これが $G$-不変であるかどうかはわからない．従って，行列表示は上でみたような形になるのである．もし $G$-不変な補空間がとれれば，行列表示の $*$ は $0$ となる．

ここで，表現空間 $V$ を $V'$ に制限して出来る部分表現の行列表示は，丁度上の行列では $R'$ として与えられる．一方，商表現 $V/V'$ の行列表示が丁度 $*$ のところに現れるのである．

前にあげていた 2 つの例を検討しなおそう．

例 1.1.8 を思い出そう．そこでは，実数全体 $\mathbb{R}$ を加法群とみて，2 次元表現

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

を考えていた．これが完全可約であるということは，行列実数全体 $\mathbb{R}$ を加法群とみて，2 次元表現

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}); x \in \mathbb{R} \right\}$$

を同時にブロック対角化できるということことになる．しかし，それが出来るとすれば，もはや対角行列しかありえない．ところがすべて固有値は 1 だから対角化できるとすればそれは単位行列しかない．この表現は 2 次元の自明な表現と同値ではない.（もし同値だとすると，$\{\rho_g\}$ はどれも単位行列だから何乗しても単位行列である．一方，もとの 2 次元表現では，$x \neq 0$ である限り無限位数である．これは矛盾である.）

**Remark 1.1.13.** この表現はこれ以上ブロック対角化することができないにも関わらず，例 1.1.8 でみたように既約ではなかった．従って，上で書いていた「既約表現とは「同時ブロック対角化」における最小単位になっている」ということは厳密には正しくない．それは，既に例の中で述べたように，$\mathbb{R}$ が非コンパクト群であるということが原因になっている．有限群の表現を複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える限りにおいては，上のように考えておいて問題はない．

他方，ブロック対角化の考え方が係数体に依存することは，線形代数における Jordan 標準形の考え方と比較すればわかりやすい．

[13] Jordan 標準形の場合には，これに相当する最小基本単位は Jordan 細胞と呼ばれていたことを思い出すと良い．

$M_n(\mathbb{C})$ の任意の元 $A$ に対して，複素正則行列 $P$ が存在して，$PAP^{-1}$ が Jordan 標準形となるようにできるのであった．しかし，ここで $P$ として実正則行列のみしか許さないとしよう．すると，Jordan 標準形まで持ち込むことはできない．複素固有値の部分ができなくなるわけだ．この場合には，advanced な線形代数の結果として，「実標準形」と呼ばれるものが知られている[14]．ここではその詳細は省略するが，例 1.1.9 で見た表現行列

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

は，実標準形の場合に，複素固有値に対応する部分を記述する基本単位となっている．

$\mathbb{C}$ 上で考えれば，固有値が $\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t$ なのだから，それを対角成分にもつ対角行列にできる.（可換性から同時にできる.）

**例題 1.1.14.** $p$ を素数とする．体 $F$ の標数を $p$ とする．このとき，$p$-群の $F$ 上の有限次元既約表現は，自明な表現に限ることを示せ．

[解[15]] $\rho : G \to GL(V)$ を $p$-群 $G$ の体 $F$ 上既約な表現であるとする．

［Step.1］ $\forall g \in G$ に対して，$\rho_g \in GL(V)$ の固有値は 1 である．

実際，$G$ の位数を $p^n$ とすれば，$g^n = 1_G$ であるから，$(\rho_g)^{p^n} = \mathrm{id}_V$．すると，$\rho_g$ の最小多項式は，

$$(X^{p^n} - 1) = (X - 1)^{p^n}$$

である.（標数 $p$ であることに注意．この最小多項式には重根がある [かもしれない] ので，各 $\rho_g$ が対角化可能であるかどうかはわからない.）いずれにしても，$\rho_g$ の固有値は 1 である．

［Step.2］ $p$-群の中心 $Z(G)$ は $\rho$ で自明.

実際，$g \in Z(G)$ とすると，$\forall x \in G$ に対し，$xg = gx$ である．$\rho_g$ は固有値 1 だから，対応する固有ベクトルを $v \neq 0$ とすると，$\rho_g(v) = v$．よって，

$$\rho_x(v) = \rho_x\rho_g(v) = \rho_g\rho_x(v)$$

となるので，1 に対応する $\rho_g$ の固有空間 $V'$ は $G$-不変である．$V$ の既約性から $V' = V$ でなければならない．よって $\forall v \in V$ に対して，$\rho_g(v) = v$ となる．

［Step.3］ $|G| = p^n$ として，$n$ に関する帰納法で主張を示す.

$n = 0$ なら明らか．いま $|G/Z(G)| < |G|$ であることに注意する[16]．すると [Step.2] の結果から，$\rho : G \to GL(V)$ は，$G/Z(G)$ を経由する．すなわち $\pi : G \to G/Z(G)$ なる自然な射影に対して，$\bar{\rho} : G/Z(G) \to GL(V)$ であって $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$ なるようにできる．しかもこの表現は既約である.（実際，もし $V \supset W$ が $G/Z(G)$-不変であるとすると，$Z(G)$ は $V$ に自明に作用しているのだから，$G$-不変でなければならない.）よって帰納法の仮定が使えて，$\bar{\rho}$ は自明．よって $\rho$ も自明でなければならない． ■

### 1.1.4 表現の定義に関するいくつかの注意

ここでは表現の定義に関わることおよび今後の進め方についての若干の注意を述べる．

---

[14] 例えば [赤尾] を参照.

[15] この証明は，H.O. 氏に教えて頂いた．この例題の事実はモジュラー表現を勉強するときには，最も基本的な事実であり，多元環の表現論（半単純環の理論）を用いた証明もあるが，ここで述べるものは線形代数の範囲で理解できる.

[16] $p$-群の中心が自明でないことは，群論の基礎事項である.

### 係数体

すでに注意してきたように，表現を考えるときには，考えている体（＝係数体）に注意しなければならない．係数体が変われば既約なものが既約でなくなることもあった（例 1.1.9）．この paper では，原則として，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限群の表現論を扱う．様々な箇所で何の断りもなく書かれている事柄はすべてこの範疇で考える．ただし，正標数を考えるとどうなるか，代数的閉体ではないとどうなるか（例えば実表現）などについては，そうしたものを考えるという断りを入れて適宜注意を促すつもりである．

### 表現の次元について

この paper では，有限次元表現しか扱わない．一般には，表現空間 $V$ として有限次元線形空間にこだわる必要はない．無限次元，特にヒルベルト空間やバナッハ空間のような性質のいい空間（例えば，関数空間としてよく現れる）を考えることは自然である．しかし，これらは入門の内容としては明らかに難しすぎる．

### 有限群以外の対象の表現について

表現論は有限群の表現だけを扱うわけではない．位相群，Lie 群，Lie 環，多元環など[17]扱う対象は様々である．ここで述べた表現の定義 1.1.1 は，あくまでも有限群の表現の定義になっているが，他の対象でも考え方は基本的に同様である．

例えば，$GL_n(\mathbb{C})$ には自然に位相群，Lie 群の構造が入る．従って，位相群の表現であれば，準同型 $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ に，位相に関する連続性を要請する．Lie 群であれば可微分性を要請する．Lie 環での場合には状況は少し変わるが，Lie 環の準同型であることを要請することに変わりはない[18]．表現とは，有限群，位相群，Lie 群，Lie 環，多元環といったものを良くわかっている対象の中に実現することであったわけだから，代数系としての構造を保った実現でなければ意味がない．代数系としての構造を保つ写像が準同型写像に他ならない．

### 群環

有限群の表現論は，実は多元環の表現論に含まれる．そのためには群環と呼ばれる概念が必要である．

**定義 1.1.15.** 有限群 $G$ に対し，$G$ の各元に対応する文字 $e_g$ を基底としてできる $\mathbb{K}$-ベクトル空間を $\mathbb{K}G$ とかく．（ベクトル空間としての次元は $G$ の位数 $|G|$ に等しい．）$\mathbb{K}G$ に積を $G$ 上の演算から導入する；すなわち

$$e_g e_h = e_{gh}$$

を線形に拡張することによって $\mathbb{K}G$ に積を導入する．これによって $\mathbb{K}G$ は多元環（algebra）の構造をもつ．こうしてできる多元環 $\mathbb{K}G$ を**群環**(group algebra) という．

ここで言う多元環の構造とは以下で定義される．

**定義 1.1.16.** 集合 $R$ が体 $K$ 上の**多元環**であるとは，
(1) $R$ は $K$ 上の（有限次元）ベクトル空間である．

[17] これらの定義などについては付録参照．
[18] これには少し誤解を与える可能性がある．Lie 環は線形空間上にブラケット積を持つ代数系であるから，一般に乗法に相当するものがない．従って逆元なるものは意味がないので，表現を考える場合には，$GL(V)$ ではなく，$\mathrm{End}(V)$ で考える．これには自然に Lie 環の構造が入るため，Lie 環の準同型であるということが意味を持つ．

(2) 双線形写像 $R \times R \to R$ なる乗法が与えられており，結合法則 $(ab)c = a(bc)$ を満たす.
(3) ある $1_R \in R$ が存在して，$1_R a = a 1_R = a$ を満たす．すなわち，乗法単位元 $1_R$ が存在する.

（群環 $\mathbb{K}G$ について，有限次元ベクトル空間であることは，$\dim \mathbb{K}G = |G|$ から．結合性は $G$ の結合律から導かれる．単位元は $G$ の単位元に対応する $e_{1_G}$ である.）

**定義 1.1.17.** $\mathbb{K}$-多元環 $A$ の表現とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$ と $\rho : A \to \mathrm{End}\, V$ なる多元環の準同型の組 $(\rho, V)$ のことをいう.

有限群の表現と群環の表現の関係について，次のことが言える.

**命題 1.1.18.** 有限群 $G$ の表現は，群環 $\mathbb{K}G$ の表現に一意的に拡張される．また逆に群環 $\mathbb{K}G$ の表現を制限することで $G$ の表現が得られる．これによって，有限群 $G$ の表現と群環 $\mathbb{K}G$ の表現とが一対一に対応する.

[証明] $G$ の表現を $(\rho, V)$ とすると，$\mathbb{K}G$ の元 $\sum a_g e_g$ に対し，

$$\tilde{\rho}\left(\sum_{g \in G} a_g e_g\right) = \sum_{g \in G} a_g \rho(g)$$

によって群環 $\mathbb{K}G$ の表現 $\tilde{\rho}$ ができる．($\tilde{\rho}(e_g) := \rho(g)$ を線形に拡張する.）逆に $\mathbb{K}G$ の表現 $\tilde{\rho}$ に対しては，$\rho(g) := \tilde{\rho}(e_g)$ と制限する．このとき，

$$\rho(g)\rho(g^{-1}) = \tilde{\rho}(e_g)\tilde{\rho}(e_{g^{-1}}) = \tilde{\rho}(e_g e_{g^{-1}}) = \tilde{\rho}(e_{gg^{-1}}) = \tilde{\rho}(e_{1_G}) = \mathrm{id}_V$$

となるので，$\tilde{\rho}$ の制限 $\rho$ は $G \to GL(V)$ なる準同型を与える. ■

このことから，

$$\{\text{ 有限群 } G \text{ の表現 }\} \overset{\text{本質的に同等}}{\longleftrightarrow} \{K[G] \text{ の表現 }\}.$$

となるのである[19].

群環の概念は，例えば誘導表現を考える場合などに重要である．しかし，多元環の表現論は，入門の範疇を超えていると考えられるので，ここでは系統的な記述は避ける．これについては，[NT] が本格的な文献である．若干のまとめについては，付録を見られたい．この paper を理解するためには，群環の概念と非可換環上の加群の考え方について定義などを知っていれば十分であろう.

## § 1.2 表現の例

**小人，例を忘れ，あるいは例に溺れる.**

すでに例 1.1.4, 例 1.1.8, 例 1.1.9 で補助的な例を述べてきた．ここでは典型的な有限群を中心に，その表現を例として提供したい.

[19] こうしたことは，例えば Lie 環 $\mathfrak{g}$ においても，その表現は普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の表現と本質的に同等であることが示されるなど，いろいろ見られることである.

### 1.2.1 巡回群・可換群

巡回群，より一般に可換群の表現については，すでに既約表現が 1 次元であることを advanced な線形代数の結果から導いていた．完全可約性に注意すれば，どんな有限次元表現も 1 次元表現の直和に分解してしまうから，もうあまり調べることはないかもしれない．ここではもう少し辛抱していくつか例を取り扱ってみよう．

**正多角形の回転群** ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

まずは巡回群を幾何的に見てみることにしよう．

**例 1.2.1.** 正 $n$ 角形を考えよう．このとき，正多角形の回転対称性は，$2\pi/n$ 回転によって生成される可換群，特に $n$ 次巡回群をなす．ところで，$2\pi/n$ 回転は，行列表示

$$\Theta_n := \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

を持つ．従って，

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni \bar{k} \mapsto \Theta_n^k \in GL_2(\mathbb{C})$$

は，$n$ 次巡回群の 2 次表現を与えている．

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の生成元 $\bar{1}$ の行き先を考えれば，残りの行き先はすべて決まってしまうことに注意すれば，2 次表現として，

$$\theta_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni \bar{1} \mapsto \Theta_n^k \in GL_2(\mathbb{C})$$

なる $n$ 個の表現が得られる．

この $n$ 個の表現のうち，$k = n/2$ の場合には，行列表示がすべて単位行列となっているから，1 次元の自明な表現の直和に分解する．しかし，$\mathbb{R}$ 上で考えると，$k \neq n/2$ ならこれらは 1 次元表現の直和には分解しない．しかし $\mathbb{C}$ 上で考えれば，1 次元表現の直和に分解する．それを見るには，行列表示の固有値を求める必要があり，それは，$e^{\pm 2\pi ki/n}$ である．$\bar{1}$ の行き先が対角化できれば，自動的にそれ以外の行列表示も対角化されることに注意すれば，結局

$$\theta_k = \varphi_k \oplus \varphi_{-k}$$

の形に直和分解される．ここで $\varphi_k$ は $\bar{1} \mapsto e^{2\pi ki/n}$ で定義される 1 次元表現である．こうして $\mathbb{C}$ 上の表現と見たときの 1 次元への直和分解が得られた．

この例からわかるように，正多角形の回転対称性という巡回群の「実現」の方をわれわれは普段目にしているのであり，そうした対称性に群の表現ないしは群自身が棲んでいるということになる．

さて，今度は 1 次元（既約）表現に立ち戻って考えよう．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の 1 次元表現はどのくらいあるだろうか．

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の生成元を $\bar{1}$ とかくことにしよう．すると，$\rho : G \to GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ なる群準同型は，$\rho(\bar{1})$ を決めればすべて決まってしまう．ところが $n\bar{1} = 0$ であることから，$1 = \rho(0) = \rho(n\bar{1}) = \rho(\bar{1})^n$ であるから，$\rho(\bar{1})$ は 1 の $n$ 乗根でなければならない．従って，

$$\varphi_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni \bar{1} \mapsto e^{2\pi ki/n} \in \mathbb{C}^\times \ (1 \leq k \leq n)$$

なる $n$ 個の 1 次元表現ができる．

実は，この $n$ 個は互いに同値ではない（既約）表現であり，しかも既約表現はこれですべて尽くされている[20].

### 1.2.2　対称群

**standard 表現**

対称群の一番自然な表現ともいえる standard 表現は重要である．まずこの表現について見てみよう．

**例 1.2.2.**　$\mathfrak{S}_n$ は集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上の全単射全体[21]に写像の合成で群構造を導入したものである．$\mathfrak{S}_n$ とは $n$ 文字の置換であるから，次のようなことは自然に考えられる．すなわち，$\mathbb{C}^n$ を考え，その任意の点の座標を $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とする．このとき，

$$\rho_\sigma:\mathbb{C}^n\ni(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})\in\mathbb{C}^n$$

によって $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の作用を定めることができる．すなわち，$\mathbb{C}^n$ の座標成分の置換として $\mathfrak{S}_n$ の作用が定義されるわけである．従ってこれを通じて $\mathfrak{S}_n$ の $n$ 次表現が定義される；

$$\rho:\mathfrak{S}_n\ni\sigma\mapsto\rho_\sigma\in GL_n(\mathbb{C}).$$

この表現を $\mathfrak{S}_n$ の置換表現と呼ぶ.

この表現は既約表現であろうか.

この表現は既約ではない．自明な不変部分空間が存在する；

$$W:=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

$W$ は $\mathbb{C}^n$ の 1 次元部分空間であり，座標成分を置換しても不変になっている．従って standard 表現には 1 次元不変部分空間が存在するため，既約ではない．では $W$ の補空間として $\mathfrak{S}_n$ 不変なものがとれるだろうか.（すでに述べてきた完全可約性からそのようなものがあるはずである.）

次の部分空間を考える；

$$U:=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n|x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}.$$

これが座標成分の置換によって不変なことも明らかであろう．しかも，$W$ と $U$ は，$\mathbb{C}^n$ の自然な内積

$$(x_1,\cdots,x_n)\cdot(y_1,\cdots,y_n):=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$$

に関して，直交補空間となっている．従って，

$$\mathbb{C}^n=W\oplus U$$

となる．これは $\mathfrak{S}_n$-不変な部分空間への直和分解である．$W$ は 1 次元だから既約であるが，$n-1$ 次元部分空間 $U$ は既約であろうか.

結論は YES である．あとで述べる指標の理論を使えば，この $U$ が既約であることも計算で調べることができる．直接証明するためには，$U$ に $\{0\}$ でない不変部分空間 $U'$ が存在すると仮定すると，それは $U$ 自身に一致しなければならないことを示せばよい．そこで $U'$ の 0 でない元 $(a_1,\cdots,a_n)$ をとる．これを例えば (12) を作用させて $(a_2,a_1,a_3,\cdots,a_n)$ ができるので，その差 $(a_1-a_2,a_2-a_1,0,\cdots,0)$ も $U'$ に属

[20] それは後で述べる指標の考え方を用いれば自明にわかることであるが，ここではここまででとめておく．また一般に非可換群の 1 次元表現については，交換子群を利用して調べることができるが，それも後にまわす.

[21] $n$ 本のあみだくじの全体.

する．$a_1 - a_2 \neq 0$ なら $(1,-1,0,\cdots,0)$ が $U'$ に属す．こうしたことをこつこつと繰り返せば，結局 $U$ の基底 $(1,-1,0\cdots,0),(0,1,-1,\cdots,0)\cdots,(0,\cdots,0,1,-1)$ がすべて $U'$ に含まれることが示される．(詳細は読者に委ねる．)

これを $\mathfrak{S}_n$ の**standard representation** という．具体的な行列表示については，$\mathfrak{S}_3$ の場合についてあとで見る．

**例 1.2.3.** $\mathfrak{S}_n$ を $\mathbb{C}^n$ の座標成分の変換で作用させて，その既約成分として standard 表現をつくった．ここではもう少しそれを一般化する．すなわち，$n$ 変数多項式環 $\mathbb{C}[X_1, X_2, \cdots X_n]$ を考えるのである．これに $\mathfrak{S}_n$ は変数（不定元）の置換で作用する．しかし，$n$ 変数多項式環はベクトル空間としては無限次元であるからそのまま考えるよりは，有限次元のもので考えたい．そのために，同次式を導入する．すなわち，$k$ 次同次式全体のなす $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$ の部分空間を $P^k(X_1,\cdots,X_n)$ とかくことにする．このとき，$\mathfrak{S}_n$ の作用で同次性は不変だから，$P^k(k=0,1,\cdots)$ は $\mathfrak{S}_n$ の（無限この）有限次元表現を与えている．

$k=0,1$ の場合は，自明表現，置換表現となっていることに注意しよう．

### $\mathfrak{S}_3$ の表現論

ここでは，最も位数の小さい非可換群である $\mathfrak{S}_3$ の表現についてみてみることにしよう．

**例 1.2.4.** ［$\mathfrak{S}_3$ の表現］
$\mathfrak{S}_3$ の表現について，すでに 3 つ既約表現を紹介した．

(1) 自明表現（1 次元），

(2) 符号表現（1 次元），

(3) standard 表現 (2 次元),

であった．

### $\mathfrak{S}_3$ の既約表現の行列表示

ここでは，まず (3) の行列表示を具体的に求めてみよう．行列表示を得るためには，$\mathbb{C}^3$ の基底をひとつ決める必要がある．それを標準基底 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ としよう．すると行列表示は，

$$e \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (132) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$(12) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これらは同時にブロック対角化されているわけではない．そうするためには，良い基底を選んでやる必要があったわけだが，すでに上でその一部を示唆していた．$W$ の基底としては $(1,1,1)$，$U$ の基底として $(1,-1,0),(0,1,-1)$ をとることにする．すると行列表示は同時ブロック対角化される．特に $U$ に対応す

る行列表示を書き下そう[22].

$$e \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (132) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$(12) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### $\mathfrak{S}_3$ の指標表（先走り）

実は，有限群の表現論の根幹をなす指標の概念は，行列表示した場合のトレースのことに他ならない特に，トレースは基底の取り方によらない；$\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{tr}\,A$．また共役類の上では一定値であることもわかる．ここでトレースを $\mathfrak{S}_3$ の共役類ごとに書き出してみると，

| | $\{e\}$ | $\{(12),(13),(23)\}$ | $\{(123),(132)\}$ |
|---|---|---|---|
| $U$ | 2 | 0 | -1 |

となっている．これに自明表現と符号表現の分を書き加えると，次図ができる．

| $\mathfrak{S}_3$ | $\{e\}$ | $\{(12),(13),(23)\}$ | $\{(123),(132)\}$ |
|---|---|---|---|
| 自明表現 | 1 | 1 | 1 |
| $U$ | 2 | 0 | -1 |
| 符号表現 | 1 | -1 | 1 |

これが $\mathfrak{S}_3$ の指標表と呼ばれているものであることがあとでわかる．

さて，$\mathfrak{S}_3$ の既約表現は上にあげた 3 つで尽きているだろうか．

実は，あとで一般論として証明する事実として,「有限群 $G$ の既約表現の同値類の個数は，$G$ の共役類の個数に等しい」という定理がある．$\mathfrak{S}_3$ の共役類は，$\{e\},\{(12),(13),(23)\},\{(123),(132)\}$ という 3 つである[23]．従って，既約表現の同値類は上の 3 つで尽きているのである．しかし，ここではその一般論に頼るのではなく，もう少し泥臭く，しかし表現論の考え方[24]がわかるような方法で既約表現の分類を試みてみよう．

### $\mathfrak{S}_3$ の既約表現の分類（advanced な線形代数として）

まず $\mathfrak{S}_3$ の巡回部分群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{e,(123),(132)\}(=\mathfrak{A}_3)$ に注目しよう．その生成元 $\tau = (123)$ を考える．$\mathfrak{S}_3$ の表現を $(\rho, W)$ とかくとき，まず $\rho_\tau$ の固有空間に $W$ を分解しよう．これは 1 次元まですることができることに注意すると，

$$W = \oplus W_i \qquad (W_i = \mathbb{C}w_i, w_i \text{は} \rho_\tau \text{の固有ベクトル.})$$

となる．ここで $\rho_\tau^3 = \mathrm{id}_W$ であるから $\rho_\tau$ の固有値は，$1, \omega, \omega^2$ のいずれかである.（$\omega$ は 1 の原始 3 乗根.）すなわち，

$$\rho_\tau(w_i) = \omega^{a_i} w_i \quad (\omega = e^{2\pi i/3}, a_i \in \{0,1,2\}).$$

[22]老婆心ながら，例えば，$(132)(1,-1,0) = (-1,0,1) = -(0,1,-1) - (1,-1,0)$ というように計算するのである．線形代数.

[23]更に対称群の表現論における基礎的な事実として既約表現と Young 図形を対応させる方法がある．実は，共役類 $\{e\}$ には $(1^3)$ の形の Young 図形，$\{(12),(13),(23)\}$ には $(1,2)$ の形の Young 図形，$\{(123),(132)\}$ には $(3)$ の形の Young 図形が対応している．これは共役類と対称群の元の cyclic type の対応による．さらに，それぞれ上にあげた既約表現 (2),(3),(1) と対応している．

[24]advanced な線形代数的な考え方.

さて，ここで $\sigma=(12)$ を考えよう．$\sigma,\tau$ によって $\mathfrak{S}_3$ は生成されている．特に $\sigma\tau\sigma=\tau^2$ となることに注意しよう．すると

$$\tau(\sigma(w_i))=\sigma(\tau^2(w_i))=\omega^{2a_i}\sigma(w_i)$$

である．従って，もし $v$ が $\rho_\tau$ の固有値 $\omega^{a_i}$ に対応する固有ベクトルであれば，$\sigma(v)$ は $\omega^{2a_i}$ に対応する固有ベクトルとなる．

次に，standard 表現の基底として次のものをとろう；

$$x=(\omega,1,\omega^2), y=(1,\omega,\omega^2).$$

このとき，

$$\rho_\tau(x)=\omega x, \rho_\tau(y)=\omega^2 y, \rho_\sigma(x)=y, \rho_\sigma(y)=x$$

であることに注意しておこう．

もし $W\ni v$ が $\rho_\tau$ の固有値 $\omega$ に相当する固有ベクトルであるとすると $\rho_\sigma(v)$ の固有値は $\omega^2$ であり，$\omega\neq\omega^2$ であるから，$\langle\rho_\sigma(v)\rangle$ は 2 次元部分空間を張る．これが $\mathfrak{S}_3$-不変であることは $\rho_\tau,\rho_\sigma$ で不変であることから明らか．しかも $v\leftrightarrow x, \rho_\sigma(v)\leftrightarrow y$ によって standard 表現と同値である.（$v$ の固有値が $w^2$ である場合も $v\leftrightarrow y, \sigma(v)\leftrightarrow x$ となって同様である.）

$v$ の固有値が 1 である場合を考えよう．すると $\rho_\sigma(v)$ の固有値も 1 である．このとき，$v,\sigma(v)$ が 1 次従属であるか 1 次独立かで 2 つの場合がある．

1 次従属の場合 $\mathbb{C}v$ は 1 次元不変部分空間であるが，$\rho_\sigma(v)=v$ なら自明表現，$\rho_\sigma(v)=-v$ なら符号表現と同値となる．1 次独立の場合には，$\langle v,\rho_\sigma(v)\rangle=\mathbb{C}(v+\rho_\sigma(v))\oplus\mathbb{C}(v-\rho_\sigma(v))$ と直和分解し，前者は自明表現，後者は符号表現に同値である．

以上のことから，$\mathfrak{S}_3$ の既約表現は (1),(2),(3) の 3 つで尽くされることが示された．しかも，$\mathfrak{S}_3$ のどんな有限次元表現も上の 3 つの既約表現の直和に分解すること（＝完全可約性）も同時に示されている．

$$W=(\text{自明表現})^{\oplus n}\oplus(\text{符号表現})^{\oplus m}\oplus(\text{standard 表現})^{\oplus k}$$

と直和分解したときの $n,m,k$ を $W$ に含まれる既約表現の重複度という．上の証明から，例えば $k$ は，$\rho_\tau$ の固有値 $\omega$ であるような固有ベクトルのうち一次独立なものの最大個数に他ならない．また，$n+k$ は $\rho_\sigma$ の固有値 1 であるような固有ベクトルのうちで一次独立なものの最大個数，$m+k$ は $-1$ に対応するそれであることがわかる．

### 1.2.3　交代群

### 1.2.4　二面体群

### 1.2.5　その他の例

#### トーラス $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の表現

#### 加法群 $\mathbb{R}$ の表現

## § 1.3　表現の作り方

ここでは，群 $G$ のある表現が与えられたときに，群 $G$ の新しい表現をつくる方法を紹介する．核となる 2 つの方法は，反傾表現とテンソル積表現である．これは，表現の具体的な例をつくる際にはもちろんのこと，理論の骨組みを構築する上でも重要な道具であり，あとの基礎理論の章で用いるので，じっくり

読み進んで欲しい.

**命題 1.3.1.** $G$ の表現 $(\rho, V)$ および $(\tau, W)$ が与えられているとする．このとき，以下の 3 つの表現が構成できる．

(1) $V^*$ を $V$ の双対空間としたとき，

$$G \to GL(V^*); g \mapsto (\rho^*)_g \quad \rho^*_g(f)(v) = \rho(f(g^{-1}v))$$

によって，**反傾表現**$(\rho^*, V^*)$ が定まる．

(2) $V$ と $W$ のテンソル積を $V \otimes W$ とかくとき，

$$G \to GL(V \otimes W); g \mapsto (\rho \otimes \tau)_g \quad (\rho \otimes \tau)_g(v \otimes w) = \rho_g(v) \otimes \tau_g(w)$$

によって，**テンソル積表現**$(\rho \otimes \tau, V \otimes W)$ が定まる．

(3) $V$ から $W$ への線形写像全体を $\mathrm{Hom}(V, W)$ とかくとき，

$$g \cdot \varphi(v) = g \cdot (\varphi(g^{-1} \cdot v))$$

によって $G$ が $\mathrm{Hom}(V, W)$ に作用し，これによって $G$ の表現が定まる．

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[d, "g"] \\
V \arrow[u, "g^{-1}"] \arrow[r, "g \cdot \varphi"'] & W
\end{tikzcd}$$

特に，この表現は，$V^*$ と $W$ のテンソル積表現 $V^* \otimes W$ と同値である．

**証明** (1),(2),(3) が表現であることは検証容易．読者に任せる．(3) の後半のみ証明しておく．まず，線形空間としての同型 $V^* \otimes W \quad \to \mathrm{Hom}(V, W)$ は，

$$V^* \otimes W \ni f \otimes w \mapsto \varphi_{f,w} \quad \varphi_{f,w}(v) = f(v)w$$

によって定める．これが単射であることを示す．$V$ の基底 $v_i$ とその双対基底 $v_i^*$ を固定する．このとき，任意の $v \in V$ に対して，$f(v)w = 0$ であると仮定する．$f = \sum_i a_i v_i^*$ とかけるから，$v = v_j$ とすれば，$0 = f(v_j)w = a_j w$．よって $w = 0$ かすべての $a_i = 0$ つまり $f = 0$ のいずれかが成り立ち，結局 $f \otimes w = 0$ となる．よって単射．次元を比べて全射．線形性は検証容易．$G$-線形であることは，

$$\varphi_{(g \cdot f) \otimes (g \cdot w)}(v) = (g \cdot f)(v)(g \cdot w) = f(g^{-1} \cdot v)(g \cdot w)$$
$$(g \cdot \varphi_{f \otimes w})(v) = g \cdot (\varphi_{f \otimes w}(g^{-1} \cdot v)) = g \cdot (f(g^{-1} \cdot v)w) = f(g^{-1} \cdot v)(g \cdot w)$$

となることから従う． ■

**命題 1.3.2.** 群 $G$ が有限集合 $X$ に左から作用しているとき，$V = \langle e_x | x \in X \rangle$ なるベクトル空間を表現空間とする $G$ の表現が

$$g \cdot \left( \sum_{x \in X} a_x e_x \right) = \sum_{x \in X} a_x e_{g \cdot x}$$

によって定まる．これを $G$ の**置換表現**という．特に $X$ として $G$ 自身を取り，$G$ をその積で作用させてできる置換表現を $G$ の置換表現といい，$R$ などとかく．

**証明** 検証容易．読者に任せる． ■

## § 1.4　有限群の線形表現における指導原理

**表現論は数学を包摂する．**

今まで述べてきたことをもとに，有限群の線形表現における指導原理を述べる[25]．ポイントは，完全可約性と新しい表現の作り方（のうちでも特にテンソル積表現）である．

まだ証明はしていなかったが，標数 0 の代数的閉体上で考える範囲では，有限群 $G$ の表現は完全可約，すなわち，既約表現の直和に分解する．従って，有限群 $G$ が与えられたとき，そのすべての既約表現を決定することが重要である．これが指導原理の筆頭に来ることは間違いない．

**指導原理 1.4.1.** 有限群 G が与えられたとき，その既約表現を決定せよ．

次に，群 $G$ の表現が何か与えられたときを考えよう．すでに既約表現の分類が終わっているとすれば，与えられた表現を既約表現の直和に分解したいと思うのは自然である．それが次の指導原理となる．

**指導原理 1.4.2.** 有限群 G の表現が与えられたとき，その既約表現への直和分解を与える方法を与えよ．

既約表現の分類が完成していても，ある表現の既約表現への直和分解は自明には出てこない[26]．先走って言えば，有限群の表現の場合，この 2 つの指導原理に一挙に解答を与えてくれるものが指標 (character) と呼ばれているものである．既約表現は，指標で完全に特徴付けられる．さらに，ある表現が与えられたとき，その表現の既約分解に現れる既約表現の個数は，指標の内積によって計算できる．そのことを学ぶのはまだ先のことではあるが．

さて，われわれは群 $G$ の表現から新たな表現を構成する方法をいくつか学んだ．特にテンソル積表現は重要である．一般に，群 $G$ の既約表現を 2 つテンソル積したものは既約ではなかった．ではもとの 2 つの表現の情報からテンソル積表現の既約分解を求めることができるだろうか．それが次の指導原理である．

**指導原理 1.4.3.** 有限群 G の与えられた表現から新たな表現を構成するとき，それがどのような既約表現の直和に分解するかを決定する方法を与えよ．

まだ述べていないが，表現の誘導と制限と呼ばれるものがある．これは，群 $G$ とその部分群 $H$ とが与えられたとき，$H$ の表現から $G$ の表現を構成したり（誘導），$G$ の表現から $H$ の表現を構成する（制限）方法である．この場合も，既約表現の誘導は必ずしも既約とは限らないし，既約表現の制限は一般に既約とは限らない．このような表現の構成に対しても，新しく構成された表現の既約分解を与える方法が必要である．その意味も上の指導原理は含まれている．

この指導原理も，有限群の表現の場合には，指標の理論が本質的に解決してくれる[27]．有限群の表現においては，指標の理論がその中核をなしているのである．

**Remark 1.4.4.**

上の指導原理の中には，例えば次のような問題意識が含まれていないことを疑問に思われるかもしれ

[25] これは [FH] によった．また，この指導原理は，単に有限群の線形表現だけに限らず，Lie 群や Lie 環の表現においてもまず最初にくる目標である．

[26] 例えば，Lie 環の表現論を既に知っておられる方は，半単純 Lie 環の既約表現が最高ウェイトで分類されることを知っておられるだろう．しかし，それがわかっても，具体的な表現の分解がわかるわけではない．どの最高ウェイトをもった既約表現が含まれているかは，計算してみなければわからない．

[27] 例えば，半単純 Lie 環の表現論においては，もとの 2 つの表現の最高ウェイトから，テンソル積表現に現れる既約表現の最高ウェイトを計算する公式がある．$\mathfrak{sl}_2$ の表現論では，Clebsh-Gordan の法則と呼ばれている．

ない．

与えられた群 $G$ の既約表現を「具体的に」記述せよ．

「具体的に」の部分が曖昧であるが，表現の指標だけを見ていては表現がわかったとは言えないのではないかと感じられるかもしれない．例えば,「群 $G$ の既約表現に対して，ある表現空間 $V$ をとって表現を書き下せ.」というようなことを考える必要がないのかということである．すでに対称群の置換表現，すなわち $\mathfrak{S}_n$ が $n$ 変数多項式環に成分の置換で作用することによってできる表現をすでに例で見ていた.（これは既約ではなかったが.）すべての既約表現をこのような具体的な群の作用の形で（意味のある）実現を見つけることが，上の問題意識である．この観点は重要である．指標の理論は，確かに有限群の既約表現を完全に分類してくれるのだが，上の意味での「意味ある実現」については何も語ってくれない．むしろそれはより難しい問題だと言える．しかし，例えば後の章でみるように，対称群の既約表現の実現は，単に指標の理論だけではなく，具体的に記述できる．そうした点も重要であることは間違いがない[28]．むしろそういう実現を探すことが面白い（＝表現論を豊かにしてくれる？）わけだが[29]，ここで述べた指導原理はあえて簡潔に表現論の中核となる目標を述べている．

[28]例えば，半単純 Lie 環の表現論において，ある最高ウェイトを持つ既約表現を実現するのはそう簡単ではない．例えば，$\mathfrak{sl}_n$ の表現論などでは，それが可能であるが，一般の半単純 Lie 環では難しい．また，コンパクト Lie 群の表現論においては，Borel-Weil 理論と呼ばれるものが存在して，表現を旗多様体上の正則直線束の切断として実現する方法が良く知られている．

[29]例えば，[横田] などを見ると，一般論（Peter-Weyl の定理）に頼らずに，コンパクト群の表現を具体的に表示している．このような表現論も面白い．

# 2

# 有限群の表現—基礎理論—

## § 2.1　完全可約性

以下，この paper を通じて，体は複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする．

有限群の $\mathbb{C}$ 上の表現は，ユニタリ化可能であり，さらに完全可約である．まずこれを証明する．次に Schur の補題を示し，表現空間の標準分解と重複度について説明する．

完全可約性を示すには，次の補題が示せればよい．

**補題 2.1.1.**　$(\rho, V)$ を $G$ の表現とし，$W$ を $V$ の部分表現（$G$-不変部分空間）であるとする．このとき，$V = W \oplus W'$ なる $W$ の $\underline{G\text{-不変な}}$ 補空間 $W'$ がとれる．

**証明**　$V = W \oplus U$ なる $W$ の補空間 $U$ を任意に取る．このとき，$p : V \to W$ なる射影子を取り，これを用いて，

$$p_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \rho_\sigma \circ p \circ \rho_\sigma^{-1}$$

を定義する．このとき，$p : V \to W$ かつ $p(W) \subset W$ であることから，$p_0 : V \to W$．さて，ここで $W$ が $G$-不変であることに注意すれば，$\rho_\sigma^{-1} w \in W$ であるから，$p \circ \rho_\sigma^{-1}(w) = \rho_\sigma^{-1}$ となるから，

$$p_0(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \rho_\sigma \circ \rho_\sigma^{-1}(w) = w$$

となる．従って，$p_0$ は $V \to W$ なる射影子であり，これに対応して $W$ の補空間

$$W^\perp = \{v \in V | p_0(v) = 0\}$$

が定まる．このとき，

$$\rho_\tau \circ p_0 \circ \rho_\tau^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \rho_\tau \circ \rho_\sigma \circ p \circ \rho_\sigma^{-1} \circ \rho_\tau^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \rho_{\tau\sigma} \circ p \circ \rho_{\tau\sigma}^{-1} = p_0$$

となるので，$\rho_\tau \circ p_0 = p_0 \circ \rho_\tau$ となる．すると $w' \in W^\perp$ に対し，

$$p_0 \circ \rho_\tau(w') = \rho_\tau \circ p_0(w') = 0$$

となるので，$\rho_\tau(v) \in W^\perp$．従って，$W^\perp$ は $G$-不変部分空間となる．■

**定理 2.1.2.**　有限群 $G$ の体 $\mathbb{C}$ 上の表現は完全可約である．

**Remark 2.1.3.**　補題 2.1.1 の証明においては，$1/|G|$ なる商があったため，もし $|G|$ が体 $\mathbb{K}$ の標数を

割り切るようなことがあるとまずい．そうでなければ，上の証明がそのまま通用する．従って，$|G|$ が $\mathfrak{K}$ の標数を割り切らぬときには，$G$ の表現は完全可約である．一般に，正標数の体上の表現は，モジュラー表現と呼ばれており，特に $|G|$ の位数が標数で割り切れる場合には，以下の議論のように簡単にはいかない．例えば,『有限群の表現』（津島・永尾：裳華房）が和書の文献として挙げられる．

補題 2.1.1 の証明においては，部分空間への射影子を用いて証明した．これは，次のようにしても証明できる．key word は「ユニタリ化」である．

**命題 2.1.4.** 体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V$ には $G$-不変な内積が定まる．すなわち，$V$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ であって，$\forall x, y \in V$ に対して，$\langle \rho_g x, \rho_g y\rangle = \langle x, y\rangle$ をみたすものが存在する．

**証明** まず $V$ に $G$-不変とは限らない内積 $(\ ,\ )$ を導入しておく．これを利用して，

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_g x, \rho_g y)$$

と定義する．これは，明らかに $V$ 上の $G$-不変な内積を与えている． ■

**系 2.1.5.** 有限群 $G$ の表現 $(\rho, V)$ に対し，$V$ に $G$-不変な内積を導入する．このとき，$V$ の $G$-不変な部分空間 $W$ の直交補空間 $W^{\perp}$ は $G$-不変な部分空間である．従って，$G$ の任意の表現は完全可約である．

## § 2.2 Schur の補題

次に,「Schur の補題」と呼ばれる基本的な命題を証明しよう．

**命題 2.2.1.** ［**Schur の補題**］
$V, W$ を $G$ の既約表現とし，$\varphi : V \to W$ を $G$-線形写像とするとき，
(1) $\varphi$ は同型であるかまたは 0-写像である．
(2) もし $V = W$ であるとすれば，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して，$\varphi = \lambda \cdot I$ とかける．$I$ は恒等写像を表す．

**証明**
(1) $\varphi : V \to W$ に対して，$\mathrm{Ker}\,\varphi, \mathrm{Im}\,\varphi$ はそれぞれ $V, W$ の $G$-不変部分空間であることに注意する．$V$ が既約であることに注意すれば，まず $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ または $V$．$\{0\}$ なら 0-写像．$V$ なら $\varphi$ は単射．その像 $\mathrm{Im}\,\varphi = \{0\}$ または $W$ であるが，$V \neq \{0\}$ であるから，$\mathrm{Im}\,\varphi = W$ となって，全射．以上から同型が従う．
(2) $\mathbb{C}$ 上で $\varphi$ の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ がとれる．このとき，固有ベクトル $v \neq 0$ が存在して，$(\varphi - \lambda \cdot I)v = 0$. すると $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot I) \neq \{0\}$．$V$ の既約性から $\varphi - \lambda \cdot I = 0$．つまり $\varphi = \lambda \cdot I$. ■

このことを利用すると，次の基本的な命題が得られる．

**命題 2.2.2.** 可換群 $G$ の既約表現はすべて 1 次元.

**証明** $(\rho, V)$ を $G$ の表現とすると，$G$ の可換性から，$\forall g \in G$ に対して，$\rho_g : V \to V$ は $G$-線形写像である．すると Schur の補題から，$\rho_g = \lambda_g \cdot I$．すると $V$ の基底を上手くとれば，$\rho_g$ は同時に対角化されるので，1 次元の不変部分空間が必ず存在する．よって，$G$ の既約表現はすべて 1 次元である． ■

## § 2.3　標準分解

次に，標準分解と呼ばれる概念を導入する．一般に，$G$ の表現は完全可約だが，既約表現の直和への分解は一意的であるとは限らない．しかし，次の意味で既約分解にも「一意性」が成り立つ．

**定理 2.3.1.**　$G$ の表現 $V$ がある既約分解 $V = \oplus U_i$ を持つとき，$U_i$ の中で互いに同型なものを集めることで，$V = \oplus V(V_k)$ なる直和分解が得られる．ここで $V(V_k) = \oplus_{U_i \cong V_k} U_i$ である．こうして得られる直和分解は，もとの既約分解の仕方によらず一意的に定まる．これを $V$ の**標準分解**という．このことから，$V$ に含まれる既約表現 $V_k$ の個数（**重複度**という）も一意的に定まる．

**証明**　$V = \oplus U_i = \oplus W_j$ を 2 通りの既約分解とする．それぞれから標準分解をつくる．すなわち，$G$ の既約表現の同値類の代表元 $\{V_k\}$ を取り，

$$V(V_k) = \oplus_{U_i \cong V_k} U_i, V'(V_k) = \oplus_{W_j \cong V_k} W_j$$

と定義し，$V = \oplus_k V(V_k) = \oplus_k V'(V_k)$ なる直和分解を得る．$U_i, W_j$ の順序を入れ替えて，$V(V_1) = U_1 \oplus \cdots \oplus U_p, V'(V_1) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_q$ としてよい．このとき，

$$\pi_j : V \to W_j$$

なる射影子を考え，これを $U_i$ に制限した $\pi_j|_{U_i} = \theta_{ij}$ とおく．このとき，$1 \leq i \leq p$ であれば，$j > q$ なる $\theta_j$ は 0 写像でなければならない．実際，これは $G$-線形写像であるから Schur の補題によって同型か 0-写像でなければならないが，いま $U_i$ と $W_j$ とは非同値（$1 \leq i \leq p, j > q$ に注意.）であるから，同型ではありえない．よって 0-写像でしかない．

すると，$V$ の元 $u_i \in U_i$ を考えると，$u$ を $W_j$ の直和分解に対応した分解は，

$$u = \pi_1(u) + \pi_2(u) + \cdots \pi_q(u) + \pi_{q+1}(u) + \cdots$$

となる．ところが $u \in U_i$ であるから，

$$u = \theta_{i1}(u) + \theta_{i2}u + \cdots + \theta_{iq}u + \theta_{i,q+1}(u) + \cdots$$

となる．ここで $\theta_{ij} = 0$ $(1 \leq i \leq p, j > q)$ に注意すれば，

$$u = \theta_{i1}(u) + \theta_{i2}u + \cdots + \theta_{iq}u + \theta_{i,q+1}(u) \in V'(V_1)$$

となる．よって，$1 \leq i \leq p$ に対して $U_i \subset V'(V_1)$．特に，$V(V_1) = \oplus_{i=1}^{p} U_i \subset V'(V_1)$．逆も同様にいえるから $V(V_1) \cong V'(V_1)$．他も同様にして，$V(V_k) \cong V'(V_k)$ となる．よって，標準分解および重複度は $V$ の既約分解によらず一意的に定まる．■

## § 2.4　多元環の表現論からみた有限群の表現

# 3 指標の理論

ここでは指標の概念を導入し，既約指標が $G$ 上の類関数のなす空間の正規直交基底であることを主定理として証明し，指標の第 1，第 2 直交関係式を導く．

## § 3.1 指標

**定義 3.1.1.** $G$ の表現 $(\rho, V)$ に対して，$\chi_V : G \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}(\rho_g)$$

と定める．これを $(\rho, V)$ の**指標**と言う．

**命題 3.1.2.** 有限群 $G$ の表現 $(\rho, V)$ の指標 $\chi_V$ は以下を満たす．

(1) $\chi_V$ は $G$ の共役類の上では一定値をとる．

(2) $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.

**証明** $\chi_V(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_{hgh^{-1}}) = \mathrm{tr}(\rho_h \rho_g \rho_h^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_g) = \chi_V(g)$ となる．また，$\rho_g$ の固有値を $\lambda_i$ とすれば，$\rho_g$ の位数が有限であることから，これは 1 のベキ根である．すると $\overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$．よって，$\overline{\chi_V(g)} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \sum_i {\lambda_i}^{-1} = \mathrm{tr}(\rho_g^{-1}) = \chi_V(g^{-1})$. ■

**定義 3.1.3.** $G$ 上の関数であって，共役類の上で一定値を取るような関数を $G$ 上の**類関数**という．特に表現 $V$ の指標 $\chi_V$ は $G$ 上の類関数である．

**命題 3.1.4.** $V, W$ を $G$ の表現とするとき，以下が成り立つ．

(1) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

(2) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$.

(3) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

**証明** 各表現の行列表示を見れば検証容易．読者に任せる． ■

## § 3.2 指標から見る有限群の線形表現

さて，ここで $G$ の表現 $(\rho, U)$ に対して，

$$U^G = \{v \in V | \rho_g(v) = v\}$$

と定義する．このとき，

$$\varphi := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g \in \mathrm{End}\,(U)$$

と定義する．

**補題 3.2.1.** $\varphi : U \to U^G$ が射影を与える．

**証明** 実際，$U \subset \mathrm{Im}(\varphi) \ni u = \varphi(v)$ とすると，

$$\rho_h(u) = \rho_h\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g(v)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{hg}(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g(v) = \varphi(v) = u$$

となるから，$\mathrm{Im}(\varphi) \subset U^G$．更に，$u \in U^G$ とすると，

$$\varphi(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}u = u$$

となる．従って，$U^G \subset \mathrm{Im}\,\varphi$．また，射影子であることも示された． ■

**補題 3.2.2.**

$$\dim(U^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g).$$

**証明** 実際，$U^G$ の基底をひとつ固定し，それを拡張して $U$ の基底をつくっておく．すると，$\dim(U^G) = \mathrm{tr}(\varphi)$ となる．よって，

$$\dim(U^G) = \mathrm{tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\rho_g = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g).$$

■

**補題 3.2.3.**

$$\mathrm{Hom}(V,W)^G = \{f : V \to W : G\text{-線形写像}\}.$$

**証明** $\mathrm{Hom}(V,W)$ への $G$ の作用は，$g\cdot\varphi(v) = g\cdot(\varphi(g^{-1}\cdot v))$ であった．そこで，$g\cdot\varphi = \varphi$ であるとすると，$G$ の作用の定め方（可換図式参照）から，$\rho_g\cdot\varphi = \varphi\circ\rho_g$ である．逆に $G$-線形写像であれば，やはり可換図式から $g\cdot\varphi = \varphi$． ■

さて，ここで，$V, W$ を既約表現とする．すると，Schur の補題から，

$$\dim(\mathrm{Hom}(V,W)^G) = \begin{cases} 1 & V \cong_G W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

である．すると上の補題から，

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \dim(\mathrm{Hom}(V,W)^G) = \begin{cases} 1 & V \cong_G W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

となる．ところが，$\mathrm{Hom}(V,W) \cong_G V^* \otimes W$ であったから，その指標は，

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_{V^*}(g)\cdot\chi_W(g) = \overline{\chi_V(g)}\cdot\chi_W(g)$$

である．よって，次の定理が得られた．

**定理 3.2.4.** $V, W$ を $G$ の既約表現とするとき，

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \begin{cases} 1 & V \cong_G W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

ここで，$G$ 上の関数 $a, b : G \to \mathbb{C}$ に対して，内積

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{b(g)}a(g)$$

を導入した．特に $G$ 上の類関数の空間を考えることが重要である．

上記の定理から以下の系が導かれる．

**系 3.2.5.**

(1) 既約表現の指標は正規直交系をなす．

(2) $G$ の表現 $V$ が既約であることと $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ であることとは同値．

(3) 表現 $V$ に含まれる既約表現 $V_i$ の個数，すなわち $V_i$ の重複度 $a_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$．

(4) $G$ の正則表現には，どんな既約表現もその次元の個数だけ現れる．

(5) $|G| = \sum_{V_i\text{は既約表現すべてを動く}}(\dim(V_i))^2$．

**証明**

(1) すでに示した．

(2) $G$ の表現 $V$ の指標は，$V$ の標準分解を $V = \oplus V_i^{\oplus a_i}$ とすれば，$\chi_V = \sum_{V_i\text{はすべての既約表現を動く}} a_i\chi_{V_i}$ とかける．すると，$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_i a_i^2$ であるから，既約であることと 1 であることとは同値．

(3) 標準分解と上のことから明らか．

(4) $G$ の正則表現 $R$ を考えると，$\chi_R(g)$ は $g \neq e$ のとき 0，$g = e$ のとき $\chi_R(g) = |G|$ である．$R$ の標準分解を $R = \oplus_i V_i^{\oplus a_i}$ とすると，

$$a_i = \langle \chi_{V_i}, \chi_R \rangle = \frac{1}{|G|}(\chi_{V_i}(e)\cdot|G|) = \dim(V_i)$$

となる．

(5) $|G| = \dim(R) = \sum_i(\dim(V_i))^2$ となる． ■

ここまでで $G$ の既約指標についていろいろな性質がわかったが，まだその個数はわかっていない．既約指標が類関数の空間の中で正規直交系であることまでわかっていた．実はこれが正規直交基底であることを示せれば，類関数の空間の次元と既約指標の個数が等しいことがわかる．類関数は共役類の上で一定値を取るから，その次元は共役類の個数に等しい．これが次の目標である．

**補題 3.2.6.** $a : G \to \mathbb{C}$ と $G$ の表現 $(\rho, V)$ とに対し，

$$\varphi_{a,V} = \sum_{g\in G} a(g)\cdot\rho_g : V \to V$$

を考える．これが，$G$ のどんな表現に対しても $G$-線形写像であることと $a$ が $G$ 上の類関数であることとは必要十分である．

**証明**　まず $a$ が $G$ 上の類関数であるとする．このとき，

$$\begin{aligned}
\varphi_{a,V}(\rho_h(v)) &= \sum_{g\in G} a(g)\rho_g(\rho_h(v)) \\
&= \sum_{g\in G} a(hgh^{-1})\rho_{hgh^{-1}}(\rho_h(v)) \quad (\because\ g \text{ を } hgh^{-1} \text{に組換え.}) \\
&= \rho_h\left(\sum_{g\in G} a(hgh^{-1})\rho_g(v)\right) \\
&= \rho_h\left(\sum_{g\in G} a(g)\rho_g(v)\right) \quad (\because\ a \text{ は類関数.}) \\
&= \rho_h\cdot\varphi_{a,V}(v)
\end{aligned}$$

となって，$G$-線形写像.

次に，$a$ が類関数ではないとする．すなわち，ある $h_1, h_2, h \in G$ が存在して，$h^{-1}h_1h = h_2$ かつ $a(h_1) \neq a(h_2)$ であるとする．そこで，$G$ の正則表現 $R$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
\rho_h\varphi_{a,V}(e_h^{-1}) &= \rho_h(\sum_{a\in G} a(g)\rho_g(e_h^{-1})) \\
&= \sum_{g\in G} a(g)e_{hgh^{-1}} \\
&= \sum_{g\in G} a(h^{-1}gh)e_g \quad (\because\ hgh^{-1}\text{を } g \text{ に組換え.}) \\
\varphi_{a,V}\rho_h(e_h^{-1}) &= \sum_{g\in G} a(g)\rho_g(e_1) \\
&= \sum_{g\in G} a(g)e_g
\end{aligned}$$

となる．ここで $\{e_g | g\in G\}$ は一次独立であることから，$\alpha(h_1) \neq \alpha(h^{-1}h_1h) = \alpha(h_2)$ であることに注意すると，$\varphi_{a,V}$ は $G$-線形写像ではない．■

**定理 3.2.7.**　$G$ 上の既約指標は $G$ 上の類関数の空間の中の正規直交基底をなす．

**証明**　基底であることだけを示せばよい．そこで，$G$ の任意の既約指標に対して直交する類関数 $a$ が $0$ 写像であることを示せばよい．すべての指標は既約指標の一次結合でかけるので，$a$ はすべての指標と直交する．いま $a$ が類関数であるから，$\varphi_{a,V}$ は $G$-線形写像であり，これは Schur の補題から，$\varphi_{a,V} = \lambda\cdot I_V$ の形にかける．そこで，$n = \dim(V)$ とすると，

$$\begin{aligned}
n\lambda &= \mathrm{tr}(\varphi_{a,V}) \\
&= \sum_{g\in G} a(g)\,\mathrm{tr}(\rho_g) \\
&= \sum_{g\in G} a(g)\chi_V(g) \\
&= |G|\overline{\langle a, \chi_{V^*}\rangle} \quad (\because\ \chi_V(g) = \overline{\chi_{V^*}(g)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．従って，$n \neq 0$ より $\lambda = 0$ が任意の表現 $V$ に対して成り立つ．

特に $V$ として $G$ の正則表現 $R$ をとると，

$$0 = \varphi_{a,V}(e_1) = \sum_{g\in G} a(g)\rho_g(e_1) = \sum_{g\in G} a(g)e_g$$

となる．すると，$\{e_g | g \in G\}$ が一次独立であることに注意すれば，任意の $g \in G$ に対して，$a(g) = 0$ でなければならない． ■

**系 3.2.8.** $G$ の既約表現の同型類の個数は $G$ の共役類の数に等しい．

## § 3.3 指標の直交関係

次に，指標の直交関係を導いてこの節を終えよう．

**定理 3.3.1.**

(1) $\chi_1, \chi_2$ を有限群 $G$ の既約指標とすると，

$$\sum_{g \in G} \chi_1(g)\chi_2(g^{-1}) = \begin{cases} |G| & (\chi_1 \cong \chi_2) \\ 0 & (\chi_1 \ncong \chi_2) \end{cases}$$

(2) $X(G)$ を $G$ の既約指標の全体とするとき，

$$\sum_{\chi \in X(G)} \chi(g)\chi(h^{-1}) = \begin{cases} |C_G(g)| & (g \sim h) \\ 0 & (g \not\sim h) \end{cases}$$

**証明** (1) はすでに示した．

(2) を示すために，

$$f_g(h) = \begin{cases} 1 & (g \sim h) \\ 0 & (g \not\sim h) \end{cases}$$

なる類関数を考える．前定理より，$f_g = \sum_i \lambda_i \chi_i$ とかける．このとき，

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \langle f_g, \chi_i \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{f_g(h)} \chi_i(h) \quad (\because \text{ 内積の定義.}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in C(g)} \chi_i(h) \quad (\because \ f_g(h) \text{ は } g \sim h \text{ であるときのみ } 1\text{．残りは } 0.) \\ &= \frac{|C(g)|}{|G|} \chi_i(g) \quad (\because \ \chi_i \text{は類関数.}) \end{aligned}$$

となるので，

$$f_g(x) = \sum_i \lambda_i \chi_i(x) = \frac{|C(g)|}{|G|} \sum_i \chi_i(g)\chi_i(x)$$

である．従って，

$$\sum_{\chi \in X(G)} \chi(g)\chi(x) = \frac{|G|}{|C(g)|} f_g(x) = \begin{cases} |C_G(g)| & g \sim x \\ 0 & g \not\sim x \end{cases}$$

となって求める直交関係式が導けた． ■

## § 3.4 指標表

# 4 誘導表現

この章では，部分群の表現から大きな群の表現を構成する方法，すなわち誘導表現について述べる．すでにいくつかの指標表を書く段で，表現の制限という考え方については陰に陽に触れてきた．誘導表現は，Frobenius の相互律と呼ばれるものによって丁度対をなしている．これも有限群論独特の手法というわけではなく，Lie 群の表現などを考える場合には基本的な概念である．また物理学においては，表現の誘導と制限の分岐則が対称性の破れを記述するとされているようである．

ところで，誘導表現の導入法については，書物によっていくつかの方法がある．もっとも素朴な方法は，例えば [近藤] の前半のように直接表現行列を与える方法がある．これは表現を直接与えるという意味で簡単に計算することが可能である反面，本質がなかなか見えない．もうひとつの方法は，関数空間への作用という形で定式化する（ある種幾何的な）方法であり，これは Lie 群の表現を考える場合には，ファイバー束の切断の空間への作用として定式化することに相当し重要な見方である．もうひとつは，半単純環論からの定式化がある．こちらは Hom を利用する．もっとも多く用いられているのが，表現空間をテンソル積を利用して与える方法である．この章でもさしあたってはその方法を用いて定式化する．

有限群の表現を見る場合には，具体的に表現を構成するよりも指標で見ることで多くのことがわかってくるというのが今までの考察であった．誘導表現についても，部分群の表現から誘導された表現の指標を簡単な公式で計算できる．これを用いて表現の誘導と制限の関係を統制している Froenius の相互律を証明する．

## § 4.1　表現の誘導と制限

まず，有限群の表現は群環の表現と等価であったことを記憶にとどめておこう．これを利用して非可換環上の加群のテンソル積として表現空間を実現するのである．

**定義 4.1.1.**　有限群 $G$ とその部分群 $H$，および $H$ の表現 $(\rho, V)$ とが与えられているとする．このとき，$\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} V$ は自然に左 $\mathbb{K}[G]$-加群となる．これを表現空間とする $G$ の表現を $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ とかいて，$(\rho, V)$ から誘導された $G$ の表現という．

まず表現空間の <u>ベクトル空間としての次元</u>（すなわち表現の次元）を計算する必要がある．

**補題 4.1.2.**　$\mathrm{Ind}_H^G(V)$ の次元は，$[G:H]\dim(V)$ で与えられる．ここで $[G:H]$ は $H$ の $G$ における指数，すなわち $|G/H|$ に他ならない．

[証明]　まず群 $G$ が左剰余類分解 $x_1H + \cdots + x_mH$ を持つとき，その群環も直和分解 $\mathbb{K}[G] = x_1\mathbb{K}[H] \oplus$

$\cdots \oplus x_m \mathbb{K}[H]$ を持つことに注意する．このとき，テンソル積と直和の可換性に注意すると，

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} V &\cong (x_1 \mathbb{K}[H] \otimes V) \oplus \cdots \oplus (x_m \mathbb{K}[H] \otimes V) \\ &\cong (x_1 \otimes V) \oplus \cdots \oplus (x_m \otimes V) \quad (\because\ \mathbb{K}[H] \text{ 上のテンソル積}) \\ &\cong V^{\oplus [G:H]}\end{aligned}$$

となる．（最初の 2 つは $\mathbb{K}[G]$ したがって $G$-加群としての同型だが，最後はベクトル空間としての同型であることに注意.）よってそのベクトル空間としての次元は，$[G:H] \dim V$ になる． ■

次の補題はやや技術的なものである．

**補題 4.1.3.**
(1) $V = V_1 \oplus V_2$ なる直和表現のとき，その誘導表現について

$$\mathrm{Ind}_H^G(V_1 \oplus V_2) = \mathrm{Ind}_H^G(V_1) \oplus \mathrm{Ind}_H^G(V_2)$$

が成り立つ.
(2) $\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Ind}_K^H(V) = \mathrm{Ind}_K^G(V)$ が成り立つ.

[証明] (1) はテンソル積と直和の可換性．(2) はテンソル積の結合性． ■

ここまで，表現空間を抽象的に与えることで誘導表現を定義してきた．しかし，具体的にどんな表現になるのかについては，これだけからは何もわからない．そこで，以下少し本当に具体的に誘導表現を求めてみよう.

**例 4.1.4.** ［$\mathfrak{S}_3$ の表現を $\mathfrak{S}_4$ に誘導するとどうなるか (I).］

## § 4.2 誘導指標

誘導表現をほんとうに具体的に構成することは案外面倒である．そこで部分群の表現の指標から誘導表現の指標（誘導指標という）を計算する公式をつくりたい．これは次のような形で与えることができる．これが使いやすい公式であるかどうかはあとでいろいろ例で計算する.

**定理 4.2.1.** 有限群 $G$ とその部分群 $H$，および $H$ の表現 $(\rho, V)$ から誘導される表現を $\rho^G$ とかくことにする．このときその指標は，

$$\chi_{\rho^G}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G,\, x^{-1}gx \in H} \chi_\rho(x^{-1}gx)$$

で与えられる.

[証明] ベクトル空間 $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} V$ の基底として，$\{x_i \otimes V\}_{i=1}^m$ をとる．ここで $x_i$ は $G$ の $H$ による左剰余類分解の完全代表系をひとつ固定する．このとき，$gx_i = x_k h$ なる $h \in H$ は一意的に決まるから，$g \cdot (x_i \otimes V) = x_k \otimes h \cdot V$ が $G$ の作用を与えている．このとき，$\rho^G(g)$ のトレースが指標を与えるのであるが，表現行列の対角成分は，基底のうちでも $x_i g x_i^{-1} \in H$ なる $x_i \otimes V$ 上でのみ零ではなく，それ以外

では零である．よって，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\rho^G(g) &= \sum_{x_i g x_i^{-1}\in H, x_i\text{は } G/H \text{ の完全代表系を動く}} \operatorname{tr}\rho(x_i^{-1} g x_i)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G, xgx^{-1}\in H} \operatorname{tr}\rho(xgx^{-1})\end{aligned}$$

となる．従って，定理の主張が成立する． ■

先ほど具体的に表現を計算した $\mathfrak{S}_3$ の既約表現を $\mathfrak{S}_4$ に誘導した例を今度は上の誘導指標の公式を用いて計算してみよう．

**例 4.2.2.** ［$\mathfrak{S}_3$ の表現を $\mathfrak{S}_4$ に誘導するとどうなるか (II).］

## § 4.3　Frobenius の相互律

誘導指標の公式を利用して，表現の誘導と制限を統制する Frobenius の相互律を証明しよう．この相互律は，証明を見ると誘導指標の公式を非常に形式的に運用しているだけで，何が重要なのか見えないが，非常に有用な道具である．

**定理 4.3.1.** ［Frobenius の相互律］
有限群 $G$ およびその表現 $V$，さらに $G$ の部分群 $H$ とその表現 $W$ とが与えられているとき，

$$\langle \chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_V\rangle_G = \langle \chi_W, \chi_{\mathrm{Res}_H^G V}\rangle_H$$

が成り立つ．

［証明］　指標の内積と誘導指標の公式を用いて形式的に計算する．

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_V\rangle_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Ind}_H^G}(g)\chi_V(g^{-1})\\ &= \frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in G, xgx^{-1}\in H}\chi_W(x^{-1}gx)\chi_V(g^{-1})\\ &= \frac{1}{|G||H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in H}\chi_W(y)\chi_V(xy^{-1}x^{-1})\\ &= \frac{1}{|H|}\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in H}\chi_W(y)\chi_V(y^{-1})\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\chi_W(y)\chi_V(y^{-1})\\ &= \langle \chi_W, \chi_{\mathrm{Res}_H^G V}\rangle_H\end{aligned}$$

となる． ■

まず $\mathfrak{S}_3$ と $\mathfrak{S}_4$ の間の制限-分岐則について，上記の Frobenius の相互律が成り立っていることを検証しておこう．

**例 4.3.2.** ［$\mathfrak{S}_4\backslash\mathfrak{S}_3$ 制限-分岐則］

| $\mathfrak{S}_4 \backslash \mathfrak{S}_3$ | trivial | $V_2$ | signiture |
|---|---|---|---|
| trivial | 1 | | |
| standard | 1 | 1 | |
| $\chi_3$ | | 1 | |
| stand $\otimes$ sgn | | 1 | 1 |
| signiture | | | 1 |

# 5

# 対称群の表現

# 6

# 物理・化学への応用

# A 群論の基礎（要項）

ここにまとめるのは，網羅的な群論の基礎知識では**ない**．もともと有限群の線形表現を入門的に学ぶ場合において,（有限）群論の知識自体はそれほど必要ではない．一般に，群論の教程においては，まず抽象的な群というものが定義され，部分群，正規部分群，生成系といった概念，そして「第一の山場」である剰余群と準同型定理へと向かう．さらには共役類や群の作用，可解群，ベキ零群といったことについて学び，有限群論のひとつの金字塔である Sylow の定理を学ぶ．しかし，有限群の線形表現を入門的に学ぶ場合には，まずもって群の定義，そして準同型定理までの基礎的な概念，および共役類の考え方がわかっていれば，十分である．Sylow の定理や可解群，ベキ零群，低位数の有限群の分類などにおける有限群論特有の議論について熟知している必要はない[1]．むしろ線形代数の十分な理解のほうがより肝要であると言える．もう少し言うのであれば，線形代数にくわえて，いくつかの具体的な群の取り扱いに慣れている必要があるだろう.（例えば，二面体群，対称群，交代群などの共役類の決定.）従って，ここでは，この paper を読むために必要ないくつかの群論の知識をまとめるにとどめる．

また証明については一部を省略することがある．必要ならば，参考文献に掲げた群論の教科書などを参照して欲しい．例えば，[赤尾],[TH],[近藤].

## § A.1　群・部分群・正規部分群・生成系

## § A.2　剰余群と準同型定理

## § A.3　群の作用

## § A.4　共役類

## § A.5　群の直積・半直積

[1]もちろん，これらの知識があれば，有限群の表現についてのより突っ込んだ話題について理解できるだろう．しかしそれらは入門の域からはみ出している．また，例えば群の作用についてしっていれば，表現と作用の関係について見通しが良くなるだろう．半直積群の概念について知っていれば，扱うことの出来る例が増えるだろう．

B

# Mathematical Objects

# C 有限群論への応用

ここでは，やや専門的な有限群の表現論の結果について述べる．

## § C.1　誘導表現に対する Clifford の定理・Mackey 分解

## § C.2　モジュラー表現

## § C.3　Burnside の定理

# 参考文献


[赤尾]　『線形代数と群』（赤尾和男：共立講座 21 世紀の数学）

[岩堀]　『対称群と一般線形群の表現』（岩堀長慶：岩波講座基礎数学）

[ES]　『群と表現』（江沢洋・島和久：岩波講座応用数学）

[近藤]　『群論』（近藤武：岩波講座基礎数学）

[斎藤 1]　『線形代数入門』（斎藤正彦：東京大学出版会基礎数学）

[斎藤 2]　『線形代数演習』（斎藤正彦：東京大学出版会基礎数学）

[TH]　『群論』（寺田至・原田耕一郎：岩波講座現代数学の基礎）

[平井]　『線形代数と群の表現　・　』（平井武：朝倉書店すうがくぶっくす）

[堀田]　『加群十話』（堀田良之：朝倉書店すうがくぶっくす）

[Ser]　『有限群の線形表現』（J.P. セール：岩波書店）

[Sag]　『The Symmetric Group Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions』（B.E.Sagan：GTM203）

[FH]　『Representation Theory A First Course』（W.Fulton・J.Harris：GTM129）

[JM]　『Representations and Characters of Groups』（G.James・M.Liebeck：Cambridge Mathematical Textbook）

[Mac]　『Symmetric Functions and Hall Polynomials』（I.Macdonald）

[NT]　『有限群の表現』（永尾汎・津島行男：裳華房）

[AB]　『Groups and Representations』（J.L.Alperin,Rowen.B.Bell：GTM）

[横田]　『群と表現』（横田一郎：裳華房基礎数学選書）

[OK]　『Lie 群と Lie 環 1・2』（大島利雄・小林俊行：岩波講座現代数学の基礎）