



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

Praca dyplomowa magisterska

Algorytmy przybliżone dla zagadnienia przydziału kwadratowego
Approximation algorithms for quadratic assignment problem

Autor:

Stefan Kultys

Kierunek studiów:

Automatyka i Robotyka

Opiekun pracy:

dr inż. Wojciech Chmiel

Kraków, 2014

Oświadczam, świadomy(-a) odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Serdeczne podziękowania dla bla bla bla

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Cel pracy	8
1.2. Zawartość pracy	8
2. Zagadnienie przydziału kwadratowego	11
2.1. Opis problemu	11
2.2. Obszary zastosowań	11
2.3. Model matematyczny	12
2.4. Złożoność obliczeniowa	13
3. Algorytmy przybliżone	15
3.1. Particle Swarm Optimization	16
3.2. Algorytm Taboo Search	16
3.3. Algorytm mrówkowy	16
3.4. Algorytm ewolucyjny	16
4. Zastosowanie algorytmu quantum EA dla zagadnienia QAP	17
5. Modyfikacja algorytmu quatum QAP	19
6. Aplikacja rozwiązująca problem przydziału kwadratowego z wykorzystaniem kwantowego algorytmu ewolucyjnego	21
7. Metodyka eksperymentów	23
7.1. Instancje testowe	23
7.2. Scenariusze testowe	23
8. Eksperymenty obliczeniowe	25
9. Rezultaty działania algorytmu dla oraz przeprowadzone testy	27
10. Analiza uzyskanych wyników	29
11. Podsumowanie i wnioski	31

1. Wstęp

Nadejście rewolucji przemysłowej spowodowało powstanie wielkiej liczby firm, przedsiębiorstw, które były dużo większe niż znane wcześniej zakłady rzemieślnicze. Ich rozmiar powodował również rozrost złożoności problemów związanych z organizacją tychże firm. W związku z kompleksowością pojawił się problem jak najlepszego przydziału dostępnych zasobów, najwłaściwszej organizacji pracy. Zaistniała więc potrzeba stworzenia różnych metod, sposobów, dzięki którym można by powyższe problemy w jakiś sposób rozwiązać. Ta potrzeba doprowadziła do powstania badań operacyjnych.

Chociaż początki badań operacyjnych faktycznie związane są z rewolucją przemysłową, to jednak pojęcie badań operacyjnych, które znamy obecnie, związane jest z działaniami podejmowanymi przez agencje wojskowe już na początku drugiej wojny światowej. Można by stwierdzić, że pewną ironią losu jest fakt, iż wiele wykorzystywanych dzisiaj odkryć i wynalazków, które bardzo ułatwiają nam codziennie życie, zostało powołanych do życia w związku z działaniami, które najczęściej kojarzą się z cierpieniem i przemocą. Brytyjskie i amerykańskie organizacje wojskowe zatrudniły ogromną liczbę naukowców, by ci wdrożyli naukowe podejście do spraw związanych z efektywnym zbrojeniem się, zarządzaniem zasobami oraz taktycznymi i strategicznymi problemami związanymi z prowadzeniem działań wojennych.

Mówi się, że podjęte wysiłki miały duży wpływ na takie znane wydarzenia jak Bitwa o Anglię, czy też Bitwa o Atlantyk.

Sukces, jaki odniosły badania operacyjne w wojskowości, zachęcił ludzi związanych z przemysłem do zaadaptowania ich również w samym przemyśle. Ożywienie w gospodarce, spowodowane zakończeniem wojny, doprowadziło do wzrostu złożoności działalności firm, a więc badania operacyjne idealnie nadawały się jako narzędzie wspierające organizację i zarządzanie tymi przedsiębiorstwami.

Niewątpliwie, następujący szybki rozwój badań operacyjnych miał swą przyczynę w tym, że wielu naukowców, którzy parali się nimi podczas wojny, szukając pracy w swojej branży, chętnie zajęło się dalszymi studiami nad badaniami operacyjnymi w dziedzinach związanych nie tylko z wojskowością. Oczywiście nie oznaczało to, że wojsko całkowicie zrezygnowało z badań operacyjnych. Również postęp związany z powstaniem komputerów dał odpowiednie narzędzia do analizy coraz bardziej złożonych problemów. Wiele problemów związanych z podejmowaniem decyzji, wyborem najlepszego rozwiązania można było rozwiązać podpierając się matematycznym modelem. Mając więc problem w sformalizowanej postaci można zaproponować algorytm, który rozwiąże dane zagadnienie. Sam algorytm jako ciąg kolejnych instrukcji, które należy wykonać, by osiągnąć dany cel, bardzo dobrze nadaje się do

zaimplementowania i wykonania na komputerze. Coraz szybsze komputery o coraz pojemniejszych pamięciach, a także wykorzystanie technik programowania równoległego i współbieżnego pozwalają na rozwiązywanie coraz bardziej złożonych problemów w rozsądnym czasie. Z czasem więc zaczęły się pojawiać kolejne algorytmy, ale też nowe problemy. Również dokonywane odkrycia naukowe pozwoliły na wykorzystanie występujących w naturze procesów do tworzenia nowatorskich metod rozwiązywania skomplikowanych zagadnień.

Niestety, istnieje wiele problemów, w przypadku których można jedynie powiedzieć, że mają optymalne rozwiązanie, nie da się jednak znaleźć go przy wykorzystaniu obecnie dostępnej technologii. Poprzez oszacowanie złożoności obliczeniowej algorytmów można tylko stwierdzić, że potrzebny czas do znalezienia rozwiązania problemu przy ich wykorzystaniu jest niejednokrotnie dłuższy niż przeciętny czas życia człowieka. Przykładem takiego zagadnienia jest tzw. problem przydziału kwadratowego, polegającego na przydziale pewnej liczby placówek do takiej samej liczby miejsc. Wynika z tego, że dla n placówek możliwe jest w sumie $n!$ wszystkich permutacji. Wraz ze wzrostem liczby placówek, które należy przydzielić, ilość możliwych rozwiązań rośnie bardzo szybko. Już dla stosunkowo małej ilości placówek możliwa jest ogromna liczba rozwiązań. Istnieje więc wiele algorytmów przybliżonych, inaczej nazywanych aproksymujących, które znajdują jedynie przybliżone rozwiązanie postawionego problemu. Nie oznacza to jednak, że zwrócone przez algorytm rozwiązanie nie może być faktycznie optymalne, jednak nie da się przeważnie tego sprawdzić.

Jak już zostało to nadmienione wyżej, istnieje wiele algorytmów wykorzystujących analogie do zachowań występujących w przyrodzie. Przykładem są algorytmy genetyczne, których działanie wzorowane jest na ewolucji biologicznej - spośród znalezionych w danym pokoleniu rozwiązań, wybierane są najlepsze z nich (według pewnych ustalonych dla danego problemu kryteriów), traktowane są jako rodzice dla następnego pokolenia, które dziedziczy po rodzicach ich cechy. Wykorzystywane są również różnego rodzaju operatory mutacji, katastrofy itp.

1.1. Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest dokonanie przeglądu wybranych algorytmów przybliżonych, ich wad i zalet oraz przedstawienie ich wykorzystania w kontekście problemu przydziału kwadratowego. Następnie, przy użyciu specjalnie napisanej na potrzeby pracy aplikacji, która rozwiązuje problem przydziału kwadratowego, należy zaprezentować rezultaty przeprowadzonych eksperymentów oraz opisać zastosowane scenariusze testowe i dokonać analizy otrzymanych wyników.

1.2. Zawartość pracy

Rozdział nr 2 zawiera opis problemu przydziału kwadratowego, obszar jego zastosowań i jego model matematyczny. Rozdziały od trzeciego do piątego poświęcone są wybranym algorytmom przybliżonym, ich wadom i zaletom. Opisane są sposoby działania, oraz to w jaki sposób mogą być wykorzystane

do rozwiązania problemu QAP. Tematyka następnych rozdziałów związana jest z napisaną na potrzeby niniejszej pracy aplikacją rozwiązującą problem przydziału kwadratowego przy zastosowaniu algorytmu genetycznego i jego kwantowej modyfikacji. Przedstawione są przeprowadzone testy, opisane są wybrane instancje testowe, oraz dokonana jest analiza uzyskanych rezultatów. Ostatnio rozdział poświęcony jest na podsumowanie całej pracy i wnioskom z niej płynącym.

2. Zagadnienie przydziału kwadratowego

2.1. Opis problemu

Zagadnienie przydział kwadratowego (Qadratic Assignment Problem - QAP) jest jednym najtrudniejszych problemów optymalizacji kombinatorycznej. Należy on klasy problemów NP - trudnych i dla rozmiarów o wartości większej niż 30 wymagane jest stosowanie algorytmów przybliżonych w celu jego rozwiązania. Zagadnienia przydziału kwadratowego zostało przedstawione przez Koopmansa i Beckmanna w roku 1957 do rozwiązania zagadnień ekonomicznych. Problem ten jest matematycznym modelem sytuacji, w której chcemy przydzielić pewną ilość placówek do takiej samej ilości lokalizacji (miejsce) znając przy tym odległości pomiędzy danymi lokalizacjami oraz przepływu między placówkami. Przydziału tego należy dokonać minimalizując koszt tej operacji, który jest proporcjonalny do przepływu pomiędzy placówkami pomnożonego przez odległość między miejscami, do których te placówki zostały przydzielone. Istnieją również wersje tego problemu, w których podany jest również koszt samego przydziału placówki do lokalizacji. Z racji, iż trudność rozwiązania tego problemu jest duża oraz, że modeluje on wiele faktycznych zagadnień, wielu autorów poświęciło mu dużo uwagi, przez co znaleźć można wiele różnych publikacji traktujących o problemie QAP. Niewątpliwie postępujący rozwój w dziedzinie informatyki i elektroniki pozwolił na analizę coraz bardziej złożonych problemów i tworzenie nowych metod, które dotychczas nie byłyby możliwe do wykorzystania.

2.2. Obszary zastosowań

Przy pomocy problemu przydziału kwadratowego można modelować wiele różnych zagadnień, które występują w otaczającym nas świecie. Do dziedzin, w których zagadnienie QAP znajduje zastosowanie, należą m. in:

- ekonomia,
- informatyka,
- elektronika,
- logistyka,

- mechanika,
- architektura.

Do wybranych problemów z spośród wymienionych wyżej dziedzin należą m. in:

- projektowanie zagospodarowania przestrzennego w nowopowstających miastach,
- projektowanie układów elektroniki,
- właściwa lokalizacja fabryk,
- organizacja biur, oddziałów szpitalnych,
- wyważanie turbin w silnikach odrzutowych.

2.3. Model matematyczny

Model matematyczny zagadnienia przydziału kwadratowego może być przedstawiony w następujący sposób:

Dany jest zbiór:

$$N = \{1, \dots, n\} \quad (2.1)$$

oraz następujące macierze o wymiarach $n \times n$:

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \quad (2.2)$$

gdzie macierz A jest macierzą odległości pomiędzy lokalizacjami. Z tego powodu często macierz ta oznacza jest też literą D , od angielskiego słowa distance, oznaczającego odległość. Macierz B jest macierzą określającą pewne powiązania pomiędzy placówkami, np. przepływ informacji, ilość połączeń, ilość towaru jaką należy przetransportować z jednej lokalizacji do drugiej, itp. Macierz ta jest też oznaczana literą F (ang. flow - przepływ). Macierz C określa koszt przydziału placówki do lokalizacji. Dana jest również funkcja celu, będąca określona w następujący sposób:

$$\Phi(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{\pi(i), \pi(j)} + \sum_{i=1}^n c_{\pi(i), i} \quad (2.3)$$

gdzie π jest permutacją $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$, a $\pi(i)$ oznacza numer placówki przydzielonej do i -tej lokalizacji. Funkcja celu określa więc ogólny koszt przydziału i eksploatacji przydzielonego systemu. Szukana jest zatem permutacja minimalizująca funkcję celu, czyli taka, dla której wspomniany koszt jest najmniejszy.

2.4. Złożoność obliczeniowa

Rozwiązanie problemu QAP jest permutacją. Należy przydzielić n placówek do n miejsc. Wynika stąd, że wszystkich możliwości przydziału jest $n!$. Jak zostało wspomniane wcześniej zagadnienie przydziału kwadratowego jest problemem NP-trudnym, czyli zadaniem o złożoności co najmniej wykładniczej. Zadanie o złożoności silni jest zadaniem o złożoności jeszcze większej niż wykładnicza. Wynika z tego fakt, iż już dla stosunkowo małych rozmiarów problemu czas znalezienia rozwiązania poprzez wykorzystanie algorytmów znajdujących dokładne rozwiązanie staje się praktycznie niemożliwe. Zjawiska modelowane zagadnieniem QAP mają rozmiary nierzadko liczony w setkach i większe. Znalezienie dokładnego rozwiązania mogłoby wtedy zająć czas nawet dłuższy niż znany wiek Wszechświata. Chcąc więc znaleźć rozwiązanie postawionego problemu należy stosować algorytmy, które poradzą sobie w czasie zdecydowanie krótszym. Receptą są algorytmy przybliżone, inaczej zwane aproksymacyjne. Zagadnieniu algorytmów przybliżonych poświęcony jest następny rozdział niniejszej pracy.

3. Algorytmy przybliżone

Złożoność otaczającego nas świata powoduje, że bardzo często występujące problemy, które chcielibyśmy rozwikłać są w rzeczywistości bardzo trudne do rozwiązania. Dotyczy to praktycznie każdej sfery ludzkiego życia. W wielu sytuacjach natura problemu nie pozwala na zastosowanie metod matematycznych, jednakże nawet w przypadku takich trudności, w których matematyka przychodzi z pomocą, można stwierdzić jedynie, że problem ma rozwiązanie i to nawet najlepsze z możliwych, optymalne, lecz znalezienie go jest praktycznie niewykonalne. Używając języka naukowego, wiele z tych problemów można nazwać NP-trudnymi. Złożoność obliczeniowa algorytmów pozwalających na rozwiązanie ich jest zbyt duża, by w ogóle warto było je stosować. Pojawia się więc potrzeba zastosowania czegoś, co pozwoli na znalezienie rozwiązania dobrego, przybliżającego chociaż rozwiązanie optymalne. I faktycznie jest grupa algorytmów, które pozwalają na uzyskanie takiego efektu. Są to algorytmy przybliżone, inaczej zwane aproksymującymi.

W przeciwieństwie do problemów optymalizacji, których rozwiązanie jest możliwe do znalezienia w czasie wielomianowym, problemy NP-trudne nie dają punktu wyjścia do znalezienia rozwiązania optymalnego. Jednakże, niejednokrotnie istnieje punkt wyjścia, który pozwala na dojście do rozwiązania znajdującego się w pobliżu rozwiązania najlepszego. W tym sensie algorytmy przybliżone podobne są do algorytmów dokładnych: również polegają na uchwyceniu istoty problemu i następnie na znalezieniu algorytmu, która pozwoli na wykorzystanie jej.

Ogromna ilość problemów, dla których nie jesteśmy w stanie znaleźć rozwiązania optymalnego, przyczyniła się do powstania wielu algorytmów aproksymacyjnych. Przy tworzeniu algorytmów dąży się do tego, by działały one jak najszybciej. W przypadku rozwiązywania przy ich użyciu problemów niejednokrotnie czas ich działania jest dość długi. Jednakże, pozwalają one na znalezienie dobrego rozwiązania w sytuacji, gdy użycie algorytmów dokładnych nie pozwoliłoby uzyskać rozwiązania w ogóle.

Ciekawą rzeczą związaną z algorytmami przybliżonymi jest fakt, że wiele z nich powstało na podstawie obserwacji zjawisk występujących w przyrodzie.

Poniżej zostaną przedstawione kilka algorytmów aproksymujących, zostaną przedstawione podstawowe informacje na ich temat, opisany schemat ich działania, a także to, w jaki sposób przy ich pomocy można by próbować rozwiązać problem QAP.

3.1. Particle Swarm Optimization

3.2. Algorytm Taboo Search

3.3. Algorytm mrówkowy

3.4. Algorytm ewolucyjny

4. Zastosowanie algorytmu quantum EA dla zagadnienia QAP

5. Modyfikacja algorytmu quantum QAP

6. Aplikacja rozwiązująca problem przydziału kwadratowego z wykorzystaniem kwantowego algorytmu ewolucyjnego

7. Metodyka eksperymentów

7.1. Instancje testowe

7.2. Scenariusze testowe

8. Eksperymenty obliczeniowe

9. Rezultaty działania algorytmu dla oraz przeprowadzone testy

10. Analiza uzyskanych wyników

11. Podsumowanie i wnioski

Bibliografia

- [1] H. Partl: *German T_EX*, TUGboat Vol. 9., No. 1 ('88)