When are trace ideals finite?

神代　真也 (大阪工業大学)

日本数学会 2024 年度秋季総合分科会

2024 年 9 月 4 日

導入

- R: 可換ネーター環
- M: 有限生成 R-加群 とする。

定義.

$$\mathrm{tr}(M) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} f(M)$$

を M の**トレースイデアル**という。
イデアル I が**トレースイデアル**であるとは $I = \mathrm{tr}(M)$ となる R-加群 M が存在することをいう。

導入

- R: 可換ネーター環
- M: 有限生成 R-加群

とする。

定義.

$$\mathrm{tr}(M) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} f(M)$$

を M の**トレースイデアル**という。
イデアル I が**トレースイデアル**であるとは $I = \mathrm{tr}(M)$ となる R-加群 M が存在することをいう。

導入

観察.

$\exists n > 0$ s.t. M^n が自由加群を直和因子に持つ $\iff \operatorname{tr}(M) = R$

事実.

- R は CM 局所環で正準加群 ω_R を持つならば、

$$V(\operatorname{tr}(\omega_R)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid R_{\mathfrak{p}} \text{ は Gorenstein ではない }\}$$

- ([Isobe-K.]) R が 1 次元解析的不分岐 Arf 局所整域のとき、

$$\{\text{ 直既約反射加群 }\}/\cong \ \xleftrightarrow{1 \text{ to } 1} \ \{\text{ トレースイデアル }\}$$

である。更に、$\#\{\text{ トレースイデアル }\} < \infty$

導入

観察.

$\exists n > 0$ s.t. M^n が自由加群を直和因子に持つ $\iff \mathrm{tr}(M) = R$

事実.

- R は CM 局所環で正準加群 ω_R を持つならば、

$$V(\mathrm{tr}(\omega_R)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid R_{\mathfrak{p}} \text{は Gorenstein ではない}\}$$

- ([Isobe-K.]) R が 1 次元解析的不分岐 Arf 局所整域のとき、

$$\{\text{直既約反射加群}\}/\cong \quad \overset{1 \text{ to } 1}{\longleftrightarrow} \quad \{\text{トレースイデアル}\}$$

である。更に、$\#\{\text{トレースイデアル}\} < \infty$

導入

問題 ([Dao-Maitra-Sridhar, Faber, Herzog-Rahimbeigi]).

ネーター局所環は、いつ有限個のトレースイデアルを持つか。

注意. I, J をトレースイデアルとすると、$I \cong J$ ならば $I = J$ である。

以下、$(R, \mathfrak{m})$ はネーター局所環として、

- $\mathrm{Tr}(R) = \{$ トレースイデアル $\}$
- $\overline{R}$: R の整閉包
- $H = \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(R) = \bigcup_{i \geq 0} (0) :_R \mathfrak{m}^i$: 0 次局所コホモロジー　とする。

導入

問題 ([Dao-Maitra-Sridhar, Faber, Herzog-Rahimbeigi]).
ネーター局所環は、いつ有限個のトレースイデアルを持つか。

注意. I, J をトレースイデアルとすると、$I \cong J$ ならば $I = J$ である。

以下、$(R, \mathfrak{m})$ はネーター局所環として、

- $\mathrm{Tr}(R) = \{$ トレースイデアル $\}$
- $\overline{R}$: R の整閉包
- $H = \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(R) = \displaystyle\bigcup_{i \geq 0} (0) :_R \mathfrak{m}^i$: 0 次局所コホモロジー　　とする。

主結果 1

定理 ([K.]).

R をネーター局所環とする。$\# \operatorname{Tr}(R) < \infty$ ならば次が正しい。

- $\dim R \le 2$ かつ、$\overline{R}$ は R-加群として有限生成である。
- 更に $\overline{R/H}$ の極大イデアルがすべて同じ高さを持つならば、$\dim R \le 1$ である。

系 ([K.]).

R は深さが正のネーター局所環で、$\overline{R}$ が局所環であるとする。このとき、$\# \operatorname{Tr}(R) < \infty$ ならば $\dim R = 1$ である。

主結果 1

定理 ([K.]).

R をネーター局所環とする。$\# \mathrm{Tr}(R) < \infty$ ならば次が正しい。

- $\dim R \le 2$ かつ、$\overline{R}$ は R-加群として有限生成である。
- 更に $\overline{R/H}$ の極大イデアルがすべて同じ高さを持つならば、$\dim R \le 1$ である。

系 ([K.]).

R は深さが正のネーター局所環で、$\overline{R}$ が局所環であるとする。このとき、$\# \mathrm{Tr}(R) < \infty$ ならば $\dim R = 1$ である。

具体例

例.

K を体、$K[[t]]$ を冪級数環とする。

- $R = K[[t^4, t^5, t^{11}]]$ のとき、

$$\mathrm{Tr}(R) = \{0, (t^8, t^9, t^{10}, t^{11}), (t^5, t^8, t^{11}), (t^4, t^5, t^{11}), R\}$$

- $R = K[[t^4, t^5, t^6]]$ のとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(R) =& \{0, (t^8, t^9, t^{10}, t^{11}), (t^6, t^8, t^9), (t^5, t^6, t^8), (t^4, t^5, t^6), R\} \\ & \cup \{(t^4 + at^5, t^6 \mid a \in K)\}\end{aligned}$$

Arf 環再論

- $R = R_0$: 1 次元 CM 半局所環
- $\mathrm{J}(R)$: ジャコブソン根基　　　　　　　　　　　　　　　　　とする。

このとき、

$$R_1 := \bigcup_{i \geq 1} \mathrm{J}(R)^i :_{Q(R)} \mathrm{J}(R)^i$$

を R の**ブローアップ**という。
$n > 1$ に対しても R_n を再帰的に定義する。

Arf 環再論

事実 ([Lipman]).

次は同値：

- R が Arf
- $\forall n \geq 0, \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R_n$ に対して $(R_n)_{\mathfrak{m}}$ は極小重複度を持つ。
- すべての整閉イデアル I に対して $I^2 = xI$ となる $x \in I$ が存在する。

注意. 特に R が Arf 局所環ならば、$R = R_0$ は極小重複度を持つ。逆は成り立たない。

主結果 2

定理 ([K.]).

R は 1 次元 CM 局所環とする。このとき、R が極小重複度を持つならば

$$\mathrm{Tr}(R) \setminus \{R\} \quad \overset{1\ to\ 1}{\longleftrightarrow} \quad \mathrm{Tr}(R_1)$$

が成り立つ。

系.

R は Arf 局所環で、$\overline{R}$ が局所環とする。このとき、

$$\# \mathrm{Tr}(R) < \infty \iff \overline{R} \text{ が } R\text{-加群として有限生成}$$

である。

主結果 2

定理 ([K.]).

R は 1 次元 CM 局所環とする。このとき、R が極小重複度を持つならば

$$\mathrm{Tr}(R) \setminus \{R\} \quad \overset{1\ to\ 1}{\longleftrightarrow} \quad \mathrm{Tr}(R_1)$$

が成り立つ。

系.

R は Arf 局所環で、$\overline{R}$ が局所環とする。このとき、

$$\#\,\mathrm{Tr}(R) < \infty \iff \overline{R} \text{ が } R\text{-加群として有限生成}$$

である。

ご清聴ありがとうございました