0.1 Feuille 3 exercice 4

Solution La variable alatoire X suit une loi binomiale $B(n, p)$. C'est--dire que pour tout $j \in \{0, n\}$:

$$\mathbb{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

On cherche la loi de Y. On sait que X est valeurs entires entre 0 et n ; et $Y = n - X$; donc Y est valeurs entires entre 0 n. Donner la loi de Y c'est donner pour chaque $k \in \{0, n\}$ la probabilit $P(Y = k)$.

$$P(Y = k) = P(n - X = k)$$

$$P(Y = k) = P(X = n - k)$$

$$P(Y = k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n-(n-k)}$$

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^{k}$$

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} (1-p)^{k} p^{n-k}$$

On reconnat ici la loi binomiale : la variable alatoire Y suit la loi binomiale $B(n, 1-p)$.

0.2 Feuille 3 exercice 7

Solution

1. La variable V peut prendre les valeurs $1, 2, 3$. La variable O peut prendre les valeurs $2, 3$. On va donc remplir un tableau trois lignes et deux colonnes pour la loi du couple (V, O), avec une colonne supplmentaire pour la loi de V et une ligne supplmentaire pour la loi de O.

D'aprs l'exercice 11 de la feuille prcdente, on connat les valeurs suivantes :

$$\mathbb{P}(V = 1) = 1/3; \mathbb{P}(V = 2) = 1/3; \mathbb{P}(V = 3) = 1/3$$

$$\mathbb{P}(O = 2 \,|\, V = 3) = 1; \mathbb{P}(O = 3 \,|\, V = 2) = 1$$

$$\mathbb{P}(O = 2 \,|\, V = 2) = 0; \mathbb{P}(O = 3 \,|\, V = 3) = 0$$

$$\mathbb{P}(O = 2 \,|\, V = 1) = 1/2; \mathbb{P}(O = 3 \,|\, V = 1) = 1/2$$

On peut donc remplir le tableau, en utilisant les formules :

$$\mathbb{P}(V = i, O = j) = \mathbb{P}(V = i)\mathbb{P}(O = j \,|\, V = i)$$

	2	3
1	1/6	1/6
2	0	1/3
3	1/3	0

En sommant chaque ligne, on retrouve la loi marginale de V qu'on connaissait dj ; en sommant chaque colonne, on obtient la loi marginale de O :

$$\mathbb{P}(O = 2) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(O = 3) = 1/2$$

2. Non, les variables V et O ne sont pas indpendantes ; en effet, si on regarde la case $(V, O) = (2, 2)$, on constate que les vnements $V = 2$ et $O = 2$ ne sont pas indpendants :

$$\mathbb{P}((V, O) = (2, 2)) = 0 \neq 1/3 \times 1/2 = \mathbb{P}(V = 2)\mathbb{P}(O = 2)$$

3. On nous demande de calculer : $\mathbb{P}(V = 3 \,|\, O = 2)$. On va utiliser la formule de dfinition d'une probabilit conditionelle :

$$\mathbb{P}(V = 3 \,|\, O = 2) = \frac{\mathbb{P}(V = 3 \cap O = 2)}{\mathbb{P}(O = 2)}$$

$$\mathbb{P}(V = 3 \,|\, O = 2) = \frac{1/3}{1/2}$$

$$\mathbb{P}(V = 3 \,|\, O = 2) = \frac{2}{3}$$

De manire symtrique, on aurait pu calculer $\mathbb{P}(V = 2 \,|\, O = 3) = \frac{2}{3}$.

En conclusion, si l'on sait que le prsentateur a ouvert l'une des deux portes 2 ou 3, alors il y a probabilit 2/3 que la voiture soit derrire l'autre porte. Donc on a toujours intrt changer de porte.