対称性のある領域でのラプラス作用素のグリーン関数について

On Green's functions for Laplace's operator in symmetric domains

金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻
博士前期課程　2年　池上　淳史

2019/1/31

目次

1　始めに

私は当初, 円環領域におけるラプラス方程式のグリーン関数について, 研究しようとしました. その前の準備として, 超関数を用いたグリーン関数と長方形領域におけるグリーン関数について勉強しようとしました. しかし, 長方形領域におけるグリーン関数について明確に書かれているものがなかったため, 長方形領域における楕円関数論を用いたグリーン関数について, 及び, グリーン関数の近似関数 (以後, これを近似グリーン関数と呼ぶ.) について考察することを目標としました.

本論文では, 長方形領域における近似グリーン関数を対称となる特異点の位置を工夫することで構成しました. その次に, 長方形領域におけるグリーン関数を楕円関数である関数 θ_1 を用いて表しました. その際, 必要な楕円関数に関しての補題も 4 章にまとめてあります. 近似グリーン関数に関しては, 長方形の 4 辺のうち 2 辺は対称点の取り方から 0 であり, 他 2 辺に関しては, 対称点の性質などを用いることで 0 に収束することを示しています.

2　グリーン関数について

2.1　超関数と超関数の微分の定義

定義 1. (参考文献 [1]p.128)
Ω を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合とし, $\mathscr{D}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid f$ は C^∞ 級, supp$f$ が Ω のコンパクト集合$\}$ とする. また, $\phi, \phi_m \in C_c^\infty(\Omega)$ に対して, $\phi_m \to \phi \quad \text{in} \ \ \mathscr{D}(\Omega)$ を以下で定義する.

> あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ が存在し,supp$(\phi_m - \phi) \subset K$ をみたすとき, 任意の非負の整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対して,
>
> $$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \phi_m \to \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \phi \quad (m \to \infty)(\text{一様収束})$$
>
> がなりたつ.

定義 2. (参考文献 [1]p.128)
写像 $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ が次の 2 条件を満たすとき,T は超関数であるという.

1.) (線形性) $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega), a, b \in \mathbf{C}$ に対して, $T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$.
2.) (連続性) $\phi, \phi_m \in C_c^\infty(\Omega)(m = 1, 2, \cdots), \phi_m \to \phi \quad \text{in}\, \mathscr{D}(\Omega)(m \to \infty)$ ならば $T(\phi_m) \to T(\phi)$.

以後, Ω 上の超関数全体を $\mathscr{D}'(\Omega)$ とおく.

定義 3. (参考文献 [1]p.131)
$T \in \mathscr{D}'(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_i (i = 1, \cdots, n)$ を非負の整数とする. $D^\alpha T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} T$ を以下で定義する.

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi).$$

ただし, $|\alpha| = \sum \alpha_i$, $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ とする.

2.2　$\mathbf{R}^n$ 上のグリーン関数の定義

定義 4. (参考文献 [1]p.147)
$n \geq 2, y \in \mathbf{R}^n$ として,

$$G_y(x) = \begin{cases} -|\mathbf{S}^1|^{-1} \log |x - y| & (n = 2) \\ \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} |x - y|^{2-n} & (n \neq 2) \end{cases}$$

とする. ただし, $\mathbf{S}^{n-1}$ を半径 1 の $(n-1)$ 次元球面とし $|\mathbf{S}^{n-1}|$ をその表面積とする. つまり, $|\mathbf{S}^{n-1}| = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ である. この G_y を $\mathbf{R}^n$ 上のポアソン方程式でのグリーン関数と呼ぶ.

2.3 グリーン関数の性質

定理 5. (参考文献 [1]p.148)

$$-\Delta G_y(x) = \delta_y(x) \qquad\qquad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n). \tag{1}$$

ただし, δ_y は y を中心とした Dirac のデルタ関数とする．つまり, δ_y は $\phi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ に対して, $\phi(y)$ を対応させるものとする.

証明は付録参照.

定理 6. (参考文献 [1]p.149)
$f{\in}L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ とし, すべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $F(y) = G_y(x)f(y)$ は可積分とする．また, 関数 u を以下で定義する.

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} F(y)dy. \tag{2}$$

このとき,

$$u{\in}L^1_{loc}(\mathbf{R}^n), \tag{3}$$

$$-\Delta u = f \qquad \text{in}\, \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n) \tag{4}$$

がなりたつ.

証明は付録参照.

2.4 一般領域におけるグリーン関数の定義

定義 7. (参考文献 [3]p.130)
Ω を $\mathbf{R}^2$ 内の有界領域とする.$\overline{\Omega}{\times}\overline{\Omega} \setminus \{(x,y)|x=y\}$ で定義された関数 $G(x,y)$ が次の 2 条件を満たすとき, G をラプラス方程式におけるグリーン関数と呼ぶ.

1.) $\Omega{\times}\overline{\Omega}$ で連続で, $\Delta_y K(x,y) = 0$ をみたす $\Omega{\times}\overline{\Omega}$ 上での関数 $K(x,y)$ が存在して,

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + K(x,y)$$

で表される.

2.) $G(x,y) = 0 \qquad\qquad (y \in \partial\Omega).$

定理 8. (参考文献 [3]p.130)
$u(x)$ を境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = f \qquad (x \in \Omega) \\ u = 0 \qquad (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{5}$$

の解とすると,

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy \tag{6}$$

である.

証明は付録参照.

3　長方形領域における近似グリーン関数について

3.1　準備

長方形領域における近似グリーン関数を考えるために, 半平面におけるグリーン関数と 4 分の 1 平面におけるグリーン関数を考える.

3.1.1　半平面におけるグリーン関数

(参考文献 [4]p.75)

$\Omega_+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ とおく. また, 図 1 のように $a \in \Omega_+$ に対して, $a' \in \mathbf{C}$ を a が a' の実軸に関する対称点となるように置く.

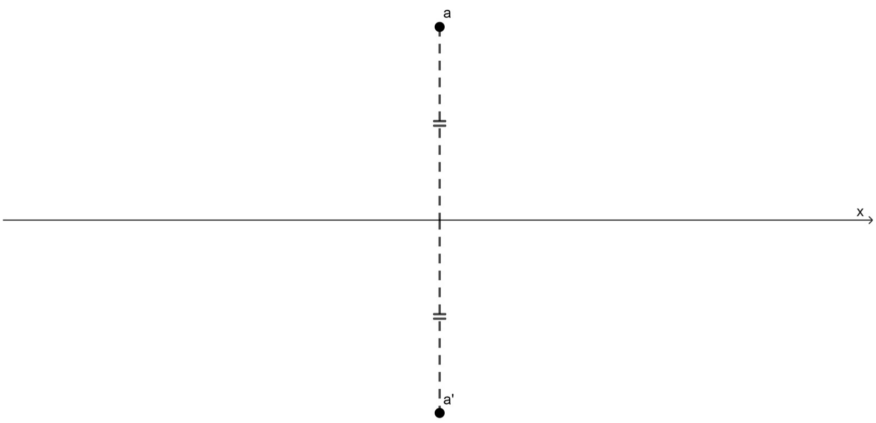

図 1

このとき, Ω_+ を領域とするグリーン関数 G_{Ω_+} を考える. すべての実軸上の ξ に対して, $|a-\xi| = |a'-\xi|$ であるから,

$$G_{\Omega_+}(z,a) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\log|z-a| - \log|z-a'|\right\} \tag{7}$$

とすれば,

$$\begin{cases} -\Delta G_{\Omega_+}(\cdot,a) = \delta_a & \mathrm{in}\,\Omega_+ \\ G_{\Omega_+}(\cdot,a) = 0 & \mathrm{on}\,\partial\Omega_+ \end{cases}$$

を満たすことが分かる.

3.1.2　4 分の 1 平面におけるグリーン関数

(参考文献 [4]p.81)

図 2 のように 4 分の 1 平面を $\Omega_{++} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z > 0\}$ とする.Ω_{++} を領域とするグリーン関数 $G_{\Omega_{++}}$ を考える. a' を a の実軸に関しての対称点, a'' を a の虚軸に関しての対称点, a'''

を a の原点に関しての対称点とする．このとき, 任意の実軸上の点 ξ に対して,

$$|\xi - a| = |\xi - a'|, \quad |\xi - a''| = |\xi - a'''|$$

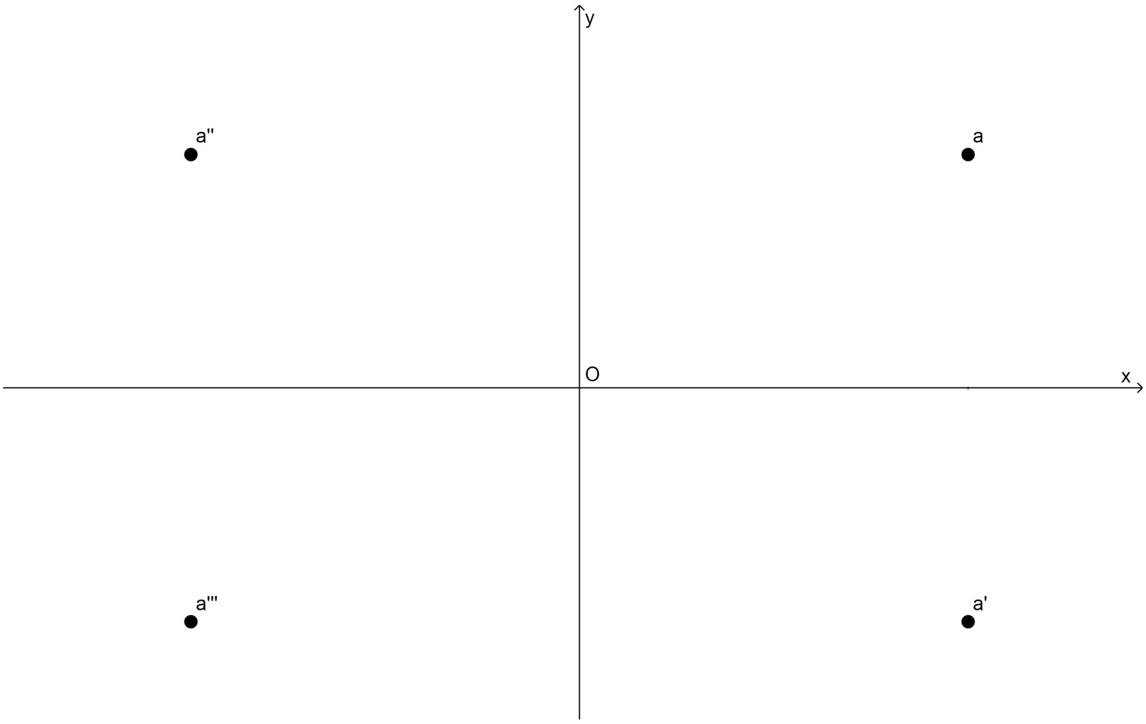

図 2

であり, 任意の虚軸上の点 η に対して,

$$|\eta - a| = |\eta - a''|, \quad |\eta - a'| = |\eta - a'''|$$

である．したがって,

$$G_{\Omega_{++}}(z, a) = -\frac{1}{2\pi}\log\frac{|z-a||z-a'''|}{|z-a'||z-a''|} \tag{8}$$

とすれば,

$$\begin{cases} -\Delta G_{\Omega_{++}}(\cdot, a) = \delta_a & \text{in } \Omega_{++} \\ G_{\Omega_{++}}(\cdot, a) = 0 & \text{on } \partial\Omega_{++} \end{cases}$$

を満たすことが分かる.

以下では, 純虚数 $\tilde{\omega}$ に対して, 長方形 $D(\tilde{\omega}) = \{z \in \mathbf{C} | 0 < \mathrm{Re} z < \frac{1}{2}, 0 < \mathrm{Im} z < \frac{|\tilde{\omega}|}{2}\}$ でのグリーン関数を近似することを考えたい．ただし, $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で Dirichlet 条件を満たすとする．また, $\tilde{\omega} = bi$ とする.

3.2　第 1 次近似グリーン関数

図 3 のような領域において, z_α に対して実軸と対称な点 $\overline{z_\alpha}$ に強さ -1 の特異点, 虚軸と対称な点 $-\overline{z_\alpha}$ に強さ -1 の特異点, 原点と対称な点 $-z_\alpha$ に強さ 1 の特異点を置く. このとき, 第 1 次近似グリーン関数を以下のようにして考える.

$$G_1(z) = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{(z-z_\alpha)(z+z_\alpha)}{(z-\overline{z_\alpha})(z+\overline{z_\alpha})}\right|. \tag{9}$$

$G_1(z)$ が $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で 0 に" 近い" ことを確認してゆく.

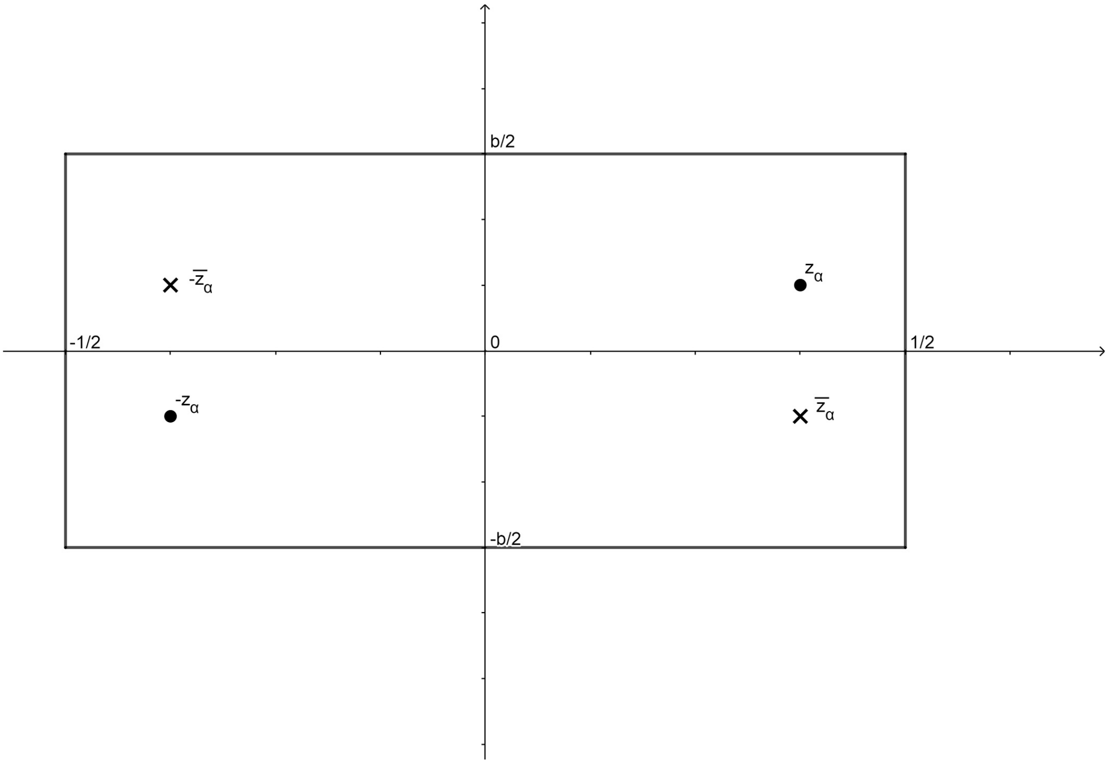

図 3　●：強さ 1　×：強さ -1

1.) $0 \leq \mathrm{Re}z \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}z = 0$ のとき.
　z は実数であるから, 4 分の 1 平面の場合 (3.1.2) から $G_1 = 0$ であることが分かる.

2.) $\mathrm{Re}z = 0, 0 \leq \mathrm{Im} \leq \frac{b}{2}$ のとき.
　z は純虚数であるから, 同様に $G_1 = 0$ であることが分かる.

しかし, $\partial D(\tilde{\omega})$ のそれ以外の場所では 0 にはならない. 実際, 特異点がその他の辺に近づくと境界での値は発散する.

3.3　第 2 次近似グリーン関数

図 4 のような領域に関して,

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \frac{p-2}{2} < \mathrm{Re}z < \frac{p-1}{2}, \frac{q-2}{2}b < \mathrm{Im}z < \frac{q-1}{2}b \right\}$$

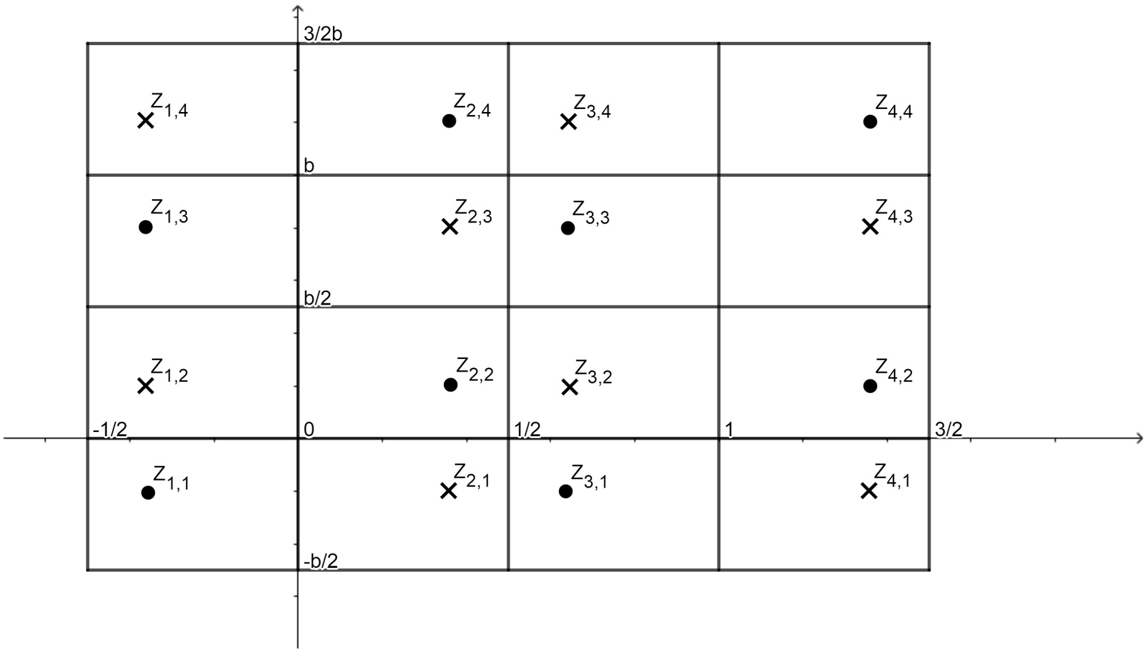

図 4　●：強さ 1　×：強さ -1

内にある特異点を $z_{p,q}$ とする. ただし, $1{\leq}p,q{\leq}4$ である. また, $z_{2,2}=\alpha{+}i\beta$ とすると, $k,l=1,2$ に対して,

$$
\begin{aligned}
z_{2k-1,2l-1}=k-1-\alpha+((l-1)b-\beta)i, z_{2k-1,2l}=k-1-\alpha+((l-1)b+\beta)i,\\
z_{2k,2l-1}=k-1+\alpha+((l-1)b-\beta)i, z_{2k,2l}=k-1+\alpha+((l-1)b+\beta)i
\end{aligned}
$$

である. このとき, 第 2 次近似グリーン関数を以下のようにして考える.

$$
\begin{aligned}
G_2(z)&=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{(z-z_{1,1})(z-z_{2,2})(z-z_{1,3})(z-z_{2,4})(z-z_{3,1})(z-z_{4,2})(z-z_{3,3})(z-z_{4,4})}{(z-z_{2,1})(z-z_{1,2})(z-z_{2,3})(z-z_{1,4})(z-z_{4,1})(z-z_{3,2})(z-z_{4,3})(z-z_{3,4})}\right|\\
&=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{l+m:\text{偶数}}^{1\leq l,m\leq 4}(z-z_{l,m})}{\prod_{l+m:\text{奇数}}^{1\leq l,m\leq 4}(z-z_{l,m})}\right| \qquad (10)
\end{aligned}
$$

先ほどと同様に, 境界条件を確かめるため, $G_2(z)$ が $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で 0 に近いことを見ればよい.

1.) $0\leq \mathrm{Re}z\leq \frac{1}{2}$かつ $\mathrm{Im}z=\frac{b}{2}$ のとき.

$$
\left|\frac{z-z_{p,5-q}}{z-z_{p,q}}\right|=1 \qquad (p=1,2,3,4,q=1,2)
$$

であることを示す.

(a) $q=1$ のとき.

$5-q=4$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z-z_{p,5-q})=\mathrm{Im}(z-z_{p,4})=\frac{b}{2}-(b+\beta)=-\left(\frac{b}{2}+\beta\right),\\
\mathrm{Im}(z-z_{p,q})=\mathrm{Im}(z-z_{p,1})=\frac{b}{2}-(-\beta)=\frac{b}{2}+\beta.
\end{aligned}
$$

したがって, $\mathrm{Im}(z-z_{p,5-q})=-\mathrm{Im}(z-z_{p,q})$ である. また, $\mathrm{Re}(z-z_{p,5-q})=\mathrm{Re}(z-z_{p,q})$ であるから, $|z-z_{p,5-q}|=|z-z_{p,q}|$.

（b）$q=2$ のとき,

$5-q=3$ であるから,

$$\mathrm{Im}(z-z_{p,5-q})=\mathrm{Im}(z-z_{p,3})=\frac{b}{2}-(b-\beta)=-\left(\frac{b}{2}-\beta\right),$$
$$\mathrm{Im}(z-z_{p,q})=\mathrm{Im}(z-z_{p,2})=\frac{b}{2}-\beta.$$

したがって, $\mathrm{Im}(z-z_{p,5-q})=-\mathrm{Im}(z-z_{p,q})$ である. また, $\mathrm{Re}(z-z_{p,5-q})=\mathrm{Re}(z-z_{p,q})$ であるから, $|z-z_{p,5-q}|=|z-z_{p,q}|$.

(a), (b) より,

$$\left|\frac{z-z_{p,5-q}}{z-z_{p,q}}\right|=1 \qquad (p=1,2,3,4,q=1,2).$$

したがって, $G_2(z)=0$ である.

2.) $\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}$かつ $0\leq \mathrm{Im}z\leq \frac{b}{2}$ のとき.

1.) と同様に

$$\left|\frac{z-z_{5-p,q}}{z-z_{p,q}}\right|=1 \qquad (p=1,2,q=1,2,3,4)$$

であるから,

$$G_2(z)=0.$$

しかし, それ以外の辺では 0 ではない. どれくらい 0 に近いかは後程一般化して評価する.

3.4 第 $(2n-1)$ 次近似グリーン関数

$n\geq 2$ とする. 図 5 のような領域に関して,

$$\left\{z\in\mathbf{C}\middle|\frac{p-2n}{2}<\mathrm{Re}z<\frac{p-2n+1}{2},\frac{q-2n}{2}b<\mathrm{Im}z<\frac{q-2n+1}{2}b\right\}$$

内にある特異点を $z_{p,q}$ とする. ただし, $1{\leq}p,q{\leq}4n-2$ である. また, $z_{2n,2n}=\alpha+i\beta$ とおくと, 一般に $1\leq k,l\leq 2n-1$ に対して,

$$z_{2k-1,2l-1}=k-n-\alpha+((l-n)b-\beta)i, z_{2k-1,2l}=k-n-\alpha+((l-n)b+\beta)i,$$
$$z_{2k,2l-1}=k-n+\alpha+((l-n)b-\beta)i, z_{2k,2l}=k-n+\alpha+((l-n)b+\beta)i$$

である. このとき, 第 $(2n-1)$ 次近似グリーン関数を以下のように考える.

$$G_{2n-1}(z)=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{l+m:\text{偶数}}^{1\leq l,m\leq 4n-2}(z-z_{l,m})}{\prod_{l+m:\text{奇数}}^{1\leq l,m\leq 4n-2}(z-z_{l,m})}\right|. \tag{11}$$

先ほどと同様に, 境界条件を確かめるため, $G_{2n-1}(z)$ が $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で 0 に近いことを見ればよい.

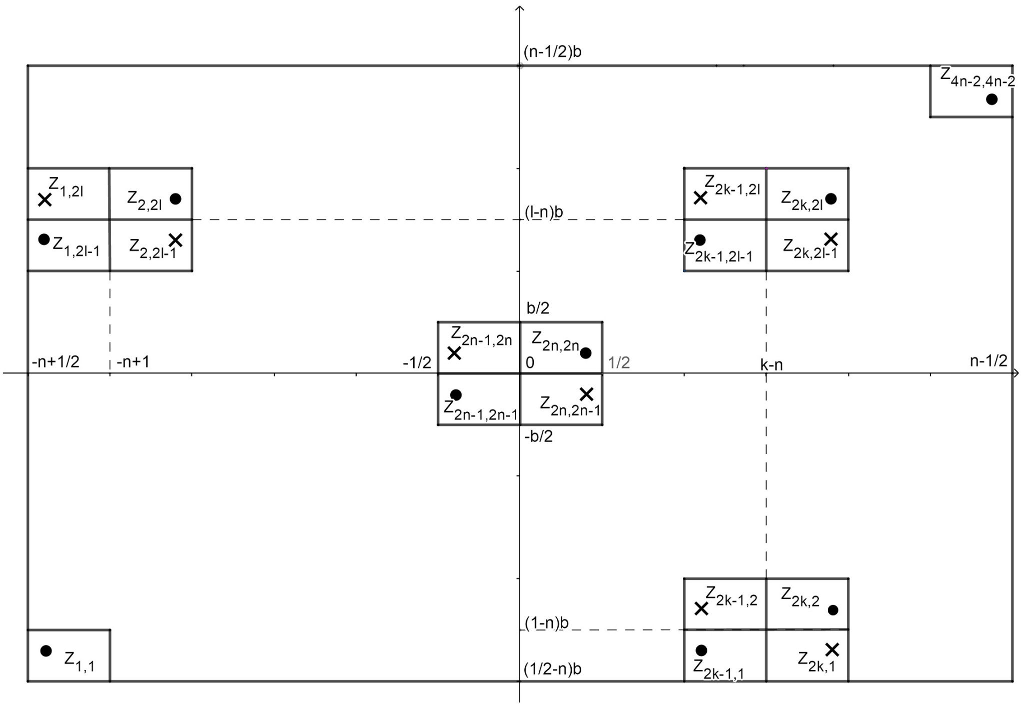

図 5　●：強さ 1　×：強さ -1

1.) $0 \le \mathrm{Re}z \le \frac{1}{2}$かつ $\mathrm{Im}z = 0$ のとき,
$1{\le}p{\le}4n-2$ と $1{\le}q{\le}2n-1$ を満たす (p,q) に対して,

$$\left|\frac{z - z_{p,4n-1-q}}{z - z_{p,q}}\right| = 1 \tag{12}$$

であることを示す.

（a）$q = 2l-1\,(1{\le}l{\le}n)$ のとき.
$\mathrm{Im}z_{p,q} = (l-n)b - \beta$ であり,

$$4n-1-q = 4n-1-(2l-1) = 2(2n-l)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}z_{p,4n-1-q} &= ((2n-l)-n)b + \beta \\ &= -((l-n)b - \beta) \\ &= -\mathrm{Im}z_{p,q}\end{aligned}$$

であり, z は実数であるから,

$$\mathrm{Re}(z - z_{p,q}) = \mathrm{Re}(z - z_{p,4n-1-q}),$$

$$\mathrm{Im}(z - z_{p,q}) = -\mathrm{Im}(z - z_{p,4n-1-q}).$$

したがって,

$$|z - z_{p,q}| = |z - z_{p,4n-1-q}|.$$

（b）$q=2l\,(1\leq l\leq n-1)$ のとき.

$\mathrm{Im}\,z_{p,q}=(l-n)b+\beta$ であり,

$$4n-1-q=4n-1-2l=2(2n-l)-1$$

であるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}z_{p,4n-1-q}&=((2n-l)-n)b-\beta\\&=-((l-n)b+\beta)\\&=-\mathrm{Im}z_{p,q}\end{aligned}$$

であり, z は実数であるから,

$$\mathrm{Re}(z-z_{p,q})=\mathrm{Re}(z-z_{p,4n-1-q}),$$

$$\mathrm{Im}(z-z_{p,q})=-\mathrm{Im}(z-z_{p,4n-1-q}).$$

したがって,

$$|z-z_{p,q}|=|z-z_{p,4n-1-q}|.$$

(a), (b) より, (12) がなりたつ. したがって,

$$G_{2n-1}(z)=0$$

である.

2.) $\mathrm{Re}z=0$ かつ $0\leq\mathrm{Im}\leq\frac{b}{2}$ のとき.

$1\leq p\leq 2n-1$ と $1\leq q\leq 4n-2$ を満たす (p,q) に対して,

$$\left|\frac{z-z_{4n-1-p,q}}{z-z_{p,q}}\right|=1$$

である. これは (12) と同様に示せる. したがって,

$$G_{2n-1}(z)=0$$

である.

3.) $0\leq\mathrm{Re}z\leq\frac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}z=\frac{b}{2}$ のとき.

$1\leq p\leq 4n-2, 3\leq q\leq 2n$ に対して,

$$\left|\frac{z-z_{p,4n+1-q}}{z-z_{p,q}}\right|=1$$

である. これは (12) と同様に示せる. よって,

$$\begin{aligned}G_{2n-1}(z)&=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{k=1}^{2n-1}(z-z_{2k-1,1})(z-z_{2k,2})}{\prod_{k=1}^{2n-1}(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right|\\&=-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{k=1}^{2n-1}f_k(z)\end{aligned}$$

である. ただし,

$$f_k(z) = \left|\frac{(z-z_{2k-1,1})(z-z_{2k,2})}{(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right| \quad (1 \le k \le 2n-1)$$

とおいた. ここで,

$$z_{2k-1,2} + z_{2k,1} - z_{2k-1,1} - z_{2k,2} = 0,$$

$$z_{2k,2} = z_{2k-1,1} + 2\alpha + 2i\beta, z_{2k,1} =_{2k-1,1} +2\alpha, z_{2k-1,2} = z_{2k-1,1} + 2i\beta$$

であるから,

$$\begin{aligned}
f_k(z) &= \left|\frac{(z-z_{2k-1,1})(z-z_{2k,2})}{(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right| \\
&= \left|1 + \frac{(z-z_{2k-1,1})(z-z_{2k,2}) - (z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}{(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right| \\
&= \left|1 + \frac{(z_{2k-1,2} + z_{2k,1} - z_{2k-1,1} - z_{2k,2})z + z_{2k-1,1}z_{2k,2} - z_{2k-1,2}z_{2k,1}}{(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right| \\
&= \left|1 + \frac{z_{2k-1,1}(z_{2k-1,1} + 2\alpha + 2i\beta) - (z_{2k-1,1} + 2\alpha)(z_{2k-1,1} + 2i\beta)}{(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right| \\
&= \left|1 - \frac{4i\alpha\beta}{(z-z_{2k-1,2})(z-z_{2k,1})}\right|. \qquad (13)
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$1 - \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,2}||z-z_{2k,1}|} \le f_k(z) \le 1 + \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,2}||z-z_{2k,1}|}.$$

ここで, 図 5 より, z と $z_{2k-1,2}$ の距離, z と $z_{2k,1}$ の距離はそれぞれ $(n-1)b$ 以上であるから, $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}, 0 \le \beta \le \frac{b}{2}$ より,

$$\begin{aligned}
f_k(z) &\ge 1 - \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,2}||z-z_{2k,1}|} \\
&\ge 1 - \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2}}{(n-1)^2 b^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(n-1)^2 b}
\end{aligned}$$

であり, 同様に

$$\begin{aligned}
f_k(z) &\le 1 + \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,2}||z-z_{2k,1}|} \\
&\le 1 + \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2}}{(n-1)^2 b^2} \\
&= 1 + \frac{1}{(n-1)^2 b}
\end{aligned}$$

である. したがって,

$$1 - \frac{1}{(n-1)^2 b} \le f_k(z) \le 1 + \frac{1}{(n-1)^2 b} \quad (1 \le k \le 2n-1).$$

よって,

$$-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{k=1}^{2n-1}\left\{1+\frac{1}{(n-1)^2b}\right\}\leq G_{2n-1}(z)\leq-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{k=1}^{2n-1}\left\{1-\frac{1}{(n-1)^2b}\right\},$$

つまり,

$$-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{1}{(n-1)^2b}\right\}^{2n-1}\leq G_{2n-1}(z)\leq-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{1}{(n-1)^2b}\right\}^{2n-1}.$$

4.) $\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}$ かつ $0\leq\mathrm{Im}z\leq\frac{b}{2}$ のとき,
$3\leq p\leq 2n, 1\leq q\leq 4n-2$ に対して,

$$\left|\frac{z-z_{4n+1-p,q}}{z-z_{p,q}}\right|=1$$

である. これは (12) と同様に示せる. よって,

$$\begin{aligned}G_{2n-1}(z)&=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{l=1}^{2n-1}(z-z_{1,2l-1})(z-z_{2,2l})}{\prod_{l=1}^{2n-1}(z-z_{2,2l-1})(z-z_{1,2l})}\right|\\&=-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{l=1}^{2n-1}g_l(z)\end{aligned}$$

である. ただし,

$$g_l(z)=\left|\frac{(z-z_{1,2l-1})(z-z_{2,2l})}{(z-z_{2,2l-1})(z-z_{1,2l})}\right|\qquad(1\leq l\leq 2n-1)$$

とおいた. ここで, (13) と同様に計算すると,

$$g_l(z)=\left|1-\frac{4i\alpha\beta}{(z-z_{1,2l})(z-z_{2,2l-1})}\right|$$

であるから,

$$1-\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{1,2l}||z-z_{2,2l-1}|}\leq g_l(z)\leq 1+\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{1,2l}||z-z_{2,2l-1}|}.$$

ここで 図 5 より, z と $z_{1,2l}$ の距離, z と $z_{2,2l-1}$ の距離はそれぞれ $n-1$ 以上であるから,
$0\leq\alpha\leq\frac{1}{2}, 0\leq\beta\leq\frac{b}{2}$ より,

$$\begin{aligned}g_l(z)&\geq 1-\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{1,2l}||z-z_{2,2l-1}|}\\&\geq 1-\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}}{(n-1)^2}\\&=1-\frac{b}{(n-1)^2}\end{aligned}$$

であり, 同様に

$$\begin{aligned}g_l(z)&\leq 1+\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{1,2l}||z-z_{2,2l-1}|}\\&\leq 1+\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}}{(n-1)^2}\\&=1+\frac{b}{(n-1)^2}\end{aligned}$$

である．したがって，

$$1-\frac{1}{(n-1)^2b}\leq g_l(z)\leq 1+\frac{1}{(n-1)^2b}\qquad(1\leq l\leq 2n-1)$$

よって，

$$-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{l=1}^{2n-1}\left\{1+\frac{b}{(n-1)^2}\right\}\leq G_{2n-1}(z)\leq-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{l=1}^{2n-1}\left\{1-\frac{b}{(n-1)^2}\right\}$$

つまり，

$$-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-1)^2}\right\}^{2n-1}\leq G_{2n-1}(z)\leq-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-1)^2}\right\}^{2n-1}$$

1〜4 をまとめると，$\partial D(\tilde{\omega})$ 上で

$$\min\left\{-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-1)^2}\right\}^{2n-1},-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{1}{(n-1)^2b}\right\}^{2n-1}\right\}$$
$$\leq G_{2n-1}(z)\leq\max\left\{-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-1)^2}\right\}^{2n-1},-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{1}{(n-1)^2b}\right\}^{2n-1}\right\}.$$

これから，

$$G_{2n-1}(z)\to 0\qquad(n\to 0)$$

であることが分かる．さらに,$b\geq 1$ とすると，

$$-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-1)^2}\right\}\leq G_{2n-1}(z)\leq-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-1)^2}\right\}.$$

ここで,$-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-1)^2}\right\}$ に関して,$\log(1+x)\leq x(x\geq 0)$ であるから，

$$\begin{aligned}&-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-1)^2}\right\}\\ \geq&-\frac{2n-1}{2\pi}\frac{b}{(n-1)^2}\\ \geq&-\frac{b}{2\pi}\frac{2n-1}{(n-1)^2}.\end{aligned}$$

また,$-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-1)^2}\right\}$ に関して,$\log(1-x)\geq-2x(0<x<\frac{1}{2})$ であるから,$\frac{b}{(n-1)^2}<\frac{1}{2}$ つまり,$n>1+\sqrt{2b}$ のとき，

$$\begin{aligned}&-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-1)^2}\right\}\\ \leq&-\frac{2n-1}{2\pi}\left(-2\frac{b}{(n-1)^2}\right)\\ \leq&\frac{b}{\pi}\frac{2n-1}{(n-1)^2}.\end{aligned}$$

したがって，

$$-\frac{b}{2\pi}\frac{2n-1}{(n-1)^2}\leq G_{2n-1}(z)\leq\frac{b}{\pi}\frac{2n-1}{(n-1)^2}.$$

さらに,$n \geq 2$ のとき,$\frac{2n-1}{(n-1)^2} \leq \frac{6}{n}$ であるから,

$$-\frac{3b}{n\pi} \leq G_{2n-1}(z) \leq \frac{6b}{n\pi}.$$

$b < 1$ のときも同様に評価すると,$n > 1 + \sqrt{\frac{2}{b}}$ のとき,

$$-\frac{3}{nb\pi} \leq G_{2n-1}(z) \leq \frac{6}{nb\pi}.$$

以上をまとめると,$n > \max\{1 + \sqrt{2b}, 1 + \sqrt{\frac{2}{b}}\}$ のとき,

$$\min\left\{-\frac{3b}{n\pi}, -\frac{3}{nb\pi}\right\} \leq G_{2n-1}(z) \leq \max\left\{\frac{6b}{n\pi}, \frac{6}{nb\pi}\right\}.$$
$$-\frac{3}{n\pi}\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} \leq G_{2n-1}(z) \leq \frac{6}{n\pi}\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\}.$$

また,

$$\begin{aligned}\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} &= \frac{b + \frac{1}{b}}{2} + \frac{1}{2}\left|b - \frac{1}{b}\right| \\ &\leq \frac{b + \frac{1}{b}}{2} + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) \\ &= b + \frac{1}{b}\end{aligned}$$

であることを用いると,

$$-\frac{3}{n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right) \leq G_{2n-1}(z) \leq \frac{6}{n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right).$$

3.5 第 $2n$ 次近似グリーン関数

$n \geq 1$ とする. 図 6 のような領域に関して,

$$\left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \frac{p-2n}{2} < \mathrm{Re}z < \frac{p-2n+1}{2}, \frac{q-2n}{2}b < \mathrm{Im}z < \frac{q-2n+1}{2}b\right\}$$

内にある特異点を $z_{p,q}$ とする. ただし, $1 \leq p, q \leq 4n$ である.
また, $z_{2n,2n} = \alpha + i\beta$ とおくと, 一般に $1 \leq k, l \leq 2n$ に対して

$$z_{2k-1,2l-1} = k - n - \alpha + ((l-n)b - \beta)i, z_{2k-1,2l} = k - n - \alpha + ((l-n)b + \beta)i,$$
$$z_{2k,2l-1} = k - n + \alpha + ((l-n)b - \beta)i, z_{2k,2l} = k - n + \alpha + ((l-n)b + \beta)i$$

である. このとき, 第 $2n$ 次近似グリーン関数を以下のように考える.

$$G_{2n}(z) = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{l+m:\text{偶数}}^{1 \leq l,m \leq 4n}(z - z_{l,m})}{\prod_{l+m:\text{奇数}}^{1 \leq l,m \leq 4n}(z - z_{l,m})}\right| \tag{14}$$

先ほどと同様に, 境界条件を確かめるため, $G_{2n}(z)$ が $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で 0 に近いことを見ればよい.

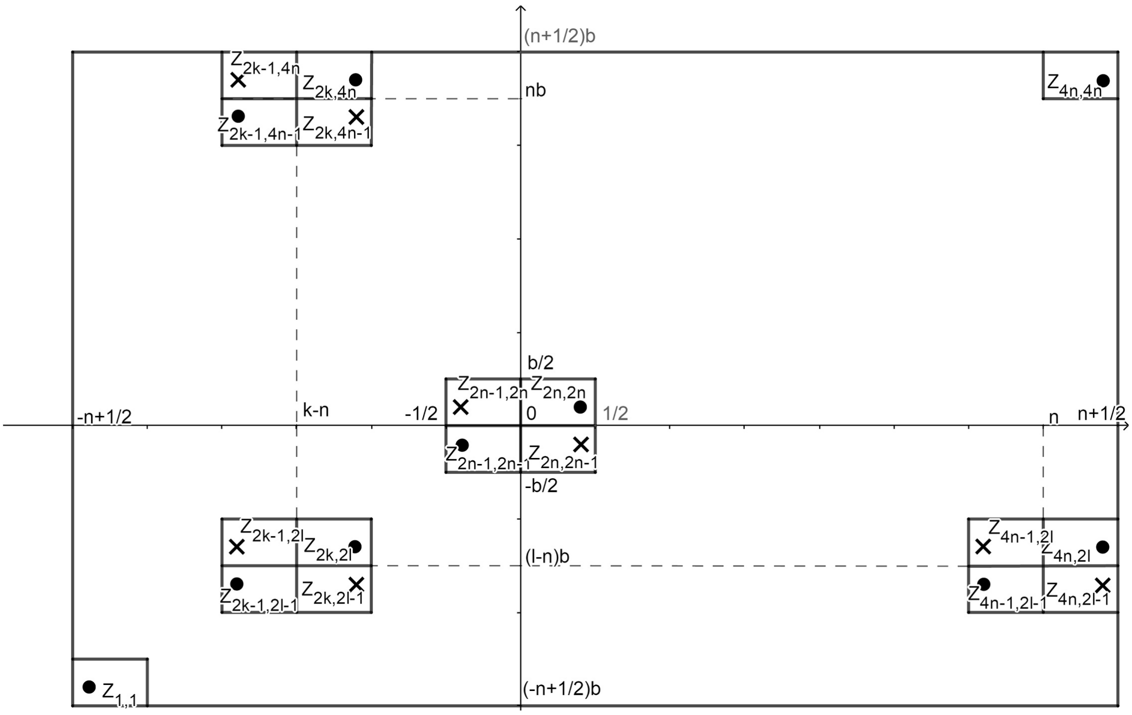

図 6　●：強さ 1　×：強さ -1

1.) $0 \leq \mathrm{Re}z \leq \frac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}z = \frac{b}{2}$ のとき,
$1 \leq p \leq 4n$ と $1 \leq q \leq 2n$ をみたす (p, q) に対して,

$$\left| \frac{z - z_{p,4n+1-q}}{z - z_{p,q}} \right| = 1$$

である. これは (12) と同様に示せる. したがって,

$$G_{2n}(z) = 0$$

である.

2.) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}$ かつ $0 \leq \mathrm{Im}z \leq \frac{b}{2}$ のとき,
$1 \leq p \leq 2n$ と $1 \leq q \leq 4n$ をみたす (p, q) に対して,

$$\left| \frac{z - z_{4n+1-p,q}}{z - z_{p,q}} \right| = 1$$

である. これは (12) と同様に示せる. したがって,

$$G_{2n}(z) = 0$$

である.

3.) $0 \leq \mathrm{Re}z \leq \frac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}z = 0$ のとき,
$1 \leq p \leq 4n$ と $1 \leq q \leq 2n-1$ をみたす (p, q) に対して,

$$\left| \frac{z - z_{p,4n-1-q}}{z - z_{p,q}} \right| = 1$$

である. これは（12）と同様に示せる．よって,

$$
\begin{aligned}
G_{2n}(z) &= -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{k=1}^{2n}(z-z_{2k-1,4n-1})(z-z_{2k,4n})}{\prod_{k=1}^{2n}(z-z_{2k-1,4n})(z-z_{2k,4n-1})}\right| \\
&= -\frac{1}{2\pi}\log\prod_{k=1}^{2n}f_k(z)
\end{aligned}
$$

である. ただし,

$$
f_k(z) = \left|\frac{(z-z_{2k-1,4n-1})(z-z_{2k,4n})}{(z-z_{2k-1,4n})(z-z_{2k,4n-1})}\right| \qquad (1 \le k \le 2n)
$$

とおいた．ここで,(13) と同様に計算すると,

$$
f_k(z) = \left|1 - \frac{4i\alpha\beta}{(z-z_{2k-1,4n})(z-z_{2k,4n-1})}\right|
$$

であるから,

$$
1 - \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,4n}||z-z_{2k,4n-1}|} \le f_k(z) \le 1 + \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,4n}||z-z_{2k,4n-1}|}
$$

ここで 図 6 より, z と $z_{2k-1,4n}$ の距離, z と $z_{2k,4n-1}$ の距離はそれぞれ $(n-\frac{1}{2})b$ 以上であるから, $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}, 0 \le \beta \le \frac{b}{2}$ より,

$$
\begin{aligned}
f_k(z) &\ge 1 - \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,4n}||z-z_{2k,4n-1}|} \\
&\ge 1 - \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}}{(n-\frac{1}{2})^2b^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b}
\end{aligned}
$$

であり, 同様に

$$
\begin{aligned}
f_k(z) &\le 1 + \frac{4\alpha\beta}{|z-z_{2k-1,4n}||z-z_{2k,4n-1}|} \\
&\le 1 + \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}}{(n-\frac{1}{2})^2b^2} \\
&= 1 + \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b}
\end{aligned}
$$

である．したがって,

$$
1 - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b} \le f_k(z) \le 1 + \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b} \qquad (1 \le k \le 2n).
$$

よって,

$$
-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{k=1}^{2n}\left\{1+\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b}\right\} \le G_{2n}(z) \le -\frac{1}{2\pi}\log\prod_{k=1}^{2n}\left\{1-\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b}\right\},
$$

つまり,

$$
-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b}\right\}^{2n} \le G_{2n}(z) \le -\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2b}\right\}^{2n}.
$$

4.) $\mathrm{Re}z=0$ かつ $0\leq \mathrm{Im}\leq \frac{b}{2}$ のとき,

$1{\leq}p{\leq}2n-1$ と $1{\leq}q{\leq}4n$ をみたす (p,q) に対して,

$$\left|\frac{z-z_{4n-1-p,q}}{z-z_{p,q}}\right|=1$$

である. これは (12) と同様に示せる. よって,

$$\begin{aligned}G_{2n}(z)&=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{l=1}^{2n}(z-z_{4n-1,2l-1})(z-z_{4n,2l})}{\prod_{l=1}^{2n}(z-z_{4n,2l-1})(z-z_{4n-1,2l})}\right|\\&=-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{l=1}^{2n}g_l(z)\end{aligned}$$

である. ただし,

$$g_l(z)=\left|\frac{(z-z_{4n-1,2l-1})(z-z_{4n,2l})}{(z-z_{4n,2l-1})(z-z_{4n-1,2l})}\right|\quad(1\leq l\leq 2n)$$

とおいた. ここで,(13) と同様に計算すると,

$$g_l(z)=\left|1-\frac{4i\alpha\beta}{(z-z_{4n-1,2l})(z-z_{4n,2l-1})}\right|$$

であるから,

$$1-\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{4n-1,2l}||z-z_{4n,2l-1}|}{\leq}g_l(z)\leq 1+\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{4n-1,2l}||z-z_{4n,2l-1}|}$$

ここで, 図 6 より, z と $z_{4n-1,2l}$ の距離, z と $z_{4n,2l-1}$ の距離はそれぞれ $n-\frac{1}{2}$ 以上であるから, $0\leq\alpha\leq\frac{1}{2}, 0\leq\beta\leq\frac{b}{2}$ より,

$$\begin{aligned}g_l(z)&\geq 1-\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{4n-1,2l}||z-z_{4n,2l-1}|}\\&\geq 1-\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}}{(n-\frac{1}{2})^2}\\&=1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\end{aligned}$$

であり, 同様に

$$\begin{aligned}g_l(z)&\leq 1+\frac{4\alpha\beta}{|z-z_{4n-1,2l}||z-z_{4n,2l-1}|}\\&\leq 1+\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}}{(n-\frac{1}{2})^2}\\&=1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\end{aligned}$$

である. したがって,

$$1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}{\leq}g_l(z)\leq 1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\quad(1{\leq}l\leq 2n).$$

よって,

$$-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{l=1}^{2n}\left\{1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}\leq G_{2n}(z)\leq-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{l=1}^{2n}\left\{1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\},$$

つまり,

$$-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}^{2n}\leq G_{2n}(z)\leq-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}^{2n}.$$

1〜4 をまとめると, $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で,

$$\min\left\{-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}^{2n},-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 b}\right\}^{2n}\right\}$$
$$\leq G_{2n}(z)\leq\max\left\{-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}^{2n},-\frac{1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 b}\right\}^{2n}\right\}.$$

これから, $\partial D(\tilde{\omega})$ 上で,

$$G_{2n}(z)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

である. ゆえに, 最大値原理から $D(\tilde{\omega})$ 上で,

$$G_{2n}(z)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

である. さらに,$b\geq 1$ とすると,

$$-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}\leq G_{2n}(z)\leq-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}.$$

ここで,$-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}$ に関して,$\log(1+x)\leq x(x\geq 0)$ であるから,

$$\begin{aligned}&-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1+\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}\\ \geq&-\frac{2n-1}{2\pi}\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\\ \geq&-\frac{b}{2\pi}\frac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})^2}.\end{aligned}$$

また,$-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}$ に関して,$\log(1-x)\geq -2x(0<x<\frac{1}{2})$ であるから,$\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}<\frac{1}{2}$ つまり,$n>\frac{1}{2}+\sqrt{2b}$ のとき,

$$\begin{aligned}&-\frac{2n-1}{2\pi}\log\left\{1-\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right\}\\ \leq&-\frac{2n-1}{2\pi}\left(-2\frac{b}{(n-\frac{1}{2})^2}\right)\\ \leq&\frac{b}{\pi}\frac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})^2}.\end{aligned}$$

したがって,

$$-\frac{b}{2\pi}\frac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})^2}\leq G_{2n}(z)\leq\frac{b}{\pi}\frac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})^2}.$$

さらに,$n \geq 2$ のとき,$\frac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leq \frac{3}{n}$ であるから,

$$-\frac{3b}{2n\pi} \leq G_{2n}(z) \leq \frac{3b}{n\pi}.$$

$b < 1$ のときも同様に評価すると,$n > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{b}}$ のとき,

$$-\frac{3}{2nb\pi} \leq G_{2n}(z) \leq \frac{3}{nb\pi}.$$

以上をまとめると,$n > \max\{\frac{1}{2} + \sqrt{2b}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{b}}\}$ のとき,

$$\min\left\{-\frac{3b}{2n\pi}, -\frac{3}{2nb\pi}\right\} \leq G_{2n}(z) \leq \max\left\{\frac{3b}{n\pi}, \frac{3}{nb\pi}\right\}.$$
$$-\frac{3}{2n\pi}\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} \leq G_{2n}(z) \leq \frac{3}{n\pi}\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\}.$$

さらに $\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} \leq b + \frac{1}{b}$ であったから,

$$-\frac{3}{2n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right) \leq G_{2n}(z) \leq \frac{3}{n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right).$$

定理 9. (主定理) 長方形 $D(\tilde{\omega}) = \{z \in \mathbf{C} | 0 < \mathrm{Re}z < \frac{1}{2}, 0 < \mathrm{Im}z < \frac{b}{2}\}$ の領域内でのラプラス方程式のグリーン関数 $G(z, z_\alpha)$ ($z_\alpha \in D(\tilde{\omega})$) は

$$G_N(z) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\prod_{l+m:\text{偶数}}^{1\leq l,m\leq 2N}(z - z_{l,m})}{\prod_{l+m:\text{奇数}}^{1\leq l,m\leq 2N}(z - z_{l,m})}\right|$$

で一様近似される. ここで,

$$z_{2k-1,2l-1} = k - n - \alpha + ((l-n)b - \beta)i, z_{2k-1,2l} = k - n - \alpha + ((l-n)b + \beta)i,$$
$$z_{2k,2l-1} = k - n + \alpha + ((l-n)b - \beta)i, z_{2k,2l} = k - n + \alpha + ((l-n)b + \beta)i$$

である. ただし, N が奇数のとき, $n = \frac{N+1}{2}$ であり, N が偶数のとき, $n = \frac{N}{2}$ である. つまり z_α は $z_{2n,2n}$ に対応する. また, この近似は N が奇数のとき,

$$-\frac{3}{n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right) \leq G_{2n-1}(z) \leq \frac{6}{n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right)$$

であり,N が偶数のとき,

$$-\frac{3}{2n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right) \leq G_{2n}(z) \leq \frac{3}{n\pi}\left(b + \frac{1}{b}\right)$$

と評価される.

4 長方形領域におけるグリーン関数について

4.1 Weierstrass の ζ 関数

グリーン関数の構成法は, 関数論によるものが知られている. 以下それを論述する. まずは, 次の補題を示す.

補題 10. (参考文献 [2]p.18)
比が虚数である 2 つの複素数 ω_1, ω_2 に対し, $\omega \in \Omega = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 | k_1, k_2 \in \mathbf{Z}\}$ とする. このとき,

$$S = \sum{}' \frac{1}{|\omega|^3}$$

は収束する. ただし, $\sum'$ は $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 全体の和を表すことにする.

証明

$$S_n = \sum_{n \leq |\omega| < n+1} \frac{1}{|\omega|^3}$$

とおき, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ が収束することを示せばよい. また, $n \leq |\omega| < n+1$ をみたす $\omega \in \Omega$ の個数を A_n とおく. さらに, 原点と原点以外の Ω の元との距離の最小値より小さい正の数を 2ϵ とおく. すると, $\omega_1 \neq \omega_2$ ならば $|\omega_1 - \omega_2| > 2\epsilon$ である. これは各 Ω 上の点を中心に半径 ϵ の円を描くとそれらに共通部分を持たないことを意味する. ここで, $n \geq 1, A_n > 0$ と仮定する. つまり $n \leq |\omega| < n+1$ をみたす ω が存在すると仮定する. さらに, $\epsilon \leq 1$ と仮定すると, $n \leq |\omega| < n+1$ をみたす $\omega \in \Omega$ を中心とした半径 ϵ の円は原点を中心とした半径 $n - \epsilon$ の外側にあり, 半径 $n + 1 + \epsilon$ の円の内側にある. したがって, 面積を比較することにより,

$$\begin{aligned} A_n(\pi\epsilon^2) &\leq \pi(n+1+\epsilon)^2 - \pi(n-\epsilon)^2 = \pi(1+2\epsilon)(2n+1) \leq 3n\pi(1+2\epsilon) \\ A_n &\leq \frac{1+2\epsilon}{\epsilon^2} 3n = kn \end{aligned}$$

ただし, $k = 3\frac{1+2\epsilon}{\epsilon^2}$ とおいた. また, この不等式は $A_n = 0$ のときもなりたつ. したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n \leq |\omega| < n+1} \frac{1}{|\omega|^3} \\ &\leq A_n \frac{1}{n^3} \\ &\leq kn \frac{1}{n^3} = \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

ゆえに, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束する.

ここで, Ω のすべての点を極とし, 主要部 $P_{k_1,k_2}(u) = \frac{1}{u-\omega}$ を持つ有理型関数である Weierstrass の ζ 関数を導入する.

$\omega \neq 0$ のとき,

$$P_{k_1,k_2}(u) = \frac{1}{u-\omega}$$
$$= -\frac{1}{\omega}\left(1 + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{\omega^2} + \cdots\right) \qquad \left(\left|\frac{u}{\omega}\right| < 1\right) \tag{15}$$

であるから,

$$\phi_{k_1,k_2}(u) = -\frac{1}{\omega}$$

とおくと,

$$|P_{k_1,k_2}(u) - \phi_{k_1,k_2}(u)| = \left|\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega}\right|$$

が成り立つ. $|u| < r, 2r < |\omega|$ のとき,

$$|P_{k_1,k_2}(u) - \phi_{k_1,k_2}(u)| = \left|\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega}\right| = \left|\frac{u}{\omega(\omega-u)}\right| < \frac{r}{|\omega|(|\omega|-r)}$$
$$< \frac{r}{|\omega|(|\omega| - \frac{|\omega|}{2})} = \frac{2r}{|\omega|^2}$$

となり, 収束を示すことができない. ここで, (15) において,

$$\psi_{k_1,k_2}(u) = -\frac{1}{\omega}\left(1 + \frac{u}{\omega}\right)$$

とおくと, $|u| < r, 2r < |\omega|$ のとき,

$$|P_{k_1,k_2}(u) - \psi_{k_1,k_2}(u)| = \left|\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right|$$
$$= \left|\frac{\omega^2 + u\omega - \omega^2 + u^2 - u\omega}{\omega^2(u-\omega)}\right| = \left|\frac{u^2}{\omega^2(u-\omega)}\right|$$
$$< \frac{r^2}{|\omega|^2(|\omega|-|u|)} < \frac{r^2}{|\omega|^2(|\omega|-r)} < \frac{r^2}{|\omega|^2(|\omega|-\frac{|\omega|}{2})} = \frac{2r^2}{|\omega|^3}$$

であるから, 補題.10 より

$$\frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right) \tag{16}$$

が収束することが分かる. このように定まる有理型関数は Weierstrass の ζ 関数と呼ばれている. (このように,$\psi_{k_1,k_2}(u)$ のような補正項を差し引いて有利型関数を構成できることは,pMittag-Leffler の定理として知られている.)

補題 11.

$$\zeta(u+\omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \zeta(u+\omega_2) = \zeta(u) + \eta_2.$$

ただし, $\eta_1 = 2\zeta(\frac{\omega_1}{2}), \eta_2 = 2\zeta(\frac{\omega_2}{2})$ である.

証明

$$\zeta'(u) = -\frac{1}{u^2} - \sum{}' \left\{\frac{1}{(u-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}\zeta''(u) &= \frac{2}{u^3} + 2\sum{}' \frac{1}{(u-\omega)^3} \\ &= 2\sum \frac{1}{(u-\omega)^3}\end{aligned}$$

であり, この和は $\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ において, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 全体の和であるから, $i = 1, 2$ に対して,

$$\zeta''(u+\omega_i) = \zeta''(u)$$

である. よって, ある定数 $c_i \in \mathbf{C}$ が存在して,

$$\zeta'(u+\omega_i) - \zeta'(u) = c_i$$

である. ここで, $\zeta(u)$ は奇関数より $\zeta'(u)$ は偶関数であるから, $u = -\frac{\omega_i}{2}$ を代入して $c_i = 0$ である. したがって,

$$\zeta'(u+\omega_i) - \zeta'(u) = 0.$$

よって, 両辺を積分すると, ある定数 $\eta_i \in \mathbf{C}$ が存在して,

$$\zeta(u+\omega_i) = \zeta(u) + \eta_i$$

である. また, $\zeta(u)$ は奇関数であるから, $u = -\frac{\omega_i}{2}$ を代入して, $\eta_i = 2\zeta(\frac{\omega_i}{2})$ を得る.

補題 12. (参考文献 [2]p.33)
(Legendre の公式)
$\eta_1 = 2\zeta(\frac{\omega_1}{2}), \eta_2 = 2\zeta(\frac{\omega_2}{2})$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i.$$

証明
$\zeta(u)$ は, 周期平行四辺形 ω_0 ではただ一つの特異点を持ち, その極における留数は 1 なので,

$$\int_{\omega_0} \zeta(u)du = 2\pi i.$$

また,

$$\begin{aligned}\int_{\omega_0} \zeta(u)du &= \int_{\omega_0}^{\omega_0+\omega_2} (\zeta(u+\omega_1) - \zeta(u))du - \int_{\omega_0}^{\omega_0+\omega_1} (\zeta(u+\omega_2) - \zeta(u))du \\ &= \int_{\omega_0}^{\omega_0+\omega_2} \eta_1 du - \int_{\omega_0}^{\omega_0+\omega_1} \eta_2 du \\ &= \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1\end{aligned}$$

であるから,

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i.$$

4.2 σ 関数

つぎに, σ 関数を以下で定義する.

$$\sigma(u) = u\prod{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{u}{\omega})^2} \right\}.$$

補題 13. (参考文献 [2]p.36)
σ 関数と ζ 関数に関して以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(u) = \frac{d}{du}\log\sigma(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

証明

$$\zeta(u) - \frac{1}{u} = \sum{}' \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right)$$

に関して, 複素数平面上の原点と点 u を結ぶ曲線に沿って積分すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^u \left(\zeta(v) - \frac{1}{v}\right) dv &= \sum{}' \left(\int_0^u \frac{1}{v-\omega} dv + \int_0^u \frac{dv}{\omega} + \int_0^u \frac{v}{\omega^2} dv\right) \\
&= \sum{}' \left\{\log\left(1 - \frac{u}{\omega}\right) + \frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\omega^2}\right\} \\
&= \log \prod{}' \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\omega^2}} \\
&= \log \frac{\sigma(u)}{u}.
\end{aligned}$$

両辺を u で微分すると,

$$\zeta(u) - \frac{1}{u} = \frac{\frac{u\sigma'(u) - \sigma(u)}{u^2}}{\frac{\sigma(u)}{u}}.$$

よって,

$$\zeta(u) = \frac{u\sigma'(u) - \sigma(u)}{u\sigma(u)} + \frac{1}{u} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$

補題 14. (参考文献 [2]p.38)

$m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ に対して, $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \in \Omega, \eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$ とおく. このとき, 次式が成り立つ.

$$\sigma(u+\omega) = \epsilon e^{\eta\left(u+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma(u).$$

ただし, σ が $\frac{\omega}{2}$ 周期のときは, $\epsilon = 1$, そうでないときは, $\epsilon = -1$ とする.

証明

補題 11. を繰り返し用いると,

$$\zeta(u+\omega) = \zeta(u) + \eta$$

であるから, 補題 13. より

$$\frac{\sigma'(u+\omega)}{\sigma(u+\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \eta$$

である. 両辺を積分すると, ある定数 $c \in \mathbf{C}$ が存在して

$$\log\sigma(u+\omega) = \log\sigma(u) + \eta u + c,$$

すなわち

$$\sigma(u+\omega)=e^{\eta u+c}\sigma(u),$$

$$\sigma(u+\omega)=Ce^{\eta(u+\frac{\omega}{2})}\sigma(u). \tag{17}$$

ただし, $C=e^{c-\frac{\omega\eta}{2}}$ とする. (17) について, σ は奇関数であるから, $\sigma(\frac{\omega}{2})\neq 0$ のとき, つまり, $\frac{\omega}{2}$ が周期ではないとき,

$$C=\left\{\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(u)}\right\}_{u=-\frac{\omega}{2}}=\frac{\sigma(\omega/2)}{\sigma(-\omega/2)}=-1$$

である.

$\sigma(\frac{\omega}{2})=0$ のとき, つまり, $\frac{\omega}{2}$ が周期であるとき, (21) の両辺を微分して,

$$\sigma'(u+\omega)=C\eta e^{\eta(u+\frac{\omega}{2})}\sigma'(u)+Ce^{\eta(u+\frac{\omega}{2})}\sigma'(u).$$

$u=-\frac{\omega}{2}$ を代入すると, $\sigma(-\frac{\omega}{2})=0$ であるから,

$$\sigma'\left(\frac{\omega}{2}\right)=C\sigma'\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

ここで, σ の定義式から

$$\sigma'(u)=\prod{}'\left\{\left(1-\frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{u}{\omega})^2}\right\}+u\prod{}'\left\{\left(1-\frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{u}{\omega})^2}\right\}',$$

特に,

$$\begin{aligned}\sigma'(0)&=\prod{}'\left\{\left(1-\frac{0}{\omega}\right)e^{\frac{0}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{0}{\omega})^2}\right\}\\&=1.\end{aligned}$$

σ' の $\frac{\omega}{2}$ 周期性から $\sigma'(\frac{\omega}{2})\neq 0$ である. 同様に $\sigma'(-\frac{\omega}{2})\neq 0$ であり, σ' は偶関数だから,

$$C=\frac{\sigma'(\omega/2)}{\sigma'(-\omega/2)}=1.$$

補題 15. (参考文献 [2]p.50)

$$\phi(u)=e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}+\frac{\pi i u}{\omega_1}}\sigma(u)=e^{-\frac{\eta u^2}{\omega_1}}z\sigma(u)\qquad(z=e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}})$$

について, 次式が成り立つ.

$$\phi(u+\omega_1)=\phi(u),\phi(u+\omega_2)=-z^{-2}\phi(u).$$

証明

補題 14. より, $\sigma(u+\omega_1)=-e^{\eta_1(u+\omega_1/2)}\sigma(u)$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\phi(u+\omega_1)}{\phi(u)}&=-\exp\left\{-\eta_1 u-\frac{1}{2}\eta_1\omega_1+\frac{\pi i\omega_1}{\omega_1}+\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\right\}\\&=-\exp(\pi i)\\&=1\end{aligned}$$

であり, $\sigma(u+\omega_2) = -e^{\eta_1(u+\omega_2/2)}\sigma(u)$ と Legendre の関係式 $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ より,

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(u+\omega_2)}{\phi(u)} &= -\exp\left\{2\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_2}\omega_2 + \frac{1}{2}\eta_2\right)\left(u+\frac{1}{2}\omega_2\right) + \frac{\pi i}{\omega_1}\omega_2\right\} \\
&= -\exp\left(-\frac{\eta_1}{\omega_1}\omega_2 u + -\frac{1}{2}\frac{\eta_1}{\omega_1}\omega_2^2 + \eta_2 u + \frac{1}{2}\eta_2\omega_2 + \frac{\pi i}{\omega_1}\omega_2\right) \\
&= -\exp\left(-\frac{\eta_2\omega_1 + 2\pi i}{\omega_1}u - \frac{1}{2}\frac{\eta_2\omega_1 + 2\pi i}{\omega_1}\omega_2 + \eta_2 u + \frac{1}{2}\eta_2\omega_2 + \frac{\pi i}{\omega_1}\omega_2\right) \\
&= -\exp\left(-\frac{2\pi i u}{\omega_1}\right) \\
&= -z^{-2}.
\end{aligned}$$

4.3 θ_1 関数と ζ 関数の関係

定理 16. (参考文献 [2]p.68)

$$\theta_1(v) = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}$$

としたとき,

$$\zeta(u) = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\frac{d}{dv}\log\theta_1(v)$$

である. ただし, $z = e^{i\pi v} = e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}$ とする.

証明

2 段階で示す.

Step 1:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\theta_1'(0)}e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\theta_1(v)$$

を示す.

ϕ は整関数なので,

$$\phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n} \quad (z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega}}) \tag{18}$$

というようにローラン展開できる. 補題 15 より, $h = e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}$ とすると,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n} h^{2n} = \phi(u+\omega_2) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+1} z^{2n}.$$

従って,

$$A_{n+1} = -h^{2n}A_n$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = -h^{2n-2}$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\cdots\frac{A_2}{A_1}=(-h^{2n-2})(-h^{2n-4})\cdots(-h^2)$$

$$A_n=(-1)^{n-1}h^{n(n-1)}A_1.$$

ここで, $A_1=-Cih^{\frac{1}{4}}$ とおくと,

$$A_n=(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}Ci$$

であるから, (18) より,

$$\phi(u)=Ci\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}z^{2n}.$$

θ_1,ϕ の定義式より,

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}z\sigma(u)=zC\theta_1(v)$$

$$\sigma(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}C\theta_1(v).$$

$u=2\omega v$ でわると,

$$\frac{\sigma(u)}{u}=\frac{1}{2\omega}e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}C\frac{\theta_1(v)}{v}.$$

$u\to 0$ とすると, $\frac{\sigma(u)}{u}\to 1$, $\frac{\theta_1(v)}{v}\to\theta_1'(0)$ であるから,

$$1=C\frac{\theta_1'(0)}{2\omega}$$

$$C=\frac{2\omega}{\theta_1'(0)}.$$

したがって,

$$\sigma(u)=\frac{2\omega}{\theta_1'(0)}e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\theta_1(v).$$

Step 2:

$$\zeta(u)=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{1}{2\omega}\frac{d}{dv}\log\theta_1(v)$$

を示す. Step 1 より,

$$\log\sigma(u)=\frac{\eta u^2}{2\omega}+\log\frac{2\omega}{\theta_1'(0)}\theta_1(v).$$

$u=2\omega v$ に注意して, 両辺を u で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}&=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{\frac{1}{2\omega}\frac{2\omega}{\theta_1'(0)}\theta_1'(\frac{u}{2\omega})}{\frac{2\omega}{\theta_1'(0)}\theta_1(\frac{u}{2\omega})}\\&=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{1}{2\omega}\frac{d}{dv}\log\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\zeta(u)=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{1}{2\omega}\frac{d}{dv}\log\theta_1(v)$$

補題 17. θ_1 は奇関数であり,$\tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}$ が純虚数のとき,$\theta_1(\overline{v})=\overline{\theta_1(v)}$ が成り立つ.

証明

$$
\begin{aligned}
\theta_1(v) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi v}
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\theta_1(-v) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} e^{-(2n-1)i\pi v} \\
&= i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{-k+1} h^{\left(\frac{-2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)i\pi v} \qquad (n \mapsto -k+1) \\
&= -i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{-k} h^{\left(\frac{-2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)i\pi v} \\
&= -\theta_1(v).
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
\theta_1(v) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi v}
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\theta_1(\overline{v}) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n-\frac{1}{2})^2} e^{(2n-1)i\pi\overline{v}} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{\overline{-(2n-1)i\pi v}} \\
&= \overline{-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{-(2n-1)i\pi v}} \qquad (\because \tau\text{:純虚数}) \\
&= \overline{-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+1} e^{i\pi\tau\left(-k+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)i\pi v}} \qquad (n \mapsto -k+1) \\
&= \overline{i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k} e^{i\pi\tau\left(-k+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)i\pi v}} \\
&= \overline{\theta_1(v)}.
\end{aligned}
$$

補題 18. θ_1 関数に関して, 以下の 2 式が成り立つ.

$$
\theta_1(v+1) = -\theta_1(v)
$$

$$
\theta_1(v+\tau) = -e^{-2i\pi v}e^{-i\pi\tau}\theta_1(v)
$$

証明

$$
\begin{aligned}
\theta_1(v+1) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi(v+1)} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi v} e^{(2n-1)i\pi} \\
&= -\theta_1(v) \qquad (\because e^{(2n-1)i\pi} = -1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1(v+1) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi(v+\tau)} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi\tau} e^{(2n-1)i\pi v} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1\right\}} e^{(2n-1)i\pi v} \\
&= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} e^{i\pi\tau\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2(n+1)-1)i\pi v} e^{-2i\pi v} e^{-i\pi v} \\
&= -e^{-2i\pi v} e^{-i\pi\tau}\theta_1(v)
\end{aligned}
$$

4.4　長方形領域におけるグリーン関数

(参考文献 [5]p.216)

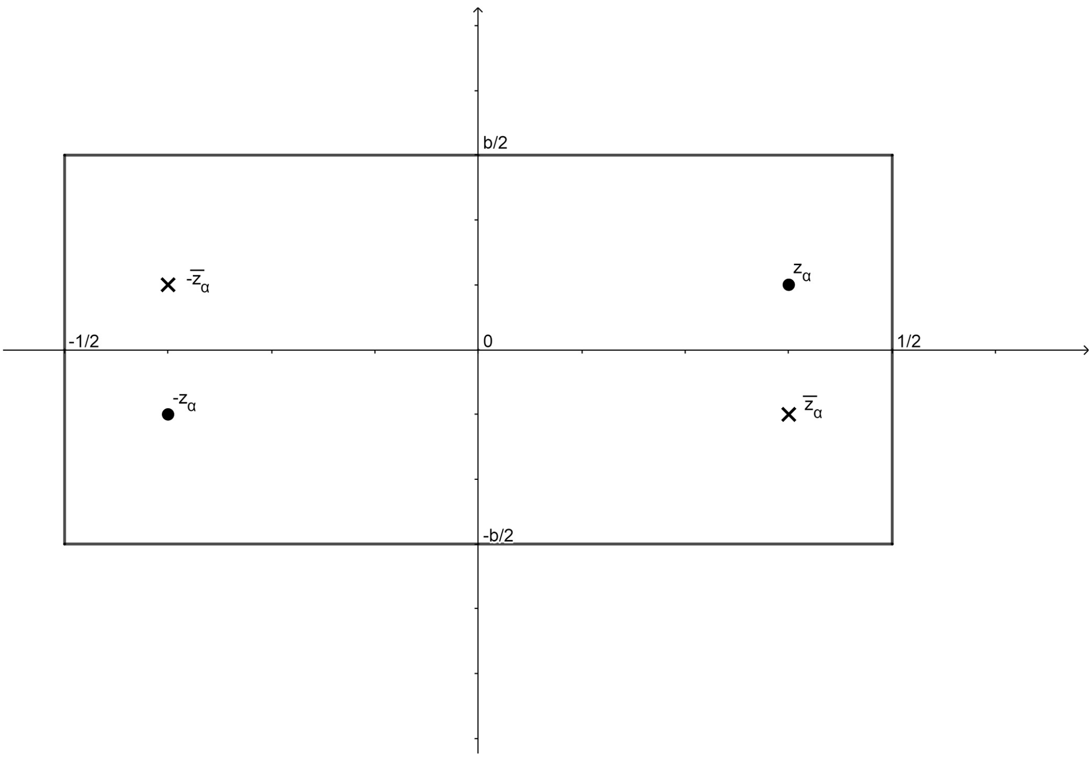

図 7　●：強さ 1　×：強さ -1

図 7 のように, まずは $D(\tilde{\omega})$ を実軸, 虚軸に対称に拡張した領域 $K(\tilde{\omega})$ を考える.

$z_\alpha \in D(\tilde{\omega})$ として, 特異点を置く. さらに図 1 のように, z_α に対して実軸と対称な点 $\overline{z_\alpha}$ に強さ -1 の特異点, 虚軸と対称な点 $-\overline{z_\alpha}$ に強さ -1 の特異点, 原点と対称な点 $-z_\alpha$ に強さ 1 の特異点を置く. これを周期的に全平面に拡張したとき,z_α から周期的に配置された点に特異点をもつ ζ 関数の不定積分を W_{z_α} とする. すなわち

$$\frac{d}{dz}W_{z_\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\zeta(z - z_\alpha)$$

とする. 同様に $W_{\overline{z_\alpha}}, W_{-\overline{z_\alpha}}, W_{-z_\alpha}$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}W_{\overline{z_\alpha}}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\zeta(z - \overline{z_\alpha}),\\
\frac{d}{dz}W_{-\overline{z_\alpha}}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\zeta(z + \overline{z_\alpha}),\\
\frac{d}{dz}W_{-z_\alpha}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\zeta(z + z_\alpha).
\end{aligned}$$

さらに,

$$W(z) = W_{z_\alpha}(z) + W_{\overline{z_\alpha}}(z) + W_{-\overline{z_\alpha}}(z) + W_{-z_\alpha}(z)$$

とおく.

このとき,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}W(z) &= \frac{d}{dz}W_{z_\alpha}(z) + \frac{d}{dz}W_{\overline{z_\alpha}}(z) + \frac{d}{dz}W_{-\overline{z_\alpha}}(z) + \frac{d}{dz}W_{-z_\alpha}(z)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\{\zeta(z - z_\alpha) - \zeta(z - \overline{z_\alpha}) - \zeta(z + \overline{z_\alpha}) + \zeta(z + z_\alpha)\} \qquad (19)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\Bigg\{\frac{1}{z - z_\alpha} + \sum{}'\Bigg(\frac{1}{z - z_\alpha - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z - z_\alpha}{\omega^2}\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad -\Bigg\{\frac{1}{z - \overline{z_\alpha}} + \sum{}'(\frac{1}{z - \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z - \overline{z_\alpha}}{\omega^2}\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad -\Bigg\{\frac{1}{z + \overline{z_\alpha}} + \sum{}'\Bigg(\frac{1}{z + \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z + \overline{z_\alpha}}{\omega^2}\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad +\Bigg\{\frac{1}{z + z_\alpha} + \sum{}'\Bigg(\frac{1}{z + z_\alpha - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z + z_\alpha}{\omega^2}\Bigg)\Bigg\}\Bigg]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\Bigg\{\sum{}'\Bigg(\frac{1}{z - z_\alpha - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z - z_\alpha}{\omega^2}\Bigg) - \sum{}'\Bigg(\frac{1}{z - \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z - \overline{z_\alpha}}{\omega^2}\Bigg)\\
&\quad -\sum{}'\Bigg(\frac{1}{z + \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z + \overline{z_\alpha}}{\omega^2}\Bigg) + \sum{}'\Bigg(\frac{1}{z + z_\alpha - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z + z_\alpha}{\omega^2}\Bigg)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

ここで, それぞれの $\sum'$ は収束しているから 1 つの和でかける. よって,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}W(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum{}'\Bigg\{\Bigg(\frac{1}{z - z_\alpha - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z - z_\alpha}{\omega^2}\Bigg) - \Bigg(\frac{1}{z - \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z - \overline{z_\alpha}}{\omega^2}\Bigg)\\
&\quad -\Bigg(\frac{1}{z + \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z + \overline{z_{の}\alpha}}{\omega^2}\Bigg) + \Bigg(\frac{1}{z + z_\alpha - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z + z_\alpha}{\omega^2}\Bigg)\Bigg\}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum{}'\Bigg(\frac{1}{z - z_\alpha - \omega} - \frac{1}{z - \overline{z_\alpha} - \omega} - \frac{1}{z + \overline{z_\alpha} - \omega} + \frac{1}{z + z_\alpha - \omega}\Bigg)
\end{aligned}$$

である. また, 定理 15. において, $\omega_1 = 1$ として (19) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}W(z) &= \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\left\{2\eta_1(z-z_\alpha)+\frac{d}{dz}\log\theta_1(z-z_\alpha)\right\}-\left\{2\eta_1(z-\overline{z_\alpha})+\frac{d}{dz}\log\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\right\}\\
&\qquad -\left\{2\eta_1(z+\overline{z_\alpha})+\frac{d}{dz}\log\theta_1(z+\overline{z_\alpha})\right\}+\left\{2\eta_1(z+z_\alpha)+\frac{d}{dz}\log\theta_1(z+z_\alpha)\right\}\Bigg]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\log\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}.
\end{aligned}$$

よって,

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}+C.$$

C は $W(0)=0$ から定める.$z=0$ とすると, θ_1 は奇関数であるから,

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{1}{2\pi i}\log\frac{\theta_1(-z_\alpha)\theta_1(z_\alpha)}{\theta_1(-\overline{z_\alpha})\theta_1(\overline{z_\alpha})}\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\log\left\{\frac{\theta_1(z_\alpha)}{\theta_1(\overline{z_\alpha})}\right\}^2.
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
W(z) &= \frac{1}{2\pi i}\log\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}-\frac{1}{2\pi i}\log\left\{\frac{\theta_1(z_\alpha)}{\theta_1(\overline{z_\alpha})}\right\}^2\\
&= \frac{1}{2\pi i}\log\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)\{\theta_1(\overline{z_\alpha})\}^2}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})\{\theta_1(z_\alpha)\}^2}.
\end{aligned}$$

ゆえに, 求めたいグリーン関数 G は

$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathrm{Im}W(z)\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)\{\theta_1(\overline{z_\alpha})\}^2}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})\{\theta_1(z_\alpha)\}^2}\right|\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)\{\overline{\theta_1(z_\alpha)}\}^2}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})\{\theta_1(z_\alpha)\}^2}\right| \qquad (\because \text{補題}.17)\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}\right|.
\end{aligned}$$

実際に, このグリーン関数 G は境界条件をみたす.

1.) $0 \le \mathrm{Re}z \le \frac{1}{2}, \mathrm{Im}z = 0$ のとき.
z は実数であるから,

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}\right|\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(\overline{z-z_\alpha})\theta_1(\overline{z+z_\alpha})}\right|\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\overline{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}}\right| (\because \text{補題}.17)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.) $\mathrm{Re}z = 0, 0 \leq \mathrm{Im}z \leq \frac{b}{2}$ のとき.

z は純虚数であるから,

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(\overline{-z-z_\alpha})\theta_1(\overline{-z+z_\alpha})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{-\theta_1(\overline{z+z_\alpha})\{-\theta_1(\overline{z-z_\alpha})\}}\right| \qquad (\because \theta_1：\text{奇関数}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\overline{\theta_1(z+z_\alpha)\theta_1(z-z_\alpha)}}\right| \qquad (\because \text{補題}.17) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

3.) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}, 0 \leq \mathrm{Im}z \leq \frac{b}{2}$ のとき.

$z = \frac{1}{2} + ix$(x:実数) と表されるから,

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\{-\theta_1(z-(1-z_\alpha))\}}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\{-\theta_1(z-(1-\overline{z_\alpha}))\}}\right| \qquad (\because \text{補題 18.より}\,\theta_1(v) = -\theta_1(v-1)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(\frac{1}{2}+ix-z_\alpha)\{-\theta_1(-\frac{1}{2}+ix+z_\alpha))\}}{\theta_1(\frac{1}{2}+ix-\overline{z_\alpha})\{-\theta_1(-\frac{1}{2}+ix+\overline{z_\alpha}))\}}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(\frac{1}{2}+ix-z_\alpha)\theta_1(\frac{1}{2}-ix-z_\alpha))}{\theta_1(\frac{1}{2}+ix-\overline{z_\alpha})\theta_1(\frac{1}{2}-ix-\overline{z_\alpha}))}\right| \qquad (\because \theta_1：\text{奇関数}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(\frac{1}{2}+ix-z_\alpha)\theta_1(\frac{1}{2}-ix-z_\alpha))}{\theta_1(\overline{\frac{1}{2}-ix-z_\alpha})\theta_1(\overline{\frac{1}{2}+ix-z_\alpha}))}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(\frac{1}{2}+ix-z_\alpha)\theta_1(\frac{1}{2}-ix-z_\alpha))}{\overline{\theta_1(\frac{1}{2}-ix-z_\alpha)\theta_1(\frac{1}{2}+ix-z_\alpha))}}\right| (\because \text{補題}.17) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

4.) $0 \leq \mathrm{Re}z \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}z = \frac{b}{2}$ のとき.

$z = x + i\frac{b}{2}$(x:実数) と表されるから,

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha)}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha})\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\{-e^{-2\pi i(z+z_\alpha-bi)}e^{-i\pi bi}\theta_1(z+z_\alpha-bi)\}}{\{-e^{-2\pi i(z-\overline{z_\alpha}-bi)}e^{-i\pi bi}\theta_1(z-\overline{z_\alpha}-bi)\}\theta_1(z+\overline{z_\alpha})}\right| \\
&\quad (\because \theta_1(v+bi) = -e^{-2i\pi v}e^{-i\pi bi}\theta_1(v)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(z-z_\alpha)\theta_1(z+z_\alpha-bi)(-e^{-2\pi i z_\alpha})}{\theta_1(z-\overline{z_\alpha}-bi)\theta_1(z+\overline{z_\alpha})(-e^{-2\pi i\overline{z_\alpha}})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(x+\frac{b}{2}i-z_\alpha)\theta_1(x-\frac{b}{2}i+z_\alpha)}{\theta_1(x-\frac{b}{2}i-\overline{z_\alpha})\theta_1(x+\frac{b}{2}i+\overline{z_\alpha})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(x+\frac{b}{2}i-z_\alpha)\theta_1(x-\frac{b}{2}i+z_\alpha)}{\theta_1(\overline{x-\frac{b}{2}i-z_\alpha})\theta_1(\overline{x+\frac{b}{2}i+z_\alpha})}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\theta_1(x+\frac{b}{2}i-z_\alpha)\theta_1(x-\frac{b}{2}i+z_\alpha)}{\overline{\theta_1(x-\frac{b}{2}i-z_\alpha)\theta_1(x+\frac{b}{2}i+z_\alpha)}}\right| (\because \text{補題}.17) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5　付録

5.1　定理 5. の証明

ここでは (1) が成り立つことを示す．$y=0$ として示せば十分である．$\phi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} (\Delta\phi(x)) G_0(x) dx$$

とおく．このとき，$I = -\phi(0)$ を示せばよい．つまり，

$$I(r) = \int_{r<|x|} (\Delta\phi(x)) G_0(x) dx$$

とおいたとき，$\lim_{r\searrow 0} I(r) = -\phi(0)$ を示せばよい．ここで，$\mathrm{supp}\phi$ のコンパクト性から，十分大きな R に対して，

$$I(r) = \int_{r<|x|<R} (\Delta\phi(x)) G_0(x) dx$$

とできる．また，$\Delta G_0 = 0$ に注意して，$A = \{x | r \le |x| \le R\}, \nu$ を A の単位法線ベクトルとすると，

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_A \Delta\phi G_0 \\ &= \int_{|x|=r} G_0 \nabla\phi \cdot \nu - \int_A \nabla\phi \cdot \nabla G_0 \\ &= \int_{|x|=r} G_0 \nabla\phi \cdot \nu - \left(\int_{|x|=r} \phi \nabla G_0 \cdot \nu - \int_A \phi \Delta G_0 \right) \\ &= \int_{|x|=r} G_0 \nabla\phi \cdot \nu - \int_{|x|=r} \phi \nabla G_0 \cdot \nu \end{aligned} \tag{20}$$

である．ここで，$\nabla G_0(x) = |\mathbf{S}^{n-1}|^{-1} |x|^{-n} x$ であり，$|x| = r$ において，

$$\begin{aligned} \nabla G_0 \cdot \nu &= |\mathbf{S}^{n-1}|^{-1} |x|^{-n} x \cdot \left(\frac{x}{|x|} \right) \\ &= |\mathbf{S}^{n-1}|^{-1} |x|^{-n+1} \\ &= |\mathbf{S}^{n-1}|^{-1} r^{-n+1} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} ((20) \text{ の第 2 項}) &= -|\mathbf{S}^{n-1}|^{-1} \int_{|x|=r} \phi(x) r^{-n+1} d\omega \\ &= -|\mathbf{S}^{n-1}|^{-1} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \phi(r\omega) d\omega \qquad (\because \text{変数変換 } x \mapsto r\omega) \\ &\to -\phi(0) \qquad (r \searrow 0) \qquad (\because \phi : x = 0 \text{ で連続}). \end{aligned}$$

また，

1.) $n \neq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
((20) \text{ の第 1 項}) &= \int_{\mathbf{S}^{n-1}} G_0(r\omega)(\nabla\phi(r\omega)\cdot\nu)r^n d\omega \qquad (\because \text{変数変換 } x \mapsto r\omega) \\
&\leq M \int_{\mathbf{S}^{n-1}} G_0(r\omega)r^n d\omega \\
&\quad (\because \nabla\phi(r\omega)\cdot\nu \text{は有界より } \nabla\phi(r\omega)\cdot\nu \leq M \text{ とした}) \\
&= M \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} r^{2-n} r^n d\omega \\
&= M\{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} r^2 |\mathbf{S}^{n-1}| \\
&\to 0 \, (r \searrow 0).
\end{aligned}$$

2.) $n = 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
|((20) \text{ の第 1 項})| &\leq \int_{\mathbf{S}^1} |G_0(r\omega)(\nabla\phi(r\omega)\cdot\nu)r^2| d\omega \qquad (\because \text{変数変換 } x \mapsto r\omega) \\
&\leq M \int_{\mathbf{S}^1} |G_0(r\omega)| r^2 d\omega \\
&\quad (\because \nabla\phi(r\omega)\cdot\nu \text{は有界より } \nabla\phi(r\omega)\cdot\nu \leq M \text{ とした}) \\
&= M \int_{\mathbf{S}^1} |\mathbf{S}^1|^{-1} r^2 |\log r| d\omega \\
&= M|\mathbf{S}^1|^{-1} r^2 \int_{\mathbf{S}^1} \log r d\omega \\
&= M|\mathbf{S}^1|^{-1} r^2 |\mathbf{S}^1| \log r \\
&\to 0 \, (r \searrow 0).
\end{aligned}$$

ゆえに, $\lim_{r\searrow 0} I(r) = -\phi(0)$ である.

5.2 定理 6. の証明

まず, (3) が成り立つことを示す. つまり, 任意の球体 $B \subset \mathbf{R}^n$ に対して, $I_B = \int_B |u| < \infty$ を示す. ここで,

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |G_y(x)f(y)| dy$$

であるから,

$$\begin{aligned}
I_B = \int_B |u| &\leq \int_B \left(\int_{\mathbf{R}^n} |G_y(x)f(y)| dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_B |G_y(x)| dx \right) |f(y)| dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} H_B(y) |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

ただし, $H_B(y) = \int_B |G_y(x)| dx$ である. 仮定より, $B = \{x \in \mathbf{R}^n | |x - x_0| \leq R\}$ として, $H_B(y)$ が有界であることが示せればよい.

1.) $n \neq 2$ のとき,

（a）$|y-x_0|>R$ のとき,

$$\begin{aligned}
H_B(y) &= \int_{|x-x_0|\le R} \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1}|x-y|^{2-n}dx \\
&= \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} \int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{|x-x_0|=r} |x-y|^{2-n} d\sigma \right) dr \\
&= \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} \int_{r=0}^{r=R} \left(|\mathbf{S}^{n-1}|r^{n-1}|x_0-y|^{2-n} \right) dr \\
&\quad (\because \text{調和関数の平均値の定理}) \\
&= \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1}|\mathbf{S}^{n-1}|\frac{R^n}{n}|x_0-y|^{2-n} \\
&= |G_y(x_0)|\frac{R^n}{n} < \infty
\end{aligned}$$

（b）$|y-x_0|\le R$ のとき, $|x-x_0|\le R$ において,

$$|x-y| \le |x-x_0| + |x_0-y| = 2R$$

より, $\{x||x-x_0|\le R\} \subset \{x||x-y|\le 2R\}$ であるから,

$$\begin{aligned}
H_B(y) &= \int_{|x-x_0|\le R} \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1}|x-y|^{2-n}dx \\
&\le \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} \int_{|x-y|\le 2R} |x-y|^{2-n}dx \\
&= \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} \int_{r=0}^{r=2R} \left(\int_{|x-y|=r} |x-y|^{2-n} d\sigma \right) dr \\
&= \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} \int_{r=0}^{r=2R} \left(\int_{|x-y|=r} r^{2-n} d\sigma \right) dr \\
&= \{(n-2)|\mathbf{S}^{n-1}|\}^{-1} \int_{r=0}^{r=2R} r^{2-n}|\mathbf{S}^{n-1}|r^{n-1}dr \\
&= (n-2)^{-1}\frac{1}{2}(2R)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

2.) $n=2$ のとき,

（a）$|y-x_0|>R+1$ のとき, $|x-x_0|\le R$ において,

$$|x-y| > |y-x_0| - |x_0-x| > 1$$

より, $\log|x-y|>0$ であるから,

$$\begin{aligned}
H_B(y) &= \int_{|x-x_0|\le R} \frac{1}{2\pi}\log|x-y|dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{|x-x_0|=r} \log|x-y|d\sigma \right) dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=R} 2\pi r\log|x_0-y|dr \qquad (\because \text{調和関数の平均値の定理}) \\
&= \frac{R^2}{2}\log|x_0-y| < \infty.
\end{aligned}$$

（b）$|y-x_0|\leq R+1$ のとき, $|x-x_0|\leq R$ において,

$$|x-y|<|x-x_0|+|x_0-y|\leq 2R+1$$

より, $\{x||x-x_0|\leq R\}\subset\{x||x-y|\leq 2R+1\}$ であるから,

$$\begin{aligned}
H_B(y) &= \int_{|x-x_0|\leq R}\left|-\frac{1}{2\pi}\log|x-y|\right|dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\leq 2R+1}|\log|x-y||\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=2R+1}\left(\int_{|x-y|=r}|\log|x-y||\,d\sigma\right)dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=2R+1}2\pi r\,|\log r|\,dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1}r(-\log r)dr+\int_{r=1}^{r=2R+1}r(\log r)dr \\
&= \left[-\frac{1}{4}r^2(2\log r-1)\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}r^2(2\log r-1)\right]_1^{2R+1} \\
&= \frac{1}{4}(2R+1)^2\{2\log(2R+1)-1\}+\frac{1}{2}<\infty.
\end{aligned}$$

したがって, I_B は有界である. つまり, (3) がなりたつ.

次に (4) を示す. 任意の $\phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して,

$$-\int_{\mathbf{R}^n}u\Delta\phi=\int_{\mathbf{R}^n}f\phi$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbf{R}^n}u(x)\Delta\phi(x)dx &= -\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}G_y(x)f(y)dy\Delta\phi(x)dx \\
&= -\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n}G_y(x)\Delta\phi(x)dx\right)f(y)dy \\
&= -\int_{\mathbf{R}^n}(-\phi(y))\,f(y)dy \qquad (\because (1)) \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}f(y)\phi(y)dy.
\end{aligned}$$

5.3 一般領域のグリーン関数の性質

ここでは, 定義 7. を用いて定理 8. が成り立つことを証明する.

以下では, $E(x-y)=-\frac{1}{2\pi}\log|x-y|$ とする.

$x\in\Omega$ を固定して, Ω から半径 ϵ の閉球 $\overline{B_\epsilon(x)}$ を取り出した領域を Ω_ϵ とおく. グリーンの定理より,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\epsilon}(u(y)\Delta_yE(x-y)-E(x-y)\Delta u(y))dy \\
&\quad=\int_{\partial\Omega_\epsilon}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y)-E(x-y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}u(y)\right)dS_y \qquad (21)
\end{aligned}$$

である．ここで, Ω_ϵ 上で $\Delta_y E(x-y)=0$ であるから,

$$((21)\text{ の左辺}) \to -\int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)dy \qquad (\epsilon\to 0)$$

である. 次に右辺に関して, $\partial\Omega = \partial\Omega \cap S_\epsilon(x)$(非交和) である. ここで $y\in S_\epsilon(x)$ に関して,

$$E(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\log\epsilon$$

であり, $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ は有界であるから, $\sup\frac{\partial u}{\partial\nu}=M$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_{S_\epsilon(x)}\left|E(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|dS_y &\le M|S_\epsilon(x)|\frac{1}{2\pi}|\log\epsilon| \\ &= M\epsilon|\log\epsilon| \\ &\to 0\end{aligned}$$

である．また, $y\in S_\epsilon(x)$ に関して,

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\epsilon}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_{S_\epsilon(x)} u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y)dS_y &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\epsilon}\int_{S_\epsilon(x)}u(y)dS_y \\ &\to \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\epsilon}|S_\epsilon(x)|u(x) \qquad (u:\text{連続}) \\ &= u(x)\end{aligned}$$

である. したがって,

$$((21)\text{ の右辺}) \to u(x) + \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y) - E(x-y)\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right)dS_y.$$

ゆえに,

$$u(x) = -\int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y) - E(x-y)\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right)dS_y \quad (22)$$

がなりたつ．ここで再びグリーンの定理より,

$$\int_\Omega (u(y)\Delta_y K(x,y) - K(x,y)\Delta u(y))dy = \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}K(x,y) - K(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right)dS_y$$

であり, $\Delta_y K(x,y)=0$ であるから,

$$\int_\Omega K(x,y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}K(x,y) - K(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right)dS_y = 0$$

である. さらに, $K(x,y) = -E(x,y) \quad (x\in\partial\Omega)$ であるから,

$$0 = \int_\Omega K(x,y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}K(x,y) + E(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right)dS_y \qquad (23)$$

である．(22), (23) より,

$$u(x) = -\int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega}u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,y)dS_y.$$

さらに, $-\Delta u = f \quad \mathrm{in}\, \Omega$, $u = 0 \quad \mathrm{in}\, \partial\Omega$ であるから,

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y) dy$$

となり, 定理 8. がなりたつ.

5.4 最大値原理

(参考文献 [3]p.104)

定理 19. Ω を $\mathbf{R^2}$ 内の有界領域とし, $u(x)$ を Ω 上で連続で, Ω 内で劣調和 $(\Delta u \geq 0)$ であるとする. このとき,

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

がなりたつ.

証明

$$\max_{x \in \Omega} u(x) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

として, 矛盾を導く. 各 $\epsilon > 0$ に対して, $u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$ とおく. このとき, ϵ を十分小さくとれば, u_ϵ は Ω 内で最大値をとる. その最大値をとる点を $x_0 \in \Omega$ としたとき, ヘッセ行列 $\left(\frac{\partial^2 u_\epsilon(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$ は半負定値で, この行列のトレースは非正である. したがって,

$$\Delta u_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u_\epsilon(x_0)}{\partial {x_i}^2}\right) \leq 0.$$

しかし, u_ϵ の定義式から, $\Delta_{u_\epsilon} = \Delta u + 2n\epsilon$ であるから, $\Delta u_\epsilon > 0$ となり, 矛盾する.

6　謝辞

修士論文を提出するにあたり, お世話になった方々にこの場を借りてお礼申し上げます. 終始適切なご指導を頂き, 暖かく見守って下さった大塚浩史教授には, この 3 年間の研究室生活全般にわたってお世話になりました. また, 自身の議論にお付き合いいただいた同期にも厚く御礼を申し上げ, 感謝の意を表します.

参考文献

[1] Elliott H.Lieb Michael Loss :ANALYSIS, American Mathematical Society(1997)

[2] フルビッツ, クーラント 著, 足立恒雄, 小松啓一 訳:楕円関数論, シュプリンガ-フェアラーク東京 (1994)

[3] 俣野博, 神保道夫:熱, 波動と微分方程式 (現代数学への入門), 岩波書店 (2004)

[4] ミカエル D. グリーンベルグ 著, 関谷壮 訳:応用グリーン関数 (境界要素法の基礎), ブレイン図書出版 (1983)

[5] 坂上貴之:渦運動の数理的諸相, 共立出版 (2013)