修士論文
一般化超幾何関数の接続問題とその応用
Connection problem for the generalized hypergeometric function and its application

金沢大学大学院 自然科学研究科 数物科学専攻 (博士前期課程)
学籍番号 1715011041
2 年 松平 湧也

2019 年 1 月 31 日

目次

1　はじめに

本論文では一般化超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ の接続問題について議論する．接続問題は数学や物理学の様々な問題の中に現れる．Fuchs 型微分方程式は, リーマン球面上の特異点がすべて確定特異点であるような微分方程式のことをいう．Frobenius の方法により, 確定特異点における局所解を構成することができるため, Fuchs 型微分方程式の異なる確定特異点における解の基本系に対して接続問題を考えることができる．ここではとくに, 考える Fuchs 型微分方程式が rigid である, という条件を課す．すなわち, 考える Fuchs 型方程式を, アクセサリーパラメータを持たないものに限定する．Fuchs 型微分方程式の例として, Gauss の超幾何微分方程式とよばれる 2 階微分方程式, even four とよばれる 4 階微分方程式などがあげられる．Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1$ の場合には $z=0,\infty$ の接続問題, および $z=0$ と $z=1$ の接続問題は完全に解かれている ([犬井])．even four の場合には $z=0,\infty$ の接続問題が解かれている ([原岡 2], [HM])．このように 1 つ 1 つの方程式の接続問題を考察することはできるが, 一般の Fuchs 型微分方程式の確定特異点における接続問題に関しては明示的な結果が得られていなかった．しかし, 2010 年に大島 [Os] は次の決定的な結果を得た．その概要を述べる．Fuchs 型微分方程式

$$(E):\quad y^{(n)}+p_1(z)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(z)y=0$$

の確定特異点 $z=a_j$ に対して, a_j の近傍 U_j における (E) の解全体のなす線形空間を V_{a_j} とおき, 特性指数 ρ の同値類に属する特性指数を持つ U_j 上の (E) の解全体を $V_{a_j,\rho}$ とおく．ここで, 特性指数 ρ の同値類とは, 特性指数 ρ,ρ' に整数差があるとき, これら ρ,ρ' を同じとみなす同値関係の同値類である．このとき,

定理 1.1 ([原岡 2], 定理 4.1)**.** 確定特異点 $z=a_j$ における (U_j 上の) 解空間 V_{a_j} は次のように直和分解される．

$$V_{a_j}=\bigoplus_{\rho}V_{a_j,\rho} \tag{1.1}$$

ここで ρ は $z=a_j$ における特性指数の同値類の代表元をわたる．

大島は Fuchs 型微分方程式を別の Fuchs 型微分方程式へ移す操作として addition と middle comvolution という 2 つの操作を定義した．これらの操作は一般に方程式の階数を変化させ, また, これらの操作は可逆である．これら 2 つの操作を繰り返して, Fuchs 型微分方程式の階数を可能な限り落とした方程式を basic とよぶことにする．このとき,

定理 1.2 (大島の結果)**.** Fuchs 型微分方程式 (E) の 2 つの異なる特異点 $z=a_i,a_j$ と, それぞれにおける特性指数 ρ,ρ' について,

$$\mathrm{dim}V_{a_i,\rho}=1,\mathrm{dim}V_{a_j,\rho'}=1$$

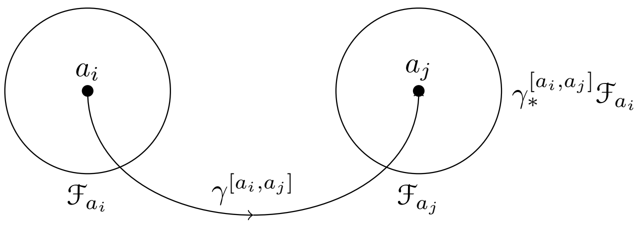
を仮定する．解空間 $V_{a_i,\rho}, V_{a_j,\rho'}$ の基底 $y(z), \tilde{y}(z)$ をとる．このとき, $y(z)$ を $z = a_j$ に解析接続した結果の, $z = a_j$ の各特性指数による解空間 $V_{a_j,\rho'}$ による直和分解 (1.1) における $\tilde{y}(z)$ の係数は, (E) に対応する basic な方程式の対応する接続係数を用いて, Γ 関数により具体的かつ明示的に表示できる．

ここで, 元の Fuchs 型微分方程式が rigid であるとき, 定理 1.2 の主張における basic な方程式とは,

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{k=1}^{p} \frac{b_k}{z - a_k} y \ (b_k \in \mathbb{C})$$

である．

さて, 一般化超幾何関数の満たす微分方程式 ${}_{n+1}E_n$ もまた, $\mathbb{C}P^1$ 上 3 点 $z = 0, 1, \infty$ を確定特異点に持つ Fuchs 型微分方程式である．この方程式は一般化超幾何微分方程式とよばれ, この方程式は $z = 0, 1, \infty$ のそれぞれに $n + 1$ 個の解の基本系を持つ．これらの解の基本系をそれぞれ $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ とおく．一般化超幾何微分方程式の特異点 $a_i, a_j \in \{0, 1, \infty\}$ $(a_i \neq a_j)$ に対して, $\gamma^{[a_i,a_j]}$ を, $z = a_i$ を始点として $z = a_j$ を終点とする曲線とし, $\gamma_*^{[a_i,a_j]} f$ は関数 f を曲線 $\gamma^{[a_i,a_j]}$ に沿って解析接続した関数を表すことにする．このとき, 解の基本系 $\mathcal{F}_{a_i}$ を曲線 $\gamma_*^{[a_i,a_j]}$ に沿って解析接続した結果もまた一般化超幾何微分方程式の解となり, しかも, $\gamma_*^{[a_i,a_j]} \mathcal{F}_{a_i}$ は $z = a_j$ の解の基本系となる．従って元の解の基本系 $\mathcal{F}_{a_j}$ と, $\mathcal{F}_{a_i}$ を曲線 $\gamma_*^{[a_i,a_j]}$ に沿って解析接続した $\gamma_*^{[a_i,a_j]} \mathcal{F}_{a_i}$ の間には線形関係が存在する．すなわち, 行列 $C^{[a_i,a_j]} \in GL(n+1, \mathbb{C})$ が存在して, $\gamma_*^{[a_i,a_j]} \mathcal{F}_{a_i} = C^{[a_i,a_j]} \mathcal{F}_{a_j}$ と書ける．この行列 $C^{[a_i,a_j]}$ の明示的かつ具体的な表示を求める問題を一般化超幾何関数の接続問題という．



一般化超幾何微分方程式はアクセサリーパラメータを持たない rigid な Fuchs 型方程式である．一般化超幾何関数の Riemann Scheme は (2.1) で与えられるが, この Scheme から, 各特性指数間に整数差がないときには, $z = 0, \infty$ のまわりには $n + 1$ 個の非対数的な一次独立解を持つ．このときの仮定から, $z = 0, \infty$ の各特性指数に対する解空間の次元は 1 になるから, 大島の結果が適用でき, 接続問題は具体的に解ける．しかし, (2.1) から, 一般化超幾何微分方程式は $z = 1$ では n 個の正則解をもち, その特性指数には整数差しか違いがないため, $z = 1$ での特性指数 0 に対する解空間の次元は n になる．このことから, 一般化超幾何微分方程式の $z = 1$ まわりの正則解と $z = 0, \infty$ の接続問題を解決するためには, 大島の結果を適用することはできない．一般化超幾何微分方程式の接続問題については, $z = 0$ まわりの解の基本系と $z = \infty$ まわりの解の基本系との線形関係式, および, $z = 0$ まわりの解の基本系と $z = 1$ まわりの非正則解との線形関係式はよく知られており,

これまで様々に解決されてきた．$z=0$, $z=\infty$ の解の基本系の接続問題は, ${}_{n+1}F_n$ の場合には, 例えば川畑 [K1][K2], Smith[S], Norlund[N], 三町 [M2] によりそれぞれ解決されている．さらに, $z=1$ のまわりの非正則解と $z=0$ の解の基本系の関係は, 三町 [M2] によって解決されている．また, $z=1$, $z=\infty$ の解の基本系の接続問題は, 大久保-高野-吉田 [OTY] により解決されている．このように, $z=0$ まわりの解の基本系と $z=\infty$ まわりの解の基本系との接続問題, および $z=1$ まわりの非正則解と $z=0$ まわりの解の基本系の接続問題は多くの研究者によってすでに解決されている．

一方 [GIL] では共形ブロックの接続問題を一般化超幾何関数の $z=0,\infty$ の接続関係式を用いて考えていた．また, [GIL] によれば, $z=0,\infty$ の接続関係式を, 正規化因子を取り替えることで共形ブロックのパラメータ θ_0,σ に関して周期を 1 にすることができることが述べられている．この事実は, 共形ブロックの $z=0,\infty$ の接続問題を解く際に, 接続係数 $C_{i,j}(\sigma,\theta)$ の和のパラメータを取り直すために重要な役割を果たす．このことを受けて, $z=0,1$ の接続関係式も同じようにパラメータ θ_0,σ に関しての周期を 1 にすることができるのではないかと考えられる．

以上の動機から, 本論文では以下の 2 つのことを目標にする．ひとつは $z=0$ と $z=1$ の接続問題を解決することである．もうひとつは, 一般化超幾何関数の接続問題の応用のひとつとして, 共形ブロックの接続問題を考察することである．とくに, 本論文で導く接続係数はすべて sine の積に因数分解されていることが特徴である．

本論文は以下のように議論する．第 2 章で本論文の議論の対象となる一般化超幾何関数の定義と簡単な性質の紹介, および頂点作用素の期待値として共形ブロックの定義を行う．第 2 章までの準備をもって, 第 3 章では一般化超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ において $n=2$ の場合を扱う．すなわち, ${}_3F_2$ の $z=0,\infty$ の接続問題と, $z=0,1$ の接続問題を解く．第 4 章では, 一般の n に対する ${}_{n+1}F_n$ の接続問題を解決する．本論文では, [M2] で導かれた ${}_{n+1}E_n$ の $z=0,\infty$ の接続問題を用いて, $z=0$ における解の基本系と, $z=1$ における解の基本系の接続問題を解決する (定理 4.8)．第 4 章で得られた接続行列は, 第 5 章で共形ブロックのパラメータ σ,θ に関して周期化される．第 6 章では, 一般化超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ の接続問題の 1 つの応用として, 共形ブロックの接続問題に挑戦する．共形ブロックの接続問題は, q 差分型一般化超幾何関数の接続問題から導かれる．第 2 章で定義された共形ブロックは, Alday-Galotto-Tachikawa による発見 (AGT 対応といわれる) により, Nekrasov factor を用いた級数に一致する．このことから第 6 章では q 共形ブロックとして (6.2) を考える．q 差分型一般化超幾何関数は, 4 点共形ブロックの特別な場合 (パラメータ σ,θ を特殊化した場合) であり, q 差分型一般化超幾何関数の接続問題を解くことができれば, 接続関係式の両辺に, 4 点共形ブロックの両側のヤング図形を増やす作用素 (以降は昇作用素という) を作用させてヤング図形の数を増やしていくことができる．昇作用素を作用させると, ヤング図形が変化するため, 対応する共形ブロックのパラメータも $\tilde{\sigma},\tilde{\theta}$ に変化する．このパラメータの変化によって, q 差分型一般化超幾何関数の接続係数のパラメータも変化するが, あるスカラーを事前に接続関係式の両辺に乗じておくことで, 第 5 章の結果から接続行列のパラメータ σ,θ に関して周期化できる．このことを用いて 4 点共形ブロックの接続問題が解かれる．この 4 点共形ブロックの接続関係式の両辺で, 増やしたヤング図形に関して和をとる操作を繰り返していくことで一般の m 点共形ブロックの接続問題が

解けることが期待される. 以上の方針で共形ブロックの接続問題に挑戦したが, 時間の関係で共形ブロックの接続問題を最後まで解ききることはできなかった.

2　一般化超幾何関数と共形ブロック

2.1　一般化超幾何関数

定義 2.1 (一般化超幾何級数)**.** $n \in \mathbb{Z}$ $(n > 0), \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ とする．このとき

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \\ \beta_1, \dots, \beta_n\end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_{n+1})_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_n)_k k!} z^k $$

を**一般化超幾何級数**という．ただし, $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$ (a)_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ a(a+1)\cdots(a+k-1) & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases} $$

と定める．

一般化超幾何級数 ${}_{n+1}F_n$ の収束半径は 1 である．一般化超幾何級数は微分方程式

$$ \left\{ \delta_z \{ \prod_{l=1}^{n} (\delta_z + \beta_l - 1) \} - z \{ \prod_{l=1}^{n+1} (\delta_z + \alpha_l) \} \right\} F = 0 $$

を満たす．ここで $\delta_z = z(d/dz)$ である．この微分方程式を**一般化超幾何微分方程式**といい, ここでは記号で ${}_{n+1}E_n$ とあらわす．一般化超幾何微分方程式は $z = 0, 1, \infty$ を確定特異点に持ち, その Riemann Scheme は

$$ \left\{ \begin{matrix} z=0 & z=1 & z=\infty \\ 1-\beta_1 & \sum_{i=1}^{n}\beta_i - \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i & \alpha_1 \\ 1-\beta_2 & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\beta_n & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \alpha_{n+1} \end{matrix} \right\} \tag{2.1} $$

で与えられる．ここで, 一般化超幾何微分方程式の Riemann Scheme とは, 一般化超幾何微分方程式の各特異点における特性指数を並べて表にしたものである．

一般化超幾何微分方程式は, 各特性指数間に整数差がないとき, $z = 0, 1, \infty$ まわりにそれぞれ $n+1$ 個の非対数的な一次独立な解をもつ．また, 一般化超幾何微分方程式は $x = 0$ では 1 つの正則解, $x = 1$ では n 個の正則解をもつことが上の Scheme からわかる．ここでは [高野] に倣い, 一般化超幾何微分方程式の解を**一般化超幾何関数**と総称する．

2.2　共形ブロック

はじめにいくつかの定義を行う．

定義 2.2. 次で定まる Lie 環を Virasoro 代数といい, Vir と表す:

$$\mathrm{Vir} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_m \bigoplus \mathbb{C}c \ (c \in \mathbb{C})$$

ここで, Vir の交換子 $[*,*]$:Vir × Vir → Vir は

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}c\frac{m^3-m}{12}\\ [L_m, c] &= 0\end{aligned}$$

で定められる. $c \in \mathbb{C}$ を Vir のセントラルチャージという.

定義 2.3. $\Delta \in \mathbb{C}$ に対して, M_Δ が Vir の加群であるとは, 線型準同型 $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}(M_\Delta)$ が存在して, 条件

$$\rho([L_m, L_n]) = [\rho(L_m), \rho(L_n)] = \rho(L_m)\circ\rho(L_n) - \rho(L_n)\circ\rho(L_m)$$

を満たすことをいう.

定義 2.4. $\Delta \in \mathbb{C}$ に対して, Vir の加群 M_Δ が以下の条件をすべて満たすとき, M_Δ を Vir の左 Verma 加群という:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad |\Delta\rangle \in M_\Delta\\
&(2) \quad \rho(L_0)(|\Delta\rangle) = \Delta|\Delta\rangle\\
&(3) \quad \rho(L_n)(|\Delta\rangle) = 0 \quad (n > 0)\\
&(4) \quad M_\Delta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{i_1\geq\cdots\geq i_k>0} \mathbb{C}\rho(L_{-i_1})\circ\cdots\circ\rho(L_{-i_k})|\Delta\rangle
\end{aligned}$$

定義 2.5. $\Delta \in \mathbb{C}$ に対して, Vir の加群 M^*_Δ が以下の条件をすべて満たすとき, M^*_Δ を Vir の右 Verma 加群という:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \langle\Delta| \in M^*_\Delta\\
&(2) \quad \langle\Delta|\rho(L_0) = \langle\Delta|\Delta\\
&(3) \quad \langle\Delta|\rho(L_n) = 0 \quad (n < 0)\\
&(4) \quad M^*_\Delta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{i_1\geq\cdots\geq i_k>0} \mathbb{C}\langle\Delta|\rho(L_{i_k})\circ\cdots\circ\rho(L_{i_1})
\end{aligned}$$

注意 2.6. 以降は簡単のため, 上の定義の $\rho(L_1)\circ\cdots\circ\rho(L_k)$ を単に $L_1\cdots L_k$ と表す.

定義 2.7. 上の定義のもとで, 条件

$$\begin{aligned}&\langle\Delta \mid \Delta\rangle = 1,\\ &\langle u \mid L_m\cdot \mid v\rangle = \langle u \mid \cdot L_m \mid v\rangle \ (\langle u \mid\in M^*_\Delta, \mid v\rangle \in M_\Delta)\end{aligned}$$

を満たす pairing $\langle|\rangle : M^*_\Delta \times M_\Delta \to \mathbb{C}$ が一意的に定まる.

定義 2.8. 線型写像 $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3,\Delta_1}(z) : M_{\Delta_1} \to M_{\Delta_3}$ が以下の条件をすべて満たすとき, $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3,\Delta_1}(z)$ を頂点作用素という:

$$(1) \quad [L_n, \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3,\Delta_1}(z)] = z^n \left(z\frac{d}{dz} + (n+1)\Delta_2 \right) \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3,\Delta_1}(z)$$

$$(2) \quad \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3,\Delta_1}(z)|\Delta\rangle = z^{\Delta_3-\Delta_2-\Delta_1} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \ (v_n \in M_{\Delta_3})$$

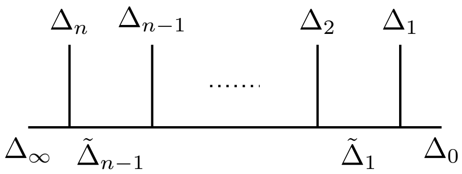
以下のように頂点作用素を用意する.

$$V_0 \xleftarrow{\Phi^{\Delta_\infty}_{0,\tilde{\Delta}_\infty}(z_\infty)} M_{\Delta_\infty} \xleftarrow{\Phi^{\Delta_n}_{\Delta_\infty,\tilde{\Delta}_{n-1}}(z_{\tilde{\Delta}_{n-1}})} \cdots \xleftarrow{\Phi^{\Delta_1}_{\tilde{\Delta}_1,\Delta_0}(z_1)} M_{\Delta_0} \xleftarrow{\Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0,0}(z_0)} V_0$$

ここで, V_0 は $\Delta = 0$ の既約な最高ウェイト表現である. すなわち, V_0 は既約であり, 定義 2.4 の (1), (2), (3) の条件を満たし, かつ V_0 は $L_{-i_1} \cdots L_{-i_k}|\Delta\rangle$ $(i_1 \geq \cdots \geq i_k > 0)$ で生成されているとする. この頂点作用素の列に対して, 期待値

$$\langle 0|\Phi^{\Delta_\infty}_{0,\tilde{\Delta}_\infty}(z_\infty)\Phi^{\Delta_n}_{\Delta_\infty,\tilde{\Delta}_{n-1}}(z_{\tilde{\Delta}_{n-1}}) \cdots \Phi^{\Delta_1}_{\tilde{\Delta}_1,\Delta_0}(z_1)\Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0,0}(z_0)|0\rangle$$

を共形ブロックという. 以降はこの共形ブロックを次のように表す:



以降は主に 4 点共形ブロック

$$\langle \Delta_5|\Phi^{\Delta_4}_{\Delta_5,\Delta_3}(w)\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3,\Delta_1}(z)|\Delta_1\rangle$$

を用いる.

注意 2.9. $n = 1$ のときは, 4 点共形ブロックのうち 1 点を特殊化することで超幾何関数 ${}_2F_1$ を得る. $n \geq 2$ のときは, Virasoro 代数ではなく, W 代数を用いる. 詳しくは [GIL] を参照.

いま, 一般化超幾何微分方程式 ${}_{n+1}E_n$ の Riemann Scheme と同値な微分方程式の $z = 0, 1, \infty$ まわりの解の基本系はそれぞれ共形ブロックを用いて以下のようにあらわすことができる. $\Delta_* = (*, *)/2$ とおくと,

(2.2) $$y^{(0)}_j = z^{\Delta_{\theta_0+h_j}-\Delta_{h_1}-\Delta_{\theta_0}}(1 + \mathcal{O}(z)) \ (z \to 0),$$

(2.3) $$y^{(1)}_j = (1-z)^{\Delta_{ah_1+h_j}-\Delta_{h_1}-\Delta_{ah_1}}(1 + \mathcal{O}(1-z)) \ (z \to 1),$$

(2.4) $$y^{(\infty)}_j = (z^{-1})^{\Delta_\sigma-\Delta_{h_1}-\Delta_{\sigma-h_j}}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \ (z \to \infty).$$

ここで, $\theta_0 = (\theta^{(1)}_0, \ldots, \theta^{(n+1)}_0), \sigma = (\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n+1)})$ はそれぞれ各成分の和が 0 のベクトルである. すなわち

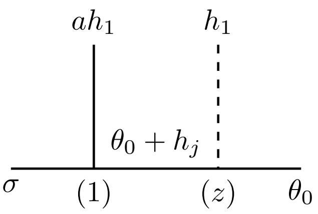
$$\theta^{(1)}_0 + \cdots + \theta^{(n+1)}_0 = 0, \quad \sigma^{(1)} + \cdots + \sigma^{(n+1)} = 0,$$

である．また, $h_j=(h_j^{(1)},\ldots,h_j^{(n+1)})$ $(1\le j\le n+1)$ を各成分が

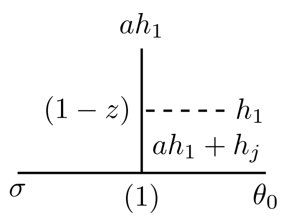
$$h_j^{(i)}=\delta_{i,j}-\frac{1}{n+1}$$

で与えられるベクトルである．$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである．さらに, 共形ブロックを用いれば, (2.2), (2.3), (2.4) はそれぞれ以下のように書ける．

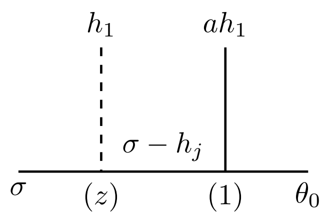
$$y_j^{(0)}=z^{\Delta_{\theta_0+h_j}-\Delta_{h_1}-\Delta_{\theta_0}}$$



$$y_j^{(1)}=(1-z)^{\Delta_{ah_1+h_j}-\Delta_{h_1}-\Delta_{ah_1}}$$



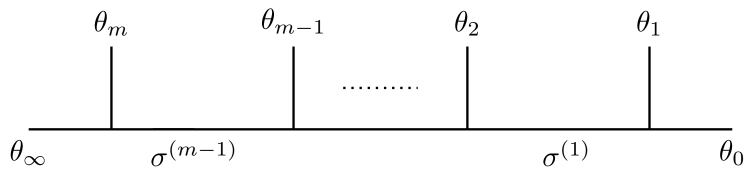
$$y_j^{(\infty)}=(z^{-1})^{\Delta_{\sigma}-\Delta_{h_1}-\Delta_{\sigma-h_j}}$$



ここで $a\in\mathbb{C}$ である．

注意 2.10. Alday-Gaiotto-Tachikawa は 4 次元ゲージ理論の Nekrasov 分配関数と, 2 次元共形場理論の 4 点共形ブロックが一致することを発見した ([AGT]). この発見は, AGT 対応と呼ばれている．

AGT 対応によれば, 第 6 章で用いる q 共形ブロックは次のように定義される ($N_{\lambda,\mu}(w)$ は Nekrasov factor とよばれる．6 章で正確に定義する).



$$=\sum_{\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(m-1)}\in\mathbb{Y}^n}\frac{\prod_{p=1}^{m}\left(\prod_{k,k'=1}^{n}N_{\lambda_k^{(p)},\lambda_{k'}^{(p-1)}}(q^{\sigma_k^{(p)}-\theta_p-\sigma_{k'}^{(p-1)}})\right)}{\prod_{p=1}^{m-1}\left(\prod_{k,k'=1}^{n}N_{\lambda_k^{(p)},\lambda_{k'}^{(p)}}(q^{\sigma_k^{(p)}-\sigma_{k'}^{(p)}})\right)}\prod_{p=1}^{m-1}\left(\frac{q^{2\theta_p}x_p}{x_{p+1}}\right)^{|\lambda^{(p)}|}.$$

次節でこれらの肩の指数 (特性指数) を具体的に計算する.

2.3 特性指数

一般化超幾何微分方程式の特性指数に関して, 共形ブロックの立場との関連を見る.

$x=(x_1,\ldots,x_{n+1}), y=(y_1,\ldots,y_{n+1})$ に対して, その内積を $(x,y)=\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k$ と定めると,

$$(h_j,h_k)=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & (j=k)\\ -\frac{1}{n+1} & (j\neq k)\end{cases}$$

が成り立つ.

共形ブロックの立場から一般化超幾何微分方程式を考察すると, それぞれの解の特性指数は以下のように対応する.

$x=0$ の解 $y_j^{(0)}$ の特性指数は,

$$\begin{aligned}\Delta_{\theta_0+h_j}-\Delta_{h_1}-\Delta_{\theta_0}&=\frac{1}{2}(\theta_0+h_j,\theta_0+h_j)-\frac{1}{2}(h_1,h_1)-\frac{1}{2}(\theta_0,\theta_0)\\&=\frac{1}{2}(\theta_0,\theta_0)+\frac{1}{2}(h_j,h_j)+(\theta_0,h_j)-\frac{1}{2}(h_1,h_1)-\frac{1}{2}(\theta_0,\theta_0)\\&=(\theta_0,h_j)\quad\left[\because (h_1,h_1)=(h_j,h_j)=\frac{n}{n+1}\right]\\&=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1,k\neq j}^{n+1}\theta_0^{(k)}+\frac{n}{n+1}\theta_0^{(j)}\\&=\frac{1}{n+1}\theta_0^{(j)}+\frac{n}{n+1}\theta_0^{(j)}\quad\left[\because \sum_{k=1,k\neq j}^{n+1}\theta_0^{(k)}=-\theta_0^{(j)}\right]\\&=\theta_0^{(j)}.\end{aligned}$$

$x=1$ の解 $y_j^{(1)}$ の特性指数は,

$$\begin{aligned}\Delta_{ah_1+h_j}-\Delta_{h_1}-\Delta_{ah_1}&=\frac{1}{2}(ah_1+h_j,ah_1+h_j)-\frac{1}{2}(h_1,h_1)-\frac{1}{2}(ah_1,ah_1)\\&=\frac{1}{2}(ah_1,ah_1)+\frac{1}{2}(h_j,h_j)+(ah_1,h_j)-\frac{1}{2}(h_1,h_1)-\frac{1}{2}(ah_1,ah_1)\\&=a(h_1,h_j)\quad\left[\because (h_1,h_1)=(h_j,h_j)=\frac{n}{n+1}\right]\\&=\begin{cases}\frac{n}{n+1}a\ (j=1)\\ -\frac{1}{n+1}a\ (j\neq 1).\end{cases}\end{aligned}$$

$x=\infty$ の解 $y_j^{(\infty)}$ の特性指数は

$$\begin{aligned}-(\Delta_\sigma-\Delta_{h_1}-\Delta_{\sigma-h_j})&=-\frac{1}{2}(\sigma,\sigma)+\frac{1}{2}(h_1,h_1)+\frac{1}{2}(\sigma-h_j,\sigma-h_j)\\&=-\frac{1}{2}(\sigma,\sigma)+\frac{1}{2}(h_1,h_1)+\frac{1}{2}(\sigma,\sigma)+\frac{1}{2}(h_j,h_j)+(\sigma,h_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\sigma, h_j) + \frac{n}{n+1} \quad \left[\because (h_1, h_1) = (h_j, h_j) = \frac{n}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1, k\neq j}^{n+1} \sigma^{(k)} - \frac{n}{n+1}\sigma^{(j)} + \frac{n}{n+1} \\
&= -\frac{1}{n+1}\sigma^{(j)} - \frac{n}{n+1}\sigma^{(j)} + \frac{n}{n+1} \quad \left[\because \sum_{k=1, k\neq j}^{n+1} \sigma^{(k)} = -\sigma^{(j)}\right] \\
&= -\sigma^{(j)} + \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

従って, 共形ブロックの Riemann Scheme を θ_0, σ を用いて表すと

$$
\left\{\begin{array}{ccc}
z=0 & z=1 & z=\infty \\
\theta_0^{(1)} & \frac{n}{n+1}a & -(\sigma^{(1)} - \frac{n}{n+1}) \\
\theta_0^{(2)} & -\frac{1}{n+1}a & -(\sigma^{(2)} - \frac{n}{n+1}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\theta_0^{(n+1)} & -\frac{1}{n+1} & -(\sigma^{(n+1)} - \frac{n}{n+1})
\end{array}\right\}
$$

となる. いま, 共形ブロックの解全体を

$$
P\left\{\begin{array}{ccc}
z=0 & z=1 & z=\infty \\
\theta_0^{(1)} & \frac{n}{n+1}a & -(\sigma^{(1)} - \frac{n}{n+1}) \\
\theta_0^{(2)} & -\frac{1}{n+1}a & -(\sigma^{(2)} - \frac{n}{n+1}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\theta_0^{(n+1)} & -\frac{1}{n+1} & -(\sigma^{(n+1)} - \frac{n}{n+1})
\end{array}\right\}
$$

と表すと,

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\begin{array}{ccc}
z=0 & z=1 & z=\infty \\
\theta_0^{(1)} & \frac{n}{n+1}a & -(\sigma^{(1)} - \frac{n}{n+1}) \\
\theta_0^{(2)} & -\frac{1}{n+1}a & -(\sigma^{(2)} - \frac{n}{n+1}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\theta_0^{(n+1)} & -\frac{1}{n+1}a & -(\sigma^{(n+1)} - \frac{n}{n+1})
\end{array}\right\} \\
&= z^{\theta_0^{(n+1)}}(1-z)^{-\frac{1}{n+1}a} P\left\{\begin{array}{ccc}
z=0 & z=1 & z=\infty \\
\theta_0^{(1)} - \theta_0^{(n+1)} & a & \theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(1)} - \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1} \\
\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(n+1)} & 0 & \theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(2)} - \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(n+1)} - \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

と変形される．この Scheme ともともとの ${}_{n+1}E_n$ の Scheme を比較すると，

$$\begin{cases} \beta_i = 1 - \theta_0^{(i)} + \theta_0^{(n+1)} & (1 \leq i \leq n) \\ \alpha_i = \theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(i)} - \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1} & \\ \quad = \theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(i)} - \frac{1}{n+1}a - \frac{1}{n+1} + 1 & (1 \leq i \leq n+1) \end{cases}$$

を得る．さらに，

$$a = \sum_{k=1}^{n} \beta_k - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k$$

である．

3 ${}_3F_2$ の接続問題

この章では $n = 2$ とする．すなわち，

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2\end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k(\alpha_3)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k k!} z^k$$

を考える．一般化超幾何関数 ${}_3F_2$ の満たす微分方程式は

$$\begin{aligned} z^2(1-z)y''' &+ \{\beta_1 + \beta_2 + 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3)z\}zy'' \\ &+ \{\beta_1\beta_2 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)z\}y' - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 y = 0 \end{aligned}$$

で与えられる．この方程式は

$$\begin{aligned} y''' &+ \frac{\{\beta_1 + \beta_2 + 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3)z\}}{z(1-z)} y'' \\ &+ \frac{\{\beta_1\beta_2 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)z\}}{z^2(1-z)} y' - \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{z^2(1-z)} y = 0 \end{aligned}$$

と書き換えられる．

したがって，${}_3E_2$ は $z = 0, 1, \infty$ を確定特異点に持つ Fuchs 型の微分方程式である．ここで，各特性指数に整数差がないという条件

$$\alpha_i - \alpha_j (1 \leq i, j \leq 3), \beta_1, \beta_2, \beta_1 - \beta_2 \notin \mathbb{Z}$$

を課すと，${}_3E_2$ は $z = 0$ のまわりの一次独立解として

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(z) &= (-z)^{1-\beta_1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1 - \beta_1 + 1, \alpha_2 - \beta_1 + 1, \alpha_3 - \beta_1 + 1 \\ 2 - \beta_1, \beta_2 - \beta_1 + 1\end{matrix}; z\right) \\ y_2^{(0)}(z) &= (-z)^{1-\beta_2}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1 - \beta_2 + 1, \alpha_2 - \beta_2 + 1, \alpha_3 - \beta_2 + 1 \\ \beta_1 - \beta_2 + 1, 2 - \beta_2\end{matrix}; z\right) \\ y_3^{(0)}(z) &= {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2\end{matrix}; z\right) \end{aligned}$$

の形の解をもつ．また ${}_3E_2$ は $z=\infty$ のまわりの一次独立解として

$$
\begin{aligned}
y_1^{(\infty)}(z) =& (-z)^{-\alpha_1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_1-\beta_1+1,\alpha_1-\beta_2+1\\ \alpha_1-\alpha_2+1,\alpha_1-\alpha_3+1\end{matrix};\frac{1}{z}\right)\\
y_2^{(\infty)}(z) =& (-z)^{-\alpha_2}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_2,\alpha_2-\beta_1+1,\alpha_2-\beta_2+1\\ \alpha_2-\alpha_1+1,\alpha_2-\alpha_3+1\end{matrix};\frac{1}{z}\right)\\
y_3^{(\infty)}(z) =& (-z)^{-\alpha_3}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_3,\alpha_3-\beta_1+1,\alpha_3-\beta_2+1\\ \alpha_3-\alpha_1+1,\alpha_3-\alpha_2+1\end{matrix};\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}
$$

の形の解をもつ．

$t=(t_1,t_2)$ として，

$$T=\mathbb{C}^2-\{t_1-t_2=0\}\cup\{t_1=0\}\cup\{t_2=0\}\cup\{t_2-z=0\}\cup\{t_2-t_1=0\}$$

上定義される関数

$$u(t)=t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(t_2-z)^{\mu_3}\ (\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathbb{C})$$

を考える．

この関数 $u(t)$ において，

$$\lambda_i=\alpha_{i+1}-\beta_i \qquad (i=1,2) \tag{3.1}$$

$$\mu_j=\beta_j-\alpha_j-1 \qquad (j=1,2,3) \tag{3.2}$$

とおくと，一般化超幾何関数 ${}_3F_2$ の積分表示

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ \beta_1,\beta_2\end{matrix};z\right)=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_2-\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)}\\
&\int_1^{+\infty}\int_{t_1}^{+\infty}t_1^{\alpha_2-\beta_1}(t_1-1)^{\beta_1-\alpha_1-1}t_2^{\alpha_3-\beta_2}(t_2-z)^{-\alpha_3}(t_2-t_1)^{\beta_2-\alpha_2-1}dt_2dt_1
\end{aligned}
$$

の被積分関数になる．ここで，積分の収束のために

$$\mathrm{Re}(\alpha_1),\mathrm{Re}(\beta_1-\alpha_1),\mathrm{Re}(\alpha_2),\mathrm{Re}(\beta_2-\alpha_2)>0$$

を仮定しておく．また，一般にこの被積分関数は多価関数だから，積分の計算のためにはその分枝を指定しなければならない．分枝の指定の方法に関しては次節にまとめる．

3.1 $u(t)$ の分枝の定め方

[M1] および [M2] に倣って多価関数 $u(t)$ の分枝 (の定数倍) を定める．$i=1,\dots,r$ $(r\in\mathbb{Z}_{>0})$ に対して，$\{f_i(t)\}$ を $t=(t_1,\dots,t_m)$ の多項式，$s_i\in\mathbb{C}$ とする．また，$T=\mathbb{C}^m-\bigcup_{i=1}^r\{f_i(t)=0\}$ とおく．ここではより一般に，多価関数 $u(t)=\prod_{i=1}^r f_i(t)^{s_i}$ を考える．この $u(t)$ により定義される T

上の局所定数層を $\mathcal{L}$ とする．すなわち $\mathcal{L}$ は $\omega = du(t)/u(t)$ を用いた, 未知関数 L に関する微分方程式 $dL = L\omega$ の局所解のなす層とする．多価関数 $u(t)$ の各因子 $f_i(t)$ の定義域 T を実数部分に制限した集合 $T_{\mathbb{R}}$ における単連結領域 D に対して, 新たな関数 $u_D(t)$ を

$$u_D(t) = \prod_{i=1}^{r} (\epsilon_i f_i(t))^{s_i}$$

により定める．ここで $D \subset T_{\mathbb{R}}$ より, $f_i(t)$ は $\forall t \in D$ に対して $f_i(t) > 0$ または $f_i(t) < 0$ のいずれか一方に定まる．そこで $\epsilon_i = \pm 1$ なる符号を, D 上で $\epsilon_i f_i(t) > 0$ となるように定め, D における $\epsilon_i f_i(t)$ の偏角を 0 と定める．つまり, 各 i に対して $\arg(\epsilon_i f_i(t)) = 0$ として偏角を定める.

注意 3.1. 以上によって定められる $u(t)$ の分枝 $u_D(t)$($\mathcal{L}$ の切断 $u_D(t)$) を**標準的な切断** (standard section) ということにする．このように単連結領域 D と関数 $u_D(t)$ を合わせて考える場合に, D に関数 $u(t)$ を**標準的に背負わせる** (standard loading) ということにする.

注意 3.2. 以降, 本論文では簡単のため, 以下の記号を用いる:

$$\begin{aligned} e(A) &= \exp(\pi\sqrt{-1}A) \ (A \in \mathbb{C}), \\ s(A) &= \sin(\pi A) \ (A \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

さらに, $u(t)$ の指数 λ, μ に対して, 以下の記号を用いる.

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j} &= \begin{cases} \lambda_i + \cdots + \lambda_j & (i \le j), \\ 0 & (i = j+1), \\ -(\lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_{i-1}) & (i \ge j+2), \end{cases} \\ \mu_{i,j} &= \begin{cases} \mu_i + \cdots + \mu_j & (i \le j), \\ 0 & (i = j+1), \\ -(\mu_{j+1} + \cdots + \mu_{i-1}) & (i \ge j+2), \end{cases} \\ e_{i,j} &= e(\lambda_{i,j}), \\ \tilde{e}_{i,j} &= e(\mu_{i,j}). \end{aligned}$$

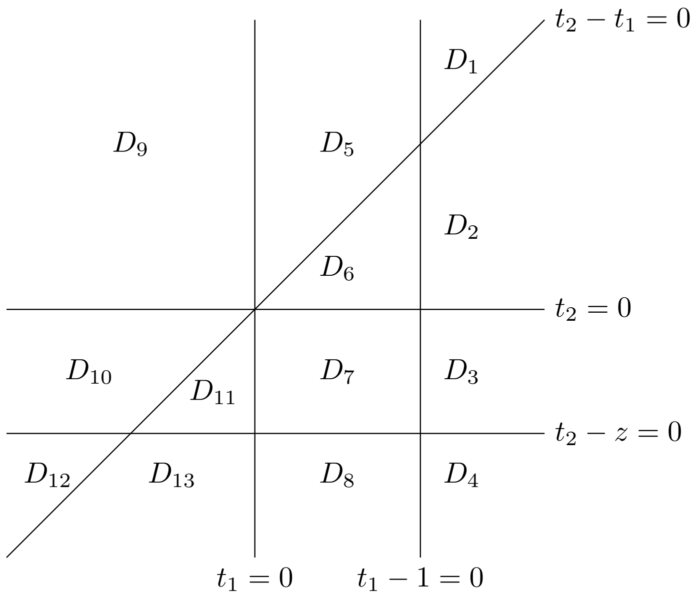
ここで, この定義から任意の i に対して,

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i,i}, \\ \mu_i &= \mu_{i,i} \end{aligned}$$

であることに注意する.

3.2　$z = 0$ まわりの解と $z = \infty$ まわりの解との関係

この小節では $z \in \mathbb{C}$ を $z < 0$ を満たす実数として 1 つ固定し, T を実数部分に制限した集合 $T_{\mathbb{R}}$ の部分領域に次図のように $D_1, \ldots, D_{13}$ と名前を付けておく.



領域の図 $(z = 0, \infty)$

以降は, 積分領域と解の積分表示を同一視する. このとき次が成り立つ:

命題 3.3 ([M1], 命題 2.1)**.** (1) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(-\lambda_2 - \mu_{2,3} - 1), \mathrm{Re}(\mu_2 + 1), \mathrm{Re}(-\lambda_{1,2} - \mu_{1,3} - 2), \mathrm{Re}(\mu_1 + 1) > 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} u_{D_1}(t)dt_1dt_2 =& \int_1^{+\infty}\int_{t_1}^{+\infty} t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} (t_1 - 1)^{\mu_1} (t_2 - t_1)^{\mu_2} (t_2 - z)^{\mu_3} dt_2 dt_1 \\ =& B(-\lambda_2 - \mu_{2,3} - 1, \mu_2 + 1) B(-\lambda_{1,2} - \mu_{1,3} - 2, \mu_1 + 1) \\ & \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -\lambda_2 - \mu_{2,3} - 1, -\lambda_{1,2} - \mu_{1,3} - 2, -\mu_3 \\ -\lambda_2 - \mu_3, -\lambda_{1,2} - \mu_{2,3} - 1 \end{matrix}; z\right).\end{aligned}$$

(2) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(\mu_3 + 1), \mathrm{Re}(\lambda_2 + 1), \mathrm{Re}(-\lambda_1 - \mu_{1,2} - 1), \mathrm{Re}(\mu_1 + 1) > 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_3} u_{D_3}(t)dt_1dt_2 =& \int_1^{+\infty}\int_z^0 t_1^{\lambda_1} (-t_2)^{\lambda_2} (t_1 - 1)^{\mu_1} (t_1 - t_2)^{\mu_2} (t_2 - z)^{\mu_3} dt_2 dt_1 \\ =& B(\mu_3 + 1, \lambda_2 + 1) B(-\lambda_1 - \mu_{1,2} - 1, \mu_1 + 1) \\ & \times (-z)^{\lambda_2 + \mu_3 + 1} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -\mu_2, -\lambda_1 - \mu_{1,2} - 1, \lambda_2 + 1 \\ \lambda_2 + \mu_3 + 2, -\lambda_1 - \mu_2 \end{matrix}; z\right).\end{aligned}$$

(3) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(\lambda_1 + 1), \mathrm{Re}(\mu_2 + 1), \mathrm{Re}(\lambda_{1,2} + \mu_2 + 2), \mathrm{Re}(\lambda_2 + 1) > 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_{11}} u_{D_{11}}(t)dt_1dt_2 =& \int_z^0\int_{t_2}^0 (-t_1)^{\lambda_1}(-t_2)^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(t_2-z)^{\mu_3}dt_1dt_2\\ =& B(\lambda_1+1,\mu_2+1)B(\lambda_{1,2}+\mu_2+2,\mu_3+1)\\ &\times(-z)^{\lambda_{1,2}+\mu_{2,3}+2}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\mu_1,\lambda_{1,2}+\mu_2+2,\lambda_1+1\\ \lambda_1+\mu_2+2,\lambda_{1,2}+\mu_{2,3}+3\end{matrix};z\right).\end{aligned}$$

命題 3.4 ([M1], 命題 2.2)**.** (1) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(\lambda_2+1),\mathrm{Re}(\mu_2+1),\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}+\mu_2+2),\mathrm{Re}(\mu_1+1)>0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_6} u_{D_6}(t)dt_1dt_2 =& \int_0^1\int_0^{t_1} t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(t_2-z)^{\mu_3}dt_2dt_1\\ =& B(\lambda_2+1,\mu_2+1)B(\lambda_{1,2}+\mu_2+2,\mu_1+1)\\ &\times(-z)^{\mu_3}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\mu_3,\lambda_{1,2}+\mu_2+2,\lambda_2+1\\ \lambda_1+\mu_2+2,\lambda_{1,2}+\mu_{1,2}+3\end{matrix};\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

(2) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1),\mathrm{Re}(\mu_3+1),\mathrm{Re}(\lambda_1+1),\mathrm{Re}(\mu_1+1)>0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_8} u_{D_8}(t)dt_1dt_2 =& \int_0^1\int_{-\infty}^{z} t_1^{\lambda_1}(-t_2)^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_2dt_1\\ =& B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1,\mu_3+1)B(\lambda_1+1,\mu_1+1)\\ &\times(-z)^{\lambda_2+\mu_{2,3}+1}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\mu_2,-\lambda_2-\mu_{2,3}-1,\lambda_1+1\\ -\lambda_2-\mu_2,\lambda_1+\mu_1+2\end{matrix};\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

(3) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1),\mathrm{Re}(\mu_2+1),\mathrm{Re}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2),\mathrm{Re}(\mu_3+1)>0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_{12}} u_{D_{12}}(t)dt_1dt_2 =& \int_{-\infty}^z\int_{-\infty}^{t_2} (-t_1)^{\lambda_1}(-t_2)^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_2-t_1)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_1dt_2\\ =& B(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_2+1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,\mu_3+1)\\ &\times(-z)^{\lambda_{1,2}+\mu_{1,3}+2}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\mu_1,-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2\\ -\lambda_{1,2}-\mu_{1,2}-1,-\lambda_1-\mu_1\end{matrix};\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

命題 3.3, 3.4 は, 後により一般的な形で証明する. (命題 4.2)

命題 3.3, 3.4 で λ, μ を (3.1), (3.2) のようにとると, 各積分の右辺は ${}_3E_2$ の $z=0,\infty$ まわりの解の基本系に一致する. 従って, ${}_3E_2$ においては $\{D_1, D_3, D_{11}\}$ を積分領域とするとその上での積分表示が $z=0$ のまわりの解の基本系を与え,$\{D_6, D_8, D_{12}\}$ を積分領域とするとその上での積分表示が $z=\infty$ のまわりの解の基本系を与えることがわかる. 従って, 積分領域 $\{D_1, D_3, D_{11}\}$ および $\{D_6, D_8, D_{12}\}$ が与える積分表示が線形独立になる.

命題 3.5 ([M1], 命題 2.3)**.** 次を仮定する.

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1+\mu_{1,2}, \lambda_{1,2}+\mu_2, \lambda_2+\mu_{2,3}, \lambda_{1,2}+\mu_{1,3}, \lambda_2+\mu_3, \lambda_1+\mu_2, \lambda_{1,2}+\mu_{2,3} \notin \mathbb{Z}.$$

このとき, 領域間の関係式として次が成り立つ.

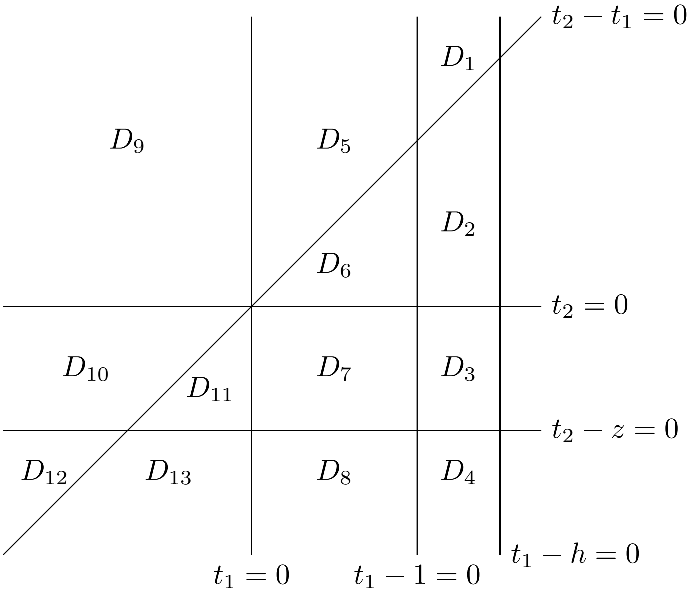
$$\begin{aligned}
D_2 &= -\frac{s(\lambda_2+\mu_{2,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_1 - \frac{s(\mu_3)}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_3,\\
D_4 &= \frac{s(\mu_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_1 - \frac{s(\lambda_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_3,\\
D_5 &= -\frac{s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\mu_3)}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11},\\
D_6 &= \frac{s(\lambda_2+\mu_{2,3})s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\mu_3)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\lambda_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11},\\
D_7 &= -\frac{s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_1 - \frac{s(\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_{11},\\
D_8 &= -\frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\lambda_2)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11},\\
D_9 &= -\frac{s(\mu_1)s(\mu_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\mu_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\mu_3)s(\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11},\\
D_{10} &= -\frac{s(\mu_1)}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\lambda_1)}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_{11},\\
D_{12} &= \frac{s(\mu_1)s(\lambda_2+\mu_{2,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\mu_1)s(\lambda_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\lambda_1)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11},\\
D_{13} &= -\frac{s(\mu_1)}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11}.
\end{aligned}$$

Proof. 領域間の関係式として次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&D_1 + \tilde{e}_2 D_2 + \tilde{e}_{2,3} D_3 + e_2\tilde{e}_{2,3} D_4 = 0,\\
&D_1 + \tilde{e}_2^{-1} D_2 + \tilde{e}_{2,3}^{-1} D_3 + e_2^{-1}\tilde{e}_{2,3}^{-1} D_4 = 0,\\
&D_5 + \tilde{e}_2 D_6 + \tilde{e}_{2,3} D_7 + e_2\tilde{e}_{2,3} D_8 = 0,\\
&D_5 + \tilde{e}_2^{-1} D_6 + \tilde{e}_{2,3}^{-1} D_7 + e_2^{-1}\tilde{e}_{2,3}^{-1} D_8 = 0,\\
&D_9 + e_2 D_{10} + e_2\tilde{e}_2 D_{11} + e_2\tilde{e}_3 D_{12} + e_2\tilde{e}_{2,3} D_{13} = 0,\\
&D_9 + e_2^{-1} D_{10} + e_2^{-1}\tilde{e}_2^{-1} D_{11} + e_2^{-1}\tilde{e}_3^{-1} D_{12} + e_2^{-1}\tilde{e}_{2,3}^{-1} D_{13} = 0,\\
&D_9 + e_1 D_5 + e_1\tilde{e}_2 D_6 + e_1\tilde{e}_1 D_1 + e_1\tilde{e}_{1,2} D_2 = 0,\\
&D_9 + e_1^{-1} D_5 + e_1^{-1}\tilde{e}_2^{-1} D_6 + e_1^{-1}\tilde{e}_1^{-1} D_1 + e_1^{-1}\tilde{e}_{1,2}^{-1} D_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&D_{10} + \tilde{e}_2 D_{11} + e_1 \tilde{e}_2 D_7 + e_1 \tilde{e}_{1,2} D_3 = 0,\\
&D_{10} + \tilde{e}_2^{-1} D_{11} + e_1^{-1} \tilde{e}_2^{-1} D_7 + e_1^{-1} \tilde{e}_{1,2}^{-1} D_3 = 0,\\
&D_{12} + \tilde{e}_2 D_{13} + e_1 \tilde{e}_2 D_8 + e_1 \tilde{e}_{1,2} D_4 = 0,\\
&D_{12} + \tilde{e}_2^{-1} D_{13} + e_1^{-1} \tilde{e}_2^{-1} D_8 + e_1^{-1} \tilde{e}_{1,2}^{-1} D_4 = 0.
\end{aligned}
$$

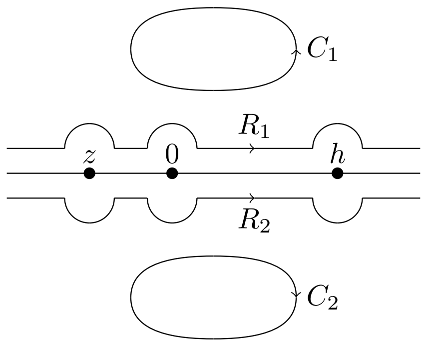
これは次のようにして成立が示される. t_1t_2 平面上の直線 $L_{t_1} : t_1 = h(h \in \mathbb{R})$ を考える. $h > 1$ のとき, L_{t_1} で t_1t_2 平面を切断すると, L_{t_1} は D_1, D_2, D_3, D_4 と共通部分をもつ.



以下では, t_1t_2 平面を分けて, 次のようにあらわす.

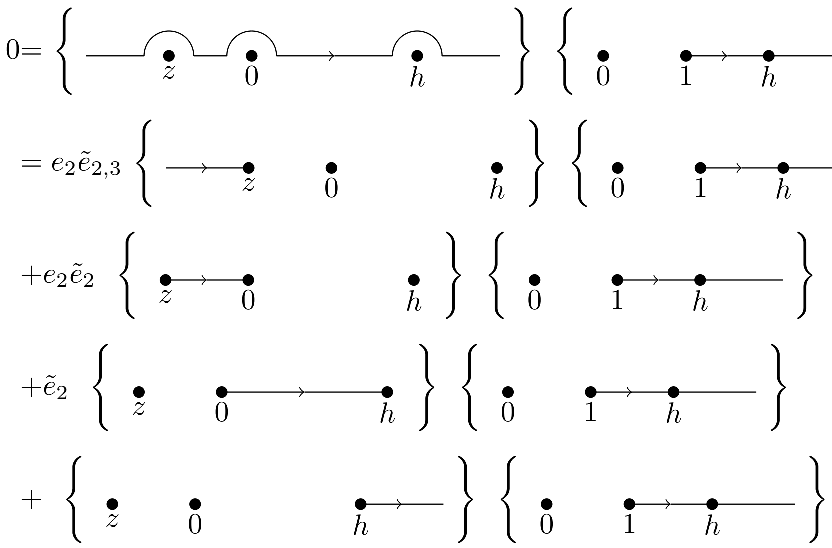
$$
\left\{ t_2 \text{ 平面} \right\} \left\{ t_1 \text{ 平面} \right\}
$$

このとき, t_2 平面での特異点を上側に避けて通る道 R_1 は反時計回りに向きづけられた閉曲線 C_1 と同相になり, 特異点を下側に避けて通る道 R_2 は時計回りに向きづけられた閉曲線 C_2 と同相になる. これらの閉曲線の内部には, 被積分関数 $u(t)$ の特異点は含まれない.



t_2 平面での様子

従って, 上側の道に関して Cauchy の積分定理を用いると, この道に沿った $u(t)$ の積分の値は 0 となる. ゆえに,



$$= e_2\tilde{e}_{2,3}D_4 + \tilde{e}_{2,3}D_3 + \tilde{e}_2D_2 + D_1$$

となり, 第 1 式の成立を得る. また, 下側の道に関して Cauchy の積分定理を用いると, この道に沿った $u(t)$ の積分の値は 0 となるから, 同じように考えると第 2 式の成立を得る. さらに, $0 < h < 1$ のときは第 3, 4 式が, $h < 0$ のときは第 5, 6 式が得られる. また, 直線 $L_{t_2} : t_2 = k$ で t_1t_2 平面を切断すると, $k > 0$ のときは第 7, 8 式が, $z < k < 0$ のときは第 9, 10 式が, $k < z$ のときは第 11, 12 式がそれぞれ得られる. この 12 本の関係式を, D_1, D_3, D_7 に関して解くと, 求める関係式を得る.

□

上の命題より, $z = \infty$ まわりの解の積分表示の積分領域 D_6, D_8, D_{12} は, $z = 0$ まわりの解の積分表示の積分領域 D_1, D_3, D_{11} を用いて次のように書き表されている.

$$D_6 = \frac{s(\lambda_2+\mu_{2,3})s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\mu_3)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\lambda_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11}$$

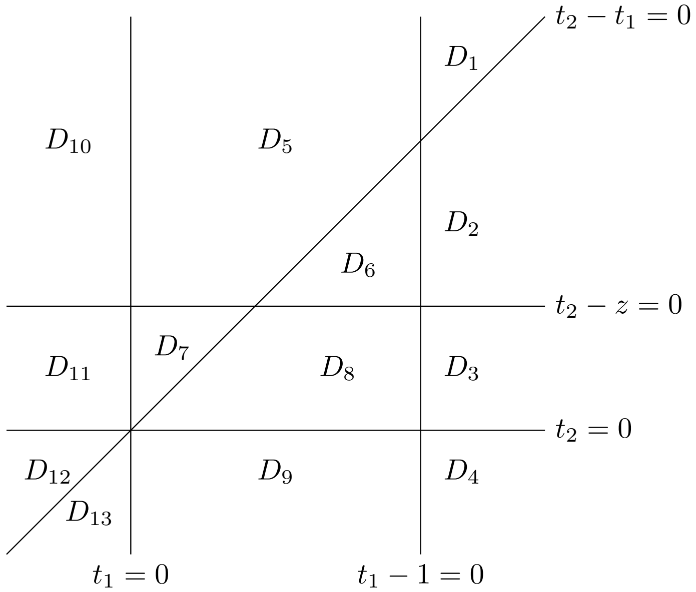
$$D_8 = -\frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\lambda_2)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11}$$

$$D_{12} = \frac{s(\mu_1)s(\lambda_2+\mu_{2,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\mu_2)s(\lambda_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\lambda_1)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_{11}$$

従って, ${}_3F_2$ の場合に $z = 0$ と $z = \infty$ の積分領域間の接続関係式が導かれた.

3.3　$z=0$ まわりの解と $z=1$ まわりの解との関係

この節では $z\in\mathbb{C}$ を $0<z<1$ を満たす実数として 1 つ固定し, T を実数部分に制限した集合 $T_{\mathbb{R}}$ の部分領域に次図のように $D_1,\ldots,D_{13}$ と名前を付けておく.



領域の図 $(z=0,1)$

このとき,

命題 3.6 ([M1], 命題 3.1)**.** (1) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1),\mathrm{Re}(\mu_2+1),\mathrm{Re}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2),\mathrm{Re}(\mu_1+1)>0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1}u_{D_1}(t)dt_1dt_2=&\int_1^{+\infty}\int_{t_1}^{+\infty}t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}(t_1-1)^{\mu_1}(t_2-t_1)^{\mu_2}(t_2-z)^{\mu_3}dt_2dt_1\\ =&B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1,\mu_2+1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,\mu_1+1)\\ &\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\lambda_2-\mu_{2,3}-1,-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,-\mu_3\\ -\lambda_2-\mu_3,-\lambda_{1,2}-\mu_{2,3}-1\end{matrix};z\right).\end{aligned}$$

(2) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(\mu_3+1),\mathrm{Re}(\lambda_2+1),\mathrm{Re}(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1),\mathrm{Re}(\mu_1+1)>0.$$

このとき,

$$\int\int_{D_3}u_{D_3}(t)dt_1dt_2=\int_1^{+\infty}\int_0^{z}t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}(t_1-1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_2dt_1$$

$$
\begin{aligned}
&=B(\mu_3+1,\lambda_2+1)B(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_1+1)\\
&\quad\times z_3^{\lambda_2+\mu_3+1}F_2\left(\begin{matrix}-\mu_2,-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_3+1\\ \lambda_2+\mu_3+2,-\lambda_1-\mu_2\end{matrix};z\right).
\end{aligned}
$$

(3) 次を仮定する.

$$
\mathrm{Re}(\lambda_1+1),\mathrm{Re}(\mu_2+1),\mathrm{Re}(\lambda_1+\mu_{2,3}+2),\mathrm{Re}(\lambda_2+1)>0.
$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{D_7}u_{D_7}(t)dt_1dt_2=&\int_0^z\int_0^{t_2}t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_2-t_1)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_1dt_2\\
=&B(\lambda_1+1,\mu_2+1)B(\lambda_1+\mu_{2,3}+2,\lambda_2+1)\\
&\times z_3^{\lambda_{1,2}+\mu_{2,3}+2}F_2\left(\begin{matrix}-\mu_1,\lambda_1+\mu_{2,3}+2,\lambda_1+1\\ \lambda_1+\mu_2+2,\lambda_{1,2}+\mu_{2,3}+3\end{matrix};z\right).
\end{aligned}
$$

命題 3.6 の被積分関数は命題 3.3 と全く同じだから, 証明も同様である.

命題 3.6 で λ,μ を (3.1), (3.2) のようにとると, 各積分の右辺は ${}_3E_2$ の $z=0$ まわりの解の基本系に一致する. 従って, ${}_3E_2$ においては組 $\{D_1,D_3,D_7\}$ を積分領域とするとその上での積分表示が $z=0$ のまわりの解の基本系を与えることがわかる. 従って, 積分領域の組 $\{D_1,D_3,D_7\}$ は線形独立になる.

さらに, D_6 上の積分を考えることによって, $z=1$ での非正則解を与えることができる. 実際次が成り立つ.

命題 3.7 ([M1], 定理 3.2)**.** 次を仮定する.

$$
\mathrm{Re}(\mu_1+1),\mathrm{Re}(\mu_2+1),\mathrm{Re}(\mu_{1,2}+2),\mathrm{Re}(\mu_3+1)>0.
$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{D_6}u_{D_6}(t)dt_1dt_2=&\int_z^1\int_0^{t_2}t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(t_2-z)^{\mu_3}dt_1dt_2\\
=&B(\mu_1+1,\mu_2+1)B(\mu_{1,2}+2,\mu_3+1)(1-z)^{\mu_{1,3}+2}\\
&\times\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{(-\lambda_1)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\lambda_2)_{n_2}(\mu_{1,2}+2)_{n_1+n_2}}{n_1!(\mu_{1,2}+2)_{n_1}n_2!(\mu_{1,3}+3)_{n_1+n_2}}(1-z)^{n_1+n_2}.
\end{aligned}
$$

命題 3.7 は, 後により一般的な形で証明する. (命題 4.4)

命題 3.7 においても, λ,μ を (3.1), (3.2) のようにとると, 積分の右辺は ${}_3E_2$ の $z=1$ まわりの非正則解に一致する. いま, 領域間の関係として次が成り立つ.

命題 3.8 ([M1], 命題 3.3)**.** 次を仮定する.

$$
\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_1+\mu_{1,2},\lambda_{1,2}+\mu_2,\lambda_2+\mu_{2,3},\lambda_{1,2}+\mu_{1,3},\lambda_2+\mu_3,\lambda_1+\mu_2,\lambda_{1,2}+\mu_{2,3}\notin\mathbb{Z}.
$$

このとき,

$$
D_2=-\frac{s(\lambda_2+\mu_{2,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_1-\frac{s(\mu_3)}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_3,
$$

$$\begin{aligned}
D_4 &= \frac{s(\mu_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_1 - \frac{s(\lambda_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)}D_3,\\
D_5 &= -\frac{s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7,\\
D_6 &= \frac{s(\lambda_2+\mu_{2,3})s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\lambda_2)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\lambda_1)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7,\\
D_8 &= -\frac{s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\lambda_1)}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_7,\\
D_9 &= -\frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\mu_3)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\mu_3)s(\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7,\\
D_{10} &= -\frac{s(\mu_1)s(\mu_2)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\mu_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7,\\
D_{11} &= \frac{s(\mu_1)}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)}D_7,\\
D_{12} &= \frac{s(\mu_1)s(\lambda_2+\mu_{2,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 - \frac{s(\mu_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 - \frac{s(\lambda_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7,\\
D_{13} &= -\frac{s(\mu_1)}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\mu_3)}{s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7.
\end{aligned}$$

Proof. 命題 3.5 と同様にして, Cauchy の積分定理から得られる 12 本の関係式

$$\begin{aligned}
&D_1 + \tilde{e}_2 D_2 + \tilde{e}_{2,3} D_3 + e_2\tilde{e}_{2,3} D_4 = 0,\\
&D_1 + \tilde{e}_2^{-1} D_2 + \tilde{e}_{2,3}^{-1} D_3 + e_2^{-1}\tilde{e}_{2,3}^{-1} D_4 = 0,\\
&D_5 + \tilde{e}_2 D_6 + \tilde{e}_3 D_7 + \tilde{e}_{2,3} D_8 + e_2\tilde{e}_{2,3} D_9 = 0,\\
&D_5 + \tilde{e}_2^{-1} D_6 + \tilde{e}_3^{-1} D_7 + \tilde{e}_{2,3}^{-1} D_8 + e_2^{-1}\tilde{e}_{2,3}^{-1} D_9 = 0,\\
&D_{10} + \tilde{e}_3 D_{11} + e_2\tilde{e}_3 D_{12} + e_2\tilde{e}_{2,3} D_{13} = 0,\\
&D_{10} + \tilde{e}_3^{-1} D_{11} + e_2^{-1}\tilde{e}_3^{-1} D_{12} + e_2^{-1}\tilde{e}_{2,3}^{-1} D_{13} = 0,\\
&D_{10} + e_1 D_5 + e_1\tilde{e}_2 D_6 + e_1\tilde{e}_1 D_1 + e_1\tilde{e}_{1,2} D_2 = 0,\\
&D_{10} + e_1^{-1} D_5 + e_1^{-1}\tilde{e}_2^{-1} D_6 + e_1^{-1}\tilde{e}_1^{-1} D_1 + e_1^{-1}\tilde{e}_{1,2}^{-1} D_2 = 0,\\
&D_{11} + e_1 D_7 + e_1\tilde{e}_2 D_8 + e_1\tilde{e}_{1,2} D_3 = 0,\\
&D_{11} + e_1^{-1} D_7 + e_1^{-1}\tilde{e}_2^{-1} D_8 + e_1^{-1}\tilde{e}_{1,2}^{-1} D_3 = 0,\\
&D_{12} + \tilde{e}_2 D_{13} + e_1\tilde{e}_2 D_9 + e_1\tilde{e}_{1,2} D_4 = 0,\\
&D_{12} + \tilde{e}_2^{-1} D_{13} + e_1^{-1}\tilde{e}_2^{-1} D_9 + e_1^{-1}\tilde{e}_{1,2}^{-1} D_4 = 0
\end{aligned}$$

を, D_1, D_3, D_7 に関して解けばよい. □

とくに, $z=1$ まわりの非正則解の積分領域 D_6 については

$$D_6 = \frac{s(\lambda_2+\mu_{2,3})s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1 + \frac{s(\lambda_2)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3 + \frac{s(\lambda_1)s(\lambda_{1,2}+\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7$$

が成り立ち, ${}_3F_2$ の場合に, $z=0$ の解の積分領域と $z=1$ の非正則解の積分領域との接続関係式が導かれた.

3.4　$z=0$ まわりの解と $z=1$ まわりの正則解との関係

この節では, ${}_3E_2$ の $z=1$ における正則解と $z=0$ の接続問題について考える. 記号は前節 3.3 までと同じとする.
まず, ${}_3E_2$ の $z=1$ まわりの解に関して次が成り立つ.

命題 3.9. (1) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(\lambda_1+1), \mathrm{Re}(\mu_1+1), \mathrm{Re}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1), \mathrm{Re}(\lambda_2+1)>0.$$

このとき,

(3.3)
$$\begin{aligned}\iint_{D_9} u_{D_9}(t)dt_1dt_2 =& \int_{-\infty}^0\int_0^1 t_1^{\lambda_1}(-t_2)^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_1dt_2\\ =&B(\lambda_1+1,\mu_1+1)B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1,\lambda_2+1)\\ &\times\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\mu_3)_{n_2}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1)_{n_1+n_2}}{n_1!(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1}n_2!(-\mu_{2,3})_{n_1+n_2}}(1-z)^{n_2}.\end{aligned}$$

(2) 次を仮定する.

$$\mathrm{Re}(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1), \mathrm{Re}(\mu_2+1), \mathrm{Re}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2), \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}+\mu_2+2)>0.$$

このとき,

(3.4)
$$\begin{aligned}\iint_{D_{12}} u_{D_{12}}(t)dt_1dt_2 =& \int_{-\infty}^0\int_{t_1}^0 (-t_1)^{\lambda_1}(-t_2)^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_2-t_1)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_1dt_2\\ =&B(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_2+1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,\lambda_{1,2}+\mu_2+2)\\ &\times\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{(-\mu_1)_{n_1}(\mu_2+1)_{n_1}(-\mu_3)_{n_2}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2)_{n_1+n_2}}{n_1!(-\lambda_1-\mu_1)_{n_1}n_2!(-\mu_1-\mu_3)_{n_1+n_2}}(1-z)^{n_2}.\end{aligned}$$

Proof. (1) 変数変換

$$\begin{aligned}t_1&=u_1,\\ t_2&=u_2^{-1}(u_2-1)\end{aligned}$$

を行うと, そのヤコビアンは

$$\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(u_1,u_2)}=u_2^{-2}$$

となる. これより,

$$\iint_{D_9} u_{D_9}(t)dt_1dt_2 = \int_{-\infty}^0\int_0^1 t_1^{\lambda_1}(-t_2)^{\lambda_2}(1-t_1)^{\mu_1}(t_1-t_2)^{\mu_2}(z-t_2)^{\mu_3}dt_1dt_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 u_1^{\lambda_1}(1-u_1)^{\mu_1} u_2^{-\lambda_2-\mu_{2,3}-2}(1-u_2)^{\lambda_2} \\
&\quad \times (1-(1-z)u_2)^{\mu_3}(1-(1-u_1)u_2)^{\mu_2} du_1 du_2
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$|1-u_1|, |u_2| < 1$ において，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 u_1^{\lambda_1}(1-u_1)^{\mu_1}(1-(1-u_1)u_2)^{\mu_2} du_1 \\
&= \int_0^1 u_1^{\lambda_1}(1-u_1)^{\mu_1} \sum_{n_1 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}}{n_1!}(1-u_1)^{n_1} u_2^{n_1} du_1 \\
&= \sum_{n_1 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}}{n_1!} u_2^{n_1} \int_0^1 u_1^{\lambda_1}(1-u_1)^{\mu_1}(1-u_1)^{n_1} du_1 \\
&= \sum_{n_1 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}}{n_1!} u_2^{n_1} B(\lambda_1+1, \mu_1+n_1+1) \\
&= B(\lambda_1+1, \mu_1+1) \sum_{n_1 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}}{(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1} n_1!} u_2^{n_1}
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$|1-z| < 1$ において

$$
\begin{aligned}
&\int\int_{D_9} u_{D_9}(t) dt_1 dt_2 \\
&= B(\lambda_1+1, \mu_1+1) \sum_{n_1 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}}{(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1} n_1!} \\
&\quad \times \int_0^1 u_2^{-\lambda_2-\mu_{2,3}-2+n_1}(1-u_2)^{\lambda_2}(1-(1-z)u_2)^{\mu_3} du_2 \\
&= B(\lambda_1+1, \mu_1+1) \sum_{n_1 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}}{(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1} n_1!} \\
&\quad \times \int_0^1 u_2^{-\lambda_2-\mu_{2,3}-2+n_1}(1-u_2)^{\lambda_2} \sum_{n_2 \geq 0} \frac{(-\mu_3)_{n_2}}{n_2!}(1-z)^{n_2} u_2^{n_2} du_2 \\
&= B(\lambda_1+1, \mu_1+1) \sum_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\mu_3)_{n_2}}{(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1} n_1! n_2!}(1-z)^{n_2} \\
&\quad \times \int_0^1 u_2^{-\lambda_2-\mu_{2,3}-2+n_1+n_2}(1-u_2)^{\lambda_2} du_2 \\
&= B(\lambda_1+1, \mu_1+1) \sum_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\mu_3)_{n_2}}{(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1} n_1! n_2!}(1-z)^{n_2} \\
&\quad \times B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1+n_1+n_2, \lambda_2+1) \\
&= B(\lambda_1+1, \mu_1+1) B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1, \lambda_2+1) \\
&\quad \times \sum_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\mu_3)_{n_2}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1)_{n_1+n_2}}{(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1}(-\mu_{2,3})_{n_1+n_2} n_1! n_2!}(1-z)^{n_2}
\end{aligned}
$$

を得る. ここで, 途中の計算には二項定理

$$(1-(1-z)u_2)^{\mu_3} = \sum_{n_2 \geq 0} \frac{(-\mu_3)_{n_2}}{n_2!}(1-z)^{n_2} u_2^{n_2}$$

を用いた. 以上で (3.3) の成立が示された.
(2) 変数変換

$$\begin{aligned} t_1 &= u_1^{-1} u_2^{-1}(u_2-1), \\ t_2 &= 1-u_2^{-1} \end{aligned}$$

を行うと, (1) と同様の計算により (3.4) の成立が示される. □

命題 3.9(1), (2) の積分表示の右辺の級数は展開の中心が $z=1$ で, かつ定数項から始まる級数だから $z=1$ を特異点として持たない. 従って D_9, D_{12} 上の積分表示が一次独立であれば ${}_3E_2$ の $z=1$ のまわりの 2 個の正則解を与える. 実際次が成り立つ.

命題 3.10.

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \int\int_{D_9} u_{D_9}(t)dt_1dt_2, \\ v_2(z) &= \int\int_{D_{12}} u_{D_{12}}(t)dt_1dt_2 \end{aligned}$$

とおく. このとき $\{v_1(z), v_2(z)\}$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

この命題は後述する命題 4.16 から明らかだが, この場合は以下のように直接計算でも証明することができる.

Proof. $\{v_1(z), v_2(z)\}$ の Wronsky 行列

$$W[v_1, v_2](\lambda, \mu, z) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ \frac{dv_1}{dz} & \frac{dv_2}{dz} \end{pmatrix}$$

の行列式が恒等的に 0 にはならないことを示す. すなわちある $(\lambda, \mu, z) \in \mathbb{C}^6$ に対して $\det W[v_1, v_2](\lambda, \mu, z) \neq 0$ となることを示す. ここで,

$$\begin{aligned} v_1(1) &= B(\lambda_1+1, \mu_1+1)B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1, \lambda_2+1) \\ &\quad \times \sum_{n_1, \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1)_{n_1}}{n_1!(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1}(-\mu_{2,3})_{n_1}}, \\ \frac{dv_1}{dz}(1) &= B(\lambda_1+1, \mu_1+1)B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1, \lambda_2+1)\frac{(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1)(-\mu_3)}{(-\mu_{2,3})} \\ &\quad \times \sum_{n_1, \geq 0} \frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\lambda_2-\mu_{2,3})_{n_1}}{n_1!(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1}(-\mu_{2,3}+1)_{n_1}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_2(1) &= B(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_2+1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,\lambda_{1,2}+\mu_2+2)\\
&\quad\times\sum_{n_1,\geq 0}\frac{(-\mu_1)_{n_1}(\mu_2+1)_{n_1}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2)_{n_1}}{n_1!(-\lambda_1-\mu_1)_{n_1}(-\mu_1-\mu_3)_{n_1}},\\
\frac{dv_2}{dz}(1) &= B(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_2+1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,\lambda_{1,2}+\mu_2+2)\frac{(-\mu_3)(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2)}{(-\mu_1-\mu_3)}\\
&\quad\times\sum_{n_1,\geq 0}\frac{(-\mu_1)_{n_1}(\mu_2+1)_{n_1}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-1)_{n_1}}{n_1!(-\lambda_1-\mu_1)_{n_1}(-\mu_1-\mu_3+1)_{n_1}},
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\det W[v_1,v_2](\lambda,\mu,1)\\
=&B(\lambda_1+1,\mu_1+1)\\
&\times B(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1,\lambda_2+1)B(-\lambda_1-\mu_{1,2}-1,\mu_2+1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2,\lambda_{1,2}+\mu_2+2)\\
&\times\left(\sum_{n_1\geq 0}\frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\lambda_2-\mu_{2,3}-1)_{n_1}}{n_1!(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1}(-\mu_{2,3})_{n_1}}\sum_{n_1\geq 0}\frac{(-\mu_1)_{n_1}(\mu_2+1)_{n_1}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-1)_{n_1}}{n_1!(-\lambda_1-\mu_1)_{n_1}(-\mu_1-\mu_3+1)_{n_1}}\right.\\
&\left.-\sum_{n_1\geq 0}\frac{(-\mu_2)_{n_1}(\mu_1+1)_{n_1}(-\lambda_2-\mu_{2,3})_{n_1}}{n_1!(\lambda_1+\mu_1+2)_{n_1}(-\mu_{2,3}+1)_{n_1}}\sum_{n_1\geq 0}\frac{(-\mu_1)_{n_1}(\mu_2+1)_{n_1}(-\lambda_{1,2}-\mu_{1,3}-2)_{n_1}}{n_1!(-\lambda_1-\mu_1)_{n_1}(-\mu_1-\mu_3)_{n_1}}\right)
\end{aligned}
$$

となる. ここで $\mu_1=0,\mu_2=0$ ととれば, $(-\mu_1)_{n_1}=(-\mu_2)_{n_1}=\delta_{0,n_1}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
&\det W[v_1,v_2](\lambda,\mu,1)\\
=&B(\lambda_1+1,1)B(-\lambda_2-\mu_3-1,\lambda_2+1)B(-\lambda_1-1,1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_3-2,\lambda_{1,2}+2)\\
&\times((-\lambda_{1,2}-\mu_3-2)-(-\lambda_2-\mu_3-1))\\
=&B(\lambda_1+1,1)B(-\lambda_2-\mu_3-1,\lambda_2+1)B(-\lambda_1-1,1)B(-\lambda_{1,2}-\mu_3-2,\lambda_{1,2}+2)(-\lambda_1+1)
\end{aligned}
$$

となる. これより, $\det W[v_1,v_2]$ は恒等的に 0 ではない. 従って v_1,v_2 は $\mathbb{C}$ 上一次独立である. □

従って D_6,D_9,D_{12} 上の積分表示が ${}_3E_2$ の $z=1$ の解の基本系を与える (定理 1.1). さらに命題 3.8 より, $z=1$ まわりの正則解の積分領域 D_9,D_{12} と $z=0$ まわりの解の基本系の積分領域 $\{D_1,D_3,D_7\}$ との接続関係式が

$$
\begin{aligned}
D_9 &= -\frac{s(\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{1,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1+\frac{s(\mu_3)s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3-\frac{s(\mu_3)s(\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7,\\
D_{12} &= \frac{s(\mu_1)s(\lambda_2+\mu_{2,3})}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_1-\frac{s(\mu_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_2+\mu_3)s(\lambda_1+\mu_2)}D_3-\frac{s(\lambda_1)s(\mu_3)}{s(\lambda_1+\mu_2)s(\lambda_{1,2}+\mu_{2,3})}D_7
\end{aligned}
$$

であることが導かれた.

4 ${}_{n+1}F_n$ の接続問題

ここでは, 一般化超幾何微分方程式 ${}_{n+1}E_n$ の解の接続問題について考察する. $t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{C}^n$ として,

$$T_z=\mathbb{C}^n-\bigcup_{i=1}^{n}\{t_i=0\}\cup\bigcup_{i=1}^{n+1}\{t_{i-1}-t_i=0\}$$

上定義される関数

$$u(t)=\prod_{i=1}^{n}t_i^{\lambda_i}\prod_{i=1}^{n+1}(t_{i-1}-t_i)^{\mu_i}$$

を考える. ただし

$$t_0=1,t_{n+1}=z$$

と約束する. また, 指数 λ,μ は, 前節 (3.1), (3.2) の結果を一般化した関係

$$\lambda_i=\alpha_{i+1}-\beta_i=\theta_0^{(i)}-\sigma^{(i+1)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}\qquad(1\le i\le n)$$
$$\mu_i=\beta_i-\alpha_i-1=-\theta_0^{(i)}+\sigma^{(i)}+\frac{a}{n+1}+\frac{1}{n+1}-1\qquad(1\le i\le n+1)$$

を満たす. ただし $\beta_{n+1}=1$ とする.

パラメータの組 $(\theta_0,\sigma),(\alpha,\beta)$, および (λ,μ) の間には次の関係が成り立つ.

補題 4.1. パラメータ $\theta_0,\sigma,\alpha,\beta,\lambda,\mu$ の間には次の関係が成り立つ.
α,β と λ,μ について

$$\beta_k-\alpha_j=\begin{cases}\mu_j+1 & (k=j),\\ \lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k}+|k-j+1| & (k\neq j),\end{cases}$$
$$\beta_j-\beta_k=\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j}+|j-k|.$$

θ_0,σ と λ,μ について

$$\theta_0^{(k)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\begin{cases}-\mu_k-1 & (k=l),\\ \lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1}+|l-k-1| & (k\neq l),\end{cases}$$
$$=\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1}+|l-k-1|,$$

$$\theta_0^{(l)}-\theta_0^{(k)}=\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k}+|l-k|.$$

Proof. まず α,β と λ,μ の関係についてみる.
第 1 式について, $k=j$ のときは $\mu_j=\beta_j-\alpha_j-1$ より明らかだから, $k\neq j$ のときを示す.

1. $j < k$ のとき.

$$\begin{aligned}\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k} &= \sum_{p=j}^{k-1}(\alpha_{p+1} - \beta_p) + \sum_{p=j}^{k}(\beta_p - \alpha_p - 1) \\ &= \beta_k - \alpha_j + (-1)(k - j + 1)\end{aligned}$$

より, $\beta_k - \alpha_j = \lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k} + (k - j + 1)$ をえる. ここで $j < k$ の仮定から $k - j + 1 \geq 0$ に注意する. よって, $k - j + 1 = |k - j + 1|$ となり $\beta_k - \alpha_j = \lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k} + |k - j + 1|$ をえる.
2. $k < j$ のとき.

$$\begin{aligned}\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k} &= -\lambda_{k,j-1} - \mu_{k+1,j-1} \\ &= -\sum_{p=k}^{j-1}(\alpha_{p+1} - \beta_p) - \sum_{p=k+1}^{j-1}(\beta_p - \alpha_p - 1) \\ &= \beta_k - \alpha_j - (-1)(j - k - 1)\end{aligned}$$

より $\beta_k - \alpha_j = \lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k} - (j - k - 1)$ をえる. ここで $k < j$ の仮定から $j - k - 1 \leq 0$ に注意する. よって $j - k - 1 = -(k - j + 1) = |k - j + 1|$ となり $\beta_k - \alpha_j = \lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k} + |k - j + 1|$ をえる.
以上より, すべての場合で第 1 式が示された.
　次に第 2 式について $s = k$ のときは両辺の値は 0 になるから明らか. $s \neq k$ のとき示す.
1. $j < k$ のとき.

$$\begin{aligned}\lambda_{j,k-1} + \mu_{j+1,k} &= \sum_{p=j}^{k-1}(\alpha_{p+1} - \beta_p) + \sum_{p=j+1}^{k}(\beta_p - \alpha_p - 1) \\ &= \beta_k - \beta_j + (-1)(k - j)\end{aligned}$$

より, $\beta_j - \beta_k = -\lambda_{j,k-1} - \mu_{j+1,k} - (k - j)$ をえる. ここで $j < k$ の仮定から $k - j > 0$ に注意する. よって, $k - j = |k - j|$ となり

$$\begin{aligned}\beta_j - \beta_k &= -\lambda_{j,k-1} - \mu_{j+1,k} - (k - j) \\ &= \lambda_{k,j-1} + \mu_{k+1,j} - |k - j| \\ &= \lambda_{k,j-1} + \mu_{k+1,j} + |j - k|\end{aligned}$$

をえる.
2. $k < j$ のとき.

$$\lambda_{j,k-1} + \mu_{j+1,k} = -\lambda_{k,j-1} - \mu_{k+1,j}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{p=k}^{j-1}(\alpha_{p+1}-\beta_p) - \sum_{p=k+1}^{j}(\beta_p - \alpha_p - 1) \\
&= \beta_k - \beta_j - (-1)(j-k)
\end{aligned}
$$

より, $\beta_j - \beta_k = -\lambda_{j,k-1} - \mu_{j+1,k} + (j-k)$ をえる. ここで $k < j$ の仮定から $j-k > 0$ に注意する. よって, $j-k = |j-k|$ となり

$$
\begin{aligned}
\beta_j - \beta_k &= -\lambda_{j,k-1} - \mu_{j+1,k} + (j-k) \\
&= \lambda_{k,j-1} + \mu_{k+1,j} + |j-k|
\end{aligned}
$$

をえる.

以上より, すべての場合で第 2 式が示された.

また, θ_0, σ と λ, μ の関係は,

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \theta_0^{(i)} - \sigma^{(i+1)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\
\mu_i &= -\theta_0^{(i)} + \sigma^{(i)} + \frac{a}{n+1} + \frac{1}{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

を用いて α, β のときと同じ計算をすればよい. □

4.1 $z = 0$ と $z = \infty$ の接続問題

$z \in \mathbb{C}$ を $z < 0$ を満たす実数として固定し, $T_{\mathbb{R}}$ の部分集合として

$$
D_i^{(0)} = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid z < t_n < \cdots < t_i < 0, 1 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < +\infty\} \ (1 \le i \le n+1)
$$

$$
D_i^{(\infty)} = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid -\infty < t_i < \cdots < t_n < z, 0 < t_{i-1} < \cdots < t_1 < 1\} \ (1 \le i \le n+1)
$$

をとる. このとき, 次が成り立つ:

命題 4.2 ([M2], 命題 2.1)**.** (1) $1 \le i \le n+1$ を満たす i を一つ固定する. $1 \le s \le n+1, s \ne i$ に対して, $\mathrm{Re}(\alpha_i - \beta_s + 1) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta_s - \alpha_s) > 0$ 仮定する. さらに, $|z| > 1$ を仮定する. このとき

$$
\begin{aligned}
(4.1) \quad &\int_{D_i^{(\infty)}} u_{D_i^{(\infty)}}(t) dt_1 \cdots dt_n \\
&= \int_{-\infty < t_i < \cdots < t_n < z, 0 < t_{i-1} < \cdots < t_1 < 1} (t_{i-1} - t_i)^{\beta_i - \alpha_i - 1} \prod_{s=1}^{i-1} \{ t_s^{\alpha_{s+1} - \beta_s} (t_{s-1} - t_s)^{\beta_s - \alpha_s - 1} \} \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n} \{ (-t_s)^{\alpha_{s+1} - \beta_s} (t_{s+1} - t_s)^{\beta_{s+1} - \alpha_{s+1} - 1} \} dt_1 \cdots dt_n \\
&= \prod_{1 \le s \le n+1, s \ne i} B(\alpha_i - \beta_s + 1, \beta_s - \alpha_s) f_i^{(\infty)}(z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $B(\alpha,\beta)$ はベータ関数であり，

$$f_i^{(\infty)}(z)=(-z)^{-\alpha_i}{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_i-\beta_1+1,\alpha_i-\beta_2+1,\ldots,\alpha_i-\beta_{n+1}+1\\ \alpha_i-\alpha_1+1,\ldots,\alpha_i\widehat{-\alpha_i+}1,\ldots,\alpha_i-\alpha_{n+1}+1\end{matrix};\frac{1}{z}\right)$$

である．また，$\alpha_i\widehat{-\alpha_i+}1$ は $\alpha_i-\alpha_i+1$ を除く，ということを意味する．

(2)　$1\le i\le n+1$ を満たす i を一つ固定する．$1\le s\le n+1, s\ne i$ に対して，$\mathrm{Re}(\alpha_s-\beta_i+1)>0$, $\mathrm{Re}(\beta_s-\alpha_s)>0$ 仮定する．さらに，$|z|<1$ を仮定する．このとき

$$\begin{aligned}(4.2)\quad &\int_{D_i^{(0)}}u_{D_i^{(0)}}(t)dt_1\cdots dt_n\\ &=\int_{z<t_n<\cdots<t_i<0,1<t_1<\cdots<t_{i-1}<+\infty}(t_{i-1}-t_i)^{\beta_i-\alpha_i-1}\prod_{s=1}^{i-1}\{t_s^{\alpha_{s+1}-\beta_s}(t_s-t_{s-1})^{\beta_s-\alpha_s-1}\}\\ &\quad\times\prod_{s=i}^{n}\{(-t_s)^{\alpha_{s+1}-\beta_s}(t_s-t_{s+1})^{\beta_{s+1}-\alpha_{s+1}-1}\}dt_1\cdots dt_n\\ &=\prod_{1\le s\le n+1,s\ne i}B(\alpha_s-\beta_i+1,\beta_s-\alpha_s)f_i^{(0)}(z)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$f_i^{(0)}(z)=(-z)^{1-\beta_i}{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_1-\beta_i+1,\alpha_2-\beta_i+1,\ldots,\alpha_{n+1}-\beta_i+1\\ \beta_1-\beta_i+1,\ldots,\beta_i\widehat{-\beta_i+}1,\ldots,\beta_{n+1}-\beta_i+1\end{matrix};z\right)$$

である．また，$\beta_i\widehat{-\beta_i+}1$ は $\beta_i-\beta_i+1$ を除く，ということを意味する．

Proof. (1) 変数変換

$$t_s=zu_s^{-1}u_{s+1}^{-1}\cdots u_n^{-1}\ (i\le s\le n)$$

を行うと，そのヤコビアンは

$$\frac{\partial(t_i,t_{i+1},\ldots,t_n)}{\partial(u_i,u_{i+1},\ldots,u_n)}=(-z)^{n-i+1}u_i^{-2}u_{i+1}^{-3}\cdots u_n^{-(n-i+2)}$$

となる．この変換により

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty<t_i<\cdots<t_n<z}(t_{i-1}-t_i)^{\mu_i}\prod_{s=i}^{n}\{(-t_s)^{\lambda_s}(t_{s+1}-t_s)^{\mu_{s+1}}\}dt_i\cdots dt_n\\ &=(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)}\\ &\quad\times\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n-i+1}\prod_{s=i}^{n}\{u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+2)}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}\}\left(1-\frac{t_{i-1}u_i\cdots u_n}{z}\right)^{\mu_i}du_i\cdots du_n\\ &=(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)}\\ &\quad\times\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n-i+1}\prod_{s=i}^{n}\{u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+2)}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu_i)_k}{k!}\left(\frac{t_{i-1}u_i\cdots u_n}{z}\right)^{k}du_i\cdots du_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k}{k!} \left(\frac{t_{i-1}}{z}\right)^k \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n-i+1} \prod_{s=i}^{n} \{u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+2)+k}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}\} du_i \cdots du_n \\
&= (-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k}{k!} \left(\frac{t_{i-1}}{z}\right)^k \prod_{s=i}^{n} \int_0^1 u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+2)+k}(1-u_s)^{\mu_{s+1}} du_s \\
&= (-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k}{k!} \left(\frac{t_{i-1}}{z}\right)^k \prod_{s=i}^{n} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1)+k, \mu_{s+1}+1) \\
&= (-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k}{k!} \left(\frac{t_{i-1}}{z}\right)^k \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n} \frac{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1))_k}{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}-(s-i))_k} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1), \mu_{s+1}+1) \\
&= (-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \prod_{s=i}^{n} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1), \mu_{s+1}+1) \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1))_k}{k! \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}-(s-i))_k} \left(\frac{t_{i-1}}{z}\right)^k
\end{aligned}
$$

となる. ただし $|\frac{t_{i-1}}{z}| < 1$ である. ここで, 途中の計算には二項定理

$$
\left(1 - \frac{t_{i-1}u_i \cdots u_n}{z}\right)^{\mu_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k}{k!} \left(\frac{t_{i-1}u_i \cdots u_n}{z}\right)^k \quad \left(\left|\frac{t_{i-1}}{z}\right| < 1\right)
$$

と, $k \in \mathbb{Z}$ に対する等式

$$
B(\alpha+k, \beta) = \frac{(\alpha)_k}{(\alpha+\beta)_k} B(\alpha, \beta) \ (\alpha, \beta \in \mathbb{C})
$$

を用いた. 一方で,

$$
t_s = u_1 \cdots u_s \ (1 \leq s \leq i-1)
$$

なる変数変換を行うと, そのヤコビアンは

$$
\frac{\partial(t_1, \ldots, t_{i-1})}{\partial(u_1, \ldots, u_{i-1})} = u_1^{i-2} u_2^{i-3} \cdots u_{i-2}
$$

となる. 従って

$$
\begin{aligned}
&\int_{0<t_{i-1}<\cdots<t_1<1} t_{i-1}^k \prod_{s=1}^{i-1} \{t_s^{\lambda_s}(t_{s-1}-t_s)^{\mu_s}\} dt_1 \cdots dt_{i-1} \\
&= \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{i-1} \prod_{s=1}^{i-1} \{u_s^{\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s-1+k)}(1-u_s)^{\mu_s}\} du_1 \cdots du_{i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{s=1}^{i-1} \int_0^1 u_s^{\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s-1+k)}(1-u_s)^{\mu_s} du_s \\
&= \prod_{s=1}^{i-1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s+k), \mu_s+1) \\
&= \prod_{s=1}^{i-1} \frac{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k}{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s), \mu_s+1)
\end{aligned}
$$

を得る．この 2 式から，

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_i^{(\infty)}} u_{D_i^{(\infty)}}(t) dt_1 \cdots dt_n \\
=&\int_{-\infty<t_i<\cdots<t_n<z, 0<t_{i-i}<\cdots<t_1<1} (t_{i-1}-t_i)^{\mu_i} \prod_{s=1}^{i-1} \{t_s^{\lambda_s}(t_{s-1}-t_s)^{\mu_s}\} \\
&\times \prod_{s=i}^{n} \{(-t_s)^{\lambda_s}(t_{s+1}-t_s)^{\mu_{s+1}}\} dt_1 \cdots dt_n \\
=&(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \prod_{s=i}^{n} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1), \mu_{s+1}+1) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1))_k}{k! \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}-(s-i))_k} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
&\times \int_{0<t_{i-i}<\cdots<t_1<1} t_{i-1}^k \prod_{s=1}^{i-1} \{t_s^{\lambda_s}(t_{s-1}-t_s)^{\mu_s}\} dt_1 \cdots dt_{i-1} \\
=&(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \prod_{s=i}^{n} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1), \mu_{s+1}+1) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg\{ \frac{(-\mu_i)_k \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1))_k}{k! \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}-(s-i))_k} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
&\times \prod_{s=1}^{i-1} \frac{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k}{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s), \mu_s+1) \Bigg\} \\
=&(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \\
&\times \prod_{s=1}^{i-1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s), \mu_s+1) \prod_{s=i}^{n} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1), \mu_{s+1}+1) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k \prod_{s=1}^{i-1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}-(s-i+1))_k}{k! \prod_{s=1}^{i-1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k \prod_{s=i}^{n}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}-(s-i))_k} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
=&(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \\
&\times \prod_{s=1}^{i-1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s), \mu_s+1) \\
&\times \prod_{s=i}^{n} B(\lambda_{s+1,i-1}+\mu_{s+2,i-1}+(i-s-1), \mu_{s+1}+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k}{k!} \prod_{s=1}^{i-1} \frac{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k}{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k} \\
&\times \prod_{s=i}^{n} \frac{(\lambda_{s+1,i-1}+\mu_{s+2,i-1}+(i-s-1))_k}{(\lambda_{s+1,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
=&(-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \\
&\times \prod_{s=1}^{i-1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s),\mu_s+1) \prod_{s=i+1}^{n+1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s),\mu_s+1) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k \prod_{s=1}^{i-1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k \prod_{s=i+1}^{n+1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k}{k! \prod_{s=1}^{i-1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k \prod_{s=i+1}^{n+1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
=&\prod_{s=1,s\neq i}^{n+1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s),\mu_s+1) \\
&\times (-z)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i,n}+(n-i+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu_i)_k \prod_{s=1,s\neq i}^{n+1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+(i-s))_k}{k! \prod_{s=1,s\neq i}^{n+1}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+(i-s+1))_k} \left(\frac{1}{z}\right)^k
\end{aligned}
$$

を得る. 補題 4.1 により, 上の式を $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1},\beta_1,\dots,\beta_n$ を用いて書き換えれば, (4.1) を得る.
(2)(1) において, t_s を t_s^{-1} に変数変換し, パラメータを $(\alpha_i, 1-\beta_i) \to (1-\beta_i, \alpha_i)$ $(1 \le s \le n+1)$ と変換すると, (4.2) の式を得る. □

上の命題 4.2 から, $\{D_1^{(0)},\dots,D_{n+1}^{(0)}\}$ を積分領域とする積分表示が ${}_{n+1}E_n$ の $x=0$ まわりの解の基本系を与え, $\{D_1^{(\infty)},\dots,D_{n+1}^{(\infty)}\}$ を積分領域とする積分表示が $x=\infty$ まわりの解の基本系を与える. 従って, $\{D_1^{(0)},\dots,D_{n+1}^{(0)}\}$ 上の積分表示, $\{D_1^{(\infty)},\dots,D_{n+1}^{(\infty)}\}$ 上の積分表示はそれぞれ線形独立になり, 次が成り立つ.

命題 4.3 ([M2], 命題 2.5)**.** $1 \le k, l \le n+1$ に対して, $\alpha_l - \beta_k \notin \mathbb{Z}$, $\beta_l - \beta_k \notin \mathbb{Z}(l \neq k)$ を仮定する. このとき,

$$
D_j^{(\infty)} = \sum_{1\le k\le n+1} \frac{s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_k-\alpha_j)} \prod_{1\le l\le n+1, l\neq k} \frac{s(\alpha_l-\beta_k)}{s(\beta_l-\beta_k)} \times D_k^{(0)}
$$

が成り立つ.

[M2] では命題 4.3 を交点数を用いて証明している.

命題 4.3 の接続関係式を用いて, 次節以降で ${}_{n+1}F_n$ の $z=0$ のまわりの解の基本系と $z=1$ まわりの解の基本系の接続問題を解決する.

4.2 $z=0$ と $z=1$ の接続問題

この節では, $z \in \mathbb{C}$ を $0<z<1$ を満たす実数として固定し, $T_{\mathbb{R}}$ の部分集合として

(4.3) $\quad \tilde{D}_i^{(0)} = \{(t_1,\dots,t_n) | 0<t_i<\dots<t_n<z, 1<t_1<\dots<t_{i-1}<+\infty\}$ $(1 \le i \le n+1)$

(4.4) $\tilde{D}_i^{(1)} = \{(t_1,\ldots,t_n) | -\infty < t_i < \cdots < t_n < 0, 0 < t_{i-1} < \cdots < t_1 < 1\}$ $(1 \le i \le n)$

(4.5) $\tilde{D}_{n+1}^{(1)} = \{(t_1,\ldots,t_n) | z < t_n < \cdots < t_1 < 1\}$

をとる．このとき, 次が成り立つ．

命題 4.4 ([M2], 命題 3.1)**.** (1)$1 \le i \le n+1$ を満たす i を一つ固定する．$1 \le s \le n+1, s \ne i$ に対して, $\mathrm{Re}(\alpha_s - \beta_i + 1) > 0, \mathrm{Re}(\beta_s - \alpha_s) > 0$ を仮定する．さらに, $|z| < 1$ を仮定する．このとき,

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{D}_i^{(0)}} u_{\tilde{D}_i^{(0)}}(t) dt_1 \cdots dt_n \\
&= \int_{z<t_n<\cdots<t_i<0, 1<t_1<\cdots<t_{i-1}<+\infty} (t_{i-1} - t_i)^{\beta_i - \alpha_i - 1} \prod_{s=1}^{i-1} \{ t_s^{\alpha_{s+1} - \beta_s} (t_s - t_{s-1})^{\beta_s - \alpha_s - 1} \} \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n} \{ (-t_s)^{\alpha_{s+1} - \beta_s} (t_s - t_{s+1})^{\beta_{s+1} - \alpha_{s+1} - 1} \} dt_1 \cdots dt_n \\
&= \prod_{1 \le s \le n+1, s \ne i} B(\alpha_s - \beta_i + 1, \beta_s - \alpha_s) f_i^{(0)}(z)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$f_i^{(0)}(z) = z^{1-\beta_i} {}_{n+1}F_n \left(\begin{matrix} \alpha_1 - \beta_i + 1, \alpha_2 - \beta_i + 1, \ldots, \alpha_{n+1} - \beta_i + 1 \\ \beta_1 - \beta_i + 1, \ldots, \beta_i \widehat{- \beta_i +} 1, \ldots, \beta_{n+1} - \beta_i + 1 \end{matrix} ; z \right)$$

である．また, $\beta_i \widehat{- \beta_i +} 1$ は $\beta_i - \beta_i + 1$ を除く, ということを意味する．

(2)$1 \le s \le n$ に対して $\mathrm{Re}(\beta_1 + \cdots + \beta_s - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s) > 0$ を, $1 \le s \le n+1$ に対して $\mathrm{Re}(\beta_s - \alpha_s) > 0$ を仮定する．さらに, $|1 - z| < 1$ を仮定する．このとき

$$\begin{aligned}
(4.6) \qquad &\int_{\tilde{D}_{n+1}^{(1)}} u_{\tilde{D}_{n+1}^{(1)}}(t) dt_1 \cdots dt_n \\
&= \int_{z<t_n<\cdots<t_1<1} \prod_{s=1}^{n} t_s^{\alpha_{s+1} - \beta_s} \prod_{s=1}^{n+1} (t_{s-1} - t_s)^{\beta_s - \alpha_s - 1} dt_1 \cdots dt_n \\
&= \prod_{s=1}^{n} B(\beta_1 + \cdots + \beta_s - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s, \beta_{s+1} - \alpha_{s+1}) f_{n+1}^{(1)}(z)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{(1)}(z) =& (1-z)^{\beta_1 + \cdots + \beta_n - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{n+1}} \\
&\times \sum_{i_1,\ldots,i_n \ge 0} \prod_{s=1}^{n} \frac{(\beta_s - \alpha_{s+1})}{i_s!} \prod_{s=1}^{n} \frac{(\sum_{k=1}^{s} (\beta_k - \alpha_k))_{i_1 + \cdots + i_s}}{(\sum_{k=1}^{s+1} (\beta_k - \alpha_k))_{i1 + \cdots + i_s}} (1-z)^{i_1 + \cdots + i_n}
\end{aligned}$$

である．

Proof. (1) 命題 4.2 (2) と同様にして導かれる．

(2) 変数変換

$$t_s = 1 + u_s u_{s+1} \cdots u_n (z - 1)$$

を行うと, そのヤコビアンは

$$\begin{aligned}\frac{\partial(t_1,\ldots,t_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)} &= (z-1)^n u_n^{n-1}u_{n-1}^{n-2}\cdots u_2^1 u_1^0\\ &= (-1)^n(1-z)^n u_n^{n-1}u_{n-1}^{n-2}\cdots u_2^1 u_1^0\end{aligned}$$

となる. このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{D}^{(1)}_{n+1}} u_{\tilde{D}^{(1)}_{n+1}}(t)dt_1\cdots dt_n\\
&=\int_{z<t_n<\cdots<t_1<1}\prod_{s=1}^{n} t_s^{\lambda_s}\prod_{s=1}^{n+1}(t_{s-1}-t_s)^{\mu_s}dt_1\cdots dt_n\\
&=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}\prod_{s=1}^{n+1}(u_{s-1}u_su_{s+1}\cdots u_n(z-1)-u_su_{s+1}\cdots u_n(z-1))^{\mu_s}\\
&\quad\times\prod_{s=1}^{n}(1+u_su_{s+1}\cdots u_n(z-1))^{\lambda_s}|(-1)^n(1-z)^n u_n^{n-1}u_{n-1}^{n-2}\cdots u_2^1u_1^0|du_1\cdots du_n\\
&=(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\\
&\quad\times\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}\prod_{s=1}^{n}\{u_s^{\mu_{1,s}+(s-1)}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}(1-(1-z)u_su_{s+1}\cdots u_n)^{\lambda_s}\}du_1\cdots du_n\\
&=(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\\
&\quad\times\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}\prod_{s=1}^{n}\left\{u_s^{\mu_{1,s}+(s-1)}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}\sum_{i_s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}}{i_s!}\{(1-z)u_su_{s+1}\cdots u_n\}^{i_s}\right\}du_1\cdots du_n\\
&=(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\\
&\quad\times\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}\prod_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i_s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}}{i_s!}(1-z)^{i_s}u_s^{\mu_{1,s}+(s-1)+\sum_{k=1}^{s}i_k}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}\right\}du_1\cdots du_n\\
&=(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\prod_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i_s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}}{i_s!}(1-z)^{i_s}\int_0^1 u_s^{\mu_{1,s}+(s-1)+\sum_{k=1}^{s}i_k}(1-u_s)^{\mu_{s+1}}\right\}du_1\cdots du_n\\
&=(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\prod_{s=1}^{n}\sum_{i_s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}}{i_s!}(1-z)^{i_s}B(\mu_{1,s}+s+\sum_{k=1}^{s}i_k,\mu_{s+1}+1)\\
&=(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\prod_{s=1}^{n}\sum_{i_s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}}{i_s!}(1-z)^{i_s}\frac{(\mu_{1,s}+s)_{i_1+\cdots+i_s}}{(\mu_{1,s+1}+s)_{i_1+\cdots+i_s}}B(\mu_{1,s}+s+1,\mu_{s+1}+1)\\
&=\prod_{s=1}^{n}B(\mu_{1,s}+s,\mu_{s+1}+1)(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\prod_{s=1}^{n}\sum_{i_s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}(\mu_{1,s}+s)_{i_1+\cdots+i_s}}{i_s!(\mu_{1,s+1}+s)_{i_1+\cdots+i_s}}(1-z)^{i_s}\\
&=\prod_{s=1}^{n}B(\mu_{1,s}+s,\mu_{s+1}+1)(1-z)^{\mu_{1,n+1}+n}\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{n}\frac{(-\lambda_s)_{i_s}(\mu_{1,s}+s)_{i_1+\cdots+i_s}}{i_s!(\mu_{1,s+1}+s)_{i_1+\cdots+i_s}}(1-z)^{\sum_{k=1}^{n}i_k}
\end{aligned}$$

となる．補題 4.1 により上の等式を $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\beta_1,\ldots,\beta_n$ で書き直せば (4.6) を得る． □

また, 次が成り立つ.

命題 4.5. $1\le i\le n+1$ を満たす i を一つ固定する．$1\le s\le i-1$ に対して $\mathrm{Re}(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s),\mathrm{Re}(\mu_s+1)>0$, $i\le s\le n$ に対して $\mathrm{Re}(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1)$, $i\le s\le n-1$ に対して $\mathrm{Re}(\mu_{s+1}+1)>0$, また, $\mathrm{Re}(\lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i+1)>0$ を仮定する．さらに, $|1-z|<1$ を仮定する．このとき

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad &\int_{\tilde{D}_i^{(1)}} u_{\tilde{D}_i^{(1)}}(t)dt_1\cdots dt_n\\
&=\int_{-\infty<t_i<\cdots<t_n<0,0<t_{i-1}<\cdots<t_1<1}\prod_{s=1}^{i-1}t_s^{\lambda_s}\prod_{s=i}^{n}(-t_s)^{\lambda_s}\\
&\quad\times\prod_{s=1}^{i}(t_{s-1}-t_s)^{\mu_s}\prod_{s=i+1}^{n+1}(t_s-t_{s-1})^{\mu_s}dt_1\cdots dt_n\\
&=\prod_{s=1}^{j-1}B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s,\mu_s+1)\prod_{s=j}^{n-1}B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1,\mu_{s+1}+1)\\
&\quad\times B(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n-1,\lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i+1)f_i^{(1)}(z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで,

$$
\begin{aligned}
f_i^{(1)}(z)=&\sum_{n_1,n_2\ge 0}\sum_{n_3=0}^{n_2}\frac{(-1)^{n_3}(-\mu_{n+1})_{n_1}(-\mu_i)_{n_2}(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}-n-1)_{n_1+n_2}}{n_1!n_3!(n_2-n_3)!(-\mu_j-\mu_{n+1})_{n_1+n_2}}\\
&\times\prod_{s=1}^{i-1}\frac{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s)_{n_3}}{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+i-s+1)_{n_3}}\prod_{s=i}^{n-1}\frac{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1)_{n_3}}{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}+i-s)_{n_3}}(1-z)^{n_1}
\end{aligned}
$$

である．

Proof. 変数変換

$$
\begin{aligned}
t_s&=u_1u_2\cdots u_s\ (1\le s\le i-1),\\
t_s&=u_s^{-1}u_{s+1}^{-1}\cdots u_n^{-1}(u_n-1)\ (i\le s\le n)
\end{aligned}
$$

を行うと, そのヤコビアンは,

$$
\frac{\partial(t_1,\ldots,t_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}=u_1^{i-2}u_2^{i-3}\cdots u_{i-2}^{1}u_{i-1}^{0}u_i^{-2}u_{i+1}^{-3}\cdots u_{n-1}^{i-n-1}u_n^{i-n-2}(1-u_n)^{n-i}
$$

となる．これより,

$$
\int_{\tilde{D}_i^{(1)}} u_{\tilde{D}_i^{(1)}}(t)dt_1\cdots dt_n
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty<t_i<\cdots<t_n<0, 0<t_{i-1}<\cdots<t_1<1} \prod_{s=1}^{i-1} t_s^{\lambda_s} \prod_{s=i}^{n} (-t_s)^{\lambda_s} \\
&\quad \times \prod_{s=1}^{i-1} (t_{s-1}-t_s)^{\mu_s} (t_{i-1}-t_i)^{\mu_i} \prod_{s=i+1}^{n} (t_s-t_{s-1})^{\mu_s} (z-t_n)^{\mu_{n+1}} dt_1 \cdots dt_n \\
&= \int_{(0,1)^n} \prod_{s=1}^{i-1} u_s^{\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s-1} \prod_{s=i}^{n} u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-2} \prod_{s=1}^{i-1} (1-u_s)^{\mu_s} \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n-1} (1-u_s)^{\mu_{s+1}} (1-u_n)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i} \\
&\quad \times (1-u_n(1-u_1\cdots u_{n-1}))^{\mu_j} \left(1-(1-z)u_n\right)^{\mu_{n+1}} du_1 \cdots du_n \\
&= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \sum_{n_3=0}^{n_2} \frac{(-1)^{n_3}(-\mu_{n+1})_{n_1}(-\mu_i)_{n_2}}{n_1! n_3! (n_2-n_3)!} (1-z)^{n_1} \\
&\quad \times \int_{(0,1)^n} \prod_{s=1}^{i-1} u_s^{\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s+n_3-1} \prod_{s=i}^{n-1} u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s+n_3-2} u_n^{-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n+n_1+n_2-2} \\
&\quad \times \prod_{s=1}^{i-1} (1-u_s)^{\mu_s} \prod_{s=i}^{n-1} (1-u_s)^{\mu_{s+1}} (1-u_n)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i} du_1 \cdots du_n \\
&= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \sum_{n_3=0}^{n_2} \frac{(-1)^{n_3}(-\mu_{n+1})_{n_1}(-\mu_i)_{n_2}}{n_1! n_3! (n_2-n_3)!} (1-z)^{n_1} \prod_{s=1}^{i-1} \int_0^1 u_s^{\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s+n_3-1} (1-u_s)^{\mu_s} du_s \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n-1} \int_0^1 u_s^{-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s+n_3-2} (1-u_s)^{\mu_{s+1}} du_s \\
&\quad \times \int_0^1 u_n^{-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n+n_1+n_2-2} (1-u_n)^{\lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i} du_n \\
&= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \sum_{n_3=0}^{n_2} \frac{(-1)^{n_3}(-\mu_{n+1})_{n_1}(-\mu_i)_{n_2}}{n_1! n_3! (n_2-n_3)!} (1-z)^{n_1} \prod_{s=1}^{i-1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s+n_3, \mu_s+1) \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n-1} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s+n_3-1, \mu_{s+1}+1) \\
&\quad \times B(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n+n_1+n_2-1, \lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i+1) \\
&= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \sum_{n_3=0}^{n_2} \frac{(-1)^{n_3}(-\mu_{n+1})_{n_1}(-\mu_i)_{n_2}}{n_1! n_3! (n_2-n_3)!} (1-z)^{n_1} \\
&\quad \times \prod_{s=1}^{i-1} \frac{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s)_{n_3}}{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+i-s+1)_{n_3}} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s, \mu_s+1) \\
&\quad \times \prod_{s=i}^{n-1} \frac{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1)_{n_3}}{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}+i-s)_{n_3}} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1, \mu_{s+1}+1) \\
&\quad \times \frac{(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n-1)_{n_1+n_2}}{(-\mu_i-\mu_{n+1})_{n_1+n_2}} B(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n-1, \lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\prod_{s=1}^{j-1} B(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s,\mu_s+1)\prod_{s=j}^{n-1} B(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1,\mu_{s+1}+1)\\
&\times B(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n-1,\lambda_{i,n}+\mu_{i+1,n}+n-i+1)\\
&\times \sum_{n_1,n_2\geq 0}\sum_{n_3=0}^{n_2}\frac{(-1)^{n_3}(-\mu_{n+1})_{n_1}(-\mu_i)_{n_2}(-\lambda_{i,n}-\mu_{i,n+1}+i-n-1)_{n_1+n_2}}{n_1!n_3!(n_2-n_3)!(-\mu_j-\mu_{n+1})_{n_1+n_2}}\\
&\times \prod_{s=1}^{i-1}\frac{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s+1,i-1}+i-s)_{n_3}}{(\lambda_{s,i-1}+\mu_{s,i-1}+i-s+1)_{n_3}}\prod_{s=i}^{n-1}\frac{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s+1}+i-s-1)_{n_3}}{(-\lambda_{i,s}-\mu_{i,s}+i-s)_{n_3}}(1-z)^{n_1}
\end{aligned}
$$

となり, (4.7) を得る. 途中の式変形では 2 項定理

$$
\begin{aligned}
(1-(1-z)u_n)^{\mu_{n+1}} &= \sum_{n_1\geq 0}\frac{(-\mu_{n+1})_{n_1}}{n_1!}u_n^{n_1}(1-z)^{n_1},\\
(1-u_n(1-u_1\cdots u_{n-1}))^{\mu_i} &= \sum_{n_2\geq 0}\frac{(-\mu_i)_{n_2}}{n_2!}u_n^{n_2}(1-u_1\cdots u_{n-1})^{n_2}\\
&= \sum_{n_2\geq 0}\sum_{n_3=0}^{n_2}\frac{(-\mu_i)_{n_2}(-1)^{n_3}}{n_3!(n_2-n_3)!}u_1^{n_3}\cdots u_{n-1}^{n_3}u_n^{n_2}
\end{aligned}
$$

を用いた. □

注意 4.6. 命題 4.5 の (4.7) は命題 3.9 の (3.3), (3.4) を一般化したものだが, 式の形は全く異なっているように見える. $n>2$ の場合 (命題 3.9) の証明には二項定理

$$
\begin{aligned}
(1-u_n(1-u_1\cdots u_{n-1}))^{\mu_i} &= \sum_{n_2\geq 0}\frac{(-\mu_i)_{n_2}}{n_2!}u_n^{n_2}(1-u_1\cdots u_{n-1})^{n_2}\\
&= \sum_{n_2\geq 0}\sum_{n_3=0}^{n_2}\frac{(-\mu_i)_{n_2}}{n_3!(n_2-n_3)!}u_1^{n_3}\cdots u_{n-1}^{n_3}u_n^{n_2}
\end{aligned}
$$

を 2 回用いなければならないが, $n=2$ の場合 (命題 3.9) の証明では,

$$
\begin{aligned}
(1-u_n(1-u_1\cdots u_{n-1}))^{\mu_i} =&(1-u_2(1-u_1))^{\mu_i}\\
=&\sum_{n_2\geq 0}\frac{(-\mu_i)_{n_2}}{n_2!}u_2^{n_2}(1-u_1)^{n_2}
\end{aligned}
$$

となり, 二項定理を 1 回使うだけでベータ関数の被積分関数の因子が現れるためである.

命題 4.4 より, $z=1$ の近傍では $\int_{\tilde{D}^{(1)}_{n+1}} u_{\tilde{D}^{(1)}_{n+1}}(t)dt$ が ${}_{n+1}E_n$ の $z=1$ まわりの非正則解となる. これらの関係式として次が成り立つ.

命題 4.7 ([M2], 命題 3.3)**.** $1\leq k,l\leq n+1$ に対して, $\alpha_l-\beta_k\notin\mathbb{Z}$, $\beta_l-\beta_k\notin\mathbb{Z}(l\neq k)$ を仮定する. このとき,

$$
\tilde{D}^{(1)}_{n+1}=\sum_{1\leq k\leq n+1}\prod_{1\leq l\leq n+1, l\neq k}\frac{s(\alpha_l-\beta_k)}{s(\beta_l-\beta_k)}\times\tilde{D}^{(0)}_k
$$

が成り立つ.

[M2] では命題 4.7 を交点数を用いて証明している.

[M1] および [M2] では, ${}_{n+1}E_n$ の $z=1$ における非正則解と $z=0$ まわりの解の基本系との接続問題に関する結果として, 命題 4.7 が示されていた. ここでは, その結果を受けて ${}_{n+1}E_n$ の $z=1$ における n 個の正則解と, $z=0$ まわりの解の基本系との接続問題を解決する. 実際, 次が成り立つ.

定理 4.8. $1 \leq k \leq n$ に対して, 次を仮定する.

$$\theta_0^{(k)} - \sigma^{(k)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}, \theta_0^{(l)} - \theta_0^{(k)} \ (1 \leq l \leq n+1, l \neq k) \notin \mathbb{Z}.$$

このとき, $1 \leq j \leq n$ に対して接続関係式

(4.8)

$$\begin{aligned}\tilde{D}_j^{(1)} =&(-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{s(\theta_0^{(j)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}) s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(n+1)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(k)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})} \\ &\times \frac{\prod_{l=1, l\neq j}^{n} s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{\prod_{l=1, l\neq k}^{n+1} s(\theta_0^{(l)} - \theta_0^{(k)})} \tilde{D}_k^{(0)} \\ &+ (-1)^n \frac{s(\theta_0^{(j)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})} \prod_{1 \leq l \leq n} \frac{s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(l)} - \theta_0^{(n+1)})} \tilde{D}_{n+1}^{(0)}\end{aligned}$$

が成り立つ. また, $j = n+1$ に対しては

$$\tilde{D}_{n+1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{l=1, l\neq k}^{n+1} \frac{s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(l)} - \theta_0^{(k)})} \tilde{D}_k^{(0)} \tag{4.9}$$

が成り立つ.

注意 4.9. 定理 4.8 の $j = n+1$ の関係式は, 命題 4.7 の α, β を θ, σ を用いて書き換えたものである.

次節で定理 4.8 の証明を行う.

4.3 定理 4.8 の証明

一般化超幾何関数の満たす微分方程式は $z = 0, \infty$ にそれぞれ $n+1$ 個の基本解をもち, これらそれぞれに対して積分表示を考えることができる. ${}_{n+1}E_n$ の $z=0$ まわりの解は $|z| < 1$ のときに, $z = \infty$ の解は $|z| > 1$ のときにそれぞれ収束する. そこで, $z=0$ と $z=\infty$ の接続関係を考える際には複素変数 z を $z<0$ を満たす実数としてひとつ固定しておく. 一方で, ${}_{n+1}E_n$ の $z=1$ まわりの解は $|1-z| < 1$ のときに収束するから, $z=0$ と $z=1$ の接続問題を解くためには z は $z<0$ ではなく $0<z<1$ を満たす実数としてひとつ固定しなければならない. このことから, ${}_{n+1}E_n$ の $z=0,\infty$ の接続係数において, z を $\{z<0\}$ から $\{0<z<1\}$ へ解析接続することによ

り, $z=0,1$ の接続関係式を与える. 定理 4.8 で証明すべき式 (4.8) にはパラメータ θ_0,σ が含まれているが, このパラメータ θ_0,σ は各 n に対して意味が変わるため扱いづらい. 被積分関数 $u(t)$ の指数 λ,μ は n が変化してもその意味が変わらないから, (4.8) を λ,μ を用いて書き換えたものを用意する.

定理 4.10. 各 $k=1,\dots,n$ に対して, 次を仮定する.

$$\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k}\ (1\le k\le n+1), \lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k}\ (1\le l\le k-1),$$
$$\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l}\ (k+1\le l\le n+1)\notin\mathbb{Z}$$

このとき $1\le j\le n$ に対して,

(4.10)
$$\tilde{D}_j^{(1)}=(-1)^j\sum_{k=1}^{n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\tilde{D}_k^{(0)}$$
$$+(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{n}s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})\prod_{l=1}^{n}s(\lambda_{l,n}+\mu_{l+1,n+1})}\tilde{D}_{n+1}^{(0)}$$

が成り立つ. また, $j=n+1$ に対して,

$$\tilde{D}_{n+1}^{(1)}=\sum_{k=1}^{n+1}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\tilde{D}_k^{(0)}\tag{4.11}$$

が成り立つ.

Proof. 補題 4.1 を用いると

$$\begin{aligned}s\left(\theta_0^{(j)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)&=s(-\mu_j-1)\\&=s(\mu_j)\end{aligned}$$

となる. さらに

$$\begin{aligned}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}s(\theta_0^{(l)}-\theta_0^{(k)})=&\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k}+|l-k|)\\
=&\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(-1)^{l-k}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\\
=&\prod_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-k}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}(-1)^{l-k}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\\
=&(-1)^{-k(k-1)/2+(n-k+1)(n-k+2)/2}\\
&\times\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)^{n^2/2+3n/2-k-nk+1}\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}(-1)s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})\\
&=(-1)^{n^2/2+3n/2-k-nk+1}(-1)^{n-k+1}\\
&\quad\times\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})\\
&=(-1)^{n^2/2+5n/2-2k-nk+2}\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})
\end{aligned}
$$

となる．また,

$$
\begin{aligned}
&\prod_{l=1,l\neq j}^{n}s\left(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{s(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})}\prod_{l=1}^{n}s\left(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

に注意すると,

$$
s\left(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=\begin{cases}s(\mu_k) & (k=j)\\ (-1)^{j-k-1}s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j-1}) & (k\neq j)\end{cases}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
&\prod_{l=1}^{n}s\left(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1}+|l-k-1|)s(\mu_k)\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1}+|l-k-1|)\\
&=\prod_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})s(\mu_k)\prod_{l=k+1}^{n}(-1)^{l-k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})\\
&=(-1)^{(k-1)(-k-2)/2}\\
&\quad\times\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})s(\mu_k)(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2}\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})\\
&=(-1)^{n^2/2-n/2-nk+1}\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})s(\mu_k)\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})\\
&=(-1)^{n^2/2-n/2-nk+1}\prod_{l=1}^{k-1}(-1)s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})s(\mu_k)\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})\\
&=(-1)^{n^2/2-n/2-nk+1}(-1)^{k-1}\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})s(\mu_k)\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})\\
&=(-1)^{n^2/2-n/2-nk+k}\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})s(\mu_k)\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})
\end{aligned}
$$

を得る．さて $k \neq j$ の時は

$$
\begin{aligned}
&\prod_{l=1, l\neq j}^{n} s\left(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})} \prod_{l=1}^{n} s\left(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= (-1)^{n^2/2-n/2-nk+k} \frac{\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k}) s(\mu_k) \prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,j-1} + \mu_{k+1,j-1} + |j-k-1|)} \\
&= (-1)^{n^2/2-n/2-nk+k} \frac{\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k}) s(\mu_k) \prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l-1})}{(-1)^{j-k} s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k})} \\
&= (-1)^{n^2/2-n/2-nk-j+2k} \frac{\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k}) s(\mu_k) \prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k})}
\end{aligned}
$$

となるから, (4.8) における $\tilde{D}_k^{(0)}$ $(1 \leq k \leq n)$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n \frac{s(\theta_0^{(j)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}) s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(n+1)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(k)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})} \\
&\times \prod_{l=1, l\neq j}^{n} \frac{s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(l)} - \theta_0^{n+1})} \\
&= (-1)^n \frac{s(\mu_j) s(\mu_{n+1}) (-1)^{n^2/2-n/2-nk-j+2k}}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k}) s(\mu_k) (-1)^{n^2/2+5n/2-2k-nk+2}} \\
&\quad \times \frac{\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k}) s(\mu_k) \prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l+1,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l})} \\
&= (-1)^{-2n+4k-j-2} \frac{s(\mu_j) s(\mu_{n+1}) \prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k}) \prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l+1,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l})} \\
&= (-1)^{j} \frac{s(\mu_j) s(\mu_{n+1}) \prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k}) \prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l+1,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

となり, $1 \leq k \leq n$ のときの係数が定理 4.10 に一致することが示される．いま $k = j$ の場合は $k \neq j$ の場合に含まれることに注意する．また, $\tilde{D}_{n+1}^{(0)}$ の係数についても, $k \neq j$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n \frac{s(\theta_0^{(j)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}) \prod_{1 \leq l \leq n} s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(l)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1}) \prod_{1 \leq l \leq n} s(\theta_0^{(l)} - \theta_0^{n+1})} \\
&= (-1)^n \frac{s(\mu_j) \prod_{l=1}^{n} s(\lambda_{n+1,l-1} + \mu_{n+2,l-1} + |l-(n+1)-1|)}{s(\lambda_{n+1,j-1} + \mu_{n+2,j-1} + |j-(n+1)-1|) \prod_{l=1}^{n} s(\lambda_{l,n} + \mu_{l+1,n+1} + |l-(n+1)|)} \\
&= (-1)^n \frac{s(\mu_j) \prod_{l=1}^{n} (-1)^{l-n-1} s(\lambda_{l,n} + \mu_{l,n+1} +)}{(-1)^{j-n+1} s(\lambda_{j,n} + \mu_{j,n+1}) \prod_{l=1}^{n} (-1)^{l-n-1} s(\lambda_{l,n} + \mu_{l+1,n+1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{2n-j-1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{n} s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1}+)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})\prod_{l=1}^{n} s(\lambda_{l,n}+\mu_{l+1,n+1})}\\
&= (-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{n} s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1}+)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})\prod_{l=1}^{n} s(\lambda_{l,n}+\mu_{l+1,n+1})}
\end{aligned}
$$

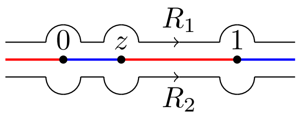
となり, さらに $k=j$ の場合は $k\neq j$ の場合に含まれる. 以上により, (4.8), (4.9) は (4.10), (4.11) のように書き換えられる. □

従って, 定理 4.10 が証明できれば, 定理 4.8 も証明される.

Proof. (定理 4.10)
まず (4.10) が成り立つことを数学的帰納法により示す.
Step1. $n=1$ のとき
$0<z<1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_1^{(0)} &= \{0<t_1<z\}, \tilde{D}_2^{(0)} = \{1<t_1<\infty\},\\
\tilde{D}_1^{(1)} &= \{-\infty<t_1<0\}, \tilde{D}_2^{(1)} = \{z<t_1<1\}
\end{aligned}
$$

である. T_z を $\mathbb{R}$ へ制限した集合 $T_{\mathbb{R}}$ は, 次図の 4 つの領域に分かれている.



このとき, 特異点を上に避けて通る道 R_1 と反時計回りに向きづけられた閉曲線 C_1, および特異点を下に避けて通る道 R_2 と時計回りに向きづけられた閉曲線 C_2 がそれぞれ同相になる.
Cauchy の積分定理から, R_1, R_2 に沿った $u(t)$ の積分の値は 0 になるから

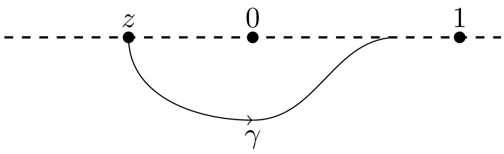
$$
\begin{aligned}
&e_1\tilde{e}_{1,2}\tilde{D}_1^{(1)} + \tilde{e}_{1,2}\tilde{D}_1^{(0)} + \tilde{e}_1\tilde{D}_2^{(1)} + \tilde{D}_2^{(0)} = 0,\\
&e_1^{-1}\tilde{e}_{1,2}^{-1}\tilde{D}_1^{(1)} + \tilde{e}_{1,2}^{-1}\tilde{D}_1^{(0)} + \tilde{e}_1^{-1}\tilde{D}_2^{(1)} + \tilde{D}_2^{(0)} = 0
\end{aligned}
$$

を得る. この 2 式を $\tilde{D}_1^{(1)}, \tilde{D}_2^{(1)}$ に関して解けば,

$$
\tilde{D}_1^{(1)} = -\frac{s(\mu_2)}{s(\lambda_1+\mu_2)}\tilde{D}_1^{(0)} + \frac{s(\mu_1)}{s(\lambda_1+\mu_2)}\tilde{D}_2^{(0)}, \tag{4.12}
$$

$$
\tilde{D}_2^{(1)} = -\frac{s(\lambda_1)}{s(\lambda_1+\mu_2)}\tilde{D}_1^{(0)} - \frac{s(\lambda_1+\mu_{1,2})}{s(\lambda_1+\mu_2)}\tilde{D}_2^{(0)}. \tag{4.13}
$$

を得る. この第 1 式 (4.12) は, (4.10) において $n=1$ と置いたものに一致する. 従って, $n=1$ のときは (4.10) は成り立つ.
Step2. $n>1$ のとき
$k<n$ を満たす自然数 k に対して, (4.10) の成立を仮定する. 下の図の道 γ に沿った解析接続を γ_* と表す.



補題 4.11. (1) $1 \leq j \leq n+1$ に対して,

$$\gamma_*(D_j^{(0)}) = (-1)^{n-j+1} e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\tilde{D}_j^{(0)}$$

が成り立つ.
(2) $1 \leq j \leq n$ に対して,

$$\begin{aligned}\gamma_*(D_j^{(\infty)}) =& \tilde{D}_j^{(1)} + \sum_{k=j+1}^{n} e_{k,n}\left\{\begin{array}{c} -\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, \\ 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1 \end{array}\right\} \\ &+ e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_j < \cdots < t_1 < 1\} \\ &+ e_{j,n}\tilde{e}_j\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < t_j, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}\end{aligned}$$

が成り立つ. また,

$$\gamma_*(D_{n+1}^{(\infty)}) = \tilde{D}_{n+1}^{(1)} + \tilde{e}_{n+1}\{0 < t_n < z, 0 < t_n < \cdots < t_1 < 1\}$$

が成り立つ.

Proof. (1) $D_j^{(0)}$ の定義

$$D_j^{(0)} = \{z < t_n < \cdots < t_j < 0, 1 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < +\infty\}$$

より, γ_* によって z を $z<0$ から $0<z<1$ へ解析接続すると, t_k $(j \leq k \leq n), t_{k-1} - t_k$ $(j+1 \leq k \leq n+1)$ の偏角が π 変化する. 従って, γ_* による解析接続により, $e_{i,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}$ がかかり,

$$\gamma_*(D_j^{(0)}) = e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\{\overleftarrow{0 < t_j < \cdots < t_n < z}, 1 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < +\infty\}$$

となる. ここで $\overleftarrow{0 < t_j < \cdots < t_n < z}$ は, 積分路の向きが逆になっていることを表す. 従って

$$\begin{aligned}\gamma_*(D_j^{(0)}) &= e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\{\overleftarrow{0 < t_j < \cdots < t_n < z}, 1 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < +\infty\} \\ &= (-1)^{n-j+1} e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 1 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < +\infty\}\end{aligned}$$

をえる.
(2) $D_j^{(\infty)}$ の定義

$$D_j^{(\infty)} = \{-\infty < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$$

より, γ_* によって z を $z<0$ から $0<z<1$ へ解析接続する.
その結果, $1 \leq j \leq n$ のとき, t_n 平面では, $\{-\infty < t_n < z\}$ は 2 本の直線 $\{-\infty < t_n < 0\}, \{0 < t_n < z\}$ に分けられる. このとき $\{0 < t_n < z\}$ では, 0 と t_n の位置関係が変わるため, $t_n^{\lambda_n}$ の

偏角が π 増加し, e_n がかかる. 次に $t_{n-1} < t_n < z$ より, z の解析接続によって, t_{n-1} 平面では 3 本の直線 $\{t_{n-1} < t_n < 0\}, \{t_{n-1} < 0 < t_n\}, \{0 < t_{n-1} < t_n\}$ に分けられる. このとき, $\{0 < t_{n-1} < t_n\}$ では 0 と t_{n-1} の位置関係が変わるため, $t_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$ の偏角が π 増加し, e_{n-1} がかかる. 以降この操作を $t_{n-2}, \dots, t_{j+1}$ 平面まで繰り返し, $\gamma_*(D_j^{(\infty)})$ は

$$\begin{aligned}\gamma_*(D_j^{(\infty)}) =& \tilde{D}_j^{(1)} \\ &+ \sum_{k=j+2}^{n} e_{k,n} \left\{ \begin{array}{c} -\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, \\ 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1 \end{array} \right\} \\ &+ e_{j+1,n}\{0 < t_{j+1} < \cdots < t_n < z, -\infty < t_j < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}\end{aligned}$$

まで分けられる. ここで $\{-\infty < t_j < t_{j+1}\}$ については 2 本の直線 $\{-\infty < t_j < 0\}, \{0 < t_j < t_{j+1}\}$ に分けられるが, このとき $\{0 < t_j < t_{j+1}\}$ では t_j と 0 の位置関係が変わるため, $t_j^{\lambda_j}$ の偏角が π 増加し, e_j がかかる. よって,

$$\begin{aligned}& e_{j+1,n}\{0 < t_{j+1} < \cdots < t_n < z, -\infty < t_j < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\ =& e_{j+1,n}\{0 < t_{j+1} < \cdots < t_n < z, -\infty < t_j < 0, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\ &+ e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}\end{aligned}$$

となる. ところで上式第 2 項 $e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$ における t_{j-1} 平面では, 直線 $\{0 < t_{j-1} < 1\}$ は 2 本の直線 $\{0 < t_{j-1} < t_j\}, \{t_j < t_{j-1} < 1\}$ に分けられる. このとき $\{t_j < t_{j-1} < 1\}$ では t_{j-1} と t_j の位置関係が変わるため, $(t_{j-1} - t_j)^{\mu_j}$ の偏角が π 増加する. 従って

$$\begin{aligned}& e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\ =& e_{j,n}\tilde{e}_j\{0 < t_{j-1} < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < t_{j-2} < \cdots < t_1 < 1\} \\ &+ e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, t_j < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}\end{aligned}$$

となる. まとめると

$$\begin{aligned}& \gamma_*(D_j^{(\infty)}) \\ &= \tilde{D}_j^{(1)} + \sum_{k=j+2}^{n} e_{k,n} \left\{ \begin{array}{c} -\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, \\ 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1 \end{array} \right\} \\ &\quad + e_{j+1,n}\{0 < t_{j+1} < \cdots < t_n < z, -\infty < t_j < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\ &= \tilde{D}_j^{(1)} + \sum_{k=j+2}^{n} e_{k,n} \left\{ \begin{array}{c} -\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, \\ 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1 \end{array} \right\} \\ &\quad + e_{j+1,n}\{0 < t_{j+1} < \cdots < t_n < z, -\infty < t_j < 0, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\ &\quad + e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\ &= \tilde{D}_j^{(1)} + \sum_{k=j+1}^{n} e_{k,n} \left\{ \begin{array}{c} -\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, \\ 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1 \end{array} \right\} \\ &\quad + e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_j < \cdots < t_1 < 1\}\end{aligned}$$

$$+ e_{j,n}\tilde{e}_j\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < t_j, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$$

となり, $1 \leq j \leq n$ のとき, 補題 4.11(2) は成り立つ.
また, $j = n+1$ のときは,

$$D_{n+1}^{(\infty)} = \{0 < t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1 < 1\}$$

であり, 作用 γ_* によって, z を解析接続すると, t_n 平面では, 2 つの直線 $\{0 < t_n < z\}, \{z < t_n < 1\}$ に分けられる. このとき, $\{0 < t_n < z\}$ と $\{z < t_n < 1\}$ では, t_n と z の位置関係が変わるため, $(t_n - z)^{\mu_{n+1}}$ の偏角が π 増加する. 以上より,

$$\begin{aligned}
\gamma_*(D_j^{(\infty)}) =& \{z < t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1 < 1\} + \tilde{e}_{n+1}\{0 < t_n < z, 0 < t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\
=& \tilde{D}_{n+1}^{(1)} + \tilde{e}_{n+1}\{0 < t_n < z, 0 < t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1 < 1\}
\end{aligned}$$

となり, $j = n+1$ のときにも補題 4.11(2) は成り立つ. □

ところで命題 4.3 の関係式は補題 4.1 を用いると次のように書き換えられる.

$$D_j^{(\infty)} = \sum_{1 \leq k \leq n+1} (-1)^{k-j} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k})} \prod_{1 \leq l \leq n+1, l \neq k} \frac{s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l})} \times D_k^{(0)}.$$

この両辺は γ_* の作用により,

$$\gamma_*(D_j^{(\infty)}) = \sum_{1 \leq k \leq n+1} (-1)^{k-j} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k})} \prod_{1 \leq l \leq n+1, l \neq k} \frac{s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l})} \times \gamma_*(D_k^{(0)})$$

となるが補題 4.11 により, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_j^{(1)} \\
=& \sum_{1 \leq k \leq n+1} (-1)^{k-j} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1} + \mu_{j,k})} \prod_{1 \leq l \leq n+1, l \neq k} \frac{s(\lambda_{l,k-1} + \mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1} + \mu_{k+1,l})} (-1)^{n-k+1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\tilde{D}_k^{(0)} \\
&- \sum_{k=j+1}^{n} e_{k,n}\{-\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} \\
&- e_{j,n}\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_j < \cdots < t_1 < 1\} \\
&- e_{j,n}\tilde{e}_j\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < t_j, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}.
\end{aligned}$$

ここで第 2 項の $\{-\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, 0 < t_k < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$ は $t_k, \ldots, t_n$ をすべて固定すると $\{-\infty < t_j < \cdots < t_{k-1} < 0, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$ とみなせる. このとき, $0 < t_k < 1$ であるから, (4.4) と比べると, これは ${}_kF_{k-1}(t_k)$ の $t_k = 1$ まわりの正則解の基底 $\tilde{D}_j^{(1)}$ とみなせる. また第 3 項 $\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_j < \cdots < t_1 < 1\}$ は $t_j, \ldots, t_n$ をすべて固定すると, $\{t_j < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$ とみなせ, これは ${}_jF_{j-1}(t_j)$ の $t_j = 1$ まわりの非正則解の基底 $\tilde{D}_{(j-1)+1}^{(1)}$ とみなせる. さらに第 4 項 $\{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 0 < t_{j-1} < t_j, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\}$ は $t_{j-1}, \ldots, t_n$ をすべて固定すると $\{t_{j-1} < t_{j-2} < \cdots < t_1 < 1\}$ と

みなせ, これは ${}_{j-1}F_{j-2}(t_{j-1})$ の $t_{j-1}=1$ まわりの非正則解の基底 $\tilde{D}^{(1)}_{(j-2)+1}$ とみなせる. 以上のことからすべての項で数学的帰納法の仮定が使える. 実際に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\tilde{D}^{(1)}_{j}\\
&= \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^{n-j+1}e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\prod_{1\le l\le n+1, l\ne k}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\tilde{D}^{(0)}_{k}\\
&\quad -\sum_{k=j+1}^{n}e_{k,n}\tilde{D}^{(1)}_{j[{}_kF_{k-1}]}-e_{j,n}\tilde{D}^{(1)}_{j[{}_jF_{j-1}]}-e_{j,n}\tilde{e}_j\tilde{D}^{(1)}_{j-1[{}_{j-1}F_{j-2}]}\\
&=\sum_{1\le k\le n+1}(-1)^{n-j+1}e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\prod_{1\le l\le n+1, l\ne k}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\tilde{D}^{(0)}_{k}\\
&\quad -\sum_{k=j+1}^{n}e_{k,n}\Biggl\{(-1)^{j}\sum_{m=1}^{k-1}\prod_{l=1}^{m-1}\frac{s(\lambda_{l,m-1}+\mu_{l,m})}{s(\lambda_{l,m-1}+\mu_{l+1,m})}\\
&\quad \times\frac{s(\mu_j)s(\mu_k)\prod_{l=m+1}^{k-1}s(\lambda_{m,l-1}+\mu_{m+1,l-1})}{s(\lambda_{j,m-1}+\mu_{j,m})\prod_{l=m+1}^{k}s(\lambda_{m,l-1}+\mu_{m+1,l})}\tilde{D}^{(0)}_{m[{}_kF_{k-1}]}\\
&\quad +(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_kF_{k-1}]}\Biggr\}\\
&\quad -e_{j,n}\sum_{k=1}^{j}\prod_{l=1,l\ne k}^{j}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_jF_{j-1}]}\\
&\quad -e_{j,n}\tilde{e}_j\sum_{k=1}^{j-1}\prod_{l=1,l\ne k}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_{j-1}F_{j-2}]}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_{m+1}F_m]}$ で, ${}_{m+1}F_m$ における解の積分領域 $\tilde{D}^{(0)}_{k}$ を表す. また, ${}_{n+1}F_n$ に対する解の積分領域 $\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_{n+1}F_n]}$ は単に $\tilde{D}^{(0)}_{k}$ と表している. いま, 第 2 項では順序 $0<t_k<\cdots<t_n<z$ を保って $t_k,\dots,t_n$ を固定していることから

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}^{(0)}_{m[{}_kF_{k-1}]} &=\{0<t_m<\cdots<t_{k-1}<t_k, 1<t_1<\cdots<t_{m-1}<+\infty, 0<t_k<\cdots<t_n<z\}\\
&=\{0<t_m<\cdots<t_{k-1}<t_k<\cdots<t_n<z, 1<t_1<\cdots<t_{m-1}<+\infty\}\\
&=\tilde{D}^{(0)}_{m[{}_{n+1}F_n]},\\
\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_kF_{k-1}]} &=\{1<t_1<\cdots<t_{k-1}<\infty, 0<t_k<\cdots<t_n<z\}\\
&=\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_{n+1}F_n]}
\end{aligned}
$$

となる. 第 3 項では順序 $0<t_j<\cdots<t_n<z$ を保って $t_j,\dots,t_n$ を固定していることから

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_jF_{j-1}]} &=\{0<t_k<\cdots<t_{j-1}<t_j, 1<t_1<\cdots<t_{k-1}<\infty, 0<t_j<\cdots<t_n<z\}\\
&=\{0<t_k<\cdots<t_{j-1}<t_j<t_{j+1}<\cdots<t_n<z, 1<t_1<\cdots<t_{k-1}<\infty\}\\
&=\tilde{D}^{(0)}_{k[{}_{n+1}F_n]}
\end{aligned}
$$

となる．第 4 項では順序 $0 < t_{j-1} < t_j, 0 < t_j < \cdots < t_n < z$ を保って $t_{j-1}, t_j, \ldots, t_n$ を固定していることから

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{(0)}_{k[_{j-1}F_{j-2}]} =& \left\{ \begin{matrix} 0 < t_k < \cdots < t_{j-2} < t_{j-1}, 1 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < \infty, \\ 0 < t_{j-1} < t_j, 0 < t_j < \cdots < t_n < z \end{matrix} \right\} \\ =& \{0 < t_k < \cdots < t_{j-2} < t_{j-1} < t_j < \cdots < t_n < z, 1 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < \infty\} \\ =& \tilde{D}^{(0)}_{k[_{n+1}F_n]}\end{aligned}$$

となる．このことから，

$$\begin{aligned}&\tilde{D}^{(1)}_j \\ &= \sum_{1\le k\le n+1} (-1)^{n-j+1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})} \prod_{1\le l\le n+1, l\ne k} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \tilde{D}^{(0)}_k \\ &\quad - \sum_{k=j+1}^{n} e_{k,n} \Bigg\{ (-1)^j \sum_{m=1}^{k-1} \prod_{l=1}^{m-1} \frac{s(\lambda_{l,m-1}+\mu_{l,m})}{s(\lambda_{l,m-1}+\mu_{l+1,m})} \\ &\quad \times \frac{s(\mu_j)s(\mu_k)\prod_{l=m+1}^{k-1} s(\lambda_{m,l-1}+\mu_{m+1,l-1})}{s(\lambda_{j,m-1}+\mu_{j,m})\prod_{l=m+1}^{k} s(\lambda_{m,l-1}+\mu_{m+1,l})} \tilde{D}^{(0)}_m \\ &\quad + (-1)^{j-1} \frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{k-1,l-1}+\mu_{k,l})} \tilde{D}^{(0)}_{k[_kF_{k-1}]} \Bigg\} \\ &\quad - e_{j,n} \sum_{k=1}^{j} \prod_{l=1,l\ne k}^{j} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \tilde{D}^{(0)}_k - e_{j,n}\tilde{e}_j \sum_{k=1}^{j-1} \prod_{l=1,l\ne k}^{j-1} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \tilde{D}^{(0)}_k \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \left(A_k - \sum_{m=j+1}^{n} B_{k,m} - E_k - F_k \right) \tilde{D}^{(0)}_k \\ &\quad + \left(A_j - \sum_{m=j+1}^{n} B_{j,m} - E_j \right) \tilde{D}^{(0)}_j \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^{n} \left(A_k - \sum_{m=k+1}^{n} B_{k,m} - C_k \right) \tilde{D}^{(0)}_k \\ &\quad + A_{n+1}\tilde{D}^{(0)}_{n+1}\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}A_k &= (-1)^{n-j-1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})} \prod_{l=1,l\ne k}^{n+1} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}, \\ B_{k,m} &= e_{m,n}(-1)^j \frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{m-1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{m} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}, \\ C_k &= e_{k,n}(-1)^{j-1} \frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})},\end{aligned}$$

$$E_k = e_{j,n} \prod_{l=1, l\neq k}^{j} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})},$$
$$F_k = e_{j,n}\tilde{e}_j \prod_{l=1, l\neq k}^{j-1} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}$$

である．このことから 4 つの場合 $(1 \leq k \leq j-1, k=j, j+1 \leq k \leq n, k=n+1)$ それぞれに対して, 目標の等式と $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数が一致することを示せば証明は終わる．以下, 4 つの場合 (1), ..., (4) に分けて示す．

(1) $k=n+1$ のとき

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= (-1)^{n-j-1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{n+1,l-1}+\mu_{n+2,l})} \\
&= (-1)^{n-j-1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(-\lambda_{l,n}-\mu_{l+1,n+1})} \\
&= (-1)^{n-j-1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{(-1)s(\lambda_{l,n}+\mu_{l+1,n+1})} \\
&= (-1)^{n-j-1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})} (-1)^n \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l+1,n+1})} \\
&= (-1)^{j-1} \frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l+1,n+1})}
\end{aligned}$$

となり, (4.10) の $\tilde{D}_{n+1}^{(0)}$ の係数に一致する．以上より, (1) の場合は成り立つ．

（2） $j+1 \leq k \leq n$ のとき

$$\begin{aligned}
&A_k - \sum_{m=k+1}^{n} B_{k,m} - C_k \\
=&(-1)^{n-j-1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&- \sum_{m=k+1}^{n} e_{m,n}(-1)^j \frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{m-1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k}) \prod_{l=k+1}^{m} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&- e_{k,n}(-1)^{j-1} \frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})} \\
=&(-1)^{n-j-1} \frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1}(-1)s(\lambda_{k.l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}(-1)s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&+ \sum_{m=k+1}^{n} e_{m,n}(-1)^{j-1} \frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{m-1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k}) \prod_{l=k+1}^{m} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- e_{k,n}(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k}))\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})} \\
=&(-1)^{j-1}e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k.l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&- e_{k,n}(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})} \\
&+\sum_{m=k+1}^{n}e_{m,n}(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k.l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
=&(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})} \\
&\times\Bigg\{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\prod_{l=k+1}^{n+1}\frac{s(\lambda_{k.l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&+\sum_{m=k+1}^{n}e_{m,n}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{k,n}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
K^{(1)}=(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}
$$

とおく．いま, $\{\ \}$ 内の末尾 2 項と $K^{(1)}$ の積 $(-B_{k,k+1}-C_k)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
-B_{k,k+1}-C_k&=K^{(1)}\left(e_{k+1,n}\frac{s(\mu_{k+1})}{s(\lambda_k+\mu_{k+1})}-e_{k,n}\right) \\
&=\frac{K^{(1)}}{s(\lambda_k+\mu_{k+1})}\left(e_{k+1,n}s(\mu_{k+1})-e_{k,n}s(\lambda_k+\mu_{k+1})\right) \\
&=\frac{K^{(1)}}{s(\lambda_k+\mu_{k+1})}\frac{e_{k+1,n}(\tilde{e}_{k+1}-\tilde{e}_{k+1}^{-1})-e_{k,n}(e_k\tilde{e}_{k+1}-e_k^{-1}\tilde{e}_{k+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}} \\
&=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1}K^{(1)}\frac{1}{s(\lambda_k+\mu_{k+1})}\frac{e_k-e_k^{-1}}{2\sqrt{-1}} \\
&=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1}K^{(1)}\frac{s(\lambda_k)}{s(\lambda_k+\mu_{k+1})}
\end{aligned}
$$

となる．次に, 等式

$$
\sum_{m=k+1}^{p}e_{m,n}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{k,n}=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}\prod_{l=k+1}^{p}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
$$

が成り立つと仮定する．このとき,

$$
\sum_{m=k+1}^{p+1}e_{m,n}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{k,n}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e_{p+1,n}\frac{s(\mu_{p+1})\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&\quad+\sum_{m=k+1}^{p}e_{m,n}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{k,n}\\
&= e_{p+1,n}\frac{s(\mu_{p+1})\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&\quad-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}\prod_{l=k+1}^{p}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\ [\because \text{仮定}]\\
&=\frac{\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\left(e_{p+1,n}s(\mu_{p+1})-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}s(\lambda_{k,p}+\mu_{k+1,p+1})\right)\\
&=\frac{\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&\quad\times\left(\frac{e_{p+1,n}(\tilde{e}_{p+1}-\tilde{e}_{p+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}}-\frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}(e_{k,p}\tilde{e}_{k+1,p+1}-e_{k,p}^{-1}\tilde{e}_{k+1,p+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}}\right)\\
&=\frac{\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\frac{e_{p+1,n}\tilde{e}_{p+1}-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}e_{k,p}\tilde{e}_{k+1,p+1}}{2\sqrt{-1}}\\
&=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p+1}\frac{\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\frac{e_{k,p}\tilde{e}_{k+1,p}-e_{k,p}^{-1}\tilde{e}_{k+1,p}^{-1}}{2\sqrt{-1}}\\
&=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p+1}\frac{\prod_{l=k+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{p+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}s(\lambda_{k,p}+\mu_{k+1,p})\\
&=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p+1}\prod_{l=k+1}^{p+1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

となり, p のときの等式の成立を仮定すれば, $p+1$ のときにも成り立つ. 従って, 次が成り立つ.

$$
-\sum_{m=k+1}^{n}B_{k,m}-C_k=-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}K^{(1)}\prod_{l=k+1}^{n}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}.
$$

これを用いると, $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&A_k-\sum_{m=k+1}^{n}B_{k,m}-C_k\\
=&K^{(1)}\left(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\prod_{l=k+1}^{n+1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}\prod_{l=k+1}^{n}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\right)\\
=&K^{(1)}\frac{\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&\times\left(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n})-e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})\right)\\
=&K^{(1)}\frac{\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

$$\times \frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n} - e_{k,n}^{-1}\tilde{e}_{k+1,n}^{-1}) - e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} - e_{k,n}^{-1}\tilde{e}_{k+1,n+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$=K^{(1)}\frac{\prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \times \left(-\frac{\tilde{e}_{n+1}-\tilde{e}_{n+1}^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$=-K^{(1)}s(\mu_{n+1})\frac{\prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}$$

$$=(-1)^{j}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}$$

となり, これは (4.10) の $j+1\le k\le n$ での $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数に一致する. 以上より, (2) の場合は成り立つ.

(3) $k=j$ のとき

$$A_j - \sum_{m=j+1}^{n} B_{j,m} - E_j$$

$$=(-1)^{n-j-1}e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})}{s(\lambda_{j,j-1}+\mu_{j,j})\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$-\sum_{m=j+1}^{n} e_{m,n}(-1)^{j}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{m-1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{s(\lambda_{j,j-1}+\mu_{j,j})\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{m} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$-e_{j,n}\prod_{l=1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})}{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$=(-1)^{n-j-1}e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\frac{\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{n+1}(-1)s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=1}^{j-1}(-1)s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$-\sum_{m=j+1}^{n} e_{m,n}(-1)^{j}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{m-1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{m} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$-e_{j,n}\prod_{l=1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})}{(-1)s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})}$$

$$=(-1)^{j-1}e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\frac{\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$+\sum_{m=j+1}^{n} e_{m,n}(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{m-1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=1}^{j-1} s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{m} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$-e_{j,n}(-1)^{j-1}\prod_{l=1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})}{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})}$$

$$=(-1)^{j-1}\prod_{l=1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})}{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})}\Bigg\{e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\frac{\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=j+1}^{n+1} s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}$$

$$
+\sum_{m=j+1}^{n} e_{m,n}\frac{s(\mu_m)\prod_{l=j+1}^{m-1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=j+1}^{m}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}-e_{j,n}\Bigg\}
$$

となる. ここで

$$
K^{(2)}=(-1)^{j-1}\prod_{l=1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})}{s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})}
$$

とおく. いま, { } 内の末尾 2 項と $K^{(2)}$ の積 $(-B_{j,j+1}-E_j)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
-B_{j,j+1}-E_j &= K^{(2)}(e_{j+1,n}\frac{s(\mu_{j+1})}{s(\lambda_j+\mu_{j+1})}-e_{j,n}) \\
&= K^{(2)}\frac{1}{s(\lambda_j+\mu_{j+1})}(e_{j+1,n}s(\mu_{j+1})-e_{j,n}s(\lambda_j+\mu_{j+1})) \\
&= K^{(2)}\frac{1}{s(\lambda_j+\mu_{j+1})}\frac{e_{j+1,n}(\tilde{e}_{j+1}-\tilde{e}_{j+1}^{-1})-e_{j,n}(e_j\tilde{e}_{j+1}-e_j^{-1}\tilde{e}_{j+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}} \\
&= -e_{j,n}\tilde{e}_{j+1}K^{(2)}\frac{1}{s(\lambda_j+\mu_{j+1})}\frac{e_j-e_j^{-1}}{2\sqrt{-1}} \\
&= -e_{j,n}\tilde{e}_{j+1}K^{(2)}\frac{s(\lambda_j)}{s(\lambda_j+\mu_{j+1})}
\end{aligned}
$$

となる. 以下, (2) と全く同じ計算により, 次を得る.

$$
-\sum_{m=j+1}^{n}B_{j,m}-E_j=-e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n}K^{(2)}\prod_{l=j+1}^{n}\frac{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}.
$$

これを用いると $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&A_j-\sum_{m=j+1}^{n}B_{j,m}-E_j \\
=&K^{(2)}\left(e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}\prod_{l=j+1}^{n+1}\frac{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}-e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n}\prod_{l=j+1}^{n}\frac{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}\right) \\
=&K^{(2)}\frac{\prod_{l=j+1}^{n}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=j+1}^{n+1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})} \\
&\quad\times(e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}s(\lambda_{j,n}+\mu_{j+1,n})-e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n}s(\lambda_{j,n}+\mu_{j+1,n+1})) \\
=&K^{(2)}\frac{\prod_{l=j+1}^{n}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=j+1}^{n+1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})} \\
&\times\frac{e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}(e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}-e_{j,n}^{-1}\tilde{e}_{j+1,n+1}^{-1})-e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n}(e_{j,n}\tilde{e}_{j+1,n+1}-e_{j,n}^{-1}\tilde{e}_{j+1,n+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}} \\
=&K^{(2)}\frac{\prod_{l=j+1}^{n}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=j+1}^{n+1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}\left(-\frac{\tilde{e}_{n+1}-\tilde{e}_{n+1}^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=& -K^{(2)}s(\mu_{n+1})\frac{\prod_{l=j+1}^{n}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=j+1}^{n+1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}\\
=&(-1)^j\frac{s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{j-1}s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{n}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{\prod_{l=1}^{j-1}s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{n+1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}\\
=&(-1)^j\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{j-1}s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l,j})\prod_{l=j+1}^{n}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l-1})}{s(\lambda_{j,j-1}+\mu_{j,j})\prod_{l=1}^{j-1}s(\lambda_{l,j-1}+\mu_{l+1,j})\prod_{l=j+1}^{n+1}s(\lambda_{j,l-1}+\mu_{j+1,l})}
\end{aligned}
$$

となり, (4.10) の $k=j$ での $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数に一致する. 以上より, (3) の場合は成り立つ.

注意 4.12. 定義式から $C_j=E_j$ が成り立つことがわかるので, (3) の場合は (2) において $k=j$ と置いた場合の結果に一致する.

(4) $1\le k\le j-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&A_k-\sum_{m=j+1}^{n}B_{k,m}-E_k-F_k\\
=&(-1)^{n-j-1}e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&-\sum_{m=j+1}^{n}e_{m,n}(-1)^j\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&-e_{j,n}\prod_{l=1,l\neq k}^{j}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{j,n}\tilde{e}_j\prod_{l=1,l\neq k}^{j-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
=&(-1)^{n-j-1}\frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}(-1)s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}(-1)s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&-\sum_{m=j+1}^{n}e_{m,n}(-1)^j\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&-e_{j,n}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{(-1)s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}\prod_{l=k+1}^{j}\frac{(-1)s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&-e_{j,n}\tilde{e}_j\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{(-1)s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}\prod_{l=k+1}^{j-1}\frac{(-1)s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
=&(-1)^{j-1}e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&+\sum_{m=j+1}^{n}e_{m,n}(-1)^{j-1}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&-(-1)^{j-1}e_{j,n}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l-1,k})}\prod_{l=k+1}^{j}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{j-1}e_{j,n}\tilde{e}_j\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}\prod_{l=k+1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
=&(-1)^{j-1}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}\prod_{l=k+1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\\
&\times\left\{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\prod_{l=j}^{n+1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\right.\\
&\left.+\sum_{m=j+1}^{n}e_{m,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=j}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}-e_{j,n}\frac{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j-1})}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}+e_{j,n}\tilde{e}_j\right\}
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
K^{(3)}=(-1)^{j-1}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})}\prod_{l=k+1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
$$

とおく．いま, $\{\ \}$ 内の末尾 2 項と $K^{(3)}$ の積 $(-E_k-F_k)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
&-E_k-F_k\\
&=K^{(3)}\left(-e_{j,n}\frac{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j-1})}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}+e_{j,n}\tilde{e}_j\right)\\
&=K^{(3)}\frac{1}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}\left(-e_{j,n}s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j-1})+e_{j,n}\tilde{e}_js(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})\right)\\
&=K^{(3)}\frac{1}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}\\
&\quad\times\frac{-e_{j,n}(e_{k,j-1}\tilde{e}_{k+1,j-1}-e_{k,j-1}^{-1}\tilde{e}_{k+1,j-1}^{-1})+e_{j,n}\tilde{e}_j(e_{k,j-1}\tilde{e}_{k+1,j}-e_{k,j-1}^{-1}\tilde{e}_{k+1,j}^{-1})}{2\sqrt{-1}}\\
&=e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,j}K^{(3)}\frac{1}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}\frac{\tilde{e}_j-\tilde{e}_j^{-1}}{2\sqrt{-1}}\\
&=e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,j}K^{(3)}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}
\end{aligned}
$$

となる．次に等式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=j+1}^{p}e_{m,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=j}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}+e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,j}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}\\
&=e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

が成り立つと仮定する．このとき,

$$
\sum_{m=j+1}^{p+1}e_{m,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=j}^{m-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{m}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}+e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,j}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e_{p+1,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{p+1})\prod_{l=j}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad + \sum_{m=j+1}^{p} e_{m,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_m)\prod_{l=j}^{m-1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{m} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} + e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,j}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j})} \\
&= e_{p+1,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{p+1})\prod_{l=j}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad + e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\ [\because \text{仮定}] \\
&= -e_{p+1,n}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{p+1})\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad + e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&= -\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}(e_{p+1,n}s(\mu_{p+1}) - e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}s(\lambda_{k,p}+\mu_{k+1,p+1})) \\
&= -\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad \times \left(\frac{e_{p+1,n}(\tilde{e}_{p+1}-\tilde{e}_{p+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}} - \frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}(e_{k,p}\tilde{e}_{k+1,p+1} - e_{k,p}^{-1}\tilde{e}_{k+1,p+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}}\right) \\
&= -\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\frac{e_{p+1,n}\tilde{e}_{p+1} - e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p}e_{k,p}\tilde{e}_{k+1,p+1}}{2\sqrt{-1}} \\
&= e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p+1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\frac{e_{k,p}\tilde{e}_{k+1,p} - e_{k,p}^{-1}\tilde{e}_{k+1,p}^{-1}}{2\sqrt{-1}} \\
&= e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p+1}\frac{s(\mu_j)s(\lambda_{k,p}+\mu_{k+1,p})\prod_{l=j+1}^{p} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&= e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,p+1}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j+1}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{p+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

となり, p のときの等式の成立を仮定すれば, $p+1$ のときにも成り立つ. 従って, 次が成り立つ.

$$
-\sum_{m=j+1}^{n} B_{k,m} - E_k - F_k = e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}K^{(3)}s(\mu_j)\frac{\prod_{l=j+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}.
$$

これを用いると, $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&A_k - \sum_{m=j+1}^{n} B_{k,m} - E_k - F_k \\
&= K^{(3)}\Bigg\{ e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\prod_{l=j}^{n+1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}s(\mu_j)\frac{\prod_{l=j+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\Bigg\} \\
=&K^{(3)}\Bigg\{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\frac{\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&+ e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}s(\mu_j)\frac{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,j-1}+\mu_{k+1,j-1})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\Bigg\} \\
=&K^{(3)}\Bigg\{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_j)s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})}\frac{\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&+ e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}s(\mu_j)\frac{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{(-1)s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\Bigg\} \\
=&K^{(3)}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\times\left(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n}) - e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})\right) \\
=&K^{(3)}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\times\frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}-e_{k,n}^{-1}\tilde{e}_{k+1,n}^{-1}) - e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}-e_{k,n}^{-1}\tilde{e}_{k+1,n+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}} \\
=&K^{(3)}\frac{s(\mu_j)\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\left(-\frac{\tilde{e}_{n+1}-\tilde{e}_{n+1}^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right) \\
=&-K^{(3)}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
=&(-1)^j\prod_{l=1}^{k-1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})} \\
&\times\prod_{l=k+1}^{j-1}\frac{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=j}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=j}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
=&(-1)^j\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1} s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1} s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

となり, (4.10) の $1 \le k \le j-1$ での $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数に一致する. よって, (4) の場合は成り立つ.
以上 (1) から (4) から, 数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して (4.10) が示された.

次に (4.11) が成り立つことを数学的帰納法により示す.
Step1. $n=1$ のとき.
(4.10) での $n=1$ のときの証明から, (4.13) が成り立つが, (4.13) は (4.11) において $n=1$ とおいたものに一致する. 従って, $n=1$ のときには (4.11) は成り立つ.
Step 2. $n>1$ のとき.

$n-1$ のときに, (4.11) の成立を仮定する.

$$D_{n+1}^{(\infty)} = \sum_{1\le k\le n+1} (-1)^{k-n-1} \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})} \prod_{1\le l\le n+1, l\ne k} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \times D_k^{(0)}$$

の両辺を作用 γ_* により解析接続する. 補題 4.11(1), (3) により,

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_{n+1}^{(1)} + \tilde{e}_{n+1}\{0<t_n<z, 0<t_n<\cdots<t_1<1\} \\
&= \sum_{1\le k\le n+1} (-1)^{k-n-1} \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})} \prod_{1\le l\le n+1, l\ne k} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad \times (-1)^{n-k+1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\tilde{D}_k^{(0)}.
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_{n+1}^{(1)} \\
&= -\tilde{e}_{n+1}\{0<t_n<z, 0<t_n<\cdots<t_1<1\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})} \prod_{1\le l\le n+1, l\ne k} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \tilde{D}_k^{(0)}.
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 右辺第 1 項 $\{0<t_n<z, 0<t_n<\cdots<t_1<1\}$ は, 順序 $0<t_n<z$ を保って t_n を固定することにより, ${}_nF_{n-1}(t_n)$ の $t_n=1$ まわりの非正則解の積分領域 $\tilde{D}_n^{(1)}$ とみなせる. 従って, 数学的帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_{n+1}^{(1)} \\
&= -\tilde{e}_{n+1}\tilde{D}_{n[{}_nF_{n-1}]}^{(1)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})} \prod_{l=1, l\ne k}^{n+1} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \tilde{D}_k^{(0)} \\
&= -\tilde{e}_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1, l\ne k}^{n} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})} \prod_{l=1, l\ne k}^{n+1} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \tilde{D}_k^{(0)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Bigg\{ e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1} \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})} \prod_{l=1, l\ne k}^{n+1} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&\quad - \tilde{e}_{n+1} \prod_{l=1, l\ne k}^{n} \frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \Bigg\} \tilde{D}_k^{(0)} \\
&\quad + \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,n}+\mu_{n+1,n+1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{n+1,l-1}+\mu_{n+2,l})} \tilde{D}_{n+1}^{(0)}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $\tilde{D}_{n+1}^{(0)}$ の係数は

$$\frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,n}+\mu_{n+1,n+1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{n+1,l-1}+\mu_{n+2,l})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s(\lambda_{n+1,n}+\mu_{n+1,n+1})}{s(\lambda_{n+1,n}+\mu_{n+1,n+1})}\prod_{l=1}^{n}\frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{n+1,l-1}+\mu_{n+2,l})} \\
&= \prod_{l=1}^{n+1}\frac{s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{n+1,l-1}+\mu_{n+2,l})}
\end{aligned}
$$

より, (4.11) と一致する. $\tilde{D}_j^{(0)}$ $(1 \le j \le n)$ の係数について,

$$
\begin{aligned}
&e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} - \tilde{e}_{n+1}\prod_{l=1,l\neq k}^{n}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
&= K\left(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}\frac{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})} - \tilde{e}_{n+1}\frac{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}{s(\mu_{n+1})}\right) \\
&= \frac{Ks(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})s(\mu_{n+1})}\left(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}s(\mu_{n+1}) - \tilde{e}_{n+1}s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})\right) \\
&= \frac{Ks(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})s(\mu_{n+1})} \\
&\quad \times\left(\frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}(\tilde{e}_{n+1}-\tilde{e}_{n+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}} - \frac{\tilde{e}_{n+1}(e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n+1}-e_{k,n}^{-1}\tilde{e}_{k+1,n+1}^{-1})}{2\sqrt{-1}}\right) \\
&= \frac{Ks(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})s(\mu_{n+1})}\left(\frac{e_{k,n}\tilde{e}_{k+1,n}-e_{k,n}^{-1}\tilde{e}_{k+1,n}^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right) \\
&= \frac{Ks(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n})}{s(\lambda_{k,n}+\mu_{k+1,n+1})s(\mu_{n+1})} \\
&= \prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
\end{aligned}
$$

となる. 途中の計算では,

$$
K = \frac{s(\mu_{n+1})}{s(\lambda_{n+1,k-1}+\mu_{n+1,k})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n}\frac{s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}
$$

とおいた. 従って, $1 \le k \le n$ のときにも, $\tilde{D}_k^{(0)}$ の係数は (4.11) と一致する. 以上により, 数学的帰納法から証明が完了する. □

注意 4.13. 証明された定理 4.10 を, 補題 4.1 を用いて θ_0, σ に書き直すことにより, 定理 4.8 は証明される. また, パラメータ α, β を用いて定理 4.10 を書き直すと次のようになる.

定理 4.14. $1 \le k, l \le n+1$ に対して,

$$
\beta_k - \alpha_l, \beta_l - \beta_k \notin \mathbb{Z} \ (k \neq l)
$$

を仮定する. このとき, $1 \le j \le n$ に対して次が成り立つ.

$$
\tilde{D}_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\tilde{D}_k^{(0)}.
$$

注意 4.15. 定理 4.10 の証明では, $n=1$ のときを直接計算で行い, $n>1$ のときを数学的帰納法で行った. これは, n の数が大きくなると, Cauchy の積分定理から導かれる方程式の本数が多くなり, 方程式を解くのが難しくなるためである. 実際, $n=1$ のときで 2 本, $n=2$ のときで 12 本の方程式を解くことになる. [M1] では $n=2$ のときの計算を直接計算で行っている. その結果が, 命題 3.5, 命題 3.8 である.

$j=1,\dots,n$ に対して命題 4.10 を書き下した n 本の式と, $j=n+1$ における $z=0,1$ の解の接続関係式 (命題 4.7) の合計 $n+1$ 本の式は, $\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)}$ および $\tilde{D}_1^{(0)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(0)}$ について行列の形でまとめることができ,

$$\tilde{D}_1 = \tilde{D}_0\,{}^tA(n,\lambda,\mu)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_i &= (\tilde{D}_1^{(i)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(i)})\ (i=0,1)\\
A(n,\lambda,\mu) &= (A_{j,k}(\lambda,\mu))_{1\le j,k\le n+1}\\
A_{j,k}(\lambda,\mu) &= \begin{cases}
(-1)^j\dfrac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l-1})}{s(\lambda_{j,k-1}+\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(1\le j,k\le n)\\
(-1)^{j-1}\dfrac{s(\mu_j)\prod_{l=1}^{n}s(\lambda_{l,n}+\mu_{l,n+1})}{s(\lambda_{j,n}+\mu_{j,n+1})\prod_{l=1}^{n}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}(1\le j\le n, k=n+1)\\
\dfrac{\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{l,k-1}+\mu_{l,k})}{\prod_{l=1}^{k-1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\lambda_{k,l-1}+\mu_{k+1,l})}(j=n+1, 1\le k\le n+1)
\end{cases}
\end{aligned}$$

である. このとき,

命題 4.16. ある $(\lambda,\mu)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_{n+1})\in\mathbb{C}^{2n+1}$ に対して, $\det(A(n,\lambda,\mu))\neq 0$ となる.

Proof. $A(n,\lambda,\mu)$ において, $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ とおく. このとき,

Case1. $1\le j,k\le n$ のとき.

$$A_{j,k}(0,\mu)=(-1)^j\frac{s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{k-1}s(\mu_{l,k})\prod_{l=k+1}^{n}s(\mu_{k+1,l-1})}{s(\mu_{j,k})\prod_{l=1}^{k-1}s(\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\mu_{k+1,l})}$$

となっており, 分母の $\prod_{l=1}^{k-1}s(\mu_{l+1,k})\prod_{l=k+1}^{n+1}s(\mu_{k+1,l})$ は $l=1,\dots,k-1,k+1,\dots,n+1$ に対して, 分子の $s(\mu_j)s(\mu_{n+1})\prod_{l=1}^{k-1}s(\mu_{l,k})$ は $l=1,\dots,k-1$ に対して, それぞれ恒等的に 0 になることはない. しかし, 分子の $\prod_{l=k+1}^{n}s(\mu_{k+1,l-1})$ は $l=k+1$ のときその値は 0 になり, $l=k+2,\dots,n$ に対しては値が 0 にならない.
また, 分母の $s(\mu_{j,k})$ は $j=k+1$ のときに 0 になるが, このときは分子の $\prod_{l=1}^{k-1}s(\mu_{l,k})$

$\times \prod_{l=k+1}^{n} s(\mu_{k+1,l-1})$ が $s(\mu_{j,k})$ を因数にもつため約分される．従ってこのときは $A_{j,k}(0,\mu) \neq 0$ である．このことから $A_{j,k}(0,\mu)$ が 0 にならない条件を考えると，

$$\begin{aligned} A_{j,k}(0,\mu) \neq 0 &\Leftrightarrow \prod_{l=k+1}^{n} s(\mu_{k+1,l-1}) \neq 0 \text{ または } j = k+1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq k \leq n \text{ に対して } k+1 > n, \text{ または } j = k+1 \\ &\Leftrightarrow k = n, \text{ または } j = k+1 \end{aligned}$$

となる．

Case2. $1 \leq j \leq n, k = n+1$ のとき．

$$A_{j,n+1}(0,\mu) = (-1)^{j-1} \frac{s(\mu_j) \prod_{l=1}^{n} s(\mu_{l,n+1})}{s(\mu_{j,n+1}) \prod_{l=1}^{n} s(\mu_{l+1,n+1})}$$

であり, 分母の $s(\mu_{j,n+1}) \prod_{l=1}^{n} s(\mu_{l+1,n+1})$ および分子の $s(\mu_j) \prod_{l=1}^{n} s(\mu_{l,n+1})$ は $l = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ に対してその値が 0 になることはない．従って $A_{j,n+1}(0,\mu) \neq 0$ $(1 \leq j \leq n)$.

Case3. $j = n+1, 1 \leq k \leq n+1$ のとき．

$$A_{n+1,k}(0,\mu) = \frac{\prod_{l=1}^{k-1} s(\mu_{l,k}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\mu_{l,k})}{\prod_{l=1}^{k-1} s(\mu_{k+1,l}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\mu_{k+1,l})}$$

であり, 分母の $\prod_{l=1}^{k-1} s(\mu_{k+1,l}) \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\mu_{k+1,l})$ および分子の $\prod_{l=1}^{k-1} s(\mu_{l,k})$ はすべての l(分子は $l = 1, \ldots, k-1$, 分母は $l = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1$) に対してその値が 0 にならない．しかし, 分子の $\prod_{l=k+1}^{n+1} s(\mu_{l,k})$ は $l = k+1$ のときのみその値が 0 となる．従って,

$$\begin{aligned} A_{n+1,k}(0,\mu) \neq 0 &\Leftrightarrow \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\mu_{l,k}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{l=k+1}^{n+1} s(\mu_{l,k}) \text{ の先頭の因数が現れない} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq k \leq n+1 \text{ に対して相乗記号の下端 } k+1 \text{ が上端 } n+1 \text{ より大きい} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq k \leq n+1 \text{ に対して } k+1 > n+1 \\ &\Leftrightarrow k = n+1 \end{aligned}$$

となる．

以上より, 簡単のため, $A_{j,k}(0,\mu)=A_{j,k}$ と表すと,

$$A(n,0,\mu)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1,n-2} & A_{1,n-1} & A_{1n} & A_{1,n+1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2,n-2} & A_{2,n-1} & A_{2n} & A_{2,n+1} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3,n-2} & A_{3,n-1} & A_{3n} & A_{3,n+1} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \dots & A_{4,n-2} & A_{4,n-1} & A_{4n} & A_{4,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} & A_{n-1,n+1} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{n,n-2} & A_{n,n-1} & A_{nn} & A_{n,n+1} \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & A_{n+1,3} & \dots & A_{n+1,n-2} & A_{n+1,n-1} & A_{n+1,n} & A_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{1n} & A_{1,n+1} \\ A_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{2n} & A_{2,n+1} \\ 0 & A_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{3n} & A_{3,n+1} \\ 0 & 0 & A_{43} & \dots & 0 & 0 & A_{4n} & A_{4,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & 0 & A_{n-1,n} & A_{n-1,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{nn} & A_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

となっている. 上では, Case1, 2, 3 より成分が 0 でないところはそのまま $A_{j,k}$ とかき, 成分が 0 のところは 0 と書いている. このことから,

$$\begin{aligned}
&\det(A(n,0,\mu)) \\
&=\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{1n} & A_{1,n+1} \\ A_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{2n} & A_{2,n+1} \\ 0 & A_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{3n} & A_{3,n+1} \\ 0 & 0 & A_{43} & \dots & 0 & 0 & A_{4n} & A_{4,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & 0 & A_{n-1,n} & A_{n-1,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{nn} & A_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \\
&=(-1)^{n-1}\det\begin{pmatrix} A_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{2n} & A_{2,n+1} \\ 0 & A_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{3n} & A_{3,n+1} \\ 0 & 0 & A_{43} & \dots & 0 & 0 & A_{4n} & A_{4,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & 0 & A_{n-1,n} & A_{n-1,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{nn} & A_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{1n} & A_{1,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \\
&=(-1)^{n-1}A_{21}A_{32}A_{43}\cdots A_{n,n-1}A_{nn}A_{n+1,n+1}\neq 0
\end{aligned}$$

となり, $A(n,\lambda,\mu)$ は $(\lambda,\mu)=(0,\mu)\in\mathbb{C}^{2n+1}$ の近傍で $\det A(n,\lambda,\mu)\neq 0$ をみたす. □

系 4.17. $\{\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\}$ 上の積分表示が $z=1$ まわりの解の基本系を与える.

Proof. 命題 4.16 から, 行列 $A(n,\lambda,\mu)$ は局所的に正則行列になる (つまり, ある $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^{2n+1}$ の近傍上で正則行列になる). 従って, $A(n,\lambda,\mu)$ は基底の変換行列になり, 確かに $\{\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\}$ 上の積分表示が一次独立になっていることがわかる. 従って $\{\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\}$ 上の積分表示が $z=1$ まわりの解の基本系になっていることがわかる. □

注意 4.18. 命題 4.16 から, $\{\tilde{D}_1^{(0)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(0)}\}$ を $\{\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\}$ で表すことができることがわかる. しかし, $z=0$ のまわりの解の基本系の積分領域 $D_j^{(0)}$ を, $z=\infty$ まわりの解の基本系の積分領域 $D_k^{(\infty)}$ で表し, z を $z<0$ から $0<z<1$ へ解析接続する定理 4.10 の証明の手法では, z の解析接続後の積分領域が帰納法の仮定を満たす形になっていないために計算ができず, 定理 4.8 の証明の手法では, $\{\tilde{D}_1^{(0)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(0)}\}$ を $\{\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\}$ で表す具体的かつ明示的な関係式を導くことができなかった. しかし, $n=1,2,3$ の場合にコンピュータを用いて計算を行うことで具体的に逆行列を求め, その形を予想することができた. 実際, 次のようになる.

定理 4.19.

$$\alpha_l-\alpha_k(1\le l,k\le n+1),\beta_l-\alpha_k(1\le l,k\le n+1),\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}\notin\mathbb{Z}$$

を仮定する. このとき $1\le j\le n+1$ に対して,

$$\begin{aligned}\tilde{D}_j^{(0)}=&-\sum_{k=1}^{n}\frac{s(\alpha_k)s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j+\alpha_k)s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})s(\beta_j-\alpha_k)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_k)}{s(\alpha_l-\alpha_k)}\tilde{D}_k^{(1)}\\&-\frac{s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. $1\le j\le n+1$ に対して, 関係式

$$\begin{aligned}\tilde{D}_j^{(1)}=&\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\tilde{D}_k^{(0)},\\ \tilde{D}_{n+1}^{(1)}=&\sum_{k=1}^{n+1}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\alpha_l-\beta_k)}{s(\beta_l-\beta_k)}\tilde{D}_k^{(0)},\\ \tilde{D}_j^{(0)}=&-\sum_{k=1}^{n}\frac{s(\alpha_k)s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j+\alpha_k)s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})s(\beta_j-\alpha_k)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_k)}{s(\alpha_l-\alpha_k)}\tilde{D}_k^{(1)}\\&-\frac{s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\tilde{D}_{n+1}^{(1)}\end{aligned}$$

を, 積分領域 $\tilde{D}^{(0)}=(\tilde{D}_1^{(0)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(0)})$, $\tilde{D}^{(1)}=(\tilde{D}_1^{(1)},\dots,\tilde{D}_{n+1}^{(1)})$ に関して行列表示して,

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{(1)}&=\tilde{D}^{(0)}A_n,\\ \tilde{D}^{(0)}&=\tilde{D}^{(1)}C_n\end{aligned}$$

と表す．ここで，

$$(A_n)_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_i-\alpha_j)s(\beta_i-\alpha_{n+1})}\displaystyle\prod_{l=1,l\neq i}^{n+1}\dfrac{s(\alpha_l-\beta_i)}{s(\beta_l-\beta_i)}\ (1\leq i\leq n+1,1\leq j\leq n)\\ \displaystyle\prod_{l=1,l\neq i}^{n+1}\dfrac{s(\alpha_l-\beta_k)}{s(\beta_l-\beta_k)}\ (1\leq i\leq n+1,j=n+1)\end{cases}$$

$$(C_n)_{i,j}=\begin{cases}-\dfrac{s(\alpha_i)s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j+\alpha_i)s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})s(\beta_j-\alpha_i)}\displaystyle\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\dfrac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}\\ \hfill(1\leq i\leq n,1\leq j\leq n+1)\\ -\dfrac{s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\ (i=n+1,1\leq j\leq n+1)\end{cases}$$

である．このとき，$C_nA_n=I_{n+1}$ となることを示せばよい．ここで，I_{n+1} は $n+1$ 次単位行列である．

以下，5 つの場合

(1) $1\leq i\leq n$ かつ $1\leq j\neq i\leq n$ のとき．

(2) $1\leq i\leq n$ かつ $j=i$ のとき．

(3) $1\leq i\leq n$ かつ $j=n+1$ のとき．

(4) $i=n+1$ かつ $1\leq j\leq n$ のとき．

(5) $i=n+1$ かつ $j=i(=n+1)$ のとき．

を考える．

補題 4.20. $x,y\in\mathbb{C}$ に対して，$X=e^{\pi\sqrt{-1}x},Y=e^{\pi\sqrt{-1}y}$ とおく．このとき，

$$s(x-y)=\frac{1}{2\sqrt{-1}XY}(X^2-Y^2)$$

が成り立つ．

Proof. 複素正弦関数の定義から

$$\begin{aligned}s(x-y)=&\frac{e^{\pi\sqrt{-1}(x-y)}-e^{-\pi\sqrt{-1}(x-y)}}{2\sqrt{-1}}\\ =&\frac{1}{2\sqrt{-1}}(XY^{-1}-X^{-1}Y)\\ =&\frac{1}{2\sqrt{-1}XY}(X^2-Y^2)\end{aligned}$$

となり導かれる． □

以降は，$a_i=e^{\pi\sqrt{-1}\alpha_i},b_i=e^{\pi\sqrt{-1}\beta_i}(1\leq i\leq n+1)$ とおく．とくに $b_{n+1}=e^{\pi\sqrt{-1}}=-1$ であることに注意する．

(1) $1\leq i\leq n$ かつ $1\leq j\neq i\leq n$ のとき．

$$(C_nA_n)_{i,j}=-\frac{s(\alpha_i)s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n+1} \frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})} \prod_{l=1,l\neq k}^{n+1} \frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})} \prod_{l=1,l\neq k}^{n+1} \frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} 2\sqrt{-1} \frac{b_k a_i b_k a_j b_k a_{n+1}}{b_1\cdots b_n b_k a_1 \cdots a_{n+1} a_i b_k a_k} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)(b_k^2-a_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)} \prod_{l=1,l\neq k}^{n+1} \frac{b_l(b_k^2-a_l^2)}{a_l(b_k^2-b_l^2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} 2\sqrt{-1} \frac{a_j a_{n+1} b_k}{b_1\cdots b_n a_1\cdots a_{n+1} a_k} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)(b_k^2-a_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)} \\
&\quad \times \prod_{l=1,l\neq k}^{n+1} \frac{(b_k^2-a_l^2)}{(b_k^2-b_l^2)} \frac{b_1\cdots b_{k-1}b_{k+1}\cdots b_n b_{n+1}}{a_1\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_{n+1}} \\
&= -\sum_{k=1}^{n+1} 2\sqrt{-1} \frac{a_j a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)(b_k^2-a_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)} \prod_{l=1,l\neq k}^{n+1} \frac{(b_k^2-a_l^2)}{(b_k^2-b_l^2)} \\
&= -\sum_{k=1}^{n+1} 2\sqrt{-1} \frac{a_j a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)} \frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}
\end{aligned}$$

となる．ここで，有理関数 $f_1(x)$ を

$$f_1(x) = -2\sqrt{-1} \frac{a_j a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 x)}{(x-a_i^2)(x-a_j^2)(x-a_{n+1}^2)} \prod_{l=1}^{n+1} \frac{(x-a_l^2)}{(x-b_l^2)}$$

と定義する．このとき，$f_1(x)$ は $x=a_i^2, a_j^2, a_{n+1}^2$ を除去可能特異点，$b_1^2,\dots,b_{n+1}^2$ を 1 位の極に持ち，各特異点における留数は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=a_i^2} f_1(x)dx = 0, \\
&\mathrm{Res}_{x=a_j^2} f_1(x)dx = 0, \\
&\mathrm{Res}_{x=a_{n+1}^2} f_1(x)dx = 0, \\
&\mathrm{Res}_{x=b_k^2} f_1(x)dx \\
&= -2\sqrt{-1} \frac{a_j a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)} \frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)} \quad (1\leq k\leq n+1)
\end{aligned}$$

と計算される．また，$x=\infty$ での留数は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=\infty} f_1(x)dx \\
&= -\mathrm{Res}_{w=0} f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2} \\
&= \mathrm{Res}_{w=0}\left\{ w\left(2\sqrt{-1}\frac{a_j a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2} \frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 w - a_1^2\cdots a_{n+1}^2)}{(1-a_i^2 w)(1-a_j^2 w)(1-a_{n+1}^2 w)} \prod_{l=1}^{n+1}\frac{(1-a_l^2 w)}{(1-b_l^2 w)}\right)\right\} dw
\end{aligned}$$

$= 0$

となる. $f_1(x)$ の全平面の留数の総和は零だから,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{Res}_{x=b_k^2} f_1(x)dx \\ &= -\mathrm{Res}_{x=a_i^2} f_1(x)dx - \mathrm{Res}_{x=a_j^2} f_1(x)dx - \mathrm{Res}_{x=a_{n+1}^2} f_1(x)dx - \mathrm{Res}_{x=\infty} f_1(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned}(C_nA_n)_{i,j} =& -\frac{s(\alpha_i)s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)} \\ &\times\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)} \\ =& -\frac{s(\alpha_i)s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}\times 0 \\ =&0\end{aligned}$$

を得る.

(2) $1 \leq i \leq n$ かつ $j = i$ のとき.

(1) と同様の計算により,

$$\begin{aligned}(C_nA_n)_{i,i} =& -\frac{s(\alpha_i)s(\beta_i-\alpha_i)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)} \\ &\times\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)^2 s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)} \\ =& -\frac{s(\alpha_i)s(\beta_i-\alpha_i)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)} \\ &\times\left\{-\sum_{k=1}^{n+1}2\sqrt{-1}\frac{a_ia_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)^2(b_k^2-a_{n+1}^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}\right\}\end{aligned}$$

となる. ここで, 有理関数 $f_2(x)$ を

$$f_2(x) = -2\sqrt{-1}\frac{a_ia_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2x)}{(x-a_i^2)^2(x-a_{n+1}^2)}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{(x-a_l^2)}{(x-b_l^2)}$$

と定義する. このとき, $f_2(x)$ は $x = a_{n+1}$ を除去可能特異点, $x = b_1, \cdots, b_{n+1}, a_i$ を 1 位の極として持ち, (1) と同様の計算により

$$\mathrm{Res}_{x=a_{n+1}^2} f_2(x)dx = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=b_k^2} f_2(x)dx \\
&= -2\sqrt{-1}\frac{a_i a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)^2(b_k^2-a_{n+1}^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}(1\leq k\leq n+1), \\
&\mathrm{Res}_{x=\infty} f_2(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

を得る．また，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x=a_i^2} f_2(x)dx &= -2\sqrt{-1}\frac{a_i a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 a_i^2)}{(a_i^2-a_{n+1}^2)}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{n+1}(a_i^2-a_l^2)}{\prod_{l=1}^{n+1}(a_i^2-b_l^2)} \\
&= -2\sqrt{-1}\frac{a_i^3 a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2)}{(a_i^2-b_i^2)(a_i^2-b_{n+1}^2)}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{(a_i^2-a_l^2)}{(a_i^2-b_l^2)} \\
&= -2\sqrt{-1}\frac{a_i^2 b_i}{a_1\cdots a_{n+1}b_1\cdots b_n}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2)}{(a_i^2-b_i^2)(a_i^2-1)}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{b_l(a_i^2-a_l^2)}{a_l(a_i^2-b_l^2)} \\
&= -\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}{s(\alpha_i-\beta_i)s(\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\alpha_i-\alpha_l)}{s(\alpha_i-\beta_l)} \\
&= \frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}{s(\beta_i-\alpha_i)s(\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\alpha_i-\alpha_l)}{s(\alpha_i-\beta_l)}
\end{aligned}
$$

となる．$f_2(x)$ の全平面の留数の総和は零だから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{Res}_{x=b_k^2} f_2(x)dx &= -\mathrm{Res}_{x=a_i^2} f_2(x)dx - \mathrm{Res}_{x=a_{n+1}^2} f_2(x)dx - \mathrm{Res}_{x=\infty} f_2(x)dx \\
&= -\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}{s(\beta_i-\alpha_i)s(\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\alpha_i-\alpha_l)}{s(\alpha_i-\beta_l)}
\end{aligned}
$$

となる．従って，

$$
\begin{aligned}
(C_nA_n)_{i,i} &= -\frac{s(\alpha_i)s(\beta_i-\alpha_i)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)} \\
&\quad\times\left\{-\sum_{k=1}^{n+1}2\sqrt{-1}\frac{a_i a_{n+1}}{a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2 a_i^2 - a_1^2\cdots a_{n+1}^2 b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)^2(b_k^2-a_{n+1}^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}\right\} \\
&= -\frac{s(\alpha_i)s(\beta_i-\alpha_i)}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}\times\left(-\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}{s(\beta_i-\alpha_i)s(\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\alpha_i-\alpha_l)}{s(\alpha_i-\beta_l)}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となる．

(3) $1\leq i\leq n$ かつ $j=n+1$ のとき．

$$
(C_nA_n)_{i,n+1} = -\frac{s(\alpha_i)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}
$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\right)$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{b_ka_i}{b_1\cdots b_na_1\cdots a_{n+1}b_ka_ib_ka_k}\\
&\quad\times\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2b_k^2)(b_k^2-a_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{b_l(b_k^2-a_l^2)}{a_l(b_k^2-b_l^2)}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{1}{a_1\cdots a_{n+1}b_k^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}
\end{aligned}$$

となる．有理関数 $f_3(x)$ を，

$$f_3(x)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{1}{a_1\cdots a_{n+1}x}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2x)}{(x-a_i^2)}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{(x-a_l^2)}{(x-b_l^2)}$$

と定義する．このとき，$f_3(x)$ は $x=a_i^2$ を除去可能特異点，$x=b_1,\dots,b_{n+1},0$ を 1 位の極として持つ．各特異点における留数は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=a_i^2}f_3(x)dx=0,\\
&\mathrm{Res}_{x=b_k^2}f_3(x)dx\\
&=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{1}{a_1\cdots a_{n+1}b_k^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2b_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}\ (1\leq k\leq n+1),\\
&\mathrm{Res}_{x=0}f_3(x)dx\\
&=\frac{b_1^2\cdots b_n^2a_i^2}{2\sqrt{-1}a_1^2\cdots a_{n+1}^2(-a_i^2)}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{(-a_l^2)}{(-b_l^2)}\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}
\end{aligned}$$

と計算される．また，$x=\infty$ における $f_3(x)$ の留数は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=\infty}f_3(x)dx\\
&=-\mathrm{Res}_{w=0}f_3\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2}\\
&=-\mathrm{Res}_{w=0}\left\{\frac{1}{w}\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}a_1^2\cdots a_{n+1}^2}\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2w-a_1^2\cdots a_{n+1}^2)}{(1-a_i^2w)}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{1-a_l^2w}{1-b_l^2w}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{-1}}
\end{aligned}$$

となる．$f_3(x)$ の全平面の留数の総和は零だから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{Res}_{x=b_k^2}f_3(x)dx =& -\mathrm{Res}_{x=a_i^2}f_3(x)dx-\mathrm{Res}_{x=0}f_3(x)dx-\mathrm{Res}_{x=\infty}f_3(x)dx\\ =& -0-\left(-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\\ =&0\end{aligned}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}&(C_nA_n)_{i,n+1}\\ &=-\frac{s(\alpha_i)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}\\ &\quad\times\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k+\alpha_i)s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_i)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\right)\\ &=-\frac{s(\alpha_i)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}\\ &\quad\times\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{b_ka_i}{b_1\cdots b_na_1\cdots a_{n+1}b_ka_ib_ka_k}\\ &\quad\times\frac{(b_1^2\cdots b_n^2a_i^2-a_1^2\cdots a_{n+1}^2b_k^2)(b_k^2-a_k^2)}{(b_k^2-a_i^2)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{b_l(b_k^2-a_l^2)}{a_l(b_k^2-b_l^2)}\\ &=-\frac{s(\alpha_i)}{s(\alpha_{n+1})s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{s(\beta_l-\alpha_i)}{s(\alpha_l-\alpha_i)}\times 0\\ &=0\end{aligned}$$

となる．

(4) $i=n+1$ かつ $1\leq j\leq n$ のとき．

$$\begin{aligned}(C_nA_n)_{n+1,j}=&-\frac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\\ &\times\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\right)\end{aligned}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\\ &=\sum_{k=1}^{n+1}2\sqrt{-1}\frac{a_jb_ka_{n+1}b_k}{a_kb_k}\frac{(b_k^2-a_k^2)}{(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{b_l(b_k^2-a_l^2)}{a_l(b_k^2-b_l^2)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} 2\sqrt{-1}\frac{b_1\cdots b_n a_j a_{n+1}}{a_1\cdots a_{n+1}}\frac{1}{(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}$$

となる. ここで, 有理関数 $f_4(x)$ を

$$f_4(x) = 2\sqrt{-1}\frac{b_1\cdots b_n a_j a_{n+1}}{a_1\cdots a_{n+1}}\frac{1}{(x-a_j^2)(x-a_{n+1}^2)}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{(x-a_l^2)}{(x-b_l^2)}$$

と定義する. このとき $f_4(x)$ は $x=a_j^2, a_{n+1}^2$ を除去可能特異点, $x=b_1^2,\ldots,b_{n+1}^2$ を 1 位の極として持ち, 各特異点における留数は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=a_j^2} f_4(x)dx = 0,\\
&\mathrm{Res}_{x=a_{n+1}^2} f_4(x)dx = 0,\\
&\mathrm{Res}_{x=b_k^2} f_4(x)dx\\
&= 2\sqrt{-1}\frac{b_1\cdots b_n a_j a_{n+1}}{a_1\cdots a_{n+1}}\frac{1}{(b_k^2-a_j^2)(b_k^2-a_{n+1}^2)}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}\ (1\leq k\leq n+1)
\end{aligned}$$

となる. また, $x=\infty$ における $f_4(x)$ の留数は,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x=\infty} f_4(x)dx\\
&= -\mathrm{Res}_{w=0} f_4\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2}\\
&= -\mathrm{Res}_{w=0}\left(2\sqrt{-1}\frac{b_1\cdots b_n a_j a_{n+1}}{a_1\cdots a_{n+1}}\frac{1}{(1-a_j^2 w)(1-a_{n+1}^2 w)}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{(1-a_l^2 w)}{(1-b_l^2 w)}\right)dw\\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. $f_4(x)$ の全平面の留数の総和は零だから,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{Res}_{x=b_k^2} f_4(x)dx =& -\mathrm{Res}_{x=a_j^2} f_4(x)dx - \mathrm{Res}_{x=a_{n+1}^2} f_4(x)dx - \mathrm{Res}_{x=\infty} f_4(x)dx\\
=&0
\end{aligned}$$

を得る. 従って,

$$\begin{aligned}
(C_nA_n)_{n+1,j} =& -\frac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\\
&\times\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_k)}{s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})}\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\right)\\
=& -\frac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\times 0\\
=&0
\end{aligned}$$

を得る.

(5) $i=n+1$ かつ $j=i(=n+1)$ のとき.

$$(C_nA_n)_{n+1,n+1}=-\frac{1}{s(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1})}\sum_{k=1}^{n+1}s(\beta_k-\alpha_k)\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1}s(\beta_k-\alpha_k)\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{-1}a_kb_k}(b_k^2-a_k^2)\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}\frac{b_l(b_k^2-a_l^2)}{a_l(b_k^2-b_l^2)}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{-1}a_kb_k}\frac{b_1\cdots b_{k-1}b_{k+1}\cdots b_nb_{n+1}}{a_1\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_{n+1}}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}\\
&=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{b_1\cdots b_n}{2\sqrt{-1}a_1\cdots a_{n+1}b_k^2}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}[\because b_{n+1}=-1]
\end{aligned}$$

である. このとき, 有理関数 $f_5(x)$ を

$$f_5(x)=-\frac{b_1\cdots b_n}{2\sqrt{-1}a_1\cdots a_{n+1}x}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{x-a_l^2}{x-b_l^2}$$

と定義する. このとき, $f_5(x)$ は $x=b_1,\ldots,b_{n+1},0$ を 1 位の極として持ち, そこでの留数は,

$$\mathrm{Res}_{x=b_k^2}f_5(x)dx=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{b_1\cdots b_n}{2\sqrt{-1}a_1\cdots a_{n+1}b_k^2}\frac{\prod_{l=1}^{n+1}(b_k^2-a_l^2)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1}(b_k^2-b_l^2)}\ (1\leq k\leq n+1)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x=b_k^2}f_5(x)dx&=-\frac{b_1\cdots b_n}{2\sqrt{-1}a_1\cdots a_{n+1}}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{(-a_l^2)}{(-b_l^2)}\\
&=-\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{2\sqrt{-1}b_1\cdots b_n}
\end{aligned}$$

となる. また, $x=\infty$ における $f_5(x)$ の留数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x=\infty}f_5(x)dx=&-\mathrm{Res}_{w=0}f_5\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2}\\
&=\mathrm{Res}_{w=0}\left\{\frac{1}{w}\left(\frac{b_1\cdots b_n}{2\sqrt{-1}a_1\cdots a_{n+1}}\prod_{l=1}^{n+1}\frac{1-a_l^2w}{1-b_l^2w}\right)\right\}dw\\
&=\frac{b_1\cdots b_n}{2\sqrt{-1}a_1\cdots a_{n+1}}
\end{aligned}$$

となる. $f_5(x)$ の全平面の特異点における留数の総和は零だから

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{Res}_{x=b_k^2}f_5(x)dx=-\mathrm{Res}_{x=0}f_5(x)dx-\mathrm{Res}_{x=\infty}f_5(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= - \left(-\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{2\sqrt{-1} b_1 \cdots b_n} \right) - \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{2\sqrt{-1} b_1 \cdots b_n} \\
&= - \frac{1}{2\sqrt{-1} a_1 \cdots a_{n+1} b_1 \cdots b_n} (b_1^2 \cdots b_n^2 - a_1^2 \cdots a_{n+1}^2) \\
&= - s(\beta_{1,n} - \alpha_{1,n+1})
\end{aligned}
$$

を得る. 従って,

$$
\begin{aligned}
(C_n A_n)_{n+1,n+1} =& - \frac{1}{s(\beta_{1,n} - \alpha_{1,n+1})} \sum_{k=1}^{n+1} s(\beta_k - \alpha_k) \prod_{l=1, l \neq k}^{n+1} \frac{s(\beta_k - \alpha_l)}{s(\beta_k - \beta_l)} \\
=& - \frac{1}{s(\beta_{1,n} - \alpha_{1,n+1})} \left(- \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_1 \cdots b_n}{2\sqrt{-1} a_1 \cdots a_{n+1} b_k^2} \frac{\prod_{l=1}^{n+1} (b_k^2 - a_l^2)}{\prod_{l=1, l \neq k}^{n+1} (b_k^2 - b_l^2)} \right) \\
=& - \frac{1}{s(\beta_{1,n} - \alpha_{1,n+1})} (-s(\beta_{1,n} - \alpha_{1,n+1})) \\
=& 1
\end{aligned}
$$

を得る.

以上 (1), ..., (5) により, $C_n A_n = I_{n+1}$ が示された. □

5 接続係数の周期化

以下, パラメータ λ_i, μ_i を θ_j, σ_j で表す. すなわち, $a \in \mathbb{C}$ として

$$\begin{aligned}
\lambda_i =& \theta_0^{(i)} - \sigma^{(i+1)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1} && (1 \le i \le n),\\
\mu_i =& -\theta_0^{(i)} + \sigma^{(i)} + \frac{a}{n+1} + \frac{1}{n+1} - 1 && (1 \le i \le n+1)
\end{aligned}$$

と表す. ここで, $z < 0$ のときには,

$$\begin{aligned}
D_i^{(0)} &= \{z < t_n < \cdots < t_i < 0, 1 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < +\infty\} \ (1 \le i \le n+1),\\
D_i^{(\infty)} &= \{-\infty < t_i < \cdots < t_n < z, 0 < t_{i-1} < \cdots < t_1 < 1\} \ (1 \le i \le n+1),
\end{aligned}$$

がそれぞれ ${}_{n+1}E_n$ の $z = 0, \infty$ まわりの解の基本系の積分領域を表し, $0 < z < 1$ のときには,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_j^{(0)} &= \{0 < t_j < \cdots < t_n < z, 1 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < +\infty\} && (1 \le j \le n+1),\\
\tilde{D}_j^{(1)} &= \{-\infty < t_j < \cdots < t_n < 0, 0 < t_{j-1} < \cdots < t_1 < 1\} && (1 \le j \le n),\\
\tilde{D}_{n+1}^{(1)} &= \{z < t_n < \cdots < t_1 < 1\},
\end{aligned}$$

がそれぞれ ${}_{n+1}E_n$ の $z = 0, 1$ まわりの解の基本系の積分領域を表すことを思い出しておく. この設定の下で, 次が成り立つ.

定理 5.1. $z < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
s_j^{(\infty)} &= e^{-\pi\sqrt{-1}\theta_0^{(j)}} \int_{D_j^{(\infty)}} u_{D_j^{(\infty)}}(t)dt,\\
s_j^{(0)} &= e^{\pi\sqrt{-1}(\sigma^{(j)} + \theta_0^{(n+1)})} \int_{D_j^{(0)}} u_{D_j^{(0)}}(t)dt,
\end{aligned}$$

$0 < z < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_j^{(1)} &= e^{-\pi\sqrt{-1}\theta_0^{(j)}} \int_{\tilde{D}_j^{(1)}} u_{\tilde{D}_j^{(1)}}(t)dt,\\
\tilde{s}_j^{(0)} &= e^{\pi\sqrt{-1}(\sigma^{(j)} + \theta_0^{(j)} - \theta_0^{(n+1)})} \int_{\tilde{D}_j^{(0)}} u_{\tilde{D}_j^{(0)}}(t)dt,
\end{aligned}$$

として解の基本系をとる. このとき,

(1) $z = 0, 1$ の解の基本系の接続関係式は次で与えられる.

$$\tilde{s}_j^{(1)} =(-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{s(\theta_0^{(j)} - \sigma^{(j)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})s(\theta_0^{(n+1)} - \sigma^{(n+1)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(k)} - \sigma^{(k)} - \frac{a}{n+1} - \frac{1}{n+1})}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \frac{\prod_{l=1,l\neq j}^{n} s(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})}{\prod_{l=1,l\neq k}^{n+1} s(\theta_0^{(l)}-\theta_0^{(k)})} e^{-\pi\sqrt{-1}(\sigma^{(k)}+\theta_0^{(k)}-\theta_0^{(n+1)}+\theta_0^{(j)})}\tilde{s}_k^{(0)} \\
&+(-1)^n \frac{s(\theta_0^{(j)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(n+1)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})} \\
&\times \prod_{1\le l\le n} \frac{s(\theta_0^{(n+1)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(l)}-\theta_0^{(n+1)})} e^{-\pi\sqrt{-1}(\sigma^{(n+1)}+\theta_0^{(j)})}\tilde{s}_{n+1}^{(0)}.
\end{aligned}
$$

さらに, 上の接続係数は, θ_0, σ の整数シフトで不変である.

(2) $z=0,\infty$ の解の基本系の接続関係式は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
s_j^{(\infty)} = &\sum_{1\le k\le n+1} \frac{s(\theta_0^{(j)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(j)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})} \\
&\times \prod_{1\le l\le n+1, l\neq k} \frac{s(\theta_0^{(k)}-\sigma^{(l)}-\frac{a}{n+1}-\frac{1}{n+1})}{s(\theta_0^{(l)}-\theta_0^{(k)})} e^{-\pi\sqrt{-1}(\sigma^{(k)}+\theta_0^{(n+1)}+\theta_0^{(j)})} s_k^{(0)}.
\end{aligned}
$$

さらに, 上の接続係数は, θ_0, σ の整数シフトで不変である.

Proof. (1) パラメータ θ_0 の集合を V_{n+1} とおく. つまり

$$
V_{n+1} = \left\{ \theta_0 = (\theta_0^{(1)},\dots,\theta_0^{(n+1)}) \mid \theta_0^{(j)} \in \mathbb{C}\ (1\le j\le n+1), \sum_{j=1}^{n+1} \theta_0^{(j)} = 0 \right\}
$$

とおく. 写像 $h_m : V_{n+1} \to V_{n+1}$ を, $\theta_0 = (\theta_0^{(1)},\dots,\theta_0^{(n+1)}) \in V_{n+1}$ に対して,

$$
h_m(\theta_0) = (\theta_0^{(1)},\dots,\theta_0^{(m-1)},\theta_0^{(m)}+1,\theta_0^{(m+1)}-1,\theta_0^{(m+2)},\dots,\theta_0^{(n+1)})
$$

と定める. ただし $1 \le m \le n$ とする. この写像で, 各 $\tilde{s}_k^{(0)}$ の係数が不変であることを見ればよい. まず, $z=0,1$ の接続関係式の各 $\tilde{s}_k^{(0)}$ に現れる $\theta_0^{(k)}$ の個数は, $\theta_0^{(j)}$ が 3 個, $\theta_0^{(n+1)}$ が 3 個, $\theta_0^{(k)}$ が $2n+1$ 個, その他の $\theta_0^{(1)},\dots,\theta_0^{(n)}$ が各 1 個である. 従って, $h_1,\dots,h_{j-2},h_{j+1},\dots,h_{k-2},h_{k+1},\dots,h_{n-1}$ に関しては, 各 θ_0 の合計個数が 2 個 (偶数) になっているため, 三角関数の補角の公式 $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$, 及び指数関数の周期性から $\tilde{s}^{(0)}$ の係数は不変になっている. 残りの $h_{j-1},h_j,h_{k-1},h_k,h_n$ についても, それぞれに対応する θ_0 の個数が偶数個になっているから, $\tilde{s}^{(0)}$ の係数は不変になっている. 従って, $z=0,1$ の接続関係式はパラメータ θ_0 に関して周期 1 になっている. またパラメータ $\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(n+1)}$ は, 接続関係式の $\tilde{s}^{(0)}$ の係数に 1 個づつあるから, $\sin\pi(x+n) = (-1)^n \sin\pi x\ \ (n\in\mathbb{Z})$ 及び指数関数の周期性から $\tilde{s}^{(0)}$ の係数は σ に関して周期 1 になっている.

(2) (1) と同様にして示される.

□

同様にして, パラメータ α, β に関しても接続関係式を整数シフトで不変にすることができる.

定理 5.2. $z<0$ のとき

$$s_j^{(0)} = e^{\pi\sqrt{-1}\alpha_j} \int_{D_j^{(0)}} u_{D_j^{(0)}}(t)dt \qquad (1 \le j \le n+1),$$

$$s_j^{(\infty)} = e^{\pi\sqrt{-1}(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j)} \int_{D_j^{(\infty)}} u_{D_j^{(\infty)}}(t)dt \qquad (1 \le j \le n+1),$$

$0<z<1$ のとき

$$\tilde{s}_j^{(0)} = e^{\pi\sqrt{-1}(\beta_j+\alpha_j-1)} \int_{\tilde{D}_j^{(0)}} u_{\tilde{D}_j^{(0)}}(t)dt \qquad (1 \le j \le n+1),$$

$$\tilde{s}_j^{(1)} = e^{\pi\sqrt{-1}(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j)} \int_{\tilde{D}_j^{(1)}} u_{\tilde{D}_j^{(1)}}(t)dt \qquad (1 \le j \le n+1),$$

として解の基本系をとる. このとき, 次が成り立つ.

$1 \le j \le n+1$ に対して

$$s_j^{(\infty)} = \sum_{1\le k\le n+1} e^{\pi\sqrt{-1}(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j-\alpha_k)} \frac{s(\beta_j-\alpha_j)}{s(\beta_k-\alpha_j)} \prod_{1\le l\le n+1, l\ne k} \frac{s(\alpha_l-\beta_k)}{s(\beta_l-\beta_k)} s_k^{(0)},$$

$1 \le j \le n$ に対して

$$\tilde{s}_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{n+1} e^{\pi\sqrt{-1}(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_j-\beta_k-\alpha_k+1)} \frac{s(\beta_j-\alpha_j)s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_k-\alpha_j)s(\beta_k-\alpha_{n+1})} \prod_{l=1, l\ne k}^{n+1} \frac{s(\beta_k-\alpha_l)}{s(\beta_k-\beta_l)} \tilde{s}_k^{(0)},$$

$j=n+1$ に対して

$$\tilde{s}_{n+1}^{(1)} = \sum_{1\le k\le n+1} e^{\pi\sqrt{-1}(\beta_{1,n}-\alpha_{1,n+1}-\beta_k-\alpha_k)} \prod_{1\le l\le n+1, l\ne k} \frac{s(\alpha_l-\beta_k)}{s(\beta_l-\beta_k)} \tilde{s}_k^{(0)}.$$

さらに, これらの解の基本系の間の接続関係式は, パラメータ α_j, β_j $(1 \le j \le n+1)$ の整数シフトで不変である.

6　q 差分型一般化超幾何関数

以降では, 一般化超幾何関数の接続問題の応用として, 4 点共形ブロックの接続問題を考える.

6.1　準備と記号

以下, $q \in \mathbb{C} - \{0\}$ を $|q| < 1$ を満たすものとして一つ固定する. このとき

$$[u] = \frac{1-q^u}{1-q},$$
$$(a;q)_N = \prod_{j=0}^{N-1}(1-aq^j)$$

と表記する. また, 正の整数の有限列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0)$ を分割といい, $l(\lambda) = l$ を分割 λ の長さという. 共役な分割 $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{l'})(\lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_{l'} > 0)$ を, $\lambda'_j = |\{i|\lambda_i \geq j\}|, l' = \lambda_1$ として定義する. さらに, $\mathbb{Y}$ をすべての分割の集合とする. いま, 分割 λ を $\mathbb{Z}^2$ の部分集合 $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \leq j \leq \lambda_i, i \geq 1\}$ とみなし, この集合の濃度を $|\lambda|$ と表す ($|\lambda| \geq 0$ に注意する.). $\square = (i,j) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ に対して,

$$a_\lambda(\square) = \lambda_i - j,$$
$$l_\lambda(\square) = \lambda'_j - i$$

と定める. a_λ を分割 λ の腕 (アーム), l_λ を分割 λ の脚 (レッグ) という. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l(\lambda)}) \in \mathbb{Y}$ と $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$r_l(\lambda) = (\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_l + 1, \lambda_{l+2}, \ldots)$$

と定める. 以降は, 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ とヤング図形を同一視する. すなわち, 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ と, 第 i 行に λ_i 個の箱を並べて左揃えにして並べた図形を同一視する. 分割 $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$ に対して,

$$N_{\lambda,\mu}(w) = \prod_{\square \in \lambda}(1 - q^{-l_\lambda(\square) - a_\mu(\square) - 1}w) \prod_{\square \in \mu}(1 - q^{a_\mu(\square) + l_\lambda(\square) + 1}w) \ (w \in \mathbb{C})$$

と定めて, これを分割 λ, μ に対する Nekrasov factor という.

6.2　q 差分型一般化超幾何関数

定義 6.1. $n \in \mathbb{Z}\ (n > 0), \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ とする. このとき

$$(6.1) \qquad {}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \\ \beta_1, \ldots, \beta_n\end{matrix}; q, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\alpha_1};q)_k \cdots (q^{\alpha_{n+1}};q)_k}{(q^{\beta_1};q)_k \cdots (q^{\beta_n};q)_k (q;q)_k} z^k$$

を q 差分型一般化超幾何級数という.

正の整数 n を 1 つ固定し, パラメータ $\sigma^{(k)}={}^t(\sigma_1^{(k)},\dots,\sigma_{n+1}^{(k)})\in\mathbb{C}^{n+1}$ は $\sum_{j=1}^{n+1}\sigma_j^{(k)}=0$ $(k=0,\dots,m)$ を満たし, $\theta_k\in\mathbb{C}$ $(1\le k\le m)$ とする. また, $\sigma=(\sigma^{(0)},\dots,\sigma^{(m)})\in M_{n+1,m+1}(\mathbb{C}),\theta={}^t(\theta_1,\dots,\theta_m)\in\mathbb{C}^m$ とする. さらに, $x=(x_1,\dots,x_m)$ とおく. 級数 $Z_m(\sigma,\theta,x)$ を

$$Z_m(\sigma,\theta,x)=\sum_{\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(m-1)}\in\mathbb{Y}^{n+1}}Z_{\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(m-1)}}(\sigma,\theta,x),\tag{6.2}$$

$$Z_{\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(m-1)}}(\sigma,\theta,x)=\prod_{p=1}^{m-1}\left(\frac{q^{2\theta_p}x_p}{x_{p+1}}\right)^{|\lambda^{(p)}|}\frac{\prod_{p=1}^{m}\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k^{(p)},\lambda_{k'}^{(p-1)}}(q^{\sigma_k^{(p)}-\theta_p-\sigma^{(p-1)}})}{\prod_{p=1}^{m-1}\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k^{(p)},\lambda_{k'}^{(p)}}(q^{\sigma_k^{(p)}-\sigma_{k'}^{(p)}})}$$

と定義する. ここで $m\in\mathbb{Z}_{>0},\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},\dots,\lambda_{n+1}^{(k)})$ $(1\le k\le m-1)$ であり, $\lambda^{(0)}=\lambda^{(m)}=(\emptyset,\dots,\emptyset)$ である. また, この級数の収束性は [FL] により議論されている. まず $m=2$ の場合

(6.3)

$$Z_2(\sigma,\theta,x)=\sum_{\lambda^{(1)}\in\mathbb{Y}^{n+1}}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^{|\lambda^{(1)}|}\frac{\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k^{(2)},\lambda_{k'}^{(1)}}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma^{(1)}})N_{\lambda_k^{(1)},\lambda_{k'}^{(0)}}(q^{\sigma_k^{(1)}-\theta_1-\sigma^{(0)}})}{\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k^{(1)},\lambda_{k'}^{(1)}}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_{k'}^{(1)}})}$$

について考察する.

定理 6.2. $1\le j\le n+1$ として j を 1 つ固定する. 級数 $Z_2(\sigma,\theta,x)$ に対して, そのパラメータを

$$\sigma_k^{(1)}=\sigma_k^{(0)}+\frac{1}{n+1}-\delta_{k,j}\ (1\le k\le n+1),$$
$$\theta_1=\frac{1}{n+1}$$

として固定する. このとき,

$$\begin{aligned}Z_2(\sigma,\theta,x)&={}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\sigma_1^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)},\dots,\sigma_{n+1}^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}\\ \sigma_1^{(1)}-\sigma_j^{(1)},\dots,\widehat{\sigma_j^{(1)}-\sigma_j^{(1)}},\dots,\sigma_{n+1}^{(1)}-\sigma_j^{(1)}\end{matrix};q,\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^l\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}};q)_l}{(q;q)_l\prod_{k=1,k\ne j}^{n+1}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}};q)_l}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\widehat{\sigma_j^{(1)}-\sigma_j^{(1)}}$ は $\sigma_j^{(1)}-\sigma_j^{(1)}$ を除く, ということを意味する.

注意 6.3. 定理 6.2 の仮定 $\sigma_k^{(1)}=\sigma_k^{(0)}+\frac{1}{n+1}-\delta_{k,j}$ $(1\le k\le n+1)$ は, 実は $\sigma_k^{(1)}=\sigma_k^{(0)}+\frac{1}{n+1}-\delta_{k,j}$ $(2\le k\le n+1)$ でよい. なぜなら, $\sum_{j=1}^{n+1}\sigma_j^{(0)}=0$ より, このとき勝手に $\sigma_1^{(1)}=\sigma_1^{(0)}+\frac{1}{n+1}$ が満たされるからである.

定理 6.2 の証明には以下の補題を用いる.

補題 6.4. [[JNS], 補題 A.2, A.3]
$\lambda,\mu\in\mathbb{Y}$ に対して,

(1) $N_{\lambda,\mu}(1)\neq 0$ であるための必要十分条件は $\lambda=\mu$ である.

(2) $N_{\lambda,\mu}(q^{-1})\neq 0$ であるための必要十分条件は $\lambda=r_l(\mu)$ である.

(3) $N_{\lambda,\emptyset}(q^{-1})\neq 0$ であるための必要十分条件は, ある $l\geq 0$ に対して $\lambda=(1^l)$ となることである.

補題 6.5. $\lambda,\mu\in\mathbb{Y}, w\in\mathbb{C}$ に対して, 次が成り立つ

(1)$N_{(1^l),\emptyset}(w)=(q^{-l+1}w;q)_l$.

(2)$N_{\emptyset,(1^l)}(w)=(w;q)_l$.

(3)$N_{(1^l),(1^l)}(w)=(q^{-l}w;q)_l(qw;q)_l$.

Proof. (定理 6.2) $Z_2(\sigma,\theta,x)$ の係数の分子について, 仮定より

$$N_{\lambda_j^{(1)},\emptyset}(q^{\sigma_j^{(1)}-\theta_1-\theta_j^{(0)}})=N_{\lambda_j^{(1)},\emptyset}(q^{-1})$$

となる. ところで, $N_{\lambda_j^{(1)},\emptyset}(q^{-1})=0$ とすると, $Z_{\lambda^{(1)}}(\sigma,\theta,x)=0$ となる. 従って $N_{\lambda_j^{(1)},\emptyset}(q^{-1})\neq 0$ とする. このとき補題 6.4(3) より, $\lambda_j^{(1)}=(1^l)$ $(l\in\mathbb{Z}_{>0})$ となる. また, 補題 6.5(1) より, $N_{(1^l),\emptyset}(q^{-1})=(q^{-l};q)_l$ となる. さらに定理の仮定より

$$N_{\lambda_k^{(1)},\emptyset}(q^{\sigma_k^{(1)}-\theta_1-\theta_k^{(0)}})=N_{\lambda_k^{(1)},\emptyset}(q^0)=N_{\lambda_k^{(1)},\emptyset}(1)\ (k\neq j)$$

となる. ここで, $N_{\lambda_j^{(1)},\emptyset}(1)=0$ とすると, 級数 $Z_2(\sigma,\theta,x)$ の値は 0 となるから, 何もしなくてよい. 従って, $N_{\lambda_j^{(1)},\emptyset}(1)\neq 0$ とする. このとき補題 6.4(1) より, $\lambda_k^{(1)}=\emptyset$ となる. 従って, $N_{\lambda_k^{(1)},\emptyset}(q^{\sigma_k^{(1)}-\theta_1-\sigma_k^{(0)}})=N_{\emptyset,\emptyset}(q^{\sigma_k^{(1)}-\theta_1-\sigma_k^{(0)}})=1$ となる. 以上より

$$\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{n+1}^{(1)})=(\emptyset,\ldots,\emptyset,\overset{j}{(1^l)},\emptyset,\ldots,\emptyset)$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned}
Z_2(\sigma,\theta,x)&=\sum_{\lambda^{(1)}\in\mathbb{Y}^{n+1}}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^{|\lambda^{(1)}|}\frac{\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k^{(2)},\lambda_{k'}^{(1)}}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_{k'}^{(1)}})N_{\lambda_k^{(1)},\lambda_{k'}^{(0)}}(q^{\sigma_k^{(1)}-\theta_1-\sigma_{k'}^{(0)}})}{\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k^{(1)},\lambda_{k'}^{(1)}}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_{k'}^{(1)}})}\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^{l}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{\emptyset,(1^l)}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}})N_{(1^l),\emptyset}(q^{\sigma_j^{(1)}-\theta_1-\sigma_k^{(0)}})}{N_{(1^l),(1^l)}(1)\prod_{k=1,k,\neq j}^{n+1}N_{(1^l),\emptyset}(q^{\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}})N_{\emptyset,(1^l)}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}})}\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^{l}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{\emptyset,(1^l)}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}})N_{(1^l),\emptyset}(q^{(\sigma_j^{(0)}+1/(n+1)-\delta_{j,j})-1/(n+1)-\sigma_k^{(0)}})}{N_{(1^l),(1^l)}(1)\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{(1^l),\emptyset}(q^{\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}})N_{\emptyset,(1^l)}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}})}\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^{l}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{\emptyset,(1^l)}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}})N_{(1^l),\emptyset}(q^{\sigma_j^{(0)}-\sigma_k^{(0)}-1})}{N_{(1^l),(1^l)}(1)\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{(1^l),\emptyset}(q^{\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}})N_{\emptyset,(1^l)}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}})}\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^{l}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}};q)_l(q^{\sigma_j^{(0)}-\sigma_k^{(0)}-l};q)_l}{(q^{-l};q)_l(q;q)_l\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}(q^{\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}+1-l};q)_l(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}};q)_l}
\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}+1-l&=(\sigma_j^{(0)}+\frac{1}{n+1}-\delta_{j,j})-(\sigma_k^{(0)}+\frac{1}{n+1}-\delta_{k,j})+1-l\\&=(\sigma_j^{(0)}+\frac{1}{n+1}-1)-(\sigma_k^{(0)}+\frac{1}{n+1}-0)+1-l\\&=\sigma_j^{(0)}-\sigma_k^{(0)}-l\end{aligned}$$

であるから, 分子の $\prod_{k=1}^{n+1}(q^{\sigma_j^{(0)}-\sigma_k^{(0)}-l};q)_l$ と分母の $(q^{-l};q)_l\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}(q^{\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}+1-l};q)_l$ が約分する. 以上より

$$Z_2(\sigma,\theta,x)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1 x_1}}{x_2}\right)^l\frac{\prod_{j=1}^{n+1}(q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}};q)_l}{(q;q)_l\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}(q^{\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}};q)_l}$$

となり, 主張は示された. またこの式の右辺は, $\alpha_k=\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)},\beta_k=\sigma_k^{(1)}-\sigma_j^{(1)}$ ととったときの q 差分型一般化超幾何関数 ${}_{n+1}\phi_n$ に一致する. □

上の定理の証明と同様にして, 次が成り立つ.

定理 6.6. $1\leq j\leq n+1$ として j を 1 つ固定する. 級数 $Z_2(\sigma,\theta,x)$ に対して, そのパラメータを

$$\begin{aligned}\sigma_k^{(2)}&=\sigma_k^{(1)}+\frac{1}{n+1}-\delta_{k,j}\ (1\leq k\leq n+1),\\\theta_2&=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

として固定する. このとき,

$$\begin{aligned}Z_2(\sigma,\theta,x)&={}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\sigma_j^{(1)}-\theta_1-\sigma_1^{(0)},\ldots,\sigma_j^{(1)}-\theta_2-\sigma_{n+1}^{(0)}\\\sigma_j^{(1)}-\sigma_1^{(1)},\ldots,\widehat{\sigma_j^{(1)}-\sigma_j^{(1)}},\ldots,\sigma_j^{(1)}-\sigma_{n+1}^{(1)}\end{matrix};q,\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right)^l\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(q^{\sigma_j^{(1)}-\theta_1-\sigma_k^{(0)}};q)_l}{(q;q)_l\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}(q^{\sigma_j^{(1)}-\sigma_k^{(1)}};q)_l}\end{aligned}$$

が成り立つ.

q 差分型一般化超幾何関数 (6.1) に対して, そのパラメータ α_j のみを 1 だけ増やす作用素は次のようになる.

定義 6.7. 作用素 T_p $(1\leq p\leq m)$ を

$$T_p(f(x_1,\ldots,x_p,\ldots,x_n))=f(x_1,\ldots,qx_p,\ldots,x_m)$$

として定義する. この作用素 T_p を x_p についての q-shift 作用素という.

定理 6.8. 作用素 H_{α_j} を

$$H_{\alpha_j}=\frac{1-q^{\alpha_j}T_1}{1-q^{\alpha_j}}$$

により定める．このとき，

$$
{}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_{n+1}\\ \beta_1,\dots,\beta_n\end{matrix};q,z\right)=H_{\alpha_j}\left({}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_{n+1}\\ \beta_1,\dots,\beta_n\end{matrix};q,z\right)\right)
$$

が成り立つ．

Proof. 直接計算により証明される．実際，$(q^{\alpha_j+1};q)_l=(1-q^{\alpha_j+l})(q^{\alpha_j};q)_l/(1-q^{\alpha_j})$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
{}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_{n+1}\\ \beta_1,\dots,\beta_n\end{matrix};q,z\right)
=&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j+1};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
=&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1-q^{\alpha_j+l}}{1-q^{\alpha_j}}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
=&\frac{1}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
&-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{q^{\alpha_j+l}}{1-q^{\alpha_j}}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
=&\frac{1}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
&-\frac{q^{\alpha_j}}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}(qz)^l\\
=&\frac{1}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
&-\frac{q^{\alpha_j}}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}T_1(z^l)\\
=&\frac{1}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
&-\frac{q^{\alpha_j}T_1}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
=&\frac{1-q^{\alpha_j}T_1}{1-q^{\alpha_j}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_1};q)_l\cdots(q^{\alpha_j};q)_l\cdots(q^{\alpha_{n+1}};q)_l}{(q^{\beta_1};q)_l\cdots(q^{\beta_n};q)_l(q;q)_l}z^l\\
=&H_{\alpha_j}\left({}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_{n+1}\\ \beta_1,\dots,\beta_n\end{matrix};q,z\right)\right)
\end{aligned}
$$

となり，示された． □

注意 6.9. q 差分作用素 $x_1D_q=(1-T_1)/(1-q)$ は連続の世界でのオイラー作用素 $\delta_x=xd/dx$ に対応する．

ここまでは, 級数 (6.3) の両側のヤング図形はともに $(\emptyset,\dots,\emptyset)$ として考えてきたが, 次に両側のヤング図形が一般の場合の級数

$$S_{\lambda,\nu}(\sigma,\theta,x)=\sum_{\mu\in\mathbb{Y}^{n+1}}x^{|\mu|}\frac{\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\lambda_k,\mu_{k'}}(w_{k,k'})N_{\mu_k,\nu_{k'}}(z_{k,k'})}{\prod_{k,k'=1}^{n+1}N_{\mu_k,\mu_{k'}}(u_{k,k'})} \tag{6.4}$$

について考える. ここで,

$$\begin{aligned}
w_{k,k'}&=q^{\sigma_k^{(3)}-\theta_3-\sigma_{k'}^{(2)}},\\
z_{k,k'}&=q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_{k'}^{(1)}},\\
u_{k,k'}&=q^{\sigma_k^{(2)}-\sigma_{k'}^{(2)}},\\
x&=\frac{q^{2\theta_2}x_2}{x_3}
\end{aligned}$$

であり, $\lambda=\nu=(\emptyset,\dots,\emptyset)$ のときには, $S_{\emptyset,\emptyset}(\sigma,\theta,x)=Z_2(\sigma,\theta,x)$ となることに注意する. また, 以降は常に

$$\sigma^{(2)}=\sigma^{(1)}-h_j, \tag{6.5}$$

$$\theta_2=\frac{1}{n+1} \tag{6.6}$$

を仮定する. このとき, (6.5), (6.6) より,

$$\begin{aligned}
z_{j,j}&=q^{\sigma_j^{(2)}-\theta_2-\sigma_j^{(1)}}\\
&=q^{-1},\\
z_{k,k}&=q^{\sigma_k^{(2)}-\theta_2-\sigma_k^{(1)}}\\
&=q^{0}\\
&=1\ (k\neq j)
\end{aligned}$$

となるから, 補題 6.4(1), (2) により,

$$\begin{aligned}
\mu&=(\mu_1,\dots,\mu_{n+1})\\
&=(\nu_1,\dots,r_l(\nu_j),\dots,\nu_{n+1})
\end{aligned}$$

をえる.

定義 6.10. Young 図形 $\lambda=((\lambda)_1,\dots,(\lambda)_l)$ と $m\geq(\lambda)_1$ に対して,
(1) $(m,\lambda)=(m,(\lambda)_1,\dots,(\lambda)_l)$,
(2) $(\lambda+1^m)=((\lambda)_1+1,\dots,(\lambda)_l+1,1,\dots,1)$
と定義する.

いま, (6.4) に対して, 左側のヤング図形 λ を増加させる作用素は以下で与えられると予想される.

予想 6.11. (6.4) に対して,
(1) ヤング図形 $\lambda^{\emptyset}, \lambda^{\square} \in \mathbb{Y}^{n+1}$ を

$$\begin{aligned} \lambda^{\emptyset} &= (\emptyset, \dots, \emptyset), \\ \lambda^{\square} &= (\emptyset, \dots, \overset{i}{\check{\square}}, \dots, \emptyset) \end{aligned}$$

とし, 作用素 $L_{i,j}^{\lambda^{\emptyset} \to \lambda^{\square}}$ を

$$\begin{aligned} L_{i,j}^{\lambda^{\phi} \to \lambda^{\square}} &= C_{i,j}^{\lambda^{\emptyset} \to \lambda^{\square}} (1 - q w_{i,j} T_2), \\ C_{i,j}^{\lambda^{\phi} \to \lambda^{\square}} &= \frac{(1 - q^{(\nu_j)_1} w_{i,j})}{\prod_{a=1}^{A_j - 1} \left(\prod_{b=(\nu_j)_{a+1}+1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-b + l_{r_l(\nu_j)}(a,b) + 1} w_{i,j}) \right)} \\ &\times \frac{\prod_{b=2}^{(\nu_j)_1} (1 - q^{-b + l_{r_l(\nu_j)}(1,b) + 3} w_{i,j})}{\prod_{a=1}^{A} (1 - q^{-(\nu_j)_a + l_{r_l(\nu_j)}(a, (\nu_j)_a + 1)} w_{i,j})} \\ &\times \frac{(1 - w_{i,j}) \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{-(\nu_j)_a + l_{r_l(\nu_j)}(a, (\nu_j)_a + 1) + 1} w_{1,j}) \prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} N_{\square, \nu_k}(w_{i,k})}{\prod_{b=2}^{(\nu_j)_{A_j}} (1 - q^{-b + l_{r_l(\nu_j)}(A_j, b) + 1} w_{i,j}) \prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} N_{\phi, \nu_k}(w_{i,k})} \end{aligned}$$

で定める. このとき,

$$S_{\lambda^{\square}, \nu}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x) = L_{i,j}^{\lambda^{\emptyset} \to \lambda^{\square}} (S_{\lambda^{\emptyset}, \nu}(\sigma, \theta, x))$$

となる. このときパラメータ σ, θ は

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} - h_j, \\ \tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - h_j, \\ \tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

と変化する.
(2) 一般のヤング図形 $\lambda_i = ((\lambda_i)_1, \dots, (\lambda_i)_{n_i}), (\lambda_i)_1 \geq \cdots \geq (\lambda_i)_{n_i} > 0, n_i > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), \\ \lambda^{(m)} &= (\lambda_1, \dots, \overset{i}{(m, \check{\lambda}_i)}, \dots, \lambda_{n+1}) \end{aligned}$$

とおき, $A_k = (\nu_k')_1$ (ν_k の縦の長さ) とする. 作用素 $L_{i,j}^{\lambda_i \to (m, \lambda_i)}$ を

$$L_{i,j}^{\lambda_i \to (m, \lambda_i)} = C_{i,j}^{\lambda_i \to (m, \lambda_i)} (1 - q^m w_{i,j} T_2)$$

として定める. 定数 $C_{i,j}^{\lambda_i \to (m, \lambda_i)}$ は後述する. ここで, $L_i = (\lambda_i')_1$ (λ_i の縦の長さ) である. このとき,

$$S_{\lambda^{(m)}, \nu}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x) = L_{i,j}^{\lambda_i \to (m, \lambda_i)} (S_{\lambda, \nu}(\sigma, \theta, x))$$

となる. このときパラメータは

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} - h_j, \\
\tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - h_j, \\
\tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

と変化する.

予想 6.12. (6.4) に対して, 作用素 $R_{i,j}^{\emptyset \to \Box}$ を,
(1) (1-1) $i = j$ のとき,

$$
\begin{aligned}
R_{j,j}^{\nu_\emptyset \to \nu_\Box} &= C_{j,j}^{\nu_\emptyset \to \nu_\Box}(1 - q^{-1} T_2), \\
C_{j,j}^{\nu_\emptyset \to \nu_\Box} &= \frac{\prod_{k,k'=1,k' \neq j}^{n+1} N_{\lambda_k,\emptyset}(\tilde{w}_{k,k'}) \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{\emptyset,\Box}(\tilde{z}_{k,j})}{\prod_{(a,b \in \lambda_k)}(1 - q^{-l_{\lambda_k}(a,b) - a_{1^l}(a,b) - 1} w_{j,k})} \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{b=1}^{(\lambda_k)_1} (1 - q^{-l_{\lambda_k}(1,b) + b - 3} \tilde{w}_{k,j}) \right) \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{(a,b) \in \lambda_k, a \geq 2} (1 - q^{-l_{\lambda_k}(a,b) + b - 2} \tilde{w}_{k,j})(1 - q^{a_{\lambda_k}(1,2) + 1} \tilde{w}_{k,j}) \right)
\end{aligned}
$$

で定める. このとき,

$$
S_{\lambda,\nu^\Box}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x) = R_{j,j}^{\nu_\emptyset \to \nu_\Box}(S_{\lambda,\nu^\emptyset}(\sigma, \theta, x))
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
\nu^\emptyset &= (\emptyset, \ldots, \emptyset), \\
\nu^\Box &= (\emptyset, \ldots, \overset{i}{\check{\Box}}, \ldots, \emptyset)
\end{aligned}
$$

である. また, $S_{\lambda,\nu^\emptyset}(\sigma, \theta, x)$ は

$$
\mu^\emptyset = (\emptyset, \ldots, (\overset{j}{\check{1}}{}^l), \ldots, \emptyset)
$$

に対して, $S_{\lambda,\nu^\Box}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x)$ は

$$
\mu_{i,j}^\Box = \begin{cases} (\emptyset, \ldots, \overset{i}{\check{\Box}}, \ldots, (\overset{j}{\check{1}}{}^l), \ldots, \emptyset) & (i \neq j), \\ (\emptyset, \ldots, (2, \overset{j}{\check{1}}{}^{l-1}), \ldots, \emptyset) & (i = j) \end{cases}
$$

に対してそれぞれ和をとっていることに注意する. さらにこのときパラメータは

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} - h_j, \\
\tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - h_j,
\end{aligned}
$$

$$\tilde{\theta}_3 = \theta_3 - \frac{1}{n+1}$$

と変化する.

(1-2) $i \neq j$ のとき,

$$\begin{aligned}
R_{i,j}^{\nu^{\emptyset} \to \nu^{\square}} &= C_{j,j}^{\nu^{\emptyset} \to \nu^{\square}} (1 - q^{-2} T_2) \\
C_{i,j}^{\nu^{\emptyset} \to \nu^{\square}} &= \frac{\prod_{k,k'=1,k' \neq i,j}^{n+1} N_{\lambda_k,\emptyset}(\tilde{w}_{k,k'}) \prod_{k=1}^{n+1} N_{\lambda_k,\square}(\tilde{w}_{k,i})}{(1 - q^{-1} u_{i,j})(1 - q^{-2} u_{i,j}) N_{\square,\square}(1) \prod_{k=1,k \neq i,j}^{n+1} N_{\square,\emptyset}(\tilde{u}_{i,j}) \prod_{k=1,k \neq i,j}^{n+1} N_{\emptyset,\square}(\tilde{u}_{k,i})} \\
&\quad \times \frac{N_{\square,\square}(\tilde{z}_{i,i}) \prod_{k=1,k \neq i}^{n+1} N_{\square,\emptyset}(\tilde{z}_{i,j}) \prod_{k=1,k \neq i,j}^{n+1} N_{\emptyset,\square}(\tilde{z}_{k,j})}{\prod_{k,k'=1,k' \neq i,j}^{n+1} N_{\lambda_k,\emptyset}(w_{k,k'}) \prod_{k=1}^{n+1} N_{\lambda_k,\emptyset}(w_{k,i})}
\end{aligned}$$

で定める. このとき,

$$S_{\lambda,\nu^{\square}}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x) = R_{j,j}^{\emptyset \to \square}(S_{\lambda,\nu^{\emptyset}}(\sigma, \theta, x))$$

となる. また, $S_{\lambda,\nu^{\emptyset}}(\sigma, \theta, x)$ は

$$\mu^{\emptyset} = (\emptyset, \ldots, \overset{j}{\check{(1^l)}}, \ldots, \emptyset)$$

に対して, $S_{\lambda,\nu^{\square}}(\sigma, \theta, x)$ は

$$\mu_{i,j}^{\square} = \begin{cases} (\emptyset, \ldots, \overset{i}{\check{\square}}, \ldots, \overset{j}{\check{(1^l)}}, \ldots, \emptyset) & (i \neq j) \\ (\emptyset, \ldots, \overset{j}{\check{(2, 1^{l-1})}}, \ldots, \emptyset) & (i = j) \end{cases}$$

に対して, それぞれ和をとっていることに注意する. さらにこのときパラメータはこのときパラメータは

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} - h_j, \\
\tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - h_j, \\
\tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

と変化する.

(2) 一般のヤング図形 $\nu_i = ((\nu_i)_1, \ldots, (\nu_i)_{n_i}), (\nu_i)_1 \geq \cdots \geq (\nu_i)_{n_i} > 0, n_i > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\nu &= (\nu_1, \ldots, \nu_{n+1}), \\
\nu_i^m &= (\nu_1, \ldots, \overset{i}{\check{(\nu_i + 1^m)}}, \ldots, \nu_{n+1}), \\
\mu_{i,j} &= \begin{cases} (\nu_1, \ldots, \overset{i}{\check{(\nu_i)}}, \ldots, \overset{j}{\check{r_l(\nu_j)}}, \ldots, \nu_{n+1}) & (i \neq j), \\ (\nu_1, \ldots, \overset{j}{\check{r_l(\nu_j)}}, \ldots, \nu_{n+1}) & (i = j), \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\mu_{i,j}^m = \begin{cases} (\nu_1, \ldots, (\overset{i}{\nu_i + 1^m}), \ldots, r_l(\overset{j}{\nu_j}), \ldots, \nu_{n+1}) & (i \neq j), \\ (\nu_1, \ldots, r_l(\overset{j}{\nu_j + 1^m}), \ldots, \nu_{n+1}) & (i = j), \end{cases}$$

とおき, $A_k = (\nu_k')_1$(ν_k の縦の長さ) とする. 作用素 $R_{i,j}^{\nu_i \to (\nu_i + 1^m)}$ を
(2-1)$i = j$ のとき,

$$R_{j,j}^{\nu_j \to (\nu_j + 1^m)} = C_{j,j}^{\nu_j \to (\nu_j + 1^m)} (1 - q^{-m} T_2)$$

で定める. 定数 $C_{j,j}^{\nu_j \to (\nu_j + 1^m)}$ は後述する. このとき,

$$S_{\lambda, \nu_j^m}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x) = R_{j,j}^{\nu_j \to (\nu_j + 1^m)} (S_{\lambda,\nu}(\sigma, \theta, x))$$

となる. ここで, $S_{\lambda,\nu_j}(\sigma,\theta,x)$ は $\mu_{j,j}$ で, $S_{\lambda,\nu_j^m}(\tilde{\sigma},\tilde{\theta},x)$ は $\mu_{j,j}^m$ で和をとっていることに注意する.
このときパラメータは

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} - h_j, \\ \tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - h_j, \\ \tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

と変化する.
(2-2)$i \neq j$ のとき,

$$R_{i,j}^{\nu_i \to (\nu_i + 1^m)} = C_{i,j}^{\nu_i \to (\nu_i + 1^m)} (1 - q^{-m-1} u_{i,j} T_2)$$

で定める. 定数 $C_{i,j}^{\nu_i \to (\nu_i + 1^m)}$ は後述する. このとき,

$$S_{\lambda, \mu_{ij}^m, \nu_i^m}(\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, x) = R_{i,j}^{\nu_i \to (\nu_i + 1^m)} (S_{\lambda, \mu_{i,j}, \nu}(\sigma, \theta, x))$$

となる. ここで, $S_{\lambda,\nu_j}(\sigma,\theta,x)$ は $\mu_{j,j}$ に対して, $S_{\lambda,\nu_j^m}(\tilde{\sigma},\tilde{\theta},x)$ は $\mu_{j,j}^m$ に対してそれぞれ和をとっていることに注意する. このときパラメータは

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} - h_j, \\ \tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - h_j, \\ \tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

と変化する.

これらの予想 6.11, 6.12 での作用素 $L_{i,j}, R_{i,j}$ は次のようにして構成される.
予想 6.11 について, パラメータ $\sigma^{(2)}, \theta_2$ は, $\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)} - h_j, \theta_2 = 1/(n+1)$ として特殊化されているから, 比較する級数は

(6.7) $$S_{\lambda,\nu}(\sigma,\theta,x) = C^{\lambda,\nu} \sum_{l=0}^{\infty} x^{l+|\nu|}$$

$$\times \frac{\prod_{k=1}^{n+1} N_{\lambda_k, r_l(\nu_j)}(w_{k,j}) \prod_{k=1}^{n+1} N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(z_{j,k'})}{N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1) \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(u_{j,k}) \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{\nu_k, r_l(\nu_j)}(u_{k,j})},$$

$$(6.8)\quad S_{\lambda^{(m)},\nu}(\sigma,\theta,x) = C^{\lambda^{(m)},\nu} \sum_{l=0}^{\infty} x^{l+|\nu|}$$
$$\times \frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{n+1} N_{\lambda_k, r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{k,j}) N_{(m,\lambda_i),r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{i,j}) \prod_{k=1}^{n+1} N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(\tilde{z}_{j,k'})}{N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1) \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(\tilde{u}_{j,k}) \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{\nu_k, r_l(\nu_j)}(\tilde{u}_{k,j})}$$

となる．ここで, $C^{\lambda,\nu}, C^{\lambda^{(m)},\nu}$ はともに, l に無関係な定数であり,

$$C^{\lambda,\nu} = \frac{\prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\lambda_k,\nu_{k'}}(w_{k,k'}) \prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}(z_{k,k'})}}{\prod_{k,k'=1,k,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}}(u_{k,k'})},$$
$$C^{\lambda^{(m)},\nu} = \frac{\prod_{k,k'=1,k'\neq i,j}^{n+1} N_{\lambda_k,\nu_{k'}}(\tilde{w}_{k,k'}) \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{(m,\lambda_i),\nu_k}(\tilde{w}_{i,k}) \prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}}(\tilde{z}_{k,k'})}{\prod_{k,k'=1,k,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}}(\tilde{u}_{k,k'})}$$

である．このとき, (6.7), (6.8) は,

$$\tilde{w}_{k,k'} = w_{k,k'} \ (k\neq i \text{ かつ } k'\neq j),$$
$$\tilde{z}_{k,k'} = z_{k,k'},$$
$$\tilde{u}_{k,k'} = u_{k,k'}$$

ととれば, 比較する項は (6.7) の $N_{\lambda_i,r_l(\nu_j)}(w_{i,j})$ と (6.8) の $N_{(m,\lambda_i),r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{i,j})$ のみである．ここで, $L_i = (\lambda'_i)_1, A_j = (\nu'_j)_1$ とおき, $\tilde{w}_{i,j} = qw_{i,j}$ とおくと,

$$N_{\lambda_i,r_l(\nu_j)}(w_{i,j})$$
$$= \prod_{a=1}^{L_i}\left(\prod_{b=1}^{(\lambda_i)_a}(1-q^{-l_{\lambda_i}(1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-1}w_{i,j})\right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{\lambda_i}(1,b)+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)+1}w_{i,j})\right)\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j}),$$
$$N_{(m,\lambda_i),r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{i,j})$$
$$= \prod_{b=1}^{m}(1-q^{-l_{\lambda_i}(1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(1,b)-1}w_{i,j})\prod_{a=1}^{L_i}\left(\prod_{b=1}^{(\lambda_i)_a}(1-q^{-l_{\lambda_i}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-1}w_{i,j})\right)$$
$$\times \prod_{b=1}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})\prod_{a=1}^{A_j-1}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_{a+1}}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a+1,b)+2}w_{i,j})\right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})$$

となる．ここで, 比 $N_{(m,\lambda_i),r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{i,j})/N_{\lambda_i,r_l(\nu_j)}(w_{i,j})$ を考えると, $m \geq (\lambda_i)_1 \geq \cdots \geq (\lambda_i)_{L_i} > 0, (\nu_j)_1 \geq \cdots \geq (\nu_j)_{A_j} > 0$ より, 約分できて,

$$
\begin{aligned}
&\frac{N_{(m,\lambda_i),r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{i,j})}{N_{\lambda_i,r_l(\nu_j)}(w_{i,j})\prod_{b=1}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})} \\
&= \frac{\prod_{b=(\lambda_i)_1+1}^{m}(1-q^{-l_{\lambda_i(1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(1,b)-1}w_{i,j}})}{\prod_{a=1}^{A_j-1}\left(\prod_{b=(\nu_j)_{a+1}+1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{\lambda_i}(a+1,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a+1,b)+1}w_{i,j})\right)} \\
&\quad\times \frac{\prod_{b=1}^{(\lambda_i)_{L_i}}(1-q^{-l_{\lambda_i}(L_i+1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(L_i+1,b)-1}w_{i,j})}{\prod_{b=1}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})} \\
&\quad\times \frac{\prod_{a=1}^{L_i-1}\left(\prod_{b=(\lambda_i)_{a+1}+1}^{(\lambda_i)_a}(1-q^{-l_{\lambda_i}(a+1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a+1,b)-1}w_{i,j})\right)}{\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})} \\
&\quad\times \prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})
\end{aligned}
$$

となる．この計算は $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がどんな値であっても成り立つ．いま, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が $l \geq A_j + 1$ を満たすとき, 上の比 $N_{(m,\lambda_i),r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{i,j})/N_{\lambda_i,r_l(\nu_j)}(w_{i,j})$ で l に依るのは,

$$
\text{分子の} \prod_{b=1}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j}),
$$

$$
\text{分母の} \prod_{b=1}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})
$$

のみであり,

$$
\begin{aligned}
&\prod_{b=1}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j}) \\
&= (1-q^{(m-1+2)+(l-1)}w_{i,j})\prod_{b=2}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j}) \\
&\quad\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+2}w_{i,j}) \\
&= (1-q^{l+m}w_{i,j})\prod_{b=2}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j}) \\
&\quad\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{(\lambda_i)_{a-1}+(l-a)+2}w_{i,j}) \\
&= \prod_{b=2}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j}) \\
&\quad\times (1-q^{l+m}w_{i,j})\prod_{a=A_j}^{l-1}(1-q^{l-a+1(\lambda_i)_a}w_{i,j})
\end{aligned}
$$

となる．また,

$$
\begin{aligned}
&\prod_{b=1}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})\\
&=(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,1)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,1)+1}w_{i,j})\prod_{b=2}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})\\
&\quad\times\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}w_{i,j})\\
&=\prod_{b=2}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})\\
&\quad\times\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})\prod_{a=A_j}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}w_{i,j})\\
&=\prod_{b=2}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})\\
&\quad\times\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})\prod_{a=A_j}^{l}(1-q^{(\lambda_i)_a+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}w_{i,j})
\end{aligned}
$$

となる．従って,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\prod_{b=1}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})}{\prod_{b=1}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})}\\
&=\frac{\prod_{b=2}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})}{(1-q^{(\lambda_i)_l w_{i,j}})\prod_{b=2}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})}\\
&\quad\times\frac{\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})}{\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})}(1-q^{l+m}w_{i,j})
\end{aligned}
$$

となる．このことから, q 差分作用素 $L_{i,j}^{\lambda_i\to(m,\lambda_i)}$ を,

$$
\begin{aligned}
&L_{i,j}^{\lambda_i\to(m,\lambda_i)}=C_{i,j}^{\lambda_i\to(m,\lambda_i)}(1-q^m w_{i,j}T_2),\\
&C_{i,j}^{\lambda_i\to(m,\lambda_i)}\\
&=\frac{C^{\lambda^{(m)},\nu}}{C^{\lambda,\nu}}\\
&\quad\times\prod_{b=(\lambda_i)_1+1}^{m}(1-q^{-l_{\lambda_i(1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(1,b)-1}w_{i,j}})
\end{aligned}
$$

$$\times \prod_{a=1}^{L_i-1}\left(\prod_{b=(\lambda_i)_{a+1}+1}^{(\lambda_i)_a}(1-q^{-l_{\lambda_i}(a+1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a+1,b)-1}w_{i,j})\right)$$

$$\times \prod_{b=1}^{(\lambda_i)_{L_i}}(1-q^{-l_{\lambda_i}(L_i+1,b)-a_{r_l(\nu_j)}(L_i+1,b)-1}w_{i,j})\prod_{b=2}^{(\nu_j)_1}(1-q^{m-b+2+l_{r_l(\nu_j)}(1,b)}w_{i,j})$$

$$\times (1-q^{(\lambda_i)_l}w_{i,j})\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(m,\lambda_i)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}w_{i,j})$$

$$\times \prod_{a=1}^{A_j-1}\left(\prod_{b=(\nu_j)_{a+1}+1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{\lambda_i}(a+1,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a+1,b)+1}w_{i,j})\right)^{-1}$$

$$\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{i,j})^{-1}\prod_{b=1}^{(\nu_j)_{A_j}}(1-q^{a_{\lambda_i}(A_j,b)+l_{r_l(\nu_j)}(A_j,b)+1}w_{i,j})^{-1}$$

として定めればよい. 予想 6.11 の q 差分作用素はこのように計算して見つけている.

予想 6.12 について, $j\neq i$ のとき, パラメータ $\sigma^{(2)},\theta_2$ は, $\sigma^{(2)}=\sigma^{(1)}-h_j,\theta_2=1/(n+1)$ として特殊化されているから, 比較する級数は

$$\begin{aligned}
(6.9)\qquad & S_{\lambda,\nu}(\sigma,\theta,x)\\
&=K_{i,j}^{\lambda,\nu}\sum_{l=0}^{\infty}x^{l+|\nu|}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{\lambda_k,r_l(\nu_j)}(w_{k,j})}{N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1)N_{r_l(\nu_j),\nu_i}(u_{j,i})N_{\nu_i,r_l(\nu_j)}(u_{i,j})}\\
&\quad\times\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(z_{j,k'})N_{r_l(\nu_j),\nu_j}(z_{j,j})N_{r_l(\nu_j),\nu_i}(z_{j,i})}{\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(u_{j,k})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,r_l(\nu_j)}(u_{k,j})},\\
(6.10)\qquad & S_{\lambda,\nu^{(m)}}(\sigma,\theta,x)\\
&=K_{i,j}^{\lambda^{(m)},\nu}\sum_{l=0}^{\infty}x^{l+|\nu|+m}\frac{\prod_{k=1,k}^{n+1}N_{\lambda_k,r_l(\nu_j)}(\tilde{w}_{k,j})}{N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1)N_{r_l(\nu_j),(\nu_i+1^m)}(\tilde{u}_{j,i})N_{(\nu_i+1^m),r_l(\nu_j)}(\tilde{u}_{i,j})}\\
&\quad\times\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(\tilde{z}_{j,k'})N_{r_l(\nu_j),\nu_j}(\tilde{z}_{j,j})N_{r_l(\nu_j),(\nu_i+1^m)}(\tilde{z}_{j,i})}{\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(\tilde{u}_{j,k})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,r_l(\nu_j)}(\tilde{u}_{k,j})}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $K_{i,j}^{\lambda,\nu},K_{i,j}^{\lambda,\nu^{(m)}}$ はともに, l に無関係な定数であり,

$$\begin{aligned}
K_{i,j}^{\lambda,\nu}&=\frac{\prod_{k,k'=1,k'\neq i,j}^{n+1}N_{\lambda_k,\nu_{k'}}(w_{k,k'})\prod_{k=1}^{n+1}N_{\lambda_k,\nu_i}(w_{k,i})\prod_{k,k'=1,k'\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_{k'}(z_{k,k'})}N_{\nu_i,\nu_i}(z_{i,i})}{\prod_{k,k'=1,k,k'\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_{k'}}(u_{k,k'})}\\
&\quad\times\frac{\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_j}(z_{k,j})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_i}(z_{k,i})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_i,\nu_k}(z_{i,k})N_{\nu_i,\nu_j}(z_{i,j})}{\prod_{k=1,k,\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_i}(u_{k,i})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_i,\nu_k}(u_{i,k})N_{\nu_i,\nu_i}(1)},\\
K_{i,j}^{\lambda,\nu^{(m)}}&=\frac{\prod_{k,k'=1,k'\neq i,j}^{n+1}N_{\lambda_k,\nu_{k'}}(\tilde{w}_{k,k'})\prod_{k=1}^{n+1}N_{\lambda_k,(\nu_i+1^m)}(\tilde{w}_{k,i})\prod_{k,k'=1,k'\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_{k'}(\tilde{z}_{k,k'})}}{\prod_{k,k'=1,k,k'\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_{k'}}(\tilde{u}_{k,k'})}\\
&\quad\times\frac{\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,\nu_j}(\tilde{z}_{k,j})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,(\nu_i+1^m)}(\tilde{z}_{k,i})\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}N_{(\nu_i+1^m),\nu_k}(\tilde{z}_{i,k})}{\prod_{k=1,k,\neq i,j}^{n+1}N_{\nu_k,(\nu_i+1^m)}(\tilde{u}_{k,i})}
\end{aligned}$$

$$\times \frac{N_{(\nu_i+1^m),\nu_j}(\tilde{z}_{i,j})N_{(\nu_i+1^m),(\nu_i+1^m)}(\tilde{z}_{i,i})}{\prod_{k=1,k\neq i,j}^{n+1} N_{(\nu_i+1^m),\nu_k}(\tilde{u}_{i,k})N_{(\nu_i+1^m),(\nu_i+1^m)}(1)}$$

である．いま,

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{k,k'} &= w_{k,k'}\ (k\neq i\text{ かつ }k'\neq j),\\ \tilde{z}_{k,k'} &= z_{k,k'}\ (k\neq j\text{ かつ }k'\neq i),\\ \tilde{u}_{k,k'} &= u_{k,k'}\ (k\neq j\text{ かつ }k'\neq i)\end{aligned}$$

ととる．ここで, パラメータの特殊化 $\sigma^{(2)}=\sigma^{(1)}-h_j, \theta_2=1/(n+1)$ により, $z_{j,i}=u_{j,i}$ が成り立つから, (6.9), (6.10) で比較する項は (6.9) の $N_{\nu_i,r_l(\nu_j)}(u_{i,j})$ と (6.10) の $N_{(\nu_i+1^m),r_l(\nu_j)}(\tilde{z}_{i,j})$ のみである．

ここで, $\tilde{u}_{i,j}=q^{-1}u_{i,j}$ とおくと,

$$\begin{aligned}&N_{\nu_i,r_l(\nu_j)}(u_{i,j})\\ &=\prod_{a=1}^{A_i}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_i)_a}(1-q^{-l_{\nu_i}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-1}u_{i,j})\right)\\ &\quad\times\prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a,b)+1}u_{i,j})\right)\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\nu_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu)_a+1)+1}u_{i,j})\\ &N_{(\nu_i+1^m),r_l(\nu_j)}(\tilde{u}_{i,j}),\\ &=\prod_{a=1}^{m}(1-q^{-(m-a)-a_{r_l(\nu_j)}(a,1)-2}u_{i,j})\prod_{a=1}^{A_i}\left(\prod_{b=2}^{(\nu_i)_a+1}(1-q^{-l_{(\nu_i+1^m)}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-2}u_{i,j})\right)\\ &\quad\times\prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a,b)}u_{i,j})\right)\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu)_a+1)}u_{i,j})\end{aligned}$$

となる．この式は $l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ がどんな値であっても成り立つ．いま, $l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が $l\geq\max\{m,A\}$ を満たすとき, 比 $N_{(\nu_i+1^m),r_l(\nu_j)}(\tilde{u}_{i,j})/N_{\nu_i,r_l(\nu_j)}(u_{i,j})$ の因子で l に依るのは,

$$\begin{aligned}&\text{分子の}\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j}+1)\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}u_{i,j}),\\ &\text{分母の}\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j})\end{aligned}$$

のみである．ここで,

$$a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)=\begin{cases}a_{\nu_i}(a,1)+1 & (a\leq m),\\ -1 & (m+1\leq a)\end{cases}$$

となるから,

$$\frac{\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j})}{\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}u_{i,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}u_{i,j})}$$

$$= \frac{\prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j})\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)}u_{i,j})}{\prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}u_{i,j})\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1}u_{i,j})}$$
$$= \frac{\prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+1+(l-a)}u_{i,j})\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{(-1)+(l-a)}u_{i,j})}{\prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{\nu_i}(a,1)+(l-a)+1}u_{i,j})\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{(-1)+(l-a)+1}u_{i,j})}$$
$$= \frac{1}{1-q^{-1}u_{i,j}}(1-q^{l-m-1}u_{i,j})$$

をえる. このことから, q 差分作用素 $R_{j,j}^{\nu_i\to(\nu_i+1^m)}$ を,

$$R_{i,j}^{\nu_i\to(\nu_i+1^m)} = C_{j,j}^{\nu_i\to(\nu_i+1^m)}(1-q^{-m-1}u_{i,j}T_2),$$
$$C_{i,j}^{\nu_i\to(\nu_i+1^m)}$$
$$= \frac{K_{i,j}^{\lambda,\nu^{(m)}}}{K_{i,j}^{\lambda,\nu}}$$
$$\times \prod_{a=1}^{m}(1-q^{-(m-a)-a_{r_l(\nu_j)}(a,1)-2}u_{i,j})\prod_{a=1}^{A_i}\left(\prod_{b=2}^{(\nu_i)_a+1}(1-q^{-l_{(\nu_i+1^m)}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-2}u_{i,j})\right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a,b)}u_{i,j})\right)\prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu)_a+1)}u_{i,j})$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_i}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_i)_a}(1-q^{-l_{\nu_i}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-1}u_{i,j})\right)^{-1}$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{(\nu_i+1^m)}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a,b)+1}u_{i,j})\right)^{-1}$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\nu_i}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu)_a+1)+1}u_{i,j})^{-1}\left(\frac{q^{2\theta_2}x_2}{x_3}\right)^m$$

として定めればよい. $j \neq i$ のとき, 予想 6.12 の q 差分作用素はこのように計算して見つけている.

また, $j = i$ のとき, パラメータ $\sigma^{(2)}, \theta_2$ は, $\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)} - h_j, \theta_2 = 1/(n+1)$ として特殊化されているから, 比較する級数は

$$(6.11)\qquad S_{\lambda,\nu}(\sigma,\theta,x) = K_{j,j}^{\lambda,\nu}\sum_{l=0}^{\infty}x^{l+|\nu|}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{\lambda_k,r_l(\nu_j)}(w_{k,j})}{N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1)}$$
$$\times \frac{\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(z_{j,k'})N_{r_l(\nu_j),\nu_j}(z_{j,j})}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{r_l(\nu_j),\nu_k}(u_{j,k})\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{\nu_k,r_l(\nu_j)}(u_{k,j})},$$
$$(6.12)\qquad S_{\lambda,\nu^{(m)}}(\sigma,\theta,x) = K_{j,j}^{\lambda,\nu^{(m)}}\sum_{l=0}^{\infty}x^{l+|\nu|+m}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}N_{\lambda_k,r_l(\nu_j+1^m)}(\tilde{w}_{k,j})}{N_{r_l(\nu_j+1^m),r_l(\nu_j+1^m)}(1)}$$
$$\times \frac{\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{r_l(\nu_j+1^m),\nu_k}(\tilde{z}_{j,k'})N_{r_l(\nu_j+1^m),\nu_j}(\tilde{z}_{j,j})}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{r_l(\nu_j+1^m),\nu_k}(\tilde{u}_{j,k})\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}N_{\nu_k,r_l(\nu_j+1^m)}(\tilde{u}_{k,j})},$$

となる. ここで, $K_{j,j}^{\lambda,\nu}, K_{j,j}^{\lambda,\nu^{(m)}}$ はともに, l に無関係な定数であり,

$$K_{j,j}^{\lambda,\nu} = \frac{\prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\lambda_k,\nu_{k'}}(w_{k,k'}) \prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}(z_{k,k'})} \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_j}(z_{k,j})}{\prod_{k,k'=1,k,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}}(u_{k,k'})},$$

$$K_{j,j}^{\lambda,\nu^{(m)}} = \frac{\prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\lambda_k,\nu_{k'}}(\tilde{w}_{k,k'}) \prod_{k,k'=1,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}(\tilde{z}_{k,k'})} \prod_{k=1,k\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,(\nu_j+1^m)}(\tilde{z}_{k,j})}{\prod_{k,k'=1,k,k'\neq j}^{n+1} N_{\nu_k,\nu_{k'}}(\tilde{u}_{k,k'})}$$

である. いま,

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{k,j} &= q w_{k,j}, \\
\tilde{z}_{j,k} &= q^{-1} z_{j,k} \ (k \neq j), \\
\tilde{z}_{j,j} &= z_{j,j}, \\
\tilde{u}_{j,k} &= q^{-1} u_{j,k} \ (k \neq j)
\end{aligned}$$

ととる. ここで, パラメータの特殊化 $\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)} - h_j, \theta_2 = 1/(n+1)$ により, $z_{j,i} = u_{j,i}$ が成り立つ. いま , (6.11), (6.12) で比較する因子は次の 4 つである.

$$\begin{aligned}
&(1)\ \frac{N_{\lambda_k,r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(\tilde{w}_{k,j})}{N_{\lambda_k,r_l(\nu_j)}(w_{k,j})} \ (1 \leq k \leq n+1), \\
&(2)\ \frac{N_{r_{l-1}(\nu_j+1^m),(\nu_j+1^m)}(z_{j,j})}{N_{r_l(\nu_j),\nu_j}(z_{j,j})}, \\
&(3)\ \frac{N_{r_{l-1}(\nu_j+1^m),r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(1)}{N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1)}, \\
&(4)\ \frac{N_{\nu_k,r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(\tilde{u}_{k,j})}{N_{\nu_k,r_l(\nu_j)}(u_{k,j})} \ (1 \leq k \leq n+1, k \neq j).
\end{aligned}$$

ここで, 比較する因子は, 分母の l に対して, 分子は $l-1$ で比較していることに注意する. まず, (1) に関して,

$$\begin{aligned}
&N_{\lambda_k,r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(\tilde{w}_{k,j}) \\
&= \prod_{a=1}^{L_k} \left(\prod_{b=1}^{(\lambda_k)_a} (1 - q^{-l_{\lambda_k}(a,b) - a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b)} w_{k,j}) \right) \\
&\quad \times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{\lambda_k}(a,b) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b)+2} w_{k,j}) \right) \\
&\quad \times \prod_{a=1}^{m} (1 - q^{a_{\lambda_k}(a,(\nu_j)_a+1) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+2} w_{k,j}) \\
&\quad \times \prod_{a=1}^{l-1} (1 - q^{a_{\lambda_k}(a,(\nu_j+1^m)_a+1) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1)+2} w_{k,j}), \\
&N_{\lambda_k,r_l(\nu_j)}(w_{k,j})
\end{aligned}$$

$$= \prod_{a=1}^{L_k} \left(\prod_{b=1}^{(\lambda_k)_a} (1 - q^{-l_{\lambda_k}(a,b) - a_{r_l(\nu_j)}(a,b) - 1} w_{k,j}) \right) \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{\lambda_k}(a,b) + l_{r_l(\nu_j)}(a,b) + 1} w_{k,j}) \right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{l} (1 - q^{a_{\lambda_k}(a,(\nu_j)_a+1) + l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) + 1} w_{k,j})$$

がすべての l に対して成り立つ. 同様に (2), ..., (4) の分子, 分母をそれぞれ計算すると以下のようになる.

$$N_{r_{l-1}(\nu_j+1^m),(\nu_j+1^m)}(\tilde{z}_{j,j})$$
$$= \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) - a_{(\nu_j+1^m)}(a,b) - 2}) \right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{m} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) - a_{(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) - 2})$$
$$\times \prod_{a=1}^{l-1} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1) - a_{(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1) - 2})$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) + l_{(\nu_j+1^m)}(a,b)}) \right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{m} (1 - q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) + l_{(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)}),$$

$$N_{r_l(\nu_j),\nu_j}(z_{j,j})$$
$$= \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,b) - a_{(\nu_j)}(a,b) - 2}) \right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{l} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) - a_{\nu_j}(a,(\nu_j)_a+1) - 2}) \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,b) + l_{\nu_j}(a,b)}) \right),$$

$$N_{r_{l-1}(\nu_j+1^m),r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(1)$$
$$= \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) - a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) - 1}) \right)$$
$$\times \prod_{a=1}^{m} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) - a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) - 1})$$
$$\times \prod_{a=1}^{l-1} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1) - a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1) - 1})$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) + 1}) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\times \prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}) \\
&\times \prod_{a=1}^{l-1}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1)+1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N_{r_l(\nu_j),r_l(\nu_j)}(1) \\
&=\prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-1})\right) \\
&\times \prod_{a=1}^{l}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)-a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)-1}) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a,b)+1})\right) \\
&\times \prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N_{\nu_k,r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(\tilde{u}_{k,j}) \\
&=\prod_{a=1}^{A_k}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_k)_a}(1-q^{-l_{\nu_k}(a,b)-a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b)}u_{k,j})\right) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{\nu_k}(a,b)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b)+2}u_{k,j})\right) \\
&\times \prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{\nu_k}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+2}u_{k,j}) \\
&\times \prod_{a=1}^{l-1}(1-q^{a_{\nu_k}(a,(\nu_j+1^m)_a+1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j+1^m)_a+1)+2}u_{k,j}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N_{\nu_k,r_l(\nu_j)}(u_{k,j}) \\
&=\prod_{a=1}^{A_k}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_k)_a}(1-q^{-l_{\nu_k}(a,b)-a_{r_l(\nu_j)}(a,b)-1}u_{k,j})\right)\prod_{a=1}^{A_j}\left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a}(1-q^{a_{\nu_k}(a,b)+l_{r_l(\nu_j)}(a,b)+1}u_{k,j})\right) \\
&\times \prod_{a=1}^{l}(1-q^{a_{\nu_k}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}u_{k,j}).
\end{aligned}
$$

(1), . . . , (4) の式は l がどのような値であっても成り立つ. ここで, $l \geq m+1$ のとき, (1), . . . , (4) の式で l に依る箇所を調べる. (1) では

分子は

$$
\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+2}w_{k,j})
$$

$$\times \prod_{a=A_j+1}^{m}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+2}u_{k,j})\prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+2}u_{k,j}),$$

分母は

$$\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+2}w_{k,j})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+2}u_{k,j})$$

である．これらの比を考えると，その値は 1 になる．(4) についても同様に考えられる．一方 (2) では，

分子は

$$\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{(\nu_j+1^m)}(a,1)-2})$$
$$\times \prod_{a=A_j+1}^{m}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{(\nu_j+1^m)}(a,1)-2})\prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{(\nu_j+1^m)}(a,1)-2}),$$

分母は

$$\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{\nu_j}(a,1)-2})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{\nu_j}(a,1)-2})$$

が l に依る箇所となるが，

$$\begin{aligned} l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1) &= l-a-1,\\ l_{r_l(\nu_j)}(a,1) &= l-a,\\ a_{(\nu_j+1^m)}(a,1) &= \begin{cases} a_{\nu_j}(a,1)+1 & (1\le a\le A_j),\\ 0 & (A_j+1\le a\le m),\\ -1 & (m+1\le a\le l-1),\end{cases}\\ a_{(\nu_j)}(a,1) &= -1\ (A_j+1\le a\le l)\end{aligned}$$

であるから，$1\le a\le m$ では分子と分母で l に依る因子はすべて約分する．また，

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{(\nu_j+1^m)}(a,1)-2})}{\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{\nu_j}(a,1)-2})} &= \frac{\prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{-(l-a-1)-(-1)-2})}{\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{-(l-a)-(-1)-2})}\\ &= \frac{1}{1-q^{-l+m}}\end{aligned}$$

となる．最後に (3) では

分子は

$$\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-1})\prod_{a=A_j+1}^{m}(1-q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-1})$$
$$\times \prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-1})$$

$$\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+1})$$
$$\times \prod_{a=A_j+1}^{m}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+1})$$
$$\times \prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+1}),$$

分母は

$$\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{r_l(\nu_j)}(a,1)-1})\prod_{a=A_j+1}^{l-1}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{r_l(\nu_j)}(a,1)-1})$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1})\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,1)+1})$$

が l に依る箇所となるが, (2) と同じく, $1 \leq a \leq m$ では分子と分母で l に依る因子はすべて約分する. また.

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)-1})}{\prod_{a=A_j+1}^{l-1}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{r_l(\nu_j)}(a,1)-1})} &= \frac{\prod_{a=m+1}^{l-1}(1-q^{-(l-a-1)-(-1)-1})}{\prod_{a=A_j+1}^{l-1}(1-q^{-(l-a)-(-1)-1})} \\
&= \frac{1}{1-q^{-l+m}}, \\
\frac{\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,1)+1})}{\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,1)-a_{r_l(\nu_j)}(a,1)-1})} &= \frac{\prod_{a=m+1}^{l}(1-q^{(-1)+(l-a-1)+1})}{\prod_{a=A_j+1}^{l}(1-q^{(l-a)+(-1)+1})} \\
&= \frac{1}{1-q^{l-m}}
\end{aligned}$$

となる. 以上のことから, q 差分作用素 $R_{j,j}^{\nu_j\to(\nu_j+1^m)}$ を

$$R_{j,j}^{\nu_j\to(\nu_j+1^m)} = C_{j,j}^{\nu_j\to(\nu_j+1^m)}(1-q^{-m}T_2),$$
$$C_{j,j}^{\nu_j\to(\nu_j+1^m)}$$
$$= \frac{K_{i,j}^{\lambda,\nu^{(m)}}}{K_{i,j}^{\lambda,\nu}}$$
$$\times \prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,(\nu_j)_a)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a)+1}w_{k,j})\prod_{a=A_j+1}^{m}(1-q^{a_{\lambda_k}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)+1}w_{k,j})$$
$$\times \prod_{a=A_j+1}^{m}(1-q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1)-a_{\nu_j}(a,(\nu_j)_a+1)-2})\prod_{a=1}^{A_j}(1-q^{(\nu_j)_a+m-a})$$
$$\times \prod_{a=1}^{m}(1-q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)+l_{(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1)})$$

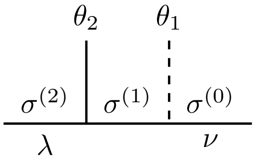
$$
\begin{aligned}
&\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=1}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) - a_{(\nu_j+1^m)}(a,b) - 2}) \right) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) - a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) - 1}) \right) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)} (1 - q^{a_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) + 1}) \right) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) - a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) - 1}) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) + l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) + 1}) \\
&\times \prod_{a=A_j+1}^{m} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) - a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) - 1}) \\
&\times \prod_{a=A_j+1}^{m} (1 - q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) + l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) + 1}) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{\nu_k}(a,b) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,b) + 2} u_{k,j}) \right) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{a_{\nu_k}(a,(\nu_j)_a+1) + l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) + 2} u_{k,j}) \\
&\times \prod_{a=A_j+1}^{m} (1 - q^{a_{\nu_k}(a,(\nu_j)_a+1) + l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a+1) + 1} u_{k,j}) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{-l_{r_{l-1}(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) - a_{(\nu_j+1^m)}(a,(\nu_j)_a+1) - 2}) \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) + l_{\nu_j}(a,(\nu_j)_a)})^{-1} \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) - a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) - 2})^{-1} \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} (1 - q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) + l_{r_l(\nu_j)}(a,(\nu_j)_a) + 2})^{-1} \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,b) - a_{\nu_j}(a,b) - 2}) \right)^{-1} \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{-l_{r_l(\nu_j)}(a,b) - a_{r_l(\nu_j)}(a,b) - 1}) \right)^{-1} \\
&\times \prod_{a=1}^{A_j} \left(\prod_{b=2}^{(\nu_j)_a} (1 - q^{a_{r_l(\nu_j)}(a,b) + l_{r_l(\nu_j)}(a,b) + 1}) \right)^{-1} \left(\frac{q^{2\theta_2} x_2}{x_3} \right)^{m-1}
\end{aligned}
$$

と定めればよいことがわかる. 以上の議論は, l が大きいとき ($l \geq \max\{A_j, m\} + 1$ のとき) に関

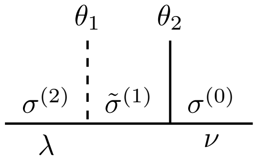
しての議論である. q 差分作用素を構成するためには, l が小さいときにも議論をしなければならないが, 残念ながら本論文ではそこまで議論することができなかった.

6.3 今後の課題と展望

予想 6.11, 予想 6.12 の写像について, l が小さいときもちゃんと成り立つことを確認して, この写像が構成できたとする. 構成した写像 $L_{i,j}, R_{i,j}$ を用いて共形ブロックの接続問題を解決することができると考えられる. 目標とする等式は以下のものである.



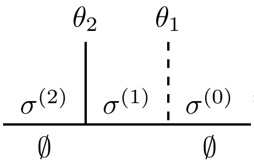
$= \sum_{k=1}^{n+1}$



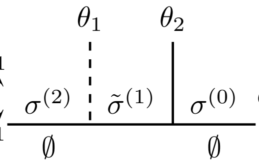
$C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$ $(C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$: 定数.)

その方針を以下に示す. まず, 定理 6.2, 定理 6.6 より, 両側のヤング図形が空集合 $\emptyset$ の場合には, パラメータ σ, θ を特殊化することによって, 共形ブロックは ${}_{n+1}E_n$ と同値な方程式の $z = 0, \infty$ まわりの解の基本系を与える. 従って, 一般化超幾何関数の $z = 0, \infty$ の接続問題から,

(6.13)



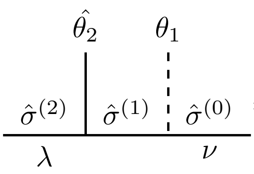
$= \sum_{k=1}^{n+1}$



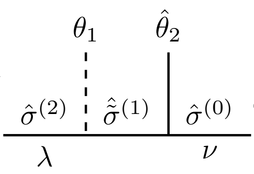
$C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$ $(C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$: 定数.)

を得る. (6.13) の両辺に, 予想 6.11 で得られた昇作用素 $L_{i,j}$ を n_1 回, 予想 6.12 で得られた昇作用素 $R_{i,j}$ を n_2 回作用させると,

(6.14)



$= \sum_{k=1}^{n+1}$



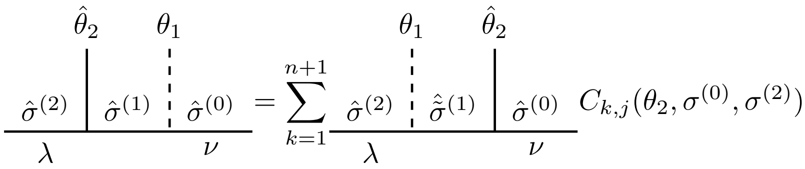
$C_{k,j}(\hat{\theta}_2, \hat{\sigma}^{(0)}, \hat{\sigma}^{(2)})$

を得る. ここで,

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_2 &= \theta_2 - \frac{1}{n+1}, \\
\hat{\sigma}^{(0)} &= \sigma^{(0)} - (n_1 + n_2)h_j, \\
\hat{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} - (n_1 + n_2)h_j, \\
\hat{\tilde{\sigma}}^{(1)} &= \tilde{\sigma}^{(1)} - (n_1 + n_2)h_j, \\
\hat{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)}
\end{aligned}
$$

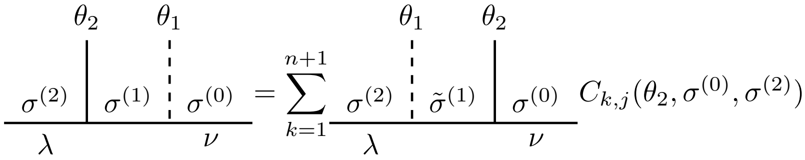
である．このとき, 接続係数 $C_{k,j}(\hat{\theta}_2, \hat{\sigma}^{(0)}, \hat{\sigma}^{(2)})$ はもとの接続係数 $C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$ とは異なるものになっていることに注意する．しかし, 定理 5.1 から, (6.14) の両辺に適切なスカラーを乗じることで, $C_{k,j}$ を $\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)}$ に関して周期的にすることができる．すなわち, $C_{k,j}(\hat{\theta}_2, \hat{\sigma}^{(0)}, \hat{\sigma}^{(2)}) = C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$ を満たすようにすることができる．従って (6.14) は,

(6.15)



となる．(6.15) において, パラメータ $\hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\tilde{\sigma}}^{(1)}, \hat{\theta}_2$ を改めて $\sigma^{(k)}, \tilde{\sigma}^{(1)}, \theta_2$ として取り直すと,

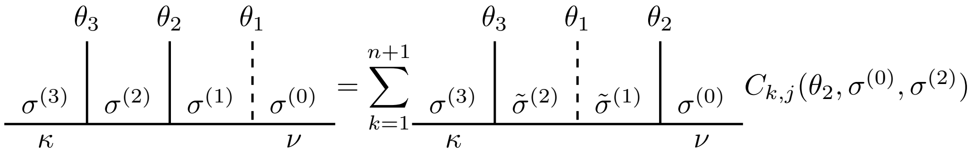
(6.16)



を得る．また, 一般の m 点共形ブロックの接続問題に関しては, (6.16) から導かれる．実際, (6.16) の両辺に

$$\frac{\prod_{k,k'=1}^{n} N_{\kappa_k,\lambda_{k'}}(q^{\sigma_k^{(3)}-\theta_3-\sigma_{k'}^{(2)}})}{\prod_{k,k'=1}^{n} N_{\lambda_k,\lambda_{k'}}(q^{\sigma_k^{(2)}-\sigma_{k'}^{(2)}})} \left(\frac{q^{2\theta_2}x_2}{x_3}\right)^{|\lambda|}$$

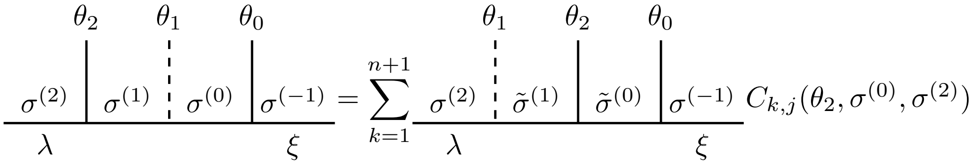
を乗じたのち, 両辺ですべての $\lambda \in \mathbb{Y}^{n+1}$ に関して和をとれば,



が成り立つ．このとき, $C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$ は λ に無関係なスカラーであることに注意する．また, (6.16) の両辺に

$$\frac{\prod_{k,k'=1}^{n} N_{\nu_k,\xi_{k'}}(q^{\sigma_k^{(0)}-\theta_0-\sigma_{k'}^{(-1)}})}{\prod_{k,k'=1}^{n} N_{\lambda_k,\lambda_{k'}}(q^{\sigma_k^{(0)}-\sigma_{k'}^{(0)}})} \left(\frac{q^{2\theta_0}x_0}{x_1}\right)^{|\nu|}$$

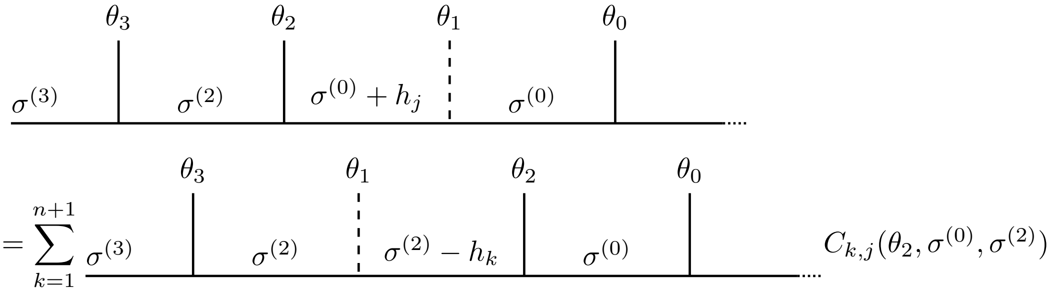
を乗じたのち, 両辺ですべての $\nu \in \mathbb{Y}^{n+1}$ に関して和をとれば,



が成り立つ. このとき, $C_{k,j}(\theta_2, \sigma^{(0)}, \sigma^{(2)})$ は ν に無関係なスカラーであることに注意する.

この操作を繰り返すことで, 一般の場合の m 点共形ブロックの接続問題

(6.17)



が解かれる.

いま, $\mathbb{C}P^1$ 上に 4 点 $0, t, 1, \infty$ を確定特異点に持つ Fuchs 型微分方程式で, $z = 0, \infty$ での固有値型が (1^{n+1}), $z = 1, t$ での固有値型が $(n1)$ であるようなものを考える. 上の関係式 (6.17) を用いて, この Fuchs 型微分方程式のモノドロミー不変な解を構成することができる.

謝辞

本論文の作成に当たって, 私の指導教官である名古屋創先生には, 3 年間にわたる熱心なご指導と数多くの助言をいただきました. 在学中, 先生には御多忙の中, 本論文の執筆にあたって細部まで丁寧にご指導をいただき, 根気強く指導していただきました. 深く感謝いたします. また, 私が修士の 2 年間の大学院生活を楽しく送ることができたのは, 大学院 2 年生の同期のみなさんをはじめとして, 大学院 1 年生の後輩のみなさん, ならびに講義を通して知り合った数学コース, 計算数理コースの 4 年生, 3 年生のみなさんのおかげだと思っています. 私の 2 年間の大学院での生活を振り返ると, みなさんと出会ったことで色鮮やかなものになり, 大変充実した毎日を送ることができたと思います. ここではお一人お一人の名前を挙げることはできませんが, 心より感謝いたします.

参考文献

[AGT] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, arXiv:0906.3219 [hep-th]

[GIL] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Higher rank isomonodromic deformations and W-algebras*, arXiv:1801.09608 [math-ph]

[HM] Y. Haraoka, K. Mimachi, *A connection ploblem for Simpson's even family of rank four.* Funkcial. Ekvac., 54 (2011), 495–515.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé -A Modern Theory of Special Functions.*, Aspects of Mathematics.

[JNS] M. Jimbo, H. Nagoya, H. Sakai, *CFT approach to the q-Painlevé VI equation*, J. Int. Systems 2, (2017), xyx009; arXiv:1706.01940 [math-ph]

[K1] Y. Kawabata, *Connection problems associated with the Fuchsian differential equation of rank n with three regular singularities (in Japanese).* Proceedings of Tsuda College 8 (1976), 69–75.

[K2] Y. Kawabata, *Connection problems associated with the Fuchsian differential equation of rank n with three regular singularities , II (in Japanese).* Proceedings of Tsuda College 10 (1976), 45–55.

[FL] G. Felder, M. M. Lennert , *Analyticity of Nekrasov Partition Functions and Deformed Gaiotto States*, arXiv:1709.05232[math-ph]

[M1] K. Mimachi, *Connection Matrices Associated with the Generalized Hypergeometric Function* ${}_3F_2$, Funkcialaj Ekvacioj 51 (2008), 107–133

[M2] K. Mimachi, *Intersection Numbers for Twisted Cycles and the Connection Problem Associated with the Generalized Hypergeometric Function* ${}_{n+1}F_n$, International Mathematics Research Notices, Vol.2011, No.8, 1757–1781

[N] Norlund, N. E., *Hypergeometric functions*, Acta Math., 94 (1955), 289–349.

[Os] T. Oshima, *Classification of Fuchsian systems and their connection ploblem.*, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, B37 (2013), 163–192

[OTY] K. Okubo, K. Takano, S. Yoshida, *A connection problem for the generalized hypergeometric equation.* Funkcialaj Ekvacioj 31 (1988), 483–495.

[S] Smith, F. C., *Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when* $p = q + 1$. *Non-logarithmic cases.* Bulletin of the American Mathematical Society 44 (1938), 429–433

[犬井] 犬井 鉄郎, 特殊関数, 岩波書店.

[高野] 高野 恭一, 常微分方程式, 朝倉書店.

[原岡 1] 原岡 喜重, 超幾何関数, 朝倉書店.

[原岡 2]　原岡 喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房叢書.