

平成30年度 修士論文

Zener 粘弾性モデルのエネルギー勾配流構造  
と有限要素解析

Energy gradient flow structure of the Zener viscoelastic  
model and its finite element analysis

金沢大学大学院 自然科学研究科 博士前期課程  
数物科学専攻 計算科学コース  
現象数理解析研究室  
学籍番号 1715011050

山本 大輝

主任指導教員 木村正人 教授

平成31年1月31日

# 目次

|          |                               |           |
|----------|-------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>はじめに</b>                   | <b>2</b>  |
| 1.1      | 粘弾性体とその数理モデルについて              | 2         |
| 1.2      | 研究の目的                         | 2         |
| 1.3      | 本論文の構成                        | 3         |
| <b>2</b> | <b>Zener 粘弾性モデル</b>           | <b>3</b>  |
| 2.1      | 記号の定義                         | 3         |
| 2.2      | モデルの導出                        | 3         |
| 2.3      | Zener 粘弾性モデルとその弱形式            | 6         |
| 2.3.1    | 強形式                           | 6         |
| 2.3.2    | 弱形式                           | 7         |
| <b>3</b> | <b>エネルギー勾配流構造</b>             | <b>9</b>  |
| 3.1      | エネルギー散逸等式                     | 10        |
| 3.2      | エネルギー勾配流構造                    | 11        |
| <b>4</b> | <b>時間半離散化</b>                 | <b>14</b> |
| 4.1      | 時間半離散化された Zener モデルとその弱形式     | 14        |
| 4.2      | 解の存在と一意性                      | 15        |
| 4.3      | 時間半離散化モデルにおけるエネルギー勾配流構造及び散逸等式 | 16        |
| <b>5</b> | <b>有限要素解析</b>                 | <b>18</b> |
| 5.1      | P1/P0 有限要素スキーム                | 18        |
| 5.2      | 数値計算アルゴリズム                    | 19        |
| <b>6</b> | <b>数値計算結果</b>                 | <b>21</b> |
| 6.1      | 例 1                           | 21        |
| 6.2      | 例 2                           | 23        |
| <b>7</b> | <b>まとめと今後の課題</b>              | <b>25</b> |
|          | 謝辞                            | 25        |
| <b>A</b> | <b>ソースコード</b>                 | <b>27</b> |

# 1 はじめに

## 1.1 粘弾性体とその数理モデルについて

粘弾性体とは、粘性と弾性の両方の性質を併せ持つ物体である。ゴムのような高分子材料をはじめ、生物の筋繊維など、粘弾性挙動を示す物質は数多く存在する。

粘弾性挙動の代表的なものとして、応力緩和とクリープがある。応力緩和とは、物体に対して一定の歪みを与えると時間経過により物体の応力が低下する現象のことである。クリープとは、物体に対して一定の応力を与えると、時間経過により歪みが増加していく現象のことである。

粘弾性挙動を表すためには、弾性要素と粘性要素から構成される数理モデルを考える必要がある。このモデルを総称して粘弾性モデルと呼ぶ。このモデルを考える際、バネを弾性要素、ダッシュポットを粘性要素として扱うことがほとんどである。粘弾性モデルの例として、バネとダッシュポットを直列につないだものは Maxwell モデル (図 1)、バネとダッシュポットを並列につないだものは Kelvin-Voigt モデル (図 2) と一般的に呼ばれている。Maxwell モデルは応力緩和を表すことに適したモデルである。また、Kelvin-Voigt モデルはクリープを表すことに適したモデルである。

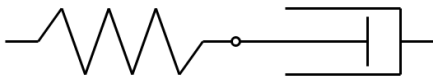


図 1: Maxwell モデルの概念図

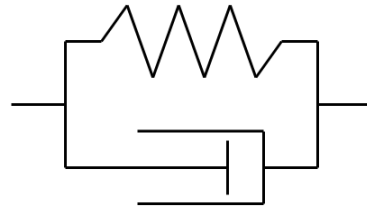


図 2: Kelvin-Voigt モデルの概念図

## 1.2 研究の目的

本研究では Zener 粘弾性モデルのエネルギー勾配流構造の解明、その有限要素スキームの提案及び数値解析を行う。Zener 粘弾性モデルとは、一般的に Maxwell モデルとバネを並列に二つ繋いだモデルで、SLS モデルとも呼ばれる。本論文では Maxwell モデルを並列に複数個つないだものを Zener モデルと呼ぶことにする (図 3)。[3] や [5] 等、粘弾性モデルについての論文が数多くあるが、エネルギー勾配流構造に焦点を当てた議論がなされたものはほとんどない。この構造は安定した数値計算スキームを構成することに必要不可欠であることから本研究に至った。

以前私が出した論文 [12] では Maxwell モデルに対する勾配流構造の解明を行った。今回 Zener モデルを対象とした理由は、より一般的なモデルを対象とすることで、今後様々な粘弾性モデルに議論を発展させていくことができると判断したからである。また、このモデルを構成する際に弾性テンソルや粘性効果を表す変数等を複数個用意する必要があるため、このモデルは実在する材料のような複雑な構造を持つ物体の動きを考慮するのに適していると考えている。

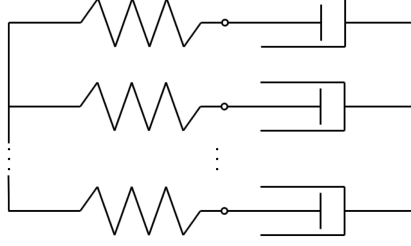


図 3: Zener モデルの概念図

### 1.3 本論文の構成

本論文は次のように構成される。第 2 節では拡張された Zener 粘弾性モデルの導出から支配方程式及びその弱形式を構成する。第 3 節ではこの数値モデルにおける内部エネルギーの定義を行い、主定理であるエネルギー勾配流構造及び、エネルギー散逸等式に関する定理の証明を行う。第 4 節では支配方程式の離散問題を定義し、そのモデルの解の存在と一意性の証明を行う。また、第 3 節と同様にエネルギー構造の議論を行う。第 5 節では、これらのエネルギー構造を持つ安定した有限要素スキームの提案、計算アルゴリズムの紹介を行う。第 6 節で有限要素法を用いた数値計算結果を紹介する。

## 2 Zener 粘弾性モデル

### 2.1 記号の定義

本節で本論文で用いる関数空間及び記号を定める。 $d = 2, 3$  を次元とし、 $\mathbb{R}^{d \times d}$  を  $d \times d$  次元実行列空間、 $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$  を  $d \times d$  次元実行列空間とする。以下、 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  を有界なリプシッツ領域とする。

$R \in \{\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}\}$  に対して、 $\Omega$  上で定義される  $R$  値の関数空間を  $L^2(\Omega; R)$ ,  $H^1(\Omega; R)$ ,  $C(\bar{\Omega}; R)$  のように定義する。なお、 $L^2(\Omega; R)$  は  $L^2$  空間、 $H^1(\Omega; R)$  は Sobolev 空間、 $C(\bar{\Omega}; R)$  は  $\bar{\Omega}$  で連続な関数の全体を表す。

$C^k([0, t_0])$  を区間  $[0, t_0]$  で  $k$  階微分可能な関数の全体とする。任意のノルム空間  $X$  に対して、 $C^k([0, t_0])$  上の関数で  $X$  に値を持ち、 $[0, T]$  で  $k$  回微分可能なものを  $C^k([0, t_0]; X)$  と表す。

$X, Y$  をノルム空間とする。 $X$  から  $Y$  への有界線形作用素全体を  $\mathcal{L}(X, Y)$  と表す。また、 $X$  とその双対空間  $X' = \mathcal{L}(X, Y)$  との双対積を  $_{X'} \langle \cdot, \cdot \rangle_X$  と表す。

正方行列  $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$  に対して、すべての要素を掛け合わせて、それを足し合わせたものを  $A : B := \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij}$  と表記する。

### 2.2 モデルの導出

Zener モデルの導入を行う。前節で説明したように、このモデルは Maxwell モデルを構成要素としておりそれらを並列に  $n$  個つなげたものとして表される。概念図を図 4 に示す。導

出に伴い必要となる概念を定義する。

変位ベクトル 関数  $u = (u_1, \dots, u_d)^T : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  を Zener モデル全体の変位とする。  
また、テンソル  $e[\cdot] : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$  を次のように定義する。

$$e[u] := \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T], \quad (2.1)$$

ここで  $T$  は転置を表す。

応力と歪み  $i = 0, \dots, n$  とする。  $(e_i, \sigma_i) : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$  を歪みと応力の組と定義する。  $i = 0$  でモデル全体にかかる応力と歪みの組を表し、  $i = 1, \dots, n$  で構成要素の各 Maxwell モデル  $M_i$  全体にかかる応力と歪みの組を表す。 Maxwell モデル  $M_i$  の構成要素であるバネとダッシュポットにかかる応力と歪みの組をそれぞれ  $(e_i^s, \sigma_i^s)$ ,  $(e_i^d, \sigma_i^d)$  と表す。

その他に、  $f : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  を外力項、  $C_i = (c_{ijklm}^i)_{j,k,l,m=1,\dots,d}$  を 4 階の弾性テンソル、  $\eta_i > 0$  を  $M_i$  に含まれるダッシュポットにおける粘性定数とする。

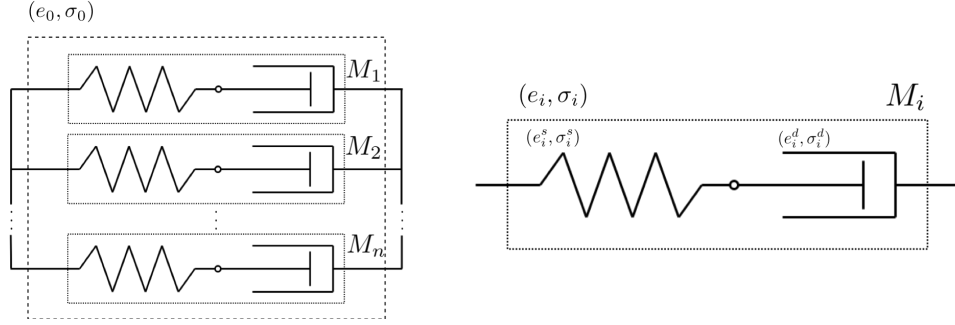


図 4: Zener 粘弾性モデルの概念図 (左：全体図，右：構成要素  $M_i$ )

図 4 に従って、  $(e_i, \sigma_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) の関係を導く。モデル全体の応力，歪み  $(e_0, \sigma_0)$  に対して (2.2) が成り立つ。式 (2.2a) は線形弾性論で記述される仮定及びフックの法則から導かれる。Maxwell モデルが並列に接続されていることから、Zener モデル全体にかかる応力は、各 Maxwell モデル  $M_i$  にかかる応力を足し合わせたものとなり、歪みは各  $M_i$  のものと等しくなる。これらの関係から (2.2b) を得る。

$$e_0 = e[u], \quad -\nabla \cdot \sigma_0 = f \quad (2.2a)$$

$$e_0 = e_1 = e_2 = \dots = e_n, \quad \sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n \quad (2.2b)$$

また、各  $M_i$  において (2.3) が成り立つ。バネとダッシュポットが直列に接続されていることから、 $M_i$  全体にかかる応力は、バネ及びダッシュポットにかかる応力と等しくなり、歪みはこれら 2 つにかかる歪みを足し合わせたものとなる。これより (2.3a) を得る。バネにかかる応力は歪みに比例し、ダッシュポットにかかる応力は歪み速度に比例するため、弾性テンソル  $C_i$  及び粘性定数  $\eta_i$  を用いて (2.3b) , (2.3c) の関係を得る。

$$e_i = e_i^s + e_i^d, \quad \sigma_i = \sigma_i^s = \sigma_i^d, \quad (2.3a)$$

$$\sigma_i^s = C_i e_i^s \quad (2.3b)$$

$$\sigma_i^d = \eta_i \frac{\partial e_i^d}{\partial t}, \quad (2.3c)$$

次に、記号  $\sigma_i[\cdot, \cdot], \sigma[\cdot, \cdot]$  を導入する．ここで  $\phi := \{\phi_i\}_{i=1}^n \in (\mathbb{R}^{d \times d}_{\text{sym}})^n$  である．

$$\sigma_i[u, \phi_i] := C_i(e[u] - \phi_i), \quad \sigma[u, \phi] := \sum_{i=1}^n \sigma_i[u, \phi_i]. \quad (2.4)$$

$e^d := \{e_i^d\}_{i=1}^n$  とする．式 (2.2) 及び (2.3) を変形すると次のようになる．

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^s = C_i e_i^s = C_i(e_i - e_i^d) = C_i(e_0 - e_i^d) = C_i(e[u] - e_i^d) = \sigma_i[u, e_i^d], \\ \sigma_0 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i[u, e_i^d] = \sigma[u, e^d], \\ \eta_i \frac{\partial e_i^d}{\partial t} &= \sigma_i^d = \sigma_i^s = C_i e_i^s = C_i(e_i - e_i^d) = \sigma_i[u, e_i^d], \end{aligned}$$

よってこれらの関係を用いると、次の支配方程式が得られる．

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma[u, \phi] = f, \\ \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \sigma_i[u, \phi_i] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.5a) \quad (2.5b)$$

**注意 2.1.** このモデルは一般的な Zener モデル (図 5) を拡張したものである．実際、図 5 の構成要素  $M'_2$  にダッシュポットを加えると、図 4 の  $i = 2$  のものと同じになる．また、支配方程式は

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma_1[u, \phi_1] + C_2 e[u]) = f, \\ \eta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \sigma_1[u, \phi_1] = 0 \end{cases}$$

となる．

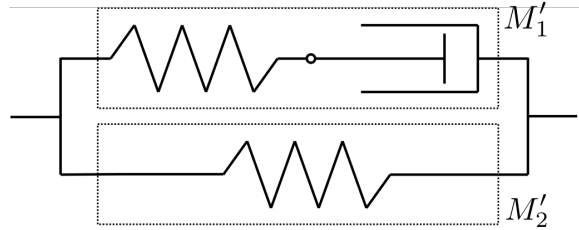


図 5: 一般的な Zener 粘弾性モデルの概念図

## 2.3 Zener 粘弾性モデルとその弱形式

前節の方程式 (2.5) に速度項及び加速度項を加え, Zener モデルにおける初期値境界値問題を考える. なお本論文ではこれ以降式 (2.5) における歪みテンソル  $e^d$  を  $\phi$  と表記する.  $\Gamma := \partial\Omega$  を領域  $\Omega$  の境界,  $\Gamma_0$  を  $\Gamma$  の開集合とし,  $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$  とする. このとき,  $\Gamma_0$  の  $(d-1)$ -次元測度は正であり,  $\overline{\Gamma_0}$  に等しいものとする.

### 2.3.1 強形式

$u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  を粘弾性体の変位,  $\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow (\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d})^n$  を粘性効果を表すテンソルとする. Zener 粘弾性モデルにおける支配方程式は次のようになる.

**問題 2.2** (Zener 粘弾性モデル). 次を満たす関数  $(u, \phi) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d})^n$  を求めよ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma[u, \phi] = f & ((x, t) \in \Omega \times (0, T)) \quad (2.6a) \\ \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \sigma_i[u, \phi_i] = 0 & ((x, t) \in \Omega \times (0, T), i = 1, \dots, n) \quad (2.6b) \\ u = g & ((x, t) \in \Gamma_0 \times (0, T)) \quad (2.6c) \\ \sigma[u, \phi]\nu = q & ((x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T)) \quad (2.6d) \\ (u, \frac{\partial u}{\partial t}, \phi) = (u^0, \dot{u}^0, \phi^0) \quad (x \in \Omega, t = 0) & \quad (2.6e) \end{array} \right.$$

ここに,  $\rho \geq 0$  は物体の密度,  $\alpha \geq 0$  は減衰定数,  $\eta_i > 0$  は粘性定数であり, 更に  $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g : \Gamma_0 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $q : \Gamma_1 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , 及び  $(u^0, \dot{u}^0, \phi^0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d})^n$  は与えられているものとする. 応力テンソル  $\sigma_i[u, \phi_i]$ ,  $\sigma[u, \phi]$  及び歪みテンソル  $e[u]$  は (2.4) 及び (2.1) に示す通りであり,  $C_i = (c_{ijkl}^i)_{ijkl}$  は 4 階の弾性テンソルである. なお,  $\rho = 0$  のときは  $\frac{\partial u}{\partial t}$  に対する初期条件を与えずに解くことが可能であり,  $\rho = \alpha = 0$  のときは  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u$  に対する初期条件を与えずに解くことが可能である.

本論文では以下を仮定する.

**仮定 2.3.** 各  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 弾性テンソル  $C_i$  は次を満たす.

(i)  $C_i$  は均質, 対称及び等方である. つまり

$$c_{ijkl}^i(x) = c_{jklm}^i = \lambda_i \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu_i (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}), \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.7)$$

を満たす. ここで  $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$  であり,  $\delta_{jk}$  は Kronecker のデルタである.

(ii)  $C_i$  は正定値である. つまり

$$\sum_{j,k,l,m=1}^d c_{ijkl}^i \xi_{jk} \xi_{lm} \geq c_* |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}, \quad (2.8)$$

を満たす  $c_* > 0$  が存在する. ここで,  $|\xi| := (\sum_{j,k=1}^d \xi_{jk}^2)^{1/2}$  である.

$\lambda, \mu$  は Lamé 定数と呼ばれる. 弾性テンソルの正値性に関して以下の補題を紹介する.

**補題 2.4.**  $C = c_{jklm}$  を  $\lambda, \mu$  を Lamé 定数に持つ弾性テンソルとし,  $\mu > 0$ ,  $\lambda > -(2/d)\mu$  を満たすとする. このとき,  $c_* = 2\mu + d \min(\lambda, 0) (> 0)$  となり,  $C$  は正値性を満たす.

**証明.** (2.8) の左辺を計算すると次のようになる

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l,m=1}^d c_{jklm} \xi_{jk} \xi_{lm} &= [\lambda \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu(\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})] \xi_{jk} \xi_{lm} \\ &= \lambda \delta_{jk} \delta_{lm} \xi_{jk} \xi_{lm} + \mu(\delta_{jk} \delta_{lm} \xi_{jk} \xi_{lm} + \delta_{jm} \delta_{kl} \xi_{jk} \xi_{lm}) \\ &= \lambda \xi_{jj} \xi_{ll} + \mu(\xi_{jk} \xi_{jk} + \xi_{jk} \xi_{kj}) \\ &= \lambda(\operatorname{tr} \xi)^2 + 2\mu|\xi|^2 \end{aligned}$$

- (i)  $\lambda \geq 0$  のとき, 明らかに  $\lambda(\operatorname{tr} \xi)^2 + 2\mu|\xi|^2 \geq 2\mu|\xi|^2 = c_*|\xi|^2$  となる.  
(ii)  $\lambda < 0$  のとき, 不等式  $\lambda(\operatorname{tr} \xi)^2 + 2\mu|\xi|^2 \geq c_*|\xi|^2$  を満たすことを示す. この不等式は,  $d = 2, 3$  に対して  $(\operatorname{tr} \xi)^2 \leq d|\xi|^2$  を満たすことと同値である.

$d = 2$  のとき,

$$(\operatorname{tr} \xi)^2 - 2|\xi|^2 = (\xi_{11} + \xi_{22})^2 - 2(\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{12}^2 + \xi_{21}^2) \leq (\xi_{11} + \xi_{22})^2 - 2(\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)$$

となり,  $(a+b)^2 - 2(a^2 + b^2) \leq 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) を用いることで  $(\operatorname{tr} \xi)^3 \leq 3|\xi|^2$  を得る.

$d = 3$  のとき,

$$\begin{aligned} (\operatorname{tr} \xi)^2 - 3|\xi|^2 &= (\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})^2 - 3(\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{33}^2 + \xi_{12}^2 + \xi_{13}^2 + \xi_{21}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2 + \xi_{32}^2) \\ &\leq (\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})^2 - 3(\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{33}^2) \end{aligned}$$

となり,  $(a+b+c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) を用いることで  $(\operatorname{tr} \xi)^2 \leq 3|\xi|^2$  を得る. よって  $\lambda(\operatorname{tr} \xi)^2 + 2\mu|\xi|^2 \geq c_*|\xi|^2$  となる.

よって (i), (ii) より, 補題が成り立つ. □

### 2.3.2 弱形式

次に Zener モデルの弱形式を導入する. 定式化を行うにあたり, 関数空間及びその内積の定義を行う. 強形式 (2.6) で与えられている関数に対して, 次を仮定する.

**仮定 2.5.**

(i)  $f \in C([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^d))$ ,  $g \in C([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^d))$ ,  $q \in C([0, T]; L^2(\Gamma_1; \mathbb{R}^d))$ .

(ii)  $\phi^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d})^n$ .

**定義 2.6.** 関数  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0; \mathbb{R}^d)$  に対して, 関数空間  $X$ ,  $V(g_0)$ ,  $V$ , 及び  $\Psi$  を次のように定義する.

$$X := H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad V(g_0) := \{v \in X; v|_{\Gamma_0} = g_0\}, \quad V := V(0), \quad \Psi := L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}).$$

また,  $\Psi^n := \underbrace{\Psi \times \cdots \times \Psi}_n$  とする.



また,  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$  における内積を  $(\cdot, \cdot)$  と表記し,  $\Psi$  及び  $\Psi^n$  において内積  $(\cdot, \cdot)_\Psi, (\cdot, \cdot)_C, (\cdot, \cdot)_{\Psi^n}$  を

$$(\xi, \chi)_\Psi := \int \xi : \chi \, dx, \quad (\xi, \chi)_C := (C\xi, \chi)_\Psi, \quad (\phi, \psi)_{\Psi^n} := \sum_{i=1}^n (\phi_i, \psi_i)_\Psi$$

と表記する. ここで,  $\xi, \chi \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ ,  $\phi, \psi \in (\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d})^n$  である. また, ノルムはそれぞれ  $\|\xi\|_\Psi := (\xi, \xi)_\Psi^{1/2}$ ,  $\|\xi\|_C := (\xi, \xi)_C^{1/2}$ ,  $\|\phi\|_{\Psi^n} := \{\sum_{i=1}^n \|\phi_i\|_\Psi^2\}^{1/2}$  となる.

$u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ ,  $\phi \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$  を強形式 (2.6) の解とする. (2.6a) に  $V$  上の任意の元  $v$  を両辺に掛けて  $\Omega$  上で積分をすると,

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(t) \cdot v \, dx &= \rho \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) \cdot v \, dx + \alpha \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t) \cdot v \, dx - \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma[u(t), \phi(t)]) \cdot v \, dx \\ &= \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), v \right) + \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) - \sum_{i=1}^n \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx \end{aligned}$$

となる.  $\sum_{i=1}^n \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx$  に対して Gauss–Green の定理を適用すると

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_\Gamma (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)]\nu) \cdot v \, ds - \int_\Omega \sigma_i[u(t), \phi_i(t)] : (\nabla v^T) \, dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_1} (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)]\nu) \cdot v \, ds - \int_\Omega \sigma_i[u(t), \phi_i(t)] : \left( \frac{1}{2}(\nabla v^T + \nabla^T v) \right) \, dx \right\} \\ &= \int_{\Gamma_1} q(t) \cdot v \, ds - \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u(t), \phi_i(t)] : e[v] \right)_\Psi \end{aligned}$$

となる. よって

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), v \right) + \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) + \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u(t), \phi_i(t)] : e[v] \right)_\Psi = \int_{\Gamma_1} q(t) \cdot v \, ds + \int_\Omega f(t) \cdot v \, dx \quad (2.9)$$

を得る. この式と (2.6b) をまとめると, 次の問題が得られる.

**問題 2.7** (Zener 粘弾性モデルの弱形式). 次の式を満たす  $\{(u, \phi) \in V(g(t)) \times \Psi^n; t \in (0, T)\}$  を求めよ:

$$\left\{ \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), v \right) + \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) + \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u(t), \phi_i(t)], e[v] \right)_\Psi = \ell_t(v), \quad \forall v \in V \quad (2.10a) \right.$$

$$\left. \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) - \sigma_i[u(t), \phi_i(t)] = 0 \quad ((x, t) \in \Omega \times (0, T), i = 1, \dots, n) \quad (2.10b) \right.$$

ここで  $\ell_t \in V'$  は次のように定義される.

$$\ell_t(v) := (f(t), v) + \int_{\Gamma_1} q(t) \cdot v \, ds.$$

この問題を (2.6) の弱形式と呼ぶ.

**定理 2.8.** 問題 2.2 と問題 2.7 は同値である. すなわち次が成立する.

(i)  $(u, \phi)$  が (2.6) の解ならば,  $(u, \phi)$  は (2.10) の解になる.

(ii)  $(u, \phi)$  が (2.10) の解ならば,  $(u, \phi)$  は (2.6) の解になる.

**証明.** (i)  $(u, \phi)$  が (2.10) の解になることは既に示した通りである.

(ii)  $(u, \phi)$  を (2.10) の解とする.  $v \in V$  として,  $\Gamma$  上で  $v = 0$  となるものを選ぶ. (2.10a) の  $\sum_{i=1}^n (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)], e[v])_\Psi$  について, Gauss–Green の定理より

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)] : e[v])_\Psi = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx$$

が成り立つ. よって

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), v \right) + \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f(t) \cdot v \, dx$$

を得る.  $v$  は任意なので, (2.6a) が成り立つ.

また, (2.6a) に任意の  $v \in V$  をかけて  $\Omega$  上で積分した式を (2.10a) に足し合わせると

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)], e[v])_\Psi + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx = \int_{\Gamma_1} q(t) \cdot v \, ds$$

となる. このとき, 左辺第二項について

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]) \cdot v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)]\nu) \cdot v \, ds - \sum_{i=1}^n (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)], e[v])_\Psi$$

となることを用いて

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} (\sigma_i[u(t), \phi_i(t)]\nu) \cdot v \, ds = \int_{\Gamma_1} q(t) \cdot v \, ds$$

を得る.  $v$  は任意なので  $q(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i[u(t), \phi_i(t)]\nu = \sigma[u(t), \phi(t)]\nu$  を得る. よって (2.6b) が成り立つ. よって  $(u, \phi)$  は (2.6) の解になる.  $\square$

### 3 エネルギー勾配流構造

この節では拡張された Zener 粘弾性モデルにおけるエネルギーの定義を行い, その勾配流構造及び, エネルギー減衰に関する定理を述べる.

仮定 2.5 のもとで, Zener モデル (2.6) におけるエネルギー  $E : X \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times \Psi^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する.

$$E(u, w, \phi, t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e[u] - \phi_i\|_{C_i}^2 + \frac{\rho}{2} \|w\|^2 - \ell_t(u), \quad (3.1)$$

これは  $V, X$ , 及び  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$  上の汎関数に対する変分構造を持つ.  $u \in X, w \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d), \phi \in \Psi^n$  に関する変分  $(\partial_u E), (\partial_w E), (\partial_\phi E)$  は

$$\begin{aligned} (\partial_u E)(u, w, \phi, t)[v] &:= \frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon v, w, \phi)|_{\varepsilon=0} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n (e[u + \varepsilon v] - \phi_i, e[v])_{C_i} - \ell(v) \right] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= (\sigma[u, \phi], e[v])_\Psi - \ell_t(v) \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$(\partial_w E)(u, w, \phi, t)[v] := \frac{d}{d\varepsilon} E(u, w + \varepsilon v, \phi)|_{\varepsilon=0} = [\rho(w + \varepsilon v, v)] \Big|_{\varepsilon=0} = \rho(w, v), \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\phi E)(u, w, \phi, t)[\psi] &:= \frac{d}{d\varepsilon} E(u, w, \phi + \varepsilon \psi)|_{\varepsilon=0} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n (e[u] - \phi_i - \varepsilon \psi_i, \psi_i)_{C_i} \right] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= - \sum_{i=1}^n (\sigma_i[u, \phi_i], \psi_i)_\Psi, \end{aligned} \quad (3.2c)$$

となる. ここで,  $v \in V, \psi \in \Psi^n$  である.

### 3.1 エネルギー散逸等式

**定理 3.1.** 仮定 2.3, 仮定 2.5 を満たし,  $(u, \phi)$  を Zener モデル (2.6) の解とする. このとき, エネルギー  $E$  に対して次の散逸等式が成立する:

$$\frac{d}{dt} E\left(u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi(t), t\right) = -\alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|_\Psi^2 - \dot{F}(t, u, \phi) \quad (3.3)$$

ここで,

$$\dot{F}(t, v, \psi) := \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial q}{\partial t}(t) \cdot v \, ds - \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0} (\sigma_i[v, \psi_i] \nu) \cdot \frac{\partial g}{\partial t}(t) \, ds.$$

である.

**証明.** (2.6a) の両辺に  $\frac{\partial u}{\partial t}$  を掛けて積分すると

$$\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) + \alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2 - \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma[u, \phi]) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = \left(f, \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right)$$

となる. 左辺第 3 項に Gauss–Green の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) + \alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2 + \left( \sigma[u, \phi], e \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right] \right)_\Psi = \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0} (\sigma_i[u, \phi_i] \nu) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, ds + \ell_t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる. (2.6b) の両辺に  $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}$  を掛けて積分をし,  $i = 1, \dots, n$  まで足し合わせると

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|_{\Psi}^2 - \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u, \phi_i], \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right) = 0 \quad (3.5)$$

となる. (3.4) と (3.5) を足し合わせることで次を得る

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left( \sigma[u, \phi_i], e \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right] - \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right) + \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) = \\ & -\alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0} (\sigma_i[u, \phi_i] \nu) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} ds + \ell_t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.6) を用いて  $\frac{d}{dt} E(u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi(t), t)$  を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E \left( u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi(t), t \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sigma[u, \phi_i], e \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right] - \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{d}{dt} \ell_t(u(t)) \\ &= -\alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0} (\sigma_i[u, \phi_i] \nu) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(t) ds + \ell_t \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) - \frac{d}{dt} \ell_t(u(t)) \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$-\frac{d}{dt} \ell_t(u(t)) = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(t) \cdot u(t) dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial q}{\partial t}(t) \cdot u(t) ds - \ell_t \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right)$$

より

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0} (\sigma_i[u, \phi_i] \nu) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} ds + \ell_t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{d}{dt} \ell_t(u(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0} (\sigma_i[u, \phi_i] \nu) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} ds - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(t) \cdot u(t) dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial q}{\partial t}(t) \cdot u(t) ds \\ &= -\dot{F}(t, u(t), \phi) \end{aligned}$$

となる. よって

$$\frac{d}{dt} E \left( u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi(t), t \right) = -\alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|^2 - \dot{F}(t, u(t), \phi)$$

を得る. よって (3.3) が証明された.  $\square$

### 3.2 エネルギー勾配流構造

ここではエネルギー勾配流構造の議論を行う. (2.10) において,  $\rho = \alpha = 0$ , 更に  $f, g, q$  は時間に依らないものとする. このとき定義より  $E(u, w, \phi, t)$  は  $w \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$  に依存しなくなるので, 簡単のため  $E(u, w, \phi, t) = E(u, \phi, t)$  と表記する. また,  $\ell_t = \ell$  と表記する.

次に, エネルギー  $E_* : \Psi^n \rightarrow \mathbb{R}$  及び, その変分  $(\partial E_*)(\phi) = (\partial E_*)(\phi)[\cdot] : \Psi^n \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する.

$$E_*(\psi) := \min_{v \in V(g)} E(v, \psi) = E(\bar{u}(\psi), \psi), \quad (3.7a)$$

$$(\partial E_*)(\phi)[\psi] := \frac{d}{d\varepsilon} E_*(\phi + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0}, \quad (3.7b)$$

ここで  $\bar{u}(\psi) \in V(g)$  は  $E(v, \psi)$  の  $v$  に関するミニマイザーであり, 次のように定義する.

$$\bar{u}(\psi, t) := \arg \min_{v \in V(g(t))} E(v, \psi, t). \quad (3.8)$$

**定理 3.2** (Zener 粘弾性モデルの勾配流構造). 仮定 2.3 を満たすものとし,  $u \in X$  ( $t \in [0, T]$ ),  $\phi \in C^1(\Omega \times [0, T]; \Psi^n)$  を Zener モデルの弱形式 (2.10) における  $\alpha = \rho = 0$  のときの解とする. このとき, 次のエネルギー勾配流構造を持つ:

$$(\partial E_*)(\phi)[\psi] = \sum_{i=1}^n \left( -\eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \psi_i \right)_\Psi \quad \forall \psi \in \Psi^n \quad (3.9)$$

特に,

$$\frac{\partial}{\partial t} E_*(\phi(t)) = - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|_\Psi^2 \leq 0 \quad (3.10)$$

となる.

この定理を証明する前に, 次の補題 3.3, 3.4 の証明を行う.

**補題 3.3.** 仮定 2.3, 仮定 2.5 を満たすとする. このとき, 任意の  $\phi \in \Psi^n$  に対して  $\bar{u}(\phi) \in V(g)$  は well-defined である. 更にある  $(\partial \bar{u})(\phi) \in \mathcal{L}(\Psi^n, V)$  が存在し,

$$(\partial \bar{u})(\phi)[\psi] := \frac{d}{d\varepsilon} \bar{u}(\phi + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0}, \quad \forall \psi \in \Psi^n. \quad (3.11)$$

がなりたつ.

**証明.** 最初に  $\bar{u}(\phi) \in V(g)$  が well-defined であることを証明する.  $\bar{u}(\phi) \in V(g)$  を  $E(\cdot, \phi)$  のミニマイザーとする. このとき, (3.2a) より次の式が成り立つ

$$\ell(v) = (\sigma[\bar{u}, \phi], e[v])_{\Psi^n} = \sum_{i=1}^n (e[\bar{u}] - \phi_i, e[v])_{C_i} \quad (3.12)$$

新たに  $\tilde{u} := \bar{u} - g \in V$  を定義し, (3.12) を  $V'$  上の式として次のように書き換える

$$A\tilde{u} = B\phi + \tilde{\ell}$$

ここに,  $A \in \mathcal{L}(V, V'), B \in \mathcal{L}(\Psi^n, V'), \tilde{\ell} \in V'$  は次のように定義される.

$${}_{V'}\langle A\tilde{u}, v \rangle_V := \sum_{i=1}^n (e[\tilde{u}], e[v])_{C_i}, \quad {}_{V'}\langle B\phi, v \rangle_V := \sum_{i=1}^n (\phi_i, e[v])_{C_i},$$

$${}_{V'}\langle \tilde{\ell}, v \rangle_V := \ell(v) - \sum_{i=1}^n (e[g], e[v])_{C_i}$$

$C_i$  の正値性及び Lax–Milgram の定理より  $A$  は逆作用素  $A^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$  を持つ．よって， $\tilde{u} = A^{-1}(B\phi + \tilde{\ell}) \in V$  となるので， $\tilde{u}$  は一意に存在する．

これにより (3.12) の唯一解は

$$\bar{u} = \bar{u}(\phi) := A^{-1}(B\phi + \ell) + g \in V(g) \quad (3.13)$$

として与えられることがわかる．

また，任意の  $v \in V(g)$  に対して，

$$\begin{aligned} E(v, \phi, t) - E(\bar{u}, \phi, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e[v] - \phi_i\|_{C_i}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e[\bar{u}] - \phi_i\|_{C_i}^2 + \ell(v - \bar{u}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( e[v] - \phi_i + (e[\bar{u}] - \phi_i), e[v] - \phi_i - (e[\bar{u}] - \phi_i) \right)_{C_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( e[\bar{u}] - \phi_i, e[v - \bar{u}] \right)_{C_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( e[v] - 2\phi_i, e[v - \bar{u}] \right)_{C_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( e[\bar{u}] - \phi_i, e[v - \bar{u}] \right)_{C_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e[v - \bar{u}]\|_{C_i}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となることから， $\bar{u} = \bar{u}(\phi)$  が  $E$  のミニマイザーであることがわかる．よって  $\bar{u}(\phi) \in V(g)$  が well-defined であることが証明された．

次に  $(\partial \bar{u})(\phi)$  が有界線形作用素で唯一つに定まることの証明を行う．(3.13) より，任意の  $\psi \in \Psi^n$  に対して

$$\begin{aligned} (\partial \bar{u})(\phi)[\psi] &= \frac{d}{d\varepsilon} \bar{u}(\phi + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ A^{-1}(B(\phi + \varepsilon\psi) + \ell) + g \right\}_{|\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ A^{-1}B(\phi) + \varepsilon A^{-1}B(\psi) + A^{-1}\ell + g \right\}_{|\varepsilon=0} \\ &= A^{-1}B(\psi) \end{aligned}$$

となることから  $(\partial \bar{u})(\phi) = A^{-1}B \in \mathcal{L}(\Psi, V)$  となることがわかる．よって  $(\partial \bar{u})(\phi)$  が有界線形作用素で唯一つに定まることが証明された．  $\square$

**補題 3.4.**  $\phi, \psi \in \Psi^n$  に対して，

$$(\partial E_*)(\phi)[\psi] = - \sum_{i=1}^n (\sigma_i[\bar{u}(\phi), \phi_i], \psi_i)_{\Psi} \quad (3.14)$$

が成り立つ．

**証明.** (3.2c), (3.8), 補題 3.3 を用いる． $(\partial_u E)(\bar{u}(\psi), \psi)[v] = 0$  ( $\forall v \in V, \forall \psi \in \Psi$ ) であることに注意すると

$$(\partial E_*)(\phi)[\psi] = \frac{d}{d\varepsilon} E_*(\phi + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} E(\bar{u}(\phi + \varepsilon\psi), \phi + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0}$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial_u E)(\bar{u}(\phi), \phi)[(\partial \bar{u})(\phi)[\psi]] + (\partial_\phi E)(\bar{u}(\phi), \phi)[\psi] \\
&= (\partial_\phi E)(\bar{u}(\phi), \phi)[\psi] \\
&= - \sum_{i=1}^n (\sigma_i[\bar{u}(\phi), \phi_i], \psi_i)_\Psi
\end{aligned}$$

となる. □

(定理 3.2 の証明)  $(u, \phi)$  を (2.10) における  $\alpha = \rho = 0$  のときの解とする. (2.10a) 及び (3.2a) より,  $(\partial_u E)(u, \phi)[\cdot] = 0$ , つまり  $u = \bar{u}(\phi)$  であることがわかる. 補題 3.4 及び (2.10b) より

$$(\partial E_*)(\phi)[\psi] = - \sum_{i=1}^n (\sigma_i[\bar{u}(\phi), \phi_i], \psi_i)_\Psi = - \sum_{i=1}^n \left( \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \psi_i \right)_\Psi.$$

を得る. また,

$$\frac{\partial}{\partial t} E_*(\phi(t)) = \partial E_*(\phi(t)) \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \right] = - \sum_{i=1}^n \left( \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_\Psi = - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \right\|_\Psi^2 \leq 0$$

となる. よって証明が示された. □

## 4 時間半離散化

この節では第 2 節で導出した Zener モデル (2.6) に対する時間方向への半離散化を行う. 半離散化モデルにおける弱形式は Lax–Milgram の定理を用いることで解の存在と一意性を証明する. 次にそのエネルギー構造を述べる.

### 4.1 時間半離散化された Zener モデルとその弱形式

$\tau > 0$  を時間増分, 更に  $N_T := \lfloor T/\tau \rfloor$ ,  $t^k := k\tau$  ( $k = 0, \dots, N_T$ ) を定義する. このとき, (2.6) の時間半離散モデルは次のようになる

**問題 4.1.** 次の式を満たす  $\{(u^k, \phi^k) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}\}^n; k = 0, \dots, N_T\}$  を求めよ:

$$\begin{cases}
\rho \bar{D}_\tau^2 u^k + \alpha \bar{D}_\tau u^k - \nabla \cdot \sigma[u^k, \phi^k] = f^k & (x \in \Omega) & (4.1a) \\
\eta_i \bar{D}_\tau \phi_i^k - \sigma_i[u^k, \phi_i^k] = 0 & (x \in \Omega, i = 1, \dots, n) & (4.1b) \\
u^k = g^k & (x \in \Gamma_0) & (4.1c) \\
\sigma[u^k, \phi_i^k]n = q^k & (x \in \Gamma_1) & (4.1d)
\end{cases}$$

ここで,  $u^0, u^1, \phi^0$  は与えられているものとする.  $\bar{D}_\tau, \bar{D}_\tau^2$  は後退差分作用素で,

$$\bar{D}x^k := \frac{x^k - x^{k-1}}{\tau}, \quad \bar{D}_\tau^2 x^k := \frac{x^k - 2x^{k-1} + x^{k-2}}{2\tau}$$

である.

連続モデル (2.6) のときと同様に, 半離散化を行った Zener モデル (4.1) での弱形式を導入する. Gauss–Green の公式を用いることで, 次の弱形式を得る.

**問題 4.2.** 次を満たす  $\{(u^k, \phi^k) \in V(g^k) \times \Psi^n; k = 0, \dots, N_T\}$  を求めよ:

$$\begin{cases} \rho(\overline{D}_\tau^2 u^k, v) + \alpha(\overline{D}_\tau u^k, v) + \sum_{i=1}^n (\sigma_i[u^k, \phi_i^k], e[v])_\Psi = \ell^k(v), & \forall v \in V \\ \eta_i \overline{D}_\tau \phi_i^k - \sigma_i[u^k, \phi_i^k] = 0 & (x \in \Omega, i = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.2a)$$

ここで,  $\ell^k \in V'$  は  $V$  上の線形汎関数であり,  $k = 0, \dots, N_T$  に対して, 次のように定義される.

$$\ell^k(v) := (f^k, v) + \int_{\Gamma_1} q^k \cdot v \, ds.$$

## 4.2 解の存在と一意性

時間半離散化を行ったモデルに対して, Lax–Milgram の定理を用いることで, 解の存在と一意性を証明することができる. 定理の前に次の補題を示す.

**補題 4.3.** 弱形式 (4.2) は次の連立方程式と同値である.

$$\begin{cases} \rho(\overline{D}_\tau^2 u^k, v) + \alpha(\overline{D}_\tau u^k, v) + (e[u^k], e[v])_A = \sum_{i=1}^n (\phi_i^{k-1}, e[v])_{B_i} + \ell^k(v) & \forall v \in V \\ \phi_i^k = X_i e[u^k] + Y_i \phi_i^{k-1} & (x \in \Omega, i = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.3a)$$

$$\phi_i^k = X_i e[u^k] + Y_i \phi_i^{k-1} \quad (x \in \Omega, i = 1, \dots, n) \quad (4.3b)$$

ここに,  $A, B_i, X, Y_i \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$  は

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \left( C_i - C_i \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} C_i \right), \quad B_i = \frac{\eta_i}{\tau} C_i \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1}, \\ X_i &= \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} C_i, \quad Y_i = \frac{\eta_i}{\tau} \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} \end{aligned}$$

である.  $I$  は単位テンソルで  $I = (\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})/2$  である.

**証明.** 式 (4.2a) は  $\phi_i^k$  について次のように陽的に解くことができる.

$$\phi_i^k = \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} C_i e[u^k] + \frac{\eta_i}{\tau} \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} \phi_i^{k-1}, \quad (4.4)$$

(4.4) を式 (4.2a) に代入し, 変形を行う.

$$\begin{aligned} \rho(\overline{D}_\tau^2 u^k, v) + \alpha(\overline{D}_\tau u^k, v) - \ell^k(v) &= - \sum_{i=1}^n (\sigma_i[u^k, \phi_i^k], e[v])_\Psi \\ &= - \sum_{i=1}^n (C_i(e[u^k] - \phi_i^k), e[v])_\Psi \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( C_i \left\{ e[u^k] - \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} C_i e[u^k] - \frac{\eta_i}{\tau} \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} \phi_i^{k-1} \right\}, e[v] \right)_\Psi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^n \left( \left( C_i - C_i \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} C_i \right) e[u^k], e[v] \right)_{\Psi} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_i}{\tau} C_i \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} \phi_i^{k-1}, e[v] \right)_{\Psi} \\
&= -\left( A e[u^k], e[v] \right)_{\Psi} + \sum_{i=1}^n \left( B \phi_i^{k-1}, e[v] \right)_{\Psi} \\
&= -(e[u^k], e[v])_A + \sum_{i=1}^n \left( \phi_i^{k-1}, e[v] \right)_{B_i}.
\end{aligned}$$

よって式 (4.3) を得る.  $\square$

**定理 4.4** (時間半離散モデルの解の存在と一意性). 仮定 2.3, 2.5 が成立するとする. このとき (4.2) を満たす解  $\{(u^k, \phi^k) \in V(g^k) \times \Psi; k = 0, \dots, N_T\}$  が存在し, 一意である.

**証明.**  $(u^0, \phi^0)$  は存在し一意である. また, (4.3b) 及び,  $u^1$  は与えられているので,  $(u^1, \phi^1)$  は存在する. 次に,  $k \geq 2$  に対して (4.2) を満たす解の存在を帰納的に証明する.  $k \in \{2, \dots, N_T\}$  を固定し,  $(u^{k-1}, \phi^{k-1}) \in V(g^k) \times \Psi^n$  が存在すると仮定する. (4.3a) は線形弾性体方程式と同等に扱うことができるので, Lax–Milgram の定理を適用することで,  $u^k \in V(g^k)$  の存在と一意性を言うことができる. また, (4.3b) より明らかに  $\phi^k \in \Psi^n$  の存在が言える. これより (4.2) を満たす解  $\{(u^k, \phi^k) \in V(g^k) \times \Psi^n\}$  の存在が証明できた.

次に一意性の証明を行う.  $f^k = g^k = q^k = 0$  ( $k \in \{1, \dots, N_T\}$ ),  $u^0 = u^1 = \phi^0 = 0$  としても一般性を失わない. このとき (4.3) より  $(u^k, \phi^k) = (0, 0)$  が得られる. これより一意性を持つ.  $\square$

### 4.3 時間半離散化モデルにおけるエネルギー勾配流構造及び散逸等式

この節では時間半離散化を行った Zener モデルにおけるエネルギー勾配流構造及びその散逸等式に関する定理の紹介を行う. 時間半離散モデル (4.2) の解  $\{(u^k, \phi^k)\}_{k=1}^{N_T}$  に対するエネルギーを  $E^k := E(u^k, \bar{D}_\tau u^k, \phi^k, t)$  と定義する.

**定理 4.5** (時間半離散化モデルにおけるエネルギー勾配流構造). 仮定 2.3, 2.5 が成立し,  $\rho = \alpha = 0$  とする.  $\{(u^k, \phi^k) \in V(g^k) \times \Psi^n; k = 0, \dots, N_T\}$  を (4.2) の解とする. このとき, このモデルは次のエネルギー勾配流構造を持つ:

$$(\partial E_*)(\phi^k)[\psi] = \sum_{i=1}^n \left( -\eta_i \bar{D}_\tau \phi_i^k, \psi_i \right)_{\Psi}. \quad (4.5)$$

特に,

$$\frac{\partial}{\partial t} E_*(\phi^k) = -\sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \bar{D}_\tau \phi_i^k \right\|_{\Psi}^2 \leq 0 \quad (4.6)$$

となる.

**証明.**  $(u^k, \phi^k)$  が (4.2) の解であるので, (4.2a), (3.2a), (3.8) より  $(\partial_u E)(u^k, \phi^k)[\cdot] = 0$ , つまり  $u^k = \bar{u}(\phi^k)$  であることがわかる. 補題 3.2 及び (4.2b) より任意の  $\psi \in \Psi$  で

$$(\partial E_*)(\phi^k)[\psi] = -\sum_{i=1}^n (\sigma_i[u^k, \phi_i^k], \psi_i)_{\Psi} = \sum_{i=1}^n \left( -\eta_i \bar{D}_\tau \phi_i^k, \psi_i \right)_{\Psi}$$

となる。また,

$$\frac{\partial}{\partial t} E_*(\phi^k) = \partial E_*(\phi^k) [\overline{D}_\tau \phi^k] = - \sum_{i=1}^n \left( \eta_i \overline{D}_\tau \phi^k, \overline{D}_\tau \phi^k \right)_\Psi = - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \overline{D}_\tau \phi^k \right\|_\Psi^2 \leq 0$$

となる。よって定理が成り立つ。  $\square$

**定理 4.6** (時間半離散化モデルにおけるエネルギー散逸等式). 仮定 2.3, 2.5 が成立し,  $\{(u^k, \phi^k) \in V(g^k) \times \Psi^n; k = 0, \dots, N_T\}$  を (4.2) の解とする. 次のエネルギー散逸等式が成立する:

$$\overline{D}_\tau E^k = -\alpha \|\overline{D}_\tau u^k\|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left\| e[\overline{D}_\tau u^k] - \overline{D}_\tau \phi_i^k \right\|_{C_i}^2 - \frac{\rho\tau}{2} \left\| \overline{D}_\tau^2 u^k \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \overline{D}_\tau \phi_i^k \right\|_\Psi^2 \quad (4.7)$$

更に, 任意の  $k = 1, \dots, N_T$  に対して, 次の条件を満たす

$$E^k \leq E^{k-1}. \quad (4.8)$$

**証明.** 定義通りに計算をすると次のようになる. なお計算にあたり (4.2a) に  $v = \overline{D}_\tau u^k$  を代入した式

$$\rho \left( \overline{D}_\tau^2 u^k, \overline{D}_\tau u^k \right) + \alpha \|\overline{D}_\tau u^k, v\|^2 + \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u^k, \phi_i^k], e[\overline{D}_\tau u^k] \right)_\Psi = \ell^k(\overline{D}_\tau u^k)$$

及び, (4.2b) の両辺に  $\overline{D}_\tau \phi_i^k$  ( $i = 1, \dots, n$ ) をかけて  $\Omega$  で積分した式

$$\eta_i \left\| \overline{D}_\tau \phi_i^k \right\|_\Psi^2 - \left( \sigma_i[u^k, \phi_i^k], \overline{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi = 0$$

を  $i = 1, \dots, n$  まで全て足し合わせた式

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \overline{D}_\tau \phi_i^k \right\|_\Psi^2 - \sum_{i=1}^n \left( \sigma[u^k, \phi_i^k], \overline{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi = 0$$

を用いる,

$$\begin{aligned} \overline{D}_\tau E^k &= \frac{1}{\tau} \left[ E(u^k, \overline{D}_\tau u^k, \phi^k, t) - E(u^{k-1}, \overline{D}_\tau u^{k-1}, \phi^{k-1}, t) \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e[u^k] - \phi_i^k\|_{C_i}^2 + \frac{\rho}{2} \|\overline{D}_\tau u^k\|^2 - \ell_t(u^k) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e[u^{k-1}] - \phi_i^{k-1}\|_{C_i}^2 + \frac{\rho}{2} \|\overline{D}_\tau u^{k-1}\|^2 - \ell_t(u^{k-1}) \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u^k + u^{k-1}, \phi_i^k + \phi_i^{k-1}], e[\overline{D}_\tau u^k] - \overline{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi + \frac{\rho}{2} \left( \overline{D}_\tau u^k + \overline{D}_\tau u^{k-1}, \overline{D}_\tau^2 u^k \right) - \ell^k(\overline{D}_\tau u^k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u^k, \phi_i^k], e[\overline{D}_\tau u^k] - \overline{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u^{k-1}, \phi_i^{k-1}], e[\overline{D}_\tau u^k] - \overline{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \left( \overline{D}_\tau u^k, \overline{D}_\tau^2 u^k \right) + \frac{\rho}{2} \left( \overline{D}_\tau u^{k-1}, \overline{D}_\tau^2 u^k \right) - \ell^k(\overline{D}_\tau u^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[u^k, \phi_i^k], e[\bar{D}_\tau u^k] - \bar{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i[\bar{D}_\tau u^k, \bar{D}_\tau \phi_i^k], e[\bar{D}_\tau u^k] - \bar{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi \\
&\quad + \rho \left( \bar{D}_\tau u^k, \bar{D}_\tau^2 u^k \right) - \frac{\rho\tau}{2} \left( \bar{D}_\tau^2 u^k, \bar{D}_\tau^2 u^k \right) - \ell^k(\bar{D}_\tau u^k) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \sigma[u^k, \phi_i^k], e[\bar{D}_\tau u^k] \right)_\Psi - \ell^k(\bar{D}_\tau u^k) - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left\| e[\bar{D}_\tau u^k] - \bar{D}_\tau \phi_i^k \right\|_{C_i}^2 + \rho \left( \bar{D}_\tau u^k, \bar{D}_\tau^2 u^k \right) \\
&\quad - \frac{\rho\tau}{2} \left\| \bar{D}_\tau^2 u^k \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \left( \sigma[u^k, \phi_i^k], \bar{D}_\tau \phi_i^k \right)_\Psi \\
&= -\rho \left( \bar{D}_\tau^2 u^k, \bar{D}_\tau u^k \right) - \alpha \left\| \bar{D}_\tau u^k \right\|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left\| e[\bar{D}_\tau u^k] - \bar{D}_\tau \phi_i^k \right\|_{C_i}^2 + \rho \left( \bar{D}_\tau u^k, \bar{D}_\tau^2 u^k \right) \\
&\quad - \frac{\rho\tau}{2} \left\| \bar{D}_\tau^2 u^k \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \bar{D}_\tau \phi_i^k \right\|_\Psi^2 \\
&= -\alpha \left\| \bar{D}_\tau u^k \right\|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left\| e[\bar{D}_\tau u^k] - \bar{D}_\tau \phi_i^k \right\|_{C_i}^2 - \frac{\rho\tau}{2} \left\| \bar{D}_\tau^2 u^k \right\|^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i \left\| \bar{D}_\tau \phi_i^k \right\|_\Psi^2
\end{aligned}$$

よって (4.7) を得る. これより  $\bar{D}_\tau E^k \leq 0$  を得るので (4.8) が成立する.  $\square$

## 5 有限要素解析

この節では第4節で導出した半離散化 Zener モデル (4.1) における有限要素スキームの提案, 数値計算アルゴリズムの紹介を行う.

### 5.1 P1/P0 有限要素スキーム

領域  $\Omega$  を三角形要素で分割することを考える.  $K$  を三角形要素とし, 三角形分割を  $\mathcal{T}_h := \{K\}$  とし, 近似領域を  $\Omega_h := \text{int}(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K)$  とする. なお,  $h$  は  $\mathcal{T}_h$  上の三角形要素の最大辺長である. この分割は, 次の条件を満たす.

- $K, K' \in \mathcal{T}_h$  に対して,  $K \cap K'$  は空集合か共通の頂点か, 共通の辺の全体となる.

なお, 簡単のためこの節では  $\Omega = \Omega_h$  とする.

**定義 5.1.** 関数空間  $V_h, \Psi_h$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
X_h &:= \{v_h \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d); v_h|_K \in P_1(K; \mathbb{R}^d), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\
\Psi_h &:= \{\psi_h \in L^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}); \psi_h|_K \in P_0(K; \mathbb{R}^{d \times d}), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.
\end{aligned}$$

ここで,  $P_1(K; \mathbb{R}^d)$  は  $K$  上で定義される区分的線形関数空間,  $P_0(K; \mathbb{R}^d)$  は  $K$  上で定義される区分的定数関数空間である. また, 関数  $g_{0h} \in X_h$  に対して, 関数空間  $V_h(g_{0h})$  及び  $V_h$  をそれぞれ  $V_h(g_{0h}) := X_h \cap V(g_{0h})$ ,  $V_h := V_h(0)$  と定義する.

$g^k$  を区分的線形関数で近似したものを  $\{g_h^k\}_{k=0}^{N_T} \subset X_h$ ,  $\phi^0$  の要素  $\phi_i^0$  を区分的定数関数で近似したものを  $\phi_{ih}^0 \in \Psi_h$  とし, それらが与えられているものとする. これらを用いて半離散化 Zener モデル (4.1) の有限要素スキームを次のように考える.

**問題 5.2** (半離散化 Zener モデルの P1/P0 有限要素スキーム). 次の式を満たす  $\{(u_h^k, \phi_h^k) \in V_h(g_h^k) \times \Psi_h^n; k = 0, \dots, N_T\}$  を求めよ:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(\overline{D}_\tau^2 u_h^k, v_h) + \alpha(\overline{D}_\tau u_h^k, v_h) + \sum_{i=1}^n (\sigma_i[u_h^k, \phi_{ih}^k], e[v_h])_\Psi &= \ell^k(v_h), \quad \forall v \in V_h, \\ \eta_i \overline{D}_\tau \phi_{ih}^k - \sigma_i[u_h^k, \phi_{ih}^k] &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (5.1a)$$

このように  $u_h^k$  を P1 有限要素空間,  $\phi_h^k$  を P0 有限要素空間で近似することで, 任意の  $K \in \mathcal{T}_h$  に対して  $e[u_h^k]|_K \in P_0(K; \mathbb{R}^{d \times d})$ , さらに  $\sigma_i[u_h^k, \phi_{ih}^k]|_K \in P_0(K; \mathbb{R}^{d \times d})$  となり, (5.1b) を  $\Psi_h$  上の方程式として矛盾なく考えることができる.

## 5.2 数値計算アルゴリズム

(4.4) と同様 (5.1b) は  $\phi_h^k$  に対する次の陽的表現を与える.

$$\phi_{ih}^k = X_i e[u_h^k] + Y_i \phi_{ih}^{k-1}. \quad (5.2)$$

(5.1a) に (5.2) を代入することで次の式を得る.

$$\rho(\overline{D}_\tau^2 u_h^k, v_h) + \alpha(\overline{D}_\tau u_h^k, v_h) + (e[u_h^k], e[v_h])_A = \sum_{i=1}^n (\phi_{ih}^{k-1}, e[v_h])_{B_i} + \ell^k(v_h). \quad (5.3)$$

ここで,  $A, B_i, X_i, Y_i$  は補題 4.3 で定義した 4 階の弾性テンソルである.

従って有限要素スキームは次のアルゴリズムによって実現される.

**アルゴリズム.**  $k \in \{2, \dots, N_T\}$  において, 関数  $u^{k-1}, u^{k-2} \in V_h$ , 及び  $\phi_h^{k-2} \in \Psi_h$  が与えられているとする. このとき,  $(u_h^k, \phi_h^k) \in V_h(g_h^k) \times \Psi_h$  を次の手順で求める:

1. (5.3) から  $u_h^k \in V_h(g_h^k)$  を求める. これは線形弾性方程式を解くことと等しい.
2. 求めた  $u_h^k$  を (5.2) に代入し,  $\phi_h^k \in \Psi_h^n$  を求める.

数値計算にあたり, 弾性テンソルに関する仮定 2.3 を満たす 4 階のテンソルの積や逆テンソルの計算を行う必要がある. その際に Lamé 定数を変数とした写像を導入することで, それらを簡単に計算することができる. 2 つの補題を紹介する.

**補題 5.3.**  $C \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$  を仮定 2.3 を満たすテンソルで,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  を  $C$  に対する Lamé 定数とする. また,  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $\psi \in \mathbb{R}^{d \times d}$  とする. このとき, 次の式が成り立つ.

$$C(e[v] - \psi) = \lambda(\operatorname{div} v - \operatorname{tr} \psi)I + 2\mu(e[v] - \psi). \quad (5.4)$$

**証明.** 定義より

$$\begin{aligned} C(e[v] - \psi) &= c_{jklm}(e_{lm}[v] - \psi_{lm}) \\ &= \lambda(\operatorname{div} v)I + 2\mu e[v] - c_{jklm}\psi_{lm} \\ &= \lambda(\operatorname{div} v)I + 2\mu e[v] - (\lambda\delta_{jk}\delta_{lm} + \mu\delta_{jl}\delta_{km} + \mu\delta_{jm}\delta_{kl})\psi_{lm} \\ &= \lambda(\operatorname{div} v)I + 2\mu e[v] - \lambda(\operatorname{tr} \psi)I - 2\mu\psi \\ &= \lambda(\operatorname{div} v - \operatorname{tr} \psi)I + 2\mu(e[v] - \psi). \end{aligned}$$

よって式が成り立つ. □

補題 5.4. 写像  $C(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$  を

$$C(\lambda, \mu) := \lambda \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

と定義する. このとき,  $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$  に対して, 次を満たす. なお,  $I$  は単位テンソル,  $C^{-1}$  は  $C$  の逆テンソルである.

$$(i) \quad C(\lambda, \mu) \cdot C(\lambda', \mu') = C(d\lambda\lambda' + 2(\lambda\mu' + \lambda'\mu), 2\mu\mu')$$

$$(ii) \quad I \cdot C(\lambda, \mu) = C(\lambda, \mu) \cdot I = C(\lambda, \mu) \iff I = C(0, 1/2)$$

$$(iii) \quad C^{-1} \cdot C(\lambda, \mu) = C(\lambda, \mu) \cdot C^{-1} = I \iff C^{-1} = C\left(-\frac{\lambda}{2\mu(d\lambda + 2\mu)}, \frac{1}{4\mu}\right)$$

証明. (i) 左辺を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & C(\lambda, \mu) \cdot C(\lambda', \mu') \\ &= \{\lambda \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})\} \{\lambda' \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu' (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})\} \\ &= \lambda \lambda' (\delta_{jk} \delta_{lm})^2 + (\lambda \mu' + \lambda' \mu) \delta_{jk} \delta_{lm} (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) + \mu \mu' (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})^2 \\ &= d\lambda \lambda' (\delta_{jk} \delta_{lm}) + 2(\lambda \mu' + \lambda' \mu) \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu \mu' (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) \\ &= (d\lambda \lambda' + 2(\lambda \mu' + \lambda' \mu)) \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu \mu' (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) \\ &= C(d\lambda \lambda' + 2(\lambda \mu' + \lambda' \mu), 2\mu \mu'). \end{aligned}$$

よって等式が成り立つ.

(ii)  $I = C(\lambda', \mu')$  とする. 条件よりこれは連立方程式

$$\begin{cases} d\lambda \lambda' + 2(\lambda \mu' + \lambda' \mu) &= \lambda, \\ 2\mu \mu' &= \mu \end{cases}$$

を満たす. これを解くと  $\lambda' = 0$ ,  $\mu' = 1/2$  を得る.

(iii)  $C^{-1} = C(\lambda', \mu')$  とする. 条件よりこれは連立方程式

$$\begin{cases} d\lambda \lambda' + 2(\lambda \mu' + \lambda' \mu) &= 0, \\ 2\mu \mu' &= 1/2, \end{cases}$$

を満たす. これを解くと,  $\lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(d\lambda + 2\mu)}$ ,  $\mu' = \frac{1}{4\mu}$  を得る.

□

例 5.5.  $C_1 = C(1, 1)$ ,  $C_2 = C(1, 2)$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ,  $\tau = 0.01$  とする. このとき

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \left( C_i - C_i \left( \frac{\eta_i}{\tau} I + C_i \right)^{-1} C_i \right) = C(1.849797, 2.903469), \\ B_1 &= \frac{\eta_1}{\tau} C_1 \left( \frac{\eta_1}{\tau} I + C_1 \right)^{-1} = C(0.942685, 0.980392), \\ B_2 &= \frac{\eta_2}{\tau} C_2 \left( \frac{\eta_2}{\tau} I + C_2 \right)^{-1} = C(0.907112, 1.923077), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= C_1 \left( \frac{\eta_1}{\tau} I + C_1 \right)^{-1} = C(0.009427, 0.009804), \\
X_2 &= C_2 \left( \frac{\eta_2}{\tau} I + C_2 \right)^{-1} = C(0.009071, 0.019231), \\
Y_1 &= \frac{\eta_1}{\tau} \left( \frac{\eta_1}{\tau} I + C_1 \right)^{-1} = C(-0.009427, 0.490196), \\
Y_2 &= \frac{\eta_2}{\tau} \left( \frac{\eta_2}{\tau} I + C_2 \right)^{-1} = C(-0.009071, 0.480769),
\end{aligned}$$

となる．なおこれらを計算するプログラムを作成した．ソースコードを付録に載せる．

## 6 数値計算結果

ここでは数値計算結果を紹介する．前節で導入した P1/P0 有限要素スキームを用いて問題 5.2 を解いた．なお数値計算には FreeFem++ [13] というフリーソフトを用いた．

### 6.1 例 1

$d = 2, n = 2$  とする．以下の条件を課す．

$$\begin{aligned}
\Omega &= (0, 1)^2, \quad \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega; x_1 \in (0, 1), x_2 = 1\} \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}, \\
\Gamma_u &= \Gamma_0, \quad \Gamma_l = \{x \in \partial\Omega; x_1 \in (0, 1), x_2 = 0\}, \\
f^k &= q^k = 0, \quad u^0 = u^1 = 0, \quad \phi^0 = 0 \quad g^k = (0, \sin(\pi k)/10)^T, \quad T = 5, \quad \tau = 0.01, \\
\rho &= \alpha = 1, \quad C_1 = C(1, 1), \quad C_2 = C(1, 2),
\end{aligned}$$

また、応力の  $(2, 2)$  成分を  $\Gamma_u$  と  $\Gamma_l$  で線積分したものをそれぞれ

$$\sigma_u := \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_u} \sigma_{i(22)}[u^k, \phi_i^k], \quad \sigma_l := \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_l} \sigma_{i(22)}[u^k, \phi_i^k]$$

と定義する．このとき、 $\eta_1 = \eta_2$  とし、その値を 0.5, 1 と変えて数値計算を行った．

この例について ここでは Zener モデルに振動を与えたときの応力の変化について調べる．正方領域  $[0, 1] \times [0, 1]$  の上部  $\Gamma_u$  に振動  $g = (0, \sin(\pi k)/10)^T$  を与える．また、外力は 0 とする．概略を図 6 に示す．このときの  $\sigma_u$  と  $\sigma_l$  の  $(k = 1, \dots, N_T)$  での変化を調べる．これはそれぞれ上部と下部の境界にかかる応力の  $x_2$  成分での値である．数値計算の結果を図 7 に示す．また、比較のため線形弾性モデルにおいても同様の条件下で数値計算結果を行った．結果を図 8 に示す．

線形弾性体モデルでは上部と下部の応力の値はほぼ変化しないが、Zener モデルでは下部の値が小さくなっていることが分かる．また、これらの位相にも変化が見られる．この結果から、Zener モデルでは応力緩和の働きにより上部からの振動が下部へ緩和されて伝わり、更に伝わる速さも遅くなるということが分かった．

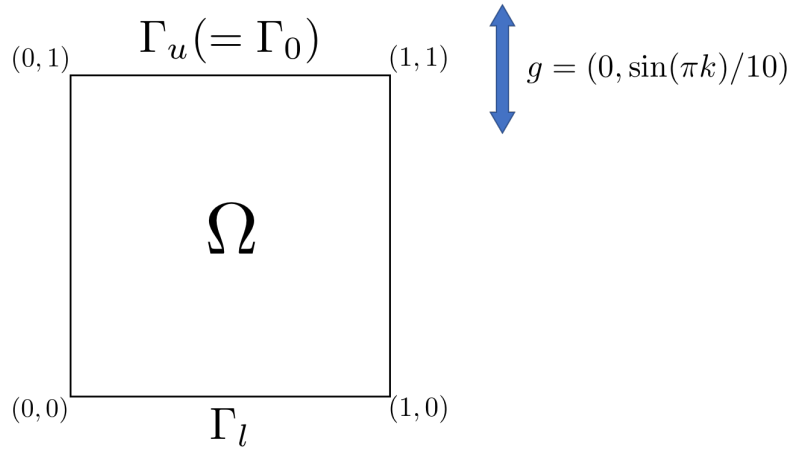
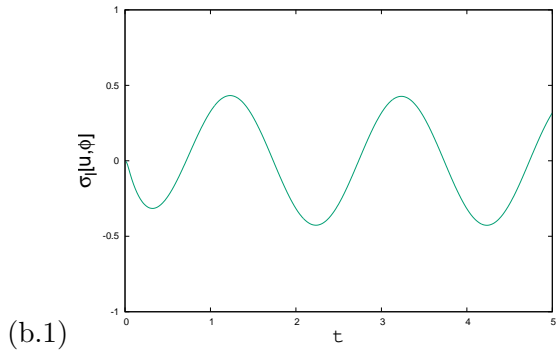
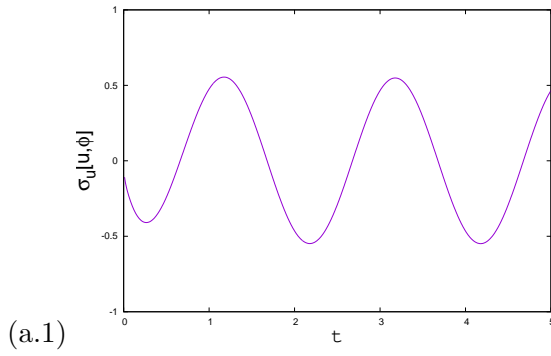


図 6: 概略図

(i)  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  のとき



(ii)  $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$  のとき

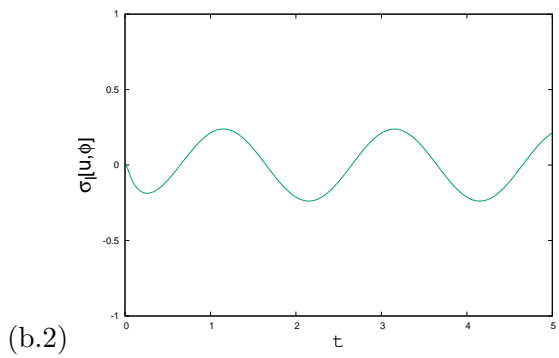
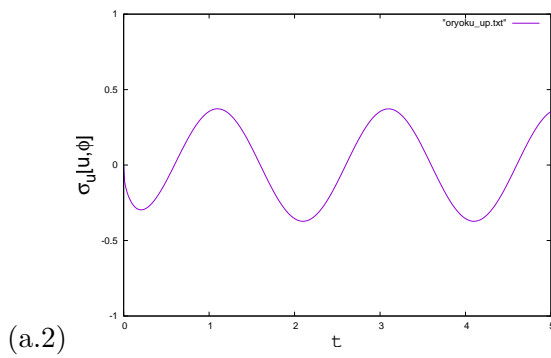


図 7: Zener モデルでの数値計算結果 ((a):上部の応力  $\sigma_u$ , (b) 下部の応力  $\sigma_l$ )

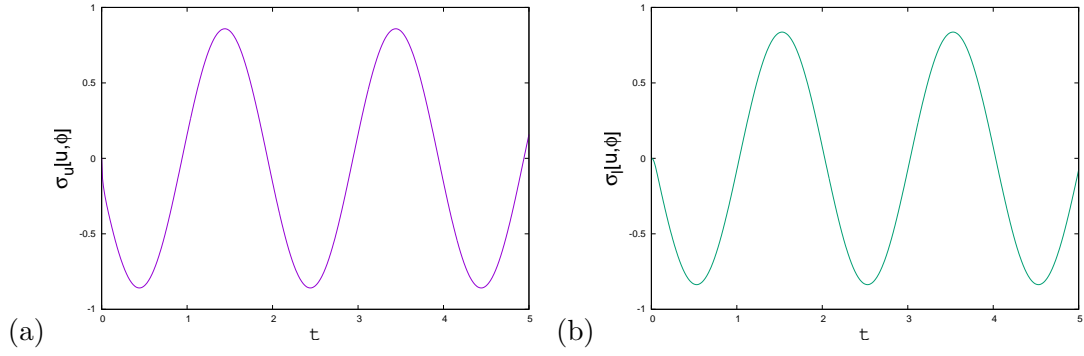


図 8: 線形弾性体モデルでの数値計算結果 ((a):上部の応力  $\sigma_u$ , (b) 下部の応力  $\sigma_l$ )

## 6.2 例 2

$d = 2, n = 2$  とする．以下の条件を課す．

$$\begin{aligned} \Omega &= (0, 5) \times (0, 1), \quad \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega; x_1 = 0, x_2 = (0, 1)\} \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_0, \\ f^k &= q^k = 0, \quad u^0 = u^1 = 0, \quad \phi^0 = 0, \quad g^k = (0, \sin 4\pi k)^T, \quad T = 4, \quad \tau = 0.01 \\ \rho &= \alpha = 1, \quad E = 50, \quad \nu = 0.49, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ C^1 &= C^2 = C(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

このとき,  $\eta_1 = \eta_2$  とし, その値を 1, 10 と変えて数値計算を行った．

この例について この例では, モデルに振動を与えたときの形状の変化について調べる．領域  $(0, 5) \times (0, 1)$  の左部  $\Gamma_0$  に振動  $g = (0, \sin 4\pi k)^T$  を与える．また, 外力は 0 とする．概略を図 9 に示す．比較のため線形弾性モデルにおいても同様の条件下で数値計算結果を行った．結果を図 10 に示す．

また, この例では一般的なゴムの弾性定数を用いている． $E, \nu$  はそれぞれゴムのヤング率, ポアソン比で, これらを用いて Lamé 定数を決定している．

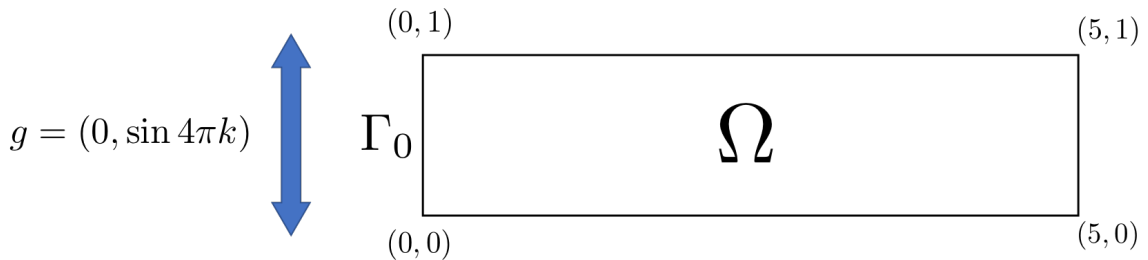


図 9: 概略図



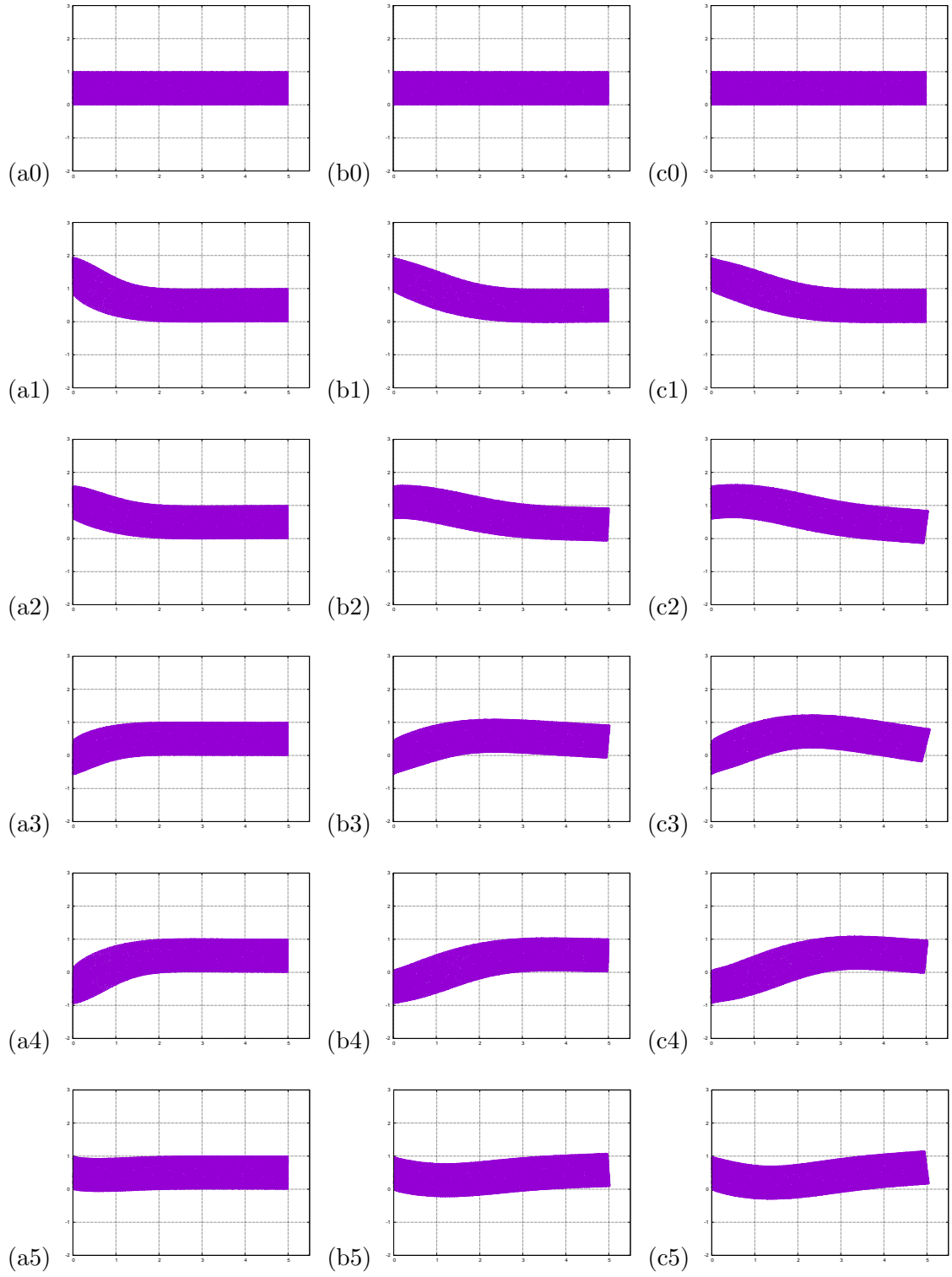


図 10: 例 2 の計算結果 (上から  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ) . (a):  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  のとき, (b):  $\eta_1 = \eta_2 = 10$  のとき, (c): 線形弾性モデル.

数値計算結果により、揺れの伝わる大きさの変化を見ることができた。線形弾性モデルと比較すると、粘弾性モデルでは左側で発生した揺れが緩和されて右側に伝わっていくことがわかった。

## 7 まとめと今後の課題

本研究では Zener 粘弾性モデルのエネルギー勾配流構造の解明を行った。また、この構造を保存する安定な数値計算スキームを導き、有限要素解析を行った。今後は連続問題における解の存在と一意性の証明、数値解の収束証明を行うことが課題である。また、これ以外の粘弾性モデルへの拡張も検討したい。

## 謝辞

本研究に際して、ご指導いただきました先生方に深く感謝いたします。研究室に配属して約三年の間、学会でのポスター発表や口頭発表、チェコへの留学等、様々な経験をさせていただきました。木村正人教授ならびに野津裕史准教授にはセミナーや関数解析ゼミで熱心にご指導をいただきました。横浜国立大学の田中良巳准教授には論文作成にご協力いただきました。

本研究を進めるにあたりお世話になりました皆様方に心より御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] O.M. Abuzeid and P. Eberhard. Linear viscoelastic creep model for the contact of nominal flat surfaces based on fractal geometry: standard linear solid (SLS) material. *Journal of Tribology*, 129:461–466, 2007.
- [2] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] J.D. Ferry. "Viscoelastic Properties of Polymers" Wiley, New York, 1970.
- [4] M. Karamanou, S. Shaw, M.K. Warby, and J.R. Whiteman. Models, algorithms and error estimation for computational viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2-5):245–265, 2005.
- [5] J.M. Golden and G.A.C. Graham. "Boundary Value Problems in Linear Viscoelasticity" Springer, Berlin, 1988.
- [6] F.J. Lockett. *Nonlinear Viscoelastic Solids*. Academic Press, Paris, 1972.
- [7] B. Rivière and S. Shaw. Discontinuous Galerkin finite element approximation of nonlinear non-Fickian diffusion in viscoelastic polymers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(6):2650–2670, 2006.

- [8] B. Rivière, S. Shaw, M.F. Wheeler, and J.R. Whiteman. Discontinuous galerkin finite element methods for linear elasticity and quasistatic linear viscoelasticity. *Numerische Mathematik*, 95(2):347–376, 2003.
- [9] M.E. Rognes and R. Winther. Mixed finite element methods for linear viscoelasticity using weak symmetry. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20:955–985, 2010.
- [10] A. Schmidt and K.G. Siebert. *Design of Adaptive Finite Element Software: The Finite Element Toolbox ALBERTA*. Springer, Berlin, 2005.
- [11] S. Shaw and J.R. Whiteman. A posteriori error estimates for space-time finite element approximation of quasistatic hereditary linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(52):5551–5572, 2004.
- [12] M. Kimura, H. Notsu, Y. Tanaka and H. Yamamoto, The gradient flow structure of an extended Maxwell viscoelastic model and a structure-preserving finite element scheme. *Journal of Scientific Computing*, 2018.
- [13] Hecht, F. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.* 20 (2012), no. 3-4, 251-265. 65Y15
- [14] 田端 正久, ”偏微分方程式の数値解析”, 岩波書店.
- [15] 大塚 厚二, 高石 武史, ”有限要素法で学ぶ現象と数理－FreeFem++数理思考プログラミング－”, 共立出版.
- [16] 黒田 成俊, ”関数解析”, 共立出版.

## A ソースコード

ソースコード 1: tensor.c

---

```
1 #include "functions.c"
2
3 //弾性テンソルをlambda,mu の関数として表現 C(la,mu)
4 typedef struct{
5     double la;
6     double mu;
7 }bc_t ;
8
9 bc_t Inv(bc_t C); // 逆テンソル  $C^{-1}(la,mu)$  の計算
10 bc_t Prod(bc_t C1,bc_t C2); //テンソル積の計算  $C(la1,mu1) * C(la2,mu2)$ 
11 bc_t Sum(bc_t C1,bc_t C2);
12 bc_t Diff(bc_t C1,bc_t C2);
13 bc_t Times(double al,bc_t C);
14
15 int main(){
16     bc_t C, I={0.0,0.5}, W,WW;
17     double *A,**B,**X,**Y,**c,*eta,tau=0.01;
18     int N=2,i;
19
20     eta = dvector(1,N);
21
22     A = dvector(1,2);
23     B = dmatrix(1,N,1,2);
24     X = dmatrix(1,N,1,2);
25     Y = dmatrix(1,N,1,2);
26
27     c = dmatrix(1,N,1,2);
28
29     for(i=1;i<=N;i++){
30         c[i][1] = i; c[i][2] = i;
31         eta[i] = 1.0;
32     }
33
34     for(i=1;i<=N;i++){
35         C.la = c[i][1]; C.mu = c[i][2];
36         W = Sum(Times(eta[i]/tau,I),C);
37         Y[i][1] = Times( (eta[i]/tau), Inv(W) ).la;
38         Y[i][2] = Times( (eta[i]/tau), Inv(W) ).mu;
39     }
40
41     for(i=1;i<=N;i++){
42         W.la = Y[i][1]; W.mu = Y[i][2];
43         C.la = c[i][1]; C.mu = c[i][2];
44         X[i][1] = Prod(Times(tau/eta[i],C),W).la;
45         X[i][2] = Prod(Times(tau/eta[i],C),W).mu;
46     }
```

```

47
48 for(i=1;i<=N;i++){
49     W.la = X[i][1]; W.mu = X[i][2];
50     B[i][1] = Times(eta[i]/tau,W).la;
51     B[i][2] = Times(eta[i]/tau,W).mu;
52 }
53
54 A[1] = 0.0; A[2] = 0.0;
55
56 for(i=1;i<=N;i++){
57     W.la = X[i][1]; W.mu = X[i][2];
58     C.la = c[i][1]; C.mu = c[i][2];
59     WW = Prod(C,W);
60     A[1] += Diff(C,WW).la;
61     A[2] += Diff(C,WW).mu;
62 }
63
64 printf("A1a = %f, A2a = %f;\n",A[1],A[2]);
65 for(i=1;i<=N;i++) printf("B%d la = %f, B%d mu = %f;\n",i,B[i][1],i,B[
    i][2]);
66 for(i=1;i<=N;i++) printf("X%d la = %f, X%d mu = %f;\n",i,X[i][1],i,X[
    i][2]);
67 for(i=1;i<=N;i++) printf("Y%d la = %f, Y%d mu = %f;\n",i,Y[i][1],i,Y[
    i][2]);
68
69 }
70
71
72 bc_t Inv(bc_t C){
73     bc_t inv;
74     int d = 2.0; // d=次元
75     inv.la = -C.la/(2.0*C.mu*(d*C.la + 2*C.mu));
76     inv.mu = 0.25/C.mu;
77     return inv;
78 }
79
80 bc_t Prod(bc_t C1,bc_t C2){
81     bc_t Prod;
82     int d = 2.0; // d=次元
83     Prod.la = d*C1.la*C2.la + 2.0*(C1.la*C2.mu + C2.la*C1.mu);
84     Prod.mu = 2.0*C1.mu*C2.mu;
85     return Prod;
86 }
87
88 bc_t Sum(bc_t C1,bc_t C2){
89     bc_t sum;
90     sum.la = C1.la + C2.la;
91     sum.mu = C1.mu + C2.mu;
92     return sum;
93 }

```

```

94
95 bc_t Diff(bc_t C1,bc_t C2){
96     bc_t diff;
97     diff.la = C1.la - C2.la;
98     diff.mu = C1.mu - C2.mu;
99     return diff;
100 }
101
102 bc_t Times(double al,bc_t C){
103     bc_t times;
104     times.la = al*C.la;
105     times.mu = al*C.mu;
106     return times;
107 }

```

---

## ソースコード 2: ex1.edp

---

```

1 real n=50;
2 border Gamma1(t=0,1){ x = t; y = 0.0; }
3 border Gamma2(t=0,1){ x = 1.0; y = t; }
4 border Gamma3(t=1,0){ x = t ; y = 1.0 ;}
5 border Gamma4(t=1,0){ x = 0.0 ; y = t ;}
6 mesh Th=buildmesh(Gamma1(n)+Gamma2(n)+Gamma3(n)+Gamma4(n));
7
8 fespace Vh(Th,P1),Vh2(Th,P0);
9
10 macro ep1(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
11 macro ep2(x1,x2,x3) [x1,x2, sqrt(2.)*x3] //EOM
12 macro div(u,v) ( dx(u)+dy(v) ) // EOM
13 macro tr(a1,a2,a3) (a1 + a2) // EOM
14
15 real lambda1=1.0,mu1=1.0, lambda2=2.0,mu2=2.0;
16 real a=1.0,rho= 1.0,dt=0.01,oryokuup,oryokulow,sigma11,sigma12,sigma13,
    sigma21,sigma22,sigma23;
17 Vh u1,u2,v1,v2,uold1=0.0,uold2=0.0,uold1=0.0,uold2=0.0;
18
19 Vh2 phi11,phi12,phi13,phiold11=0.0,phiold12=0.0,phiold13=0.0;
20 Vh2 phi21,phi22,phi23,phiold21=0.0,phiold22=0.0,phiold23=0.0;
21
22 real f1 = 0.0, f2 = 0.0;
23 real Ala = 2.723312, Amu = 2.903469;
24 real B1la = 0.942685, B1mu = 0.980392;
25 real B2la = 1.780627, B2mu = 1.923077;
26 real C1la = 0.009427, C1mu = 0.009804;
27 real C2la = 0.017806, C2mu = 0.019231;
28 real D1la = -0.009427, D1mu = 0.490196;
29 real D2la = -0.017806, D2mu = 0.480769;
30
31 real d1 = ( (rho/(2*dt)) + (a/dt) );
32 real d2 = (rho + a)/dt;

```

```

33 real d3 = rho/(2*dt);
34
35 { ofstream ff("./u0.txt");
36 for (int ii=0;ii<Th.nt;ii++)
37 { for (int j=0; j <3; j++) ff<< Th[ii][j].x + u1[][Vh(ii,j)] << " "<<
    Th[ii][j].y + u2[][Vh(ii,j)] << " "<<endl;
38 ff<< Th[ii][0].x + u1[][Vh(ii,0)] << " "<< Th[ii][0].y + u2[][Vh(ii
    ,0)] << " "<<endl<<endl;
39 }
40 }
41
42 solve visco([u1,u2],[v1,v2]) =
43 int2d(Th)( Ala*div(u1,u2)*div(v1,v2) + 2.*Amu*ep1(u1,u2)'*ep1(v1,v2) )
44 + int2d(Th)( d1*(u1*v1+u2*v2) )
45 - int2d(Th)( B11a*tr(phiold11,phiold12,phiold13)*div(v1,v2) + 2.*
    B1mu*ep2(phiold11,phiold12,phiold13)'*ep1(v1,v2) )
46 - int2d(Th)( B21a*tr(phiold21,phiold22,phiold23)*div(v1,v2) + 2.*
    B2mu*ep2(phiold21,phiold22,phiold23)'*ep1(v1,v2) )
47 - int2d(Th)( f1*v1 + f2*v2 )
48 - int2d(Th)( d2*(uold1*v1+uold2*v2) )
49 + int2d(Th)( d3*(uold1*v1+uold2*v2) )
50 + on(Gamma3,u1=0,u2=0.1*sin(dt*3.1416))
51 + on(Gamma1,u1=0,u2=0);
52
53 phi11 = C11a*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dx(u1) + D11a*(phiold11+phiold12) + 2*
    D1mu*phiold11;
54 phi12 = C11a*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dy(u2) + D11a*(phiold11+phiold12) + 2*
    D1mu*phiold12;
55 phi13 = C1mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D1mu*phiold13;
56
57 phi21 = C21a*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dx(u1) + 1*D21a*(phiold21+phiold22) +
    2*D2mu*phiold21;;
58 phi22 = C21a*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dy(u2) + 1*D21a*(phiold21+phiold22) +
    2*D2mu*phiold22;
59 phi23 = C2mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D2mu*phiold23;
60
61
62 sigma11 = lambda1*( div(u1,u2) - tr(phi11,phi12,phi13) ) + 2.*mu1*(dx(u1
    ) - phi11);
63 sigma12 = lambda1*(div(u1,u2) - tr(phi11,phi12,phi13)) + 2.*mu1*(dy(u2)
    - phi12);
64 sigma13 = 2.*mu1*( 0.5*dy(u1) + 0.5*dx(u2) - phi13);
65
66 sigma21 = lambda2*( div(u1,u2) - tr(phi21,phi22,phi23) ) + 2.*mu2*(dx(u1
    ) - phi21);
67 sigma22 = lambda2*(div(u1,u2) - tr(phi21,phi22,phi23)) + 2.*mu2*(dy(u2)
    - phi22);
68 sigma23 = 2.*mu2*( 0.5*dy(u1) + 0.5*dx(u2) - phi23);
69
70

```

```

71 oryokuup = -int1d(Th,Gamma3)(lambda1*(div(u1,u2) - tr(phi11,phi12,phi13))
    + 2.*mu1*(dy(u2) - phi12)+ lambda2*(div(u1,u2) - tr(phi21,phi22,
    phi23)) + 2.*mu2*(dy(u2) - phi22));
72 oryokulow = -int1d(Th,Gamma1)(lambda1*(div(u1,u2) - tr(phi11,phi12,phi13
    )) + 2.*mu1*(dy(u2) - phi12)+ lambda2*(div(u1,u2) - tr(phi21,phi22,
    phi23)) + 2.*mu2*(dy(u2) - phi22));
73
74
75 { ofstream gg("./oryoku_up.txt");
76   { ofstream hh("./oryoku_low.txt");
77     gg<<dt<<" "<<oryokuup<<endl; hh<<dt<<" "<<oryokulow<<endl;
78
79   phiold11 = phi11; phiold12 = phi12; phiold13 = phi13;
80   phiold21 = phi21; phiold22 = phi22; phiold23 = phi23;
81
82   uoold1 = uold1; uoold2 = uold2;
83   uold1 = u1; uold2 = u2;
84
85   int i=1;
86   real T=5.01;
87   for(real k =2*dt;k<T;k+=dt){
88     i = i+1;
89
90     solve visco([u1,u2],[v1,v2]) =
91       int2d(Th)( Ala*div(u1,u2)*div(v1,v2) + 2.*Amu*ep1(u1,u2)'*ep1(
          v1,v2) )
92       + int2d(Th)( d1*(u1*v1+u2*v2) )
93       - int2d(Th)( B1la*tr(phiold11,phiold12,phiold13)*div(v1,v2) + 2.*
          B1mu*ep2(phiold11,phiold12,phiold13)'*ep1(v1,v2) )
94       - int2d(Th)( B2la*tr(phiold21,phiold22,phiold23)*div(v1,v2) + 2.*
          B2mu*ep2(phiold21,phiold22,phiold23)'*ep1(v1,v2) )
95       - int2d(Th)( f1*v1 + f2*v2 )
96       - int2d(Th)( d2*(uoold1*v1+uoold2*v2) )
97       + int2d(Th)( d3*(uoold1*v1+uoold2*v2) )
98       + on(Gamma3,u1=0,u2=0.1*sin(k*3.1416))
99       + on(Gamma1,u1=0,u2=0);
100
101     phi11 = C1la*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dx(u1) + 1*D1la*(phiold11+
        phiold12) + 2*D1mu*phiold11;
102     phi12 = C1la*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dy(u2) + 1*D1la*(phiold11+
        phiold12) + 2*D1mu*phiold12;
103     phi13 = C1mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D1mu*phiold13;
104
105     phi21 = C2la*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dx(u1) + 1*D2la*(phiold21+
        phiold22) + 2*D2mu*phiold21;;
106     phi22 = C2la*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dy(u2) + 1*D2la*(phiold21+
        phiold22) + 2*D2mu*phiold22;
107     phi23 = C2mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D2mu*phiold23;
108
109

```



```

110     sigma11 = lambda1*( div(u1,u2) - tr(phi11,phi12,phi13) ) + 2.*mu1
        *(dx(u1) - phi11);
111     sigma12 = lambda1*(div(u1,u2) - tr(phi11,phi12,phi13)) + 2.*mu1*(
        dy(u2) - phi12);
112     sigma13 = 2.*mu1*( 0.5*dy(u1) + 0.5*dx(u2) - phi13);
113
114     sigma21 = lambda2*( div(u1,u2) - tr(phi21,phi22,phi23) ) + 2.*mu2
        *(dx(u1) - phi21);
115     sigma22 = lambda2*(div(u1,u2) - tr(phi21,phi22,phi23)) + 2.*mu2*(
        dy(u2) - phi22);
116     sigma23 = 2.*mu2*( 0.5*dy(u1) + 0.5*dx(u2) - phi23);
117
118     oryokuup = -int1d(Th,Gamma3)(lambda1*(div(u1,u2) - tr(phi11,phi12
        ,phi13)) + 2.*mu1*(dy(u2) - phi12)+ lambda2*(div(u1,u2) - tr
        (phi21,phi22,phi23)) + 2.*mu2*(dy(u2) - phi22));
119     oryokulow = -int1d(Th,Gamma1)(lambda1*(div(u1,u2) - tr(phi11,
        phi12,phi13)) + 2.*mu1*(dy(u2) - phi12)+ lambda2*(div(u1,u2)
        - tr(phi21,phi22,phi23)) + 2.*mu2*(dy(u2) - phi22));
120
121     gg<<k<<" "<<oryokuup<<endl;
122     hh<<k<<" "<<oryokulow<<endl;
123
124     phiold11 = phi11; phiold12 = phi12; phiold13 = phi13;
125     phiold21 = phi21; phiold22 = phi22; phiold23 = phi23;
126
127     uoold1 = uold1; uoold2 = uold2;
128     uold1 = u1; uold2 = u2;
129 }
130 }
131 }

```

---

### ソースコード 3: ex2.edp

---

```

1  real n=50;
2  border Gamma1(t=0,5){ x = t; y = 0.0; }
3  border Gamma2(t=0,1){ x = 5.0; y = t; }
4  border Gamma3(t=5,0){ x = t ; y = 1.0 ;}
5  border Gamma4(t=1,0){ x = 0.0 ; y = t ;}
6  mesh Th=buildmesh(Gamma1(100)+Gamma2(n)+Gamma3(100)+Gamma4(n));
7
8  fespace Vh(Th,P1),Vh2(Th,P0);
9  real sqrt2=sqrt(2.);
10
11 macro ep1(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
12 macro ep2(x1,x2,x3) [x1,x2,sqrt2*x3] //EOM
13 macro div(u,v) ( dx(u)+dy(v) ) // EOM
14 macro tr(a1,a2,a3) (a1 + a2) // EOM
15
16 real E = 50, nu = 0.49;
17 real mu= E/(2*(1+nu));

```

```

18 real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu));
19
20 real a=1.0,rho= 1.0,dt=0.01, sigma11,sigma12,sigma13,sigma21,sigma22,
    sigma23;
21 Vh u1,u2,v1,v2,uold1=0.0,uold2=0.0,uold1=0.0,uold2=0.0;
22
23 Vh2 phi11,phi12,phi13,phiold11=0.0,phiold12=0.0,phiold13=0.0;
24 Vh2 phi21,phi22,phi23,phiold21=0.0,phiold22=0.0,phiold23=0.0;
25
26 real f1 = 0.0, f2 = 0.0;
27 real Ala = 594.098884, Amu = 32.467532;
28 real B1la = 297.049442, B1mu = 16.233766;
29 real B2la = 297.049442, B2mu = 16.233766;
30 real C1la = 0.297049, C1mu = 0.016234;
31 real C2la = 0.297049, C2mu = 0.016234;
32 real D1la = -0.297049, D1mu = 0.483766;
33 real D2la = -0.297049, D2mu = 0.483766;
34
35 real d1 = ( (rho/(2*dt)) + (a/dt) );
36 real d2 = (rho + a)/dt;
37 real d3 = rho/(2*dt);
38
39 { ofstream ff("./u0.txt");
40 for (int ii=0;ii<Th.nt;ii++)
41 { for (int j=0; j <3; j++) ff<< Th[ii][j].x + u1[][Vh(ii,j)] << " "<<
    Th[ii][j].y + u2[][Vh(ii,j)] << " "<<endl;
42 ff<< Th[ii][0].x + u1[][Vh(ii,0)] << " "<< Th[ii][0].y + u2[][Vh(ii
    ,0)] << " "<<endl<<endl;
43 }
44 }
45
46 solve visco([u1,u2],[v1,v2]) =
47     int2d(Th)( Ala*div(u1,u2)*div(v1,v2) + 2.*Amu*ep1(u1,u2)'*ep1(v1
    ,v2) )
48     + int2d(Th)( d1*(u1*v1+u2*v2) )
49     - int2d(Th)( B1la*tr(phiold11,phiold12,phiold13)*div(v1,v2) + 2.*
    B1mu*ep2(phiold11,phiold12,phiold13)'*ep1(v1,v2) )
50     - int2d(Th)( B2la*tr(phiold21,phiold22,phiold23)*div(v1,v2) + 2.*
    B2mu*ep2(phiold21,phiold22,phiold23)'*ep1(v1,v2) )
51     - int2d(Th)( f1*v1 + f2*v2 )
52     - int2d(Th)( d2*(uold1*v1+uold2*v2) )
53     + int2d(Th)( d3*(uold1*v1+uold2*v2) )
54     + on(Gamma4,u1=0.0,u2=sin(dt*3.1416*4));
55
56 phi11 = C1la*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dx(u1) + D1la*(phiold11+phiold12) + 2*
    D1mu*phiold11;
57 phi12 = C1la*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dy(u2) + D1la*(phiold11+phiold12) + 2*
    D1mu*phiold12;
58 phi13 = C1mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D1mu*phiold13;
59

```

```

60 phi21 = C21a*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dx(u1) + 1*D21a*(phiold21+phiold22) +
    2*D2mu*phiold21;;
61 phi22 = C21a*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dy(u2) + 1*D21a*(phiold21+phiold22) +
    2*D2mu*phiold22;
62 phi23 = C2mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D2mu*phiold23;
63
64 phiold11 = phi11; phiold12 = phi12; phiold13 = phi13;
65 phiold21 = phi21; phiold22 = phi22; phiold23 = phi23;
66 uoold1 = uold1; uoold2 = uold2;
67 uold1 = u1; uold2 = u2;
68
69 { ofstream ff("./u1.txt");
70 for (int ii=0;ii<Th.nt;ii++)
71 { for (int j=0; j <3; j++) ff<< Th[ii][j].x + u1[][Vh(ii,j)] << " "<<
    Th[ii][j].y + u2[][Vh(ii,j)] << " "<<endl;
72 ff<< Th[ii][0].x + u1[][Vh(ii,0)] << " "<< Th[ii][0].y + u2[][Vh(ii
    ,0)] << " "<<endl<<endl;
73 }
74 }
75
76 int i=1;
77 real T=4.01;
78 for(real k =2*dt;k<T;k+=dt){
79     i = i+1;
80
81     solve visco([u1,u2],[v1,v2]) =
82         int2d(Th)( Al1a*div(u1,u2)*div(v1,v2) + 2.*Amu*ep1(u1,u2)*ep1(
            v1,v2) )
83         + int2d(Th)( d1*(u1*v1+u2*v2) )
84         - int2d(Th)( B11a*tr(phiold11,phiold12,phiold13)*div(v1,v2) + 2.*
            B1mu*ep2(phiold11,phiold12,phiold13)*ep1(v1,v2) )
85         - int2d(Th)( B21a*tr(phiold21,phiold22,phiold23)*div(v1,v2) + 2.*
            B2mu*ep2(phiold21,phiold22,phiold23)*ep1(v1,v2) )
86         - int2d(Th)( f1*v1 + f2*v2 )
87         - int2d(Th)( d2*(uold1*v1+uold2*v2) )
88         + int2d(Th)( d3*(uoold1*v1+uoold2*v2) )
89         + on(Gamma4,u1=0.0,u2=sin(k*3.1416*4));
90
91     phi11 = C11a*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dx(u1) + 1*D11a*(phiold11+
        phiold12) + 2*D1mu*phiold11;
92     phi12 = C11a*div(u1,u2) + 2.*C1mu*dy(u2) + 1*D11a*(phiold11+
        phiold12) + 2*D1mu*phiold12;
93     phi13 = C1mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D1mu*phiold13;
94
95     phi21 = C21a*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dx(u1) + 1*D21a*(phiold21+
        phiold22) + 2*D2mu*phiold21;;
96     phi22 = C21a*div(u1,u2) + 2.*C2mu*dy(u2) + 1*D21a*(phiold21+
        phiold22) + 2*D2mu*phiold22;
97     phi23 = C2mu*(dx(u2)+dy(u1)) + 2*D2mu*phiold23;
98

```

```

99     phiold11 = phi11; phiold12 = phi12; phiold13 = phi13;
100    phiold21 = phi21; phiold22 = phi22; phiold23 = phi23;
101
102    uoold1 = uold1; uoold2 = uold2;
103    uold1 = u1; uold2 = u2;
104
105    { ofstream ff("./u"+i+".txt");
106      for (int ii=0;ii<Th.nt;ii++)
107      { for (int j=0; j <3; j++) ff<< Th[ii][j].x + u1[][Vh(ii,j)] <<
        " "<< Th[ii][j].y + u2[][Vh(ii,j)] << " "<<endl;
108      ff<< Th[ii][0].x + u1[][Vh(ii,0)] << " "<< Th[ii][0].y + u2[][
        Vh(ii,0)] << " "<<endl<<endl;
109      }
110    }
111 }

```

---