修士論文

円周上の解析的微分同相写像とその局所共役

金沢大学大学院　自然科学研究科　数物科学専攻　数学コース
1715011006

伊藤　和馬

2019 年 1 月 31 日

目次

1　はじめに

離散力学系ではある整数の時刻 n での状態を表す点 x_n から次の時刻 $n+1$ での状態 x_{n+1} への変化が、関数または写像を f として

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \boldsymbol{Z}(\text{または } \boldsymbol{N})$$

の形で与えられる。初期状態を x_0 とすると $\{f^n(x_0)\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ を点 x_0 の軌道と呼ぶ（f^n は f を n 回反復合成した写像を表す）([3])。この軌道を調べることで、時間の経過に伴う状態の変化を見ていくことができる。

ある写像の軌道を調べるときには共役性を利用することが効果的である。写像 f, g が共役であるとは、$h^{-1} \circ f \circ h = g$ を満たす写像 h が存在することをいう。共役な写像は力学系としては同じものだと考えることができる。例えば $g^n(x) = x$ を満たす点 x を g の周期 n の周期点というが、このとき点 $h(x)$ は f の周期 n の周期点である。よって写像 f, g は同じ性質の軌道を同じ数だけもつということになる ([3])。このような事情から、何かダイナミクスを調べる際にそれと共役でよく知られた別のダイナミクスを見つけようという問題が発生する。

本論では共役問題の中でも特に円周上の微分同相写像の共役化について考えていく。円周は今回の場合複素数平面 $\boldsymbol{C}$ 上の原点中心の単位円としており、今後記号で

$$S^1 = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = 1\}$$

と表記する。この写像は特定の条件を満たせば円周上の定数回転と共役になるという事実がアーノルドの定理として知られている。定数回転のダイナミクスはよく知られており、例えば無理数回転の軌道は S^1 で稠密である ([3])。アーノルドの定理では円環

$$A_r = \{z \in \boldsymbol{C} \mid 1/r < |z| < r\}$$

上の正則関数について考えるのだが、Katok らによる定理の証明 ([1]) では $r > 2$ を仮定していた。一般には $r > 1$ として $A_{1+r}(r > 0)$ を考えればよく、この場合の証明をするのが本論の主な内容である。また、原点中心の円板上の正則関数との共役性について述べた Poincaré – Siegel の定理も紹介する。

本論の構成としては、2 章で回転数という概念について解説し、3 章ではアーノルドの定理の内容を述べる。4 章でその証明をし、最後に Poincaré – Siegel の定理を紹介する。

最後に、本論の完成に至るまで、伊藤秀一教授には様々な助言をいただくなど熱心にご指導して下さり心より感謝申し上げます。また、同期の方たちに助けていただいた場面も少なからずありました。本当にありがとうございました。

2　回転数

この章ではアーノルドの定理を述べる際に必要となる「回転数」という概念について解説する。

命題 2.1([1], 命題 11.1.1.)　$f : S^1 \to S^1$ を S^1 上の向きを保つ (順序を保つ）同相写像、$\pi : \boldsymbol{R} \to S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を自然な射影とする。すると、$f \circ \pi = \pi \circ F$ を満たす $\boldsymbol{R}$ 上の連続写像 F が定義できる（F は f の持ち上げと呼ばれる)。さらに、任意の実数 x に対して極限値

$$\tau(F) = \lim_{|n| \to \infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$$

が存在する。この値は $x \in \boldsymbol{R}$ に依存せず、整数部分を除いて矛盾なく定まる。つまり f の任意の持ち上げ F_1, F_2 に対して、$\tau(F_1) - \tau(F_2) \in \boldsymbol{Z}$ が成り立つ。

定義 2.2([1], 定義 11.1.2.)　$\tau(f) = \pi(\tau(F))$ は f の回転数と呼ばれる。

（命題 2.1 の証明）　まずは $\tau(F)$ が x に依存しないことを示す。f は向きを保つ同相写像だから一般に

$$F(x+1) = F(x) + 1 \tag{2.1}$$

がいえる。したがって任意の $x, y \in [0, 1)$ に対して $|F(y) - F(x)| < 1$ が成り立つ。よって

$$|F(F(y)) - F(F(x))| = |F^2(y) - F^2(x)| < 1$$

となり、以下帰納的に

$$|F^n(y) - F^n(x)| < 1 \tag{2.2}$$

が成り立つ。したがって

$$\left| \frac{1}{n}|F^n(x) - x| - \frac{1}{n}|F^n(y) - y| \right| \leq \frac{1}{n}(|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y|) \leq \frac{2}{n}$$

がいえ、２つの極限値は等しい。

続けて一般の $x, y \in \boldsymbol{R}$ の場合を考える。

$$x = x' + k \quad (0 \leq x' < 1, k \in \boldsymbol{Z}), \quad y = y' + l \quad (0 \leq y' < 1, l \in \boldsymbol{Z}) \tag{2.3}$$

とおく。(2.1) 式を利用すると $F(x+k) = F(x) + k (k \in \boldsymbol{Z})$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} F^n(x+k) &= F^{n-1}(F(x) + k) \\ &\vdots \\ &= F^n(x) + k \end{aligned}$$

となるから (2.2),(2.3) 式より

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}|F^n(x)-x|-\frac{1}{n}|F^n(y)-y|\right| &\leq \frac{1}{n}(|F^n(x)-F^n(y)|+|x-y|) \\
&\leq \frac{1}{n}\{|F^n(x'+k)-F^n(y'+l)|+|(x'+k)-(y'+l)|\} \\
&\leq \frac{1}{n}\{|(F^n(x')+k)-(F^n(y')+l)|+|(x'+k)-(y'+l)|\} \\
&\leq \frac{1}{n}(|F^n(x')-F^n(y')|+|x'-y'|+2|k-l|) \\
&\leq \frac{2(1+|k-l|)}{n}
\end{aligned}$$

がいえ、２つの極限値は等しい。

最後に極限値 $\tau(F)$ が存在することを示す。まずは f が周期点を持つ場合を考える。x を周期 m の周期点とすると

$$F^m(x)=x+k \quad (k\in\boldsymbol{Z})$$

がいえる。したがって j を自然数とすると

$$\begin{aligned}
F^{jm}(x) &= F^{(j-1)m}(x+k) \\
&= F^{(j-2)m}(x+2k) \\
&\vdots \\
&= x+jk
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\lim_{|n|\to\infty}\frac{1}{n}(F^n(x)-x)=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{jm}(F^{jm}(x)-x)=k/m$$

となり、極限値が存在する。

続いて f が周期点を持たない場合を考える。このとき F^n も周期点を持たないから、各点 $x\in\boldsymbol{R}$ について不等式

$$k_n<F^n(x)-x<k_n+1$$

を満たす整数 k_n が存在する。この不等式は $x=0,F^n(0),F^{2n}(0),\cdots$ のとき

$$k_n<F^n(0)<k_n+1$$

$$k_n<F^{2n}(0)-F^n(0)<k_n+1$$

$$\vdots$$

$$k_n<F^{mn}(0)-F^{(m-1)n}(0)<k_n+1$$

となる。各不等式を辺々足すと

$$mk_n<F^{mn}(0)<m(k_n+1)$$

となり、よって

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{k_n+1}{n}$$

となる。$x=0$ のときの不等式から

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{n}(0)}{n} < \frac{k_n+1}{n}$$

がいえるから、これら 2 つの不等式から

$$\left|\frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^{n}(0)}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

が成り立つ。同様にして

$$\left|\frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^{m}(0)}{m}\right| < \frac{1}{m}$$

も成り立つ。これら 2 つの不等式から

$$\left|\frac{F^{n}(0)}{n} - \frac{F^{m}(0)}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

が成り立つ。これより数列 $\{F^n(0)/n\}$ がコーシー列であることがいえる。よってこの数列の極限値が存在するから、極限値

$$\tau(F) = \lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$$

も存在する。 □

命題 2.3([1], 命題 11.1.3.)　$h : S^1 \to S^1$ が向きを保つ微分同相写像であるならば、$\tau(h^{-1}fh) = \tau(f)$ が成り立つ。

（証明）　F, H はそれぞれ f, h の持ち上げとする。このとき

$$\pi H^{-1} = h^{-1}h\pi H^{-1} = h^{-1}\pi H H^{-1} = h^{-1}\pi$$

となるから H^{-1} は h^{-1} の持ち上げである。また、

$$\pi H^{-1}FH = h^{-1}\pi FH = h^{-1}f\pi H = h^{-1}fh\pi$$

となるから $H^{-1}FH$ は $h^{-1}fh$ の持ち上げである。

H が $H(0) \in [0,1)$ を満たすとする。ここで

$$|H^{-1}F^nH(x) - F^n(x)| = |(H^{-1}FH)^n(x) - F^n(x)|$$

を評価する。$x \in [0,1)$ として

$$0 - 1 < H(x) - x < H(x) < H(1) < 2 \tag{2.4}$$

が成り立つから、周期性を考慮して

$$|H(x) - x| < 2 \quad (x \in \boldsymbol{R}) \tag{2.5}$$

がいえる。同様にして

$$|H^{-1}(x) - x| < 2 \quad (x \in \boldsymbol{R}) \tag{2.6}$$

もいえる。

$[x]$ を $x \in \boldsymbol{R}$ の整数部分とすると、$|y-x| < 2$ ならば $|[y]-[x]| \leq 2$ であるから $|F^n(y)-F^n(x)| < 3$ が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} -3 \leq [y] - [x] - 1 &= F^n([y]) - F^n([x]+1) \\ &< F^n(y) - F^n(x) \\ &< F^n([y]+1) - F^n([x]) \\ &= [y] + 1 - [x] \leq 3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

式 (2.4)〜(2.7) より

$$|H^{-1}F^nH(x) - F^n(x)| \leq |H^{-1}F^nH(x) - F^nH(x)| + |F^nH(x) - F^n(x)| < 2 + 3$$

が成り立つ。よって

$$|(H^{-1}FH)^n(x) - F^n(x)|/n < 5/n$$

となる。 □

3　アーノルドの定理

ここではアーノルドの定理の内容を具体的に述べる。まずは定理に登場する用語の定義をする。

定義 3.1　$\alpha \in \boldsymbol{R}$ とする。ある定数 c, d が存在して、0 でない任意の整数 p 及び任意の自然数 q に対して、不等式 $|q\alpha - p| > cq^{-d}$ が成り立つとき、α を (c,d) **型のディオファントス数** と呼ぶ。

定義 3.2　正則写像 f, g について、$h^{-1} \circ f \circ h = g$ を満たす正則写像 h が存在するとき、f は g と **解析的共役** であるという。

最後にアーノルドの定理の内容を述べる。

定理 3.3(アーノルドの定理)　$c, r > 0, d > 1$ とする。また α を (c,d) 型のディオファントス数、u を円環 A_{1+r} 上の正則関数、$f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + u(z)$ として、この写像 f は S^1 を保ちそこで回転数 α をもつとする。このとき $\epsilon > 0$ が存在して、A_{1+r} 上で $|u| < \epsilon$ ならば、f は $A_{1+\frac{r}{2}}$ 上で回転数 α の円周の定数回転 $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$ と解析的共役になる。

4　アーノルドの定理の証明

（証明の概要）　共役写像を具体的に構成することによりその存在を示す。共役方程式

$$F(f,h) = h^{-1} \circ f \circ h = g$$

の解をニュートン法を用いて求め、共役写像を具体的に構成する。この証明では

$$f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + u(z), \quad g(z) = \lambda z \quad (\lambda = e^{2\pi i\alpha})$$

とする。解を見つける際に正則写像をローラン級数で表示して考えていくが、これができることを保証しているのが補題 4.1 である。こうして得られる解の正則性と大きさの評価について補題 4.2 で述べる。補題 4.3,4.4 でニュートン法における関数列の収束を述べるための準備を行う。先ほど述べた共役方程式は線形化すると

$$\begin{aligned} F(g,Id) + D_1F(g,Id)u + D_2F(g,Id)w &= g \\ u + D_2F(g,Id)w &= 0 \end{aligned}$$

となる。ただし、$D_1F(g,Id), D_2F(g,Id)$ はそれぞれ F の f 及び h 方向の微分であり、$w(z) = h(z) - z$ としている。よって

$$f_n - g + D_2F(g,Id)w_{n+1} = 0$$

$$\big(h_{n+1} = h_n \circ (Id + w_{n+1}), \quad h_0 = Id, \quad w_1 = w,$$

$$f_{n+1} = h_{n+1}^{-1} \circ f_n \circ h_{n+1}, \quad f_0 = f\big)$$

と定め、座標変換 h_n を繰り返す。このとき

$$r_0 = r, \quad r_{n+1} = r_n(1 - 5\Delta) \quad \text{ただし } \Delta_n = \frac{1}{10(2^n + 1)}$$

として円環 A_{1+r_n} 上で考える。

$$k_n = h_1 \circ \cdots \circ h_{n-1}$$

とおくと、この関数列求める共役写像 h に $A_{1+\frac{r}{2}}$ 上で一様収束することが示される。

(アーノルドの定理の証明)　共役写像 h をみつけるため、共役方程式

$$F(f,h) = h^{-1} \circ f \circ h = g \tag{4.1}$$

を考える。Id を恒等写像とすると

$$F(f,h) = F(g,Id) + D_1F(g,Id)(f-g) + D_2F(g,Id)(h-Id) + R(f,h)$$

と書ける。ただし、$R(f,h)$ は $(f-g, h-Id)=(u,w)$ における 2 次以上の項である。$R(f,h)$ を無視すると

$$F(g,Id)+D_1F(g,Id)u+D_2F(g,Id)w=g$$

となる。

$$\begin{aligned}F(g,Id)&=(Id)^{-1}\circ g\circ Id\\&=g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1F(g,Id)u&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{F(g+tu,Id)-F(g,Id)\}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(g+tu)-g\}\\&=u\end{aligned}$$

であるから

$$u+D_2F(g,Id)w=0 \tag{4.2}$$

ここで

$$g=\Lambda,\quad \Lambda(z)=\lambda z$$

とすると

$$\begin{aligned}D_2F(g,Id)w&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{F(\Lambda,Id+tw)-F(\Lambda,Id)\}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(Id+tw)^{-1}\circ\Lambda\circ(Id+tw)-\Lambda\}\end{aligned}$$

また一般に

$$\begin{aligned}x+tw(x)&=y\\x(y,t)&=y+\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=0}t+\dots\\&=y-\left.\left\{w(x)+t\frac{\partial w}{\partial t}\right\}\right|_{t=0}t+\dots\\&=y-tw+\dots\end{aligned}$$

となることを踏まえると

$$\begin{aligned}D_2F(g,Id)w&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(Id+tw)\circ\Lambda\circ(Id+tw)-\Lambda\}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(\Lambda+t\Lambda\circ w)-tw\circ\Lambda\circ(Id+tw)-\Lambda\}\\&=\Lambda\circ w-w\circ\Lambda\end{aligned}$$

よって (4.2) 式より

$$u=w\circ\Lambda-\Lambda w \tag{4.3}$$

ここからは u, w をローラン展開して考えていくが、これができることを保証するのが以下の補題である。

補題 4.1 (1) ϕ を A_{1+r} 上正則、$\overline{A_{1+r}}$ 上連続かつ A_{1+r} 上で $|\phi| < \epsilon$ を満たすとする。このとき、$\phi(z) = \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \phi_k z^k, |\phi_k| \leq \epsilon(1+r)^{-|k|}$ が成り立つ。
(2) $|\phi_k| \leq K(1+r)^{-|k|}, \phi(z) = \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \phi_k z^k$ ならば、ϕ は A_{1+r} 上正則かつ $A_{1+r-\delta}$ 上で $|\phi| \leq 2K(1+r)/\delta$ を満たす。

（証明）(1)

$$\phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1+r} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < 1+r$$

$$\phi^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\frac{1}{1+r}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| > \frac{1}{1+r}$$

とおく。ϕ は A_{1+r} 上正則だからコーシーの積分公式より

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (C \text{ は } A_{1+r}\text{内の円周}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\zeta|=1+r} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|\zeta|=\frac{1}{1+r}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right) \\
&= \phi^+(z) + \phi^-(z)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{\phi(\zeta)}{\zeta}\frac{1}{1 - z/\zeta} \\
&= \frac{\phi(\zeta)}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}(z/\zeta)^k \quad （|\zeta| = 1+r, z \in A_{1+r} \text{より}） \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(\zeta) z^k}{\zeta^{k+1}}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\phi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1+r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(\zeta) z^k}{\zeta^{k+1}} d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{|\zeta|=1+r} \frac{1}{2\pi i}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta\right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}|\phi_k| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1+r}\left|\frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\right|d\zeta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\epsilon}{(1+r)^{k+1}}\cdot 2\pi(1+r) \\ &= \epsilon(1+r)^{-k}\end{aligned}$$

同様にして

$$\phi^-(1/z) = \sum_{k=1}^{\infty}\phi_{-k}z^k, \phi_{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\frac{1}{1+r}}\phi(\zeta)\zeta^{k-1}d\zeta$$

$$|\phi_{-k}| \leq \epsilon(1+r)^{-k}$$

も成り立つ。 □

(2)

$$\begin{aligned}|\phi| &= \left|\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}\phi_n z^n\right| \\ &\leq \sum_{n\in\boldsymbol{Z}}|\phi_n||z|^n \\ &\leq \sum_{n\in\boldsymbol{Z}}K(1+r)^{-|n|}(1+r-\delta)^{|n|} \quad (z\in A_{1+r-\delta}\text{より}) \\ &= 2K\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{\delta}{1+r})^n - K \\ &\leq \frac{2K}{1-(1-\frac{\delta}{1+r})} \\ &= 2K(1+r)/\delta\end{aligned}$$

よって ϕ は広義一様収束することが分かるため、正則であるといえる。 □

ここからはアーノルドの定理の証明に戻る。$u=\sum\limits_{k\in\boldsymbol{Z}}u_k z^k, w=\sum\limits_{k\in\boldsymbol{Z}}w_k z^k$ とローラン展開すると (4.3) 式より

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}u_k z^k &= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}w_k(\lambda z)^k - \lambda\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}w_k z^k \\ &= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}(\lambda^k-\lambda)w_k z^k \\ &= \Lambda\circ w - w\circ\Lambda\end{aligned}$$

よって

$$u_k = (\lambda^k-\lambda)w_k \quad (k=1,2,\cdots) \tag{4.4}$$

である。さらに $\lambda^k \neq \lambda (k \neq 1)$ である。なぜならば、(c,d) 型のディオファントス数 α は無理数だからである。よって

$$w_k = \frac{u_k}{\lambda^k - \lambda} \quad (k \neq 1) \tag{4.5}$$

なお、(4.4) 式が成り立つためには $\eta = u_1 = 0$ である必要があるから、

$$\tilde{u}(z) = u(z) - \eta z$$

とおきこれを u の代わりに用いる。つまり

$$\tilde{u}(z) = \Lambda \circ w - w \circ \Lambda \tag{4.6}$$

により w を定める。すると $|\tilde{u}| < \epsilon$ のとき

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}'| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tilde{u}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r\Delta e^{i\theta})^2} \cdot ir\Delta e^{i\theta} d\theta \right| \quad (\zeta = z + t\Delta e^{i\theta} \text{と置換した}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{r\Delta e^{i\theta}} \right| d\theta \\
&= \frac{\epsilon}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{r\Delta} \\
&= \frac{\epsilon}{r\Delta}
\end{aligned}$$

よって $\max\left\{\epsilon, \frac{\epsilon}{r\Delta}\right\}$ を改めて ϵ とおき直せば、A_{1+r} 上で

$$|\tilde{u}| < \epsilon, \quad |\tilde{u}'| < \epsilon \tag{4.7}$$

が成り立つ。$\tilde{u}$ の場合でも (4.5) 式が成り立つ。ここで登場した w に対して次の補題を適用する。

補題 4.2 $\phi = \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \phi_k z^k$ は $A_{1+\rho}$ 上正則かつ $|\phi| < \delta$ をみたすとする。λ はディオファントス条件を満たす、つまり、正の定数 $c_0, d \in \boldsymbol{N}$ が存在して、任意の自然数 q に対して不等式

$$|\lambda^q - 1| \geq \frac{q^{-d}}{c_0 |\lambda|} \tag{4.8}$$

が成り立つと仮定する。このとき $\psi(z) = \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \frac{\phi_k}{\lambda^k - \lambda} z^k$ は $A_{1+\rho}$ 上正則であり、$\overline{A_{1+\rho(1-\Delta)}}$ 上で $|\psi| < 2\delta c_0 c(d) \Delta^{-(d+1)}$ を満たすような $c(d) > 0$ が存在する。

（証明）補題 4.1(1) と (4.8) 式より

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\phi_k}{\lambda^k - \lambda} \right| &\leq \delta (1+\rho)^{-k} c_0 (k-1)^d \\
&\leq \delta c_0 k^d (1+\rho)^{-k} \ (k \geq 0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\phi_{-k}}{\lambda^{-k}-\lambda}\right| &\leq \delta(1+\rho)^{-k}c_0(k+1)^d \\
&\leq \delta c_0(k+1)^d(1+\rho)^{-k}\ (k \geq 1)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
|\psi| &= \left|\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \frac{\phi_k}{\lambda^k-\lambda}z^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\phi_k}{\lambda^k-\lambda}\right||z|^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\phi_{-k}}{\lambda^{-k}-\lambda}\right||z|^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\delta c_0 k^d(1+\rho)^{-k}|z|^k + \sum_{k=1}^{\infty}\delta c_0(k+1)^d(1+\rho)^{-k}|z|^{-k} \\
&\leq \delta c_0\sum_{k=0}^{\infty}k^d(1+\rho)^{-k}\{1+\rho(1-\Delta)\}^k + \delta c_0\sum_{k=2}^{\infty}k^d(1+\rho)^{-(k-1)}\{1+\rho(1-\Delta)\}^{k-1} \\
&\quad (z \in \overline{A_{1+\rho(1-\Delta)}}) \\
&< \delta c_0\sum_{k=0}^{\infty}k^d\left(1-\frac{\rho\Delta}{1+\rho}\right)^k + \frac{\delta c_0}{1-\frac{\rho\Delta}{1+\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}k^d\left(1-\frac{\rho\Delta}{1+\rho}\right)^k
\end{aligned}
$$

ここで、等式 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{1}{1-x}$ の両辺を d 回微分したものを考えて

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}k^d x^k &\leq \sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-d+1)x^{k-d} \\
&= \frac{d!}{(1-x)^{d+1}} \quad (|x|<1)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
|\psi| &\leq \delta c_0 d!\left(\frac{\rho\Delta}{1+\rho}\right)^{-(d+1)} + \frac{\delta c_0 d!}{1-\frac{\rho\Delta}{1+\rho}}\left(\frac{\rho\Delta}{1+\rho}\right)^{-(d+1)} \\
&< 2\delta c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} \quad \left(c(d) = \frac{\delta c_0 d!}{1-\frac{\rho\Delta}{1+\rho}}\right)
\end{aligned}
$$

よって ψ は広義一様収束することが分かるため、ψ は $A_{1+\rho}$ 上で正則である。 □

再びアーノルドの定理の証明に戻る。実はアーノルドの定理の仮定が満たされているならば、補題

4.2 で仮定しているディオファントス条件が満たされていることがいえる。なぜならば

$$
\begin{aligned}
|\lambda^q - 1| &= |e^{2\pi i q\alpha} - e^{2\pi i p}| \\
&= |e^{2\pi i p}||e^{2\pi i(q\alpha - p)} - 1| \\
&= |e^{2\pi i(q\alpha - p)} - 1| \\
&= \left|2\sin\frac{q\alpha - p}{2}\right| \\
&\geq 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left|\frac{q\alpha - p}{2}\right| \\
&= \frac{2}{\pi}|q\alpha - p| \\
&> \frac{2}{\pi} \cdot cq^{-d} \\
&\geq \frac{q^{-d}}{c_0|\lambda|} \quad (|\lambda| = 1 \text{ より})
\end{aligned}
$$

と式変形できるからである。よって $\rho = r, \delta = \epsilon$ として補題 4.2 を適用すると、$\overline{A_{1+r(1-\Delta)}}$ 上で

$$
|w| < 2\epsilon c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} \tag{4.9}
$$

が成り立つ。また (4.6) 式より

$$
\tilde{u}'(z) = \lambda w'(\lambda z) - \lambda w'(z)
$$

となり、さらに

$$
z\tilde{u}'(z) = \lambda z w'(\lambda z) - \lambda z w'(z)
$$

となるから、A_{1+r} 上で

$$
\begin{aligned}
|zw'(z)| &= |\lambda z w'(z)| \\
&= |\lambda z w'(\lambda z) - z\tilde{u}'(z)| \\
&= \left|\sum_{k\neq 1}\frac{ku_k}{\lambda^k - \lambda}(\lambda z)^k - \sum_{k\neq 1} ku_k z^k\right| \\
&= \left|\sum_{k\neq 1}\frac{ku_k}{\lambda^k - \lambda} z^k\right| \\
&< 2(1+r)\epsilon c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} \quad (\text{補題 } 4.2 \text{ より})
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

が成り立つ。

共役方程式 (4.1) は (4.2) 式のように線形化されたが、これにならって

$$
f_n - g + D_2F(g, Id)w_{n+1} = 0 \tag{4.11}
$$

ただし

$$
h_{n+1} = h_n \circ (Id + w_{n+1}),\ h_0 = Id,\ w_1 = w,\ f_{n+1} = h_n + 1^{-1} \circ f_n \circ h_{n+1},\ f_0 = f \tag{4.12}
$$

と定めて、ニュートン法を用いる。

$$u_n = f_n - \Lambda$$

とおき、

$$r_0 = r, \quad r_{n+1} = r_n(1-5\Delta) \quad \text{ただし}\ \Delta_n = \frac{1}{10(2^n+1)}$$

として円環 A_{1+r_n} 上で座標変換 h_n を繰り返す。ここで次の補題を示す。

補題 4.3

$$2\epsilon c_0 c(d) < \Delta^{d+2} r/(1+r)^2, \quad 0 < \Delta < 1/4 \tag{4.13}$$

ならば

$$h(A_{1+r(1-4\Delta)}) \subset A_{1+r(1-3\Delta)}, \quad A_{1+r(1-2\Delta)} \subset h(A_{1+r(1-\Delta)} \tag{4.14}$$

が成り立つ。

（証明）$|z| < 1 + r(1-4\Delta)$ を満たす任意の z に対して

$$\begin{aligned}
|h(z)| &= |z + w(z)| \\
&\leq |z| + |w(z)| \\
&< 1 + r(1-4\Delta) + 2\epsilon c_0 c(d) \Delta^{-(d+1)} \\
&< 1 + r(1-4\Delta) + \Delta r/(1+r)^2 \\
&< 1 + r(1-4\Delta) + \Delta r \\
&= 1 + r(1-3\Delta)
\end{aligned}$$

$|z| > \frac{1}{1+r(1-4\Delta)}$ を満たす任意の z に対して

$$\begin{aligned}
|h(z)| &\geq |z| - |w(z)| \\
&> \frac{1}{1+r(1-4\Delta)} - 2\epsilon c_0 c(d) \Delta^{-(d+1)} \\
&> \frac{1}{1+r(1-4\Delta)} + \Delta r/(1+r)^2 \\
&> \frac{1}{1+r(1-4\Delta)} + \frac{r\Delta}{\{1+r(1-4\Delta)\}\{1+r(1-3\Delta)\}} \\
&= \frac{1}{1+r(1-3\Delta)}
\end{aligned}$$

よって $h(A_{1+r(1-4\Delta)}) \subset A_{1+r(1-3\Delta)}$ が成り立つ。$|z| \geq 1 + r(1-\Delta)$ のときは

$$\begin{aligned}
|h(z)| &\geq |z| - |w(z)| \\
&> 1 + r(1-\Delta) - 2\epsilon c_0 c(d) \Delta^{-(d+1)} \\
&> 1 + r(1-\Delta) - \Delta r/(1+r)^2 \\
&> 1 + r(1-\Delta) - \Delta r \\
&= 1 + r(1-2\Delta)
\end{aligned}$$

$|z| \leq \frac{1}{1+r(1-\Delta)}$ のときは

$$
\begin{aligned}
|h(z)| &\leq |z| + |w(z)| \\
&< \frac{1}{1+r(1-\Delta)} + 2\epsilon c_0 c(d) \Delta^{-(d+1)} \\
&< \frac{1}{1+r(1-\Delta)} + \Delta r/(1+r)^2 \\
&< \frac{1}{1+r(1-\Delta)} + \frac{r\Delta}{\{1+r(1-\Delta)\}\{1+r(1-2\Delta)\}} \\
&= \frac{1}{1+r(1-2\Delta)}
\end{aligned}
$$

よって対偶が真であるから $A_{1+r(1-2\Delta)} \subset h(A_{1+r(1-\Delta)})$ □

補題 4.4 $f_1 = h^{-1} \circ f \circ h, u_1(z) = f_1(z) - \lambda z$ とおく。

$$
2\epsilon c_0 c(d) < \Delta^{d+2} r/(1+r)^2, \quad 0 < \epsilon < \frac{r\Delta}{(1+r)^2}, \quad 0 < \Delta < 1/5 \tag{4.15}
$$

を満たすならば、f_1 は $A_{1+r(1-4\Delta)}$ 上で定義され、$A_{1+r(1-5\Delta)}$ 上で

$$
|u_1'| \leq \epsilon^2 \frac{c' c_0 c(d)}{(1-\Delta)\Delta^{d+2}}
$$

を満たすような $c' > 0$ が存在する。

（証明） 補題 4.3 より $h(A_{1+r(1-4\Delta)}) \subset A_{1+r(1-3\Delta)} \subset A_{1+r}$ であるから、$f \circ h$ は $A_{1+r(1-4\Delta)}$ 上で定義される。(4.7) 式より $A_{1+r(1-3\Delta)}$ 上で

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= |\lambda z + u(z)| \\
&\leq |z| + |u| \\
&< 1 + r(1-3\Delta) + \epsilon \\
&< 1 + r(1-3\Delta) + \frac{r\Delta}{(1+r)^2} \\
&< 1 + r(1-3\Delta) + r\Delta \\
&< 1 + r(1-2\Delta) \\
|f(z)| &\geq |z| - |u| \\
&> \frac{1}{1+r(1-3\Delta)} - \epsilon \\
&> \frac{1}{1+r(1-3\Delta)} - \frac{r\Delta}{(1+r)^2} \\
&> \frac{1}{1+r(1-3\Delta)} - \frac{r\Delta}{\{1+r(1-2\Delta)\}\{1+r(1-3\Delta)\}} \\
&= \frac{1}{1+r(1-2\Delta)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって $A_{1+r(1-3\Delta)}$ 上で

$$f(z) \in A_{1+r(1-2\Delta)}$$

が成り立つ。補題 4.3 より

$$h^{-1}(A_{1+r(1-2\Delta)}) \subset A_{1+r(1-\Delta)}$$

だから $f_1 = h^{-1} \circ f \circ h$ は $A_{1+r(1-4\Delta)}$ 上で定義される。

$f_1 = h^{-1} \circ f \circ h$ より

$$h \circ f_1 = f \circ h$$

であり、

$$(Id + w)(\lambda z + u_1(z)) = (\Lambda + u)(h(z))$$

と書き換えられる。

$$\lambda z + u_1(z) + w(\lambda z + u_1(z)) = \lambda(z + w(z)) + u(h(z))$$

と式変形できるから

$$u_1(z) = -w(\lambda z + u_1(z)) + u(h(z)) + \lambda w(z) \tag{4.16}$$

となる。(4.6) 式より

$$u(z) - \eta z = w(\lambda z) - \lambda w(z)$$

であり

$$\lambda w(z) = w(\lambda z) - u(z) + \eta z$$

となるからこれを (4.16) 式に代入して

$$\begin{aligned} u_1(z) &= w(\lambda z) - w(\lambda z + u_1(z)) + u(h(z)) - u(z) + \eta z \qquad (4.17) \\ &= w(\lambda z) - w((\lambda + \eta)z) + \\ &\quad w((\lambda + \eta)z) - w((\lambda + \eta)z + u_1(z) - \eta z) \\ &\quad + u(z + w(z)) - u(z) + \eta z \qquad (4.18) \end{aligned}$$

(4.10) 式より

$$\frac{1}{1+r}|w'(z)| < |zw'(z)| < 2(1+r)\epsilon c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)}$$

がいえるから

$$|w'(z)| < 2(1+r)^2 \epsilon c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} \tag{4.19}$$

また一般に

$$\begin{aligned} |\phi(z_1) - \phi(z_0)| &= \left| \int_0^1 \{\frac{d}{dt}\phi(z_0 + t(z_1 - z_0))\} dt \right| \\ &\le \int_0^1 \left| \frac{d\phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right| dt \quad (z = z_0 + t(z_1 - z_0 \text{とおいた})) \\ &= \int_0^1 |\phi'(z)||z_1 - z_0| dt \\ &\le \sup |\phi'(z)||z_1 - z_0| \end{aligned}$$

が成り立つ (平均値の定理）から

$$\begin{aligned}|w(\lambda z)-w((\lambda+\eta)z)| &\leq |w'(z_1')||\eta z| \\ &\leq \sup|w'|\cdot\frac{\epsilon}{1+r}\cdot(1+r) \quad (\text{補題 } 4.1(1) \text{ より}) \\ &< 2(1+r)^2\epsilon^2 c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} \quad ((4.10) \text{ 式より}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$|w((\lambda+\eta)z)-w((\lambda+\eta)z+u_1(z)-\eta z)| \tag{4.21}$$
$$\begin{aligned}&\leq |w'(z_2')||u_1(z)-\eta z| \\ &< 2(1+r)^2\epsilon^2 c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)}|u_1(z)-\eta z| \quad ((4.10) \text{ 式より}) \\ &< \Delta^{d+2} r\cdot\Delta^{-(d+1)}|u_1(z)-\eta z| \quad ((4.15) \text{ 式より}) \\ &< \frac{1}{5}r|u_1(z)-\eta z| \quad ((4.15) \text{ 式より})\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}|u(z+w(z))-u(z)| &\leq |u'(z_3')||w(z)| \\ &< 2\epsilon^2 c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} \quad ((4.7),(4.9) \text{ 式より})\end{aligned} \tag{4.23}$$

よって (4.18),(4.20)〜(4.22) 式より

$$|u_1(z)-\eta z| < 2\{1+(1+r)^2\}\epsilon^2 c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} + \frac{1}{5}r|u_1(z)-\eta z|$$
$$|u_1(z)-\eta z| < \frac{10\{1+(1+r)^2\}}{5-r}\epsilon^2 c_0 c(d)\Delta^{-(d+1)} = \kappa \tag{4.24}$$

ここからは η の大きさを評価していく。$|\lambda+\eta| \geq 1$ のとき、h^{-1} は連続かつ S^1 はコンパクトだから、$|z_0| = \max_{z\in h^{-1}(S^1)}|z|$ を満たす $z_0 \in h^{-1}(S^1)$ が存在する。(4.9) 式及び $w = h - id$ より、ϵ を十分小さくとれば h は恒等写像に近づく。$f_1 = h^{-1}\circ f\circ h$ かつ f は S_1 を保つから $f_1(z_0) \in h^{-1}(S_1)$ となる。よって

$$\begin{aligned}|z_0| &\geq |f_1(z_0)| \\ &= |\lambda z_0 + u_1(z_0)| \\ &= |(\lambda+\eta)z_0 + (u_1(z_0)-\eta z_0)| \\ &\geq |(\lambda+\eta)z_0| - |u_1(z_0)-\eta z_0)| \\ &\geq |\lambda+\eta||z_0| - \kappa \quad ((4.23) \text{ 式より})\end{aligned} \tag{4.25}$$

ϵ を十分小さくとれば h は恒等写像に近づくから $1/2 < |z_0| < 2$ を満たすと考えてよい。よって (4.24) 式より

$$|\lambda+\eta| - 1 \leq \frac{\kappa}{|z_0|} \leq 2\kappa$$

同様に $|(\lambda+\eta)| < 1$ のとき $|z_1| = \min_{z\in h^{-1}(S^1)}|z|$ とおくと

$$\begin{aligned}|z_1| &\leq |f_1(z_1)| \\ &= |(\lambda+\eta)z_1 + (u_1(z_1)-\eta z_1)| \\ &\leq |(\lambda+\eta)z_1| + |u_1(z_1)-\eta z_1)| \\ &\leq |\lambda+\eta||z_1| + \kappa\end{aligned} \tag{4.26}$$

よって

$$|\lambda+\eta|-1 \geq -\frac{\kappa}{|z_1|} \geq -2\kappa$$

この場合分けから

$$\Big||\lambda+\eta|-1\Big| \leq 2\kappa \tag{4.27}$$

命題 2.3 より $f_1|_{h^{-1}(S^1)}$ の回転数は $\alpha = \arg\lambda/2\pi$ であるから

$$\arg f_1(z_2) - \arg z_2 - \arg\lambda = 0, \quad z_2 \in h^{-1}(S^1) \tag{4.28}$$

(4.23) 式より

$$|f_1(z_2) - (\lambda+\eta)z_2| = |u_1(z_2) - \eta z_2| < \kappa$$

よって

$$\left|\frac{f_1(z_2)}{(\lambda+\eta)z_2} - 1\right| < \frac{\kappa}{|\lambda+\eta||z_2|} \tag{4.29}$$

ここで

$$|\theta| = |\arg f_1(z_2) - \arg(\lambda+\eta)z_2|$$

とおくと

$$\begin{aligned}
|\arg(\lambda+\eta) - \arg\lambda| &= |\arg(\lambda+\eta) - \arg f_1(z_2) + \arg z_2| \quad ((4.27)\text{ より}) \\
&= |\arg f_1(z_2) - \arg(\lambda+\eta) - \arg z_2| \\
&= \left|\arg\frac{f_1(z_2)}{(\lambda+\eta)z_2}\right| \\
&= |\theta|
\end{aligned}$$

κ は十分小さくできるから図 1(次ページ) 及び (4.28) 式より

$$\begin{aligned}
|\arg(\lambda+\eta) - \arg\lambda| &= |\theta| \\
&\leq \arcsin\frac{\kappa}{|\lambda+\eta||z_2|} \\
&\leq \arcsin\frac{\kappa}{(1-2\kappa)\cdot 1/2} \quad ((4.26)\text{ 式及び } 1/2 < |z_2| < 2 \text{ より}) \\
&= \arcsin\frac{2\kappa}{1-2\kappa} \\
&\leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\kappa}{1-2\kappa} \quad \left(\left|\frac{2}{\pi}x\right| \leq |\sin x|, x > 0 \text{ より}\right) \\
&= \frac{\kappa}{1-2\kappa}\pi
\end{aligned}$$

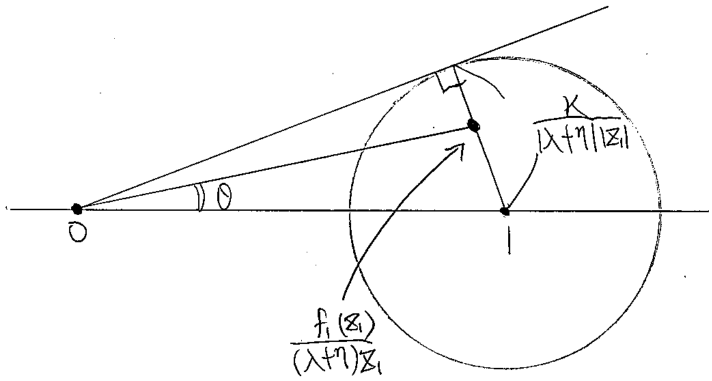

図 1

ここで $f(\kappa) = 4\kappa - \frac{\kappa}{1-2\kappa}\pi$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(\kappa) &= 4 - \frac{(1-2\kappa)+2\kappa}{(1-2\kappa)^2}\pi \\
&= 4 - \frac{\pi}{(1-2\kappa)^2}
\end{aligned}
$$

κ は十分小さくできるから $f'(\kappa) \geq 0$ が成り立つ。また $f(0) = 0$ だから $f(\kappa) \geq 0$ である。よって

$$
|\arg(\lambda+\eta) - \arg\lambda| \leq 4\kappa
$$

図 2(次ページ) と (4.26) 式より

$$
\begin{aligned}
|\eta| &\leq |\theta| + \big||\lambda+\eta| - 1\big| \\
&\leq 4\kappa + 2\kappa = 6\kappa
\end{aligned}
$$

となり、η の大きさが評価できた。

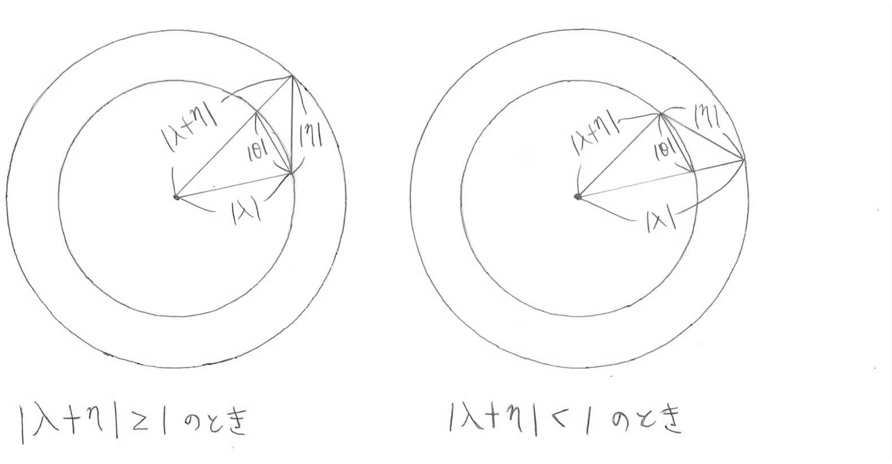

図 2

よって

$$
\begin{aligned}
|u_1| &\le |u_1(z) - \eta z| + |\eta z| \\
&\le \kappa + 6\kappa(1+r) \\
&= \{1 + 6(1+r)\}\kappa
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
|u_1'| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&\le \frac{\{1+6(1+r)\}\kappa}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r\Delta e^{i\theta})^2} \cdot ir\Delta e^{i\theta} d\theta \right| \quad (\zeta = z + t\Delta e^{i\theta} \text{と置換した}) \\
&= \frac{\{1+6(1+r)\}\kappa}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{r\Delta e^{i\theta}} \right| d\theta \\
&= \{1+6(1+r)\}\kappa \cdot \frac{1}{r\Delta} \\
&< \{1+6(1+r)\} \cdot \frac{10\{1+(1+r)^2\}}{5-r} \epsilon^2 c_0 c(d) \Delta^{-(d+1)} \cdot \frac{1}{r\Delta} \\
&< \epsilon^2 \frac{10\{1+6(1+r)\}\{1+(1+r)^2\} c_0 c(d)}{(5-r) r (1-\Delta) \Delta^{d+2}} \\
&= \epsilon^2 \frac{c' c_0 c(d)}{(1-\Delta)\Delta^{d+2}}
\end{aligned}
$$

となり、u_1' の不等式を満たす c' が存在する。 □

再度アーノルドの証明に戻る。補題 4.3,4.4 の仮定である (4.13),(4.15) 式は、アーノルドの定理の

仮定が満たされているならば成立する。ここからはこのことを示す。明らかに

$$\Delta_n = \frac{1}{10(2^n+1)} < 1/5$$

である。よってまずは不等式

$$2\epsilon c_0 c(d) < \Delta^{d+2} r/(1+r)^2$$

を示す。アーノルドの定理の証明から

$$\epsilon_{n+1} \leq c_2^{n+1}\epsilon_n^2$$

を満たす定数 $c_2 > 2$ が存在するから

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &\leq c_2^n \epsilon_{n-1}^2 \\
&\leq c_2^n (c_2^{n-1}\epsilon_{n-2}^2)^2 \\
&= c_2^n c_2^{2(n-1)} \epsilon_{n-2}^4 \\
&\leq c_2^{n+2(n-1)} (c_2^{n-2}\epsilon_{n-3}^2)^4 \\
&= c_2^{n+2(n-1)+4(n-2)} \epsilon_{n-3}^8 \\
&\vdots \\
&\leq c_2^{2^{n+1}-n-2} \epsilon^{2^n}
\end{aligned}$$

が成り立つ。なぜならば、

$$S = n + (n-1)\cdot 2 + (n-2)\cdot 2^2 + \cdots + 1\cdot 2^{n-1}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
S - 2S &= n - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{n-1} - 2^n \\
S &= -n + \frac{2(2^n-1)}{2-1} \\
&= 2^{n+1} - n - 2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

となるからである。r_n の漸化式を解くと

$$r_n = \frac{r(1+2^{-n})}{2} = \frac{r(2^n+1)}{2^{n+1}}$$

となるから ϵ を

$$\epsilon \leq \frac{1}{2^{d+2}c_2^2}, \quad \epsilon < \frac{1}{8\cdot 20^{d+2} c_0 d!(1+r)^3 c_2^2}$$

を満たすようにとると

$$
\begin{aligned}
2\epsilon c_0 c(d)\cdot\frac{(1+r_n)^2}{r_n\Delta_n^{d+2}} &\le 2c_2^{2^{n+1}-n-2}\epsilon^{2^n}c_0\cdot\frac{d!}{1-\frac{r_n\Delta_n}{1+r_n}}\cdot\frac{(1+r_n)^2}{r_n\Delta_n^{d+2}}\\
&= 2c_0 d!\cdot\frac{(c_2^2\epsilon)^{2^n}}{c_2^{n+2}}\cdot\frac{(1+r_n)^3}{\{1+(1-\Delta_n)r_n\}r_n\Delta_n^{d+2}}\\
&= 2c_0 d!\cdot\frac{(c_2^2\epsilon)^{2^n}}{c_2^{n+2}}\cdot\{1+\frac{r(2^n+1)}{2^{n+1}}\}^3\cdot\\
&\quad \frac{1}{1+\{1-\frac{1}{10(2^n+1)}\}\cdot\frac{r(2^n+1)}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2^{n+1}}{r(2^n+1)}\cdot\{10(2^n+1)\}^{d+2}\\
&= 2c_0 d!\cdot\frac{(c_2^2\epsilon)^{2^n}}{c_2^{n+2}}\cdot\{1+\frac{r(2^n+1)}{2^{n+1}}\}^3\cdot\\
&\quad \frac{2^{n+1}}{1+(2^n+1-10)r}\cdot\frac{2^{n+1}}{r(2^n+1)}\cdot\{10(2^n+1)\}^{d+2}\\
&\le 2c_0 d!\cdot\frac{(c_2^2\epsilon)^{2^n}}{c_2^{n+2}}\cdot(1+r)^3\cdot\frac{2}{r}\cdot\frac{2}{r}\cdot(10\cdot 2^{n+1})^{d+2}\\
&< \frac{8\cdot 10^{d+2}c_0 d!(1+r)^3}{r^2}\cdot(2^{d+2})^{n+1}(c_2^2\epsilon)^{2^n}<1
\end{aligned}
$$

となり、不等式が証明される。なぜならば、

$$
a_n=\frac{8\cdot 10^{d+2}c_0 d!(1+r)^3}{r^2}\cdot(2^{d+2})^{n+1}(c_2^2\epsilon)^{2^n}
$$

とおくと、数列 $\{a_n\}$ は単調減少し、$a_0<1$ を満たすからである。

次に不等式

$$
\epsilon<\frac{r\Delta}{(1+r)^2}
$$

を示す。ϵ を

$$
\epsilon\le\frac{1}{c_2^2},\quad \epsilon<\frac{1}{20(1+r)^2}
$$

を満たすようにとると

$$
\begin{aligned}
\epsilon\cdot\frac{(1+r_n)^2}{r_n\Delta_n} &\le c_2^{2^{n+1}-n-2}\epsilon^{2^n}\cdot\{1+\frac{r(2^n+1)}{2^{n+1}}\}^2\cdot\frac{2^{n+1}}{r(2^n+1)}\cdot 10(2^n+1)\\
&\le c_2^{2^{n+1}-n-2}\epsilon^{2^n}\cdot(1+r)^2\cdot\frac{10}{r}\cdot 2^{n+1}\\
&= \frac{5(1+r)^2}{r}\cdot(\frac{2}{c_2})^{n+2}\cdot(c_2^2\epsilon)^{2^n}<1
\end{aligned}
$$

となり、不等式が証明される。なぜならば、

$$
b_n=\frac{5(1+r)^2}{r}\cdot(\frac{2}{c_2})^{n+2}\cdot(c_2^2\epsilon)^{2^n}
$$

とおくと、数列 $\{b_n\}$ は単調減少し、$b_0<1$ を満たすからである。

改めてアーノルドの定理の証明に戻る。補題 4.4 より、$A_{1+r(1-5\Delta)}$ 上で

$$|u_1'| \leq \epsilon^2 \frac{c' c_0 c(d)}{(1-\Delta)\Delta^{d+2}}$$

が成り立つ。これは

$$\epsilon_1 = \epsilon^2 \frac{c' c_0 c(d)}{(1-\Delta)\Delta^{d+2}}$$

とおくと、A_{1+r_1} 上で

$$|u_1'| \leq \epsilon_1$$

が成り立つことだと言い換えられる。この ϵ_1 を用いて補題 4.4 を適用すると、A_{1+r_2} 上で

$$|u_2'| \leq \epsilon_1^2 \frac{c' c_0 c(d)}{(1-\Delta_1)\Delta_1^{d+2}}$$

が成り立つ。以下帰納的に考えると、数列 $\{\frac{c'_n c_0 c_n(d)}{(1-\Delta_n)}\}$ は収束するから、$A_{1+r_{n+1}}$ 上で

$$\begin{aligned} |u_{n+1}'| &\leq \epsilon_n^2 \frac{c' c_0 c(d)}{(1-\Delta_n)\Delta_n^{d+2}} = \epsilon_{n+1} \\ &\leq c_1 \frac{\epsilon_n}{\Delta_n^{d+2}} \end{aligned}$$

を満たす定数 c_1 が存在する。さらに

$$c_2 \geq 2^{d+2}, c_2 \geq 10^{d+2} c_1 2^{d+2}$$

を満たすように定数 c_2 をとると

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &\leq 10^{d+2} c_1 \epsilon_n^2 (2^n+1)^{d+2} \\ &\leq 10^{d+2} c_1 \epsilon_n^2 (2^{n+1})^{d+2} \\ &\leq c_2^{n+1} \epsilon_n^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。なぜならば、$a_n = 10^{d+2} c_1 (\frac{2^{d+2}}{c_2})^{n+1}$ とおくと、数列 $\{a_n\}$ は単調減少し、$a_0 \leq 1$ を満たすからである。

$$\epsilon_n' = c_2^n \epsilon_n$$

とおくと

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}' &= c_2^{n+1} \epsilon_{n+1} \\ &\leq (c_2^{n+1})^2 \epsilon_n^2 = \epsilon_n'^2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

となる。$\epsilon_0 < 1$ とすると $\epsilon_0' = \epsilon_0$ であるから (4.30) 式より $\{\epsilon_n'\}$ は単調減少する。また $\epsilon_n' \geq 0$ より $\epsilon_n' \to 0$ $(n \to \infty)$ がいえ、よって $\epsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ もいえる。(4.12) 式より、$k_n = h_1 \circ \cdots \circ h_{n-1}$

とおくと

$$\begin{aligned} f_n &= h_n^{-1} \circ f_{n-1} \circ h_n \\ &= h_n^{-1} \circ h_{n-1}^{-1} \circ f_{n-2} \circ h_{n-1} \circ h_n \\ &\vdots \\ &= (h_n^{-1} \circ \cdots \circ h_1^{-1}) \circ f_0 \circ (h_1 \circ \cdots \circ h_n) \\ &= k_n^{-1} \circ f \circ k_n \end{aligned} \tag{4.32}$$

連鎖律より

$$|k_n'| = \left| \prod_{l=1}^{n-1} h_l' \right| = \left| \prod_{l=1}^{n-1} (1 + w_l') \right|$$

となるから、

$$\begin{aligned} |k_{n+1} - k_n| &= |h_1 \circ \cdots \circ h_{n-1} \circ h_n - h_1 \circ \cdots \circ h_{n-1} \circ Id| \\ &\leq |k_n'||h_n - Id| \quad \text{(平均値の定理より)} \\ &= \left| \prod_{l=1}^{n-1} (1 + w_l') \right| |w_n| \\ &\leq \prod_{l=1}^{n-1} (1 + |w_l'|) \cdot c_3 \epsilon_n' \quad \text{((4.9) 式より)} \\ &\leq \prod_{l=1}^{n-1} (1 + c_4 \epsilon_l') \cdot c_3 \epsilon_n' \quad \text{((4.19) 式より)} \end{aligned}$$

を満たす定数 c_3, c_4 が存在する。ϵ_l' は十分小さくできるから

$$\log \prod_{l=1}^{n-1} (1 + c_4 \epsilon_l') = \sum_{l=1}^{n-1} \log(1 + c_4 \epsilon_l') < c_5$$

を満たす定数 c_5 が存在する。

$$|k_{n+1} - k_n| \leq c_5 c_3 \epsilon_n' \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるから、関数列 $\{k_n\}$ はコーシー列であることがいえる。よって $\{k_n\}$ は $A_{1+\frac{r}{2}}$ 上で h に一様収束し (4.31) 式より $k_n \to h$ となる。また $h_n \to Id$ より $w_n \to 0$ となるから、(4.11) 式より $f_n \to \Lambda$ となる。 □

5 Poincaré-Siegel の定理

この章では Poincaré-Siegel の定理の内容を紹介する。

定理 ([1], 定理 2.8.2.) $f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ を原点近傍における正則写像とする（ただし $|\lambda| \neq 1$

または $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ を満たす。(α はディオファントス数) である)。このとき正の数 δ と $|z| < \delta$ における正則写像 $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n z^n$ が存在して、

$$h^{-1} \circ f \circ h = \Lambda \quad (\Lambda(z) = \lambda z)$$

が成り立つ。

証明についてはアーノルドの定理のときと同じ手法・流れで示せる。

参考文献

[1] Anatole Katok, Boris Hasselblatt : *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press,(1995)

[2] Robert L Devaney : *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition*, Addison Wesley,(1989)

[3] 國府寛司：力学系の基礎, 朝倉書店, (2000)