

パーシステントホモロジーについて

On Persistent Homology

金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻
博士前期課程 2年 齊藤 優

2019/1/31

目 次

1	はじめに	2
2	パーシステントホモロジーのデータへの適用	3
2.1	データのホモロジー	3
2.2	単体複体の生成	6
2.2.1	チェック複体	6
2.2.2	ヴィートリス・リップス複体	7
2.2.3	アルファ複体	8
3	パーシステントホモロジーとその対応	9
3.1	パーシステントホモロジーの定義	9
3.2	パーシステントホモロジーの対応	10
4	アルゴリズム	12
4.1	計算方法	12
4.2	アルゴリズムの適用例	20
4.2.1	Example 1	20
4.2.2	Example 2	22
5	謝辞	25

1 はじめに

パーシステントホモロジーとはノイズ込みのデータのホモロジーを調べるためにデータ内に表れるサイクルの持続性を表すものである。この持続性はサイクルの発生時間と消滅時間を測るのだがこの計算は構造定理を使うことで少ない計算量で計算できることが [3] にそのアルゴリズムと共に書かれている。このアルゴリズムをきっかけにパーシステントホモロジーは様々な応用が見つまっている。とくに有名な応用は [5] の自然画像の視覚化であり、このことは [2] や [4] でも紹介されている。最近では [1] で書かれているようにタンパク質やガラスの構造を調べることに応用されている。

本論文では、[3] の持続性を求めるアルゴリズムについての解説とアルゴリズムの適用例を紹介している。

2 パーシステントホモロジーのデータへの適用

2.1 データのホモロジー

X を \mathbb{R}^N の部分集合として \mathbb{X} を X からのノイズ込みのサンプリングポイントとする。この \mathbb{X} をポイントクラウドとよぶ。重要な問題の一つとして \mathbb{X} から X のホモロジーを推定するというものがある。例えば図 1 では真ん中の大きな輪がもととなる X と予想できるので 1 次元のベッチ数 1 と出力されるようにしたい。

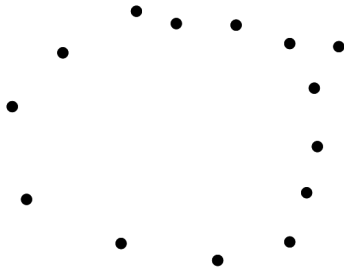


図 1

その解決策として考えられていたのが \mathbb{X} の各点に半径 r の近傍を取ることで現れる形を調べるという方法である。これによって図 1 の点の集合は図 2 のように 1 次元のベッチ数 1 を確認できる。

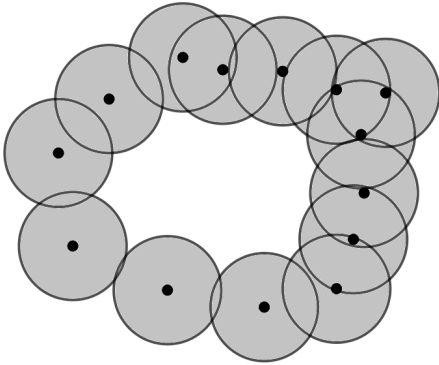


図 2: $r=0.7$

しかしこの方法には適切な r を見つける必要があるという問題がある。 r の値が小さすぎると図 3 のように重要なサイクルが現れず、 r が大きすぎると図 4 のように重要なサイクルが潰れてしまう。

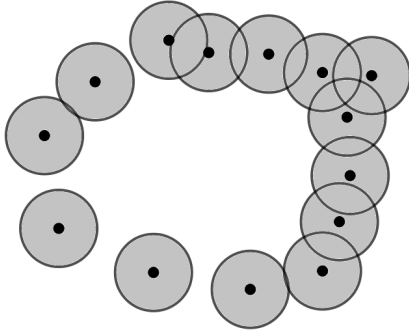


図 3: $r=0.5$

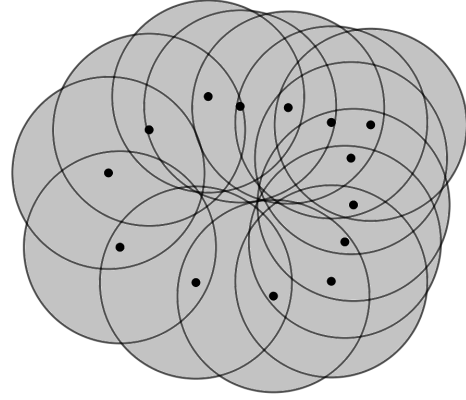


図 4: $r=1.55$

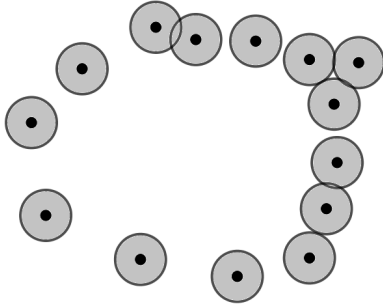


図 5: $r=0.33$

さらに図 5 の右上の小さなサイクルのように本来の目標のサイクルとは別のサイクルが現れる場合もある。そこで考えられたのが r を固定せずにその持続性を測る方法である。今回の例で言えば図 3 の $r=0.5$ ではまだ目標のサイクルはまだ発生していない。図 2 の $r=0.7$ で初めて目的のサイクルが発生する。このときの時刻 (今回は r で考える) を **birth** とよぶ。その後、 $r=1.55$ でサイクルが消滅する。このときの時刻を **death** とよぶ。この birth, death を区間として表したものを \mathcal{P} -interval と呼びこの区間の長さがサイクルの持続性を表す。この \mathcal{P} -interval については 4 章でも扱う。今回の例では目標の大きなサイクルは $[0.7, 1.55)$ であり、図 5 の小さなサイクルは $[0.33, 0.35)$ となる。小さなサイクルは大きなサイクルと比べて明らかに区間の長さが短いのでこの小さなサイクルはノイズとみなすことができる。これをトポロジカルノイズとよぶ。

ここで \mathcal{P} -interval の表現方法として代表的なものとして次の 2 つを上げておく。次の 2 つの図は R の TDA パッケージを使い作成した。1 つ目は図 6 のバーコードと呼ばれるグラフである。バーコードは区間をそのまま線分として表現しており、線分の長さがサイクルの持続性を表す。2 つ目は図 7 のパーシステント図と呼ばれるグラフで横軸が birth、縦軸が death を表している。対角線に近ければ近いほどサイクルの発生から消滅までが短いため持続性が低いと考えられる。逆に対角線から遠ければ遠いほどサイクルの発生から消滅までが長いので持続性は高くなる。図 7 には 0 次元と 1 次元の \mathcal{P} -interval が描写されていて濃い点が 0 次元であり、薄い点が 1 次元である。図 7

において図5の小さな1次元サイクルが描かれていないのはヴィートリス・リップス複体と呼ばれる単体複体を使っているためでありそれについてはこの章の後半で解説する。

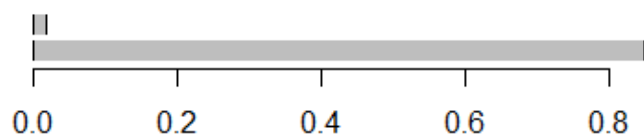


図 6: バーコード

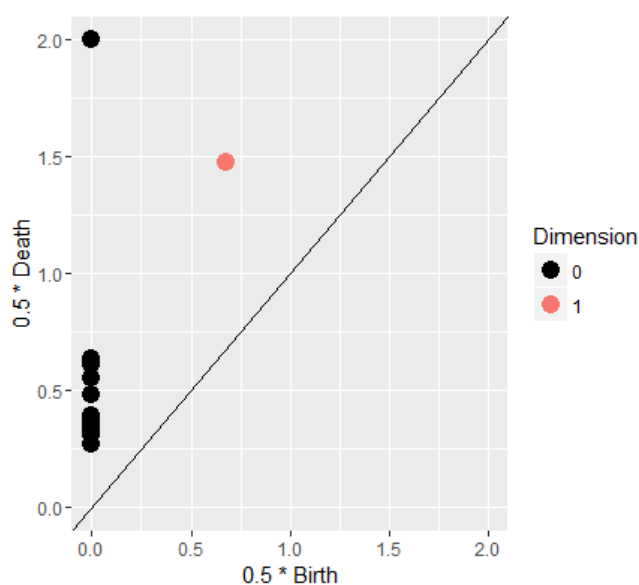
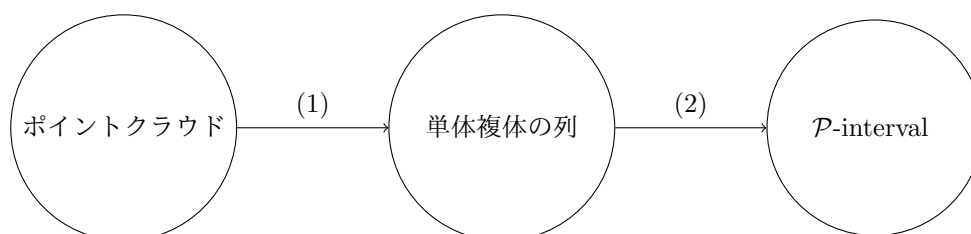


図 7: パーシステント図

\mathcal{P} -interval を求めるには次の2段階のステップがある。



この章の残りでは(1)のステップについて説明する。(2)のステップについては3, 4章で説明する。

2.2 単体複体の生成

(1) のステップにおいて重要な概念である脈体を定義する。

Definition(脈体). \mathbb{R}^N の空でない部分集合 X に対して、 $\Phi = \{B_i \subset X | i = 1, \dots, m\}$ を有限個の集合からなる X の被覆とする。すなわち $X = \bigcup_{i=1}^m B_i$ となる。このとき $m-1$ 次元単体の頂点 v_1, \dots, v_m に対して、次の単体複体 Σ を Φ の 脈体 とよぶ。

$$\Sigma = \left\{ |v_{i_0}, \dots, v_{i_k}| \mid \bigcap_{j=0}^k B_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

ただし $|v_{i_0}, \dots, v_{i_k}|$ は v_{i_0}, \dots, v_{i_k} を頂点とする k 次元単体である。

Theorem 2.1([1] の脈体定理). \mathbb{R}^N の空でない部分集合 X に対して、 $\Phi = \{B_i \subset X | i = 1, \dots, m\}$ を有限個の凸閉集合からなる X の被覆とする。すなわち $X = \bigcup_{i=1}^m B_i$ となる。このとき X と Φ の脈体はホモトピー同値となる。

Φ の脈体を考えることで X のホモトピー不変量 (ここではホモロジー群) を単体複体で扱うことができる。ここからは脈体の作り方を考える。

2.2.1 チェック複体

有限個の点の集合 $P = \{x_i \in \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$ (ポイントクラウドと呼ぶ) に対して、 $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - p\| \leq r\}$ を点 $p \in \mathbb{R}^N$ を中心とした半径 r の球として、 $\Phi = \{B_r(x_i) \mid x_i \in P\}$ の脈体をチェック複体と呼び、 $\mathcal{C}(P, r)$ と表す。ただし $\|x\|$ はユークリッドノルムである。

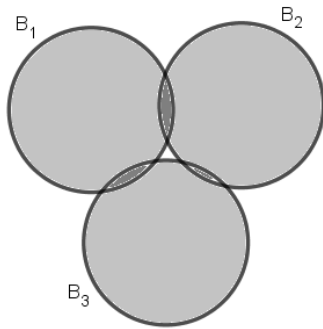


図 8

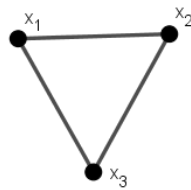


図 9

例として図 8 をチェック複体にすると図 9 のようになる。

球は凸閉集合なので脈体定理より $\bigcup_{i=1}^m B_r(x_i)$ と $\mathcal{C}(P, r)$ はホモトピー同値である。チェック複体に k 次元単体 $|x_{i_0}, \dots, x_{i_k}|$ が存在する必要十分条件は次のようである。

$$\bigcap_{j=0}^k B_r(x_{i_j}) \neq \emptyset$$

ここで r をより大きな r' に置き換えても成り立つ。

$$r < r' \text{ かつ } \bigcap_{j=0}^k B_r(x_{i_j}) \neq \emptyset \quad \text{ならば} \quad \bigcap_{j=0}^k B_{r'}(x_{i_j}) \neq \emptyset$$

つまり半径 r のチェック複体に含まれる単体は半径 r' のチェック複体にも含まれる。

$$r < r' \text{ ならば } \mathcal{C}(P, r) \subset \mathcal{C}(P, r')$$

これにより r の増大列 $r_0 < \dots < r_T$ に対して、以下のようなチェック複体の増大列を得られる。

$$\mathcal{C}(P, r_0) \subset \dots \subset \mathcal{C}(P, r_T)$$

このような増大列をフィルトレーションとよび3章で詳しい定義をする。

ここまではすべての半径が同じ球を考えてきたが異なる半径でも構わない。各 x_i に r_i を対応させて $\bigcup_{i=1}^m B_{r_i}(x_i)$ を考えることができる。この単体複体を重み付きチェック複体と呼び、 $\mathcal{C}(P, R)$ で表す。ただし $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ である。

2.2.2 ヴィートリス・リップス複体

チェック複体を構成するには複数個の球の交わりを調べる必要があるが球の交わりの数が増えれば増えるほど計算量が大きくなる。そこで代わりに使われることが多いのが次である。

ポイントクラウド $P = \{x_i \in \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$ に対して、 $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - p\| \leq r\}$ を点 $p \in \mathbb{R}^N$ を中心とした半径 r の球として、次の単体複体をヴィートリス・リップス複体と呼ぶ。

$$\Sigma = \left\{ |v_{i_0}, \dots, v_{i_k}| \mid B_{i_s} \cap B_{i_t} \neq \emptyset, 0 \leq s, t \leq k \right\}$$

これを $\mathcal{R}(P, r)$ と表す。

$\mathcal{C}(P, r)$ と $\mathcal{R}(P, r)$ を比べたとき 0 単体と 1 単体は一致する。 $2 \leq k$ の k 単体は図 10, 11 のように $\mathcal{R}(P, r)$ のみに含まれるものがありえる。さらに $\bigcap_{j=0}^k B_{i_j} \neq \emptyset$ ならば、任意の $0 \leq s, t \leq k$ に対して $B_{i_s} \cap B_{i_t} \neq \emptyset$ なので $\mathcal{C}(P, r) \subset \mathcal{R}(P, r)$ となる。チェック複体と同様に半径の増大列 $r_0 < \dots < r_T$ から以下のフィルトレーションが得られる。

$$\mathcal{R}(P, r_0) \subset \dots \subset \mathcal{R}(P, r_T)$$

注意しなければならないのはこの単体複体は Φ の脈体ではないので脈体定理が適用できず、ホモトピー同値性は保証されない。

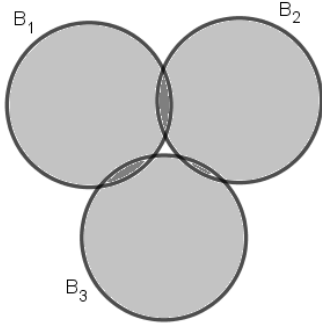


図 10

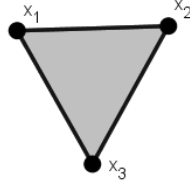


図 11

図 10 をヴィートリス・リップス複体になると図 11 のようになる。チェック複体では埋まっていなかった $|x_1, x_2, x_3|$ が埋まっているのはヴィートリス・リップス複体が脈体ではなく任意の 2 つについて共通部分があればよいからである。

2.2.3 アルファ複体

チェック複体のもう一つの問題として単体の次元が最大で点の個数まで上がることである。その問題を解決するものとしてアルファ複体を紹介する。

アルファ複体を定義するためにまずボロノイ図とドロネー複体を定義する。

Definition. ポイントクラウド $P = \{x_i \in \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$ の任意の元 x_i に対して

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, 1 \leq j \leq m, i \neq j\}$$

の V_i を x_i のボロノイ領域とよび、ボロノイ領域による \mathbb{R}^N の分割をボロノイ図とよぶ。これは \mathbb{R}^N の被覆になっている。ここで $\Phi = \{V_i \mid i = 1, \dots, m\}$ として、 Φ の脈体をドロネー複体とよび、 $\mathcal{D}(P)$ と表す。

ボロノイ領域は凸閉集合である。 $\mathcal{D}(P)$ に k 次元単体 $|v_{i_0}, \dots, v_{i_k}|$ が存在する必要十分条件は次である。

$$\bigcap_{j=0}^k V_{i_j} \neq \emptyset$$

つまり $\|x - x_{i_0}\| = \dots = \|x - x_{i_k}\|$ となる $x \in \mathbb{R}^N$ が存在することである。

\mathbb{R}^N 上の点 x_1, \dots, x_{N+2} が $N-1$ 次元同一球面上に無いとき x_1, \dots, x_{N+2} は一般の位置にあるという。 \mathbb{R}^N 上の点の集合 P において任意の $N+2$ 個の点が一一般の位置にあるとき P は一般の位置にあるという。このとき $\mathcal{D}(P)$ に現われる単体の次元は N 以下となる。

Definition(アルファ複体). ポイントクラウド $P = \{x_i \in \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$ が一般の位置にあるとして、そのそれぞれの点 x_i を中心とした半径 r の球を $B_r(x_i)$ としその和集合を X_r とする。さら

に V_i を x_i のボロノイ領域とする。このとき $W_i = B_r(x_i) \cap V_i$ とすると $\Psi = \{W_i \mid i = 1, \dots, m\}$ は X_r の被覆であり、 Ψ の脈体を $B_r(x_i)$ のアルファ複体とよび、 $\alpha(P, r)$ と表す。

W_i は凸閉集合であるので、脈体定理より X_r と $\alpha(P, r)$ はホモトピー同値である。さらにチェック複体と同様に r の増大列 $r_0 < \dots < r_T$ から次のようなアルファ複体のフィルトレーションが得られる。

$$\alpha(P, r_0) \subset \dots \subset \alpha(P, r_T)$$

3 パーシステントホモロジーとその対応

2 章ではポイントクラウドから単体複体の列を作るステップを紹介した。この章からは単体複体の列から \mathcal{P} -interval を求めるステップを解説する。

3.1 パーシステントホモロジーの定義

単体複体の列を分解するために使うのは以下の定理である。

Theorem 3.1(構造定理)([3] の Lemma 2.1). D を次数付き単項イデアル整域としたとき、 D 上の次数付き加群 M は次のように一意的に分解できる。

$$M \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\alpha_i} D \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{\gamma_j} D / d_j D \right)$$

ただし、 $d_j \in D$, $d_j | d_{j+1}$, $\alpha_i, \gamma_j \in \mathbb{Z}$ であり、 Σ^α は α -shift upward in grading である。

Definition(フィルトレーション). K を有限個の単体からなる単体複体としたとき、 K のフィルトレーションとは、部分複体の系列

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^m = K$$

のことである。このときの K を **filtered complex** とよぶ。

例えば図 12 のような列がフィルトレーションである。

Definition(パーシステントホモロジー). K^i をフィルトレーションの i 番目として、 Z_k^i, B_k^i, H_k^i を K^i の k 次元サイクル, バウンダリー, ホモロジー群 とするとき、 K^i の p -persistent k -th homology group とは

$$H_k^{i,p} = Z_k^i / (B_k^{i+p} \cap Z_k^i)$$

である。 K^i の p -persistent k -th Betti number とは $H_k^{i,p}$ の rank であり、 $\beta_k^{i,p}$ と表す。

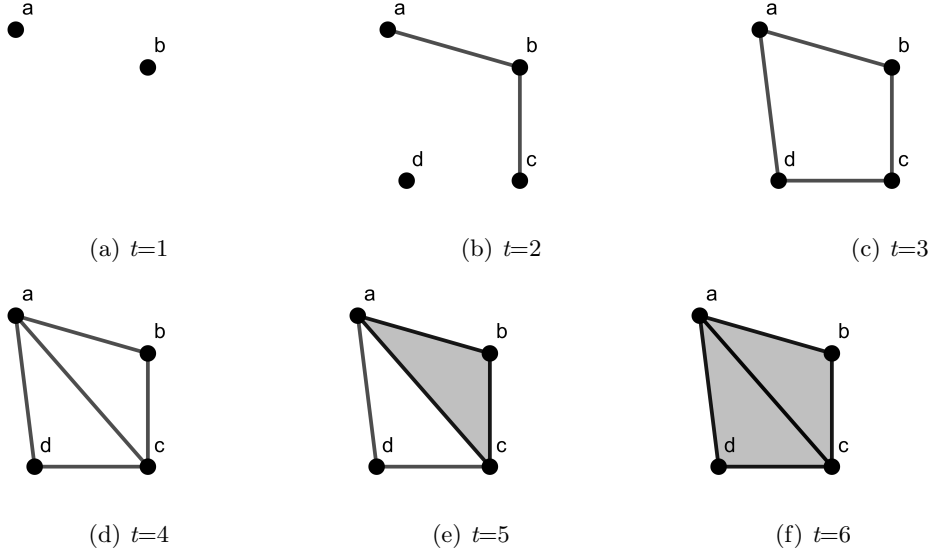


図 12

3.2 パーシステントホモロジーの対応

ここではパーシステントホモロジーが \mathcal{P} -interval とどのような対応を持つのかを解説する。

Definition(パーシステンス複体). K^i をフィルトレーションの i 番目としたとき、 K^i のパーシステンス複体とは chain complex $\{C_k^i\}_{i \geq 0}$ と包含からなる chain map $f^i : C_k^i \rightarrow C_k^{i+1}$ の 2 つからなる系列である。

具体的には以下のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \partial_3 & \\
 C_2^0 & \xrightarrow{f^0} & C_2^1 & \xrightarrow{f^1} & C_2^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots \\
 & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & \\
 C_1^0 & \xrightarrow{f^0} & C_1^1 & \xrightarrow{f^1} & C_1^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots \\
 & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & \\
 C_0^0 & \xrightarrow{f^0} & C_0^1 & \xrightarrow{f^1} & C_0^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots
 \end{array}$$

Definition(パーシステンス加群). R を環としたとき、パーシステンス加群とは、 R -加群の集合 $\{M^i\}_{i \geq 0}$ と準同型写像 $\varphi^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ からなる系列である。

Fact. パーシステンス複体の homology $\{M^i\}$ と、 f^i から誘導される写像 ψ^i はパーシステンス加群となる。

Definition(有限形). $\{C_k^i, f^i\}$ をパーシステンス複体 (または $\{M^i, \varphi^i\}$ をパーシステンス加群) とするとき、 $\{C_k^i, f^i\}$ (または $\{M^i, \varphi^i\}$) が有限形とは、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して、 C_k^i (または M^i) が有限生成 R -加群かつ、 $i \geq m$ ならば f^i (または φ^i) が同型写像となる $m \in \mathbb{N}$ が存在することである。

る。

Fact. 今考えているパーシステンス複体のホモロジー群 $\{H^i\}$ と, f^i から誘導される写像 ψ^i は有限形である。

$M = \{M^i, \varphi^i\}_{i \geq 0}$ を R 上のパーシステンス加群として, $\alpha(M)$ から次数付き $R[t]$ -加群への対応 α を考える。

$$\alpha(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i$$

$\alpha(M)$ への次数付き $R[t]$ -加群の作用 t は以下のように定義する。

$$t \cdot (m^0, m^1, m^2, \dots) = (0, \varphi^0(m^0), \varphi^1(m^1), \dots)$$

このとき, 次のような定理が成り立つ。

Theorem 3.2([3] の Theorem 3.1). 対応 α は R 上の有限形パーシステンス加群の圏と, 有限生成非負次数付き $R[t]$ -加群の圏の同値となっている。

この定理により R が体のときは Theorem 3.1 のような分解ができることが分かる。ここで Theorem 3.1 の D を $F[t]$ とすると次のようになる。

$$M \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\alpha_i} F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{\gamma_j} F[t] / (t^{n_j}) \right)$$

次はこの $F[t]$ -加群の対応を考える。

Definition(\mathcal{P} -interval). \mathcal{P} -interval とは, $0 \leq i \leq j$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}^\infty = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ となる数のペア (i, j) のこと。

ここで次のように対応 \mathcal{Q} を定義する。

$$\mathcal{Q}(i, j) = \Sigma^i F[t] / (t^{j-i})$$

$$\mathcal{Q}(i, \infty) = \Sigma^i F[t]$$

$S = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}$ を \mathcal{P} -interval の集合としたとき, 次のように $\mathcal{Q}(S)$ を定義する。

$$\mathcal{Q}(S) = \bigoplus_{\ell=1}^n \mathcal{Q}(i_\ell, j_\ell)$$

Corollary 3.1([3] の Corollary 3.1). 対応 \mathcal{Q} は \mathcal{P} -interval の有限集合と有限生成次数付き $F[t]$ -加群との全単射となっている。

Theorem 3.2 と合わせると有限形パーシステンス加群の圏と \mathcal{P} -interval の有限集合との対応を作れる。つまりパーシステントホモロジーは \mathcal{P} -interval で表せる。

4 アルゴリズム

この章ではフィルトレーションからその不変量である \mathcal{P} -interval を求めるアルゴリズムを解説する。

4.1 計算方法

\mathcal{P} -interval を求める際に使うバウンダリーマップを定義する。

Definition. n 次元単体 $\sigma^n = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ に対して、バウンダリーマップ ∂_n を次のように定義する。ただし、 \hat{v}_i は v_i を取り除くことを意味する。

$$\partial_n(\sigma^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot t^{(\deg \sigma^n - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle)} \cdot \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$$

Proposition. 次が成り立つ。

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Proof.

$$\begin{aligned} & \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma^n)) \\ &= \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot t^{(\deg \sigma^n - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle)} \cdot \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot t^{(\deg \sigma^n - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle)} \cdot \partial_{n-1}(\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot t^{(\deg \sigma^n - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle)} \\ & \quad \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \cdot t^{(\deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle)} \cdot \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=i+1}^n (-1)^{l-1} \cdot t^{(\deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_l, \dots, v_n \rangle)} \cdot \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_l, \dots, v_n \rangle \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \cdot t^{(\deg \sigma^n - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle)} \cdot \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle \\ & \quad + \sum_{0 \leq i < l \leq n} (-1)^{i+l-1} \cdot t^{(\deg \sigma^n - \deg \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_l, \dots, v_n \rangle)} \cdot \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_l, \dots, v_n \rangle \\ &= 0 \square \end{aligned}$$

今回は実行例として $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上で計算する。パーシステンス加群は \mathbb{Z}_2 -加群と対応する。 \mathbb{Z}_2 -加群において基底となる単体の次数はフィルトレーションのその単体の発生時刻と対応する。次の表は図 12 のフィルトレーションにおいての単体の次数である。

a	b	c	d	ab	bc	cd	ad	ac	abc	acd
1	1	2	2	2	2	3	3	4	5	6

この例でバウンダリーマップを考えてみると $\partial_1(ab) = t \cdot b - t \cdot a$ となる。この章では、 C_k をフィルトレーション K の k 次元 chain complex、 $\{e_j\}$ と $\{\hat{e}_i\}$ をそれぞれ C_k と C_{k-1} の同次基底、 M_k を ∂_k の表現行列として扱う。

具体的に図 12 のフィルトレーションにおいて M_1 を求めてみると以下のようなになる。

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & ab & bc & cd & ad & ac \\ \hline d & 0 & 0 & t & t & 0 \\ c & 0 & 1 & t & 0 & t^2 \\ b & t & t & 0 & 0 & 0 \\ a & t & 0 & 0 & t^2 & t^3 \end{array} \right]$$

このとき以下のような特徴を持つ。

$$\deg \hat{e}_i + \deg M_k(i, j) = \deg e_j$$

ただし、 $M_k(i, j)$ は M_k の (i, j) 成分である。

以下ではこの行列 M_k をスミス標準形に変形することで H_{k-1} の \mathcal{P} -interval を求めることを考える。

Definition(スミス標準形). スミス標準形 とは、 R を単項イデアル整域として次の形の行列のことをいう。

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ 0 & & c_k & & & \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array} \right]$$

ただし、 $c_i \in R, i = 1, \dots, k-1$ に対して $c_i | c_{i+1}$ である。

このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 4.1. R を単項イデアル整域、 $A \in M_{m,n}(R)$ とすると、 A は基本変形によりスミス標準形に変形できる。

この定理により M_k が基本変形でスミス標準形に変換できることが分かる。

ここでの基本変形とは次の3つのことを言う。

- (1) i 行目 (列目) と j 行目 (列目) を入れ替える。
- (2) i 行目 (列目) に R の可逆元をかける。
- (3) j 行目 (列目) に i 行目 (列目) の c 倍を加える。

具体的に M_1 をスミス標準形 \hat{M}_1 に変形するとき、以下のように計算する。

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left[\begin{array}{c|ccccc} & ab & bc & cd & ad & ac \\ \hline d & 0 & 0 & t & t & 0 \\ c & 0 & 1 & t & 0 & t^2 \\ b & t & t & 0 & 0 & 0 \\ a & t & 0 & 0 & t^2 & t^3 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & ad & ac \\ \hline d & t & 0 & 0 & t & 0 \\ c & t & 1 & 0 & 0 & t^2 \\ b & 0 & t & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & t^2 & t^3 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & ad - cd & ac \\ \hline d & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & t & 1 & 0 & t & t^2 \\ b & 0 & t & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & t^2 & t^3 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & ad - cd - t \cdot bc & ac - t^2 \cdot bc \\ \hline d & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & t & t & t^2 & t^3 \\ a & 0 & 0 & t & t^2 & t^3 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & z_1 & z_2 \\ \hline d & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & t & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right] \cdots (*) \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & z_1 & z_2 \\ \hline d - c & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & t & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & z_1 & z_2 \\ \hline d - c & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c - t \cdot b & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & z_1 & z_2 \\ \hline d-c & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c-t \cdot b & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
& \rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc} & bc & cd & ab & z_1 & z_2 \\ \hline c-t \cdot b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d-c & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

ただし、 $z_1 = ad - cd - t \cdot bc - t \cdot ab$, $z_2 = ac - t^2 \cdot bc - t^2 \cdot ab$ である。

スミス標準形に変形することで \mathcal{P} -interval は次のように分かる。

Theorem 4.2([3] 参照). C_k から Z_k への ∂_k の表現行列 \hat{M}_k がスミス標準形となるように C_k , Z_k の基底 $\{e_j\}_{j=1, \dots, n}$, $\{\hat{e}_i\}_{i=1, \dots, m}$ をとる。このとき、 $i = 1, \dots, m$ に対して、 \hat{M}_k の (i, i) 成分 $\hat{M}_k(i, i)$ が次の H_{k-1} の \mathcal{P} -interval に対応する。

(1) $\hat{M}_k(i, i) = t^a$ の場合、 $\Sigma^{\deg \hat{e}_i} F[t]/(t^a)$ が H_{k-1} の分解として対応し、 $(\deg \hat{e}_i, \deg \hat{e}_i + a)$ が \mathcal{P} -interval として対応する。

(2) $\hat{M}_k(i, i) = 0$ の場合、 $\Sigma^{\deg \hat{e}_i} F[t]$ が H_{k-1} の分解として対応し、 $(\deg \hat{e}_i, \infty)$ が \mathcal{P} -interval として対応する。

この定理により \mathcal{P} -interval を求めることができる。具体的に Example 1 で考えると (1,1) 成分の 1 は $c - t \cdot b$ は次数 2 なので H_0 の分解は $\Sigma^2 \mathbb{Z}_2[t]/(t^0) = 0$ に対応し、 \mathcal{P} -interval は (2,2) に対応し、図 12 においては $t=2$ において発生しすぐに消滅する点 c の連結成分である。(2,2) 成分は H_0 の分解は $\Sigma^2 \mathbb{Z}_2[t]/(t^1) = \{0, t^2\}$ に対応し、 \mathcal{P} -interval は (2,3) に対応し、図においては $t=2$ で発生し $t=3$ で消滅する点 d の連結成分である。(3,3) 成分は H_0 の分解は $\Sigma^1 \mathbb{Z}_2[t]/(t^1) = \{0, t\}$ に対応し、 \mathcal{P} -interval は (1,2) に対応し、図においては $t=1$ で発生し $t=2$ で消滅する点 b の連結成分である。(4,4) 成分は H_0 の分解は $\Sigma^1 \mathbb{Z}_2[t] = (t)$ に対応し、 \mathcal{P} -interval は $(1, \infty)$ に対応し、図においては $t=1$ で発生し最後まで消えない点 a の連結成分である。

しかし実際のアルゴリズムではスミス標準形まで変形する必要はなく、次のエシュロン標準形までの計算で十分である。

Definition(エシュロン標準形). 列エシュロン標準形とは、次のような行列である。

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccccc} \square & 0 & \cdots & & 0 \\ & \square & 0 & & & \\ & & & & & \vdots \\ & & & \square & 0 & \\ & & & & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

行列の前半の列は非ゼロ列であり後半はゼロ列となり、ピボット (\tilde{A} の \square) と呼ばれる列内で次数が一番小さい項が列の先頭にあり、それが上のように右肩下がりに並んでいる。ピボットをもつ行

をピボット行、列をピボット列とよぶ。

具体的に図 12 の M_1 をエシュロン標準形 \tilde{M}_1 に変形すると以下ようになる。

$$\tilde{M}_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ad & z_1 & z_2 \\ \hline d & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & t & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ただし、 $z_1 = ad - cd - t \cdot bc - t \cdot ab$, $z_2 = ac - t^2 \cdot bc - t^2 \cdot ab$ である。

この変形の計算は Example 1 の (*) までと同じである。

Fact. 列エシュロン標準形への変形は列基本変形 (1),(3) のみでできる。

エシュロン標準形とスミス標準形の関係は次である。

Lemma 4.1(4.1). M_k を C_k からサイクル Z_{k-1} への境界準同型 ∂_k のある同次基底に関する表現行列として、その列エシュロン標準形のピボットはスミス標準形の対角成分と等しい。さらに、エシュロン標準形のピボット行に対応する基底とそのスミス標準形に対応する基底は次数が等しい。

Proof. 列エシュロン標準形を \tilde{M}_k とし、列エシュロン標準形の C_k の基底を $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ 、 Z_{k-1} の基底を $\{\hat{e}_i\}_{i=1,\dots,m}$ とする。 $\{\hat{e}_i\}$ が次数の降順に並んでいる。ここで j を固定すると $\deg e_j = c$ (c は定数) となる。

$$\deg \hat{e}_i + \deg \tilde{M}_k(i, j) = \deg e_j$$

この式から次が分かる。

$$\deg \tilde{M}_k(i, j) = c - \deg \hat{e}_i \cdots (*)$$

つまり M_k のそれぞれの列は i について次数が昇順になっている。これより今考えているエシュロン標準形をスミス標準形に変形するには行基本変形 (3) によってピボットの下成分を消去し、行と列の基本変形 (1) をすればよい。(1) の操作では行または列に対応する基底は変わらないのでピボットが保存されることが分かる。基底の保存を議論するには行基本変形 (3) を考えればよい。 $i < l$ において $(l \text{ 行目}) \leftarrow (l \text{ 行目}) + q \cdot (i \text{ 行目})$ (ただし $\tilde{M}_k(l, j) + q \cdot \tilde{M}_k(i, j) = 0$) という操作を考えると (*) より q の次元は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \deg q &= \deg \tilde{M}_k(l, j) - \deg \tilde{M}_k(i, j) \\ &= (c - \deg \hat{e}_l) - (c - \deg \hat{e}_i) \\ &= \deg \hat{e}_i - \deg \hat{e}_l \end{aligned}$$

今考えている行基本変形 (3) は

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q & \\ & & & 1 \end{array} \right]$$

を左からかけることに対応する。(ただし q は (l, i) 成分) このとき基底 $[\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m]$ がどう変化するのかを考える。

$$\begin{aligned}
& \partial_k([e_1, \dots, e_n]) \\
&= [\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m] \begin{bmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ & \square & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & \square & 0 \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
&= [\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -q & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ & \square & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & \square & 0 \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
&= [\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_i - q \cdot \hat{e}_l, \dots, \hat{e}_m] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ & \square & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & \square & 0 \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

今考えている基本変形での基底の変形は $\hat{e}_i \leftarrow \hat{e}_i - q \cdot \hat{e}_l$ であることが分かった。ここで $q \cdot \hat{e}_l$ の次元を考える。

$$\begin{aligned}
\deg q \cdot \hat{e}_l &= \deg q + \deg \hat{e}_l \\
&= \deg \hat{e}_i - \deg \hat{e}_l + \deg \hat{e}_l \\
&= \deg \hat{e}_i
\end{aligned}$$

つまり $\hat{e}_i - q \cdot \hat{e}_l$ が同次基底である。これより基底の次数が保存されることが分かる。 \square

Lemma 4.1 と Theorem 4.2 から次が分かる。

Corollary 4.1 ([3] の Corollary 4.1). C_k から Z_k への ∂_k の表現行列 \hat{M}_k がエシュロン標準形となるように C_k, Z_k の基底 $\{e_j\}_{j=1, \dots, n}, \{\hat{e}_i\}_{i=1, \dots, m}$ をとる。この時、行 $i = 1, \dots, m$ が以下の場合で次の H_{k-1} の \mathcal{P} -interval に対応する。

- (1) 行 i がピボット行でピボットが t^a の場合、 $\Sigma^{\deg \hat{e}_i} F[t]/t^a$ が H_k の分解として対応し、 $(\deg \hat{e}_i, \deg \hat{e}_i + a)$ が \mathcal{P} -interval として対応する。
- (2) 行 i がピボット行でない場合、 $\Sigma^{\deg \hat{e}_i} F[t]$ が H_k の分解として対応し、 $(\deg \hat{e}_i, \infty)$ が \mathcal{P} -interval として対応する。

この Corollary 4.1 を使って \mathcal{P} -interval を求めるには C_k から C_{k-1} への表現行列である M_k を C_k から Z_{k-1} への表現行列に変える必要がある。このために次を考える。

Lemma 4.2 ([3] の Lemma 4.2). M_k を ∂_k の C_k の標準基底と C_{k-1} の同次基底に関する表現行列とし、 \tilde{M}_k を M_k をエシュロン標準形に変形したものとする。このとき ∂_{k+1} の C_{k+1} の標準基底と Z_k の同次基底に関する表現行列は \tilde{M}_k のピボット列に対応する基底に対応する M_{k+1} の行を M_{k+1} から消去したものである。

Proof. C_k の標準基底を $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ 、 C_{k-1} の同次基底を $\{\hat{e}_i\}_{i=1,\dots,m}$ とする。 M_k を \tilde{M}_k に変換した時、 M_{k+1} をその基底の変換に合わせて変換したものを \tilde{M}_{k+1} とおくと、 $\partial_k \cdot \partial_{k+1} = 0$ より $\tilde{M}_k \cdot \tilde{M}_{k+1} = 0$ である。このとき \tilde{M}_k の1番上のピボット行を考えると次のようになる。

$$O = \tilde{M}_k \cdot \tilde{M}_{k+1} = \begin{bmatrix} \boxed{p} & 0 & \cdots & 0 \\ & \boxed{} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & \boxed{} & 0 \\ & & & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_l \\ & * & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p \cdot x_1 & \cdots & p \cdot x_l \\ & * & \end{bmatrix}$$

$p \neq 0$ より $x_1 = \cdots = x_m = 0$ 、つまり \tilde{M}_{k+1} の1行目は0となる。同様に次のピボット行を考えると、 \tilde{M}_{k+1} の2行目も0となる。これを繰り返すことで \tilde{M}_k のピボット列に対応する \tilde{M}_{k+1} の行は0となることが分かる。つまり次のようになる。

$$\tilde{M}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix}$$

ここで $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ から Z_k の基底となるものを選ぶ。 $y \in Z_k$ とすると次のような式を満たす。

$$\begin{aligned} \partial_k(y) &= 0 \\ \partial_k(a_1 \cdot e_1 + \cdots + a_n \cdot e_n) &= 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \cdots & \hat{e}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{} & 0 & \cdots & 0 \\ & \boxed{} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & \boxed{} & 0 \\ & & & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

一番下の式において係数 a_1, \dots, a_n に注目すると行列のピボット列に対応する a_1, \dots, a_l はすべて0となり、 a_{l+1}, \dots, a_n は \mathbb{Z}_2 の任意の元をとれる。これより Z_k の基底に対応するものを $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ から選ぶと $\{e_j\}_{j=l+1,\dots,n}$ となる。よってこの Lemma で求めたい ∂_{k+1} の C_{k+1} の標準基底と Z_k の基底に関する表現行列は \tilde{M}_{k+1} の上部の0の列を消したものである。

話は戻って M_k のエシュロン標準形への変形の過程を考える。 M_k を列エシュロン標準形 \tilde{M}_k に変形するときには列基本変形 (1), (3) のみを使って変形できる。(1) については列を入れ替える操作であるので M_{k+1} においては行の入れ替えが対応し行列の値は変化しないので (3) のみを考える。 M_k の $(i \text{ 列目}) \leftarrow (i \text{ 列目}) + q \cdot (j \text{ 列目})$ という (3) の基本変形を考える。ただし $M_k(p, i) + q \cdot M_k(p, j) = 0$ であり、 j 列はピボット列かつ $j < i$ である。この変形は C_k の基底 e_i を $e_i + q \cdot e_j$ に置き換える

ことに対応する。この基底の変形は右から次の行列をかけることに対応する。

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & q & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

このとき M_{k+1} の変形を考える。

$$\begin{aligned} & [e_1, \dots, e_n] M_{k+1} \\ &= [e_1, \dots, e_n] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & q & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -q & \\ & & 1 \end{bmatrix} M_{k+1} \\ &= [e_1, \dots, e_i + q \cdot e_l, \dots, e_n] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & -q & \\ & & 1 \end{bmatrix} M_{k+1} \end{aligned}$$

最後の式の基本行列は $(j \text{ 行目}) \leftarrow (j \text{ 行目}) - q \cdot (i \text{ 行目})$ という変形に対応する。この変形において M_{k+1} の i 行目は全く変化しないまま j 行目は最終的に 0 となるため、 M_{k+1} から \tilde{M}_k のピボット列に対応する列を消去すれば \tilde{M}_{k+1} の上部の 0 の列を消したものになる。 \square

具体的に図 12 の M_2 に対して適用してみる。まず M_2 を計算すると次のようになる。

$$M_2 = \left[\begin{array}{c|cc} & abc & acd \\ \hline ac & t & t^2 \\ ad & 0 & t^3 \\ cd & 0 & t^3 \\ bc & t^3 & 0 \\ ab & t^3 & 0 \end{array} \right]$$

cd, bc, ab が \tilde{M}_1 のピボット行に対応する基底なので消去すると次のようになる。

$$\tilde{M}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} & abc & acd \\ \hline z_2 & t & t^2 \\ z_1 & 0 & t^3 \end{array} \right]$$

ただし、以前定義したように $z_1 = ad - cd - t \cdot bc - t \cdot ab$, $z_2 = ac - t^2 \cdot bc - t^2 \cdot ab$ である。今回は M_1 での基底の変形に合わせて ad を z_1 、 ac を z_2 としたが、 \mathcal{P} -interval を求める過程では次数が保存されればよいので Theorem 4.2 から ad, ac のまま計算しても問題ない。この行列をエシュ

ロン標準形に変形する。

$$\tilde{M}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} & abc & acd - t \cdot abc \\ \hline z_2 & t & 0 \\ z_1 & 0 & t^3 \end{array} \right]$$

Theorem 4.2 により \mathcal{P} -interval を求めることができる。1 つ目のピボットの t は H_1 の分解は $\Sigma^4 \mathbb{Z}_2[t]/(t^1) = \{0, t^4\}$ に対応し、 \mathcal{P} -interval は (4,5) に対応し、図 12 においては $t=4$ において発生し $t=5$ で消滅するサイクル abc である。2 つ目のピボットの t^3 は H_1 の分解は $\Sigma^3 \mathbb{Z}_2[t]/(t^3) = \langle t^3, t^4, t^5 \rangle$ に対応し、 \mathcal{P} -interval は (3,6) に対応し、図においては $t=3$ において発生し $t=6$ で消滅するサイクル $abcd$ である。

ここまでのテクニックを使ったアルゴリズムを構築すると、アルゴリズムの概略は次のようになる。

入力:有限個の単体からなる単体複体 K のフィルトレーション

出力:入力のフィルトレーションの \mathcal{P} -interval

まず、任意の $k = 1, \dots, \dim(K)$ に対して、 C_* の標準基底からなる ∂_k の表現行列 M_k を構築する。

次の操作を $k = 1$ から $k=\dim(K)$ まで繰り返し変形していく。

- (1) M_k をエシュロン標準形 \tilde{M}_k に変換する。
- (2) \tilde{M}_k のピボットとそれに対応する基底の次数より $k-1$ 次元 \mathcal{P} -interval を格納する。
- (3) \tilde{M}_k のピボット列に対応する M_{k+1} の行を消去する。

4.2 アルゴリズムの適用例

4.2.1 Example 1

図 13 の例に対してアルゴリズムを適用してみる。

このときの次数は次の表のようになる。

今回は \mathbb{Z} 上で計算する。

a	b	c	d	ac	ab	ad	cd	bc	abc	acd
1	1	2	3	2	3	4	4	5	5	5

このとき ∂_1, ∂_2 の表現行列は以下の M_1, M_2 である。

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & ac & ab & ad & cd & bc \\ \hline d & 0 & 0 & t & t & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & -t^2 & t^3 \\ b & 0 & t^2 & 0 & 0 & -t^4 \\ a & -t & -t^2 & -t^3 & 0 & 0 \end{array} \right], M_2 = \left[\begin{array}{c|cc} & abc & acd \\ \hline bc & 1 & 0 \\ cd & 0 & t \\ ad & 0 & -t \\ ab & t^2 & 0 \\ ac & -t^3 & t^3 \end{array} \right]$$

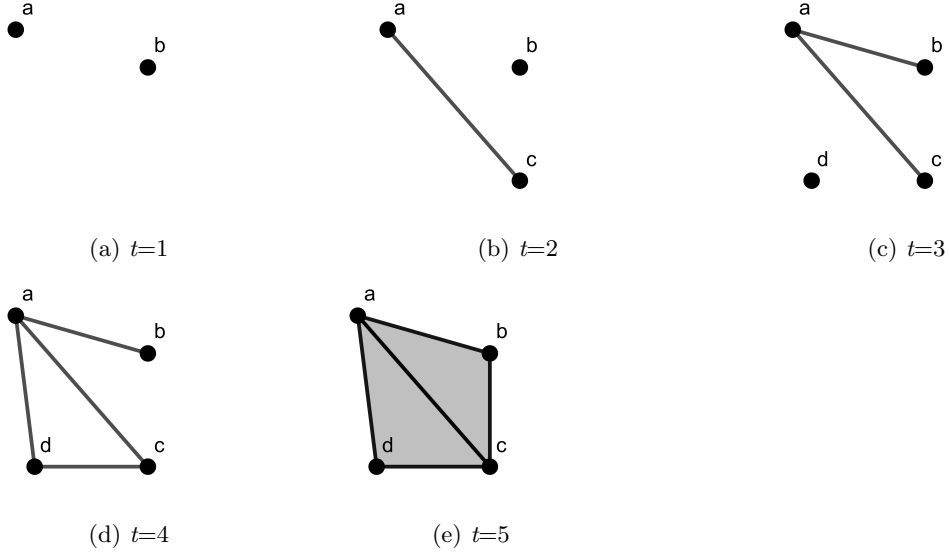


図 13

$k=1$ の繰り返し操作の (1) にあたる操作として M_1 のエシュロン標準形 \tilde{M}_1 を求める。

$$\tilde{M}_1 = \left[\begin{array}{c|cccccc} & ad & ac & ab & z_1 & z_2 \\ \hline d & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ a & -t^3 & -t & -t^2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ただし、 $z_1 = cd - ad + t^2 \cdot ac$, $z_2 = bc - t^3 \cdot ac + t^2 \cdot ab$ である。

この行列から 0 次元 \mathcal{P} -interval を読み取ると次のようになる。

	\mathcal{P} -interval	図における対応
1 行目	(3,4)	d の連結成分
2 行目	(2,2)	c の連結成分
3 行目	(1,3)	b の連結成分
4 行目	(1, ∞)	a の連結成分

\tilde{M}_1 においてピボット列に対応するのは ad, ac, ab なので対応する M_2 の行を消して \check{M}_2 とする。

$$\check{M}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} & abc & acd \\ \hline z_2 & 1 & 0 \\ z_1 & 0 & t \end{array} \right]$$

これはすでにエシュロン標準形の形であるためここから 1 次元 \mathcal{P} -interval を読み取れる。

	\mathcal{P} -interval	図における対応
1 行目	(5,5)	サイクル abc
2 行目	(4,5)	サイクル acd

4.2.2 Example 2

次に図 14 の 3 次元の次の例について考える。
このときの次数は次の表ようになる。

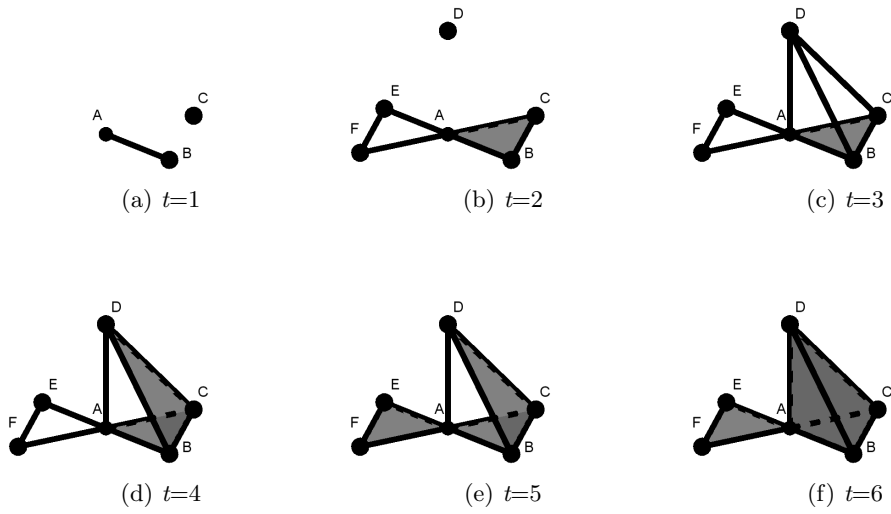


図 14

A	B	C	D	E	F	AB	AC	BC	AE	AF	EF	AD	BD	CD
1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	3	3	3

ABC	BCD	AEF	ABD	ACD
2	4	5	6	6

\mathbb{Z} 上で計算すると、 ∂_1, ∂_2 の表現行列は以下の M_1, M_2 である。

$$M_1 = \begin{bmatrix} & AB & AC & BC & AE & AF & EF & AD & BD & CD \\ F & & & & & 1 & 1 & & & \\ E & & & & 1 & & -1 & & & \\ D & & & & & & & t & t & t \\ C & & t & t & & & & & & -t^2 \\ B & 1 & & -t & & & & & -t^2 & \\ A & -1 & -t & & -t & -t & & -t^2 & & \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & ABC & BCD & AEF & ABD & ACD \\ \hline CD & & t & & & t^3 \\ BD & & -t & & t^3 & \\ AD & & & & -t^3 & -t^3 \\ EF & & & t^3 & & \\ AF & & & -t^3 & & \\ AE & & & t^3 & & \\ BC & 1 & t^2 & & & \\ AC & -1 & & & & t^4 \\ AB & t & & & t^5 & \end{array} \right]$$

$k=1$ の繰り返し操作の (1) にあたる操作として M_1 のエシユロン標準形 \tilde{M}_1 を求める。

$$\tilde{M}_1 = \left[\begin{array}{c|cccccc} & AF & AE & AD & AC & AB & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ \hline F & 1 & & & & & & & & \\ E & & 1 & & & & & & & \\ D & & & t & & & & & & \\ C & & & & t & & & & & \\ B & & & & & 1 & & & & \\ A & -t & -t & -t^2 & -t & -1 & & & & \end{array} \right]$$

ただし、 $Z_1 = BC - AC + t \cdot AB$, $Z_2 = EF - AF + AE$, $Z_3 = BD - AD + t^2 \cdot AB$, $Z_4 = CD - AD + t \cdot AC$ である。

この行列から 0 次元 \mathcal{P} -interval を読み取ると次のようになる。

	\mathcal{P} -interval	図における対応
1 行目	(2,2)	F の連結成分
2 行目	(2,2)	E の連結成分
3 行目	(2,3)	D の連結成分
4 行目	(1,2)	C の連結成分
5 行目	(1,1)	B の連結成分
6 行目	(1, ∞)	A の連結成分

\tilde{M}_1 においてピボット列に対応するのは AB, AC, AE, AF, AD なので対応する M_2 の行を消して \check{M}_2 とする。

$$\check{M}_2 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & ABC & BCD & AEF & ABD & ACD \\ \hline CD & & t & & & t^3 \\ BD & & -t & & t^3 & \\ EF & & & t^3 & & \\ BC & 1 & t^2 & & & \end{array} \right]$$

これをエシュロン標準形 \tilde{M}_2 に変形する。

$$\tilde{M}_2 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & BCD & ABD & AEF & ABC & Z_5 \\ \hline CD & t & & & & \\ BD & -t & t^3 & & & \\ EF & & & t^3 & & \\ BC & t^2 & & & 1 & \end{array} \right]$$

ただし、 $Z_5 = ACD - t^2 \cdot BCD - ABD + t^4 \cdot ABC$ である。

この行列から 1 次元 \mathcal{P} -interval を読み取ると次のようになる。

	\mathcal{P} -interval	図における対応
1 行目	(3,4)	サイクル BCD
2 行目	(3,6)	サイクル ABD
3 行目	(2,5)	サイクル AEF
4 行目	(2,2)	サイクル ABC

M_3 は次のようになる。

$$M_3 = \left[\begin{array}{c|c} & ABCD \\ \hline ABC & 0 \\ BCD & 0 \\ AEF & 0 \\ ABD & 0 \\ ACD & 0 \end{array} \right]$$

ここから \tilde{M}_2 においてピボット列に対応するのは BCD, ABD, AEF, ABC なので対応する M_3 の行を消して \check{M}_3 とする。

$$\check{M}_3 = \left[\begin{array}{c|c} & ABCD \\ \hline Z_5 & 0 \end{array} \right]$$

この行列から 2 次元 \mathcal{P} -interval を読み取ると次のようになる。

	\mathcal{P} -interval	図における対応
1 行目	(6, ∞)	サイクル $ABCD$

5 謝辞

この研究を論文として形にできたのは、担当していただいた岩瀬順一先生の丁寧で熱心なご指導とこの分野に出会わせくれた ENCOUNTER with MATHEMATICS(中央大学) というイベント並びに関係者の方々のおかげです。皆様へ心から感謝の気持ちとお礼を申し上げたく謝辞にかえさせていただきます。

参考文献

- [1] 平岡裕章, タンパク質構造とトポロジーパーシステントホモロジー群入門一, 共立出版, 2013 年.
- [2] G. Carlsson, Topology and data, *Bull. Am. Math. Soc.* 46:255-308, 2009.
- [3] A. Zomorodian and G. Carlsson, Computing persistent homology, *Proc. 20th Ann. Sympos. Comput. Geom.*, pp. 347-356, 2004.
- [4] R. Ghrist, Barcodes: the persistent topology of data. *Bull. Am. Math. Soc. New Ser.* 45(1), 61-75, 2008.
- [5] G. Carlsson, T. Ishkhanov, V. de Silva, and A. Zomorodian, On the local behavior of spaces of natural images, *International Journal of Computer Vision*, (76), 1, 2008, pp. 1-12.