修士論文
Lacey-Thiele の手法による Carleson の定理の証明

金沢大学大学院 自然科学研究科 数物科学専攻
学籍番号 1715011018
倉田 孝幸

2019 年 2 月 26 日

目次

はじめに

本論文において主定理として扱う Carleson の定理は，Fourier 解析の分野における大定理の 1 つである．その内容を標語的にいうと，

「L^2 関数 f の Fourier 級数は f に概収束する」

というものである．Fourier 級数の考え方が生み出された 19 世紀初頭以降,「ある関数の Fourier 級数は元の関数に収束するか」という問いは今に至るまで議論され続けている．1829 年には Dirichlet が，極大および極小を取る点が有限個であるような連続周期関数は Fourier 級数展開できることを証明し，対象となる関数は限定的であったが Fourier 級数の妥当性・収束性を示した最初期の功績となった．その一方，1876 年には du Bois-Reymond によって，ある 1 点で Fourier 級数が発散するような連続関数が存在することが示され，連続関数というだけでは Fourier 級数が各点収束するとは限らないという否定的な結論も導き出された．

その後，20 世紀初め頃になって Fourier 解析に Lebesgue 測度論が導入され，以降は Fourier 級数の "概収束性" が議論の対象となった．そのような中で 1913 年，Luzin は Hilbert 変換の性質を考察していく中で，任意の L^2 関数について，その Fourier 級数は概収束するであろうという推測を打ち出した．以降 L^2 関数の Fourier 級数に関する考察としては，例えば 1925 年に Kolmogoroff，Seliverstoff，Plessner が，$f \in L^2$ 及び f の Fourier 和 $S_N(f;x)$[cf. (7) 式] に対して

$$S_N(f;x) = o\big((\log N)^{\frac{1}{2}}\big), \quad \text{a.e.}$$

という結果を得ていたが，最終的に Luzin の推測が Carleson [1] によって肯定的に証明されたのは，Kolmogoroff らの結果からさらに 41 年後の 1966 年のことであった．Carleson の結果は，翌年の 1967 年に

「L^p (ただし $1 < p < \infty$) 関数の Fourier 級数は概収束する」

と，より一般化された形の主張が Hunt によって証明されており，現在この主張は 2 人の功績を讃えて「Carleson-Hunt の定理」と呼ばれている．

Carleson の定理の証明についてはオリジナルの証明が非常に技巧的であることもあり，その後 Fefferman [2] や Lacey-Thiele [5] によって新たな手法によるものが発表された．中でも 1999 年の Lacey-Thiele の論文においては，dyadic interval (2 進区間) と呼ばれる右半開区間 [cf. 定義 2.3] や，tile と呼ばれる 2 つの dyadic interval の直積を導入し，以前に出されていた証明に改良を加えた形のものを提示した．彼らの証明はその後，Fremlin が補完や論理の裏付けを行い，加えて証明の内容に更なる改良を加えて，読みやすい形に改められている．

本論文では Carleson の定理について，Lacey-Thiele の手法を踏襲し，高信 [6] に従って証明を行う．

本論文の構成は以下の通りである：

第 1 節では，L^1 関数や L^2 関数の Fourier 変換を定義し，その性質について考察する．この節で考察した内容は，第 2 節での考察や証明において礎となるものである．

第 2 節では先述したとおり、Lacey-Thiele の手法による Carleson の定理の証明を扱う．この証明は小節 2.5 で行い，小節 2.1 から 2.4 にて証明のための準備を行う．

小節 2.1 では，Hardy-Littlewood 最大不等式を用意する．この不等式は小節 2.3 内の命題 2.19 の証明に用いる．

小節 2.2 および 2.3 では，Lacey-Thiele が導入したアイデアについて扱う．Lacey-Thiele の手法において鍵となるものは 2 つあり，1 つ目が dyadic interval 及び 2 つの dyadic interval を組にしたものの導入である．dyadic interval は元々 Fefferman によって導入されたものだが，それをより整備していったのが Lacey 及び Thiele である．さらに 2 人は dyadic interval の 2 つ組全体の部分集合に対して “mass” と “energy” なる物量を考えており [cf. 定義 2.10]，これが Lacey-Thiele の手法における 2 つ目の鍵となるものである．これら dyadic interval に関するものについての性質に関する命題や補題を示していくことが，小節 2.2 および 2.3 における目標である．

小節 2.4 では Fremlin [3] 及び高信に依り，急減少関数や L^2 関数に対する作用素に関するいくつかの命題を用意する．Lacey-Thiele においても，Carleson operator と呼ばれる急減少関数 f に対する作用素を導入し，この作用素の性質について考察を行うことを Carleson の定理の証明の 1 つの鍵としている．一方，Fremlin は新たに L^2 関数に対する作用素を用意し，この作用素についての評価式を与えることで，より直接的に Carleson の定理を証明することができるようにした．これは Fremlin の功績であり，小節 2.4 を読み進めれば，この小節で導入する作用素はいずれも Carleson の定理を証明するにあたって重要な役割を果たすことが分かるかと思う．

記号

- $\mathbb{N}$ = 自然数全体の集合，i.e., $\mathbb{N} = \{1,\, 2,\, 3,\, ...\}$,
  $\mathbb{Z}$ = 整数全体の集合，i.e., $\mathbb{Z} = \{...,\, -3,\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, ...\}$,
  $\mathbb{Q}$ = 有理数全体の集合，i.e., $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m};\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}\}$,
  $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合,
  $\mathbb{C}$ = 複素数全体の集合，i.e., $\mathbb{C} = \{x + \sqrt{-1}y;\ x,\, y \in \mathbb{R}\}$，ただし $\sqrt{-1}$ は虚数単位.

- $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \lfloor a \rfloor &:= \max\{n \in \mathbb{Z};\, n \leq a\}, \\ \lceil a \rceil &:= \min\{n \in \mathbb{Z};\, n \geq a\}, \\ \{a\} &:= a - \lfloor a \rfloor, \\ \mathbb{Z}_{\geq a} &:= \{n \in \mathbb{Z};\, n \geq a\} \end{aligned}$$

と定義する．$\lfloor \cdot \rfloor$ を **floor 関数**，$\lceil \cdot \rceil$ を **celing 関数**といい，$\lfloor a \rfloor$ を a の**整数部分**，$\{a\}$ を a の**小数部分**という．

- $a,\, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} a \vee b &:= \max\{a,\, b\}, \\ a \wedge b &:= \min\{a,\, b\}, \\ a^+ &:= a \vee 0, \\ a^- &:= (-a) \vee 0 \end{aligned}$$

と定義する．

- 虚数単位は，$\sqrt{-1}$ を用いる．

- 集合 $A \subset X$ (ただし X は全体集合) に対して，$I_A : X \to \{0,\, 1\}$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

と定義する．この I_A を A の**定義関数**という．

- 高々可算である集合 A に対して

$$\#A := A \text{ の元の個数}$$

と定義する．

- Lebesgue 可測集合 A に対して，その Lebesgue 測度を $\lambda(A)$ と表す．

- $\mathscr{O}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ の開集合全体の族，$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{O}(\mathbb{R})$ を含む最小の σ 集合族．これを $\mathbb{R}$ の **Borel 集合族**という．

1. Fourier 変換

1.1. Fourier 変換

定義 1.1. (i) $1 \leq r < \infty$ に対して

$$L^r(\mathbb{R};\mathbb{C}) := \left\{ f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ は Lebesgue 可測で, } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^r dx < \infty \right\},$$
$$\|f\|_r := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}},\ f \in L^r(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

とする．このとき $\|\cdot\|_r$ は $L^r(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のノルムである．

なお，$L^r(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の関数の中で値域が $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ の関数全体をそれぞれ $L^r(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $L^r(\mathbb{R};[0,\infty))$ と書く．

(ii) $r = 2$ のとき

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx,\ f, g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

とする．$\langle \cdot, * \rangle$ は $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の内積である．

定義 1.2. (i) Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| := \inf\{a > 0; \lambda(|f| > a) = 0\} \in [0, \infty]$$

とする．これを $|f|$ の**本質的上限**という．$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty$ のとき，f は**本質的有界**であるという．

(ii)

$$L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) := \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ は Lebesgue 可測で本質的有界}\},$$
$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,\ f \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

とする．

$L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の関数の中で値域が $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ の関数全体をそれぞれ $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$ と書く．

定義 1.3.

$$C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{C}) := \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ は有界連続}\},$$
$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,\ f \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$
$$C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) := \left\{ f \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{C});\ \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \right\}.$$

値域が $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ の関数全体を，それぞれ $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};[0,\infty))$, $C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $C_\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$ と書く．

注 1.1. $f \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のとき，$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

証明 $|f(y)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\ (\forall y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \{y \in \mathbb{R}; |f(y)| > \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\} = \emptyset$ であるから $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = 0$ のときは，等式は明らかに成り立つ．

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| > 0$ のとき，$0 < \forall b < \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ に対して

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ |f(x_0)| > b.$$

$f \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ だから，f の連続性より

$$\exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{|f| > b\}.$$

$\lambda(|f| > b) \geq 2\delta > 0$ なので，b は $\{a > 0; \lambda(|f| > a) = 0\}$ の下界である．従って $b \leq \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

$b \nearrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ とすると，$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. □

定義 1.4. $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx,\ \xi \in \mathbb{R}$$

とするとき，$\widehat{f}$ を L^1 関数 f の **Fourier** 変換という．

命題 1.1. $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して $\widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で，$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$.

この命題を証明するために，次の補題を用意する：

補題 1.2 (Riemann-Lebesgue の定理). Lebesgue 可積分関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h(x) dx = 0.$$

証明 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可積分関数とする．4 段階で示す．

Step 1 Lebesgue 可測集合 $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda(E) < \infty$ に対し，$h = I_E$ の場合．

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，

$$\exists \{(a_k, b_k]\}_{k=1}^\infty：\text{互いに素な左半開区間列} \ \text{ s.t. } \begin{cases} \bullet\ E \subset \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k], \\ \bullet\ \displaystyle\sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) < \lambda(E) + \varepsilon. \end{cases}$$

このとき

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_E(x) dx - \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^\infty (a_k,b_k]}(x) dx \right| \\ = &\left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^\infty (a_k,b_k] \setminus E}(x) dx \right| \\ \leq &\int_{\mathbb{R}} I_{\bigsqcup_{k=1}^\infty (a_k,b_k] \setminus E}(x) dx \\ = &\lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k] \setminus E \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) - \lambda(E) < \varepsilon.$$

従って

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_E(x)dx - \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| \le \varepsilon.$$

一方

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} e^{\sqrt{-1}\xi x} dx \right| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{a_k}^{b_k} e^{\sqrt{-1}\xi x} dx \right| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \lambda(E) + \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{a_k}^{b_k} e^{\sqrt{-1}\xi x} dx \right| = \left| \left[\frac{e^{\sqrt{-1}\xi x}}{\sqrt{-1}\xi} \right]_{a_k}^{b_k} \right| = \left| \frac{e^{\sqrt{-1}\xi b_k} - e^{\sqrt{-1}\xi a_k}}{\sqrt{-1}\xi} \right| \le \frac{2}{|\xi|} \to 0 \quad (|\xi| \to \infty)$$

であるから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| = 0.$$

よって

$$\begin{aligned} &\limsup_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_E(x)dx \right| \\ &\le \limsup_{|\xi|\to\infty} \left(\left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_E(x)dx + \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| \right) \\ &\le \limsup_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_E(x)dx + \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| \\ &\quad + \limsup_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]}(x)dx \right| \\ &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意であることから

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_E(x)dx = 0.$$

Step 2　h が非負の単関数の場合.

$$\exists \{c_i\}_{i=1}^{k}, \exists \{E_i\}_{i=1}^{k} \text{ s.t. } \begin{cases} \bullet\ c_i \ge 0 \quad (1 \le \forall i \le k), \\ \bullet\ \{E_i\}_{i=1}^{k} \text{ は互いに素，各 } E_i \text{ は Lebesgue 可測で } \lambda(E_i) < \infty, \\ \bullet\ h = \sum_{i=1}^{k} c_i I_{E_i}. \end{cases}$$

Step 1 より

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} \sum_{i=1}^{k} c_i I_{E_i}(x)dx$$
$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} I_{E_i}(x)dx \;\to\; 0 \;\;(|\xi| \to \infty).$$

Step 3　h が非負 Lebesgue 可積分関数の場合.

$$\exists \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \;\; \text{s.t.} \;\; \begin{cases} \bullet \text{ 各 } h_n \text{ は非負の Lebesgue 可測な単関数}, \\ \bullet \; h_n \nearrow h \;\; (n \to \infty). \end{cases}$$

$0 \le h - h_n \le h$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $h - h_n \to 0$ ($n \to \infty$) より

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} (h(x) - h_n(x))dx \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

である．Step 2 より，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h_n(x)dx = 0$$

なので,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{|\xi| \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h(x)dx \right| \\
&= \limsup_{|\xi| \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} (h(x) - h_n(x))dx + \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h_n(x)dx \right| \\
&\le \limsup_{|\xi| \to \infty} \left(\left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} (h(x) - h_n(x))dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h_n(x)dx \right| \right) \\
&\le \int_{\mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)|dx + \limsup_{|\xi| \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h_n(x)dx \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)|dx \;\to 0 \;\; (n \to \infty).
\end{aligned}$$

従って

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h(x)dx = 0.$$

Step 4　h が一般の Lebesgue 可積分関数の場合.

$h^{\pm}$ は非負の Lebesgue 可積分関数で，$h = h^+ - h^-$ だから，Step 3 より

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h(x)dx = \lim_{|\xi| \to \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h^+(x)dx - \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h^-(x)dx \right) = 0. \qquad \square$$

命題 1.1 の証明　まず

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \right|$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$\xi' \to \xi$ のとき，$f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi' x} \to f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. $|f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi' x}| = |f(x)|$ $(\forall \xi' \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R})$ なので，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi' x}dx \\ &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx = \widehat{f}(\xi) \quad (\xi' \to \xi).\end{aligned}$$

ゆえに $\widehat{f} \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$ である．

補題 1.2 (Riemann-Lebesgue の定理) より

$$\begin{aligned}\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi) &= \lim_{|\xi|\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx \\ &= \lim_{|\xi|\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}f)(x)e^{\sqrt{-1}(-\xi)x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}f)(x)e^{\sqrt{-1}(-\xi)x}dx\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$\widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である． □

補題 1.3. $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $-\infty < a < b < \infty$ に対して

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\widehat{f}(\xi)d\xi\int_a^b e^{\sqrt{-1}\xi x}dx = \sqrt{2\pi}\int_a^b f(x)dx.$$

証明 $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する．$-\infty < a < b < \infty$, $T > 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}\widehat{f}(\xi)d\xi\int_a^b e^{\sqrt{-1}\xi x}dx \\ &= \int_{-T}^{T}\widehat{f}(\xi)I_{\{\xi\neq 0\}}d\xi\int_a^b\left(\frac{e^{\sqrt{-1}\xi x}}{\sqrt{-1}\xi}\right)'dx \\ &= \int_{-T}^{T}\widehat{f}(\xi)I_{\{\xi\neq 0\}}\left[\frac{e^{\sqrt{-1}\xi x}}{\sqrt{-1}\xi}\right]_a^b d\xi \\ &= \int_{-T}^{T}I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{e^{\sqrt{-1}\xi b} - e^{\sqrt{-1}\xi a}}{\sqrt{-1}\xi}d\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\int_{-T}^{T}I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{e^{-\sqrt{-1}\xi(x-b)} - e^{-\sqrt{-1}\xi(x-a)}}{\sqrt{-1}\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_{-T}^{T}I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\cos(\xi(x-b)) - \cos(\xi(x-a))}{\xi}d\xi\right. \\ &\qquad\qquad\left. - \int_{-T}^{T}I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin(\xi(x-b)) - \sin(\xi(x-a))}{\xi}d\xi\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\left(-\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin(\xi(x-b)) - \sin(\xi(x-a))}{\xi}d\xi\right) \\ &\qquad \left[\begin{array}{l}(\because)\ \xi \mapsto I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\cos(\xi(x-b))-\cos(\xi(x-a))}{\xi}\text{ は奇関数}, \\ \qquad \xi \mapsto I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin(\xi(x-b))-\sin(\xi(x-a))}{\xi}\text{ は偶関数}\end{array}\right] \\ &= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin(\xi(x-b))}{\xi}d\xi + \frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin(\xi(x-a))}{\xi}d\xi\right) \quad (1)\end{aligned}$$

ここで,

$$G(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^x I_{\{t\neq 0\}}\frac{\sin t}{t}dt,\ x\in\mathbb{R}$$

とすると，$c=0$ のとき

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin \xi c}{\xi}d\xi = 0,$$

$c>0$ のとき，変数変換 $\zeta=\xi c$ により

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin \xi c}{\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{Tc} I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin \zeta}{\zeta}d\zeta = G(Tc),$$

$c<0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin \xi c}{\xi}d\xi &= \frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin(-\xi|c|)}{\xi}d\xi\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin \xi|c|}{\xi}d\xi = -G(T|c|) = G(Tc).\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T I_{\{\xi\neq 0\}}\frac{\sin \xi c}{\xi}d\xi = G(Tc).$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} G(x) = \pm\frac{1}{2}$ である．なぜならば $\displaystyle\int_{0+}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} G(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0+}^x \frac{\sin t}{t}dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0+}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2},\\ \lim_{x\to-\infty} G(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^x I_{\{t\neq 0\}}\frac{\sin t}{t}dt\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\right)\int_x^0 I_{\{t\neq 0\}}\frac{\sin t}{t}dt\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\right)\int_{-x}^0 I_{\{u\neq 0\}}\frac{\sin(-u)}{-u}\cdot -du \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ u=-t]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\right)\int_{0+}^{-x}\frac{\sin u}{u}du = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

以上のことから

$$\begin{aligned}&(\text{(1) 式の最右辺})\\ &= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\Big(-G\big(T(x-b)\big)+G\big(T(x-a)\big)\Big)dx\\ &= \sqrt{2\pi}\Bigg(\int_{(-\infty,a)} f(x)\Big(-G\big(T(x-b)\big)+G\big(T(x-a)\big)\Big)dx\\ &\qquad + \int_{(a,b)} f(x)\Big(-G\big(T(x-b)\big)+G\big(T(x-a)\big)\Big)dx\\ &\qquad + \int_{(b,\infty)} f(x)\Big(-G\big(T(x-b)\big)+G\big(T(x-a)\big)\Big)dx\Bigg)\end{aligned}$$

$$\to \sqrt{2\pi}\int_a^b f(x)dx \quad (T\to\infty). \qquad \square$$

命題 1.4. $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ならば，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi$ a.e. x.

証明 補題 1.3 より

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}\widehat{f}(\xi)d\xi\int_a^b e^{\sqrt{-1}\xi x}dx=\int_a^b f(x)dx.$$

$\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)d\xi\int_a^b e^{\sqrt{-1}\xi x}dx=\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi\right)dx.$$

これが任意の $-\infty<a<b<\infty$ について成り立つので

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi \quad \text{a.e. } x. \qquad \square$$

系 1.5. $\widehat{f}=0$ ならば $f=0$ $(\Leftrightarrow f(x)=0$ a.e. $x)$.

証明 これは命題 1.4 より明らかである． $\square$

補題 1.6. $f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のとき，$\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で $\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$.

証明 f は Borel 可測関数で $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty$, $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx<\infty$ とする．以降 4 段階で示す．

Step 1 まず

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi,\\
&\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi=\frac{1}{A}\int_{(0,A]}da\int_{-a}^{a}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\\
&\qquad=\int_{(0,1]}d\alpha\int_{-A\alpha}^{A\alpha}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \quad \left[(\because)\text{ 変数変換 } \alpha=\tfrac{a}{A}\right]\\
&\qquad\to\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \quad (A\to\infty).
\end{aligned}$$

Step 2 $A>0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\\
&=\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a}d\xi\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\right|^2\\
&=\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a}d\xi\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\overline{\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy}\\
&=\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a}d\xi\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\int_{\mathbb{R}}\overline{f(y)}e^{\sqrt{-1}\xi y}dy\\
&=\iint_{\mathbb{R}^2}f(x)\overline{f(y)}dxdy\frac{1}{2\pi}\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a}e^{-\sqrt{-1}\xi(x-y)}d\xi
\end{aligned}$$

$$\left[(\because) \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)||f(y)|dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx\right)^2 < \infty \text{ より Fubini の定理を適用}\right]$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{f(y)} I_{\{x\neq y\}} dxdy \frac{1}{\pi}\frac{1}{A}\int_0^A \frac{\sin a(x-y)}{x-y} da$$

$$\left[\begin{aligned}(\because) \int_{-a}^{a} e^{-\sqrt{-1}\xi(x-y)} d\xi &= \int_{-a}^{a} (\cos\xi(x-y) - \sqrt{-1}\sin\xi(x-y))d\xi \\ &= 2\int_0^a \cos\xi(x-y)d\xi \\ &= 2\left(I_{\{x=y\}}a + I_{\{x\neq y\}}\tfrac{\sin a(x-y)}{x-y}\right)\end{aligned}\right]$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{f(y)} I_{\{x\neq y\}} \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos A(x-y)}{(A(x-y))^2} Adxdy$$

$$\left[\begin{array}{l}\theta \neq 0 \text{ に対して } 0 \leq \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.\text{ よって} \\ 0 \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)||f(y)| I_{\{x\neq y\}} \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos A(x-y)}{(A(x-y))^2} Adxdy < \infty \text{ に注意}\end{array}\right]$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)\overline{f\left(u+\frac{v}{A}\right)} I_{\{v\neq 0\}} \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos v}{v^2} dudv$$

$[(\because)$ 変数変換 $u = x,\ v = A(y-x)]$.

<u>Step 3</u> $G(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^x I_{\{t\neq 0\}}\frac{\sin t}{t}dt \to \frac{1}{2} \quad (x\to\infty)$ より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} I_{\{v\neq 0\}}\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos v}{v^2}dv &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_{\{v\neq 0\}}\frac{1-\cos v}{v^2}dv \quad [(\because)\ v\mapsto v^2,\ \cos v \text{ は偶関数}] \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\ x\to\infty}\int_\varepsilon^x \frac{1-\cos v}{v^2}dv \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\ x\to\infty}\left(\left[-\frac{1-\cos v}{v}\right]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x \frac{\sin v}{v}dv\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\ x\to\infty}\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1-\cos x}{x} + \int_\varepsilon^x \frac{\sin v}{v}dv\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\ x\to\infty}\left(\frac{1-\cos^2\varepsilon}{\varepsilon(1+\cos\varepsilon)} - \frac{1-\cos x}{x} + \int_\varepsilon^x \frac{\sin v}{v}dv\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\ x\to\infty}\left(\frac{\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1-\cos x}{x} + \int_\varepsilon^x \frac{\sin v}{v}dv\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

$\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du < \infty$ なので

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} |f(u)|^2 I_{\{v\neq 0\}}\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos v}{v^2}dudv &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du \int_{\mathbb{R}} I_{\{v\neq 0\}}\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos v}{v^2}dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du.\end{aligned}$$

<u>Step 4</u>

$$\left|\frac{1}{A}\int_0^A da\int_{-a}^{a} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi - \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du\right|$$

$$= \left|\iint_{\mathbb{R}^2} f(u)\overline{f\left(u+\frac{v}{A}\right)} I_{\{v\neq 0\}}\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos v}{v^2}dudv - \iint_{\mathbb{R}^2} |f(u)|^2 I_{\{v\neq 0\}}\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos v}{v^2}dudv\right|$$

$[(\because)$ Step 2, と Step 3$]$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(u) \left(\overline{f\left(u + \frac{v}{A}\right)} - \overline{f(u)} \right) I_{\{v\neq 0\}} \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos v}{v^2} du dv \right| \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(u)| \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) - f(u) \right| I_{\{v\neq 0\}} \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos v}{v^2} du dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{\{v\neq 0\}} \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos v}{v^2} dv \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) - f(u) \right| du \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} I_{\{v\neq 0\}} \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos v}{v^2} dv \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) - f(u) \right|^2 du} \\
&\qquad [(\because)\ \text{Schwarz の不等式}] \\
&= \|f\|_2 \int_{\mathbb{R}} I_{\{v\neq 0\}} \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos v}{v^2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) - f(u) \right|^2 du} dv.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\lim_{A\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) - f(u) \right|^2 du = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}, \\
&\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) - f(u) \right|^2 du} \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(u + \frac{v}{A}\right) \right|^2 du} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du} \\
&\qquad\qquad [(\because)\ \text{Minkowski の不等式}] \\
&\qquad\qquad = 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du} \\
&\qquad\qquad = 2\|f\|_2, \quad \forall v \in \mathbb{R},\ \forall A > 0
\end{aligned}
$$

に注意すると，Lebesgue の収束定理より

$$
\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_0^A da \int_{-a}^{a} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du.
$$

これと，Step 1 により

$$
\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du. \qquad \square
$$

定義 1.5. $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$
\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}:\mathbb{C}) \ \text{ s.t. } \ \|f_n - f\|_2 \to 0 \ \ (n\to\infty).
$$

このような関数列は実際に存在する．例えば，$f_n = fI_{[-n,n]}$ とすればよい [$(\because)$ $|f_n| \leq |f|$ より $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$, ゆえに $f_n \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. $|f_n - f|^2 = |f|^2(1 - I_{[-n,n]}) \leq |f|^2$, $|f_n - f|^2 \to 0$ $(n\to\infty)$ だから，Lebesgue の収束定理より $\|f_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Schwarz の不等式より

$$
\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| I_{[-n,n]}(x) dx \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} I_{[-n,n]}(x) dx} = \sqrt{2n} \|f\|_2 < \infty
$$

であるから $f_n \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$]. 補題 1.6 より

$$
\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \to 0 \ \ (n, m \to \infty).
$$

このことから $\{\widehat{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の Cauchy 列なので

$$
\exists g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ \text{ s.t. } \ \|\widehat{f_n} - g\|_2 \to 0 \ \ (n\to\infty).
$$

別に $\{\widetilde{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ も $\|\widetilde{f_n} - f\|_2 \to 0 \ \ (n\to\infty)$ を満たすとすると，上のことから

$$\exists h \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ \ \text{s.t.} \ \ \|\widehat{\widetilde{f_n}} - h\|_2 \to 0 \ \ (n\to\infty).$$

このとき

$$\begin{aligned}
\|h-g\|_2 &= \|h - \widehat{\widetilde{f_n}} + \widehat{\widetilde{f_n}} - \widehat{f_n} + \widehat{f_n} - g\|_2 \\
&\le \|h - \widehat{\widetilde{f_n}}\|_2 + \|\widehat{\widetilde{f_n} - f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - g\|_2 \\
&= \|h - \widehat{\widetilde{f_n}}\|_2 + \|\widetilde{f_n} - f_n\|_2 + \|\widehat{f_n} - g\|_2 \\
&\le \|h - \widehat{\widetilde{f_n}}\|_2 + \|\widetilde{f_n} - f\|_2 + \|f - f_n\|_2 + \|\widehat{f_n} - g\|_2 \\
&\to 0 \ \ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

であるから $h = g$.

以上のことから，f を近似する $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の関数列の取り方に依らずに関数 g は定義できる．これを L^2 関数 f の **Fourier 変換**といい，$\widehat{f}$ と表す.

$f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のとき，$\widehat{f}$ は L^1 関数の Fourier 変換と一致する.

命題 1.7. $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ は線形で，$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ である.

証明 $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対する Fourier 変換の定義より

$$\exists \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ \ \text{s.t.} \ \ \|\widehat{f}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

$f^{(1)}, f^{(2)} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\exists \{f_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}},\ \exists \{f_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \\
&\quad \text{s.t.} \ \left\|f_n^{(1)} - f^{(1)}\right\|_2 \to 0\ ,\ \left\|f_n^{(2)} - f^{(2)}\right\|_2 \to 0 \ \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

$c^{(1)},\ c^{(2)} \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
&c^{(1)} f_n^{(1)} + c^{(2)} f_n^{(2)} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}), \\
&\left\|\left(c^{(1)} f_n^{(1)} + c^{(2)} f_n^{(2)}\right) - \left(c^{(1)} f^{(1)} + c^{(2)} f^{(2)}\right)\right\|_2 \\
&= \left\|c^{(1)}\left(f_n^{(1)} - f^{(1)}\right) + c^{(2)}\left(f_n^{(2)} - f^{(2)}\right)\right\|_2 \\
&\le |c^{(1)}|\left\|f_n^{(1)} - f^{(1)}\right\|_2 + |c^{(2)}|\left\|f_n^{(2)} - f^{(2)}\right\|_2 \ \to 0 \ \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

ゆえに，$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$g = \mathop{\text{l.i.m.}}_{n\to\infty} g_n \ \Leftrightarrow \ \|g_n - g\|_2 \to 0 \ \ (n\to\infty)$$

とすると

$$\begin{aligned}
\left(c^{(1)} f^{(1)} + c^{(2)} f^{(2)}\right)^{\widehat{}} &= \mathop{\text{l.i.m.}}_{n\to\infty} \left(c^{(1)} f_n^{(1)} + c^{(2)} f_n^{(2)}\right)^{\widehat{}} \\
&= \mathop{\text{l.i.m.}}_{n\to\infty} \left(c^{(1)} \widehat{f_n^{(1)}} + c^{(2)} \widehat{f_n^{(2)}}\right) \\
&= c^{(1)} \mathop{\text{l.i.m.}}_{n\to\infty} \widehat{f_n^{(1)}} + c^{(2)} \mathop{\text{l.i.m.}}_{n\to\infty} \widehat{f_n^{(2)}} = c^{(1)} \widehat{f^{(1)}} + c^{(2)} \widehat{f^{(2)}}.
\end{aligned}$$

ただし，l.i.m. は，<u>l</u>imit <u>i</u>n <u>m</u>ean の略である． □

命題 1.8. $f, g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$.

証明 $f, g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する．$f+g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ であるから

$$\|\widehat{f}+\widehat{g}\|_2^2 = \|\widehat{f+g}\|_2^2 = \|f+g\|_2^2.$$

ここで

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}+\widehat{g}\|_2^2 &= \langle \widehat{f}+\widehat{g}, \widehat{f}+\widehat{g}\rangle = \|\widehat{f}\|_2^2 + \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle + \langle \widehat{g}, \widehat{f}\rangle + \|\widehat{g}\|_2^2,\\ \|f+g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|_2^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \|g\|_2^2\end{aligned}$$

と展開すると，$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$, $\|\widehat{g}\|_2 = \|g\|_2$ により

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle + \langle \widehat{g}, \widehat{f}\rangle = \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle. \tag{2}$$

(2) 式において，g の代わりに $\sqrt{-1}g$ を入れて考えると

$$\begin{aligned}-\sqrt{-1}\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle + \sqrt{-1}\langle \widehat{g}, \widehat{f}\rangle &= \langle \widehat{f}, \sqrt{-1}\widehat{g}\rangle + \langle \sqrt{-1}\widehat{g}, \widehat{f}\rangle\\ &= \langle f, \sqrt{-1}g\rangle + \left\langle \sqrt{-1}g, f\right\rangle = -\sqrt{-1}\left\langle f, g\right\rangle + \sqrt{-1}\left\langle g, f\right\rangle.\end{aligned}$$

両辺を $\sqrt{-1}$ 倍すると $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle - \langle \widehat{g}, \widehat{f}\rangle = \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle$．これと (2) 式とを辺々足し合わせて $\frac{1}{2}$ 倍すると $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$. □

1.2. 畳み込みと Fourier 逆変換

命題 1.9. $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x-\cdot)g(\cdot)$ は Lebesgue 可測関数である．

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy < \infty$ a.e. x.

(iii) $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ は Lebesgue 可測で，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\cdot-y)g(y)dy \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(iv) $\displaystyle\left\|\int_{\mathbb{R}} f(\cdot-y)g(y)dy\right\|_p \le \|f\|_p\|g\|_1$. これを **Young の不等式**という．

証明 $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．f, g の Borel 可測変形を f_1, g_1 とする :

$$f_1,\, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ は Borel 可測関数で，} \lambda(\{f \neq f_1\}) = 0,\ \lambda(\{g \neq g_1\}) = 0.$$

このとき

$$\lambda^2\Big(\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x-y) \neq f_1(x-y)\big\}\Big) = \lambda^2\Big(\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x-y \in \{f \neq f_1\}\big\}\Big) = 0, \tag{3}$$

$$\lambda^2\Big(\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; g(y) \neq g_1(y)\big\}\Big) = \lambda^2\Big(\mathbb{R} \times \{g \neq g_1\}\Big) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\big\{y \in \mathbb{R}; f(x-y) \neq f_1(x-y)\big\}\Big) &= \lambda\Big(\big\{y \in \mathbb{R}; x-y \in \{f \neq f_1\}\big\}\Big)\\ &= \lambda\Big(-\{f \neq f_1\} + x\Big) = \lambda\Big(\{f \neq f_1\}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

ただし，λ^2 は 2 次元 Lebesgue 測度を表す．ゆえに

$$\begin{aligned}&f(x-y)g(y) = f_1(x-y)g(y) = f_1(x-y)g_1(y) \text{ a.e. } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad [(\because)\ (3),\ (4)],\\ &f(x-y)g(y) = f(x-y)g_1(y) = f_1(x-y)g_1(y) \text{ a.e. } y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad [(\because)\ (5)].\end{aligned}$$

f_1, g_1 の定義より，$(x,y) \mapsto f_1(x-y)g_1(y)$ は Borel 可測であり，また $x \in \mathbb{R}$ を止める毎に $y \mapsto f_1(x-y)g_1(y)$ は Borel 可測なので

$$\begin{aligned} (x,y) \mapsto f(x-y)g(y) &\text{ は Lebesgue 可測}, \\ y \mapsto f(x-y)g(y) &\text{ は Lebesgue 可測} \quad (\forall x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

このことから (i) は成立する．そして

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} (f(x-y)g(y))^{\pm}\, dxdy &= \iint_{\mathbb{R}^2} (f_1(x-y)g_1(y))^{\pm}\, dxdy, \\ \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)g(y))^{\pm}\, dy &= \int_{\mathbb{R}} (f_1(x-y)g_1(y))^{\pm}\, dy,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

さらに $\mathbb{R} \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (f_1(x-y)g_1(y))^{\pm}\, dy \in [0,\infty]$ は Borel 可測なので，$\mathbb{R} \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)g(y))^{\pm}\, dy \in [0,\infty]$ も Borel 可測であり

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)g(y))^{\pm}\, dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} (f_1(x-y)g_1(y))^{\pm}\, dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (f_1(x-y)g_1(y))^{\pm}\, dxdy \quad [(\because) \text{ Fubini の定理}] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (f(x-y)g(y))^{\pm}\, dxdy. \end{aligned}$$

以降，p の値によって 3 つの場合に分ける．

<u>Case 1</u>　$p = \infty$ の場合.

$|f_1(x)| \le \|f_1\|_\infty$ a.e. x より，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f_1(x-y)g_1(y)| = |f_1(x-y)||g_1(y)| \le \|f_1\|_\infty |g_1(y)| \quad \text{a.e. } y.$$

y について積分すると

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy \le \|f_1\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g_1(y)|dy = \|f_1\|_\infty \|g_1\|_1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

従って $\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy < \infty$. $\left|\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)g_1(y)dy\right| \le \|f_1\|_\infty \|g_1\|_1$ より $\int_{\mathbb{R}} f_1(\cdot - y)g_1(y)dy \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. そして $\left\|\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)g_1(y)dy\right\|_\infty \le \|f_1\|_\infty \|g_1\|_1$.

<u>Case 2</u>　$p = 1$ の場合.

Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy &= \int_{\mathbb{R}} |g_1(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g_1(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|dx = \|g_1\|_1 \|f_1\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

従って $\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy < \infty$ a.e. x. $\int_{\mathbb{R}} dx \left|\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)g_1(y)dy\right| < \infty$ より $\int_{\mathbb{R}} f_1(\cdot - y)g_1(y)dy \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. そして $\left\|\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)g_1(y)dy\right\|_1 \le \|f_1\|_1 \|g_1\|_1$.

<u>Case 3</u>　$1 < p < \infty$ の場合.

$q = \frac{p}{p-1}$ とする．$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ であって

$$\int_{\mathbb{R}} dx \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy \right)^p$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} dx \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)||g_1(y)|^{\frac{1}{p}}|g_1(y)|^{\frac{1}{q}} dy \right)^p \\
&\le \int_{\mathbb{R}} dx \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)|^p|g_1(y)|dy \right)^{p\cdot\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_1(y)|dy \right)^{\frac{p}{q}} \quad [(\because)\ \text{Hölder の不等式}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)|^p|g_1(y)|dy \right) \|g_1\|_1^{p-1} \quad [(\because)\ q = \tfrac{p}{p-1} \Leftrightarrow \tfrac{p}{q} = p-1] \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)|^p dx \int_{\mathbb{R}} |g_1(y)|dy \right) \|g_1\|_1^{p-1} \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^p dx \int_{\mathbb{R}} |g_1(y)|dy \right) \|g_1\|_1^{p-1} = \|f_1\|_p^p \|g_1\|_1^p < \infty.
\end{aligned}
$$

従って $\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy < \infty$ a.e. x. $\int_{\mathbb{R}} dx \left| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x-y)g_1(y)|dy \right|^p < \infty$ より $\int_{\mathbb{R}} |f_1(\cdot - y)g_1(y)|dy \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$. そして $\left\| \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)g_1(y)dy \right\|_p \le \|f_1\|_p \|g_1\|_1$. □

定義 1.6. $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$
\int_{\mathbb{R}} f(\cdot - y)g(y)dy \ \in \ L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})
$$

を，f と g の**畳み込み**といい，$f * g$ と表す．変数変換 $x - y = z$ により

$$
\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{+\infty}^{-\infty} f(z)g(x-z) \cdot -dz = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy
\end{aligned}
$$

となることに注意せよ．

命題 1.10.

(i) $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$
$\Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で $\widehat{f * g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ $(\forall \xi \in \mathbb{R})$.

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$
$\Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で $\widehat{f * g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ $(\forall \xi \in \mathbb{R})$.

(iii) $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$
$\Rightarrow f * g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}$.

証明 $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．

(i) $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，命題 1.9(iii) より $f * g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である．また

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \right) g(y)dy \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-\sqrt{-1}\xi(x-y)} dx \right) g(y) e^{-\sqrt{-1}\xi y} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-\sqrt{-1}\xi y} dy \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\sqrt{-1}\xi t} dt \quad [(\because)\ \text{変数変換 } t = x - y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \widehat{g}(\xi) \cdot \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi) \\
&= \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，命題 1.9(iii) より $f * g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である．よって (i) により，$\widehat{f*g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi),\ \forall\xi \in \mathbb{R}$.

(iii) $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．命題 1.9(iii) より $f * g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である．関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を，$\|f_n - f\|_2 \to 0\ (n \to \infty)$ を満たすものとして取る．このとき命題 1.7 より $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 = \|f_n - f\|_2 \to 0\ (n \to \infty)$.

(ii) より $f_n * g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\widehat{f_n * g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f_n}(\xi)\widehat{g}(\xi)\ (\xi \in \mathbb{R})$．$\widehat{f}, \widehat{f_n} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ [($\because$) 定義 1.7, 補題 1.6]，$\widehat{g} \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ [($\because$) 命題 1.1] より，$\widehat{f}\widehat{g}$, $\widehat{f_n}\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ であることから

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{f}\widehat{g} - \widehat{f_n}\widehat{g}\|_2 &= \|(\widehat{f} - \widehat{f_n})\widehat{g}\|_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_1 \\
&\qquad [(\because)\ \text{命題 1.1 より } |\widehat{g}(\xi)| \leq \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_1 \quad (\forall\xi \in \mathbb{R})] \\
&= \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{f*g} - \widehat{f_n * g}\|_2 &= \|f*g - f_n*g\|_2 \quad [(\because)\ \text{命題 1.7}] \\
&= \|(f - f_n)*g\|_2 \quad [(\because)\ \text{定義 1.6}] \\
&\leq \|f - f_n\|_2\|g\|_1 \quad [(\because)\ \text{Young の不等式}] \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

この 2 つを合わせると

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{f*g} - \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}\|_2 \\
&= \|\widehat{f*g} - \widehat{f_n*g} + \sqrt{2\pi}\widehat{f_n}\widehat{g} - \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}\|_2 \\
&\leq \|\widehat{f*g} - \widehat{f_n*g}\|_2 + \sqrt{2\pi}\|\widehat{f_n}\widehat{g} - \widehat{f}\widehat{g}\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

従って

$$
\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})
$$

である． □

補題 1.11. $p_t(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\ (t > 0,\ x \in \mathbb{R})$ とする．

(i) $p_t \in \displaystyle\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{R};[0,\infty)) \cap C_\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} p_t(x)dx = 1$.

(ii) $\widehat{p_t}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t\xi^2}{2}}$.

(iii) $p_t * p_s = p_{t+s}$.

(iv) $1 \leq p < \infty$ のとき，$f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$\|f * p_t - f\|_p \to 0 \quad (t \to 0+).$$

また，$f \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，$f * p_t \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で

$$\|f * p_t - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0+).$$

証明 次の 2 つは既知とする：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\sqrt{-1}\xi x}dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}},\quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(i) p_t の定義より，$p_t \in C_\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$ は明らか. 変数変換 $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ より

$$\int_{\mathbb{R}} p_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 1.$$

$1 \le p < \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
\Big(p_t(x)\Big)^p &= \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{px^2}{2t}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{p}{2}} \left(2\pi\frac{t}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\frac{t}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\frac{t}{p}}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{p}{2}} \left(2\pi\frac{t}{p}\right)^{\frac{1}{2}} p_{\frac{t}{p}}(x)
\end{aligned}$$

なので

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(p_t(x)\Big)^p dx = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{p}{2}} \left(2\pi\frac{t}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} p_{\frac{t}{p}}(x)dx = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{p}{2}} \left(2\pi\frac{t}{p}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(ii) 変数変換 $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ より

$$\begin{aligned}
\widehat{p_t}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} p_t(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-\sqrt{-1}\xi\sqrt{t}y}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}e^{\sqrt{-1}(-\sqrt{t}\xi)y}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t\xi^2}{2}}.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
p_t(x-y)p_s(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{y^2}{2s}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{1}{2t}(x^2-2xy+y^2)-\frac{1}{2s}y^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{1}{2ts}(sx^2-2sxy+(s+t)y^2)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{t+s}{2ts}\Big(y^2-\frac{2s}{t+s}xy+\frac{s}{t+s}x^2\Big)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{t+s}{2ts}\left(\left(y-\frac{s}{t+s}x\right)^2+\frac{ts}{(t+s)^2}x^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{ts}{t+s}}\left(y-\frac{s}{t+s}x\right)^2-\frac{x^2}{2(t+s)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{ts}{t+s}}\sqrt{2\pi(t+s)}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{ts}{t+s}}\left(y-\frac{s}{t+s}x\right)^2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2(t+s)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{ts}{t+s}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{ts}{t+s}}\left(y-\frac{s}{t+s}x\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t+s)}\right) \\
&= p_{\frac{ts}{t+s}}\left(y-\frac{s}{t+s}x\right)p_{t+s}(x)
\end{aligned}
$$

であるから，この等式を y について積分すると

$$
\begin{aligned}
p_t * p_s(x) &= \int_{\mathbb{R}} p_t(x-y)p_s(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} p_{\frac{ts}{t+s}}\left(y-\frac{s}{t+s}x\right)p_{t+s}(x)dy \\
&= p_{t+s}(x) \quad \left[(\because)\ \text{(i) より } \int_{\mathbb{R}} p_{\frac{ts}{t+s}}\left(y-\tfrac{s}{t+s}x\right)dy = 1\right].
\end{aligned}
$$

(iv)　$1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．命題 1.9(iii) より $f * p_t \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ であり，(i) より $\int_{\mathbb{R}} p_t(y)dy = 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\|f * p_t - f\|_p^p \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f * p_t(x) - f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)p_t(y)dy - \int_{\mathbb{R}} f(x)p_t(y)dy\right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-y)-f(x))p_t(y)dy\right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|p_t(y)dy\right)^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p p_t(y)dy \\
&\quad \left[\begin{array}{l}
(\because)\ p>1 \text{ のとき，} q := \frac{p}{p-1} \text{ として，Hölder の不等式より} \\
\quad \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|p_t(y)dy\right)^p \\
\quad = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|p_t(y)^{\frac{1}{p}}p_t(y)^{\frac{1}{q}}dy\right)^p \\
\quad \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p p_t(y)dy\right)^{p\cdot\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}} p_t(y)dy\right)^{\frac{p}{q}} \\
\quad = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p p_t(y)dy
\end{array}\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} p_t(y)dy \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p dx \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_{\mathbb{R}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|^p dx \quad \left[(\because)\ \text{変数変換 } z = \tfrac{y}{\sqrt{t}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\{|z|\le R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_{\mathbb{R}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|^p dx \\
&\quad + \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_{\mathbb{R}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|^p dx \quad [R>0\text{ とする}] \\
&\le \int_{\{|z|\le R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \sup_{|h|\le\sqrt{t}R} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)|^p dx \\
&\quad + \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \cdot 2^p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
(\because)\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}\text{ に対して }|\alpha+\beta|^p\le 2^{p-1}(|\alpha|^p+|\beta|^p)\text{ が成り立つこと} \\
\text{から} \\
\quad \int_{\mathbb{R}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|^p dx \\
\quad \le \int_{\mathbb{R}} 2^{p-1}\big(|f(x-\sqrt{t}z)|^p+|f(x)|^p\big)dx \\
\quad = 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\sqrt{t}z)|^p dx+\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right) = 2^p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx
\end{array}
\right]
$$

$$
\le \sup_{|h|\le\sqrt{t}R} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)|^p dx + 2^p\|f\|_p^p \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
$$

$t\to 0+$ とすると

$$
\limsup_{t\to 0+} \|f*p_t-f\|_p^p \le 2^p\|f\|_p^p \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \to 0 \ \ (R\to\infty).
$$

従って

$$
\lim_{t\to 0+} \|f*p_t-f\|_p = 0 \ \ (1\le p<\infty).
$$

次に，$f\in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．$f*p_t(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)p_t(y)dy$ より $f*p_t\in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

$$
\begin{aligned}
&|f*p_t(x)-f(x)| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \big(f(x-y)-f(x)\big)p_t(y)dy\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|p_t(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad [(\because)\text{ 変数変換 } z=\tfrac{y}{\sqrt{t}}] \\
&= \int_{\{|z|\le R\}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{\{|z|>R\}} |f(x-\sqrt{t}z)-f(x)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&\le \max_{|h|\le\sqrt{t}R} |f(x+h)-f(x)| \int_{\{|z|\le R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + 2\,\|f\|_\infty \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&\le \max_{|h|\le\sqrt{t}R} |f(x+h)-f(x)| + 2\,\|f\|_\infty \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
\end{aligned}
$$

x について sup をとると

$$
\begin{aligned}
\|f*p_t-f\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |f*p_t(x)-f(x)| \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \max_{|h|\le\sqrt{t}R} |f(x+h)-f(x)| + 2\,\|f\|_\infty \int_{\{|z|>R\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
\end{aligned}
$$

$f \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より f は $\mathbb{R}$ 上一様連続だから,

$$\lim_{t\to 0+}\sup_{x\in\mathbb{R}}\max_{|h|\le\sqrt{t}R}|f(x+h)-f(x)|=0$$

なので

$$\limsup_{t\to 0+}\|f*p_t-f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty\int_{\{|z|>R\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\to 0\quad (R\to\infty).$$

従って

$$\lim_{t\to 0+}\|f*p_t-f\|_\infty=0$$

である. □

命題 1.12. $f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して $\left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\widehat{}}=f$.

証明 2 段階で示す.

Step 1 $f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のとき, $\left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\widehat{}}=f$.

(Pr.) $f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する.

$$u_t(y):=\widehat{f}(-y)\sqrt{\frac{2\pi}{t}}p_{\frac{1}{t}}(y),\quad y\in\mathbb{R}$$

とする. このとき, $u_t\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である [$(\because)$ $f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より, 命題 1.1 及び補題 1.6 から $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. 補題 1.11(i) より $p_{\frac{1}{t}}\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ なので

$$u_t(\cdot)=\widehat{f}(-\cdot)\sqrt{\frac{2\pi}{t}}p_{\frac{1}{t}}(\cdot)\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})\cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

また

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|u_t(y)|dy&=\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(-y)\sqrt{\frac{2\pi}{t}}p_{\frac{1}{t}}(y)\right|dy\\&\le\|\widehat{f}\|_\infty\sqrt{\frac{2\pi}{t}}\int_{\mathbb{R}}p_{\frac{1}{t}}(y)dy=\|\widehat{f}\|_\infty\sqrt{\frac{2\pi}{t}}<\infty.\end{aligned}$$

ゆえに $u_t\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である]. 従って

$$\begin{aligned}\widehat{u_t}(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}u_t(y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(-y)\sqrt{\frac{2\pi}{t}}p_{\frac{1}{t}}(y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{\sqrt{-1}yx}dx\right)\sqrt{\frac{2\pi}{t}}p_{\frac{1}{t}}(y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}f(x)dx\int_{\mathbb{R}}p_{\frac{1}{t}}(y)e^{-\sqrt{-1}(\xi-x)y}dy\quad[(\because)\ \text{Fubini の定理}]\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}}f(x)\widehat{p_{\frac{1}{t}}}(\xi-x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2t}}dx\quad[(\because)\ \text{補題 1.11(ii)}]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(\xi - x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\xi - x) p_t(x) dx = f * p_t(\xi) \quad [(\because) \text{ 定義 } 1.6].
\end{aligned}
$$

補題 1.11(iv) より

$$\|\widehat{u_t} - f\|_2 = \|f * p_t - f\|_2 \to 0 \ \ (t \to 0+).$$

一方

$$u_t(y) = \widehat{f}(-y)\sqrt{\frac{2\pi}{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{t}}} e^{-\frac{ty^2}{2}} = \widehat{f}(-y) e^{-\frac{ty^2}{2}}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\left\| u_t - \widehat{f}(-\cdot) \right\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u_t(y) - \widehat{f}(-y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(-y) \left(e^{-\frac{ty^2}{2}} - 1 \right) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(-y)|^2 \left(1 - e^{-\frac{ty^2}{2}} \right)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ \ (t \to 0+).
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - f \right\|_2 &= \left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - \widehat{u_t} + \widehat{u_t} - f \right\|_2 \\
&\leq \left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - \widehat{u_t} \right\|_2 + \|\widehat{u_t} - f\|_2 \\
&= \left\| \widehat{f}(-\cdot) - u_t \right\|_2 + \|\widehat{u_t} - f\|_2 \quad [(\because) \text{ 命題 } 1.7] \\
&\to 0 \ \ (t \to 0+).
\end{aligned}
$$

これは，$\left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} = f$ を示している．

<u>Step 2</u>　$f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して $\left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} = f$.

<u>(Pr.)</u>　$f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する．このとき，$\exists\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ s.t. $\|f - f_n\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Step 1 より

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - f \right\|_2 &= \left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - f_n + f_n - f \right\|_2 \\
&= \left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - \left(\widehat{f_n}(-\cdot)\right)^{\wedge} + f_n - f \right\|_2 \\
&\leq \left\| \left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} - \left(\widehat{f_n}(-\cdot)\right)^{\wedge} \right\|_2 + \|f_n - f\|_2 \\
&= \left\| \widehat{f}(-\cdot) - \widehat{f_n}(-\cdot) \right\|_2 + \|f_n - f\|_2 \quad [(\because) \text{ 命題 } 1.7] \\
&= \left\| \widehat{f} - \widehat{f_n} \right\|_2 + \|f_n - f\|_2 \\
&= \|f - f_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \quad [(\because) \text{ 命題 } 1.7] \\
&= 2\|f_n - f\|_2 \ \to 0 \ \ (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

従って，$\left(\widehat{f}(-\cdot)\right)^{\wedge} = f$ である．　□

定義 1.7. 命題 1.12 より，$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の線形変換 $f \mapsto \widehat{f}$ は全射であることが分かる．一方 f, $g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対し

$$\widehat{f} = \widehat{g} \Rightarrow \widehat{f-g} = 0 \Rightarrow f-g=0 \Rightarrow f=g \quad \text{[cf. 命題 1.7]}$$

であるから，$f \mapsto \widehat{f}$ は単射でもある．

$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の全単射な線形変換 $f \mapsto \widehat{f}$ について，その逆変換を **Fourier 逆変換**とよび，$\check{f}$ と表す．$\check{f} = \widehat{f}(-\cdot)$ となる．

1.3. 急減少関数

定義 1.8.

$$\begin{aligned}
C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) &:= \{f; f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \text{ は無限回微分可能}\},\\
\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) &:= \{f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}); \forall m,\ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{に対して，} \lim_{|x|\to\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0\},\\
C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) &:= \{f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}); \operatorname{supp} f \text{ が compact}\}.
\end{aligned}$$

ここで，$\operatorname{supp} f = \overline{\{x\in\mathbb{R}; f(x)\neq 0\}}$. これを f の **support** (**台**) という．

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ のとき，$f = 0 \ \text{ on } \ (\operatorname{supp} f)^{\mathsf{C}}$ より，$\forall m,\ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して $x^m f^{(n)}(x) = 0 \ \text{ on } \ (\operatorname{supp} f)^{\mathsf{C}}$. $\operatorname{supp} f$ は compact だから，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$，従って $C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
$\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に属する関数を，**急減少関数**という．

値域が $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ である関数の全体をそれぞれ

$$C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ C^\infty(\mathbb{R};[0,\infty)),\ \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ \mathscr{S}(\mathbb{R};[0,\infty)),\ C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ C_0^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$$

と表す．

命題 1.13. (i) $\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset \displaystyle\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
(ii) $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

証明 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．
(i) k, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．$f^{(l)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ となることから $f^{(l)} \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ は明らか.
$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1+x^2)^m f^{(l)}(x) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} x^{2r} f^{(l)}(x) \to 0 \quad (|x|\to\infty)$$

より

$$\begin{aligned}
|x^k f^{(l)}(x)| &= |x^k| \left|(1+x^2)^{k+1} f^{(l)}(x)\right| \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{k+1}}\\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(1+y^2)^{k+1} f^{(l)}(y)\right| \cdot \left(\frac{|x|}{1+x^2}\right)^k \cdot \frac{1}{1+x^2}\\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(1+y^2)^{k+1} f^{(l)}(y)\right| \cdot \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)|^p dx &\le \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(1+y^2)^{k+1} f^{(l)}(y)\right|\right)^p \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^p} dx \\
&\le \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(1+y^2)^{k+1} f^{(l)}(y)\right|\right)^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(1+y^2)^{k+1} f^{(l)}(y)\right|\right)^p [\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \pi \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(1+y^2)^{k+1} f^{(l)}(y)\right|\right)^p < \infty.
\end{aligned}$$

以上のことから $x^k f^{(l)}(x) \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ $(1 \le \forall p < \infty,\ \forall k,\ \forall l \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$. 特に $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ $(1 \le \forall p < \infty)$.

さらに，$j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^k f^{(l)}(x)\right) &= \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} (x^k)^{(r)} \left(f^{(l)}(x)\right)^{(j-r)} \\
&= \sum_{r=0}^{j\wedge k} \binom{j}{r} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r} f^{(l+j-r)}(x) \to 0 \quad (|x| \to \infty),
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^k f^{(l)}(x)\right)\right| dx \le \sum_{r=0}^{j\wedge k} \binom{j}{r} \frac{k!}{(k-r)!} \int_{\mathbb{R}} |x^{k-r} f^{(l+j-r)}(x)| dx < \infty$$

$$[(\because)\ x^k f^{(l)} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})]$$

より $\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^k f^{(l)}(x)\right) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に注意せよ.

(ii) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left(f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}\right) = f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x} \cdot (-\sqrt{-1}x)^n = (-\sqrt{-1})^n x^n f(x) e^{-\sqrt{-1}\xi x}, \\
&\left|\frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left(f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}\right)\right| = |x^n f(x)|, \\
&x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \quad [(\because)\ \text{(i)}]
\end{aligned}$$

であるから，積分記号下での微分ができて

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\widehat{f}(\xi) &= \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left(f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}\right) dx \\
&= \frac{(-\sqrt{-1})^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx
\end{aligned}$$

となり，$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. この式は $n = 0$ のときにも明らかに成り立つ.

$m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ として，上式の両辺を ξ^m 倍すると

$$\xi^m \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\widehat{f}(\xi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-\sqrt{-1})^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \xi^m e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \\
&= \frac{(-\sqrt{-1})^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \frac{1}{(-\sqrt{-1})^m} (-\sqrt{-1}\xi)^m e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \\
&= \frac{(-\sqrt{-1})^{n-m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Big(e^{-\sqrt{-1}\xi x} \Big) dx \\
&= \frac{(-\sqrt{-1})^{n-m}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \to -\infty,\ b \to \infty} \int_a^b x^n f(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Big(e^{-\sqrt{-1}\xi x} \Big) dx \\
&= \frac{(-\sqrt{-1})^{n-m}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \to -\infty,\ b \to \infty} \left(\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \Big(x^n f(x) \Big) \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \Big(e^{-\sqrt{-1}\xi x} \Big) \right]_a^b \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-1)^m \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Big(x^n f(x) \Big) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx \right) \quad [(\because)\ \text{部分積分}] \\
&= \frac{(-\sqrt{-1})^{n-m}}{\sqrt{2\pi}} (-1)^m \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Big(x^n f(x) \Big) e^{-\sqrt{-1}\xi x} dx. \\
&\quad \left[(\because)\ \text{(i) より } \tfrac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \Big(x^n f(x) \Big) \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \text{ なので } \tfrac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \Big(x^n f(x) \Big) \to 0 \ \ (|x| \to \infty) \right].
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(x^n f(x)\big) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ なので，補題 1.2 (Riemann-Lebesgue の定理) より $\lim_{|\xi|\to\infty} \xi^m \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \widehat{f}(\xi) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$．以上より，$\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. □

補題 1.14. $-\infty < \forall a' < \forall a < \forall b < \forall b' < \infty$ に対して

$$
\exists \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,\infty)) \quad \text{s.t.} \quad
\begin{cases}
\bullet\ 0 \leq \varphi(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\
\bullet\ \varphi(x) = 1 \quad \text{on } [a,b], \\
\bullet\ \varphi(x) = 0 \quad \text{on } (-\infty, a'] \cup [b', \infty).
\end{cases}
$$

証明 $-\infty < c < d < \infty$ に対して

$$
f_{c,d}(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d}}, & x \in (c,d), \\ 0, & x \in (-\infty, c] \cup [d, \infty) \end{cases}
$$

とする．$f_{c,d} \in C^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$, $f_{c,d}(x) > 0$ on (c,d) である．

$$
g_{c,d}(x) := \frac{\int_c^x f_{c,d}(t)dt}{\int_c^d f_{c,d}(t)dt},\ x \in \mathbb{R}
$$

とおくと，$g_{c,d} \in C^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$, $g_{c,d}(x) = 0$ on $(-\infty, c]$, $g_{c,d}(x) = 1$ on $[d, \infty)$, $0 < g_{c,d}(x) < 1$ on (c,d) である．したがって

$$
\varphi(x) = g_{a',a}(x)\big(1 - g_{b,b'}(x)\big),\ x \in \mathbb{R}
$$

が、今求めているものである [$(\because)$ $g_{a',a}$, $g_{b,b'} \in C^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$ より $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $x \in (-\infty, a'] \cup [b', \infty) \Rightarrow g_{a',a}(x) = 0$ または $g_{b,b'}(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = 0$, $x \in [a,b] \Rightarrow g_{a',a}(x) = 1$, $g_{b,b'}(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 1$, $x \in (a', a) \Rightarrow 0 < g_{a',a}(x) < 1$, $g_{b,b'}(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = g_{a',a}(x) \in (0,1)$, $x \in (b, b') \Rightarrow g_{a',a}(x) = 1$, $0 < g_{b,b'}(x) < 1 \Rightarrow \varphi(x) = 1 - g_{b,b'}(x) \in (0,1)$]. □

命題 1.15. $-\infty < \forall a' < \forall a < \forall b < \forall b' < \infty$ に対して

$$
\exists \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \quad \text{s.t.} \quad I_{[a,b]} \leq \widehat{\phi} \leq I_{[a',b']}.
$$

証明 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$ を，補題 1.14 の関数とする．$\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を，$\phi = \check{\varphi} = \widehat{\varphi}(-\cdot)$ と取る $[(\because)\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,\infty)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より，命題 1.13 から $\phi = \widehat{\varphi}(-\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})]$．$\widehat{\phi} = \varphi$ であるから，補題 1.14 より $I_{[a,b]} \le \widehat{\phi} \le I_{[a',b']}$ となる． □

命題 1.16. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．$1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，$f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で

$$\big(f * \varphi\big)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$$

が成り立つ．$\operatorname{supp} f$ が compact のときは，$f * \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ となる．

証明 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．命題 1.13(i) により $\varphi \in \bigcap_{1 \le q \le \infty} L^q(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である．$1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する．Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\varphi(y)|dy &\le \begin{cases} \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty, & p = 1, \\ \|f\|_p \|\varphi\|_q, & 1 < p < \infty,\ q = \frac{p}{p-1} \end{cases} \\ &< \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

なので，畳み込み $f * \varphi$ は各点で定義される．

Young の不等式 [cf. 命題 1.9(iv)] より，$f * \varphi \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\|f * \varphi\|_p \le \|f\|_p \|\varphi\|_q$ (ただし，$p = 1$ のときは $q = \infty$) が成り立つ．

$K = \operatorname{supp}\varphi$ とすると, K は $\mathbb{R}$ の compact 集合で, $\varphi(x) = 0$ $(\forall x \in K^{\mathsf{C}})$．$K^{\mathsf{C}} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$ に注意すると, $\forall n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $\varphi^{(n)}(x) = 0$ $(\forall x \in K^{\mathsf{C}})$．従って $|\varphi^{(n)}(x)| \le \big\|\varphi^{(n)}\big\|_\infty I_K(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$x \in (-r, r)$ (ただし $r > 0$) に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^n}{dx^n}\big(\varphi(x-y)\big)\right| &= \big|\varphi^{(n)}(x-y)\big| \le \big\|\varphi^{(n)}\big\|_\infty I_K(x-y) \\ &\le \big\|\varphi^{(n)}\big\|_\infty I_{(-a-r,a+r)}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l} (\because)\ a := \max_{\xi \in K} |\xi|.\ x \in (-r,r),\ x-y \in K \\ \text{のとき } |y| = |x-(x-y)| \le |x|+|x-y| < \\ r+a \end{array}\right]$

なので，積分記号下での微分ができて，$(-r, r)$ 上で

$$\begin{aligned}\big(f * \varphi\big)^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\big(f * \varphi\big)(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{d^n}{dx^n}\big(\varphi(x-y)\big)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi^{(n)}(x-y)dy = \big(f * \varphi^{(n)}\big)(x)\end{aligned}$$

となる．$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $r > 0$ は任意であるから，$f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. なお，$\varphi^{(n)} \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ $[(\because)\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})]$ より $\big(f * \varphi\big)^{(n)} \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$,

$$\left\|\big(f * \varphi\big)^{(n)}\right\|_p = \left\|f * \varphi^{(n)}\right\|_p \le \|f\|_p \left\|\varphi^{(n)}\right\|_q \quad (\text{ただし，} p = 1 \text{ のとき } q = \infty)$$

に注意せよ．

最後に，$\operatorname{supp} f$ が compact のとき，$\exists R>0$ s.t. $|x|>R \Rightarrow f(x)=0$. ここで

$$\begin{aligned}
&|x|>R+a,\ y \in K \\
&\Rightarrow |x-y| \geq |x|-|y|>R+a-|y| \geq R \quad [(\because)\ a=\max_{\xi \in K}|\xi| \geq |y|,\ y \in K] \\
&\Rightarrow f(x-y)=0
\end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
|x|>R+a \Rightarrow \bigl(f * \varphi\bigr)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi(y) dy \\
&= \int_K f(x-y) \varphi(y) dy \quad [(\because)\ K=\operatorname{supp} \varphi \text{ より } \varphi=0 \text{ on } K^{\complement}] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

対偶をとって

$$\bigl(f * \varphi\bigr)(x) \neq 0 \Rightarrow |x| \leq R+a .$$

これは，$\operatorname{supp}(f * \varphi)=\overline{\{f * \varphi \neq 0\}} \subset[-R-a, R+a]$ を示している．以上のことから $\operatorname{supp}(f * \varphi)$ は compact となり，$f * \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} ; \mathbb{C})$ である． □

命題 1.17. $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} ;[0, \infty))$ は

$$\operatorname{supp} \varphi \subset[-1,1],\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx=1$$

を満たすとする．$\varepsilon>0$ に対して $\varphi_{\varepsilon}(x):=\frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ とおくと，$\varphi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} ;[0, \infty))$, $\operatorname{supp} \varphi_{\varepsilon} \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon}(x) dx=1$. このとき，$1 \leq p<\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R} ; \mathbb{C})$ に対し

$$\left\|f * \varphi_{\varepsilon}-f\right\|_p \rightarrow 0 \quad(\varepsilon \rightarrow 0+).$$

証明

$$\begin{aligned}
&\left\|f * \varphi_{\varepsilon}-f\right\|_p^p \\
&=\int_{\mathbb{R}}\left|f * \varphi_{\varepsilon}(x)-f(x)\right|^p dx \\
&=\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi_{\varepsilon}(y) dy-\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{\varepsilon}(y) dy\right|^p dx \quad \left[(\because) \textstyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon}(y) dy=1\right] \\
&=\int_{\mathbb{R}} dx\left|\int_{\mathbb{R}}\Bigl(f(x-y)-f(x)\Bigr) \varphi_{\varepsilon}(y) dy\right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} dx\left(\int_{\mathbb{R}}\Bigl|f(x-y)-f(x)\Bigr| \varphi_{\varepsilon}(y) dy\right)^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}\Bigl|f(x-y)-f(x)\Bigr|^p \varphi_{\varepsilon}(y) dy
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned}
&(\because)\ 1<p<\infty \text{ のとき} \\
&\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}}\bigl|f(x-y)-f(y)\bigr| \varphi_{\varepsilon}(y) dy\right)^p \\
&=\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}}\bigl|f(x-y)-f(y)\bigr| \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{p}}(y) \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{q}}(y) dy\right)^p \quad \left[q=\tfrac{p}{p-1}\right] \\
&\leq\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}}\bigl|f(x-y)-f(y)\bigr|^p \varphi_{\varepsilon}(y) dy\right)^{\frac{p}{p}}\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon}(y) dy\right)^{\frac{p}{q}} \quad [\because \text{ Hölder の不等式}] \\
&=\textstyle\int_{\mathbb{R}}\bigl|f(x-y)-f(y)\bigr|^p \varphi_{\varepsilon}(y) dy \quad \left[\because\ \textstyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon}(y) dy=1\right]
\end{aligned}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)dy \int_{\mathbb{R}} \left| f(x-y) - f(x) \right|^p dx \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)dz \int_{\mathbb{R}} \left| f(x-\varepsilon z) - f(x) \right|^p dx \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y = \varepsilon z] \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi(z)dz \int_{\mathbb{R}} \left| f(x-\varepsilon z) - f(x) \right|^p dx \quad [(\because)\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]] \\
&\le \sup_{|\xi|\le\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x+\xi) - f(x) \right|^p dx \quad \left[(\because)\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]\ \text{より}\ \textstyle\int_{-1}^{1} \varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)dz = 1\right] \\
&\to 0 \quad (\varepsilon \to 0+).
\end{aligned}
$$

□

注 1.2. 命題 1.17 の条件を満たす $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0,\infty))$ は存在する．例えば

$$
f_{-1,1}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}, & x \in (-1,1), \\ 0, & x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \end{cases}
$$

は，$f_{-1,1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0,\infty))$, $f_{-1,1}(x) > 0 \ \big(x \in (-1,1)\big)$, $f_{-1,1}(x) = 0 \ \big(x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)\big)$ だから

$$
\varphi(x) := \frac{f_{-1,1}(x)}{\int_{\mathbb{R}} f_{-1,1}(t)dt}
$$

ととれば，この φ が求めるものの 1 つである．

系 1.18. $\forall f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (ただし $1 \le p < \infty$), $\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\exists g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ s.t. $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

証明 $f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (ただし $1 \le p < \infty$), $\varepsilon > 0$ とする．$\left\|f - fI_{[-n,n]}\right\|_p \to 0 \ (n \to \infty)$ より

$$
\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \left\|f - fI_{[-n_0,n_0]}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.
$$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0,\infty))$ を，命題 1.17 の条件を満たす関数とし，$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ とする．命題 1.17 より

$$
\lim_{\delta \to 0+} \left\| fI_{[-n_0,n_0]} - \left(fI_{[-n_0,n_0]} * \varphi_\delta\right) \right\|_p = 0
$$

であるから

$$
\exists \delta_0 > 0 \ \text{ s.t. } \ \left\| fI_{[-n_0,n_0]} - \left(fI_{[-n_0,n_0]} * \varphi_{\delta_0}\right) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.
$$

$\operatorname{supp}\left(fI_{[-n_0,n_0]}\right) \subset [-n_0, n_0]$ だから，命題 1.16 より $\left(fI_{[-n_0,n_0]}\right) * \varphi_{\delta_0} \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$．$g := \left(fI_{[-n_0,n_0]}\right) * \varphi_{\delta_0}$ ととると，$g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ で

$$
\begin{aligned}
\|f - g\|_p &= \left\| f - fI_{[-n_0,n_0]} + fI_{[-n_0,n_0]} - \left(fI_{[-n_0,n_0]} * \varphi_{\delta_0}\right) \right\|_p \\
&\le \left\| f - fI_{[-n_0,n_0]} \right\|_p + \left\| fI_{[-n_0,n_0]} - \left(fI_{[-n_0,n_0]} * \varphi_{\delta_0}\right) \right\|_p \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

2. Carleson の定理

Carleson の定理を標語的に言うと，「L^2 関数 f についての Fourier 級数の部分和は f に概収束する」となるが，これを正確に述べると次のようになる：

定理 2.1 (Fourier 変換に対する Carleson の定理)**.** $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．a.e. $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx$$

は収束し，その極限は $\widehat{f}(y)$ である．

定理 2.2 (Fourier 級数に対する Carleson の定理)**.** $f \in L^2([-\pi,\pi);\mathbb{C})$ に対して，$\widehat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ を f の **Fourier 係数**

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\sqrt{-1}nt} dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

$S_N(f;\cdot)$ を f の **Fourier 和**

$$S_N(f;x) = \sum_{|n|\le N} \widehat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx}, \quad x \in [-\pi,\pi) \tag{7}$$

とする．このとき，a.e. $x \in [-\pi,\pi)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f;x) = f(x).$$

以降，Lacey-Thiele 及び Lacey の手法を基にして，この 2 つの定理の証明を行っていく．

2.1. Hardy-Littlewood の最大不等式

定義 2.1. $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$f^*(x) := \sup\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt;\ -\infty < a < b < \infty,\ a \le x \le b\right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

とする．f^* を f の **Hardy-Littlewood 最大関数**という．一般に $0 \le f^*(x) \le \infty$ であることに注意せよ．

補題 2.1. $f^* : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ は下半連続，すなわち

$$\liminf_{x'\to x} f^*(x') \ge f^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．従って f^* は Borel 可測である．

証明 3 段階で示す．

Step 1 Lebesgue 可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$p = 1$ のときは

$$\int_A |f(t)|dt \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < \infty,$$

$1<p<\infty$ のときは，さらに $\lambda(A)<\infty$ とすると

$$\begin{aligned}\int_A |f(t)|dt &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|I_A(t)dt \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} I_A(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \ \ [(\because)\ \text{Hölder の不等式，ただし } q=\tfrac{p}{p-1}] \\ &= \|f\|_p \, \lambda(A)^{\frac{1}{q}} < \infty\end{aligned}$$

なので

$$\sup\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt;\ -\infty<a<b<\infty\ ,\ a\leq x\leq b\right\}\leq\infty.$$

Step 2　$x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f^*(x)=\sup\left\{\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt;\ -\infty<a<b<\infty\right\}$$

である．

(Pr.) $x\in\mathbb{R}$ を固定する．$-\infty<a<b<\infty$ に対して

$$-\infty<(a\wedge x)\leq a<b\leq(b\vee x)<\infty,\ \ (a\wedge x)\leq x\leq(b\vee x)$$

であるから

$$\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt\leq f^*(x).$$

$-\infty<a<b<\infty$ について sup をとれば

$$\sup\left\{\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt;\ -\infty<a<b<\infty\right\}\leq f^*(x).$$

$-\infty<a<b<\infty$, $a\leq x\leq b$ のとき，$(a\wedge x)=a$, $(b\vee x)=b$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(t)|dt &= \frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt \\ &\leq \sup\left\{\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt;\ -\infty<a<b<\infty\right\}.\end{aligned}$$

$-\infty<a<b<\infty$, $a\leq x\leq b$ について sup をとれば

$$f^*(x)\leq\sup\left\{\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt;\ -\infty<a<b<\infty\right\}.$$

Step 3　まず，各 $-\infty<a<b<\infty$ に対して

$$\mathbb{R}\ni x\mapsto\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt\in[0,\infty)$$

は連続であることに注意せよ．

$x\in\mathbb{R}$ を固定する．$-\infty<\forall a<\forall b<\infty$ に対して

$$f^*(x')\geq\frac{1}{(b\vee x')-(a\wedge x')}\int_{(a\wedge x')}^{(b\vee x')}|f(t)|dt,\quad x'\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{x'\to x}\frac{1}{(b\vee x')-(a\wedge x')}\int_{(a\wedge x')}^{(b\vee x')}|f(t)|dt=\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt$$

より

$$\begin{aligned}\liminf_{x'\to x} f^*(x') &\geq \lim_{x'\to x}\frac{1}{(b\vee x')-(a\wedge x')}\int_{(a\wedge x')}^{(b\vee x')}|f(t)|dt\\ &=\frac{1}{(b\vee x)-(a\wedge x)}\int_{(a\wedge x)}^{(b\vee x)}|f(t)|dt.\end{aligned}$$

$-\infty<a<b<\infty$ について sup をとると $\liminf_{x'\to x} f^*(x')\geq f^*(x)$. ゆえに f^* は下半連続である. □

補題 2.2. $\emptyset\neq G\in\mathscr{O}(\mathbb{R})$ に対して

$$\exists\mathscr{I}:\text{空でない開区間族}\quad\text{s.t.}\quad\begin{cases}\bullet\ \bigcup_{I\in\mathscr{I}} I=G,\\ \bullet\ I,J\in\mathscr{I}\Rightarrow I=J\ \text{または}\ I\cap J=\emptyset,\\ \bullet\ \mathscr{I}\ \text{は高々可算.}\end{cases}$$

証明 $\emptyset\neq G\in\mathscr{O}(\mathbb{R})$ とし，$\forall x\in G$ に対して

$$I_x:=\bigcup_{\substack{I:\text{開区間};\\ x\in I,\ I\subset G}} I$$

とおく．以降 3 段階で示す.

Step 1 I_x は開区間である.

(Pr.) $\forall x\in G$ に対し，$\exists I$:開区間 s.t. $x\in I$, $I\subset G$ が成り立つ [($\because$) $G\in\mathscr{O}(\mathbb{R})$ だから，I として x における近傍を考えればよい]．また I_x の定め方から I_x は開集合で，$x\in I_x$, $I_x\subset G$ である.

I_x が区間となることを示す．$\alpha,\beta\in I_x$, $\alpha<\beta$ とすると，I_x の定義より

$$\exists I,\ \exists J:\text{開区間}\quad\text{s.t.}\quad\begin{cases}\bullet\ \alpha,x\in I,\ I\subset G,\\ \bullet\ \beta,x\in J,\ J\subset G.\end{cases}$$

次の 3 つの場合を考える.

Case 1 $x\leq\alpha<\beta$ の場合．$\beta,x\in J$ により $\exists\delta_1>0$ s.t. $(x-\delta_1,\beta+\delta_1)\subset J$ $\bigl[(\because)$ $J=(j_1,j_2)$ に対し，$\delta_1=\frac{1}{2}\bigl((x-j_1)\wedge(j_2-\beta)\bigr)$ とすればよい$\bigr]$．$(x-\delta_1,\beta+\delta_1)$ は開区間で，$x\in(x-\delta_1,\beta+\delta_1)$, $(x-\delta_1,\beta+\delta_1)\subset G$. よって I_x の定義より $(x-\delta_1,\beta+\delta_1)\subset I_x$. $x\leq\alpha<\beta$ であるから $[\alpha,\beta]\subset(x-\delta_1,\beta+\delta_1)$ なので $[\alpha,\beta]\subset I_x$.

Case 2 $\alpha<x\leq\beta$ の場合．$\alpha,x\in I$, $\beta,x\in J$ により，$\exists\delta_2>0$ s.t. $(\alpha-\delta_2,x+\delta_2)\subset I$, $(x-\delta_2,\beta+\delta_2)\subset J$ [($\because$) $I=(i_1,i_2)$, $J=(j_1,j_2)$ に対し，$\delta_2=\frac{1}{2}\min\{\alpha-i_1,i_2-x,x-j_1,j_2-\beta\}$ とすればよい]．$(\alpha-\delta_2,\beta+\delta_2)$ は開区間で，$x\in(\alpha-\delta_2,\beta+\delta_2)$, $(\alpha-\delta_2,\beta+\delta_2)=(\alpha-\delta_2,x+\delta_2)\cup(x-\delta_2,\beta+\delta_2)\subset I\cup J\subset G$. よって I_x の定義より $(\alpha-\delta_2,\beta+\delta_2)\subset I_x$. $[\alpha,\beta]\subset(\alpha-\delta_2,\beta+\delta_2)$ であるから，$[\alpha,\beta]\subset I_x$.

Case 3 $\alpha<\beta<x$ の場合．$\alpha,x\in I$ により $\exists\delta_3>0$ s.t. $(\alpha-\delta_3,x+\delta_3)\subset I$ $\bigl[(\because)$ $I=(i_1,i_2)$ に対し，$\delta_3=\frac{1}{2}\bigl((\alpha-i_1)\wedge(i_2-x)\bigr)$ とすればよい$\bigr]$．$(\alpha-\delta_3,x+\delta_3)$ は開区間で，$x\in(\alpha-\delta_3,x+\delta_3)$, $(\alpha-\delta_3,x+\delta_3)\subset G$. よって I_x の定義より $(\alpha-\delta_3,x+\delta_3)\subset I_x$. $\alpha<\beta<x$ であるから $[\alpha,\beta]\subset(\alpha-\delta_3,x+\delta_3)$ なので $[\alpha,\beta]\subset I_x$.

以上から，$\forall\alpha, \forall\beta \in I_x$ $(\alpha < \beta)$ に対して $[\alpha, \beta] \subset I_x$ なので，I_x は区間である．

Step 2　$x, y \in G$ とする．このとき，$I_x = I_y$　または　$I_x \cap I_y = \emptyset$.

(Pr.) $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ とすると，$\exists z \in I_x \cap I_y$. $I_x, I_y \subset G$ より $z \in G$. I_x, I_y は開区間だから，I_z の定義により $I_x \subset I_z$, $I_y \subset I_z$ である．$x \in I_x$, $y \in I_y$ なので，$x, y \in I_z$. Step 1 より I_z は開区間で $I_z \subset G$ だから，I_x, I_y の定義により $I_z \subset I_x$, $I_z \subset I_y$. 以上より $I_x = I_z = I_y$.

Step 3　$\mathscr{I} := \{I_x; x \in G\}$ とおく．$\mathscr{I}$ は開区間の集合で，Step 2 により $I, J \in \mathscr{I}$ に対して $I = J$　または　$I \cap J = \emptyset$ のいずれかが成り立つ．

各 $I \in \mathscr{I}$ に対して，$\exists r_I \in \mathbb{Q}$　s.t.　$r_I \in I$ [$(\because)$ $I = (i_1, i_2)$ としたとき，$n_0 \in \mathbb{N}$ を $i_2 - i_1 > \frac{1}{2^{n_0}}$ と取ると，$2^{n_0} i_2 - 2^{n_0} i_1 > 1$ より $2^{n_0} i_1 < \lfloor 2^{n_0} i_1 \rfloor + 1 \leq 2^{n_0} i_1 + 1 < 2^{n_0} i_2$ なので，$r_I = \frac{\lfloor 2^{n_0} i_1 \rfloor + 1}{2^{n_0}} \in \mathbb{Q}$ とすれば $r_I \in I$]. $I \subset G$ なので $r_I \in G$. このとき $I_{r_I} = I$ [$(\because)$ ある $x \in G$ に対して $I = I_x$ で，$I_x \cap I_{r_I} = I \cap I_{r_I} \ni r_I$. Step 2 より $I = I_x = I_{r_I}$].

$G' := \{r_I; I \in \mathscr{I}\}$ とおく．$G' \subset G \cap \mathbb{Q}$ より，G' は高々可算な G の部分集合である．

$$\{I_r; r \in G'\} = \{I_{r_I}; I \in \mathscr{I}\} = \{I; I \in \mathscr{I}\} = \mathscr{I}$$

より，$\{I_r; r \in G'\}$ は互いに素で

$$\bigcup_{r \in G'} I_r = \bigcup_{I \in \mathscr{I}} I = \bigcup_{x \in G} I_x = G$$

となる．　□

定理 2.3 (Hardy-Littlewood の最大不等式). $1 < p < \infty$ とする．$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f^*(x) \right|^p dx \leq 2 \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt.$$

証明　$f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ を固定する．10 段階で示す．

Step 1　$t > 0$ に対して

$$G_{1,t} := \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists y > x \ \text{ s.t. } \ t(y-x) < \int_x^y |f(s)| ds \right\}$$

とすると，$G_{1,t} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$.

(Pr.)　$y \in \mathbb{R}$ に対して

$$G_{1,t,y} := \left\{ x \in (-\infty, y);\ t(y-x) < \int_x^y |f(s)| ds,\ \text{i.e.,}\ \frac{1}{y-x} \int_x^y |f(s)| ds > t \right\}$$

とおくと

$$(-\infty, y) \ni x \mapsto \frac{1}{y-x} \int_x^y |f(s)| ds \in [0, \infty)$$

は連続なので，$G_{1,t,y} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$. $G_{1,t} = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} G_{1,t,y}$ であるから，$G_{1,t} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$.

Step 2　$G_{1,t} \neq \emptyset$ とする．補題 2.2 より

$$\exists \mathscr{I}_{1,t} : \text{空でない開区間族} \ \text{ s.t. } \begin{cases} \text{(i)} \ \bigcup_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} I = G_{1,t}, \\ \text{(ii)} \ I, J \in \mathscr{I}_{1,t} \ \Rightarrow \ I = J \ \text{ または } \ I \cap J = \emptyset, \\ \text{(iii)} \ \mathscr{I}_{1,t} \text{ は高々可算.} \end{cases} \tag{8}$$

このとき

(a) $\forall I \in \mathscr{I}_{1,t}$ は上に有界である．

(b) $\forall I \in \mathscr{I}_{1,t}$ は有界で，$t\lambda(I) \leq \displaystyle\int_I |f(s)|ds.$

(Pr.) $I \in \mathscr{I}_{1,t}$ を固定する．

(a) $x \in I$ とする．$F_{1,x} := \left\{ y \in [x,\infty);\ t(y-x) \leq \displaystyle\int_x^y |f(s)|ds \right\}$ とおくと，$F_{1,x}$ の定義より $x \in F_{1,x}$. また，$F_{1,x}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である $[(\because)\ [x,\infty) \ni y \mapsto \int_x^y |f(s)|ds - t(y-x) \in \mathbb{R}$ は連続なので，$\left\{ y \in [x,\infty);\ \int_x^y |f(s)|ds - t(y-x) \geq 0 \right\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合$]$.

$$
\begin{aligned}
y \in F_{1,x} \Rightarrow y \geq x,& \\
t(y-x) &\leq \int_x^y |f(s)|ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(s)| I_{[x,y]}(s) ds \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} I_{[x,y]}(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad [(\because)\ \text{Hölder の不等式，ただし } q = \tfrac{p}{p-1}] \\
&= (y-x)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \\
\Rightarrow t(y-x)^{\frac{1}{p}} &\leq \|f\|_p \\
\Rightarrow y - x &\leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p \\
\Rightarrow y &\leq x + \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p
\end{aligned}
$$

より，$F_{1,x}$ は上に有界な集合である．$z_{1,x} := \sup F_{1,x}$ とおくと，$x \leq z_{1,x} < \infty$, $z_{1,x} \in F_{1,x}$ $[(\because)\ z_{1,x} - \frac{1}{n}$ は $F_{1,x}$ の上界ではない $(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists y_n \in F_{1,x}$ s.t. $z_{1,x} \geq y_n > z_{1,x} - \frac{1}{n} \Rightarrow F_{1,x} \ni y_n \to z_{1,x}\ \ (n \to \infty) \Rightarrow z_{1,x} \in \overline{F_{1,x}} = F_{1,x}]$.

　このとき，$z_{1,x} \notin G_{1,x}$ である $[(\because)\ z_{1,x} \in G_{1,x}$ と仮定すると

$$
\exists y > z_{1,x} \ \text{ s.t. } \ t(y - z_{1,x}) < \int_{z_{1,x}}^y |f(s)|ds.
$$

$z_{1,x} \in F_{1,x}$ より

$$
z_{1,x} \geq x,\ t(z_{1,x} - x) \leq \int_x^{z_{1,x}} |f(s)|ds
$$

なので

$$
\begin{aligned}
t(y-x) &= t(y - z_{1,x}) + t(z_{1,x} - x) \\
&\leq \int_{z_{1,x}}^y |f(s)|ds + \int_x^{z_{1,x}} |f(s)|ds = \int_x^y |f(s)|ds.
\end{aligned}
$$

これは $y \in F_{1,x}$，従って $y \leq z_{1,x}$ を示唆するが，$y > z_{1,x}$ と矛盾する$]$.

　(8) の (i) より $I \subset G_{1,t}$ $(\forall I \in \mathscr{I}_{1,t})$ なので，$z_{1,x} \notin I$．$x \in I$, $x \leq z_{1,x}$, $z_{1,x} \notin I$ だから，$\sup I = (I$ の右端点$) \leq z_{1,x}$．よって I は上に有界である．

(b) $I = (a,b)$ とする．ただし $-\infty \leq a < b < \infty$ である．

$$
\begin{aligned}
& a < \exists x < b \ \text{ s.t. } \ t(b-x) > \int_x^b |f(s)| ds \\
& \Rightarrow \ x \in I \\
& \Rightarrow \ b = \sup I \leq z_{1,x} \\
& \Rightarrow \ b \notin G_{1,t} \\
& \qquad \left[\begin{aligned}
(\because) \ b \in G_{1,t} & \Rightarrow \ \exists J \in \mathscr{I}_{1,t} \ \text{ s.t. } \ b \in J \\
& \Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ b - \tfrac{1}{n} \in I \cap J \\
& \Rightarrow \ I \cap J \neq \emptyset \\
& \Rightarrow \ I = J \\
& \Rightarrow \ b \in I = (a,b), \ \text{これは矛盾}
\end{aligned} \right] \\
& \Rightarrow \ \forall y \geq b \ \text{に対して} \ t(y-b) \geq \int_b^y |f(s)| ds \\
& \Rightarrow \ t(z_{1,x} - b) \geq \int_b^{z_{1,x}} |f(s)| ds \\
& \Rightarrow \ t(z_{1,x} - x) = t(z_{1,x} - b) + t(b-x) > \int_b^{z_{1,x}} |f(s)| ds + \int_x^b |f(s)| ds = \int_x^{z_{1,x}} |f(s)| ds \\
& \Rightarrow \ z_{1,x} \notin F_{1,x}, \ \text{これは} \ z_{1,x} \in F_{1,x} \ \text{と矛盾する}
\end{aligned}
$$

により

$$
t(b-x) \leq \int_x^b |f(s)| ds, \quad a < \forall x \leq b \tag{9}
$$

でなければならない．Hölder の不等式より，$a < \forall x \leq b$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_x^b |f(s)| ds &= \int_{\mathbb{R}} I_{[x,b]}(s) |f(s)| ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{[x,b]}(s) |f(s)| I_{[x,b]}(s) ds \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} I_{[x,b]}(s) |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} I_{[x,b]}(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \quad [\text{ただし } q = \tfrac{p}{p-1}] \\
&= (b-x)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^b |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-x)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p
\end{aligned}
$$

であるから

$$
t(b-x) \leq (b-x)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^b |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-x)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p .
$$

整理して

$$
b - x \leq \frac{1}{t^p} \int_x^b |f(s)|^p ds \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p .
$$

$x \to a + 0$ とすると

$$
b - a \leq \frac{1}{t^p} \int_a^b |f(s)|^p ds \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p < \infty . \tag{10}
$$

従って $a > -\infty$ であるから，I は有界な開区間である．(9) 式において $x \to a+0$ とすると

$$t\lambda(I) = t(b-a) \leq \int_a^b |f(s)|ds = \int_I |f(s)|ds \tag{11}$$

が分かる．

<u>Step 3</u>　Step 2 より，$G_{1,t} \neq \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned}
\lambda(G_{1,t}) &= \lambda\Bigl(\bigcup_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} I\Bigr) \quad [(\because)\ (8)\ \text{の}\ (\mathrm{i})] \\
&= \sum_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} \lambda(I) \quad [(\because)\ (8)\ \text{の}\ (\mathrm{ii})\ \text{と}\ (\mathrm{iii})] \\
&\leq \sum_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} \frac{1}{t^p} \int_I |f(s)|^p ds \quad [(\because)\ (10)] \\
&= \frac{1}{t^p} \int_{\bigsqcup_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} I} |f(s)|^p ds \\
&= \frac{1}{t^p} \int_{G_{1,t}} |f(s)|^p ds \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p < \infty,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\int_{G_{1,t}} |f(s)|ds &= \int_{\bigsqcup_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} I} |f(s)|ds \\
&= \sum_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} \int_I |f(s)|ds \\
&\geq \sum_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} t\lambda(I) \quad [(\because)\ (11)] \\
&= t\lambda\Bigl(\bigsqcup_{I \in \mathscr{I}_{1,t}} I\Bigr) = t\lambda(G_{1,t}).
\end{aligned} \tag{13}$$

$G_{1,t} = \emptyset$ のとき，$\lambda(G_{1,t}) = 0 \leq \frac{1}{t^p}\|f\|_p^p$, $t\lambda(G_{1,t}) = 0 = \int_{G_{1,t}} |f(s)|ds$ は明らかに成り立つ．

<u>Step 4</u>　$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f_1^*(x) := \sup_{b > x} \frac{1}{b-x} \int_x^b |f(s)|ds = \sup_{\beta > 0} \frac{1}{\beta} \int_x^{x+\beta} |f(s)|ds$$

とおく．$f_1^*(x) \in [0, \infty]$ で，$x \mapsto f_1^*(x)$ は下半連続である $[(\because)$ 各 $\beta > 0$ に対して

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{\beta} \int_x^{x+\beta} |f(s)|ds \in [0, \infty)$$

は連続なので

$$\begin{aligned}
\liminf_{x' \to x} f_1^*(x') &= \liminf_{x' \to x} \sup_{\beta > 0} \frac{1}{\beta} \int_{x'}^{x'+\beta} |f(s)|ds \\
&\geq \liminf_{x' \to x} \frac{1}{\beta'} \int_{x'}^{x'+\beta'} |f(s)|ds \\
&= \frac{1}{\beta'} \int_{x'}^{x'+\beta'} |f(s)|ds, \quad \forall \beta' > 0.
\end{aligned}$$

$\beta' > 0$ について sup を取れば，$\liminf_{x' \to x} f_1^*(x') \geq f_1^*(x)$]．$t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} f_1^*(x) > t &\Leftrightarrow \sup_{b > x} \frac{1}{b-x} \int_x^b |f(s)| ds > t \\ &\Leftrightarrow \exists b > x \ \text{ s.t. } \ \frac{1}{b-x} \int_x^b |f(s)| ds > t \\ &\Leftrightarrow \exists b > x \ \text{ s.t. } \ t(b-x) < \int_x^b |f(s)| ds \\ &\Leftrightarrow x \in G_{1,t} \end{aligned}$$

より，$\{x \in \mathbb{R}; f_1^*(x) > t\} = G_{1,t}$．(13) 式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} t \lambda(G_{1,t}) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) t \lambda(G_{1,t}) &= t\lambda(G_{1,t}) - \frac{t}{q} \lambda(G_{1,t}) \\ &\leq \int_{G_{1,t}} |f(s)| ds - \int_{G_{1,t}} \frac{t}{q} ds \\ &= \int_{G_{1,t}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right) ds \\ &\leq \int_{G_{1,t}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{p} t \lambda(\{f_1^* > t\}) \leq \int_{\{f_1^* > t\}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds \leq \int_{\mathbb{R}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds. \tag{14}$$

(12) 式より

$$\lambda(\{f_1^* > t\}) = \lambda(G_{1,t}) \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p \to 0 \quad (t \to \infty)$$

なので，$\lambda(\{f_1^* = \infty\}) = 0$. ゆえに $f_1^* < \infty$ a.e. となる．

さて，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (f_1^*(s))^p ds &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_0^{f_1^*(s)} (t^p)' dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_0^{f_1^*(s)} p t^{p-1} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{(0,\infty)} I_{\{f_1^*(s) > t\}} p t^{p-1} dt \\ &= \int_{(0,\infty)} p t^{p-1} dt \int_{\{f_1^*(s) > t\}} ds \quad [(\because) \text{ Fubini の定理}] \\ &= \int_{(0,\infty)} p t^{p-1} \lambda(\{f_1^* > t\}) dt \\ &\leq \int_{(0,\infty)} p t^{p-1} \left(\frac{p}{t} \int_{\mathbb{R}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds\right) dt \quad [(\because) \ (14)] \\ &= \int_{(0,\infty)} p t^{p-1} \frac{p}{t} dt \int_{\mathbb{R}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{(0,\infty)} p^2 t^{p-2} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ dt \quad [(\because) \text{ Fubini の定理}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{(0,\infty)} p^2 t^{p-2} I_{\{|f(s)|-\frac{t}{q}>0\}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q} \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{(0,\infty)} p^2 t^{p-2} I_{\{t<q|f(s)|\}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q} \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds \left(\int_0^{q|f(s)|} p^2 t^{p-2} |f(s)| dt - \int_0^{q|f(s)|} \frac{p^2}{q} t^{p-1} dt \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds \left(\left[\frac{p^2}{p-1} t^{p-1} \right]_0^{q|f(s)|} |f(s)| - \left[\frac{p}{q} t^p \right]_0^{q|f(s)|} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{q^{p-1} p^2}{p-1} |f(s)|^p - q^{p-1} p |f(s)|^p \right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} q^{p-1} |f(s)|^p \left(\frac{p^2}{p-1} - p \right) ds \\
&= q^{p-1} \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p ds \\
&= \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \|f\|_p^p .
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int_{\mathbb{R}} \left(f_1^*(s) \right)^p ds \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \|f\|_p^p .
$$

Step 5　$t > 0$ に対して

$$
G_{2,t} := \left\{ x \in \mathbb{R}; \exists y < x \ \ \text{s.t.} \ \ t(x-y) < \int_y^x |f(s)| ds \right\}
$$

とすると，$G_{2,t} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$.

(Pr.) $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$
G_{2,t,y} := \left\{ x \in (y,\infty); t(x-y) < \int_y^x |f(s)| ds, \ \ \text{i.e.,} \ \ \frac{1}{x-y} \int_y^x |f(s)| ds > t \right\}
$$

とおくと，Step 1 と同様にして $G_{2,t,y} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$. $G_{2,t} = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} G_{2,t,y}$ であるから，$G_{2,t} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$.

Step 6　$G_{2,t} \neq \emptyset$ とする．補題 2.2 より

$$
\exists \mathscr{I}_{2,t} : \text{空でない開区間族} \ \ \text{s.t.} \ \begin{cases} \text{(i)} \ \bigcup_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} I = G_{2,t}, \\ \text{(ii)} \ I, J \in \mathscr{I}_{2,t} \ \Rightarrow \ I = J \ \ \text{または} \ \ I \cap J = \emptyset, \\ \text{(iii)} \ \mathscr{I}_{2,t} \ \text{は高々可算}. \end{cases} \tag{15}
$$

このとき

(a) $\forall I \in \mathscr{I}_{2,t}$ は下に有界である．

(b) $\forall I \in \mathscr{I}_{2,t}$ は有界で，$t\lambda(I) \leq \displaystyle\int_I |f(s)| ds$.

(Pr.) $I \in \mathscr{I}_{2,t}$ を固定する．

(a) $x \in I$ とする．$F_{2,x} := \left\{ y \in (-\infty, x]; \ t(x-y) \leq \displaystyle\int_y^x |f(s)| ds \right\}$ とおくと，$F_{2,x}$ の定義より $x \in F_{2,x}$. また，$F_{2,x}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である [cf. Step 2].

$$
y \in F_{2,x} \Rightarrow y \leq x,
$$

$$
\begin{aligned}
t(x-y) &\le \int_y^x |f(s)|ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(s)| I_{[y,x]}(s) ds \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} I_{[y,x]}(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad [(\because)\ \text{Hölder の不等式，ただし } q = \tfrac{p}{p-1}] \\
&= (x-y)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \\
\Rightarrow t(x-y)^{\frac{1}{p}} &\le \|f\|_p \\
\Rightarrow x-y &\le \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p \\
\Rightarrow y &\ge x - \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p
\end{aligned}
$$

より, $F_{2,x}$ は下に有界な集合である．$z_{2,x} := \inf F_{2,x}$ とおくと, $-\infty < z_{2,x} \le x$, $z_{2,x} \in F_{2,x}$ $[(\because)$ $z_{2,x} + \frac{1}{n}$ は $F_{2,x}$ の下界ではない $(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists y_n \in F_{2,x}$ s.t. $z_{2,x} \le y_n < z_{2,x} + \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow F_{2,x} \ni y_n \to z_{2,x}$ $(n \to \infty) \Rightarrow z_{2,x} \in \overline{F_{2,x}} = F_{2,x}]$.

このとき，$z_{2,x} \notin G_{2,x}$ である $[(\because)$ $z_{2,x} \in G_{2,x}$ と仮定すると

$$
\exists y < z_{2,x} \quad \text{s.t.} \quad t(z_{2,x} - y) < \int_y^{z_{2,x}} |f(s)|ds.
$$

$z_{2,x} \in F_{2,x}$ より

$$
z_{2,x} \le x,\ t(x - z_{2,x}) \le \int_{z_{2,x}}^x |f(s)|ds
$$

なので

$$
\begin{aligned}
t(x-y) &= t(x - z_{2,x}) + t(z_{2,x} - y) \\
&\le \int_{z_{2,x}}^x |f(s)|ds + \int_x^{z_{2,x}} |f(s)|ds = \int_y^x |f(s)|ds.
\end{aligned}
$$

これは $y \in F_{2,x}$，従って $y \ge z_{2,x}$ を示唆するが，$y < z_{2,x}$ と矛盾する].

(15) の (i) より $I \subset G_{2,t}$ $(\forall I \in \mathscr{I}_{2,t})$ なので，$z_{2,x} \notin I$．$x \in I$, $x \ge z_{2,x}$, $z_{2,x} \notin I$ だから，$z_{2,x} \le (I \text{ の左端点}) = \inf I$．よって I は下に有界である．

(b) $I = (a,b)$ とする．ただし $-\infty < a < b \le \infty$ である．

$$
\begin{aligned}
& a < \exists x < b \quad \text{s.t.} \quad t(x-a) > \int_a^x |f(s)|ds \\
& \Rightarrow \ x \in I \\
& \Rightarrow \ a = \inf I \ge z_{2,x} \\
& \Rightarrow \ a \notin G_{2,t}
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{aligned}
(\because)\ a \in G_{2,t} &\Rightarrow \exists J \in \mathscr{I}_{2,t} \quad \text{s.t.} \quad a \in J \\
&\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad a + \tfrac{1}{n} \in I \cap J \\
&\Rightarrow I \cap J \ne \emptyset \\
&\Rightarrow I = J \\
&\Rightarrow a \in I = (a,b),\ \text{これは矛盾}
\end{aligned}
\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \forall y \le a \text{ に対して } t(a-y) \ge \int_y^a |f(s)|ds \\
&\Rightarrow\ t(a - z_{2,x}) \ge \int_{z_{2,x}}^a |f(s)|ds \\
&\Rightarrow\ t(x - z_{2,x}) = t(x-a) + t(a - z_{2,x}) > \int_a^x |f(s)|ds + \int_{z_{2,x}}^a |f(s)|ds = \int_{z_{2,x}}^x |f(s)|ds \\
&\Rightarrow\ z_{2,x} \notin F_{2,x},\quad \text{これは } z_{2,x} \in F_{2,x} \text{ と矛盾する}
\end{aligned}
$$

により

$$
t(x-a) \le \int_a^x |f(s)|ds, \quad a \le \forall x < b \tag{16}
$$

でなければならない．Hölder の不等式より，$a \le \forall x < b$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_a^x |f(s)|ds &= \int_{\mathbb{R}} I_{[a,x]}(s)|f(s)|ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{[a,x]}(s)|f(s)|I_{[a,x]}(s)ds \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} I_{[a,x]}(s)|f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} I_{[a,x]}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \quad [\text{ただし } q = \tfrac{p}{p-1}] \\
&= (x-a)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le (x-a)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p
\end{aligned}
$$

であるから

$$
t(x-a) \le (x-a)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le (x-a)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p .
$$

整理して

$$
x - a \le \frac{1}{t^p} \int_a^x |f(s)|^p ds \le \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p .
$$

$x \to b - 0$ とすると

$$
b - a \le \frac{1}{t^p} \int_a^b |f(s)|^p ds \le \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p < \infty. \tag{17}
$$

従って $b < \infty$ であるから，I は有界な開区間である．(16) 式において $x \to b - 0$ とすると

$$
t\lambda(I) = t(b-a) \le \int_a^b |f(s)|ds = \int_I |f(s)|ds \tag{18}
$$

が分かる．

Step 7 Step 6 より，$G_{2,t} \neq \emptyset$ のとき

$$
\begin{aligned}
\lambda(G_{2,t}) &= \lambda\Bigg(\bigcup_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} I\Bigg) \quad [(\because)\ (15) \text{ の (i)}] \\
&= \sum_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} \lambda(I) \quad [(\because)\ (15) \text{ の (ii) と (iii)}] \\
&\le \sum_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} \frac{1}{t^p} \int_I |f(s)|^p ds \quad [(\because)\ (17)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t^p} \int_{\bigsqcup_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} I} |f(s)|^p ds \\
&= \frac{1}{t^p} \int_{G_{2,t}} |f(s)|^p ds \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p < \infty,
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{G_{2,t}} |f(s)| ds &= \int_{\bigsqcup_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} I} |f(s)| ds \\
&= \sum_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} \int_I |f(s)| ds \\
&\geq \sum_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} t\lambda(I) \quad [(\because)\ (18)] \\
&= t\lambda\left(\bigsqcup_{I \in \mathscr{I}_{2,t}} I \right) = t\lambda(G_{2,t}).
\end{aligned} \tag{20}
$$

$G_{2,t} = \emptyset$ のとき，$\lambda(G_{2,t}) = 0 \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p$, $t\lambda(G_{2,t}) = 0 = \int_{G_{2,t}} |f(s)| ds$ は明らかに成り立つ.

<u>Step 8</u>　$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$
f_2^*(x) := \sup_{a < x} \frac{1}{x-a} \int_a^x |f(s)| ds = \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x |f(s)| ds
$$

とおく．$f_2^*(x) \in [0, \infty]$ で，$x \mapsto f_2^*(x)$ は下半連続である [cf. Step 4]．$t > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_2^*(x) > t &\Leftrightarrow \sup_{a < x} \frac{1}{x-a} \int_a^x |f(s)| ds > t \\
&\Leftrightarrow \exists a < x \ \text{ s.t. } \ \frac{1}{x-a} \int_a^x |f(s)| ds > t \\
&\Leftrightarrow \exists a < x \ \text{ s.t. } \ t(x-a) < \int_a^x |f(s)| ds \\
&\Leftrightarrow x \in G_{2,t}
\end{aligned}
$$

より $\{x \in \mathbb{R}; f_2^*(x) > t\} = G_{2,t}$．(20) 式より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p} t\lambda(G_{2,t}) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) t\lambda(G_{2,t}) = t\lambda(G_{2,t}) - \frac{t}{q}\lambda(G_{2,t}) &\leq \int_{G_{2,t}} |f(s)| ds - \int_{G_{2,t}} \frac{t}{q} ds \\
&= \int_{G_{2,t}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q} \right) ds \\
&\leq \int_{G_{2,t}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q} \right)^+ ds
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\frac{1}{p} t\lambda(\{f_2^* > t\}) \leq \int_{\{f_2^* > t\}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q} \right)^+ ds \leq \int_{\mathbb{R}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q} \right)^+ ds. \tag{21}
$$

(19) 式より

$$
\lambda(\{f_2^* > t\}) = \lambda(G_{2,t}) \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p \to 0 \ \ (t \to \infty)
$$

なので，$\lambda(\{f_2^* = \infty\}) = 0$. ゆえに $f_2^* < \infty$ a.e. となる．

さて，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(f_2^*(s)\right)^p ds &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_0^{f_2^*(s)} \left(t^p\right)' dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds \int_0^{f_2^*(s)} pt^{p-1} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{(0,\infty)} I_{\{f_2^*(s)>t\}} pt^{p-1} dt \\
&= \int_{(0,\infty)} pt^{p-1} dt \int_{\{f_2^*(s)>t\}} ds \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \int_{(0,\infty)} pt^{p-1} \lambda\left(\{f_2^* > t\}\right) dt \\
&\leq \int_{(0,\infty)} pt^{p-1} \left(\frac{p}{t} \int_{\mathbb{R}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds\right) dt \quad [(\because)\ (21)] \\
&= \int_{(0,\infty)} pt^{p-1} \frac{p}{t} dt \int_{\mathbb{R}} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{(0,\infty)} p^2 t^{p-2} \left(|f(s)| - \frac{t}{q}\right)^+ dt \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p \quad [\text{cf. Step 4}].
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int_{\mathbb{R}} \left(f_2^*(s)\right)^p ds \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p .
$$

Step 9 $f^* = (f_1^* \vee f_2^*)$.

(Pr.) $\forall x \in \mathbb{R}$ を固定する．$-\infty < \forall a < x < \forall b < \infty$ に対し，$x \leq x < b$, $a < x \leq x$ より

$$
\frac{1}{b-x} \int_x^b |f(t)| dt \leq f^*(x), \ \frac{1}{x-a} \int_a^x |f(t)| dt \leq f^*(x).
$$

$b > x$, $a < x$ についてそれぞれ sup をとると，$f_1^*(x) \leq f^*(x)$, $f_2^*(x) \leq f^*(x)$. ゆえに $(f_1^*(x) \vee f_2^*(x)) \leq f^*(x)$.

$(f_1^*(x) \vee f_2^*(x)) < f^*(x)$ と仮定する．$t > 0$ を，$(f_1^*(x) \vee f_2^*(x)) < t < f^*(x)$ を満たすものとしてとる．このとき

$$
-\infty < \exists a < \exists b < \infty \ \text{ s.t. } \begin{cases} \bullet\ a \leq x \leq b, \\ \bullet\ \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b |f(s)| ds > t \end{cases} \qquad [(\because)\ \text{定義 2.1}].
$$

ここで

$$
\int_a^b |f(s)| ds > t(b-a) \Leftrightarrow \int_a^x |f(s)| ds + \int_x^b |f(s)| ds > t(x-a) + t(b-x)
$$

に注意すると

$$
\int_a^x |f(s)| ds > t(x-a) \ \text{ または } \ \int_x^b |f(s)| ds > t(b-x).
$$

前者のときは

$$x > a,\ \frac{1}{x-a}\int_a^x |f(s)|ds > t.$$

従って $f_1^*(x) \vee f_2^*(x) \geq f_2^*(x) > t$．後者のときは

$$x < b,\ \frac{1}{b-x}\int_x^b |f(s)|ds > t.$$

従って $f_1^*(x) \vee f_2^*(x) \geq f_1^*(x) > t$．よっていずれのときも $f_1^*(x) \vee f_2^*(x) < t$ に矛盾する．以上より，$(f_1^*(x) \vee f_2^*(x)) = f^*(x)$ である．

Step 10　Step 4, Step 8, Step 9 より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(f^*(s)\right)^p ds &= \int_{\mathbb{R}} \left(f_1^*(s) \vee f_2^*(s)\right)^p ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(f_1^*(s)\right)^p \vee \left(f_2^*(s)\right)^p\right) ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\left(f_1^*(s)\right)^p + \left(f_2^*(s)\right)^p\right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(f_1^*(s)\right)^p ds + \int_{\mathbb{R}} \left(f_2^*(s)\right)^p ds \\
&\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p + \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p \\
&= 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

□

補題 2.3. $-\infty < \alpha \leq \beta < \infty$, $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は

$(-\infty, \alpha]$ で非減少，$[\beta, \infty)$ で非増加，$[\alpha, \beta]$ で定数

とし，$f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ は Lebesgue 可測関数であるとする (g は Borel 可測関数である)．このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)dt\right) \sup_{\substack{a<b;\\ a\leq\alpha,\, b\geq\beta}} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

証明 $\gamma := \displaystyle\sup_{\substack{a<b;\\ a\leq\alpha,\, b\geq\beta}} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \ \in [0, \infty]$ とする．

「$\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 0$」のとき，$g = 0$ a.e. より，(左辺)$= 0 =$(右辺)．「$\gamma = 0$」のとき，$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$ となるから $f = 0$ a.e., ゆえに (左辺)$= 0 =$(右辺)．「$0 < \int_{\mathbb{R}} g(t)dt \leq \infty$ かつ $\gamma = \infty$」または「$\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = \infty$ かつ $0 < \gamma \leq \infty$」のとき, (右辺)$= \infty \geq$(左辺).

以降,「$0 < \int_{\mathbb{R}} g(t) < dt < \infty$ かつ $0 < \gamma < \infty$」のときを考える．

$n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned}
E_{n,k} :&= \left\{x \in [\alpha - 2^n, \beta + 2^n]; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \\
&= \left\{x \in [\alpha - 2^n, \alpha]; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \cup \left\{x \in [\alpha, \beta]; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\}
\end{aligned}$$

$$\cup\left\{x \in [\beta, \beta+2^n]; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\}$$

とおく．5 段階で示す．

Step 1 (i) $g(\alpha) = g(\beta) < \dfrac{k+1}{2^n} \Rightarrow g(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow E_{n,k} = \emptyset$.

(ii) $g(\alpha) = g(\beta) \geq \dfrac{k+1}{2^n} \Rightarrow \left\{x \in [\alpha, \beta];\ g(x) \geq \dfrac{k+1}{2^n}\right\} = [\alpha, \beta]$.

(iii) $g(\alpha - 2^n) \geq \dfrac{k+1}{2^n} \Rightarrow \left\{x \in [\alpha - 2^n, \alpha];\ g(x) \geq \dfrac{k+1}{2^n}\right\} = [\alpha - 2^n, \alpha]$.

(iv) $g(\alpha - 2^n) < \dfrac{k+1}{2^n} \leq g(\alpha) \Rightarrow \left\{x \in [\alpha - 2^n, \alpha];\ g(x) \geq \dfrac{k+1}{2^n}\right\}$

$$= \begin{cases} [a, \alpha], & g(a) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ (a, \alpha], & g(a) < \frac{k+1}{2^n}. \end{cases}$$

ただし， $a := \inf\left\{x \in (-\infty, \alpha]\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \leq \alpha$.

(v) $g(\beta + 2^n) \geq \dfrac{k+1}{2^n} \Rightarrow \left\{x \in [\beta, \beta + 2^n]; g(x) \geq \dfrac{k+1}{2^n}\right\} = [\beta, \beta + 2^n]$.

(vi) $g(\beta) \geq \dfrac{k+1}{2^n} > g(\beta + 2^n) \Rightarrow \left\{x \in [\beta, \beta + 2^n]; g(x) \geq \dfrac{k+1}{2^n}\right\}$

$$= \begin{cases} [\beta, b], & g(b) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ [\beta, b), & g(b) < \frac{k+1}{2^n}. \end{cases}$$

ただし， $b := \sup\left\{x \in [\beta, \infty)\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \geq \beta$.

(Pr.) (i), (ii), (iii), (v) は明らかである．(iv) と (vi) を示す．

(iv) $g(\alpha - 2^n) < \frac{k+1}{2^n} \leq g(\alpha)$ とする．$\alpha \in \{x \in (-\infty, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\}$ は明らかである．$g(x) \leq g(\alpha - 2^n) < \frac{k+1}{2^n}$ $(\forall x \leq \alpha - 2^n)$ より，$\{x \in (-\infty, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\} \subset (\alpha - 2^n, \alpha]$ であるから，$\{x \in (-\infty, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\}$ は，空でない，下に有界な集合である．その下限を a とする．このとき $\alpha - 2^n \leq a \leq \alpha$ である．

$$\begin{aligned} a < a' \leq \alpha \ &\Rightarrow\ a' \text{は} \left\{x \in (-\infty, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \text{の下界ではない} \\ &\Rightarrow\ \exists x \in (-\infty, \alpha] \ \text{ s.t. } \ g(x) \geq \frac{k+1}{2^n},\ x < a' \\ &\Rightarrow\ g(a') \geq g(x) \geq \frac{k+1}{2^n} \end{aligned}$$

より

$$(a, \alpha] \subset \left\{x \in (-\infty, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \subset [a, \alpha].$$

$[\alpha - 2^n, \alpha]$ と共通範囲をとって

$$(a, \alpha] \subset \left\{x \in [\alpha - 2^n, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \subset [a, \alpha].$$

従って

$$\left\{x \in [\alpha - 2^n, \alpha]\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} = \begin{cases} [a, \alpha], & g(a) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ (a, \alpha], & g(a) < \frac{k+1}{2^n}. \end{cases}$$

(vi) $g(\beta + 2^n) < \frac{k+1}{2^n} \leq g(\beta)$ とする．$\beta \in \{x \in [\beta, \infty)\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\}$ は明らかである．$g(x) \leq g(\beta + 2^n) < \frac{k+1}{2^n}$ $(\forall x \leq \beta + 2^n)$ より，$\{x \in [\beta, \infty)\,; g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\} \subset [\beta, \beta + 2^n)$ である

から，$\{x \in [\beta, \infty)\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\}$ は，空でない，上に有界な集合である．その上限を b とする．このとき $\beta \leq b \leq \beta + 2^n$ である．

$$\begin{aligned}\beta \leq b' < b \ \Rightarrow\ & b' \text{は} \left\{x \in [\beta, \infty)\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \text{の上界ではない} \\ \Rightarrow\ & \exists x \in [\beta, \infty) \ \text{ s.t. } \ g(x) \geq \frac{k+1}{2^n},\ b' < x \\ \Rightarrow\ & g(b') \geq g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\end{aligned}$$

より

$$[\beta, b) \subset \left\{x \in [\beta, \infty)\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \subset [\beta, b].$$

$[\beta, \beta + 2^n]$ と共通範囲をとって

$$[\beta, b) \subset \left\{x \in [\beta, \beta + 2^n]\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} \subset [\beta, b].$$

従って

$$\left\{x \in [\beta, \beta + 2^n]\,;\, g(x) \geq \frac{k+1}{2^n}\right\} = \begin{cases}[\beta, b], & g(b) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ [\beta, b), & g(b) < \frac{k+1}{2^n}.\end{cases}$$

Step 2　Step 1 より

(i) $g(\alpha) = g(\beta) < \dfrac{k+1}{2^n} \Rightarrow E_{n,k} = \emptyset.$

(ii) $g(\alpha - 2^n),\ g(\beta + 2^n) \geq \dfrac{k+1}{2^n}$

$\Rightarrow E_{n,k} = [\alpha - 2^n, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, \beta + 2^n] = [\alpha - 2^n, \beta + 2^n]$

[(∵) Step 1 の (ii), (iii), (v)].

(iii) $g(\alpha - 2^n) \geq \dfrac{k+1}{2^n},\ g(\beta + 2^n) < \dfrac{k+1}{2^n} \leq g(\beta)$

$$\Rightarrow E_{n,k} = \begin{cases}[\alpha - 2^n, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b] = [\alpha - 2^n, b], & g(b) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ [\alpha - 2^n, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b) = [\alpha - 2^n, b), & g(b) < \frac{k+1}{2^n}\end{cases}$$

[(∵) Step 1 の (ii), (iii), (vi)].

(iv) $g(\alpha - 2^n) < \dfrac{k+1}{2^n} \leq g(\alpha),\ g(\beta + 2^n) \geq \dfrac{k+1}{2^n}$

$$\Rightarrow E_{n,k} = \begin{cases}[a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, \beta + 2^n] = [a, \beta + 2^n], & g(a) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ (a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, \beta + 2^n] = (a, \beta + 2^n], & g(a) < \frac{k+1}{2^n}\end{cases}$$

[(∵) Step 1 の (ii), (iv), (v)].

(v) $g(\alpha - 2^n) < \dfrac{k+1}{2^n} \leq g(\alpha),\ g(\beta + 2^n) < \dfrac{k+1}{2^n} \leq g(\beta)$

$$\Rightarrow E_{n,k} = \begin{cases}[a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b] = [a, b], & g(a),\ g(b) \geq \frac{k+1}{2^n}, \\ (a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b] = (a, b], & g(b) \geq \frac{k+1}{2^n} > g(a), \\ [a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b) = [a, b), & g(a) \geq \frac{k+1}{2^n} > g(b), \\ (a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b) = (a, b), & g(a),\ g(b) < \frac{k+1}{2^n}\end{cases}$$

[(∵) Step 1 の (ii), (iv), (vi)].

Step 3　Step 2 の (i) の場合

$$\int_{E_{n,k}} f(t)dt = 0 = \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right),$$

Step 2 の (ii) の場合

$$\begin{aligned}\int_{E_{n,k}} f(t)dt = \int_{\alpha-2^n}^{\beta+2^n} f(t)dt &= \frac{1}{(\beta+2^n)-(\alpha-2^n)}\int_{\alpha-2^n}^{\beta+2^n} f(t)dt\cdot\lambda\left(E_{n,k}\right)\\ &\le \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right) \quad [(\because)\ \alpha-2^n<\alpha\le\beta<\beta+2^n],\end{aligned}$$

Step 2 の (iii) の場合

$$\begin{aligned}\int_{E_{n,k}} f(t)dt = \int_{\alpha-2^n}^{b} f(t)dt &= \frac{1}{b-(\alpha-2^n)}\int_{\alpha-2^n}^{b} f(t)dt\cdot\lambda\left(E_{n,k}\right)\\ &\le \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right) \quad [(\because)\ \alpha-2^n<\alpha\le\beta\le b],\end{aligned}$$

Step 2 の (iv) の場合

$$\begin{aligned}\int_{E_{n,k}} f(t)dt = \int_{a}^{\beta+2^n} f(t)dt &= \frac{1}{(\beta+2^n)-a}\int_{a}^{\beta+2^n} f(t)dt\cdot\lambda\left(E_{n,k}\right)\\ &\le \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right) \quad [(\because)\ a\le\alpha\le\beta<\beta+2^n],\end{aligned}$$

Step 2 の (v) の場合

$$\begin{aligned}\int_{E_{n,k}} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt &= \begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt\cdot\lambda\left(E_{n,k}\right), & a<b,\\ 0, & a=b\end{cases}\\ &\le \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right) \quad [(\because)\ a\le\alpha\le\beta\le b].\end{aligned}$$

以上より，$\displaystyle\int_{E_{n,k}} f(t)dt \le \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right)$.

Step 4　$n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して

$$g_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{4^n-1} I_{E_{n,k}}$$

とすると

$$g_n = I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]}\left(\frac{\lfloor 2^n g\rfloor}{2^n}\wedge 2^n\right).$$

従って，$g_n \nearrow g$ $(n\to\infty)$ である．

(Pr.)

$$\begin{aligned}g_n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{4^n-1} I_{\left\{x\in[\alpha-2^n,\beta+2^n]\,;\,g(x)\ge\frac{k+1}{2}\right\}}\\ &\qquad \left[(\because)\ E_{n,k}=\left\{x\in[\alpha-2^n,\beta+2^n]\,;\,g(x)\ge\tfrac{k+1}{2}\right\}\right]\\ &= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{4^n-1} I_{\left\{g\ge\frac{k+1}{2^n}\right\}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{l=1}^{4^n} I_{\left\{g \geq \frac{l}{2^n}\right\}} \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{l=1}^{4^n} \left(I_{\left\{\frac{l}{2^n} \leq g < \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} + I_{\left\{\frac{4^n+1}{2^n} \leq g\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{l=1}^{4^n} \left(I_{\bigsqcup_{k=l}^{4^n}\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{l=1}^{4^n} \sum_{k=l}^{4^n} I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + \sum_{l=1}^{4^n} I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{1 \leq l \leq k \leq 4^n} I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + 4^n I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=1}^{4^n} \sum_{l=1}^{k} I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + 4^n I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=1}^{4^n} k I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + 4^n I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \left(\sum_{k=1}^{4^n} \frac{k}{2^n} I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + 2^n I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \left(\sum_{k=0}^{4^n} \frac{k}{2^n} I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + 2^n I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \left(\sum_{k=0}^{4^n} \left(\frac{\lfloor 2^n g \rfloor}{2^n} \wedge 2^n \right) I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + \left(\frac{\lfloor 2^n g \rfloor}{2^n} \wedge 2^n \right) I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{aligned}
(\because)\ 0 \leq k \leq 4^n,\ \tfrac{k}{2^n} \leq g < \tfrac{k+1}{2^n} \ &\Rightarrow\ k \leq 2^n g < k+1 \\
&\Rightarrow\ k = \lfloor 2^n g \rfloor \\
&\Rightarrow\ \left(\tfrac{\lfloor 2^n g \rfloor}{2^n} \wedge 2^n \right) = \tfrac{(k \wedge 4^n)}{2^n} = \tfrac{k}{2^n}, \\
g \geq \tfrac{4^n+1}{2^n} \ &\Rightarrow\ 2^n g \geq 4^n + 1 \\
&\Rightarrow\ \lfloor 2^n g \rfloor \geq 4^n + 1 \\
&\Rightarrow\ \left(\tfrac{\lfloor 2^n g \rfloor}{2^n} \wedge 2^n \right) = \tfrac{(\lfloor 2^n g \rfloor \wedge 4^n)}{2^n} = \tfrac{4^n}{2^n} = 2^n
\end{aligned}
\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \left(\frac{\lfloor 2^n g \rfloor}{2^n} \wedge 2^n \right) \left(\sum_{k=0}^{4^n} I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right\}} + I_{\left\{g \geq \frac{4^n+1}{2^n}\right\}} \right) \\
&= I_{[\alpha-2^n,\beta+2^n]} \left(\frac{\lfloor 2^n g \rfloor}{2^n} \wedge 2^n \right).
\end{aligned}
$$

Step 5

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(t) g_n(t) dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) g_n(t) dt \quad [(\because)\ \text{Step 4 より単調収束定理を適用}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{4^n-1} I_{E_{n,k}}(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{4^n-1} \int_{E_{n,k}} f(t)dt \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{4^n-1} \gamma\lambda\left(E_{n,k}\right) \quad [(\because)\ \text{Step 3}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{4^n-1} \gamma \int_{\mathbb{R}} I_{E_{n,k}}(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \gamma \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{4^n-1} I_{E_{n,k}}(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \gamma \int_{\mathbb{R}} g_n(t)dt \\
&= \gamma \int_{\mathbb{R}} g(t)dt \quad [(\because)\ \text{Step 4 より単調収束定理を適用}]. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.2. Lacey-Thiele's construction

定義 2.2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して，$S_\alpha f$, $M_\alpha f$, $D_\alpha f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次のように定義する:

$$
\big(S_\alpha f\big)(x) := f(x+\alpha),\ \big(M_\alpha f\big)(x) := e^{\sqrt{-1}\alpha x} f(x),\ \big(D_\alpha f\big)(x) := f(\alpha x).
$$

S_α を **shift**, M_α を **modulation** (拡張), D_α を **dilation** (変調) という．$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ への関数全体とすると，S_α, M_α, $D_\alpha\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ 上の変換である．

命題 2.4. (o) $S_\alpha f$, $M_\alpha f$, $D_\alpha f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は線形である．すなわち

$$
\begin{aligned}
S_\alpha(af+bg) &= aS_\alpha f + bS_\alpha g \\
M_\alpha(af+bg) &= aM_\alpha f + bM_\alpha g \quad [f,\, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ a,\, b \in \mathbb{C}]. \\
D_\alpha(af+bg) &= aD_\alpha f + bD_\alpha g
\end{aligned}
$$

(i) $S_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$, $S_0 = \mathrm{id}$, $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta}$, $M_0 = \mathrm{id}$, $D_\alpha D_\beta = D_{\alpha\beta}$, $D_1 = \mathrm{id}$ 従って $S_{-\alpha} S_\alpha = \mathrm{id}$, $M_{-\alpha} M_\alpha = \mathrm{id}$, $\alpha \neq 0$ に対し $D_\alpha D_{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{id}$
(ii) $S_\alpha(fg) = \big(S_\alpha f\big)\big(S_\alpha g\big)$, $D_\alpha(fg) = \big(D_\alpha f\big)\big(D_\alpha g\big)$.
(iii) $S_\alpha|f| = |S_\alpha f|$, $D_\alpha|f| = |D_\alpha f|$.
(iv) $f \in L^1\left(\mathbb{R};\mathbb{C}\right)$ に対して

$$
\begin{gathered}
S_\alpha f,\, M_\alpha f\ \in L^1\left(\mathbb{R};\mathbb{C}\right),\ \alpha \neq 0 \text{ のときは } D_\alpha f \in L^1\left(\mathbb{R};\mathbb{C}\right), \\
\|S_\alpha f\|_1 = \|M_\alpha f\|_1 = \|f\|_1,\ \alpha \neq 0 \text{ のときは } \|D_\alpha f\|_1 = \tfrac{1}{\alpha}\|f\|_1.
\end{gathered}
$$

(v) $f \in L^1\left(\mathbb{R};\mathbb{C}\right)$ に対して

$$
\widehat{\big(M_\alpha f\big)} = S_{-\alpha}\widehat{f},\ \widehat{\big(S_\alpha f\big)} = M_\alpha \widehat{f},\ \widecheck{\big(S_\alpha f\big)} = M_{-\alpha}\widecheck{f}.
$$

$\alpha > 0$ のときは

$$
\alpha\widehat{\big(D_\alpha f\big)} = D_{\frac{1}{\alpha}}\widehat{f},\ \alpha\widecheck{\big(D_\alpha f\big)} = D_{\frac{1}{\alpha}}\widecheck{f}.
$$

ただし $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して $\check{f} = \widehat{f}(-\cdot)$.
(vi) $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$S_\alpha f,\ M_\alpha f\ \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ \alpha \neq 0 \text{ のときは } D_\alpha f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$
$$\|S_\alpha f\|_2 = \|M_\alpha f\|_2 = \|f\|_2,\ \alpha \neq 0 \text{ のときは } \|D_\alpha f\|_2 = \tfrac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\,\|f\|_2.$$

(vii) $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$S_\alpha h\,,\ M_\alpha h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ \alpha \neq 0 \text{ のときは } D_\alpha h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

証明 (o) から (iii) は，定義に従って計算すればよい：
(o) $f\,,\,g \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ a\,,\,b \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
\big(S_\alpha(af+bg)\big)(x) &= (af+bg)(x+\alpha) \\
&= af(x+\alpha) + bg(x+\alpha) \\
&= a\big(S_\alpha f\big)(x) + b\big(S_\alpha g\big)(x) \\
&= \big(aS_\alpha f + bS_\alpha g\big)(x), \\
\big(M_\alpha(af+bg)\big)(x) &= e^{\sqrt{-1}\alpha x}(af+bg)(x) \\
&= e^{\sqrt{-1}\alpha x}\big(af(x)+bg(x)\big) \\
&= a\big(e^{\sqrt{-1}\alpha x}f(x)\big) + b\big(e^{\sqrt{-1}\alpha x}g(x)\big) \\
&= a\big(M_\alpha f\big)(x) + b\big(M_\alpha g\big)(x) \\
&= \big(aM_\alpha f + bM_\alpha g\big)(x), \\
\big(D_\alpha(af+bg)\big)(x) &= (af+bg)(\alpha x) \\
&= af(\alpha x) + bg(\alpha x) \\
&= a\big(D_\alpha f\big)(x) + b\big(D_\alpha g\big)(x) \\
&= \big(aD_\alpha f + bD_\alpha g\big)(x).
\end{aligned}$$

(i) $\big(S_0 f\big)(x) = f(x+0) = f(x)$, $\big(M_0 f\big)(x) = e^{\sqrt{-1}\cdot 0x}f(x) = f(x)$, $\big(D_1 f\big)(x) = f(1\cdot x) = f(x)$ より $S_0 = \mathrm{id}$, $M_0 = \mathrm{id}$, $D_1 = \mathrm{id}$ また

$$\begin{aligned}
\big(S_\alpha S_\beta f\big)(x) = \Big(S_\alpha\big(S_\beta f\big)\Big)(x) &= \big(S_\beta f\big)(x+\alpha) \\
&= f(x+\alpha+\beta) = \big(S_{\alpha+\beta} f\big)(x), \\
\big(M_\alpha M_\beta f\big)(x) = \Big(M_\alpha\big(M_\beta f\big)\Big)(x) &= e^{\sqrt{-1}\alpha x}\big(M_\beta f\big)(x) \\
&= e^{\sqrt{-1}\alpha x}e^{\sqrt{-1}\beta x}f(x) \\
&= e^{\sqrt{-1}(\alpha+\beta)x}f(x) = \big(M_{\alpha+\beta} f\big)(x), \\
\big(D_\alpha D_\beta f\big)(x) = \Big(D_\alpha\big(D_\beta f\big)\Big)(x) &= \big(D_\beta f\big)(\alpha x) \\
&= f(\alpha\beta x) = \big(D_{\alpha\beta} f\big)(x).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\big(S_\alpha(fg)\big)(x) = (fg)(x+\alpha) = f(x+\alpha)g(x+\alpha) &= \big(S_\alpha f\big)(x)\big(S_\alpha g\big)(x) \\
&= \Big(\big(S_\alpha f\big)\big(S_\alpha g\big)\Big)(x), \\
\big(D_\alpha(fg)\big)(x) = (fg)(\alpha x) = f(\alpha x)g(\alpha x) &= \big(D_\alpha f\big)(x)\big(D_\alpha g\big)(x) \\
&= \Big(\big(D_\alpha f\big)\big(D_\alpha g\big)\Big)(x).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\big(S_\alpha|f|\big)(x) = |f|(x+\alpha) = |f(x+\alpha)| = \big|\big(S_\alpha f\big)(x)\big| = |S_\alpha f|(x),$$
$$\big(D_\alpha|f|\big)(x) = |f|(\alpha x) = |f(\alpha x)| = \big|\big(D_\alpha f\big)(x)\big| = |D_\alpha f|(x).$$

(iv) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が Lebesgue 可測のとき，$S_\alpha f$, $M_\alpha f$, $D_\alpha f$ はその定義より Lebesgue 可測である．

$f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．このとき

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\big(S_\alpha f\big)(x)\Big|dx = \int_{\mathbb{R}}\Big|f(x+\alpha)\Big|dx = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx < \infty$$

より $S_\alpha f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\|S_\alpha f\|_1 = \|f\|_1$.

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\big(M_\alpha f\big)(x)\Big|dx = \int_{\mathbb{R}}\Big|e^{\sqrt{-1}\alpha x}f(x)\Big|dx = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx < \infty$$

より $M_\alpha f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$，$\|M_\alpha f\|_1 = \|f\|_1$．さらに，$\alpha\neq 0$ のとき

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\big(D_\alpha f\big)(x)\Big|dx = \int_{\mathbb{R}}\Big|f(\alpha x)\Big|dx = \int_{\mathbb{R}}|f(y)|\frac{dy}{|\alpha|} < \infty \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y=\alpha x]$$

より $D_\alpha f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$，$\|D_\alpha f\|_1 = \dfrac{1}{|\alpha|}\|f\|_1$.

(v) $f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\big(M_\alpha f\big)\widehat{\ }(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big(M_\alpha f\big)(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{\sqrt{-1}\alpha x}f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-\sqrt{-1}(\xi-\alpha)x}dx\\
&= \widehat{f}(\xi-\alpha) = \big(S_{-\alpha}\widehat{f}\big)(\xi),\\
\big(S_\alpha f\big)\widehat{\ }(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big(S_\alpha f\big)(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x+\alpha)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-\sqrt{-1}\xi(y-\alpha)x}dy \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y=x+\alpha]\\
&= e^{\sqrt{-1}\xi\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy\\
&= e^{\sqrt{-1}\alpha\xi}\widehat{f}(\xi) = \big(M_\alpha\widehat{f}\big)(\xi),\\
\big(S_\alpha f\big)\check{\ }(\xi) &= \big(S_\alpha f\big)\widehat{\ }(-\xi)\\
&= \big(M_\alpha\widehat{f}\big)(-\xi)\\
&= e^{-\sqrt{-1}\alpha\xi}\widehat{f}(-\xi) = e^{\sqrt{-1}(-\alpha)\xi}\check{f}(\xi) = \big(M_{-\alpha}\check{f}\big)(\xi).
\end{aligned}$$

$\alpha>0$ のときは

$$\begin{aligned}
\Big(\alpha\big(D_\alpha f\big)\widehat{\ }\Big)(\xi) &= \alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big(D_\alpha f\big)(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\\
&= \alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(\alpha x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\sqrt{-1}\xi \cdot \frac{y}{\alpha}} dy \quad [(\because)\ 変数変換\ y = \alpha x] \\
&= \widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\alpha}\Big) = \big(D_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{f}\big)(\xi),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big(\alpha\big(D_\alpha f\big)\check{}\,\Big)(\xi) &= \Big(\alpha\big(D_\alpha f\big)\widehat{}\,\Big)(-\xi) \\
&= \big(D_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{f}\big)(-\xi) = \widehat{f}\Big(-\frac{\xi}{\alpha}\Big) = \check{f}\Big(\frac{\xi}{\alpha}\Big) = \big(D_{\frac{1}{\alpha}} \check{f}\big)(\xi).
\end{aligned}
$$

(vi) $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．このとき

$$
\int_{\mathbb{R}} \Big|\big(S_\alpha f\big)(x)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \Big|f(x+\alpha)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty
$$

より $S_\alpha f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$，$\|S_\alpha f\|_2 = \|f\|_2$.

$$
\int_{\mathbb{R}} \Big|\big(M_\alpha f\big)(x)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \Big|e^{\sqrt{-1}\alpha x} f(x)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty
$$

より $M_\alpha f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$，$\|M_\alpha f\|_2 = \|f\|_2$. さらに，$\alpha \neq 0$ のとき

$$
\int_{\mathbb{R}} \Big|\big(D_\alpha f\big)(x)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \Big|f(\alpha x)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \frac{dy}{|\alpha|} < \infty \quad [(\because)\ 変数変換\ y = \alpha x]
$$

より $D_\alpha f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$，$\|D_\alpha f\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \|f\|_2$.

(vii) $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．

$$
\big(S_\alpha h\big)(x) = h(x+\alpha),\ \big(M_\alpha h\big)(x) = e^{\sqrt{-1}\alpha x} h(x),\ \big(D_\alpha h\big)(x) = h(\alpha x)
$$

より $S_\alpha h$，$M_\alpha h$，$D_\alpha h \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\big(S_\alpha h\big)^{(n)}(x) &= h^{(n)}(x+\alpha), \\
\big(M_\alpha h\big)^{(n)}(x) &= \Big(e^{\sqrt{-1}\alpha x} h(x)\Big)^{(n)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \big(e^{\sqrt{-1}\alpha x}\big)^{(r)} h^{(n-r)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\sqrt{-1}\alpha)^r e^{\sqrt{-1}\alpha x} h^{(n-r)}(x), \\
\big(D_\alpha h\big)^{(n)}(x) &= \alpha^n h^{(n)}(\alpha x)
\end{aligned}
$$

なので，$\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} x^m \big(S_\alpha h\big)^{(n)}(x) &= \lim_{|x|\to\infty} x^m h^{(n)}(x+\alpha) \\
&= \lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{x}{x+\alpha}\right)^m (x+\alpha)^m h^{(n)}(x+\alpha) = 0, \\
\lim_{|x|\to\infty} x^m \big(M_\alpha h\big)^{(n)}(x) &= \lim_{|x|\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\sqrt{-1}\alpha)^r e^{\sqrt{-1}\alpha x} x^m h^{(n-r)}(x) = 0, \\
\lim_{|x|\to\infty} x^m \big(D_\alpha h\big)^{(n)}(x) &= \lim_{|x|\to\infty} x^m \alpha^n h^{(n)}(\alpha x) \\
&= \frac{\alpha^n}{\alpha^m} \lim_{|x|\to\infty} (\alpha x)^m h^{(n)}(\alpha x) = 0 \quad (\forall \alpha \neq 0).
\end{aligned}
$$

よって $S_\alpha h,\ M_\alpha h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})\ \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})$，また $D_\alpha h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})\ \ (\forall \alpha \neq 0)$. $\square$

補題 2.5. $g:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ は Lebesgue 可測で

$$\exists C\geq 0 \ \text{ s.t. } \ \int_E g(t)dt \leq C\lambda(E)^{\frac{1}{2}}\,,\ \forall E:\text{Lebesgue 可測集合 \ with } \ \lambda(E)<\infty$$

を満たすとする．このとき $g<\infty$ a.e. で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{g(x)}{1+|x|}dx<\infty.$

証明 $m\,,\,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$E_{m,n}:=[-m,m]\cap\{g\geq n\}$$

とおく．$E_{m,n}$ は Lebesgue 可測で $\lambda(E_{m,n})<\infty$ である．仮定より

$$\int_{E_{m.n}} g(t)dt\leq C\lambda(E_{m,n})^{\frac{1}{2}}.$$

$E_{m,n}$ の定義より

$$\int_{E_{m,n}} g(t)dt\geq n\int_{E_{m,n}} dt=n\lambda(E_{m,n}).$$

この 2 つの評価を合わせて　$\lambda(E_{m,n})\leq\dfrac{C^2}{n^2}$. $E_{m,n}\nearrow\{g\geq n\}\ \ (m\to\infty)$ なので，単調収束定理より

$$\lambda(\{g\geq n\})=\lim_{m\to\infty}\lambda(E_{m,n})\leq\frac{C^2}{n^2},\quad\forall n\geq 1.$$

$\{g=\infty\}\subset\{g\geq n\}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ であるから

$$\lambda(\{g=\infty\})\leq\lambda(\{g\geq n\})\leq\frac{C^2}{n^2}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

従って $g<\infty$ a.e.

次に，$G(x):=\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ $(x\geq 0)$ とおく．仮定より $0\leq G(x)\leq Cx^{\frac{1}{2}}<\infty$. $a\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_0^a\frac{G(x)}{(1+x)^2}dx &= \int_0^a\frac{dx}{(1+x)^2}\int_0^x g(t)dt\\
&=\int_0^a\frac{dx}{(1+x)^2}\int_0^a I_{\{t\leq x\}}g(t)dt\\
&=\int_0^a g(t)dt\int_0^a\frac{I_{\{t\leq x\}}}{(1+x)^2}dx\quad[(\because)\text{ Fubini の定理}]\\
&=\int_0^a g(t)dt\int_t^a\frac{1}{(1+x)^2}dx\\
&=\int_0^a g(t)\left[-\frac{1}{1+x}\right]_t^a dt\\
&=\int_0^a g(t)\left(-\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+t}\right)dt\\
&=-\frac{1}{1+a}\int_0^a g(t)dt+\int_0^a\frac{g(t)}{1+t}dt
\end{aligned}$$

より

$$\int_0^a\frac{g(t)}{1+t}dt=\frac{1}{1+a}\int_0^a g(t)dt+\int_0^a\frac{G(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{G(a)}{1+a} + \int_0^a \frac{G(x)}{(1+x)^2}dx \\
&\le \frac{Ca^{\frac{1}{2}}}{1+a} + \int_0^a \frac{Cx^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^2}dx \\
&= C\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1+a} + \int_0^a \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^2}dx\right).
\end{aligned}
$$

$a \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_0^\infty \frac{g(t)}{1+t}dt \le C\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^2}dx.$

$H(x) := \displaystyle\int_x^0 g(t)dt\ (x \le 0)$ とおく．仮定より $0 \le H(x) \le C|x|^{\frac{1}{2}} < \infty$. $b \le 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_b^0 \frac{H(x)}{(1+|x|)^2}dx &= \int_b^0 \frac{dx}{(1+|x|)^2}\int_x^0 g(t)dt \\
&= \int_b^0 \frac{dx}{(1+|x|)^2}\int_b^0 I_{\{x\le t\}}g(t)dt \\
&= \int_b^0 g(t)dt\int_b^0 \frac{I_{\{x\le t\}}}{(1+|x|)^2}dx \quad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \int_b^0 g(t)dt\int_b^t \frac{1}{(1-x)^2}dx \\
&= \int_b^0 g(t)\left[\frac{1}{1-x}\right]_b^t dt \\
&= \int_b^0 g(t)\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-b}\right)dt \\
&= \int_b^0 \frac{g(t)}{1-t}dt - \frac{1}{1-b}\int_b^0 g(t)dt
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\int_b^0 \frac{g(t)}{1-t}dt &= \frac{1}{1-b}\int_b^0 g(t)dt + \int_b^0 \frac{H(x)}{(1+|x|)^2}dx \\
&= \frac{H(b)}{1-b} + \int_b^0 \frac{H(x)}{(1+|x|)^2}dx \\
&\le \frac{C|b|^{\frac{1}{2}}}{1-b} + \int_b^0 \frac{C|x|^{\frac{1}{2}}}{(1+|x|)^2}dx \\
&= C\left(\frac{|b|^{\frac{1}{2}}}{1+|b|} + \int_b^0 \frac{(-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+(-x))^2}dx\right) \\
&= C\left(\frac{|b|^{\frac{1}{2}}}{1+|b|} + \int_0^{|b|} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1+y)^2}dy\right) \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y=-x].
\end{aligned}
$$

$b \to -\infty$ とすると $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{g(t)}{1-t}dt \le C\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1+y)^2}dy.$

よって

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{1+|t|}dt &= \int_0^\infty \frac{g(t)}{1+t}dt + \int_{-\infty}^0 \frac{g(t)}{1-t}dt \\
&\le 2C\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^2}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot 2\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ x=\tan^2\theta] \\
&= 2C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^4\theta\cdot\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}d\theta \\
&= 2C\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta \\
&= 2C\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)d\theta \\
&= 2C\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi C<\infty.
\end{aligned}
$$

□

定義 2.3. (i) $\mathscr{D} := \left\{\left[2^k n, 2^k(n+1)\right) ; k,\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ とし，$\mathscr{D}$ の元 $\left[2^k n, 2^k(n+1)\right)$ を **dyadic interval** (**2 進区間**) といって，I, J, K 等の記号を用いて表す．
(ii) $I\in\mathscr{D}$ に対して，$\mathrm{c}\,(I)$ を I の中点とし，

$$
I^{\mathrm{l}} := I\cap(-\infty,\mathrm{c}\,(I)),\ I^{\mathrm{r}} := I\cap[\mathrm{c}\,(I)\,,\infty)
$$

とする．この I^{l}, I^{r} はそれぞれ，I の左半分の右半開区間，I の右半分の右半開区間を表す．
すなわち $I=\left[2^k n, 2^k(n+1)\right)$ $(k,\, n\in\mathbb{Z})$ のとき

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}\,(I) &= 2^k\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{k-1}(2n+1), \\
I^{\mathrm{l}} &= \left[2^k n, 2^k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) = \left[2^{k-1}\cdot 2n, 2^{k-1}(2n+1)\right)\in\mathscr{D}, \\
I^{\mathrm{r}} &= \left[2^k\left(n+\frac{1}{2}\right), 2^k(n+1)\right) = \left[2^{k-1}(2n+1), 2^{k-1}(2n+2)\right)\in\mathscr{D}
\end{aligned}
$$

とする．
(iii) 一般に，$I\in\mathscr{D}$, $j\in\mathbb{N}$, $s_1\,,\ldots,s_j\in\{\mathrm{l},\,\mathrm{r}\}$ に対して，$I^{s_1\cdots s_j}\in\mathscr{D}$ を

$$
I^{s_1\cdots s_j} = \left(\cdots\left(((I^{s_1})^{s_2})^{s_3}\right)\cdots\right)^{s_j}
$$

とする．このとき，次に注意せよ：

$$
I^{s_1\cdots s_j}\subset I^{s_1\cdots s_{j-1}}\subset\cdots\subset I^{s_1}\subset I,\ \lambda\left(I^{s_1\cdots s_j}\right)=\frac{1}{2^j}\lambda\,(I)\,.
$$

命題 2.6. I, $J\in\mathscr{D}\ \Rightarrow\ I\subset J$ または $I\supset J$ または $I\cap J=\emptyset$.

証明 I, $J\in\mathscr{D}$ とする．3 つの場合に分ける．
<u>Case 1</u> $\lambda\,(I)=\lambda\,(J)$ の場合．
　この場合，適当な k, m, $n\in\mathbb{Z}$ を用いて I, J は次のように表せる．

$$
I=\left[2^k m, 2^k(m+1)\right),\ \ J=\left[2^k n, 2^k(n+1)\right).
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&m=n\ \Rightarrow\ I=J, \\
&m<n\ \Rightarrow\ m+1\le n\ \Rightarrow\ 2^k(m+1)\le 2^k n\ \Rightarrow\ I\cap J=\emptyset, \\
&m>n\ \Rightarrow\ m\ge n+1\ \Rightarrow\ 2^k m\ge 2^k(n+1)\ \Rightarrow\ I\cap J=\emptyset.
\end{aligned}
$$

Case 2　$\lambda(I) < \lambda(J)$ の場合.

　この場合，適当な $k,\ l \in \mathbb{Z}$ (ただし $k < l$), $m,\ n \in \mathbb{Z}$ を用いて $I,\ J$ は次のように表せる.

$$I = \left[2^k m, 2^k(m+1)\right),\ \ J = \left[2^l n, 2^l(n+1)\right).$$

このとき

$$\begin{aligned}
&m+1 \leq 2^{l-k}n \ \Rightarrow\ 2^k(m+1) \leq 2^l n \ \Rightarrow\ I \cap J = \emptyset,\\
&m \geq 2^{l-k}(n+1) \ \Rightarrow\ 2^k m \geq 2^l(n+1) \ \Rightarrow\ I \cap J = \emptyset,\\
&m < 2^{l-k}(n+1) \text{ かつ } 2^{l-k}n < m+1 \ \Rightarrow\ 2^{l-k}n \leq m < m+1 \leq 2^{l-k}(n+1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \Rightarrow\ 2^l n \leq 2^k m < 2^k(m+1) \leq 2^l(n+1) \ \Rightarrow\ I \subset J.
\end{aligned}$$

Case 3　$\lambda(J) < \lambda(I)$ の場合.

　I と J の役割を入れ替えれば Case 2 となるから，$I \cap J = \emptyset$ または $J \subset I$.　□

命題 2.7. $I \in \mathscr{D}$, $\lambda(I) = 2^k$ とする．このとき

$$\forall k' \geq k,\ \exists! I' \in \mathscr{D} \ \text{ s.t. } \ I' \supset I,\ \lambda(I') = 2^{k'}.$$

証明 $I = \left[2^k n, 2^k(n+1)\right)$, $k' \geq k$ とする．ただし $k,\ k',\ n \in \mathbb{Z}$. $n' := \left\lfloor \frac{n}{2^{k'-k}} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ とすると

$$\begin{aligned}
n' \leq \frac{n}{2^{k'-k}} < n'+1 \ &\Rightarrow\ 2^{k'-k}n' \leq n < 2^{k'-k}(n'+1)\\
&\Rightarrow\ 2^{k'-k}n' \leq n < n+1 \leq 2^{k'-k}(n'+1)\\
&\Rightarrow\ 2^{k'}n' \leq 2^k n < 2^k(n+1) \leq 2^{k'}(n'+1).
\end{aligned}$$

$I' = \left[2^{k'}n', 2^{k'}(n'+1)\right) \in \mathscr{D}$ とおくと，$\lambda(I') = 2^{k'}$, $I' \supset I$ となる.

　別に $I'' \in \mathscr{D}$ も，$\lambda(I'') = 2^{k'}$, $I'' \supset I$ を満たすならば，$\lambda(I'') = 2^{k'} = \lambda(I')$, $I'' \cap I' \supset I$ と命題 2.6 の証明の Case 1 より $I'' = I'$. よって I' の一意性も分かる.　□

命題 2.8. $k \geq k'$, $I,\ J \in \mathscr{D}$, $I \supset J$, $\lambda(I) = 2^k$, $\lambda(J) = 2^{k'}$ とする．このとき

$$\exists!(s_1, \ldots, s_{k-k'}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k-k'} \ \text{ s.t. } \ J = I^{s_1 \cdots s_{k-k'}}$$

ただし，$k' = k$ のときは，$I^{s_1 \cdots s_{k-k'}} = I$ とする.

証明 $k \geq k'$, $I,\ J \in \mathscr{D}$, $I \supset J$, $\lambda(I) = 2^k$, $\lambda(J) = 2^{k'}$ とする.

　$k = k'$ のとき，$\lambda(J) = 2^k = \lambda(I)$, $J \cap I = J \supsetneq \emptyset$ なので，命題 2.6 より $J = I$.

　$k' < k$ のとき，$I^{s_1 \cdots s_{k-k'}}$ の定義から

$\left\{I^{s_1 \cdots s_{k-k'}} \,;\, (s_1, \ldots, s_{k-k'}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k-k'}\right\}$ は互いに素で, $\displaystyle\bigsqcup_{(s_1, \ldots, s_{k-k'}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k-k'}} I^{s_1 \cdots s_{k-k'}} = I$

である.

$$\emptyset \subsetneq J = I \cap J = \bigsqcup_{(s_1, \ldots, s_{k-k'}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k-k'}} I^{s_1 \cdots s_{k-k'}} \cap J$$

より

$$\exists (s_1, \ldots, s_{k-k'}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k-k'} \ \text{ s.t. } \ I^{s_1 \cdots s_{k-k'}} \cap J \neq \emptyset.$$

このとき

$$\lambda\left(I^{s_1\cdots s_{k-k'}}\right) = \frac{1}{2^{k-k'}}\lambda(I) = \frac{1}{2^{k-k'}}\cdot 2^k = 2^{k'} = \lambda(J)$$

であるから，命題 2.6 より $J = I^{s_1\cdots s_{k-k'}}$.

$(t_1\,, \ldots, t_{k-k'}) \neq (s_1\,, \ldots, s_{k-k'})$ に対して $I^{t_1\cdots t_{k-k'}} \cap I^{s_1\cdots s_{k-k'}} = \emptyset$ であるから，このような $(s_1\,, \ldots, s_{k-k'})$ はただ一つである． □

定義 2.4. (i) $Q := \left\{(I,J) \in \mathscr{D}\times\mathscr{D};\ \lambda(I)\,\lambda(J) = 1\right\}$. Q の元を，$\sigma = (I_\sigma, J_\sigma)$, $\tau = (I_\tau, J_\tau)$ などと表す.

(ii) $\sigma = (I_\sigma, J_\sigma) \in Q$ に対して，次を定める：

- $k_\sigma \in \mathbb{Z}$ を $\lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma}$, $\lambda(I_\sigma) = 2^{-k_\sigma}$ となる整数,
- $x_\sigma := \mathrm{c}(I_\sigma) = I_\sigma$ の中点，$y_\sigma := \mathrm{c}(J_\sigma) = J_\sigma$ の中点,
- $J_\sigma^{\mathrm{l}} := \left(J_\sigma\right)^{\mathrm{l}} = J_\sigma$ の左半分の右半開区間,
  $J_\sigma^{\mathrm{r}} := \left(J_\sigma\right)^{\mathrm{r}} = J_\sigma$ の右半分の右半開区間
  [注：定義 2.3 から分かるように，J_σ^{l}, $J_\sigma^{\mathrm{r}} \in \mathscr{D}$ である],
- $y_\sigma^{\mathrm{l}} := \mathrm{c}\left(J_\sigma^{\mathrm{l}}\right) = J_\sigma^{\mathrm{l}}$ の中点.

定義 2.5. (i) $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を

$$I_{\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]} \leq \widehat{\phi} \leq I_{\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right]}$$

なるものとする．命題 1.15 よりこのような ϕ は存在する.

(ii) $\sigma = (I_\sigma, J_\sigma) \in Q$ に対して，$\phi_\sigma \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を

$$\phi_\sigma := 2^{\frac{k_\sigma}{2}} M_{y_\sigma^{\mathrm{l}}} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}}\phi$$

とする.

命題 2.9.

(o) $\phi_\sigma(x) = 2^{\frac{k_\sigma}{2}} e^{\sqrt{-1}y_\sigma^{\mathrm{l}}x}\phi\big(2^{k_\sigma}(x-x_\sigma)\big) = \lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1}y_\sigma^{\mathrm{l}}x}\phi\big(\lambda(J_\sigma)(x-x_\sigma)\big)$,
$\widehat{\phi_\sigma}(y) = \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\, e^{-\sqrt{-1}x_\sigma^{\mathrm{l}}(y-y_\sigma^{\mathrm{l}})}\widehat{\phi}\big(\lambda(I_\sigma)(y-y_\sigma^{\mathrm{l}})\big)$.

(i) $\|\phi_\sigma\|_2 = \|\phi\|_2$.

(ii) $\|\widehat{\phi_\sigma}\|_1 = \lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\ \ \|\widehat{\phi}\|_1$.

(iii) $\sigma,\,\tau \in Q,\ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset\ \Rightarrow\ \langle\phi_\sigma, \phi_\tau\rangle = \langle\widehat{\phi_\sigma}, \widehat{\phi_\tau}\rangle = 0$.

(iv) $\sigma,\ \tau \in Q,\ J_\sigma \neq J_\tau,\ J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_\tau^{\mathrm{r}} \neq \emptyset\ \Rightarrow\ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset\ \Rightarrow\ \langle\phi_\sigma, \phi_\tau\rangle = 0$.

証明 (o) から (ii) は，計算することによって求められる：

(o)

$$\begin{aligned}
\phi_\sigma(x) &= \left(2^{\frac{k_\sigma}{2}} M_{y_\sigma^{\mathrm{l}}} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}}\phi\right)(x) \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}}\left(M_{y_\sigma^{\mathrm{l}}} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}}\phi\right)(x) \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} e^{\sqrt{-1}y_\sigma^{\mathrm{l}}x}\left(S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}}\phi\right)(x) \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} e^{\sqrt{-1}y_\sigma^{\mathrm{l}}x}\left(D_{2^{k_\sigma}}\phi\right)(x-x_\sigma) \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} e^{\sqrt{-1}y_\sigma^{\mathrm{l}}x}\phi\left(2^{k_\sigma}(x-x_\sigma)\right)
\end{aligned}$$

$$= \lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1} y^1_\sigma x} \phi(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)).$$

命題 2.4(v) より

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_\sigma} &= \left(2^{\frac{k_\sigma}{2}} M_{y^1_\sigma} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}} \phi\right)^{\widehat{}} \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} \left(M_{y^1_\sigma} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}} \phi\right)^{\widehat{}} \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} S_{-y^1_\sigma} \left(S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}} \phi\right)^{\widehat{}} \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} S_{-y^1_\sigma} M_{-x_\sigma} \left(D_{2^{k_\sigma}} \phi\right)^{\widehat{}} \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}} S_{-y^1_\sigma} M_{-x_\sigma} \cdot 2^{-k_\sigma} D_{2^{-k_\sigma}} \widehat{\phi} \\
&= 2^{-\frac{k_\sigma}{2}} S_{-y^1_\sigma} M_{-x_\sigma} D_{2^{-k_\sigma}} \widehat{\phi} \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} S_{-y^1_\sigma} M_{-x_\sigma} D_{\lambda(I_\sigma)} \widehat{\phi}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_\sigma}(y) &= \left(\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} S_{-y^1_\sigma} M_{-x_\sigma} D_{\lambda(I_\sigma)} \widehat{\phi}\right)(y) \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \left(S_{-y^1_\sigma} M_{-x_\sigma} D_{\lambda(I_\sigma)} \widehat{\phi}\right)(y) \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \left(M_{-x_\sigma} D_{\lambda(I_\sigma)} \widehat{\phi}\right)(y - y^1_\sigma) \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1}(-x_\sigma)(y - y^1_\sigma)} \left(D_{\lambda(I_\sigma)} \widehat{\phi}\right)(y - y^1_\sigma) \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1}(-x_\sigma)(y - y^1_\sigma)} \widehat{\phi}\Big(\lambda(I_\sigma)(y - y^1_\sigma)\Big).
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\|\phi_\sigma\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\phi_\sigma(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1} y^1_\sigma x} \phi(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma))\right|^2 dx \\
&= \lambda(J_\sigma) \int_{\mathbb{R}} |\phi(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma))|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\phi(\xi)|^2 d\xi \quad [(\because) \text{ 変数変換 } \xi = \lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)] \\
&= \|\phi\|_2^2.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\phi_\sigma}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi_\sigma}(y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1}(-x_\sigma)(y - y^1_\sigma)} \widehat{\phi}\Big(\lambda(I_\sigma)(y - y^1_\sigma)\Big)\right| dy \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi}\Big(\lambda(I_\sigma)(y - y^1_\sigma)\Big)\right| dy \\
&= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\eta)| \frac{d\eta}{\lambda(I_\sigma)} \quad [(\because) \text{ 変数変換 } \eta = \lambda(I_\sigma)(y - y^1_\sigma)] \\
&= \lambda(I_\sigma)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\eta)| d\eta = \lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\phi}\|_1.
\end{aligned}$$

(iii) まず

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi_\sigma}(y) \neq 0 \ &\Leftrightarrow \ \widehat{\phi}\Big(\lambda(I_\sigma)(y - y_\sigma^{\mathrm{l}})\Big) \neq 0 \quad [(\because)\ (\mathrm{o})\ ] \\
&\Rightarrow \ \left|\lambda(I_\sigma)(y - y_\sigma^{\mathrm{l}})\right| \leq \frac{1}{5} \quad [(\because)\ \widehat{\phi} \leq I_{[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]}\ ] \\
&\Rightarrow \ |y - y_\sigma^{\mathrm{l}}| \leq \frac{1}{5}\lambda(I_\sigma)^{-1} = \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma)
\end{aligned}
$$

より

$$
\{y \in \mathbb{R}\,;\, \widehat{\phi_\sigma}(y) \neq 0\} \subset \left[y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma),\ y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma)\right].
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&J_\sigma = J_\sigma^{\mathrm{l}} \sqcup J_\sigma^{\mathrm{r}},\ \lambda\left(J_\sigma^{\mathrm{l}}\right) = \frac{1}{2}\lambda(J_\sigma), \\
&(J_\sigma^{\mathrm{l}}\text{の左端点}) = y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{2}\lambda\left(J_\sigma^{\mathrm{l}}\right) = y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{4}\lambda(J_\sigma) < y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma), \\
&(J_\sigma^{\mathrm{l}}\text{の右端点}) = y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{2}\lambda\left(J_\sigma^{\mathrm{l}}\right) = y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{4}\lambda(J_\sigma) > y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma)
\end{aligned}
$$

に注意すると

$$
\left[y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma),\ y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma)\right] \subset \left(y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{4}\lambda(J_\sigma),\ y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{4}\lambda(J_\sigma)\right) = (J_\sigma^{\mathrm{l}})^\circ.
$$

従って

$$
\operatorname{supp}\widehat{\phi_\sigma} = \overline{\{y \in \mathbb{R}\,;\, \widehat{\phi_\sigma}(y) \neq 0\}} \subset \left[y_\sigma^{\mathrm{l}} - \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma),\ y_\sigma^{\mathrm{l}} + \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma)\right] = (J_\sigma^{\mathrm{l}})^\circ.
$$

今，$J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset$ とすると，$\operatorname{supp}\widehat{\phi_\sigma} \cap \operatorname{supp}\widehat{\phi_\tau} = \emptyset$ なので

$$
\langle \widehat{\phi_\sigma}, \widehat{\phi_\tau} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_\sigma}(y)\overline{\widehat{\phi_\tau}(y)}dy = \int_{\operatorname{supp}\widehat{\phi_\sigma}\cap\operatorname{supp}\widehat{\phi_\tau}} \widehat{\phi_\sigma}(y)\widehat{\phi_\tau}(y)dy = 0.
$$

よって，$\langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle = \langle \widehat{\phi_\sigma}, \widehat{\phi_\tau} \rangle = 0 \quad [(\because)$ 命題 1.8].

(iv) $\sigma,\ \tau \in Q,\ J_\sigma \neq J_\tau,\ J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_\tau^{\mathrm{r}} \neq \emptyset$ とする．命題 2.6 より

$$
\begin{aligned}
\bullet\ \lambda(J_\sigma) = \lambda(J_\tau) \ &\Rightarrow \ J_\sigma = J_\tau \ \text{ または } \ J_\sigma \cap J_\tau = \emptyset \\
&\Rightarrow \ J_\sigma \neq J_\tau \text{ より } J_\sigma \cap J_\tau = \emptyset \\
&\Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} \subset J_\sigma \cap J_\tau = \emptyset \ \Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset, \\
\bullet\ \lambda(J_\sigma) > \lambda(J_\tau) \ &\Rightarrow \ \lambda\left(J_\sigma^{\mathrm{l}}\right) = \frac{1}{2}\lambda(J_\sigma) \geq \lambda(J_\tau) \\
&\Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \supset J_\tau \text{ または } J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau = \emptyset \\
&\Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau = \emptyset \\
&\quad \left[\begin{aligned}(\because)\ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau \neq \emptyset \ &\Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \supset J_\tau \\ &\Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_\tau \subset J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_\sigma^{\mathrm{l}} = \emptyset.\ \text{これは矛盾}\end{aligned}\right] \\
&\Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau = \emptyset \ \Rightarrow \ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset,
\end{aligned}
$$

- $\lambda(J_\sigma) < \lambda(J_\tau)$ の場合は，σ と τ の役割を入れ替えれば上の場合に帰着できる．ゆえに $J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset$.

以上より $J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset$ となるから，(iii) より $\langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle = 0$. □

定義 2.6. $\sigma = (I_\sigma, J_\sigma)$, $\tau = (I_\tau, J_\tau) \in Q$ に対して，二項関係 "$\preceq$" を

$$\tau \preceq \sigma \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} J_\tau \subset J_\sigma,\, I_\sigma \subset I_\tau$$

により定義する．このとき，"$\preceq$" は Q における順序関係である．実際，$\sigma = (I_\sigma, J_\sigma)$, $\tau = (I_\tau, J_\tau)$, $\upsilon = (I_\upsilon, J_\upsilon) \in Q$ に対して

- $J_\sigma \subset J_\sigma$, $I_\sigma \subset I_\sigma$ なので $\sigma \preceq \sigma$ が成り立つ (反射律の成立),
- $\tau \preceq \sigma,\, \sigma \preceq \tau \Leftrightarrow$ "$J_\tau \subset J_\sigma,\, I_\sigma \subset I_\tau$" かつ "$J_\sigma \subset J_\tau,\, I_\tau \subset I_\sigma$"
  $\Leftrightarrow J_\sigma = J_\tau,\, I_\sigma = I_\tau$
  $\Leftrightarrow \sigma = \tau$ (反対称律の成立),
- $\tau \preceq \sigma,\, \sigma \preceq \upsilon \Leftrightarrow$ "$J_\tau \subset J_\sigma,\, I_\sigma \subset I_\tau$" かつ "$J_\sigma \subset J_\upsilon,\, I_\upsilon \subset I_\sigma$"
  $\Rightarrow J_\tau \subset J_\upsilon,\, I_\upsilon \subset I_\tau$
  $\Leftrightarrow \tau \preceq \upsilon$ (推移律の成立).

補題 2.10. Q の空でない有限部分集合は極小元をもつ.

証明 $P \subset Q$ は, $1 \leq \#P < \infty$ であるとする．各 $\sigma \in P$ に対して $P_\sigma := \{\tau \in P; \tau \preceq \sigma\,, \tau \neq \sigma\}$ とおく.

「$P_\sigma \neq \emptyset$ $(\forall \sigma \in P)$」と仮定する．このとき各 P_σ に属する元が存在しており，その 1 つ τ_σ をとってくると，$\tau_\sigma \in P$ は $\tau_\sigma \preceq \sigma$, $\tau_\sigma \neq \sigma$ を満たす．$\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty \subset P$ を

$$\sigma_1 \in P,\;\; \sigma_{n+1} = \tau_{\sigma_n} \;\; (n \geq 1)$$

と定める．このとき，$\mathbb{N} \ni n \mapsto \sigma_n \in P$ は単射である．なぜならば，$\sigma_{n+1} = \tau_{\sigma_n} \preceq \sigma_n$, $\sigma_{n+1} = \tau_{\sigma_n} \neq \sigma_n$ $(n \geq 1)$ より $m > n$ に対して,

$$\begin{aligned} \sigma_m \preceq \sigma_{m-1} \preceq \cdots \preceq \sigma_{n+1} \preceq \sigma_n, \\ \sigma_k \neq \sigma_{k-1} \;\; (n+1 \leq k \leq m). \end{aligned}$$

$\sigma_m = \sigma_n$ とすると，前者から

$$\sigma_m = \sigma_{m-1} = \cdots = \sigma_{n+1} = \sigma_n.$$

これは後者と矛盾する．従って $\sigma_m \neq \sigma_n$．$n \mapsto \sigma_n$ の単射性が分かったから $\#P \geq \#\{\sigma_n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$．これは $\#P < \infty$ に矛盾する．以上から,「$\exists \sigma \in P$ s.t. $P_\sigma = \emptyset$」となる．この σ が P の極小元の 1 つである． □

注 2.1. Lacey-Thiele [5]，Lacey [4] においては，Q における順序関係 "$<$" の定義が

$$\tau < \sigma \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} I_\tau \subset I_\sigma \text{ かつ } J_\sigma \subset J_\tau$$

と，定義 2.6 とは逆となっている．このため補題 2.10 の主張は

「Q の空でない有限部分集合は極大元をもつ」

となる.

命題 2.11. σ, σ', $\tau \in Q$ とする.
(i) $\tau \preceq \sigma \Rightarrow k_\tau \leq k_\sigma$.

(ii) $\sigma,\ \tau$ が incomparable (i.e. $\tau \not\preceq \sigma, \sigma \not\preceq \tau$) $\Rightarrow (I_\sigma \times J_\sigma) \cap (I_\tau \times J_\tau) = \emptyset$.

(iii) $\sigma,\ \sigma'$ が incomparable (i.e. $\sigma \not\preceq \sigma', \sigma' \not\preceq \sigma$) で，$\tau \preceq \sigma, \tau \preceq \sigma' \Rightarrow I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset$.

(iv) $\tau \preceq \sigma,\ k_\tau \le k \le k_\sigma \Rightarrow \exists! v \in Q$ s.t. $\tau \preceq v \preceq \sigma,\ k_v = k$.

証明 $\sigma,\ \sigma',\ \tau \in Q$ とする．

(i) $\tau \preceq \sigma \Rightarrow J_\tau \subset J_\sigma \Rightarrow 2^{k_\tau} = \lambda(J_\tau) \le \lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma} \Rightarrow k_\tau \le k_\sigma$.

(ii) 命題 2.6 より

$$\begin{aligned}(I_\sigma \times J_\sigma) \cap (I_\tau \times J_\tau) \neq \emptyset \ &\Rightarrow\ \exists (x,y) \in (I_\sigma \times J_\sigma) \cap (I_\tau \times J_\tau) \\ &\Rightarrow\ x \in I_\sigma \cap I_\tau \text{ かつ } y \in J_\sigma \cap J_\tau \\ &\Rightarrow\ \text{“}I_\sigma \subset I_\tau \text{ または } I_\tau \subset I_\sigma\text{” かつ “}J_\sigma \subset J_\tau \text{ または } J_\tau \subset J_\sigma\text{”} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \underline{\text{Case 1}}\ \ J_\sigma \subset J_\tau \text{ かつ } I_\sigma \subset I_\tau, \\ \underline{\text{Case 2}}\ \ J_\sigma \subset J_\tau \text{ かつ } I_\tau \subset I_\sigma, \\ \underline{\text{Case 3}}\ \ J_\tau \subset J_\sigma \text{ かつ } I_\sigma \subset I_\tau, \\ \underline{\text{Case 4}}\ \ J_\tau \subset J_\sigma \text{ かつ } I_\tau \subset I_\sigma. \end{cases}\end{aligned}$$

以下，それぞれの場合について考える．

<u>Case 1</u>　$J_\sigma \subset J_\tau$ かつ $I_\sigma \subset I_\tau$ のとき，

$$\begin{aligned}\lambda(J_\sigma) \le \lambda(J_\tau),\ \lambda(I_\sigma) \le \lambda(I_\tau) \ &\Rightarrow\ \lambda(I_\sigma) \le \lambda(I_\tau) = \frac{1}{\lambda(J_\tau)} \le \frac{1}{\lambda(J_\sigma)} = \lambda(I_\sigma) \\ &\Rightarrow\ \lambda(I_\sigma) = \lambda(I_\tau) \\ &\Rightarrow\ \lambda(J_\sigma) = \frac{1}{\lambda(I_\sigma)} = \frac{1}{\lambda(I_\tau)} = \lambda(J_\tau) \\ &\Rightarrow\ I_\sigma = I_\tau,\ J_\sigma = J_\tau \\ &\Rightarrow\ \sigma = \tau \ \Leftrightarrow\ \sigma \preceq \tau \text{ かつ } \tau \preceq \sigma.\end{aligned}$$

<u>Case 2</u>　$J_\sigma \subset J_\tau$ かつ $I_\tau \subset I_\sigma$ のとき，定義により $\sigma \preceq \tau$.

<u>Case 3</u>　$J_\tau \subset J_\sigma$ かつ $I_\sigma \subset I_\tau$ のとき，定義により $\tau \preceq \sigma$.

<u>Case 4</u>　$J_\tau \subset J_\sigma$ かつ $I_\tau \subset I_\sigma$ のとき，σ と τ の役割を入れ替えれば Case 1 となるから，$\sigma \preceq \tau$ かつ $\tau \preceq \sigma$.

　よって

$$(I_\sigma \times J_\sigma) \cap (I_\tau \times J_\tau) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma \preceq \tau \text{ または } \tau \preceq \sigma.$$

対偶をとれば

$$\sigma \not\preceq \tau \text{ かつ } \tau \not\preceq \sigma \Rightarrow (I_\sigma \times J_\sigma) \cap (I_\tau \times J_\tau) = \emptyset.$$

(iii) σ, σ' は imcomparable で，$\tau \preceq \sigma, \tau \preceq \sigma'$ とする．命題 2.6 より

$$\begin{aligned}\lambda(I_\sigma) = \lambda(I_{\sigma'}) \ &\Rightarrow\ I_\sigma = I_{\sigma'} \text{ または } I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset, \\ \lambda(I_\sigma) < \lambda(I_{\sigma'}) \ &\Rightarrow\ I_\sigma \subset I_{\sigma'} \text{ または } I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset, \\ \lambda(I_\sigma) > \lambda(I_{\sigma'}) \ &\Rightarrow\ I_\sigma \supset I_{\sigma'} \text{ または } I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset.\end{aligned}$$

$I_\sigma \cap I_{\sigma'} \neq \emptyset$ とすると，$\begin{cases} \underline{\text{Case 1}}\ \ \lambda(I_\sigma) = \lambda(I_{\sigma'}) \text{ の場合は } I_\sigma = I_{\sigma'}, \\ \underline{\text{Case 2}}\ \ \lambda(I_\sigma) < \lambda(I_{\sigma'}) \text{ の場合は } I_\sigma \subset I_{\sigma'}, \\ \underline{\text{Case 3}}\ \ \lambda(I_\sigma) > \lambda(I_{\sigma'}) \text{ の場合は } I_\sigma \supset I_{\sigma'} \end{cases}$ となる．以下，それぞれの場合について考える．

<u>Case 1</u>　$\lambda(I_\sigma)=\lambda(I_{\sigma'})$ の場合は $I_\sigma=I_{\sigma'}$ で,

$$\lambda(J_\sigma)=\frac{1}{\lambda(I_\sigma)}=\frac{1}{\lambda(I_{\sigma'})}=\lambda(J_{\sigma'})\ \Rightarrow\ J_\sigma=J_{\sigma'}\text{ または }J_\sigma\cap J_{\sigma'}=\emptyset.$$

$J_\sigma=J_{\sigma'}$ とすると，$\sigma=\sigma'\Leftrightarrow\sigma\preceq\sigma'$ かつ $\sigma'\preceq\sigma$ となり，これは σ と σ' が incomparable であることに矛盾する．ゆえに $J_\sigma\cap J_{\sigma'}=\emptyset$.
<u>Case 2</u>　$\lambda(I_\sigma)<\lambda(I_{\sigma'})$ の場合は $I_\sigma\subset I_{\sigma'}$ で,

$$\lambda(J_\sigma)=\frac{1}{\lambda(I_\sigma)}>\frac{1}{\lambda(I_{\sigma'})}=\lambda(J_{\sigma'})\ \Rightarrow\ J_{\sigma'}\subset J_\sigma\text{ または }J_\sigma\cap J_{\sigma'}=\emptyset.$$

$J_{\sigma'}\subset J_\sigma$ とすると，$\sigma'\preceq\sigma$ となり，これは σ と σ' が incomparable であることに矛盾する．ゆえに $J_\sigma\cap J_{\sigma'}=\emptyset$.
<u>Case 3</u>　$\lambda(I_\sigma)>\lambda(I_{\sigma'})$ のとき，σ と σ' の役割を入れ替えれば Case 2 に帰着できるから，$J_\sigma\cap J_{\sigma'}=\emptyset$.
以上より，$I_\sigma\cap I_{\sigma'}\neq\emptyset\Rightarrow J_\sigma\cap J_{\sigma'}=\emptyset$ が分かる．一方で

$$\begin{aligned}\tau\preceq\sigma,\ \tau\preceq\sigma'\ &\Rightarrow\ J_\tau\subset J_\sigma\text{ かつ }J_\tau\subset J_{\sigma'}\\&\Rightarrow\ J_\tau\subset J_\sigma\cap J_{\sigma'}\\&\Rightarrow\ J_\sigma\cap J_{\sigma'}\neq\emptyset\end{aligned}$$

と矛盾が生じるので，$I_\sigma\cap I_{\sigma'}=\emptyset$ でなければならない．
(iv) $\tau=(I_\tau,J_\tau)$, $\sigma=(I_\sigma,J_\sigma)$, $\lambda(J_\tau)=2^{k_\tau}$, $\lambda(J_\sigma)=2^{k_\sigma}$ とし，$\tau\preceq\sigma$ とする．このとき，$J_\tau\subset J_\sigma$, $I_\sigma\subset I_\tau$, $k_\tau\leq k_\sigma$ である．

$k_\tau=k_\sigma$ のときは，$\lambda(J_\tau)=\lambda(J_\sigma)$, $\lambda(I_\tau)=\lambda(I_\sigma)$．$J_\tau\subset J_\sigma$, $I_\sigma\subset I_\tau$ より $J_\tau\cap J_\sigma\neq\emptyset$, $I_\tau\cap I_\sigma\neq\emptyset$ だから，$J_\tau=J_\sigma$, $I_\tau=I_\sigma$．従って $\tau=\sigma$.

$k_\tau<k_\sigma$ のときは，$j=k_\sigma-k_\tau$ とすると，命題 2.8 より

$$\exists!(t_1,...,t_j)\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^j,\ \exists!(s_1,...,s_j)\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^j\quad\text{s.t.}\quad J_\tau=(J_\sigma)^{t_1\cdots t_j},\ I_\sigma=(I_\tau)^{s_1\cdots s_j}.$$

$k_\tau\leq k\leq k_\sigma$ に対して，$0\leq k_\sigma-k\leq k_\sigma-k_\tau=j$, $0\leq k-k_\tau\leq k_\sigma-k_\tau=j$ だから

$$J=(J_\sigma)^{t_1\cdots t_{k_\sigma-k}},\ I=(I_\tau)^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}&J_\tau\subset J\subset J_\sigma,\ I_\sigma\subset I\subset I_\tau,\\&\lambda(J)=\frac{1}{2^{k_\sigma-k}}\lambda(J_\sigma)=\frac{1}{2^{k_\sigma-k}}\cdot2^{k_\sigma}=2^k,\\&\lambda(I)=\frac{1}{2^{k-k_\tau}}\lambda(I_\tau)=\frac{1}{2^{k-k_\tau}}\cdot2^{-k_\tau}=2^{-k}\end{aligned}$$

であるから，$v=(I,J)\in Q$ は $\tau\preceq v\preceq\sigma$, $k_v=k$ を満たす.

別に $u=(I_u,J_u)\in Q$ も，$\tau\preceq u\preceq\sigma$, $k_u=k$ を満たすとすると,

$$J_\tau\subset J_u\text{ かつ }I_\sigma\subset I_u,\text{ さらに }J_\tau\subset J_v\text{ かつ }I_\sigma\subset I_v$$

であるから，$J_u\cap J_v\neq\emptyset$, $I_u\cap I_v\neq\emptyset$ である．

$$\lambda(J_u)=2^{k_u}=2^k=2^{k_v}=\lambda(J_v),\ \lambda(I_u)=2^{-k_u}=2^{-k}=2^{-k_v}=\lambda(I_v)$$

なので，命題 2.6 より $J_u = J_v,\ I_u = I_v$. 以上から $u = v$ より v の一意性が分かる. $\square$

定義 2.7.

$$w(x) := \frac{1}{(1+|x|)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

また，$\sigma = (I_\sigma, J_\sigma) \in Q$ に対して

$$w_\sigma := 2^{k_\sigma} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}} w$$

とする.

命題 2.12.

(o) $w_\sigma(x) = \lambda(J_\sigma)\, w\big(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)\big) \leq \lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma}$, 従って $w_\sigma = w_\tau$ if $I_\sigma = I_\tau$.

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} w_\sigma(x)dx = \int_{\mathbb{R}} w(x)dx = 1,\ \forall\sigma \in Q.$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} w\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \leq \frac{1}{2(1+m)^2},\ \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

(iii) $\sigma \in Q,\ I$ は有限区間 s.t $x_\sigma \notin \mathring{I} \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_I w_\sigma(t)dt \geq w_\sigma(x)\lambda(I)$. ただし x は I の中点.

(iv) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(x-n) \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

(v) $\exists C_1 > 0$ s.t. $\begin{cases} |\phi(x)| \leq C_1\left(w(3) \wedge w(x)^2\right), \\ |\phi_\sigma(x)| \leq C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} w_\sigma(x)\left(1 \wedge \lambda(I_\sigma) w_\sigma(x)\right), \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \sigma \in Q.$

(vi) $\exists C_2 > 0$ s.t. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} w(t)w(\alpha t + \beta)dt \leq C_2 w(\beta),\ \ 0 \leq \forall\alpha \leq 1,\ \forall\beta \in \mathbb{R}.$

(vii) $\exists C_3 > 0$ s.t. $|\langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle| \leq C_3 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \displaystyle\int_{I_\tau} w_\sigma(t)dt,\ \ \forall\sigma,\ \forall\tau \in Q$ with $k_\sigma \leq k_\tau$.

(viii) $\exists C_4 > 0$ s.t. $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in Q;\\ \sigma \succeq \tau,\, k_\sigma = k}} \int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau} w_\sigma(t)dt \leq C_4,\ \ \forall \tau \in Q,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

証明 (o)

$$\begin{aligned}
w_\sigma(x) &= \big(2^{k_\sigma} S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}} w\big)(x) \\
&= 2^{k_\sigma}\big(S_{-x_\sigma} D_{2^{k_\sigma}} w\big)(x) \\
&= 2^{k_\sigma}\big(D_{2^{k_\sigma}} w\big)(x - x_\sigma) \\
&= 2^{k_\sigma} w\big(2^{k_\sigma}(x - x_\sigma)\big) \\
&= \lambda(J_\sigma)\, w\big(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)\big) \\
&\leq \lambda(J_\sigma) \quad [(\because)\ w(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}] \\
&= 2^{k_\sigma}.
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} w_\sigma(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(J_\sigma)\, w\big(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)\big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} w(y)dy \qquad [(\because)\ \text{変数変換}\ y = \lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)\ ] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|)^3} dy
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^3}dy \quad \left[(\because)\ y \mapsto \tfrac{1}{(1+|y|)^3}\ は偶関数\right]$$
$$= \left[-\frac{1}{(1+y)^2}\right]_0^\infty = 1.$$

(ii) $w(\cdot)$ は偶関数であることに注意する．$x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} w(x) &= (1+x)^{-3}, \\ w'(x) &= -3(1+x)^{-4} < 0, \\ w''(x) &= 12(1+x)^{-5} > 0 \end{aligned}$$

より，$w(\cdot)$ は $[0, \infty)$ で狭義単調減少かつ下に凸である．

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．

$$\begin{aligned} |x| \leq \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \ &\Rightarrow\ 0 \leq \frac{1}{2} + x,\ 0 \leq \frac{1}{2} - x \\ &\Rightarrow\ 0 \leq n \leq n + \frac{1}{2} + x,\ 0 \leq n \leq n + \frac{1}{2} - x \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} w\Big(n + \frac{1}{2}\Big) &= w\left(\frac{(n+\frac{1}{2}+x) + (n+\frac{1}{2}-x)}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(w\Big(n+\frac{1}{2}+x\Big) + w\Big(n+\frac{1}{2}-x\Big)\Big). \end{aligned}$$

x について $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ で積分すると

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w\Big(n+\frac{1}{2}\Big)dx \leq \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big(w\Big(n+\frac{1}{2}+x\Big) + w\Big(n+\frac{1}{2}-x\Big)\Big)dx.$$

ここで

$$\begin{aligned} (左辺) &= w\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \\ (右辺) &= \frac{1}{2}\left(\int_n^{n+1} w(y)dy + \int_{n+1}^{n} w(z)\cdot -dz\right) \\ &\qquad [(\because)\ 変数変換\ y = n + \tfrac{1}{2} + x,\ z = n + \tfrac{1}{2} - x] \\ &= \int_n^{n+1} w(y)dy \end{aligned}$$

より，$\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$n \geq m$ なるすべての n について和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^\infty w\Big(n+\frac{1}{2}\Big) \leq \sum_{n=m}^\infty \int_n^{n+1} w(y)dy &= \int_m^\infty w(y)dy \\ &= \int_m^\infty \frac{1}{(1+y)^3}dy \\ &= \left[-\frac{1}{2(1+y)^2}\right]_m^\infty = \frac{1}{2(1+m)^2}. \end{aligned}$$

(iii) $\sigma = (I_\sigma, J_\sigma) \in Q$, $\mathring{I} = (a, b)$ [ただし $-\infty < a < b < \infty$], $\mathrm{c}\,(I_\sigma) = x_\sigma \notin \mathring{I}$ とする．このとき，$x_\sigma \leq a$ または $b \leq x_\sigma$ である．

$$x_\sigma \leq a \ \Rightarrow\ t - x_\sigma = (t-a) + (a - x_\sigma) \geq 0 \quad (\forall t \in \overline{I}) \ \Rightarrow\ w_\sigma\ は\ \overline{I}\ で下に凸,$$

$$b \le x_\sigma \ \Rightarrow\ t - x_\sigma = (t-b) + (b - x_\sigma) \le 0 \quad (\forall t \in \overline{I}) \ \Rightarrow\ w_\sigma \text{ は } \overline{I} \text{ で下に凸}$$

より

$$\begin{aligned} 0 \le t \le \frac{b-a}{2} \ &\Rightarrow\ a \le a+t \le \frac{a+b}{2} = x < b,\ b \ge b-t \ge \frac{a+b}{2} = x > a \\ &\Rightarrow\ a+t,\ b-t \in [a,b] = \overline{I},\ \frac{(a+t)+(b-t)}{2} = \frac{a+b}{2} = x \\ &\Rightarrow\ w_\sigma(x) = w_\sigma\left(\frac{(a+t)+(b-t)}{2}\right) \le \frac{1}{2}\Big(w_\sigma(a+t) + w_\sigma(b-t)\Big). \end{aligned}$$

t について $[0, \frac{b-a}{2}]$ で積分すると

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} w_\sigma(x)dt \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{b-a}{2}} \Big(w_\sigma(a+t) + w_\sigma(b-t)\Big)dt.$$

ここで

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{b-a}{2} w_\sigma(x) = \frac{1}{2}\lambda\,(I)\, w_\sigma(x), \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} w_\sigma(\tau)d\tau + \int_b^{\frac{a+b}{2}} w_\sigma(\xi)\cdot -d\xi\right) \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \tau = a+t, \xi = b-t] \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b w_\sigma(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_I w_\sigma(t)dt \end{aligned}$$

であるから

$$\lambda\,(I)\, w_\sigma(x) \le \int_I w_\sigma(t)dt.$$

(iv) $x \in \mathbb{R}$ を固定する．$m \in \mathbb{Z}$ を $|x-m| \le \frac{1}{2}$ を満たすようにとる $[m = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ とすればよい].

$$\begin{aligned} n \ne m \ &\Rightarrow\ n > m \text{ または } n < m \\ &\Rightarrow\ 0 > m-n \text{ または } 0 < m-n \\ &\Rightarrow\ m-n \le -1 \text{ または } 1 \le m-n \\ &\Rightarrow\ |t| \le \frac{1}{2}\text{に対して} \end{aligned}$$

- $m-n \le -1$ のとき
$$x-n \pm t \le x-n+\frac{1}{2} = (x-m)+(m-n)+\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0,$$
- $m-n \ge 1$ のとき
$$x-n \pm t \ge x-n-\frac{1}{2} = (x-m)+(m-n)-\frac{1}{2} \ge -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{(x-n+t)+(x-n-t)}{2} = x-n$$

となる．$w(\cdot)$ は $[0,\infty)$, $(-\infty,0]$ で下に凸であること $[(\because)$ (ii) の証明冒頭] より

$$w(x-n) = w\left(\frac{(x-n+t)+(x-n-t)}{2}\right) \le \frac{1}{2}\Big(w(x-n+t) + w(x-n-t)\Big),\ |t| \le \frac{1}{2}.$$

t について $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ で積分すると

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w(x-n)dt \le \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big(w(x-n+t) + w(x-n-t)\Big)dt.$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= w(x-n),\\
(\text{右辺}) &= \frac{1}{2}\left(\int_{-n}^{-n+1} w\Big(x+\xi-\frac{1}{2}\Big)d\xi + \int_{-n+1}^{-n} w\Big(x+\eta-\frac{1}{2}\Big)\cdot -d\eta\right)\\
&\qquad\qquad \Big[(\because)\ \text{変数変換}\ \xi=-n+t+\tfrac{1}{2},\ \eta=-n-t+\tfrac{1}{2}\Big]\\
&= \int_{-n}^{-(n-1)} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt
\end{aligned}
$$

であるから，$n\neq m$ について足し合わせて

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\neq m} w(x-n) &= \sum_{n>m} w(x-n) + \sum_{n<m} w(x-n)\\
&\leq \sum_{n>m}\int_{-n}^{-(n-1)} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt + \sum_{n<m}\int_{-n}^{-(n-1)} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt\\
&= \int_{-\infty}^{-m} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt + \int_{-(m-1)}^{\infty} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt\\
&= \int_{\mathbb{R}} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt - \int_{-m}^{-m+1} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt\\
&= \int_{\mathbb{R}} w(s)ds - \int_{-m}^{-m+1} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt \quad \Big[(\because)\ \text{変数変換}\ s=x+t-\tfrac{1}{2}\Big]\\
&= 1-\int_{-m}^{-m+1} w\Big(x+t-\frac{1}{2}\Big)dt \leq 1 \quad [(\because)\ w(\cdot)>0].
\end{aligned}
$$

よって

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(x-n) = \sum_{n\neq m} w(x-n) + w(x-m) \leq 1+1=2.
$$

(v) まず，

$$
\begin{aligned}
\frac{|\phi(x)|}{(w(3)\wedge w(x)^2)} &= I_{\{|x|<3\}}\frac{|\phi(x)|}{(w(3)\wedge w(x)^2)} + I_{\{|x|\geq 3\}}\frac{|\phi(x)|}{(w(3)\wedge w(x)^2)}\\
&\leq I_{\{|x|<3\}}\frac{|\phi(x)|}{w(3)^2} + I_{\{|x|\geq 3\}}\frac{|\phi(x)|}{w(x)^2}\\
&\qquad \left[\begin{aligned}
(\because)\ |x|<3\ &\Rightarrow\ w(x)>w(3)\\
&\Rightarrow\ w(x)^2>w(3)^2\\
&\Rightarrow\ \big(w(3)\wedge w(x)^2\big) \geq \big(w(3)\wedge w(3)^2\big) = w(3)^2,\\
|x|\geq 3\ &\Rightarrow\ w(x)\leq w(3)\\
&\Rightarrow\ w(x)^2\leq w(x)\leq w(3)\\
&\Rightarrow\ \big(w(3)\wedge w(x)^2\big) = w(x)^2
\end{aligned}\right]\\
&= \big(I_{\{|x|<3\}}(1+3)^6 + I_{\{|x|\geq 3\}}(1+|x|)^6\big)|\phi(x)|\\
&= \big(1+(|x|\vee 3)\big)^6|\phi(x)|\\
&\to 0 \quad (|x|\to\infty) \quad [(\because)\ \text{定義 2.5 より}\ \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})]
\end{aligned}
$$

に注意せよ．

$$
C_1 := \max_{x\in\mathbb{R}} \big(1+(|x|\vee 3)\big)^6|\phi(x)|
$$

とおく．上の注意より，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}|\phi(x)| &\le C_1\left(w(3)\wedge w(x)^2\right)\\ &\le C_1 w(x)^2 = C_1 w(x)w(x) = C_1 w(x)\left(1\wedge w(x)\right).\end{aligned}$$

従って，$\forall x\in\mathbb{R}, \forall\sigma\in Q$ に対して

$$\begin{aligned}|\phi_\sigma(x)| &= \lambda\left(J_\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left|\phi\big(\lambda\left(J_\sigma\right)(x-x_\sigma)\big)\right| \quad [(\because)\ 命題\ 2.9(\mathrm{o})]\\ &\le \lambda\left(J_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} C_1 w\Big(\lambda\left(J_\sigma\right)(x-x_\sigma)\Big)\Big(1\wedge w\Big(\lambda\left(J_\sigma\right)(x-x_\sigma)\Big)\Big)\\ &= C_1\lambda\left(J_\sigma\right)^{-\frac{1}{2}}\lambda\left(J_\sigma\right)w\Big(\lambda\left(J_\sigma\right)(x-x_\sigma)\Big)\Big(1\wedge\lambda\left(J_\sigma\right)^{-1}\lambda\left(J_\sigma\right)w\Big(\lambda\left(J_\sigma\right)(x-x_\sigma)\Big)\Big)\\ &= C_1\lambda\left(I_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} w_\sigma(x)\left(1\wedge\lambda\left(I_\sigma\right)w_\sigma(x)\right) \quad [(\because)\ (\mathrm{o})].\end{aligned}$$

(vi) 5 段階で示す.

Step 1　$\beta\ge 0$, $t\ge\frac{1}{2}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tw\big((1+\beta)t\big)\big) &= \frac{d}{dt}\left(t\Big(1+(1+\beta)t\Big)^{-3}\right)\\ &= \Big(1+(1+\beta)t\Big)^{-3} + t\cdot(-3)\Big(1+(1+\beta)t\Big)^{-4}(1+\beta)\\ &= \Big(1+(1+\beta)t\Big)^{-4}\big(\big(1+(1+\beta)t\big)-3t(1+\beta)\big)\\ &= \frac{1-2t(1+\beta)}{\Big(1+(1+\beta)t\Big)^4} \le \frac{1-(1+\beta)}{\Big(1+(1+\beta)t\Big)^4} = -\frac{\beta}{\Big(1+(1+\beta)t\Big)^4}\le 0\end{aligned}$$

より，$\left[\frac{1}{2},\infty\right)\ni t\mapsto tw\big((1+\beta)t\big)\in[0,\infty)$ は単調減少.

$$\frac{w\left(\frac{1+\beta}{2}\right)}{w(\beta)} = \frac{(1+\beta)^3}{\left(1+\frac{1+\beta}{2}\right)^3} = \left(\frac{1+\beta}{\frac{3+\beta}{2}}\right)^3 = 8\left(\frac{1+\beta}{3+\beta}\right)^3 < 8 \tag{22}$$

に注意して

$$tw\big((1+\beta)t\big)\le\frac{1}{2}w\left(\frac{1+\beta}{2}\right) < \frac{1}{2}\cdot 8w(\beta) = 4w(\beta).$$

$0<\alpha\le 1$ のとき，$\frac{1}{2\alpha}\ge\frac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{\alpha}w\left(\frac{1+\beta}{2\alpha}\right) = 2\cdot\frac{1}{2\alpha}w\left((1+\beta)\cdot\frac{1}{2\alpha}\right) < 2\cdot 4w(\beta) = 8w(\beta). \tag{23}$$

Step 2　$0<\alpha\le 1$, $\beta\ge 0$ とする．まず

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} w(x)w(\alpha x+\beta)dx\\ &= \int_{\frac{1-\beta}{2\alpha}}^{\infty} w(x)w(\alpha x+\beta)dx + \int_{-\frac{1+\beta}{2\alpha}}^{\frac{1-\beta}{2\alpha}} w(x)w(\alpha x+\beta)dx + \int_{-\infty}^{-\frac{1+\beta}{2\alpha}} w(x)w(\alpha x+\beta)dx.\end{aligned}$$

右辺第 1 項については,

$$x\ge\frac{1-\beta}{2\alpha}\ \Rightarrow\ \alpha x+\beta\ge\alpha\cdot\frac{1-\beta}{2\alpha}+\beta = \frac{1+\beta}{2} > 0$$

$$\Rightarrow\ w(\alpha x+\beta)\leq w\Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)\quad [(\because)\ w(\cdot)\text{ は }[0,\infty)\text{ で単調減少}]$$
$$\Rightarrow\ w(\alpha x+\beta)<8w(\beta)\quad [(\because)\ (22)]$$

より

$$(\text{右辺第 1 項})\leq 8w(\beta)\int_{\frac{1-\beta}{2\alpha}}^{\infty}w(x)dx\leq 8w(\beta)\int_{\mathbb{R}}w(x)dx=8w(\beta).$$

右辺第 3 項については,

$$x\leq -\frac{1+\beta}{2\alpha}<0\ \Rightarrow\ w(x)\leq w\Big(-\frac{1+\beta}{2\alpha}\Big)=w\Big(\frac{1+\beta}{2\alpha}\Big)$$
$$[(\because)\ w(\cdot)\text{ は偶関数で，}(-\infty,0]\text{ で単調増加}]$$

より

$$\begin{aligned}(\text{右辺第 3 項})&\leq w\Big(\frac{1+\beta}{2\alpha}\Big)\int_{-\infty}^{-\frac{1+\beta}{2\alpha}}w(\alpha x+\beta)dx\\&=w\Big(\frac{1+\beta}{2\alpha}\Big)\int_{-\infty}^{\frac{\beta-1}{2}}w(t)\cdot\frac{dt}{\alpha}\quad [(\because)\ \text{変数変換 } t=\alpha x+\beta]\\&\leq\frac{1}{\alpha}w\Big(\frac{1+\beta}{2\alpha}\Big)\int_{\mathbb{R}}w(t)dt\\&<8w(\beta)\cdot 1\ \ [(\because)\ (23)]\ \ =8w(\beta).\end{aligned}$$

右辺第 2 項については，$\beta\geq 1$ のときは

$$\begin{aligned}x\geq -\frac{1+\beta}{2\alpha}\ &\Rightarrow\ \alpha x+\beta\geq\alpha\cdot\Big(-\frac{1+\beta}{2\alpha}\Big)+\beta=\frac{\beta-1}{2}\geq 0\\&\Rightarrow\ w(\alpha x+\beta)\leq w\Big(\frac{\beta-1}{2}\Big)=\frac{1}{\big(1+\frac{\beta-1}{2}\big)^3}=\frac{1}{\big(\frac{1+\beta}{2}\big)^3}=\frac{8}{(1+\beta)^3}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=8w(\beta)\end{aligned}$$

より

$$(\text{右辺第 2 項})\leq 8w(\beta)\int_{-\frac{1+\beta}{2\alpha}}^{\frac{1-\beta}{2\alpha}}w(x)dx\leq 8w(\beta)\int_{\mathbb{R}}w(x)dx=8w(\beta);$$

$0\leq\beta<1$ のときは

$$1+\beta<2\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+\beta}>\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ w(\beta)=\frac{1}{(1+\beta)^3}>\frac{1}{8}$$

より $8w(\beta)>1$ なので,

$$\begin{aligned}(\text{右辺第 2 項})&\leq\int_{-\frac{1+\beta}{2\alpha}}^{\frac{1-\beta}{2\alpha}}w(x)dx\quad [(\because)\ w(\alpha x+\beta)\leq 1]\\&\leq\int_{\mathbb{R}}w(x)dx=1<8w(\beta).\end{aligned}$$

以上より

$$\int_{\mathbb{R}}w(x)w(\alpha x+\beta)dx\leq 8w(\beta)+8w(\beta)+8w(\beta)=24w(\beta)$$

が分かる.

<u>Step 3</u>　$\alpha=0$ のときは，$\forall\beta\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)w(\alpha x+\beta)dx=\int_{\mathbb{R}} w(x)dx\cdot w(\beta)=w(\beta)<24w(\beta)\quad [(\because)\ w(\beta)>0].$$

<u>Step 4</u>　$0<\alpha\le 1$, $\beta<0$ のときは

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} w(x)w(\alpha x+\beta)dx &=\int_{\mathbb{R}} w(-x)w(-\alpha x-\beta)dx\quad [(\because)\ w(\cdot)\ \text{は偶関数である}]\\ &=\int_{\mathbb{R}} w(y)w(\alpha y+|\beta|)dy\quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y=-x]\\ &\le 24w(|\beta|)\qquad [(\because)\ |\beta|>0\ \text{と Step 2}]\\ &=24w(\beta)\qquad [(\because)\ w(\cdot)\ \text{は偶関数である}].\end{aligned}$$

<u>Step 5</u>　Step 2, Step 3, Step 4 より $C_2=24$ とすれば

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)w(\alpha x+\beta)dx\le C_2w(\beta)\quad (0\le\forall\alpha\le 1,\ \forall\beta\in\mathbb{R})$$

となる.

(vii) σ, $\tau\in Q$, $k_\sigma\le k_\tau$ とする．4 段階で示す.

<u>Step 1</u>　$\sigma=\tau$ のとき.

$$\begin{aligned}&|\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle|=\|\phi_\sigma\|_2^2=\|\phi\|_2^2\quad [(\because)\ \text{命題 2.9(i)}],\\ &\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\int_{I_\tau} w_\sigma(t)dt=(\lambda(I_\sigma)\lambda(J_\sigma))^{\frac{1}{2}}\int_{I_\sigma} w_\sigma(t)dt\\ &\qquad=\int_{I_\sigma} w_\sigma(t)dt\\ &\qquad=\int_{[x_\sigma-\frac{1}{2}\lambda(I_\sigma),x_\sigma+\frac{1}{2}\lambda(I_\sigma))}\lambda(J_\sigma)\,w\big(\lambda(J_\sigma)(t-x_\sigma)\big)dt\\ &\qquad\quad [(\because)\ (\mathrm{o})]\\ &\qquad=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w(y)dy\quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y=\lambda(J_\sigma)(t-x_\sigma)]\\ &\qquad=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1+y)^3}dy\quad \left[(\because)\ w(y)=\tfrac{1}{(1+|y|)^3}\ \text{は偶関数}\right]\\ &\qquad=\left[-\frac{1}{(1+y)^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

より

$$|\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle|=\frac{9}{5}\|\phi\|_2^2\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\int_{I_\tau} w_\sigma(t)dt.$$

<u>Step 2</u>　$\sigma\ne\tau$, $I_\sigma=I_\tau$ のとき.

$\lambda(J_\sigma)=\dfrac{1}{\lambda(I_\sigma)}=\dfrac{1}{\lambda(I_\tau)}=\lambda(J_\tau)$ かつ $\sigma\ne\tau$, $I_\sigma=I_\tau$ であることから，$J_\sigma\cap J_\tau=\emptyset$．従って $J_\sigma^1\cap J_\tau^1=\emptyset$ となるので，命題 2.9(iii) より $\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle=0$.

Step 3　$I_\sigma \neq I_\tau$ のとき．

$$\int_{I_\tau} w_\sigma(t)dt \geq w_\sigma(x_\tau)\lambda(I_\tau) \tag{24}$$

が成り立つ．なぜならば，$\lambda(I_\sigma) = \lambda(I_\tau)$ のときは，$I_\sigma \neq I_\tau$ より $I_\sigma \cap I_\tau = \emptyset$. このとき $I_\sigma \cap \mathring{I}_\tau = \emptyset$, $x_\sigma \in I_\sigma$ より $x_\sigma \notin \mathring{I}_\tau$.

$\lambda(I_\sigma) \neq \lambda(I_\tau)$ のときは，$2^{-k_\sigma} = \lambda(I_\sigma) \neq \lambda(I_\tau) = 2^{-k_\tau}$ より $k_\sigma \neq k_\tau$．$k_\sigma \leq k_\tau$ なので $k_\sigma < k_\tau$. 従って $s \in \{\mathrm{l},\ \mathrm{r}\}$ に対して $\lambda(I_\sigma^s) = \frac{1}{2}\lambda(I_\sigma) = 2^{-k_\sigma-1} \geq 2^{-k_\tau} = \lambda(I_\tau)$ となるから，$I_\sigma^s \cap I_\tau = \emptyset$ または $I_\sigma^s \supset I_\tau$．$I_\sigma \cap I_\tau = \emptyset$ のとき，$I_\sigma \cap \mathring{I}_\tau = \emptyset$，$x_\sigma \in I_\sigma$ より $x_\sigma \notin \mathring{I}_\tau$. $I_\sigma \cap I_\tau \neq \emptyset$ のとき, $\emptyset \neq (I_\sigma^{\mathrm{l}} \cup I_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap I_\tau = (I_\sigma^{\mathrm{l}} \cap I_\tau) \cup (I_\sigma^{\mathrm{r}} \cap I_\tau)$ より $I_\sigma^{\mathrm{l}} \cap I_\tau \neq \emptyset$ または $I_\sigma^{\mathrm{r}} \cap I_\tau \neq \emptyset$. 上のことから $I_\sigma^{\mathrm{l}} \supset I_\tau$ または $I_\sigma^{\mathrm{r}} \supset I_\tau$．いずれのときも $x_\sigma \notin \mathring{I}_\tau$.

以上のことから $x_\sigma \notin \mathring{I}_\tau$ となる．(iii) を適用して，(24) 式は成り立つ．さて，

$$\begin{aligned}
|\langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \phi_\sigma(x)\overline{\phi_\tau(x)}dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\phi_\sigma(x)||\phi_\tau(x)|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} C_1\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} w_\sigma(x) \cdot C_1\lambda(I_\tau)^{\frac{1}{2}} w_\tau(x)dx \quad [(\because)\ (\mathrm{v})] \\
&= C_1^2\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} w_\sigma(x)w_\tau(x)dx \\
&= C_1^2\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \lambda(J_\sigma)w\big(\lambda(J_\sigma)(x-x_\sigma)\big) \cdot \lambda(J_\tau)w\big(\lambda(J_\tau)(x-x_\tau)\big)dx \\
&\qquad [(\because)\ (\mathrm{o})] \\
&= C_1^2\lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} w\big(\lambda(J_\sigma)x - \lambda(J_\sigma)x_\sigma\big) \cdot w\big(\lambda(J_\tau)(x-x_\tau)\big)dx \\
&= C_1^2\lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} w\big(\lambda(J_\sigma)\lambda(I_\tau)y + \lambda(J_\sigma)(x_\tau - x_\sigma)\big) \cdot w(y) \cdot \lambda(I_\tau)dy \\
&\qquad [(\because)\ \text{変数変換 } y = \lambda(J_\tau)(x-x_\tau) \iff x = \lambda(J_\tau)^{-1}y + x_\tau = \lambda(I_\tau)y + x_\tau] \\
&\leq C_1^2\lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)C_2 w\big(\lambda(J_\sigma)(x_\tau - x_\sigma)\big) \\
&\qquad [(\because)\ 0 < \lambda(I_\tau)\lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma - k_\tau} \leq 1 \text{ より (vi) を適用する}] \\
&= C_1^2C_2\lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)\lambda(J_\sigma)^{-1}w_\sigma(x_\tau) \quad [(\because)\ (\mathrm{o})] \\
&= C_1^2C_2\lambda(J_\sigma)^{-\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)w_\sigma(x_\tau) \\
&\leq C_1^2C_2\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \int_{I_\tau} w_\sigma(t)dt \quad [(\because)\ (24)].
\end{aligned}$$

Step 4　Step 1, Step 2, Step 3 より，$C_3 := \left(\frac{9}{5}\|\phi\|_2^2 \vee C_1^2C_2\right)$ とすればよい.

(viii)　$\tau \in Q$, $k \in \mathbb{Z}$ を固定する．3 つの場合に分けて考える．

Case 1　$k < k_\tau$ のとき.

$$\sigma \in Q,\ \sigma \succeq \tau \Rightarrow I_\sigma \subset I_\tau \Rightarrow 2^{-k_\sigma} = \lambda(I_\sigma) \leq \lambda(I_\tau) = 2^{-k_\tau} \Rightarrow k_\tau \leq k_\sigma \Rightarrow k < k_\sigma$$

より $\{\sigma \in Q;\ \sigma \succeq \tau,\ k_\sigma = k\} = \emptyset$ なので，$\sum_{\substack{\sigma \in Q; \\ \sigma \succeq \tau, k_\sigma = k}} \int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau} w_\sigma(t)dt = 0$.

Case 2　$k = k_\tau$ のとき.

$$\sigma \in Q,\ \sigma \succeq \tau,\ k_\sigma = k \ \Rightarrow\ J_\tau \subset J_\sigma,\ I_\sigma \subset I_\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \lambda\left(J_\sigma\right)=2^{k_\sigma}=2^k=2^{k_\tau}=\lambda\left(J_\tau\right),\\
&\quad\ \ \lambda\left(I_\sigma\right)=2^{-k_\sigma}=2^{-k}=2^{-k_\tau}=\lambda\left(I_\tau\right)\\
&\Rightarrow\ J_\tau=J_\sigma,\ I_\sigma=I_\tau
\end{aligned}
$$

より

$$\{\sigma\in Q;\ \sigma\succeq\tau,\ k_\sigma=k\}=\{\tau\}.$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma\in Q;\\ \sigma\succeq\tau,\,k_\sigma=k}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau}w_\sigma(t)dt\\
&=\int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau}w_\tau(t)dt\\
&=\int_{\mathbb{R}\setminus[x_\tau-\frac{1}{2}\lambda(I_\tau)\,,\,x_\tau+\frac{1}{2}\lambda(I_\tau))}\lambda\left(J_\tau\right)w\big(\lambda\left(J_\tau\right)\left(t-x_\tau\right)\big)dt\\
&=\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})}w(y)dy\\
&\qquad\qquad\left[\begin{array}{l}(\because)\text{ 変数変換 }y=\lambda\left(J_\tau\right)(t-x_\tau).\ \text{また}\\
\quad\ t\notin\big[x_\tau-\frac{1}{2}\lambda\left(I_\tau\right),\,x_\tau+\frac{1}{2}\lambda\left(I_\tau\right)\big)\\
\Leftrightarrow t-x_\tau\notin\big[-\frac{1}{2}\lambda\left(I_\tau\right),\,\frac{1}{2}\lambda\left(I_\tau\right)\big)\\
\Leftrightarrow \lambda\left(J_\tau\right)\left(t-x_\tau\right)\notin\big[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\big)
\end{array}\right]\\
&=2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}w(y)dy\quad[(\because)\ w(\cdot)\text{ は偶関数}].
\end{aligned}
$$

<u>Case 3</u> $k>k_\tau$ のとき.

命題 2.7 より, $\exists!J^{(0)}\in\mathscr{D}$ s.t. $J^{(0)}\supset J_\tau,\ \lambda\big(J^{(0)}\big)=2^k$. 命題 2.8 より, $I\subset I_\tau,\ \lambda\left(I\right)=2^{-k}$ なる $I\in\mathscr{D}$ と $(s_1,...,s_{k-k_\tau})\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^{k-k_\tau}$ は, $I=I_\tau^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}}$ により 1 対 1 に対応している.
従って

$$
\begin{aligned}
&\{\sigma\in Q;\ \sigma\succeq\tau,\ k_\sigma=k\}\\
&=\{(I,J)\in\mathscr{D}\times\mathscr{D};\ \lambda\left(I\right)=2^{-k},\ \lambda\left(J\right)=2^k,\ J_\tau\subset J,\ I\subset I_\tau\}\\
&=\Big\{\big(I_\tau^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}},J^{(0)}\big);\ (s_1,...,s_{k-k_\tau})\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^{k-k_\tau}\Big\}.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma\in Q;\\ \sigma\succeq\tau,\,k_\sigma=k}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau}w_\sigma(t)dt\\
&=\sum_{(s_1,...,s_{k-k_\tau})\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^{k-k_\tau}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau}w_{(I_\tau^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}},J^{(0)})}(t)dt\\
&=\sum_{(s_1,...,s_{k-k_\tau})\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^{k-k_\tau}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau}\lambda\big(J^{(0)}\big)w\left(\lambda\big(J^{(0)}\big)\big(x-\mathrm{c}\left(I_\tau^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}}\right)\big)\right)dx\quad[(\because)\ (\mathrm{o})]\\
&=\sum_{(s_1,...,s_{k-k_\tau})\in\{\mathrm{l},\mathrm{r}\}^{k-k_\tau}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\tau}2^kw\left(2^k\big(x-\mathrm{c}\left(I_\tau^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}}\right)\big)\right)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{\mathbb{R}\setminus[2^{-k_\tau}m,\, 2^{-k_\tau}(m+1))} 2^k w\left(2^k\left(x-2^{-k}\left(2^{k-k_\tau}m+j+\frac{1}{2}\right)\right)\right)dx \\
&\quad \left[\begin{array}{l}
(\because)\ I_\tau = [2^{-k_\tau}m,\, 2^{-k_\tau}(m+1))\ (m\in\mathbb{Z})\ \text{とすると} \\
\left\{I_\tau^{s_1\cdots s_{k-k_\tau}}\,;\,(s_1,\dots,s_{k-k_\tau})\in\{\mathrm{l},\,\mathrm{r}\}^{k-k_\tau}\right\} \\
=\left\{\left[2^{-k}i\,,\,2^{-k}(i+1)\right)\,;\,2^{k-k_\tau}m\le i<2^{k-k_\tau}(m+1)\right\} \\
=\left\{\left[2^{-k}(2^{k-k_\tau}m+j)\,,\,2^{-k}(2^{k-k_\tau}m+j+1)\right)\,;\,0\le j<2^{k-k_\tau}\right\}
\end{array}\right] \\
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{2^{-k_\tau}(m+1)}^{\infty} 2^k w\left(2^k\left(x-2^{-k}\left(2^{k-k_\tau}m+j+\frac{1}{2}\right)\right)\right)dx \\
&\qquad + \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{-\infty}^{2^{-k_\tau}m} 2^k w\left(2^k\left(x-2^{-k}\left(2^{k-k_\tau}m+j+\frac{1}{2}\right)\right)\right)dx \\
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} 2^k w\left(2^k\left(y+2^{-k_\tau}(m+1)-2^{k_\tau}m-2^{-k}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)\right)dy \\
&\qquad + \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{-\infty}^{0} 2^k w\left(2^k\left(z+2^{-k_\tau}m-2^{-k_\tau}m-2^{-k}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)\right)dz \\
&\qquad [(\because)\ \text{変数変換}\ y=x-2^{-k_\tau}(m+1),\ z=x-2^{-k_\tau}m] \\
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} 2^k w\left(2^k y+2^{k-k_\tau}-j-\frac{1}{2}\right)dy + \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{-\infty}^{0} 2^k w\left(2^k z-j-\frac{1}{2}\right)dz \\
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} w\left(\eta+2^{k-k_\tau}-j-\frac{1}{2}\right)d\eta + \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{-\infty}^{0} w\left(\xi-j-\frac{1}{2}\right)d\xi \\
&\qquad [(\because)\ \text{変数変換}\ \eta=2^k y,\ \xi=2^k z] \\
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} w\left(\eta+j+\frac{1}{2}\right)d\eta + \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{-\infty}^{0} w\left(\xi-j-\frac{1}{2}\right)d\xi \\
&\qquad \left[(\because)\ j'=2^{k-k_\tau}-j-1\ \Rightarrow\ 0\le j'<2^{k-k_\tau},\ j'+\tfrac{1}{2}=2^{k-k_\tau}-j-\tfrac{1}{2}\right] \\
&= \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} w\left(\eta+j+\frac{1}{2}\right)d\eta + \sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} w\left(\zeta+j+\frac{1}{2}\right)d\zeta \\
&\qquad \left[\begin{array}{ll}
(\because)\ \int_{-\infty}^0 w\left(\xi-j-\tfrac{1}{2}\right)d\xi & = \int_{-\infty}^0 w\left(-\xi+j+\tfrac{1}{2}\right)d\xi \quad [\because\ w(\cdot)\ \text{は偶関数}] \\
& = \int_0^{\infty} w\left(\zeta+j+\tfrac{1}{2}\right)d\zeta \quad [\because\ \text{変数変換}\ \zeta=-\xi]
\end{array}\right] \\
&= 2\sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_0^{\infty} w\left(\eta+j+\frac{1}{2}\right)d\eta \\
&= 2\sum_{0\le j<2^{k-k_\tau}} \int_{j+\frac{1}{2}}^{\infty} w(t)dt \qquad \left[(\because)\ \text{変数変換}\ t=\eta+j+\tfrac{1}{2}\right] \\
&\le 2\sum_{j=0}^{\infty} \int_{j+\frac{1}{2}}^{\infty} w(t)dt \\
&= 2\sum_{j=0}^{\infty} \int_{j+1-\frac{1}{2}}^{\infty} w(t)dt \\
&= 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_{j-\frac{1}{2}}^{\infty} w(t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty} I_{\{t\geq j-\frac{1}{2}\}} w(t)dt \\
&= 2\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} I_{\{j\leq t+\frac{1}{2}\}} w(t)dt = 2\int_0^{\infty}\frac{\lfloor t+\frac{1}{2}\rfloor}{(1+t)^3}dt.
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}\leq t$ において $w(t)\leq \dfrac{\lfloor t+\frac{1}{2}\rfloor}{(1+t)^3}$ だから，$C_4 = 2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\lfloor t+\frac{1}{2}\rfloor}{(1+t)^3}dt$ とすればよい． □

注 2.2. (viii) の定数 C_4 を計算する：

$$
\begin{aligned}
C_4 &= 2\int_0^{\infty}\frac{\lfloor t+\frac{1}{2}\rfloor}{(1+t)^3}dt \\
&= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\lfloor s\rfloor}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^3}ds \quad \left[(\because)\ \text{変数変換}\ s=t+\tfrac{1}{2}\right] \\
&= \int_{[\frac{1}{2},\infty)} d\left(\lfloor s\rfloor\cdot\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^2}\right) + \int_{[\frac{1}{2},\infty)}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(ds) \\
&\qquad \left[\begin{aligned}
&(\because)\ \text{部分積分} \\
&d\left(\lfloor s\rfloor\cdot\tfrac{-1}{(\frac{1}{2}+s)^2}\right) = \lfloor s\rfloor\, d\left(-\tfrac{1}{(\frac{1}{2}+s)^2}\right) - \tfrac{1}{(\frac{1}{2}+s)^2}d(\lfloor s\rfloor) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = 2\lfloor s\rfloor \tfrac{ds}{(\frac{1}{2}+s)^3} - \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(\frac{1}{2}+s)^2}\delta_n(ds)
\end{aligned}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[\frac{1}{2},\infty)}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^2}\delta_n(ds) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n\right)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{2n+1}\Big)^2 \\
&= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\big(2(n+1)-1\big)^2} \\
&= 4\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \\
&= 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}-1\right) \\
&= 4\Big(\frac{3}{4}\zeta(2)-1\Big) \\
&\qquad \left[(\because)\ \zeta(2)=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{4}\zeta(2)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\right] \\
&= 4\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}-1\Big) = 4\Big(\frac{\pi^2}{8}-1\Big).
\end{aligned}
$$

定義 2.8. $\emptyset \subsetneq R\subset Q$ に対して

$$
R^+ := \bigcup_{\tau\in R}\{\sigma\in Q;\ \tau\preceq\sigma\}.
$$

$R=\emptyset$ のときは $R^+ := \emptyset$ と定義する．この定義より $R^+\supset R$ である．

定義 2.9. $\tau \in Q$ に対して

$$T_\tau := \{\sigma \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}}\}$$

と定義する．上の 2 つの定義から，$\tau \in T_\tau \subset \{\tau\}^+$ となる．

命題 2.13. $\sigma, \sigma' \in T_\tau$, $k_\sigma \neq k_{\sigma'} \Rightarrow J_\sigma \neq J_{\sigma'}$, $J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_{\sigma'}^{\mathrm{r}} \neq \emptyset$.

証明

$$\begin{aligned} \sigma, \sigma' \in T_\tau,\ k_\sigma \neq k_{\sigma'} \ &\Rightarrow\ J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}},\ J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_{\sigma'}^{\mathrm{r}},\ \lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma} \neq 2^{k_{\sigma'}} = \lambda(J_{\sigma'}) \\ &\Rightarrow\ J_\sigma \neq J_{\sigma'},\ J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_{\sigma'}^{\mathrm{r}} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

2.3. “mass” and “energy”

定義 2.10. $P \subset Q$, $E \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数, $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ とする．$P = \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned} &\mathrm{mass}_{E,g}(\emptyset) := 0, \\ &\Delta_f(\emptyset) := 0, \\ &\mathrm{energy}_f(\emptyset) := 0, \end{aligned}$$

$P \neq \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned} &\mathrm{mass}_{E,g}(P) := \sup_{\sigma \in P} \sup_{\tau \in Q;\, \tau \preceq \sigma} \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x)dx \leq \sup_{\tau \in Q} \int_{\mathbb{R}} w_\tau(x)dx = 1, \\ &\Delta_f(P) := \sum_{\sigma \in P} \big|\langle f, \phi_\sigma \rangle\big|^2 \in [0, \infty], \\ &\mathrm{energy}_f(P) := \sup_{\tau \in Q} \lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \big(\Delta_f(P \cap T_\tau)\big)^{\frac{1}{2}} \in [0, \infty] \end{aligned}$$

と定義する．ただし

$$T_\tau := \{\sigma \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}}\} \quad [\text{cf. 定義 2.9}].$$

補題 2.14.
(i) $P' \subset P \ \Rightarrow\ \mathrm{mass}_{E,g}(P') \leq \mathrm{mass}_{E,g}(P)$, $\mathrm{energy}_f(P') \leq \mathrm{energy}_f(P)$.
(ii) $\mathrm{energy}_f(\{\sigma\}) = \lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}} |\langle f, \phi_\sigma \rangle| \quad (\sigma \in Q)$.

証明 (i) mass, energy の定義より明らかである．
(ii) $\sigma \in Q$ を固定する．

$$\Delta_f(\{\sigma\} \cap T_\tau) = \begin{cases} \Delta_f(\{\sigma\}) = \big|\langle f, \phi_\sigma \rangle\big|^2, & \sigma \in T_\tau, \\ \Delta_f(\emptyset) = 0, & \sigma \notin T_\tau \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \mathrm{energy}_f(\{\sigma\}) &= \sup_{\tau \in Q} \lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \big(\Delta_f(\{\sigma\} \cap T_\tau)\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\tau \in Q} \lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} I_{\{\sigma \in T_\tau\}} |\langle f, \phi_\sigma \rangle| \end{aligned}$$

$$= \sup_{\tau \in Q;\, \sigma \in T_\tau} \lambda\left(J_\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|.$$

ここで

$$\begin{aligned} &\sigma \in T_\tau \ \Leftrightarrow\ \tau \preceq \sigma,\ J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}} \ \Rightarrow\ J_\tau \subset J_\sigma \ \Rightarrow\ \lambda\left(J_\tau\right) \leq \lambda\left(J_\sigma\right), \\ &\sigma \in T_\sigma \end{aligned}$$

に注意すると

$$\mathrm{energy}_f\left(\{\sigma\}\right) \begin{cases} \leq \lambda\left(J_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|, \\ \geq \lambda\left(J_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|. \end{cases}$$

従って，$\mathrm{energy}_f\left(\{\sigma\}\right) = \lambda\left(J_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|$ が成り立つ． □

補題 2.15. $P \subset Q$ が有限集合ならば，$0 \leq \mathrm{energy}_f\left(P\right) < \infty$.

証明 $P \subset Q$ を有限集合とする．$P = \emptyset$ のときは定義より $\mathrm{energy}_f\left(P\right) = 0$.

$P \neq \emptyset$ とする．$P \cap T_\tau = \emptyset \ \Rightarrow\ \Delta_f\left(P \cap T_\tau\right) = 0$ より

$$\mathrm{energy}_f\left(P\right) = \sup_{\tau \in Q;\, P \cap T_\tau \neq \emptyset} \big(\lambda\left(J_\tau\right) \Delta_f\left(P \cap T_\tau\right)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

ここで，P が有限集合であることから

$$\begin{aligned} P \cap T_\tau \neq \emptyset \ &\Rightarrow\ \exists \sigma \in P \ \text{ s.t. } \ \sigma \in T_\tau \\ &\Rightarrow\ \tau \preceq \sigma \\ &\Rightarrow\ J_\tau \subset J_\sigma \\ &\Rightarrow\ \lambda\left(J_\tau\right) \leq \lambda\left(J_\sigma\right) \leq \max_{u \in P} \lambda\left(J_u\right), \\ \Delta_f\left(P \cap T_\tau\right) \leq \Delta_f\left(P\right) &= \sum_{u \in P} \left| \langle f, \phi_u \rangle \right|^2 < \infty \end{aligned}$$

より

$$\mathrm{energy}_f\left(P\right) \leq \Big(\big(\max_{u \in P} \lambda\left(J_u\right)\big) \sum_{u \in P} \left| \langle f, \phi_u \rangle \right|\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

となる． □

補題 2.16. $P \subset Q$ は有限集合，$f \in L^2\left(\mathbb{R}; \mathbb{C}\right)$ とする．このとき

(i) $\Delta_f\left(P\right) \leq \left\| \sum_{\sigma \in P} \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma \right\|_2 \|f\|_2$.

(ii) $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma, \tau \in P; \\ J_\sigma = J_\tau}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right| \left| \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \right| \left| \langle \phi_\tau, f \rangle \right| \leq C_3 \Delta_f\left(P\right)$.

証明 $P \subset Q$ は有限集合，$f \in L^2\left(\mathbb{R}; \mathbb{C}\right)$ とする．$P = \emptyset$ のときは明らか．以下，$P \neq \emptyset$ とする．

(i)

$$\begin{aligned} \Delta_f\left(P\right) = \sum_{\sigma \in P} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|^2 &= \sum_{\sigma \in P} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, f \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in P} \Big\langle \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma,\ f \Big\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{\sigma\in P} \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma, f \right\rangle \\
&\le \left| \left\langle \sum_{\sigma\in P} \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma, f \right\rangle \right| \\
&\le \left\| \sum_{\sigma\in P} \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma \right\|_2 \|f\|_2 \quad [(\because)\ \text{Schwarz の不等式}].
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma,\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle||\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle||\langle \phi_\tau,f\rangle| \\
&= \sum_{\substack{\sigma,\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle||\langle f,\phi_\tau\rangle||\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| \\
&\le \sum_{\substack{\sigma,\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} \frac{1}{2}\left(|\langle f,\phi_\sigma\rangle|^2 + |\langle f,\phi_\tau\rangle|^2\right)|\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| \\
&\qquad \left[(\because)\ \text{相加・相乗平均の大小関係から}\ |\xi\eta| \le \tfrac{1}{2}\left(|\xi|^2+|\eta|^2\right)\ (\xi,\eta\in\mathbb{C})\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\sigma,\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle|^2|\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\sigma,\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle f,\phi_\tau\rangle|^2|\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in P} |\langle f,\phi_\sigma\rangle|^2 \sum_{\substack{\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| + \frac{1}{2}\sum_{\tau\in P} |\langle f,\phi_\tau\rangle|^2 \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| \\
&= \sum_{\sigma\in P} |\langle f,\phi_\sigma\rangle|^2 \sum_{\substack{\tau\in P;\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle \phi_\sigma,\phi_\tau\rangle| \\
&\le \sum_{\sigma\in P} \left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\right|^2 \sum_{\substack{\tau\in P;\\ J_\tau=J_\sigma}} C_3\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} \int_{I_\tau} w_\sigma(x)dx \\
&\qquad [(\because)\ J_\tau=J_\sigma \ \Rightarrow\ \lambda(J_\tau)=\lambda(J_\sigma)\ \Rightarrow\ k_\tau=k_\sigma \text{より，命題 2.12(vii) を適用する}] \\
&= C_3\sum_{\sigma\in P} \left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\right|^2 \sum_{\substack{\tau\in P;\\ J_\tau=J_\sigma}} \int_{I_\tau} w_\sigma(x)dx \\
&\qquad [(\because)\ J_\tau=J_\sigma \ \Rightarrow\ \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda(I_\sigma)\lambda(J_\sigma)\right)^{\frac{1}{2}} = 1] \\
&= C_3\sum_{\sigma\in P} \left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\right|^2 \int_{\bigsqcup_{\substack{\tau\in P;\\ J_\tau=J_\sigma}} I_\tau} w_\sigma(x)dx \\
&\qquad \left[\begin{array}{l}
(\because)\ \tau,\tau'\in P,\ \tau\ne\tau',\ J_\tau=J_\sigma=J_{\tau'} \\
\ \Rightarrow I_\tau \ne I_{\tau'}\ \ [(\because)\ \tau\ne\tau' \text{より}\ (I_\tau,J_\tau)\ne(I_{\tau'},J_{\tau'})],\ 2^{k_\tau}=\lambda(J_\tau)=\lambda(J_{\tau'})=2^{k_{\tau'}} \\
\ \Rightarrow k_\tau = k_{\tau'} \\
\ \Rightarrow \lambda(I_\tau) = 2^{-k_\tau} = 2^{-k_{\tau'}} = \lambda(I_{\tau'}) \\
\ \Rightarrow I_\tau\cap I_{\tau'} = \emptyset\ \ [(\because)\ \text{命題 2.6 と}\ I_\tau\ne I_{\tau'}]. \\
\ \text{このことから}\ \{I_\tau;\ \tau\in P,\ J_\tau=J_\sigma\}\ \text{は互いに素である}
\end{array}\right] \\
&\le C_3\sum_{\sigma\in P} \left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\right|^2 \int_{\mathbb{R}} w_\sigma(x)dx
\end{aligned}
$$

$$= C_3 \sum_{\sigma \in P} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|^2 \qquad [(\because)\ \text{命題 } 2.12(\mathrm{i})]$$
$$= C_3 \Delta_f (P) .$$
□

補題 2.17. $P \subset Q$ は有限集合, $E \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数とする．このとき

$$\gamma \geq \mathrm{mass}_{E,g}(P) \ \Rightarrow \ \exists R \subset Q \ \text{ s.t. } \begin{cases} \bullet\ \gamma \displaystyle\sum_{\tau \in R} \lambda(I_\tau) \leq C_5 \lambda(E), \\ \bullet\ \mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right) \leq \dfrac{\gamma}{4}. \end{cases}$$

ただし $C_5 = 2^{12}$.

証明 $P \subset Q$ は有限集合, $E \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数とする．

Case 1 $\mathrm{mass}_{E,g}(P) = 0$ の場合.

$\forall \gamma \geq 0$ に対して $\gamma \geq \mathrm{mass}_{E,g}(P)$. $R = \emptyset$ ととると

$$\gamma \sum_{\tau \in R} \lambda(I_\tau) = 0 \leq C_5 \lambda(E).$$

$R^+ = \emptyset$ なので

$$\mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right) = \mathrm{mass}_{E,g}(P) = 0 \leq \frac{\gamma}{4}.$$

Case 2 $\mathrm{mass}_{E,g}(P) > 0$ の場合.

mass の定義から $P \neq \emptyset$ である．$\gamma \geq \mathrm{mass}_{E,g}(P)$ とする．$\mathrm{mass}_{E,g}(P) > 0$ より $\gamma > 0$ に注意.

$$P_1 := \left\{ \sigma \in P;\ \mathrm{mass}_{E,g}(\{\sigma\}) > \frac{\gamma}{4} \right\}$$

とおく.

Case 2.1 $P_1 = \emptyset$ の場合.

$$\begin{aligned} & \mathrm{mass}_{E,g}(\{\sigma\}) \leq \frac{\gamma}{4} \quad (\forall \sigma \in P) \\ \Rightarrow\ & \sup_{\tau \in Q;\, \tau \preceq \sigma} \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx \leq \frac{\gamma}{4} \quad (\forall \sigma \in P) \\ \Rightarrow\ & \sup_{\sigma \in P} \sup_{\tau \in Q;\, \tau \preceq \sigma} \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx \leq \frac{\gamma}{4} \end{aligned}$$

より $\mathrm{mass}_{E,g}(P) \leq \dfrac{\gamma}{4}$. $R = \emptyset$ と取ると $\gamma \displaystyle\sum_{\tau \in R} \lambda(I_\tau) = 0 \leq C_5 \lambda(E)$, $R^+ = \emptyset$ なので $\mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right) = \mathrm{mass}_{E,g}(P) \leq \dfrac{\gamma}{4}$.

Case 2.2 $P_1 \neq \emptyset$, $\lambda(E) = \infty$ の場合.

各 $\sigma \in P_1$ に対して $\mathrm{mass}_{E,g}(\{\sigma\}) > \dfrac{\gamma}{4}$ なので，mass の定義より

$$\exists \sigma' \preceq \sigma \ \text{ s.t. } \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_{\sigma'}(x) dx > \frac{\gamma}{4}.$$

$R=\{\sigma';\,\sigma\in P_1\}$ とおくと，

$$\sigma\in P_1 \;\Rightarrow\; \sigma'\preceq\sigma,\ \sigma'\in R \;\Rightarrow\; \sigma\in R^+$$

であるから，これの対偶を取って

$$\sigma\notin R^+ \;\Rightarrow\; \sigma\notin P_1.$$

従って

$$P\setminus R^+\subset P\setminus P_1=\left\{\sigma\in P\ ;\ \mathrm{mass}_{E,g}\left(\{\sigma\}\right)\le\frac{\gamma}{4}\right\}$$

となる．

$$\mathrm{mass}_{E,g}\left(\{\sigma\}\right)=\sup_{\tau\in Q;\,\tau\preceq\sigma}\int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)}w_\tau(x)dx$$

なので

$$\mathrm{mass}_{E,g}\left(P\setminus R^+\right)=\sup_{\sigma\in P\setminus R^+}\mathrm{mass}_{E,g}\left(\{\sigma\}\right)\le\frac{\gamma}{4}.$$

明らかに　$\gamma\sum_{\tau\in R}\lambda\left(I_\tau\right)\le\infty=C_5\lambda\left(E\right)$.

Case 2.3　$P_1\ne\emptyset,\ \lambda\left(E\right)<\infty$ の場合．

5 段階で示す．

Step 1　$\forall\sigma\in P_1$ に対して

$$1\le\#\left\{\tau\in Q;\ \tau\preceq\sigma,\ \int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)}w_\tau(x)dx>\frac{\gamma}{4}\right\}<\infty.$$

(Pr.) Case 2.2 より

$$\left\{\tau\in Q;\ \tau\preceq\sigma,\ \int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)}w_\tau(x)dx>\frac{\gamma}{4}\right\}\ne\emptyset$$

である．$\tau\in Q$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)}w_\tau(x)dx\\
&=\int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)}\lambda\left(J_\tau\right)w\big(\lambda\left(J_\tau\right)\left(x-x_\tau\right)\big)dx\\
&=\int_{\mathbb{R}}I_{E\cap g^{-1}(J_\tau)}\left(\frac{t}{\lambda\left(J_\tau\right)}+x_\tau\right)w(t)dt\\
&\qquad[(\because)\ 変数変換\ t=\lambda\left(J_\tau\right)\left(x-x_\tau\right)]\\
&=\int_{\lambda(J_\tau)(E\cap g^{-1}(J_\tau)-x_\tau)}w(t)dt\\
&\qquad\Big[(\because)\ \tfrac{t}{\lambda(J_\tau)}+x_\tau\in E\cap g^{-1}(J_\tau)\ \Leftrightarrow\ t\in\lambda\left(J_\tau\right)\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)-x_\tau\right)\Big],\\
&\quad\lambda\big(\lambda\left(J_\tau\right)\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)-x_\tau\right)\big)=\lambda\left(J_\tau\right)\lambda\big(E\cap g^{-1}(J_\tau)-x_\tau\big)\\
&\qquad\qquad=\lambda\left(J_\tau\right)\lambda\big(E\cap g^{-1}(J_\tau)\big)\le\lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\right)
\end{aligned}$$

なので

$$\exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ \lambda(J_\tau) < \delta \ \Rightarrow \ \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx \le \frac{\gamma}{4}.$$

これは

$$\left\{ \tau \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx > \frac{\gamma}{4} \right\} \subset \{\tau \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ \lambda(J_\tau) \ge \delta\}$$

を示唆する．ここで

$$\begin{aligned}
&\{\tau \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ \lambda(J_\tau) \ge \delta\} \\
&= \{(I, J) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D};\ \lambda(I)\lambda(J) = 1,\ \lambda(J) \ge \delta,\ J \subset J_\sigma,\ I_\sigma \subset I\} \\
&= \bigcup_{\frac{\log \delta}{\log 2} \le k \le k_\sigma} \left\{(I, J) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D};\ \lambda(J) = 2^k,\ \lambda(I) = 2^{-k},\ J \subset J_\sigma,\ I_\sigma \subset I\right\} \\
&\qquad \left[(\because)\ 2^k \ge \delta \Rightarrow k \ge \log_2 \delta = \tfrac{\log \delta}{\log 2},\ J \subset J_\sigma \Rightarrow \lambda(J) \le \lambda(J_\sigma) \Rightarrow 2^k \le 2^{k_\sigma}\right] \\
&= \bigcup_{\frac{\log \delta}{\log 2} \le k \le k_\sigma} \left\{\left(I(-k), J_\sigma^{s_1 \cdots s_{k_\sigma - k}}\right);\ (s_1, ..., s_{k_\sigma - k}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k_\sigma - k}\right\}
\end{aligned}$$

［$(\because)$ 命題 2.7 より, $\forall l \ge -k_\sigma$ に対して $\exists! I(l) \in \mathscr{D}$ s.t. $I_\sigma \subset I(l), \lambda(I(l)) = 2^l$.
命題 2.8 より，$J \subset J_\sigma$, $\lambda(J) = 2^k$ なる J と $J_\sigma^{s_1 \cdots s_{k_\sigma - k}}$ (ただし $(s_1, ..., s_{k_\sigma - k}) \in \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}^{k_\sigma - k}$) は 1 対 1 に対応している］

より

$$\#\left\{ \tau \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx > \frac{\gamma}{4} \right\} \le \sum_{\frac{\log \delta}{\log 2} \le k \le k_\sigma} 2^{k_\sigma - k} < \infty.$$

Step 2　各 $\sigma \in P_1$ に対して，Step 1 より

$$\left\{ \tau \in Q;\ \tau \preceq \sigma,\ \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx > \frac{\gamma}{4} \right\}$$

は空でない有限集合であるから，補題 2.10 よりこの集合の極小元が存在する．その 1 つを σ', すなわち

$$\bullet\ \sigma' \in Q,\ \sigma' \preceq \sigma,\ \int_{E \cap g^{-1}(J_{\sigma'})} w_{\sigma'}(x) dx > \frac{\gamma}{4}, \tag{25}$$

$$\bullet\ \nexists \tau \in Q \ \text{ s.t. } \begin{cases} \tau \preceq \sigma,\ \displaystyle\int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x) dx > \frac{\gamma}{4}, \\ \tau \preceq \sigma',\ \tau \ne \sigma' \end{cases} \tag{26}$$

とする．

$$R = \{\sigma';\ \sigma \in P_1\}$$

とおく．このとき

$$\sigma \in P_1 \Rightarrow \sigma' \preceq \sigma, \sigma' \in R \Rightarrow \sigma \in R^+$$

より，対偶をとって $\sigma \notin R^+ \Rightarrow \sigma \notin P_1$ であるから

$$\begin{aligned} P \setminus R^+ \subset P \setminus P_1 &= \left\{ \sigma \in P;\ \mathrm{mass}_{E,g}\left(\{\sigma\}\right) \leq \frac{\gamma}{4} \right\} \\ &= \left\{ \sigma \in P;\ \sup_{\tau \in Q;\, \tau \preceq \sigma} \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x)dx \leq \frac{\gamma}{4} \right\}. \end{aligned}$$

従って

$$\mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right) = \sup_{\sigma \in P \setminus R^+} \mathrm{mass}_{E,g}\left(\{\sigma\}\right) \leq \frac{\gamma}{4}.$$

以降，$\gamma \displaystyle\sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 \lambda\left(E\right)$ を示す.

Step 3　$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$R_k = \left\{ \tau \in R;\ \lambda\left(J_\tau\right) \lambda\Big(E \cap g^{-1}(J_\tau) \cap I_\tau^{(k)}\Big) \geq 2^{2k-9}\gamma \right\}$$

とする．ただし

$$I_\tau^{(k)} = \left[x_\tau - 2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right),\ x_\tau + 2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right)\right).$$

このとき，$R = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} R_k$ である.

(Pr.) まず，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\tau \in Q$ に対して

$$\begin{aligned} & x \in \mathbb{R} \setminus I_\tau^{(k)} \\ \Rightarrow\ & x < x_\tau - 2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right) \text{ または } x \geq x_\tau + 2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right) \\ \Rightarrow\ & x - x_\tau < -2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right) \text{ または } x - x_\tau \geq 2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right) \\ \Rightarrow\ & |x - x_\tau| \geq 2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right) \\ \Rightarrow\ & w_\tau(x) = \lambda\left(J_\tau\right) w\big(\lambda\left(J_\tau\right)(x - x_\tau)\big) \\ & \qquad = \lambda\left(J_\tau\right) w\big(\lambda\left(J_\tau\right)|x - x_\tau|\big) \quad [(\because)\ w(\cdot) \text{ は偶関数}] \\ & \qquad \leq \lambda\left(J_\tau\right) w\big(2^{k-1}\lambda\left(I_\tau\right)\lambda\left(J_\tau\right)\big) \quad [(\because)\ w(\cdot) \text{ は } [0,\infty) \text{ で単調減少}] \\ & \qquad = \lambda\left(J_\tau\right) w(2^{k-1}) \\ & \qquad = \lambda\left(J_\tau\right) \left(1 + 2^{k-1}\right)^{-3} \end{aligned}$$

であることに注意せよ．また，$I_\tau^{(0)} = I_\tau$, $I_\tau^{(k)} \nearrow \mathbb{R}$ $(k \to \infty)$ より

$$\mathbb{R} = I_\tau^{(0)} \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \left(I_\tau^{(k+1)} \setminus I_\tau^{(k)}\right)$$

にも注意せよ．$\tau \in R$ とする．このとき

$$\begin{cases} \bullet\ \displaystyle\int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x)dx > \frac{\gamma}{4}, \\ \bullet\ \exists \sigma \in P_1 \ \text{ s.t. } \ \tau \preceq \sigma. \end{cases}$$

上の注意より

$$\frac{\gamma}{4} < \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap\left(I_\tau^{(0)}\sqcup\bigsqcup_{k=0}^{\infty}\left(I_\tau^{(k+1)}\setminus I_\tau^{(k)}\right)\right)} w_\tau(x)dx \\
&= \int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}} w_\tau(x)dx + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap\left(I_\tau^{(k+1)}\setminus I_\tau^{(k)}\right)} w_\tau(x)dx \\
&\le \int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}} \lambda\left(J_\tau\right) w\bigl(\lambda\left(J_\tau\right)(x-x_\tau)\bigr)dx \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap\left(I_\tau^{(k+1)}\setminus I_\tau^{(k)}\right)} \lambda\left(J_\tau\right)\left(1+2^{k-1}\right)^{-3}dx \\
&\le \lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda\left(J_\tau\right)\left(1+2^{k-1}\right)^{-3}\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap\left(I_\tau^{(k+1)}\setminus I_\tau^{(k)}\right)\right) \\
&\le \lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda\left(J_\tau\right)\left(1+2^{k-1}\right)^{-3}\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(k+1)}\right).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\frac{1}{8}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+4}} = \frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{8}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma}{2^{k+4}} \\
&\quad < \lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda\left(J_\tau\right)\left(1+2^{k-1}\right)^{-3}\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(k+1)}\right).
\end{aligned}
$$

これは

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}\right) > \frac{\gamma}{8} = \frac{\gamma}{2^3} > \frac{\gamma}{2^9} \\
&\qquad \text{または } \lambda\left(J_\tau\right)\left(1+2^{k-1}\right)^{-3}\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(k+1)}\right) > \frac{\gamma}{2^{k+4}} \quad (\text{some} \quad k\ge 0),
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(0)}\right) > 2^{-9}\gamma \\
&\qquad \text{または } \lambda\left(J_\tau\right)\lambda\left(E\cap g^{-1}(J_\tau)\cap I_\tau^{(k+1)}\right) > \left(1+2^{k-1}\right)^{3}\cdot\frac{\gamma}{2^{k+4}} \\
&\qquad\qquad > \frac{2^{3k-3}}{2^{k+4}} = 2^{2(k+1)-9} \quad (\text{some} \quad k\ge 0)
\end{aligned}
$$

を示唆する．「$\exists k\ge 0$ s.t. $\tau\in R_k$」であるから $\tau\in\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty}R_k$, ゆえに $R\subset\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty}R_k$．$R_k$ の定義から $R=\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty}R_k$ となる．

Step 4 $\forall k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して，$\gamma\displaystyle\sum_{\tau\in R_k}\lambda\left(I_\tau\right)\le 2^{11-k}\lambda\left(E\right)$.

(Pr.) $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ を固定する．$R_k=\emptyset$ のときは

$$
\gamma\sum_{\tau\in R_k}\lambda\left(I_\tau\right) = 0 \le 2^{11-k}\lambda\left(E\right)
$$

であるので，以降 $R_k \neq \emptyset$ であるとする．

$n = \# R_k$ とする．P_1 の定義より $P_1 \subset P$ だから P_1 は有限集合，よって R もまた有限集合なので $1 \leq n < \infty$ である．

$\underline{\underline{\text{Step 4-1}}}$ $n = 1$ のとき．

$R_k = \{\tau_1\}$ とすると

$$\lambda\left(J_{\tau_1}\right)\lambda\left(E \cap g^{-1}(J_{\tau_1}) \cap I_{\tau_1}^{(k)}\right) \geq 2^{2k-9}\gamma$$

より

$$\begin{aligned}\gamma \sum_{\tau \in R_k} \lambda\left(I_\tau\right) = \gamma\lambda\left(I_{\tau_1}\right) &\leq 2^{9-2k}\lambda\left(J_{\tau_1}\right)\lambda\left(E \cap g^{-1}(J_{\tau_1}) \cap I_{\tau_1}^{(k)}\right)\lambda\left(I_{\tau_1}\right) \\ &\leq 2^{11-k} \cdot 2^{-2-k}\lambda(E) \quad [(\because)\ \lambda\left(J_{\tau_1}\right)\lambda\left(I_{\tau_1}\right) = 1\ ] \\ &\leq 2^{11-k}\lambda(E).\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Step 4-2}}}$ $n \geq 2$ のとき．

$R_k = \{\tau_j\,;\, 1 \leq j \leq n\}$ (ただし $k_{\tau_1} \leq k_{\tau_2} \leq \cdots \leq k_{\tau_n}$) とする．$q : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ を次のように定義する：

- $q(1) = 1$,
- $2 \leq l \leq n$ のとき
  $$q(l) = \min\left(\{l\} \cup \left\{1 \leq j < l\ ;\ q(j) = j\,,\, (I_{\tau_j}^{(k)} \times J_{\tau_j}) \cap (I_{\tau_l}^{(k)} \times J_{\tau_l}) \neq \emptyset\right\}\right).$$

ここで $(I_{\tau_j}^{(k)} \times J_{\tau_j}) \cap (I_{\tau_l}^{(k)} \times J_{\tau_l}) \neq \emptyset \Leftrightarrow I_{\tau_j}^{(k)} \cap I_{\tau_l}^{(k)} \neq \emptyset$ かつ $J_{\tau_j} \cap J_{\tau_l} \neq \emptyset$ に注意せよ．

$\underline{\underline{\text{Step 4-2-1}}}$

(a) $1 \leq q(l) \leq l$ $(1 \leq l \leq n)$,

(b) $q(q(l)) = q(l)$ $(1 \leq l \leq n)$, $I_{\tau_{q(l)}}^{(k)} \cap I_{\tau_l}^{(k)} \neq \emptyset$ $(1 \leq l \leq n)$,

(c) $I_{\tau_l} \subset I_{\tau_l}^{(k)} \subset I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}$ $(1 \leq l \leq n)$,

(d) $1 \leq j < l \leq n$, $q(j) = q(l)$ に対して

$$J_{\tau_j} \cap J_{\tau_{q(j)}} \neq \emptyset,\ J_{\tau_l} \cap J_{\tau_{q(j)}} \neq \emptyset,\ J_{\tau_j} \supset J_{\tau_{q(j)}},\ J_{\tau_l} \supset J_{\tau_{q(j)}},\ J_{\tau_j} \subset J_{\tau_l},\ I_{\tau_j} \cap I_{\tau_l} = \emptyset.$$

$(\because)$ (a) は，$q(\cdot)$ の定義より明らか.

(b) $l = 1$ のときは

$$q(q(1)) = q(1),\ I_{\tau_{q(1)}}^{(k)} \cap I_{\tau_1}^{(k)} = I_{\tau_1}^{(k)} \cap I_{\tau_1}^{(k)} = I_{\tau_1}^{(k)} \neq \emptyset.$$

$2 \leq l \leq n$ のときは

$$\begin{aligned}&\left\{1 \leq j < l;\ q(j) = j,\ (I_{\tau_j}^{(k)} \times J_{\tau_j}) \cap (I_{\tau_l}^{(k)} \times J_{\tau_l}) \neq \emptyset\right\} = \emptyset \\ &\Rightarrow\ q(l) = l \\ &\Rightarrow\ q(q(l)) = q(l),\ I_{\tau_{q(l)}}^{(k)} \cap I_{\tau_l}^{(k)} = I_{\tau_l}^{(k)} \cap I_{\tau_l}^{(k)} = I_{\tau_l}^{(k)} \neq \emptyset, \\ &\left\{1 \leq j < l;\ q(j) = j,\ (I_{\tau_j}^{(k)} \times J_{\tau_j}) \cap (I_{\tau_l}^{(k)} \times J_{\tau_l}) \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow\ q(q(l)) = q(l),\ I_{\tau_{q(l)}}^{(k)} \cap I_{\tau_l}^{(k)} \neq \emptyset.\end{aligned}$$

(c) $1 \leq l \leq n$ とする．$I_{\tau_l} = I_{\tau_l}^{(0)} \subset I_{\tau_l}^{(k)}$ は $I_{\tau_l}^{(k)}$ の定義より明らか．$I_{\tau_l}^{(k)} \subset I_{\tau_{q(k)}}^{(k+2)}$ を示す．まず，

$$\begin{aligned}
1 \leq q(l) \leq l \leq n \ &\Rightarrow\ k_{\tau_{q(l)}} \leq k_{\tau_l} \\
&\Rightarrow\ \lambda\left(I_{\tau_l}\right) = 2^{-k_{\tau_l}} \leq 2^{-k_{\tau_{q(l)}}} = \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}\right) \\
&\Rightarrow\ \lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) = 2^k \lambda\left(I_{\tau_l}\right) \leq 2^k \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}\right) = \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

(b) より $\exists x \in I_{\tau_{q(l)}}^{(k)} \cap I_{\tau_l}^{(k)}$ なので

$$\begin{aligned}
x &\in \left[x_{\tau_{q(l)}} - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right),\, x_{\tau_{q(l)}} + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right)\right), \\
x &\in \left[x_{\tau_l} - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right),\, x_{\tau_l} + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right)\right).
\end{aligned}$$

今，$y \in I_{\tau_l}^{(k)}$ とすると，

$$y \in \left[x_{\tau_l} - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right),\, x_{\tau_l} + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right)\right)$$

なので

$$\begin{aligned}
y = (y - x_{\tau_l}) + x_{\tau_l} &< \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + (x_{\tau_l} - x) + x \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + x \\
&= \lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + x \\
&< \lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + x_{\tau_{q(l)}} + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right) \\
&\leq x_{\tau_{q(l)}} + \frac{3}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right) \\
&= x_{\tau_{q(l)}} + \frac{3}{2} \cdot 2^k \cdot \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}\right) \\
&< x_{\tau_{q(l)}} + \frac{1}{2} \cdot 2^{k+2} \cdot \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}\right) \\
&= x_{\tau_{q(l)}} + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}\right), \\
y = (y - x_{\tau_l}) + x_{\tau_l} &\geq -\frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + (x_{\tau_l} - x) + x \\
&> -\frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + x \\
&= -\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + x \\
&\geq -\lambda\left(I_{\tau_l}^{(k)}\right) + x_{\tau_{q(l)}} - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right) \\
&\geq x_{\tau_{q(l)}} - \frac{3}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k)}\right) \\
&= x_{\tau_{q(l)}} - \frac{3}{2} \cdot 2^k \cdot \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}\right) \\
&> x_{\tau_{q(l)}} - \frac{1}{2} \cdot 2^{k+2} \cdot \lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}\right) \\
&= x_{\tau_{q(l)}} - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}\right).
\end{aligned}$$

まとめると，

$$y \in \left[x_{\tau_{q(l)}} - \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}\right),\, x_{\tau_{q(l)}} + \frac{1}{2}\lambda\left(I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}\right)\right) = I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}.$$

従って，$I_{\tau_l}^{(k)} \subset I_{\tau_{q(l)}}^{(k+2)}$．

(d) $1 \leq j < l \leq n$, $q(j) = q(l)$ とする．$l > j \geq q(j) = q(l)$ より

$$\begin{aligned} &J_{\tau_{q(j)}} \cap J_{\tau_l} = J_{\tau_{q(l)}} \cap J_{\tau_l} \neq \emptyset \quad [(\because)\ q(\cdot) \text{ の定義}], \\ &q(j) = j \Rightarrow J_{\tau_{q(j)}} \cap J_{\tau_j} = J_{\tau_j} \cap J_{\tau_j} = J_{\tau_j} \neq \emptyset, \\ &q(j) < j \Rightarrow J_{\tau_{q(j)}} \cap J_{\tau_j} \neq \emptyset \end{aligned} \tag{27}$$

となる．$k_{\tau_l} \geq k_{\tau_j} \geq k_{\tau_{q(j)}} = k_{\tau_{q(l)}}$ より

$$\begin{array}{ccccc} 2^{k_{\tau_{q(j)}}} & \leq & 2^{k_{\tau_j}} & \leq & 2^{k_{\tau_l}} \\ \| & & \| & & \| \\ \lambda\left(J_{\tau_{q(j)}}\right) & & \lambda\left(J_{\tau_j}\right) & & \lambda\left(J_{\tau_l}\right). \end{array}$$

命題 2.6 と (27) より

$$J_{\tau_{q(j)}} \subset J_{\tau_j},\ J_{\tau_{q(j)}} \subset J_{\tau_l}.$$

よって $J_{\tau_j} \cap J_{\tau_l} \supset J_{\tau_{q(j)}} \supsetneq \emptyset$ となるから，命題 2.6 より $J_{\tau_j} \subset J_{\tau_l}$．

$\lambda\left(I_{\tau_j}\right) = 2^{-k_{\tau_j}} \geq 2^{-k_{\tau_l}} = \lambda\left(I_{\tau_l}\right)$ より，命題 2.6 から

$$I_{\tau_l} \subset I_{\tau_j} \text{ または } I_{\tau_l} \cap I_{\tau_j} = \emptyset.$$

今，$I_{\tau_l} \cap I_{\tau_j} \neq \emptyset$ と仮定すると，$I_{\tau_l} \subset I_{\tau_j}$ であるから，$J_{\tau_j} \subset J_{\tau_l}$ と合わせて $\tau_j \preceq \tau_l$．$\tau_j, \tau_l \in R$ より

$$\begin{cases} \bullet \displaystyle\int_{E \cap g^{-1}(J_{\tau_j})} w_{\tau_j}(x)dx > \frac{\gamma}{4},\ \int_{E \cap g^{-1}(J_{\tau_l})} w_{\tau_l}(x)dx > \frac{\gamma}{4}, \\ \bullet\ \exists \sigma_j,\ \exists \sigma_l \in P_1 \text{ s.t. } \tau_j \preceq \sigma_j,\ \tau_l \preceq \sigma_l. \end{cases}$$

$\tau_j \preceq \tau_l$, $\tau_l \preceq \sigma_l$ より $\tau_j \preceq \sigma_l$ であるから

$$\tau_j, \tau_l \in \left\{\tau \in Q;\ \tau \preceq \sigma_l,\ \int_{E \cap g^{-1}(J_\tau)} w_\tau(x)dx > \frac{\gamma}{4}\right\}.$$

$\tau_j \preceq \tau_l$ で，$1 \leq j < l \leq n$ より $\tau_j \neq \tau_l$．これは τ_l がこの集合の極小元であることに反する．よって $I_{\tau_l} \cap I_{\tau_j} = \emptyset$ でなければならない．

Step 4-2-2 $M = \{q(j);\ 1 \leq j \leq n\}$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{\tau \in R_k} \lambda\left(I_\tau\right) &= \gamma \sum_{j=1}^{n} \lambda\left(I_{\tau_j}\right) \\ &= \gamma \sum_{m \in M} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n; \\ q(j)=m}} \lambda\left(I_{\tau_j}\right) \\ &= \gamma \sum_{m \in M} \lambda\Big(\bigsqcup_{\substack{1 \leq j \leq n; \\ q(j)=m}} I_{\tau_j}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\Big[(\because)\ \text{Step 4-2-1 の (d) より } \{I_{\tau_j};\, 1 \le j \le n\,,\, q(j) = m\} \text{ は互いに素}\Big] \\
&\le \gamma \sum_{m \in M} \lambda\left(I_{\tau_m}^{(k+2)}\right) \\
&\qquad\left[\begin{array}{l} (\because)\ \text{Step 4-2-1 (c) より，} 1 \le j \le n,\, q(j) = m \text{ に対して} \\ \quad I_{\tau_j} \subset I_{\tau_{q(j)}}^{(k+2)} = I_{\tau_m}^{(k+2)} \text{ なので } \bigsqcup_{\substack{1 \le j \le n;\\ q(j)=m}} I_{\tau_j} \subset I_{\tau_m}^{(k+2)} \end{array}\right] \\
&= \gamma \sum_{m \in M} 2^{k+2} \lambda\left(I_{\tau_m}\right) \\
&= 2^{k+2} \sum_{m \in M} \lambda\left(I_{\tau_m}\right) \gamma \\
&\le 2^{k+2} \sum_{m \in M} \lambda\left(I_{\tau_m}\right) \cdot 2^{9-2k} \lambda\left(J_{\tau_m}\right) \lambda\left(E \cap g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)}\right) \\
&\qquad[(\because)\ \tau_m \in R_k \ \Rightarrow\ \lambda\left(J_{\tau_m}\right) \lambda\left(E \cap g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)}\right) \ge 2^{2k-9}\gamma] \\
&= 2^{11-k} \sum_{m \in M} \lambda\left(E \cap g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)}\right) \quad [(\because)\ \lambda\left(I_{\tau_m}\right) \lambda\left(J_{\tau_m}\right) = 1] \\
&= 2^{11-k} \lambda\left(E \cap \left(\bigsqcup_{m \in M} (g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)})\right)\right) \\
&\qquad\left[\begin{array}{l} (\because)\ \{g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)};\, m \in M\} \text{ は互いに素である．なぜなら} \\ l,\, m \in M,\, l < m \text{ に対して} \\ \qquad \left(g^{-1}(J_{\tau_l}) \cap I_{\tau_l}^{(k)}\right) \cap \left(g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)}\right) \ne \emptyset \\ \qquad \Rightarrow\ \exists x \in \left(g^{-1}(J_{\tau_l}) \cap I_{\tau_l}^{(k)}\right) \cap \left(g^{-1}(J_{\tau_m}) \cap I_{\tau_m}^{(k)}\right) \\ \qquad \Rightarrow\ g(x) \in J_{\tau_l} \cap J_{\tau_m},\ x \in I_{\tau_l}^{(k)} \cap I_{\tau_m}^{(k)} \\ \qquad \Rightarrow\ (x, g(x)) \in \left(I_{\tau_l}^{(k)} \times J_{\tau_l}\right) \cap \left(I_{\tau_m}^{(k)} \times J_{\tau_m}\right) \\ \qquad \Rightarrow\ \left(I_{\tau_l}^{(k)} \times J_{\tau_l}\right) \cap \left(I_{\tau_m}^{(k)} \times J_{\tau_m}\right) \ne \emptyset \\ \qquad \Rightarrow\ q(m) \le l \ \ [(\because)\ l < m\,,\, q(l) = l \text{ と } q(\cdot) \text{ の定義}] \\ \\ \text{一方 } m \in M \text{ より } q(m) = m > l.\ \text{これは矛盾である} \end{array}\right] \\
&\le 2^{11-k} \lambda(E)\,.
\end{aligned}
$$

<u>Step 5</u> Step 3 と Step 4 より

$$
\begin{aligned}
\gamma \sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) &\le \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau \in R_k} \lambda\left(I_\tau\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma \sum_{\tau \in R_k} \lambda\left(I_\tau\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{11-k} \lambda(E) \\
&= \frac{2^{11}}{1 - \frac{1}{2}} \lambda(E) = 2^{12} \lambda(E) = C_5 \lambda(E)\,.
\end{aligned}
$$

□

補題 2.18. $P \subset Q$ は有限集合，$f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ は $\|f\|_2 = 1$ とする．このとき

$$
\gamma \ge \mathrm{energy}_f(P) \ \Rightarrow\ \exists R \subset Q \ \text{ s.t. } \begin{cases} \gamma^2 \displaystyle\sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) \le C_6, \\ \mathrm{energy}_f\left(P \setminus R^+\right) \le \dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}
$$

ただし，$C_6 = 4C_3(1+4\sqrt{2C_4})$.

証明 $P \subset Q$ は有限集合，$f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ は $\|f\|_2 = 1$ とする．

<u>Case 1</u> $\operatorname{energy}_f(P) = 0$ の場合．

$\forall\gamma \geq 0$ に対して $\gamma \geq \operatorname{energy}_f(P)$ である．$R = \emptyset$ と取ると

$$\gamma^2 \sum_{\tau\in R} \lambda(I_\tau) = 0 \leq C_6.$$

$R^+ = \emptyset$ なので，$\operatorname{energy}_f\left(P \setminus R^+\right) = \operatorname{energy}_f(P) = 0 \leq \dfrac{\gamma}{2}$.

<u>Case 2</u> $\operatorname{energy}_f(P) \neq 0$ の場合．

energy の定義より $P \neq \emptyset$ に注意せよ．以下，2 段階で示す．

<u>Step 1</u> まず

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{energy}_f(P) &= \sup_{\tau\in Q}\left(\lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P\cap T_\tau)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow\ \exists\tau\in Q\ \ \text{s.t.}\ \ \Delta_f(P\cap T_\tau) > 0 \\ &\Rightarrow\ P\cap T_\tau \neq \emptyset \quad [(\because)\ \Delta_f(\cdot)\text{ の定義}] \end{aligned}$$

である．

$\mathscr{P}_0(P) = \{L \subset P;\ L \neq \emptyset\}$ とおく．P は有限集合より $\#\mathscr{P}_0(P) = 2^{\#P} - 1 < \infty$. $\mathscr{P}_1(P) = \{L \in \mathscr{P}_0(P);\ \exists\tau\in Q\ \ \text{s.t.}\ \ L = P\cap T_\tau\}$ とすると，上で述べたことから $0 < \#\mathscr{P}_1(P) < \infty$. $L \in \mathscr{P}_1(P)$ に対して

$$Q_L = \{\tau \in Q;\ L = P\cap T_\tau\}$$

とおく．このとき $\sup_{\tau\in Q_L} k_\tau < \infty$ である [$(\because)$ 各 $\tau \in Q_L$ に対して，$\sigma \in L \Rightarrow \sigma \in P\cap T_\tau \Rightarrow \sigma \in T_\tau \Rightarrow \tau \preceq \sigma \Rightarrow J_\tau \subset J_\sigma \Rightarrow k_\tau \leq k_\sigma$ より $k_\tau \leq \min_{\sigma\in L} k_\sigma$. これは $\sup_{\tau\in Q_L} k_\tau \leq \min_{\sigma\in L} k_\sigma < \infty$ を示している].

$\tau(L) \in Q_L$ を，$k_\tau \leq k_{\tau(L)}$ $(\forall\tau\in Q_L)$ を満たすようにとる．このとき

$$P\cap T_{\tau(L)} = L = P\cap T_\tau \quad (\forall\tau\in Q)$$

に注意せよ．

今，

$$\widetilde{R} = \{\tau(L);\ L \in \mathscr{P}_1(P)\}$$

とおく．$\widetilde{R}$ は空でない Q の有限集合で

$$\tau\in Q,\ P\cap T_\tau \neq \emptyset\ \Rightarrow\ \exists\tau'\in\widetilde{R}\ \ \text{s.t.}\ \ \begin{cases} \bullet\ P\cap T_\tau = P\cap T_{\tau'}, \\ \bullet\ k_\tau \leq k_{\tau'} \end{cases} \tag{28}$$

を満たす．実際

$$\begin{aligned} \tau\in Q,\ P\cap T_\tau \neq \emptyset\ &\Rightarrow\ P\cap T_\tau \in \mathscr{P}_0(P) \\ &\Rightarrow\ P\cap T_\tau \in \mathscr{P}_1(P) \\ &\Rightarrow\ \tau \in Q_{P\cap T_\tau} \\ &\Rightarrow\ k_\tau \leq k_{\tau(P\cap T_\tau)},\ P\cap T_\tau = P\cap T_{\tau(P\cap T_\tau)} \end{aligned}$$

より，$\tau' = \tau(P \cap T_\tau)$ と取ればよい．

Step 2　$\gamma \geq \mathrm{energy}_f(P)$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{energy}_f(P) \leq \gamma \;&\Leftrightarrow\; \sup_{\tau \in Q} \bigl(\lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P \cap T_\tau)\bigr)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \\
&\Leftrightarrow\; \lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P \cap T_\tau) \leq \gamma^2 \quad (\forall \tau \in Q)
\end{aligned}
$$

であって，$\mathrm{energy}_f(P) > 0$ だから $\gamma > 0$ である．

Step 2-1　$\left\{\tau \in \widetilde{R};\ \Delta_f(P \cap T_\tau) \geq \frac{\gamma^2}{4}\lambda(I_\tau)\right\} = \emptyset$ のとき．

このときは

$$
\Delta_f(P \cap T_\tau) < \frac{\gamma^2}{4}\lambda(I_\tau) \quad (\forall \tau \in \widetilde{R})
$$

である．両辺を $\lambda(J_\tau)$ 倍して

$$
\lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P \cap T_\tau) < \frac{\gamma^2}{4} \quad (\forall \tau \in \widetilde{R}).
$$

これと (28) より

$$
\begin{aligned}
P \cap T_\tau \neq \emptyset \;&\Rightarrow\; \exists \tau' \in \widetilde{R} \ \text{ s.t. } \begin{cases} \bullet\ P \cap T_\tau = P \cap T_{\tau'}, \\ \bullet\ k_\tau \leq k_{\tau'} \end{cases} \\
&\Rightarrow\; \lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P \cap T_\tau) = 2^{k_\tau}\Delta_f(P \cap T_{\tau'}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leq 2^{k_{\tau'}}\Delta_f(P \cap T_{\tau'}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \lambda(J_{\tau'})\,\Delta_f(P \cap T_{\tau'}) < \frac{\gamma^2}{4}.
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\mathrm{energy}_f(P) &= \sup_{\tau \in Q} \bigl(\lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P \cap T_\tau)\bigr)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\tau \in Q;\, P \cap T_\tau \neq \emptyset} \bigl(\lambda(J_\tau)\,\Delta_f(P \cap T_\tau)\bigr)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}
$$

$R = \emptyset$ と取ると，$\gamma^2 \sum_{\tau \in R} \lambda(I_\tau) = 0 \leq C_6$ ．$R^+ = \emptyset$ なので，$\mathrm{energy}_f(P \setminus R^+) = \mathrm{energy}_f(P) \leq \frac{\gamma}{2}$.

Step 2-2　$\left\{\tau \in \widetilde{R};\ \Delta_f(P \cap T_\tau) \geq \frac{\gamma^2}{4}\lambda(I_\tau)\right\} \neq \emptyset$ のとき．

$P_0 = P$, $R_0 = \left\{\tau \in \widetilde{R};\ \Delta_f(P \cap T_\tau) \geq \frac{\gamma^2}{4}\lambda(I_\tau)\right\}$ とする．$R_0 \neq \emptyset$ である．$\tau_0 \in R_0 \subset \widetilde{R}$ を

$$
y_{\tau_0} \leq y_\tau \quad (\tau \in R_0)
$$

を満たすものとしてとる．実際，次のようにして τ_0 を定めればよい：$R_0 \ni \tau = (I_\tau, J_\tau)$ に対して $y_\tau = \mathrm{c}(J_\tau) \in \mathbb{R}$. $\widetilde{R}$ が有限集合だから R_0 もまた有限集合であるので，$\tau \in R_0$ に対応する $y_\tau \in \mathbb{R}$ も有限個しかない．よって $\min_{\tau \in R_0} y_\tau$ が存在する．$\tau_0 \in R_0$ を $y_{\tau_0} = \min_{\tau \in R_0} y_\tau$ と取れば，これが求めるものである．

$$
P_1 = P_0 \setminus \{\tau_0\}^+ = \bigl\{\sigma \in P_0;\ \sigma \notin \{\tau_0\}^+\bigr\} = \{\sigma \in P_0;\ \tau_0 \not\preceq \sigma\}
$$

とおく．このとき $\emptyset \subset P_1 \subsetneq P_0 = P$ である $[(\because)\ \Delta_f(P_0 \cap T_{\tau_0}) \geq \frac{\gamma^2}{4}\lambda(I_{\tau_0}) > 0$ より $P_0 \cap T_{\tau_0} \neq \emptyset$. $T_{\tau_0} \subset \{\tau_0\}^+$ より $P_1 = P_0 \setminus \{\tau_0\}^+ \subset P_0 \setminus T_{\tau_0} \subsetneq (P_0 \cap T_{\tau_0}) \cup P_0 \setminus T_{\tau_0} = P_0]$.

$$R_1 = \left\{\tau \in \widetilde{R};\ \Delta_f\left(P_1 \cap T_\tau\right) \geq \tfrac{\gamma^2}{4}\lambda\left(I_\tau\right)\right\}$$

とする．$\Delta_f\left(P_1 \cap T_\tau\right) \leq \Delta_f\left(P_0 \cap T_\tau\right)$ [(∵) 補題 2.14(i)] なので，$\emptyset \subset R_1 \subset R_0 \subset \widetilde{R}$ である．

$R_1 = \emptyset$ のときは，$R = \{\tau_0\}$ とする．

$R_1 \neq \emptyset$ のときは $\tau_1 \in R_1 \subset \widetilde{R}$ を

$$y_{\tau_1} \leq y_\tau \quad (\tau \in R_1)$$

と取り [τ_0 の取り方と同様に考えればよい]，

$$P_2 = P_1 \setminus \{\tau_1\}^+$$

とおく．P_2 の定め方から，$\emptyset \subset P_2 \subsetneq P_1 \subsetneq P_0 = P$ である．

$$R_2 = \left\{\tau \in \widetilde{R};\ \Delta_f\left(P_2 \cap T_\tau\right) \geq \frac{\gamma^2}{4}\lambda\left(I_\tau\right)\right\}$$

とする．$\Delta_f\left(P_2 \cap T_\tau\right) \leq \Delta_f\left(P_1 \cap T_\tau\right)$ なので，$\emptyset \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0 \subset \widetilde{R}$ である．

$R_2 = \emptyset$ のときは，$R = \{\tau_0,\ \tau_1\}$ とする．

$R_2 \neq \emptyset$ のときは $\tau_2 \in R_2 \subset \widetilde{R}$ を

$$y_{\tau_2} \leq y_\tau \quad (\tau \in R_2)$$

と取り [τ_0，τ_1 の取り方と同様に考えればよい]，

$$P_3 = P_2 \setminus \{\tau_2\}^+$$

とおく．P_3 の定め方から，$\emptyset \subset P_3 \subsetneq P_2 \subsetneq P_1 \subsetneq P_0 = P$ である．

以下，これを繰り返すと

$$\exists n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \emptyset = P_n \subsetneq P_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq P_1 \subsetneq P_0 = P.$$

ただし

- $R_i = \left\{\tau \in \widetilde{R};\ \Delta_f\left(P_i \cap T_\tau\right) \geq \dfrac{\gamma^2}{4}\lambda\left(I_\tau\right)\right\} \quad (0 \leq i \leq n),$ (29)
- $\tau_i \in R_i$ は $y_{\tau_i} \leq y_\tau$ $(\tau \in R_i)$ を満たす $(0 \leq i \leq n-1),$ (30)
- $P_{i+1} = P_i \setminus \{\tau_i\}^+ \quad (0 \leq i \leq n-1),$ (31)
- $R = \{\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}\}$ (32)

である．$P_{i+1} \subset P_i$ より $R_{i+1} \subset R_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ に注意せよ．また，$\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ は相異なる元である [(∵) 各 $0 \leq i \leq n-1$ に対して

$$P_{i+1} \cap T_{\tau_i} = P_i \cap \left(\{\tau_i\}^+\right)^{\complement} \cap T_{\tau_i} = \emptyset \quad [(\because)\ T_{\tau_i} \subset \{\tau_i\}^+]$$

より $\Delta_f\left(P_{i+1} \cap T_{\tau_i}\right) = 0$ であるから，$\tau_i \notin R_{i+1}$．一方，$0 \leq i < j \leq n-1$ に対して，$i+1 \leq j$ より $\tau_j \in R_j \subset R_{i+1}$ なので $\tau_i \neq \tau_j$]．

さらに，$P \setminus R^+ = P_n$ である．なぜならば，$n = 1$ のときは $P_1 = P_0 \setminus \{\tau_0\}^+ = P_0 \setminus R^+ = P \setminus R^+$．$n \geq 2$ のときは

$$P_1 = P_0 \setminus \{\tau_0\}^+ = P \setminus \{\tau_0\}^+.$$

$0 \leq i \leq n-2$ に対して $P_{i+1} = P \setminus \{\tau_0, ..., \tau_i\}^+$ とすると

$$\begin{aligned}
P_{i+2} = P_{(i+1)+1} &= P_{i+1} \setminus \{\tau_{i+1}\}^+ \\
&= \left(P \setminus \{\tau_0, ..., \tau_i\}^+\right) \setminus \{\tau_{i+1}\}^+ \\
&= P \setminus \left(\{\tau_0, ..., \tau_i\}^+ \cup \{\tau_{i+1}\}^+\right) \\
&= P \setminus \left(\{\tau_0, ..., \tau_i, \tau_{i+1}\}^+ \right. \\
&\qquad \left[\begin{array}{l}
(\because) \quad \sigma \in \{\tau_0, ..., \tau_i\}^+ \cup \{\tau_{i+1}\}^+ \\
\quad \Leftrightarrow \sigma \in \{\tau_0, ..., \tau_i\}^+ \text{ or } \sigma \in \{\tau_{i+1}\}^+ \\
\quad \Leftrightarrow \tau_0 \preceq \sigma \text{ or } \cdots \text{ or } \tau_i \preceq \sigma \text{ or } \tau_{i+1} \preceq \sigma \\
\quad \Leftrightarrow \sigma \in \{\tau_0, ..., \tau_i, \tau_{i+1}\}^+
\end{array}\right].
\end{aligned}$$

よって，$P_n = P \setminus \{\tau_0, ..., \tau_{i-1}\}^+ = P \setminus R^+$.

$P_n = \emptyset$ より $P \setminus R^+ = \emptyset$ となるから

$$\operatorname{energy}_f\left(P \setminus R^+\right) = 0 \leq \frac{\gamma}{2}.$$

以下で，$\gamma^2 \sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_6$ を示す．

$P'_j = P_j \cap T_{\tau_j}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ とおくと，$P'_j \subset P_j \setminus P_{j+1}$ $(0 \leq j \leq n-1)$．なぜならば，$T_{\tau_j} \subset \{\tau_j\}^+$ より

$$\begin{aligned}
P_j \setminus P_{j+1} &= P_j \cap P_{j+1}^{\complement} \\
&= P_j \cap \left(P_j \cap (\{\tau_j\}^+)^{\complement}\right)^{\complement} \\
&= P_j \cap \left(P_j^{\complement} \cup \{\tau_j\}^+\right) \\
&= \left(P_j \cap P_j^{\complement}\right) \cup \left(P_j \cap \{\tau_j\}^+\right) \\
&\supset P_j \cap T_{\tau_j} = P'_j.
\end{aligned}$$

従って，$\{P'_j\}_{j=0}^{n-1}$ は互いに素である．

$$P' := \bigsqcup_{j=0}^{n-1} P'_j \subset \bigsqcup_{j=0}^{n-1} (P_j \setminus P_{j+1}) = P_0 = P \tag{33}$$

とおく．以降 7 段階で示す．

Step 2-2-1　$\sigma \in P'$, $0 \leq j \leq n-1$, $J_{\tau_j} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} \Rightarrow I_\sigma \cap I_{\tau_j} = \emptyset$.

(Pr.) $\sigma \in P'$, $0 \leq j \leq n-1$, $J_{\tau_j} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}}$ とする．$0 \leq l \leq n-1$ を，$\sigma \in P'_l = P_l \cap T_{\tau_l}$ を満たすものとする．このとき $J_{\tau_l}^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}}$ $[(\because)\ \sigma \in T_{\tau_l}]$．$y_{\tau_j} \in J_{\tau_j} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}}$, $y_{\tau_l} \in J_{\tau_l}^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}}$ より，$y_{\tau_j} < y_{\tau_l}$.

$j \geq l$ と仮定すると $R_j \subset R_l$ である．$\tau_l \in R_l$, $\tau_j \in R_j \subset R_l$ と (30) 式より $y_{\tau_l} \leq y_{\tau_j}$ となり，$y_{\tau_j} < y_{\tau_l}$ に矛盾する．ゆえに $j < l$ である．

$j < l$ より $j+1 \leq l$ だから，$P_{j+1} \supset P_l \ni \sigma$. $P_{j+1} = P_j \setminus \{\tau_j\}^+$ より $\tau_j \not\preceq \sigma$. $I_\sigma \subset I_{\tau_j}$ と仮定すると，$J_{\tau_j} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} \subset J_\sigma$ より $\tau_j \preceq \sigma$ となるから矛盾が生じる．ゆえに $I_\sigma \not\subset I_{\tau_j}$ である．

一方

$$J_{\tau_j} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} \ \Rightarrow J_{\tau_j} \subset J_\sigma$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda\left(J_{\tau_j}\right) \leq \lambda\left(J_\sigma\right) \\
&\Rightarrow \lambda\left(I_\sigma\right) = \frac{1}{\lambda\left(J_\sigma\right)} \leq \frac{1}{\lambda\left(J_{\tau_j}\right)} = \lambda\left(I_{\tau_j}\right) \\
&\Rightarrow I_\sigma \subset I_{\tau_j} \text{ or } I_\sigma \cap I_{\tau_j} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

ゆえに $I_\sigma \cap I_{\tau_j} = \emptyset$ が分かる．

Step 2-2-2 $\sigma,\ \tau \in P',\ \sigma \neq \tau,\ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} \neq \emptyset \Rightarrow I_\sigma \cap I_\tau = \emptyset$.

(Pr.) $J_\sigma = J_\tau$ のときは，$\sigma \neq \tau$ より $I_\sigma \neq I_\tau$.

$$
\lambda\left(I_\sigma\right) = \frac{1}{\lambda\left(J_\sigma\right)} = \frac{1}{\lambda\left(J_\tau\right)} = \lambda\left(I_\tau\right)
$$

と，命題 2.6 より $I_\sigma \cap I_\tau = \emptyset$.

$J_\sigma \neq J_\tau$ のときは，まず

$$
\begin{aligned}
J_\sigma \cap J_\tau \supset J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} \neq \emptyset \ &\Rightarrow J_\sigma \cap J_\tau \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \begin{cases} J_\sigma \subset J_\tau & (\lambda\left(J_\sigma\right) < \lambda\left(J_\tau\right) \text{ のとき}), \\ J_\sigma \supset J_\tau & (\lambda\left(J_\sigma\right) > \lambda\left(J_\tau\right) \text{ のとき}) \end{cases} \\
&\quad [\lambda\left(J_\sigma\right) = \lambda\left(J_\tau\right) \text{ のときは } J_\sigma = J_\tau \text{となり矛盾が生じる}].
\end{aligned}
$$

$\lambda\left(J_\sigma\right) < \lambda\left(J_\tau\right)$ とする．$\lambda\left(J_\sigma\right) \leq \frac{1}{2}\lambda\left(J_\tau\right) = \lambda\left(J_\tau^{\mathrm{l}}\right) = \lambda\left(J_\tau^{\mathrm{r}}\right)$, $J_\sigma \subset J_\tau$ より

$$
\emptyset \subsetneq J_\sigma = J_\sigma \cap J_\tau = J_\sigma \cap \left(J_\tau^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{r}}\right) = \left(J_\sigma \cap J_\tau^{\mathrm{l}}\right) \cup \left(J_\sigma \cap J_\tau^{\mathrm{r}}\right)
$$

であるから，$J_\sigma \cap J_\tau^{\mathrm{l}} \neq \emptyset$ または $J_\sigma \cap J_\tau^{\mathrm{r}} \neq \emptyset$. 命題 2.6 より $J_\sigma \subset J_\tau^{\mathrm{l}}$ または $J_\sigma \subset J_\tau^{\mathrm{r}}$. $J_\sigma \subset J_\tau^{\mathrm{r}}$ と仮定すると，$J_\sigma^{\mathrm{l}} \subset J_\tau^{\mathrm{r}}$ より

$$
\emptyset \neq J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} \subset J_\tau^{\mathrm{r}} \cap J_\tau^{\mathrm{l}} = \emptyset
$$

となって矛盾が生じるから，$J_\sigma \subset J_\tau^{\mathrm{l}}$ である．

$\sigma \in P'$ より，$0 \leq \exists j \leq n-1$ s.t. $\sigma \in P_j' = P_j \cap T_{\tau_j}$. このとき，$\tau_j \preceq \sigma$ より $J_{\tau_j} \subset J_\sigma$, $I_\sigma \subset I_{\tau_j}$. $J_\sigma \subset J_\tau^{\mathrm{l}}$ より $J_{\tau_j} \subset J_\tau^{\mathrm{l}}$. $\tau \in P'$ だから，Step 2-2-1 より $I_\tau \cap I_{\tau_j} = \emptyset$. 従って $I_\tau \cap I_\sigma \subset I_\tau \cap I_{\tau_j} = \emptyset$.

$\lambda\left(J_\tau\right) < \lambda\left(J_\sigma\right)$ の場合は，上記の σ と τ の役割を入れ替えることで $I_\sigma \cap I_\tau = \emptyset$ が分かる．

Step 2-2-3 簡単のため，$\alpha := \Delta_f\left(P'\right)$ とおく．このとき

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 \sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) &= \gamma^2 \sum_{0 \leq j \leq n-1} \lambda\left(I_{\tau_j}\right) \\
&= \sum_{0 \leq j \leq n-1} \gamma^2 \lambda\left(I_{\tau_j}\right) \\
&\leq \sum_{0 \leq j \leq n-1} 4\Delta_f\left(P_j \cap T_{\tau_j}\right) \\
&\qquad \left[(\because)\ \tau_j \in R_j \ \Rightarrow\ \Delta_f\left(P_j \cap T_{\tau_j}\right) \geq \tfrac{\gamma^2}{4}\lambda\left(I_{\tau_j}\right)\right] \\
&= 4 \sum_{0 \leq j \leq n-1} \Delta_f\left(P_j'\right) \\
&= 4 \sum_{0 \leq j \leq n-1} \sum_{\sigma \in P_j'} \left|\langle f, \phi_\sigma \rangle\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4 \sum_{\sigma \in P'} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \right|^2 \quad \left[(\because)\ (33)\ \text{式より}\ P' = \textstyle\bigsqcup_{j=0}^{n-1} P'_j\right] \\
&= 4\Delta_f(P') = 4\alpha. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

α^2 を評価する：

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= \Delta_f(P')^2 \\
&\leq \left\| \sum_{\sigma \in P'} \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma \right\|_2^2 \|f\|_2^2 \quad [(\because)\ \text{補題 2.16(i)}] \\
&= \left\| \sum_{\sigma \in P'} \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma \right\|_2^2 \quad [(\because)\ \text{仮定より}\ \|f\|_2 = 1] \\
&= \left\langle \sum_{\sigma \in P'} \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma, \sum_{\tau \in P'} \langle f, \phi_\tau \rangle \phi_\tau \right\rangle \\
&= \sum_{\sigma \in P'} \sum_{\tau \in P'} \Big\langle \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma, \langle f, \phi_\tau \rangle \phi_\tau \Big\rangle \\
&= \sum_{\sigma, \tau \in P'} \langle f, \phi_\sigma \rangle \overline{\langle f, \phi_\tau \rangle} \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \\
&= \sum_{\sigma, \tau \in P'} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle \\
&= \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma = J_\tau}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle + \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \neq J_\tau}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle \\
&= \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma = J_\tau}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle + \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \neq J_\tau,\, J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 = \emptyset}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle \\
&\quad + \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \neq J_\tau,\, J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 \neq \emptyset, \\ \lambda(J_\sigma) = \lambda(J_\tau)}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle + \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \neq J_\tau,\, J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 \neq \emptyset, \\ \lambda(J_\sigma) < \lambda(J_\tau)}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle \\
&\quad + \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \neq J_\tau,\, J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 \neq \emptyset, \\ \lambda(J_\sigma) > \lambda(J_\tau)}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle.
\end{aligned}
$$

ここで，命題 2.9(iii) より (第 2 項) $= 0$. $J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 \neq \emptyset$, $\lambda(J_\sigma) = \lambda(J_\tau) \Rightarrow J_\sigma = J_\tau$ より (第 3 項) $= 0$. $J_\sigma \neq J_\tau$, $J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 \neq \emptyset$, $\lambda(J_\sigma) < \lambda(J_\tau) \Rightarrow J_\sigma \subset J_\tau \Rightarrow J_\sigma \subset J_\tau^1$ [cf. Step 2-2-2 の証明]. 逆に $J_\sigma \subset J_\tau^1 \Rightarrow \lambda(J_\sigma) \leq \lambda\left(J_\tau^1\right) = \frac{1}{2}\lambda(J_\tau) < \lambda(J_\tau)$, $J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 = J_\sigma^1 \neq \emptyset$ より，「$J_\sigma \neq J_\tau$, $J_\sigma^1 \cap J_\tau^1 \neq \emptyset$, $\lambda(J_\sigma) < \lambda(J_\tau) \Leftrightarrow J_\sigma \subset J_\tau^1$」であるから

$$
(\text{第 4 項}) = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \subset J_\tau^1}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle.
$$

第 5 項については，σ と τ の役割を入れ替えれば

$$
(\text{第 5 項}) = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\tau \subset J_\sigma^1}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle
$$

となる．従って

$$\alpha^2 \le \sum_{\substack{\sigma,\,\tau\in P';\\ J_\sigma=J_\tau}} \langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle + \sum_{\substack{\sigma,\,\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} \langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle$$
$$+ \sum_{\substack{\sigma,\,\tau\in P';\\ J_\tau\subset J_\sigma^1}} \langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle. \tag{35}$$

Step 2-2-4　補題 2.16(ii) より

$$\Big|\,(35)\text{ 式の第 1 項}\,\Big| \le \sum_{\substack{\sigma,\,\tau\in P';\\ J_\sigma=J_\tau}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle|\,|\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle|\,|\langle\phi_\tau,f\rangle|$$
$$\le\ C_3\Delta_f(P') =\ C_3\alpha.$$

Step 2-2-5　まず

$$\Big|\,(35)\text{ 式の第 2 項}\,\Big| \le \sum_{\substack{\sigma,\,\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle|$$
$$= \sum_{\sigma\in P'} |\langle f,\phi_\sigma\rangle| \sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle|$$
$$\le \sqrt{\sum_{\sigma\in P'} |\langle f,\phi_\sigma\rangle|^2}\sqrt{\sum_{\sigma\in P'}\Big(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle|\Big)^2}$$
$$[(\because)\ \text{Schwarz の不等式}]$$
$$= \sqrt{\alpha}\sqrt{\sum_{\sigma\in P'}\Big(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle|\Big)^2} \tag{36}$$
$$\Big[(\because)\ \alpha=\Delta_f(P')=\textstyle\sum_{\sigma\in P'}\big|\langle f,\phi_\sigma\rangle\big|^2\Big].$$

(33) 式より

$$\sum_{\sigma\in P'}\Big(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle|\Big)^2$$
$$= \sum_{0\le j\le n-1}\sum_{\sigma\in P_j'}\Big(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\langle\phi_\tau,f\rangle|\Big)^2$$
$$=: \sum_{0\le j\le n-1} H_j. \tag{37}$$

ここで

- $\tau\in P' \Rightarrow \mathrm{energy}_f(\{\tau\}) \le \mathrm{energy}_f(P') \le \mathrm{energy}_f(P) \le \gamma$

  $\Rightarrow \big|\langle\phi_\tau,f\rangle\big| = \lambda(I_\tau)^{\frac12}\,\mathrm{energy}_f(\{\tau\})$　$[(\because)$ 補題 2.14(ii)$]$ $\le \gamma\lambda(I_\tau)^{\frac12}$,
- $\sigma,\tau\in P'$, $J_\sigma\subset J_\tau^1 \Rightarrow J_\sigma\subset J_\tau$

  $\Rightarrow k_\sigma\le k_\tau$

$$\Rightarrow \left|\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle\right| \le C_3\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\int_{I_\tau} w_\sigma(x)dx \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.12(\text{viii})],$$

- $\sigma\in P_j'$, τ, $\tau'\in P$, $\tau\ne\tau'$ が $J_\sigma\subset J_\tau^1\cap J_{\tau'}^1$ を満たす
  $\Rightarrow I_\tau$, $I_{\tau'}$, I_{τ_j} は互いに素

$$\left[\begin{array}{ll}(\because)\ \ \sigma\in P_j'=P_j\cap T_{\tau_j} & \Rightarrow \tau_j\preceq\sigma \\ & \Rightarrow J_{\tau_j}\subset J_\sigma \\ & \Rightarrow J_{\tau_j}\subset J_\tau^1,\ J_{\tau_j}\subset J_{\tau'}^1 \\ & \Rightarrow I_\tau\cap I_{\tau_j}=\emptyset,\ I_{\tau'}\cap I_{\tau_j}=\emptyset \quad [(\because)\ \text{Step 2-2-1}], \\ \quad\tau\ne\tau',\ J_\tau^1\cap J_{\tau'}^1\ne\emptyset & \Rightarrow I_\tau\cap I_{\tau'}=\emptyset \quad [(\because)\ \text{Step 2-2-2}]\end{array}\right]$$

より

$$\begin{aligned}
H_j &= \sum_{\sigma\in P_j'}\Bigg(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} |\langle\phi_\sigma,\phi_\tau\rangle||\langle\phi_\tau,f\rangle|\Bigg)^2 \\
&\le \sum_{\sigma\in P_j'}\Bigg(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} C_3\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\lambda(J_\tau)^{\frac{1}{2}}\int_{I_\tau} w_\sigma(x)dx\cdot\gamma\lambda(I_\tau)^{\frac{1}{2}}\Bigg)^2 \\
&= C_3^2\gamma^2\sum_{\sigma\in P_j'}\lambda(I_\sigma)\Bigg(\sum_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}}\int_{I_\tau} w_\sigma(x)dx\Bigg)^2 \quad [(\because)\ \lambda(I_\tau)\lambda(J_\tau)=1] \\
&= C_3^2\gamma^2\sum_{\sigma\in P_j'}\lambda(I_\sigma)\Bigg(\int_{\bigsqcup_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} I_\tau} w_\sigma(x)dx\Bigg)^2 \\
&\le C_3^2\gamma^2\sum_{\sigma\in P_j'}\lambda(I_\sigma)\Bigg(\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx\Bigg)^2 \\
&\qquad\left[\begin{array}{l}(\because)\ I_{\tau_j}\cap\bigsqcup_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} I_\tau=\bigsqcup_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}}(I_{\tau_j}\cap I_\tau)=\emptyset\ \text{より} \\ \bigsqcup_{\substack{\tau\in P';\\ J_\sigma\subset J_\tau^1}} I_\tau\subset\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}\end{array}\right] \\
&= C_3^2\gamma^2\sum_{\sigma\in P_j'}2^{-k_\sigma}\Bigg(\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx\Bigg)^2 \\
&= C_3^2\gamma^2\sum_{k\ge k_{\tau_j}}\sum_{\substack{\sigma\in P_j';\\ k_\sigma=k}}2^{-k_\sigma}\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx \\
&\qquad[(\because)\ \sigma\in P_j'=P_j\cap T_\tau\ \Rightarrow\ \tau_j\preceq\sigma\ \Rightarrow\ k_{\tau_j}\le k_\sigma] \\
&\le C_3^2\gamma^2\sum_{k\ge k_{\tau_j}}2^{-k}\sum_{\substack{\sigma\in P_j';\\ k_\sigma=k}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx \\
&\qquad\left[(\because)\ \text{命題 } 2.12(\text{i})\ \text{より}\ \textstyle\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx\le\int_{\mathbb{R}} w_\sigma(x)dx=1\right] \\
&\le C_3^2\gamma^2\sum_{k\ge k_{\tau_j}}2^{-k}\sum_{\substack{\sigma\in Q;\\ \tau_j\preceq\sigma,\,k_\sigma=k}}\int_{\mathbb{R}\setminus I_{\tau_j}} w_\sigma(x)dx
\end{aligned}$$

$$\leq C_3^2 C_4 \gamma^2 \sum_{k \geq k_{\tau_j}} 2^{-k} \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.12(\mathrm{viii})\,]$$
$$= C_3^2 C_4 \gamma^2 \cdot 2^{-k_{\tau_j}+1}$$
$$= 2C_3^2 C_4 \gamma^2 \lambda\left(I_{\tau_j}\right).$$

よって，(36) 式および (37) 式から

$$\begin{aligned}
\left|\,(35)\ \text{式の第 2 項}\,\right| &\leq \sqrt{\alpha}\sqrt{\sum_{0 \leq j \leq n-1} 2C_3^2 C_4 \gamma^2 \lambda\left(I_{\tau_j}\right)} \\
&= \sqrt{\alpha}\sqrt{2C_3^2 C_4 \gamma^2 \sum_{0 \leq j \leq n-1} \lambda\left(I_{\tau_j}\right)} \\
&\leq \sqrt{\alpha}\sqrt{2C_3^2 C_4 \cdot 4\alpha} \quad [(\because)\ (34)\,] \\
&= 2C_3 \sqrt{2C_4}\alpha.
\end{aligned}$$

Step 2-2-6

$$\begin{aligned}
\big((35)\ \text{式の第 3 項}\big) &= \sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\tau \subset J_\sigma^1}} \overline{\langle f,\, \phi_\tau \rangle}\; \overline{\langle \phi_\tau,\, \phi_\sigma \rangle}\; \overline{\langle \phi_\sigma,\, f \rangle} \\
&= \overline{\sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\tau \subset J_\sigma^1}} \langle f, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, f \rangle} \\
&= \overline{\sum_{\substack{\sigma, \tau \in P'; \\ J_\sigma \subset J_\tau^1}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \langle \phi_\sigma, \phi_\tau \rangle \langle \phi_\tau, f \rangle} \\
&= \overline{\big((35)\ \text{式の第 2 項}\big)}
\end{aligned}$$

であるから，Step 2-2-5 より

$$\big|(35)\ \text{式の第 3 項}\big| \leq 2C_3 \sqrt{2C_4}\alpha.$$

Step 2-2-7　Step 2-2-4 , Step 2-2-5 , Step 2-2-6 の評価を (35) 式に適用すれば

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \leq&\ C_3\alpha + 2C_3\sqrt{2C_4}\alpha + 2C_3\sqrt{2C_4}\alpha \\
=&\ C_3\big(1 + 4\sqrt{2C_4}\big)\alpha.
\end{aligned}$$

従って $\alpha\big(\alpha - C_3\big(1 + 4\sqrt{2C_4}\big)\big) \leq 0$. $\alpha = \Delta_f(P') \geq 0$ より $\alpha \leq C_3\big(1 + 4\sqrt{2C_4}\big)$. よって，(34) 式より

$$\gamma^2 \sum_{\tau \in R} \lambda(I_\tau) \leq 4\alpha \leq 4C_3\big(1 + 4\sqrt{2C_4}\big) = C_6$$

が分かる．　□

命題 2.19. $P \subset Q$ は有限集合で，ある $\tau \in Q$ に対して $\tau \preceq \sigma$ $(\forall \sigma \in P)$ を満たすとする．さらに $E \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数，$f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ とする．このとき

$$\sum_{\sigma \in P} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x)dx \right| \leq C_7 \mathrm{energy}_f(P)\, \mathrm{mass}_{E,g}(P)\, \lambda(I_\tau).$$

ただし

$$C_7 = C_1\left(\frac{7}{2}+\frac{8}{7}+\frac{28}{w(\frac{3}{2})}+\frac{4\sqrt{14C_3}}{w(\frac{3}{2})}\right).$$

証明 $P \subset Q$ は有限集合で，ある $\tau \in Q$ に対して $\tau \preceq \sigma$ $(\forall \sigma \in P)$ を満たすとする．さらに $E \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数，$f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．

$P = \emptyset$ のときは，(左辺) $= 0 =$ (右辺) より不等式は成り立つ．

以降 $P \neq \emptyset$ とする．簡単のため

$$\gamma = \mathrm{energy}_f(P), \quad \gamma' = \mathrm{mass}_{E,g}(P)$$

とする．7 段階で示す．

Step 1 (準備)

Step 1-1 まず仮定から

$$\sigma \in P \Rightarrow \tau \preceq \sigma \Rightarrow J_\tau \subset J_\sigma,\, I_\sigma \subset I_\tau \Rightarrow k_\tau \le k_\sigma$$

より

$$k_\tau \le \min_{\sigma \in P} k_\sigma, \tag{38}$$

$$J_\tau \subset \bigcap_{\sigma \in P} J_\sigma, \tag{39}$$

$$\bigcup_{\sigma \in P} I_\sigma \subset I_\tau \tag{40}$$

に注意せよ．

$\sigma, \sigma' \in P$, $\sigma \neq \sigma'$, $\lambda(I_\sigma) = \lambda(I_{\sigma'})$ のとき，$J_\sigma = J_{\sigma'}$, $I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset$ である．なぜならば

$$\begin{aligned}\lambda(J_\sigma) &= \frac{1}{\lambda(I_\sigma)} = \frac{1}{\lambda(I_{\sigma'})} = \lambda(J_{\sigma'}),\\ J_\sigma \cap J_{\sigma'} &\supset J_\tau \quad [(\because)\ (39)]\\ &\neq \emptyset\end{aligned}$$

であるから，命題 2.6 より $J_\sigma = J_{\sigma'}$．また $\lambda(I_\sigma) = \lambda(I_{\sigma'})$ より $I_\sigma = I_{\sigma'}$ または $I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset$．$I_\sigma = I_{\sigma'}$ と仮定すると，$\sigma = (I_\sigma, J_\sigma) = (I_{\sigma'}, J_{\sigma'}) = \sigma'$ となり，$\sigma \neq \sigma'$ に矛盾する．ゆえに $I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset$．

Step 1-2 $I \in \mathscr{D}$ に対して

$$I^* := \left[\mathrm{c}(I) - \frac{3}{2}\lambda(I),\ \mathrm{c}(I) + \frac{3}{2}\lambda(I)\right) \tag{41}$$

とする．ただし，$\mathrm{c}(I) = I$ の中点 [cf. 定義 2.3(ii)]．従って

$$I = \left[2^k n,\, 2^k(n+1)\right) \quad (k,\, n \in \mathbb{Z})$$

のとき，$\mathrm{c}(I) = 2^k\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\lambda(I) = 2^k$ より

$$I^* = \left[2^k\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\cdot 2^k,\, 2^k\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\cdot 2^k\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigl[2^k(n-1),\, 2^k(n+2)\bigr) \\
&= \Bigl(\bigl[\,2^k n\,,\, 2^k(n+1)\,\bigr) - 2^k\Bigr) \sqcup \bigl[\,2^k n\,,\, 2^k(n+1)\,\bigr) \sqcup \Bigl(\bigl[\,2^k n\,,\, 2^k(n+1)\,\bigr) + 2^k\Bigr) \\
&= \bigl(I - \lambda\,(I)\,\bigr) \sqcup I \sqcup \bigl(I + \lambda\,(I)\,\bigr) \qquad (42)
\end{aligned}
$$

となる．また $I \subset I^*$, $\lambda\,(I^*) = 3\lambda\,(I)$ である．

Step 1-2-1　$I,\, J \in \mathscr{D},\, I \subset J \Rightarrow I^* \subset J^*$.

(Pr.)　$I,\, J \in \mathscr{D}$ より，$k,\, k',\, n,\, n' \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$
I = \bigl[\,2^k n,\, 2^k(n+1)\,\bigr),\;\; J = \bigl[\,2^{k'} n',\, 2^{k'}(n'+1)\,\bigr)
$$

と表せる．今 $I \subset J$ だから，$2^k n \geq 2^{k'} n'$, $2^k(n+1) \leq 2^{k'}(n'+1)$. $\lambda\,(I) \leq \lambda\,(J)$ より $2^k \leq 2^{k'}$ となる．

$$
\begin{aligned}
&I^* = \bigl[\,2^k(n-1),\, 2^k(n+2)\,\bigr),\;\; J^* = \bigl[\,2^{k'}(n'-1),\, 2^{k'}(n'+2)\,\bigr), \\
&2^k(n-1) = 2^k n - 2^k \geq 2^{k'} n' - 2^{k'} = 2^{k'}(n'-1), \\
&2^k(n+2) = 2^k(n+1) + 2^k \leq 2^{k'}(n'+1) + 2^{k'} = 2^{k'}(n'+2)
\end{aligned}
$$

より $I^* \subset J^*$ が成り立つ．

Step 1-2-2

$$
\mathscr{J} := \left\{ I \in \mathscr{D};\; \begin{array}{c} \lambda\,(I) < \min\limits_{\sigma \in P} \lambda\,(I_\sigma) \\ \text{or} \\ \lambda\,(I) \geq \min\limits_{\sigma \in P} \lambda\,(I_\sigma) \text{ で，} I_\sigma \not\subset I^*,\, \forall \sigma \in P \;\text{ with }\; \lambda\,(I) \geq \lambda\,(I_\sigma) \end{array} \right\}
$$

とする．このとき $\mathscr{J} \neq \emptyset$, $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathscr{J}} I = \mathbb{R}$ である．

(Pr.)　P は空でない有限集合なので，$1 \leq \#P < \infty$. ゆえに $\max_{\sigma \in P} k_\sigma < \infty$. $k \in \mathbb{Z}$ を $\max_{\sigma \in P} k_\sigma < k$ なるものとすると

$$
\begin{aligned}
\lambda\bigl(\bigl[\,2^{-k} n\,,\, 2^{-k}(n+1)\bigr)\bigr) = 2^{-k} < 2^{-\max_{\sigma \in P} k_\sigma} &= 2^{\min_{\sigma \in P}(-k_\sigma)} \\
&= \min_{\sigma \in P} 2^{-k_\sigma} = \min_{\sigma \in P} \lambda\,(I_\sigma)\;\; (\forall n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

より，$\bigl[\,2^{-k} n\,,\, 2^{-k}(n+1)\bigr) \in \mathscr{J}$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ である．そして

$$
\mathbb{R} \supset \bigcup_{I \in \mathscr{J}} I \supset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigl[\,2^{-k} n\,,\, 2^{-k}(n+1)\bigr) = \mathbb{R}
$$

より $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathscr{J}} I = \mathbb{R}$ である．

Step 1-2-3　$\mathscr{K} := \{I \in \mathscr{J};\; \nexists J \in \mathscr{J} \;\;\text{s.t.}\;\; I \subsetneq J\}$ とする．このとき

(a) $\mathscr{K} \neq \emptyset$,

(b) $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathscr{K}} I = \mathbb{R}$,

(c) $I\,,\, J \in \mathscr{K} \Rightarrow I = J$ または $I \cap J = \emptyset$.

(Pr.) (a) $I \in \mathscr{D}$ は $\lambda\,(I) < \min_{v \in P} \lambda\,(I_v)$ を満たすものとする．このとき $I \in \mathscr{J}$ である．

$I = \bigl[\,\lambda\,(I)\,j\,,\, \lambda\,(I)\,(j+1)\,\bigr)$ $(j \in \mathbb{Z})$ とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$\widetilde{I}^{(n)} \in \mathscr{D}$ を

$$I \subset \widetilde{I}^{(n)},\ \lambda\bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr) = 2^n \lambda(I)$$

なるものとする．命題 2.7 より

$$\widetilde{I}^{(n)} = \left[2^n\lambda(I)\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor,\ 2^n\lambda(I)\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor+1\right)\right) \tag{43}$$

となる．(42) 式より

$$\bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr)^* = \left[2^n\lambda(I)\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor-1\right),\ 2^n\lambda(I)\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor+2\right)\right). \tag{44}$$

$\sigma \in P$ を固定する．$\lambda(I) < \lambda(I_\sigma)$ より，$n_0 \in \mathbb{N}$ を，$\lambda(I_\sigma) = 2^{n_0}\lambda(I)$ と取る．

$$I_\sigma = \left[\,2^{n_0}\lambda(I)\,l,\ 2^{n_0}\lambda(I)\,(l+1)\,\right) \quad (l \in \mathbb{Z})$$

とする．$n \geq n_0$ を

$$j - 2^n\left(1 + \left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right) < 2^{n_0}l < 2^{n_0}(l+1) < j + 2^n\left(2 - \left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right)$$

と取ると [実際，$n \geq n_0$ を $\frac{j-2^{n_0}(l+1)}{2^n} > -1$, $\frac{j-2^{n_0}l}{2^n} < 1$ となるように十分大に取れば，$2^{n_0}(l+1) < j+2^n < j+2^n\left(1+1-\left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right) = j+2^n\left(2-\left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right)$, $2^{n_0}l > j-2^n \geq j-2^n\left(1+\left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right)$ となる]，$I_\sigma \subset \bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr)^*$ となる．なぜならば

$$\begin{aligned}
2^{n_0}l - 2^n\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor - 1\right) &= 2^{n_0}l - 2^n\left(\frac{j}{2^n} - \left\{\frac{j}{2^n}\right\} - 1\right)\\
&= 2^{n_0}l - \left(j - 2^n\left(\left\{\frac{j}{2^n}\right\}+1\right)\right) > 0,\\
2^n\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor + 2\right) - 2^{n_0}(l+1) &= 2^n\left(\frac{j}{2^n} - \left\{\frac{j}{2^n}\right\} + 2\right) - 2^{n_0}(l+1)\\
&= j + 2^n\left(2 - \left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right) - 2^{n_0}(l+1) > 0
\end{aligned}$$

より

$$2^n\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor - 1\right) < 2^{n_0}l < 2^{n_0}(l+1) < 2^n\left(\left\lfloor\frac{j}{2^n}\right\rfloor + 2\right).$$

これと (44) 式より $I_\sigma \subset \bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr)^*$ である．明らかに $\lambda(I_\sigma) = 2^{n_0}\lambda(I) \leq 2^n\lambda(I) = \lambda\bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr)$ が成り立つので,

$$\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \bullet\ \lambda(I_\sigma) \leq \lambda\bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr),\\ \bullet\ I_\sigma \subset \bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr)^* \end{cases}$$

が分かる．

このとき，$\widetilde{I}^{(k)} \notin \mathscr{J}$ $(\forall k \geq n)$ である．実際，$k \geq n$ のとき

$$\widetilde{I}^{(k)} \in \mathscr{D},\ \lambda\bigl(\widetilde{I}^{(k)}\bigr) = 2^k\lambda(I) \geq 2^n\lambda(I) = \lambda\bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr) \geq \lambda(I_\sigma) \geq \min_{v\in P}\lambda(I_v).$$

$I \subset \widetilde{I}^{(n)}$, $I \subset \widetilde{I}^{(k)}$ より $\widetilde{I}^{(n)} \cap \widetilde{I}^{(k)} \supset I \neq \emptyset$ なので $\widetilde{I}^{(n)} \subset \widetilde{I}^{(k)}$．Step 1-2-1 より $\bigl(\widetilde{I}^{(n)}\bigr)^* \subset \bigl(\widetilde{I}^{(k)}\bigr)^*$ であるから，$I_\sigma \subset \bigl(\widetilde{I}^{(k)}\bigr)^*$．従って $\bigl(\widetilde{I}^{(k)}\bigr)^* \notin \mathscr{J}$.

$\widetilde{I}^{(0)} = I \in \mathscr{J}$ に注意して

$$k_I = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ ;\ \widetilde{I}^{(k)} \in \mathscr{J}\}$$

とおく．上のことから，$k_I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\widetilde{I}^{(k_I)} \in \mathscr{J}$, $\widetilde{I}^{(k)} \notin \mathscr{J}$ $(\forall k > k_I)$, そして $\widetilde{I}^{(k_I)} \in \mathscr{K}$ である．なぜならば，$J \in \mathscr{J}$, $\widetilde{I}^{(k_I)} \subset J$ とすると，$I \subset \widetilde{I}^{(k_I)}$ より $I \subset J$ であるから，$\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.t. $J = \widetilde{I}^{(n)}$. $\widetilde{I}^{(k_I)} \subset \widetilde{I}^{(n)}$ より $k_I \leq n$. $k_I < n$ とすると，k_I の定義より $\widetilde{I}^{(n)} \notin \mathscr{J}$. これは $\widetilde{I}^{(n)} = J \in \mathscr{J}$ に反する．よって $n = k_I$ だから $J = \widetilde{I}^{(k_I)}$ となり，$\widetilde{I}^{(k_I)} \in \mathscr{K}$. 以上のことから，$\mathscr{K} \neq \emptyset$ である．

(b) Step 1-2-2 の証明より

$$\bigcup_{I \in \mathscr{K}} I \supset \bigcup_{\substack{I \in \mathscr{D};\\ \lambda(I) < \min_{v \in P} \lambda(I_v)}} \widetilde{I}^{(k_I)} \supset \bigcup_{\substack{I \in \mathscr{D}:\\ \lambda(I) < \min_{v \in P} \lambda(I_v)}} I = \mathbb{R}.$$

(c) $I, J \in \mathscr{K}, I \cap J \neq \emptyset$ とすると，$I \subset J$ または $J \subset I$. $I \subset J$ のときは，$I \in \mathscr{K}, J \in \mathscr{J}$ より $J = I$. $J \subset I$ のときは，$J \in \mathscr{K}, I \in \mathscr{J}$ より $I = J$.

Step 1-3　$K \in \mathscr{K}$ に対して，$l_K \in \mathbb{Z}$ を $\lambda(K) = 2^{-l_K}$ とする．

Step 1-3-1　$K \in \mathscr{K}, l_K \geq k_\tau$ $(\Leftrightarrow\ \lambda(K) \leq \lambda(I_\tau))$

$$\Rightarrow K \subset \widehat{I_\tau} = \left[\mathrm{c}(I_\tau) - \tfrac{7}{2}\lambda(I_\tau),\ \mathrm{c}(I_\tau) + \tfrac{7}{2}\lambda(I_\tau)\right).$$

(Pr.)　$K = \left[2^{-l_K}m,\ 2^{-l_K}(m+1)\right)$, $I_\tau = \left[2^{-k_\tau}n,\ 2^{-k_\tau}(n+1)\right)$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, $l_K \geq k_\tau$ とする．このとき

$$\widehat{I_\tau} = \left[2^{-k_\tau}(n-3),\ 2^{-k_\tau}(n+4)\right).$$

$K \not\subset \widehat{I_\tau}$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}
&\exists x \in K \ \text{ s.t. } x \notin \widehat{I_\tau}\\
&\Rightarrow\ 2^{-l_K}m \leq x < 2^{-l_K}(m+1),\\
&x < 2^{-k_\tau}(n-3) \text{ または } 2^{-k_\tau}(n+4) \leq x\\
&\Rightarrow\ 2^{-l_K}m \leq x < 2^{-k_\tau}(n-3) \text{ または } 2^{-k_\tau}(n+4) \leq x < 2^{-l_K}(m+1)\\
&\Rightarrow\ m \leq 2^{l_K}x < 2^{l_K-k_\tau}(n-3) \text{ または } 2^{l_K-k_\tau}(n+4) \leq 2^{l_K}x < m+1\\
&\Rightarrow\ m < 2^{l_K-k_\tau}(n-3) \text{ または } 2^{l_K-k_\tau}(n+4) < m+1\\
&\Rightarrow\ m+1 \leq 2^{l_K-k_\tau}(n-3) \text{ または } 2^{l_K-k_\tau}(n+4) \leq m.
\end{aligned}$$

$\widetilde{K} \in \mathscr{D}$ を $K \subset \widetilde{K}$, $\lambda(\widetilde{K}) = 2\lambda(K)$ とする．Step 1-2-3 (a) の証明 [cf. (43), (44)] より

$$\begin{aligned}
\widetilde{K} = \widetilde{K}^{(1)} &= \left[2\lambda(K)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor,\ 2\lambda(K)\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 1\right)\right)\\
&= \left[2^{-l_K+1}\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor,\ 2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 1\right)\right),\\
\widetilde{K}^* &= \left[2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor - 1\right),\ 2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 2\right)\right).
\end{aligned}$$

$m + 1 \leq 2^{l_K-k_\tau}(n-3)$ のときは

$$\begin{aligned}
&2^{-k_\tau}n - 2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 2\right)\\
&= 2^{-l_K}\left(2^{l_K-k_\tau}n - 2\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 2\right)\right)\\
&= 2^{-l_K}\left(2^{l_K-k_\tau}(n-3) + 3\cdot 2^{l_K-k_\tau} - 2\left(\frac{m}{2} - \left\{\frac{m}{2}\right\}\right) - 4\right)
\end{aligned}$$

$$= 2^{-l_K}\left(2^{l_K-k_\tau}(n-3)+3\cdot 2^{l_K-k_\tau}-m+2\left\{\frac{m}{2}\right\}-4\right)$$
$$= 2^{-l_K}\left(2^{l_K-k_\tau}(n-3)-(m+1)+3(2^{l_K-k_\tau}-1)+2\left\{\frac{m}{2}\right\}\right)\geq 0$$

より，$2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2\right)\leq 2^{-k_\tau}n$．従って $\widetilde{K}^*\cap I_\tau=\emptyset$.

$2^{l_K-k_\tau}(n+4)\leq m$ のときは

$$\begin{aligned}
&2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1\right)-2^{-k_\tau}(n+1)\\
&=2^{-l_K}\left(2\Big(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1\Big)-2^{l_K-k_\tau}(n+1)\right)\\
&=2^{-l_K}\left(2\Big(\frac{m}{2}-\left\{\frac{m}{2}\right\}\Big)-2-2^{l_K-k_\tau}(n+4)+3\cdot 2^{l_K-k_\tau}\right)\\
&=2^{-l_K}\left(m-2^{l_K-k_\tau}(n+4)+3(2^{l_K-k_\tau}-1)+1-2\left\{\frac{m}{2}\right\}\right)\\
&=2^{-l_K}\left(m-2^{l_K-k_\tau}(n+4)+3(2^{l_K-k_\tau}-1)+2\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{m}{2}\right\}\right)\right)\\
&\geq 0\quad\left[\begin{array}{l}(\because)\ m\text{ が偶数}\Rightarrow \frac{m}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left\{\frac{m}{2}\right\}=0\Rightarrow\frac{1}{2}-\left\{\frac{m}{2}\right\}=\frac{1}{2}>0;\\ \qquad m\text{ が奇数}\Rightarrow\frac{m}{2}=\frac{m-1}{2}+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\Rightarrow\left\{\frac{m}{2}\right\}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}-\left\{\frac{m}{2}\right\}=0\end{array}\right]
\end{aligned}$$

より，$2^{-k_\tau}(n+1)\leq 2^{-l_K+1}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1\right)$．従って $\widetilde{K}^*\cap I_\tau=\emptyset$．よっていずれのときも $\widetilde{K}^*\cap I_\tau=\emptyset$ が成り立つ.

ここで $\lambda(K)<\frac{1}{2}\min_{\sigma\in P}\lambda(I_\sigma)$ のときは, $\lambda\big(\widetilde{K}\big)=2\lambda(K)<\min_{\sigma\in P}\lambda(I_\sigma)$ より $\widetilde{K}\in\mathscr{J}$. $\lambda(K)\geq\frac{1}{2}\min_{\sigma\in P}\lambda(I_\sigma)$ のときは，$\lambda\big(\widetilde{K}\big)=2\lambda(K)\geq\min_{\sigma\in P}\lambda(I_\sigma)$．$\lambda\big(\widetilde{K}\big)\geq\lambda(I_\sigma)$ なる $\sigma\in P$ に対して

$$\begin{aligned}
\tau\preceq\sigma\ \Rightarrow\ I_\sigma\subset I_\tau\ &\Rightarrow I_\sigma\cap\widetilde{K}^*\subset I_\tau\cap\widetilde{K}^*=\emptyset\\
&\Rightarrow I_\sigma\not\subset\widetilde{K}^*\\
&\quad\left[\begin{array}{l}(\because)\ I_\sigma\subset\widetilde{K}^*\Rightarrow I_\sigma\cap\widetilde{K}^*=I_\sigma\neq\emptyset.\\ \qquad\text{対偶をとって }I_\sigma\cap\widetilde{K}^*=\emptyset\Rightarrow I_\sigma\not\subset\widetilde{K}^*\end{array}\right]
\end{aligned}$$

より $\widetilde{K}\in\mathscr{J}$. $K\subset\widetilde{K}$, $K\in\mathscr{K}$ より $\widetilde{K}=K$. 従って $\lambda(K)=\lambda\big(\widetilde{K}\big)=2\lambda(K)>\lambda(K)$. これは矛盾である．ゆえに $K\subset\widehat{I_\tau}$.

Step 1-3-2　Step 1-3-1 より $\displaystyle\bigcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)\leq\lambda(I_\tau)}}K\subset\widehat{I_\tau}$．Step 1-2-3(c) より，$\{K;\ K\in\mathscr{K}\}$ は互いに素であるから

$$\sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)\leq\lambda(I_\tau)}}\lambda(K)=\lambda\Big(\bigsqcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)\leq\lambda(I_\tau)}}K\Big)\leq\lambda\big(\widehat{I_\tau}\big)=7\lambda(I_\tau).$$

Step 1-4　$I,J\in\mathscr{D}$, $\lambda(I)<\lambda(J)\Rightarrow I\subset J^*$ または $I\cap J^*=\emptyset$.

(Pr.)　$I,J\in\mathscr{D}$, $\lambda(I)<\lambda(J)$ とする．$k\in\mathbb{N}$ を，$\lambda(J)=2^k\lambda(I)$ を満たすものとして取り，$I=\big[\lambda(I)m,\ \lambda(I)(m+1)\big)$, $J=\big[\lambda(J)n,\ \lambda(J)(n+1)\big)=\big[2^k\lambda(I)n,\ 2^k\lambda(I)(n+1)\big)$ $(m,n\in\mathbb{Z})$ とする．このとき

$$J^*=\big[2^k\lambda(I)(n-1),\ 2^k\lambda(I)(n+2)\big)$$

より

$$I\cap J^*\neq\emptyset\ \Rightarrow\exists x\in I\cap J^*$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda(I)\,m \le x < \lambda(I)\,(m+1),\ 2^k\lambda(I)\,(n-1) \le x < 2^k\lambda(I)\,(n+2)\\
&\Rightarrow m \le \frac{x}{\lambda(I)} < m+1,\ 2^k(n-1) \le \frac{x}{\lambda(I)} < 2^k(n+2)\\
&\Rightarrow m \le \frac{x}{\lambda(I)} < 2^k(n+2),\ 2^k(n-1) \le \frac{x}{\lambda(I)} < m+1\\
&\Rightarrow m < 2^k(n+2),\ 2^k(n-1) < m+1\\
&\Rightarrow m+1 \le 2^k(n+2),\ 2^k(n-1) \le m\\
&\Rightarrow 2^k(n-1) \le m < m+1 \le 2^k(n+2)\\
&\Rightarrow I \subset J^*.
\end{aligned}
$$

Step 1-5 $l < k_\tau \Rightarrow \#\{K \in \mathscr{K};\ l_K = l\} = 3.$
(Pr.) $l < k_\tau$ をとって固定する．3 段階で示す．

Step 1-5-1 $I \in \mathscr{D}$, $\lambda(I) > \lambda(I_\tau)$ とする．Step 1-4 より $I_\tau \subset I^*$ または $I_\tau \cap I^* = \emptyset$ のいずれかである．このとき

$$I \in \mathscr{J} \ \Leftrightarrow\ I_\tau \cap I^* = \emptyset.$$

(Pr.) まず，$\forall\sigma \in P$ に対して

$$\tau \preceq \sigma \ \Rightarrow\ I_\sigma \subset I_\tau \ \Rightarrow\ \lambda(I_\sigma) \le \lambda(I_\tau) \ \Rightarrow\ \lambda(I_\sigma) < \lambda(I)$$

より $\lambda(I) > \min_{\sigma\in P}\lambda(I_\sigma)$ に注意せよ．

$I \in \mathscr{J}$ のときは，$\mathscr{J}$ の定義より $I_\sigma \not\subset I^*$ $(\forall\sigma \in P)$．$I_\tau \subset I^*$ とすると，$I_\sigma \subset I_\tau \subset I^*$ $(\forall\sigma \in P)$ となって矛盾が生じるから，$I_\tau \not\subset I^*$. 従って $I_\tau \cap I^* = \emptyset$ である．

逆に $I_\tau \cap I^* = \emptyset$ のときは，$\forall\sigma \in P$ に対して $I_\sigma \cap I^* \subset I_\tau \cap I^* = \emptyset$ より $I_\sigma \not\subset I^*$．$\mathscr{J}$ の定義より $I \in \mathscr{J}$ である．

Step 1-5-2 $K \in \mathscr{D}$, $\lambda(K) = 2^{-l}$ とする．このとき

$$K \in \mathscr{K} \ \Leftrightarrow\ I_\tau \cap K^* = \emptyset,\ I_\tau \subset \widetilde{K}^*.$$

ただし，$\widetilde{K} \in \mathscr{D}$ は $K \subset \widetilde{K}$, $\lambda\bigl(\widetilde{K}\bigr) = 2\lambda(K)$ なるものとする．
(Pr.) $\lambda(K) = 2^{-l} > 2^{-k_\tau} = \lambda(I_\tau)$ である．

"$\Rightarrow$" について．$K \in \mathscr{K}$ とする．$K \in \mathscr{J}$ なので，Step 1-5-1 より $I_\tau \cap K^* = \emptyset$．$\widetilde{K} \in \mathscr{D}$, $K \subsetneq \widetilde{K}$ と $K \in \mathscr{K}$ より $\widetilde{K} \notin \mathscr{J}$．$\lambda\bigl(\widetilde{K}\bigr) = 2\lambda(K) > 2\lambda(I_\tau) > \lambda(I_\tau)$ だから，Step 1-5-1 より $I_\tau \cap \widetilde{K}^* \neq \emptyset$. Step 1-4 より $I_\tau \subset \widetilde{K}^*$.

"$\Leftarrow$" について．$I_\tau \cap K^* = \emptyset$, $I_\tau \subset \widetilde{K}^*$ とする．まず Step 1-5-1 より $K \in \mathscr{J}$．$J \in \mathscr{J}$, $K \subset J$ とする．このとき適当な $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $J = \widetilde{K}^{(n)}$ となる [cf. (43) 式]．$n \ge 1$ と仮定すると，$\widetilde{K} \subset \widetilde{K}^{(n)}$ [$(\because)$ $\widetilde{K} \cap \widetilde{K}^{(n)} \supset K \neq \emptyset$ と $\lambda\bigl(\widetilde{K}\bigr) = 2\lambda(K) \le 2^n\lambda(K) = \lambda\bigl(\widetilde{K}^{(n)}\bigr)$]. Step 1-2-1 より $\widetilde{K}^* \subset \bigl(\widetilde{K}^{(n)}\bigr)^*$ なので，$I_\tau \cap \bigl(\widetilde{K}^{(n)}\bigr)^* \supset I_\tau \cap \widetilde{K}^* \supset I_\tau \neq \emptyset$. $\lambda\bigl(\widetilde{K}^{(n)}\bigr) \ge \lambda\bigl(\widetilde{K}\bigr) = 2\lambda(K) > \lambda(K) > \lambda(I_\tau)$ であるから，Step 1-5-1 より $\widetilde{K}^{(n)} \notin \mathscr{J}$. これは, $\widetilde{K}^{(n)} = J \in \mathscr{J}$ に反する．従って $n = 0$, すなわち $J = K$．よって $K \in \mathscr{K}$ である．

Step 1-5-3 $\#\{K \in \mathscr{K};\ l_K = l\} = 3.$
(Pr.) $K = \bigl[2^{-l}m,\ 2^{-l}(m+1)\bigr)$, $I_\tau = \bigl[2^{-k_\tau}n,\ 2^{-k_\tau}(n+1)\bigr)$, $(m\,, n \in \mathbb{Z})$ とする．Step 1-5-2 より

$K \in \mathscr{K} \ \Leftrightarrow I_\tau \cap K^* = \emptyset,\ I_\tau \subset \widetilde{K}^*$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left[2^{-k_\tau}n,\ 2^{-k_\tau}(n+1)\right) \cap \left[2^{-l}(m-1)\,,\ 2^{-l}(m+2)\right) = \emptyset, \\ \left[2^{-k_\tau}n,\ 2^{-k_\tau}(n+1)\right) \subset \left[2^{-l+1}\left(\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor - 1\right),\ 2^{-l+1}\left(\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 2\right)\right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-l+1}\left(\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor - 1\right) \leq 2^{-k_\tau}n < 2^{-k_\tau}(n+1) \leq 2^{-l+1}\left(\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 2\right), \\ 2^{-k_\tau}(n+1) \leq 2^{-l}(m-1) \text{ または } 2^{-l}(m+2) \leq 2^{-k_\tau}n \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{k_\tau-l}\left(2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor - 2\right) \leq n < n+1 \leq 2^{k_\tau-l}\left(2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 4\right), \\ n+1 \leq 2^{k_\tau-l}(m-1) \text{ または } 2^{k_\tau-l}(m+2) \leq n \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor - 2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq 2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 4, \\ \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq m-1 \text{ または } m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor - 2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq m-1 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq 2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{aligned}
(\because)\ 2\left\lfloor \tfrac{m}{2} \right\rfloor - 2 &= 2\left(\tfrac{m}{2} - \left\{\tfrac{m}{2}\right\}\right) - 2 = m - 2\left\{\tfrac{m}{2}\right\} - 2 \\
&= \begin{cases} m-2 & (m\ :\ \text{偶数}), \\ m-3 & (m\ :\ \text{奇数}) \end{cases} \\
&< m+2, \\
2\left\lfloor \tfrac{m}{2} \right\rfloor + 4 &= 2\left(\tfrac{m}{2} - \left\{\tfrac{m}{2}\right\}\right) + 4 = m - 2\left\{\tfrac{m}{2}\right\} + 4 \\
&= \begin{cases} m+4 & (m\ :\ \text{偶数}), \\ m+3 & (m\ :\ \text{奇数}) \end{cases} \\
&> m-1
\end{aligned}\right]
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m-2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq m-1 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq m+4 \end{cases} & (m\ :\ \text{偶数}), \\ \begin{cases} m-3 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq m-1 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} < \dfrac{n+1}{2^{k_\tau-l}} \leq m+3 \end{cases} & (m\ :\ \text{奇数}) \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m-2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} \leq m-1-\dfrac{1}{2^{k_\tau-l}} < m-1 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} \leq m+4-\dfrac{1}{2^{k_\tau-l}} < m+4 \end{cases} & (m\ :\ \text{偶数}), \\ \begin{cases} m-3 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} \leq m-1-\dfrac{1}{2^{k_\tau-l}} < m-1 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau-l}} \leq m+3-\dfrac{1}{2^{k_\tau-l}} < m+3 \end{cases} & (m\ :\ \text{奇数}) \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} < m-1 \text{ または } m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} < m+3 \\ \qquad\qquad\qquad \text{ または } m+3 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} < m+4 \quad (m \text{ : 偶数}), \\ m-3 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} < m-2 \text{ または } m-2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} < m-1 \\ \qquad\qquad\qquad \text{ または } m+2 \leq \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} < m+3 \quad (m \text{ : 奇数}) \end{cases}
$$

$$
\left[\begin{array}{l} (\because)\ k_\tau, l \in \mathbb{Z}, k_\tau > l \text{ より } 2^{k_\tau - l} \geq 2 \text{ なので} \\ m+i < m+(i+1) - \frac{1}{2^{k_\tau - l}} \quad (i \in \mathbb{Z}), \\ \frac{n}{2^{k_\tau - l}} < m+j \ \Leftrightarrow\ n < 2^{k_\tau - l}(m+j) \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\ n+1 \leq 2^{k_\tau - l}(m+j) \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\ \frac{n+1}{2^{k_\tau - l}} \leq m+j \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\ \frac{n}{2^{k_\tau - l}} \leq m+j - \frac{1}{2^{k_\tau - l}} \quad (\forall j \in \mathbb{Z}) \end{array} \right]
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \text{ または } m+2 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \\ \qquad\qquad \text{ または } m+3 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \quad (m \text{ : 偶数}), \\ m-3 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \text{ または } m-2 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \\ \qquad\qquad \text{ または } m+2 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \quad (m \text{ : 奇数}) \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} m = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor + 2 \text{ または } \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor - 2 \text{ または } \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor + 3 \ \left(\left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \text{ : 偶数} \right), \\ m = \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor - 3 \text{ または } \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor + 2 \text{ または } \left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor - 2 \ \left(\left\lfloor \dfrac{n}{2^{k_\tau - l}} \right\rfloor \text{ : 奇数} \right). \end{cases}
$$

以上のことから，$\#\{K \in \mathscr{K};\ l_K = l\} = 3$ である．

Step 2 (分解)

$z \in \mathbb{C}$ に対して，$\zeta(z) \in \{w \in \mathbb{C};\ |w| = 1\}$ を

$$
\zeta(z) := \begin{cases} 1, & z = 0, \\ \dfrac{\bar{z}}{|z|}, & z \neq 0 \end{cases}
$$

とする．このとき，$\zeta(z)z = |z|$ である．$\sigma \in P$ に対して，

$$
\zeta_\sigma = \zeta\left(\langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \right) \tag{45}
$$

とおくと

$$
|\zeta_\sigma| = 1\ ,
$$

$$
\zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx = \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \right|
$$

となる．

$W = P \times \mathscr{K}$ とする．$(\sigma, K) \in P \times \mathscr{K}$ に対して，

$$
\alpha_{\sigma,K} := \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K} \phi_\sigma(x) dx \tag{46}
$$

とおく．Step 1-2-3 (b), (c) より

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathscr{K}}|\alpha_{\sigma,K}| &= |\langle f,\phi_\sigma\rangle|\sum_{K\in\mathscr{K}}\left|\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}\phi_\sigma(x)dx\right| \\
&\le |\langle f,\phi_\sigma\rangle|\sum_{K\in\mathscr{K}}\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}|\phi_\sigma(x)|dx \\
&= |\langle f,\phi_\sigma\rangle|\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap\bigsqcup_{K\in\mathscr{K}}K}|\phi_\sigma(x)|dx \qquad [(\because)\text{ Step 1-2-3 (c)}] \\
&= |\langle f,\phi_\sigma\rangle|\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}|\phi_\sigma(x)|dx \qquad [(\because)\text{ Step 1-2-3 (b)}] \\
&\le |\langle f,\phi_\sigma\rangle|\int_{\mathbb{R}}|\phi_\sigma(x)|dx<\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathscr{K}}\alpha_{\sigma,K} &= \langle f,\phi_\sigma\rangle\sum_{K\in\mathscr{K}}\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}\phi_\sigma(x)dx \\
&= \langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap\bigsqcup_{K\in\mathscr{K}}K}\phi_\sigma(x)dx \qquad [(\because)\text{ Step 1-2-3 (c)}] \\
&= \langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx \qquad [(\because)\text{ Step 1-2-3 (b)}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in P}\left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\right| &= \sum_{\sigma\in P}\zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx \\
&= \sum_{\sigma\in P}\zeta_\sigma\sum_{K\in\mathscr{K}}\alpha_{\sigma,K} \\
&= \sum_{(\sigma,K)\in W}\zeta_\sigma\alpha_{\sigma,K}.
\end{aligned}$$

今

$$W_0=\{(\sigma,K)\in P\times\mathscr{K};\ \lambda(I_\sigma)\le\lambda(K)\le\lambda(I_\tau)\}, \tag{47}$$
$$W_1=\{(\sigma,K)\in P\times\mathscr{K};\ \lambda(I_\tau)<\lambda(K)\}, \tag{48}$$
$$W_2=\{(\sigma,K)\in (P\setminus T_\tau)\times\mathscr{K};\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)\}, \tag{49}$$
$$W_3=\{(\sigma,K)\in (P\cap T_\tau)\times\mathscr{K};\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)\} \tag{50}$$

とおく．このとき

$$W=W_0\sqcup W_1\sqcup W_2\sqcup W_3.$$

なぜならば，$\forall\sigma\in P$ に対して

$$\tau\preceq\sigma\Rightarrow I_\sigma\subset I_\tau\Rightarrow\lambda(I_\sigma)\le\lambda(I_\tau)$$

より

$$\begin{aligned}
W &= P\times\mathscr{K} \\
&= \{(\sigma,K)\in P\times\mathscr{K};\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)\} \\
&\quad\sqcup\{(\sigma,K)\in P\times\mathscr{K};\ \lambda(I_\sigma)\le\lambda(K)\le\lambda(I_\tau)\} \\
&\quad\sqcup\{(\sigma,K)\in P\times\mathscr{K};\ \lambda(I_\tau)<\lambda(K)\} \\
&= \{(\sigma,K)\in (P\setminus T_\tau)\times\mathscr{K};\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sqcup \big\{(\sigma, K) \in (P \cap T_\tau) \times \mathscr{K};\ \lambda(K) < \lambda(I_\sigma)\big\} \\
&\sqcup \big\{(\sigma, K) \in P \times \mathscr{K};\ \lambda(I_\sigma) \le \lambda(K) \le \lambda(I_\tau)\big\} \\
&\sqcup \big\{(\sigma, K) \in P \times \mathscr{K};\ \lambda(I_\tau) < \lambda(K)\big\} \\
= {}& W_2 \sqcup W_3 \sqcup W_0 \sqcup W_1.
\end{aligned}
$$

$j = 0, 1, 2, 3$ に対して

$$
\alpha_j := \sum_{(\sigma, K) \in W_j} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma, K} \tag{51}
$$

とおく．このとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in P} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)} \phi_\sigma(x) dx \right| &= \sum_{(\sigma, K) \in W} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma, K} \\
&= \sum_{(\sigma, K) \in \bigsqcup_{j=0}^3 W_j} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma, K} \\
&= \sum_{j=0}^{3} \sum_{(\sigma, K) \in W_j} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma, K} \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

以降，α_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ の評価を行う．

Step 3 ($|\alpha_0|$ の評価)

2 段階で行う．

Step 3-1 $K \in \mathscr{K}, l_K = l$ とする．$\forall k \ge l$ に対して

$$
\sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} |\alpha_{\sigma, K}| \le 2^{-k} C_1 \gamma \gamma' (1 + 2^{k-l})^{-2} \le 2^{-k-2} C_1 \gamma \gamma'.
$$

(Pr.) $\{\sigma \in P;\ k_\sigma = k\} = \emptyset$ のときは，(最左辺) $= 0$ より不等式は明らかに成り立つ．

$\{\sigma \in P;\ k_\sigma = k\} \neq \emptyset$ とする．$\forall \sigma \in P$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \phi_\sigma \rangle| &= \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \operatorname{energy}_f(\{\sigma\}) \quad [(\because)\ \text{補題 2.14(ii)}] \\
&\le \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \operatorname{energy}_f(P) = \gamma \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) \cap K} |\phi_\sigma(x)| dx &\le \int_{E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) \cap K} C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} w_\sigma(x)^2 \lambda(I_\sigma) dx \\
&\qquad [(\because)\ \text{命題 2.12(v)}] \\
&= C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \lambda(I_\sigma) \int_{E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) \cap K} w_\sigma(x)^2 dx \\
&\le C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \lambda(I_\sigma) \int_{E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) \cap K} w_\sigma(x) \Big(\sup_{y \in K} w_\sigma(y) \Big) dx \\
&\le C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \lambda(I_\sigma) \int_{E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)} w_\sigma(x) dx \Big(\sup_{y \in K} w_\sigma(y) \Big) \\
&\le C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \lambda(I_\sigma) \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma)} w_\sigma(x) dx \Big(\sup_{y \in K} w_\sigma(y) \Big) \\
&\le C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \lambda(I_\sigma) \operatorname{mass}_{E, g}(P) \sup_{y \in K} w_\sigma(y)
\end{aligned}
$$

$$= C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \gamma' w\Big(\rho(x_\sigma, K)\lambda(J_\sigma)\Big)$$

$$\left[\begin{array}{l} (\because)\ \displaystyle\sup_{y\in K} w_\sigma(y) = \sup_{y \in K} \lambda(J_\sigma)\, w\Big(\lambda(J_\sigma)(y - x_\sigma)\Big) \\ \qquad\qquad\qquad [(\because)\ \text{命題 } 2.12(\mathrm{o})] \\ \qquad\qquad\quad \displaystyle = \lambda(J_\sigma) \sup_{y\in K} w\Big(\lambda(J_\sigma)(y - x_\sigma)\Big) \\ \qquad\qquad\quad = \lambda(J_\sigma)\, w\Big(\rho(x_\sigma, K)\lambda(J_\sigma)\Big). \\ \text{ただし，}\ \rho(x_\sigma, K) = \displaystyle\inf_{y\in K} |y - x_\sigma| \end{array}\right]$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} |\alpha_{\sigma,K}| &= \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} \left| \langle f, \phi_\sigma\rangle \int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K} \phi_\sigma(x)dx \right| \\ &\le \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} |\langle f, \phi_\sigma\rangle| \int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K} |\phi_\sigma(x)|dx \\ &\le \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} \gamma\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \cdot C_1\lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}}\gamma' w\Big(\rho(x_\sigma, K)\lambda(J_\sigma)\Big) \\ &= C_1\gamma\gamma' \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} \lambda(I_\sigma)\, w\Big(\rho(x_\sigma, K)\lambda(J_\sigma)\Big) \\ &= C_1\gamma\gamma' \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} 2^{-k_\sigma} w\Big(\rho(x_\sigma, K)\cdot 2^{k_\sigma}\Big) \\ &= 2^{-k} C_1\gamma\gamma' \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} w\Big(2^k\rho(x_\sigma, K)\Big). \end{aligned} \tag{53}$$

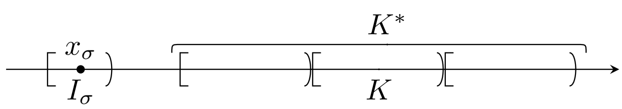
以降，$\displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma = k}} w\Big(2^k\rho(x_\sigma, K)\Big)$ を評価する：

$$\begin{aligned} &K \in \mathscr{K},\ l_K = l \ \Rightarrow\ \lambda(K) = 2^{-l_K} = 2^{-l}, \\ &k_\sigma = k \ge l \ \Rightarrow\ \lambda(I_\sigma) = 2^{-k_\sigma} = 2^{-k} \le 2^{-l} = \lambda(K) \end{aligned}$$

と $K \in \mathscr{J}$ より $I_\sigma \not\subset K^*$.

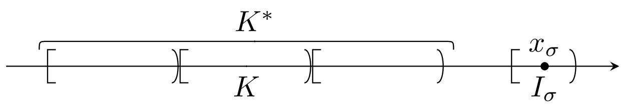
$\lambda(I_\sigma) < \lambda(K)$ のときは，Step 1-4 より $I_\sigma \subset K^*$ または $I_\sigma \cap K^* = \emptyset$ であるが，$I_\sigma \not\subset K^*$ より $I_\sigma \cap K^* = \emptyset$ である．このとき

I_σ は K^* の左側，i.e.,



または

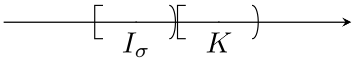
I_σ は K^* の右側，i.e.,

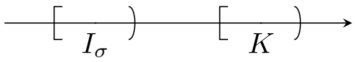


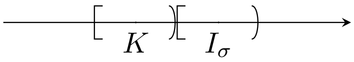
となるから

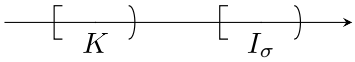
$$\rho(x_\sigma, K) \geq \frac{\lambda(I_\sigma)}{2} + \lambda(K) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-k} + 2^{-l} = 2^{-l} + 2^{-k-1}.$$

$\lambda(I_\sigma) = \lambda(K)$ のときは，$I_\sigma = K$ または $I_\sigma \cap K = \emptyset$ であるが，$I_\sigma = K$ とすると $I_\sigma = K \subset K^*$ となって $I_\sigma \not\subset K^*$ に反するので $I_\sigma \cap K = \emptyset$. このとき

(a) I_σ は K の左側で，I_σ の右端点 $=$ K の左端点，i.e., 

(b) I_σ は K の左側で，I_σ の右端点 $<$ K の左端点，i.e., 

(c) I_σ は K の右側で，I_σ の左端点 $=$ K の右端点，i.e., 

(d) I_σ は K の右側で，I_σ の左端点 $>$ K の右端点，i.e., 

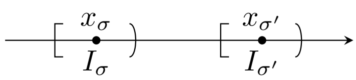
のいずれかとなる．(a), (c) のときは $I_\sigma \subset K^*$. (b), (d) のときは $I_\sigma \cap K^* = \emptyset$ となる．$I_\sigma \not\subset K^*$ なので $I_\sigma \cap K^* = \emptyset$. ゆえに

$$\rho(x_\sigma, K) \geq \frac{\lambda(I_\sigma)}{2} + \lambda(K) = 2^{-l} + 2^{-k-1}.$$

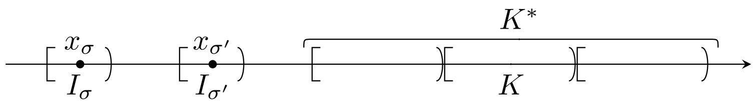
以上より

$$\rho(x_\sigma, K) \geq 2^{-l} + 2^{-k-1}. \tag{54}$$

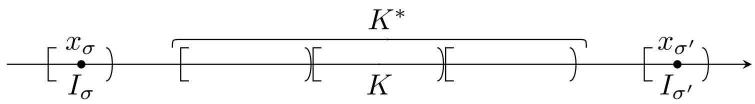
次に，$\sigma, \sigma' \in P$, $k_\sigma = k_{\sigma'} = k$, $\sigma \neq \sigma'$ とする．$\lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma} = 2^{k_{\sigma'}} = \lambda(J_{\sigma'})$ と $J_\sigma \cap J_{\sigma'} \neq \emptyset$ [cf. (39) 式] より $J_\sigma = J_{\sigma'}$. $\sigma = (I_\sigma, J_\sigma) \neq (I_{\sigma'}, J_{\sigma'}) = \sigma'$ なので $I_\sigma \neq I_{\sigma'}$ であり，$\lambda(I_\sigma) = 2^{-k_\sigma} = 2^{-k_{\sigma'}} = \lambda(I_{\sigma'})$ だから，$I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset$ である．

I_σ が $I_{\sigma'}$ の左側，i.e., 

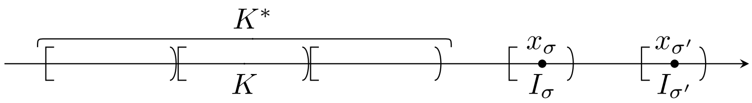
とすると，$I_\sigma \cap K^* = \emptyset$, $I_{\sigma'} \cap K^* = \emptyset$ より

(e) K^* が $I_{\sigma'}$ の右側，i.e., 

または

(f) K^* が I_σ と $I_{\sigma'}$ の間，i.e., 

または

(g) K^* が I_σ の左側，i.e., 

のいずれかである．$I_\sigma = \left[2^{-k}m_\sigma,\ 2^{-k}(m_\sigma + 1)\right)$, $I_{\sigma'} = \left[2^{-k}m_{\sigma'},\ 2^{-k}(m_{\sigma'} + 1)\right)$ (ただし $m_\sigma, m_{\sigma'} \in \mathbb{Z}$) とすると，$x_\sigma = 2^{-k}\left(m_\sigma + \frac{1}{2}\right)$, $x_{\sigma'} = 2^{-k}\left(m_{\sigma'} + \frac{1}{2}\right)$ であって

$$\text{(e) のとき，} \rho(x_\sigma, K) - \rho(x_{\sigma'}, K) = x_{\sigma'} - x_\sigma = 2^{-k}(m_{\sigma'} - m_\sigma),$$
$$\text{(g) のとき，} \rho(x_{\sigma'}, K) - \rho(x_\sigma, K) = x_{\sigma'} - x_\sigma = 2^{-k}(m_{\sigma'} - m_\sigma).$$

従って (e) および (g) のときは

$$\left|2^k\rho(x_\sigma,K)-2^k\rho(x_{\sigma'},K)\right|=m_{\sigma'}-m_\sigma\geq 1$$

となる．I_σ と $I_{\sigma'}$ の位置関係が逆のときでも

$$\left|2^k\rho(x_\sigma,K)-2^k\rho(x_{\sigma'},K)\right|=m_\sigma-m_{\sigma'}\geq 1.$$

ゆえに，次の不等式が成り立つ：

$$\left|2^k\rho(x_\sigma,K)-2^k\rho(x_{\sigma'},K)\right|\geq 1. \tag{55}$$

さて，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in P;\,k_\sigma=k} w\bigl(2^k\rho(x_\sigma,K)\bigr)\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の左側}}} w\bigl(2^k\rho(x_\sigma,K)\bigr)+\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の右側}}} w\bigl(2^k\rho(x_\sigma,K)\bigr)\\
&=\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty}\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の左側},\\ 2^k\rho(x_\sigma,K)\in[n+\frac12,\,n+1+\frac12)}} w\bigl(2^k\rho(x_\sigma,K)\bigr)+\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty}\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の右側},\\ 2^k\rho(x_\sigma,K)\in[n+\frac12,\,n+1+\frac12)}} w\bigl(2^k\rho(x_\sigma,K)\bigr)\\
&\qquad\Bigl[(\because)\ (54)\text{ 式より }2^k\rho(x_\sigma,K)\geq 2^{k-l}+\tfrac12\text{ なので，}2^k\rho(x_\sigma,K)\in\textstyle\bigsqcup_{n=2^{k-l}}^{\infty}[n+\frac12,\ n+1+\frac12)\Bigr]\\
&\leq\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty} w\Bigl(n+\frac12\Bigr)\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の左側},\\ 2^k\rho(x_\sigma,K)\in[n+\frac12,\,n+1+\frac12)}}1+\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty} w\Bigl(n+\frac12\Bigr)\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の右側},\\ 2^k\rho(x_\sigma,K)\in[n+\frac12,\,n+1+\frac12)}}1\\
&\qquad[(\because)\ w(\cdot)\text{ は }[0,\infty)\text{ で単調減少}]\\
&=\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty} w\Bigl(n+\frac12\Bigr)+\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty} w\Bigl(n+\frac12\Bigr)
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l}
(\because)\ \sigma\in P\text{ は，}k_\sigma=k,\ I_\sigma\text{ は }K^*\text{ の左 (右) 側，}2^k\rho(x_\sigma,K)\in\bigl[n+\frac12\ ,\ n+1+\frac12\bigr)\\
\text{を満たすとする．また }\sigma'\in P\text{ も，}k_{\sigma'}=k,\ I_{\sigma'}\text{ は }K^*\text{ の左 (右) 側で，}\sigma'\neq\sigma\text{ とす}\\
\text{る．このとき (55) 式より}\\
\qquad 2^k\rho(x_{\sigma'},K)\\
\qquad=\bigl(2^k\rho(x_{\sigma'},K)-2^k\rho(x_\sigma,K)\bigr)+2^k\rho(x_\sigma,K)\\
\qquad\begin{cases}<-1+\bigl(n+1+\frac12\bigr)=n+\frac12 & (2^k\rho(x_{\sigma'},K)-2^k\rho(x_\sigma,K)<0\text{ のとき}),\\ \geq 1+\bigl(n+\frac12\bigr)=n+1+\frac12 & (2^k\rho(x_{\sigma'},K)-2^k\rho(x_\sigma,K)>0\text{ のとき})\end{cases}\\
\qquad\notin\bigl[n+\frac12\ ,\ n+1+\frac12\bigr).\\
\text{従って，}\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k,\\ I_\sigma\text{は }K^*\text{の左 (右) 側},\\ 2^k\rho(x_\sigma,K)\in[n+\frac12,\,n+1+\frac12)}}1\leq 1
\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
&=2\sum_{n=2^{k-l}}^{\infty} w\Bigl(n+\frac12\Bigr)\\
&=\bigl(1+2^{k-l}\bigr)^{-2}\quad[(\because)\text{ 命題 }2.12\text{(ii)}].
\end{aligned}$$

よって，この評価を (53) 式に用いると

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k}} |\alpha_{\sigma,K}| &\le 2^{-k} C_1\gamma\gamma' \left(1+2^{k-l}\right)^{-2} \\
&\le 2^{-k-2} C_1\gamma\gamma' \quad [(\because)\ k-l\ge 0 \text{ より } \left(1+2^{k-l}\right)^{-2}\le 2^{-2}].
\end{aligned}
$$

Step 3-2

$$
\begin{aligned}
|\alpha_0| = \left|\sum_{(\sigma,K)\in W_0} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma,K}\right| &\le \sum_{(\sigma,K)\in W_0} |\alpha_{\sigma,K}| \quad [(\because)\ |\zeta_\sigma|=1] \\
&= \sum_{\sigma\in P} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(J_\sigma)\le\lambda(K)\le\lambda(J_\tau)}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&= \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)\le\lambda(I_\tau)}} \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ \lambda(I_\sigma)\le\lambda(K)}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&= \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K\ge k_\tau}} \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma\ge l_K}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&= \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K\ge k_\tau}} \sum_{k=l_K}^{\infty} \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&\le \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K\ge k_\tau}} \sum_{k=l_K}^{\infty} 2^{-k-2} C_1\gamma\gamma' \quad [(\because)\ \text{Step 3-1}] \\
&= C_1\gamma\gamma' \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K\ge k_\tau}} 2^{-l_K-1} \\
&= \frac{1}{2} C_1\gamma\gamma' \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)\le\lambda(I_\tau)}} \lambda(K) \quad \left[(\because)\ 2^{-l_K-1} = 2^{-l_K}\cdot 2^{-1} = \tfrac{1}{2}\lambda(K)\right] \\
&\le \frac{1}{2} C_1\gamma\gamma' \cdot 7\lambda(I_\tau) \quad [(\because)\ \text{Step 1-3-2}] \\
&= \frac{7}{2} C_1\gamma\gamma'\lambda(I_\tau).
\end{aligned}
$$

Step 4 ($|\alpha_1|$ の評価)

$$
\begin{aligned}
|\alpha_1| = \left|\sum_{(\sigma,K)\in W_1} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma,K}\right| &\le \sum_{(\sigma,K)\in W_1} |\alpha_{\sigma,K}| \quad [(\because)\ |\zeta_\sigma|=1] \\
&= \sum_{\sigma\in P} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(I_\tau)<\lambda(K)}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&= \sum_{\sigma\in P} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ k_\tau>l_K}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&= \sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} \sum_{\sigma\in P} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K=l}} |\alpha_{\sigma,K}|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} \sum_{k=k_\tau}^{\infty} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K=l}} \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k}} |\alpha_{\sigma,K}| \\
&\qquad \left[\begin{aligned} (\because)\ \sigma\in P\ \Rightarrow\ \tau\preceq\sigma\ &\Rightarrow I_\sigma\subset I_\tau \\ &\Rightarrow 2^{-k_\sigma}=\lambda(I_\sigma)\le\lambda(I_\tau)=2^{-k_\tau} \\ &\Rightarrow k_\tau\le k_\sigma \end{aligned}\right] \\
&\le \sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} \sum_{k=k_\tau}^{\infty} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K=l}} 2^{-k} C_1\gamma\gamma'\bigl(1+2^{k-l}\bigr)^{-2} \quad [(\because)\ \text{Step 3-1}] \\
&= C_1\gamma\gamma' \sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} \sum_{k=k_\tau}^{\infty} 2^{-k}\bigl(1+2^{k-l}\bigr)^{-2} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ l_K=l}} 1 \\
&= 3C_1\gamma\gamma' \sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} \sum_{k=k_\tau}^{\infty} 2^{-k}\bigl(1+2^{k-l}\bigr)^{-2} \quad [(\because)\ \text{Step 1-5}] \\
&< 3C_1\gamma\gamma' \sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} \sum_{k=k_\tau}^{\infty} 2^{-3k}2^{2l} \\
&= 3C_1\gamma\gamma' \left(\sum_{l=-\infty}^{k_\tau-1} 2^{2l}\right)\left(\sum_{k=k_\tau}^{\infty} 2^{-3k}\right) \\
&= 3C_1\gamma\gamma' \left(\sum_{l=-k_\tau+1}^{\infty} 2^{-2l}\right)\left(\sum_{k=k_\tau}^{\infty} 2^{-3k}\right) \\
&= 3C_1\gamma\gamma' \left(\sum_{l=-k_\tau+1}^{\infty} 2^{-2(l+k_\tau-1)}\cdot 2^{2(k_\tau-1)}\right)\left(\sum_{k=k_\tau}^{\infty} 2^{-3(k-k_\tau)}\cdot 2^{-3k_\tau}\right) \\
&= 3C_1\gamma\gamma' 2^{-k_\tau-2}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-2l}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k}\right) \\
&= 3C_1\gamma\gamma'\cdot\frac{1}{4}\lambda(I_\tau)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} \\
&= 3C_1\gamma\gamma'\cdot\frac{1}{4}\lambda(I_\tau)\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{7} \\
&= \frac{8}{7}C_1\gamma\gamma'\lambda(I_\tau).
\end{aligned}
$$

Step 5 ($|\alpha_2|$ の評価)

5 段階で示す.

Step 5-1 $K\in\mathscr{K}$ に対して

$$
G_K := K\cap E\cap \bigcup_{\substack{\sigma\in P;\\ \lambda(I_\sigma)>\lambda(K)}} g^{-1}(J_\sigma)
$$

とすると

$$
\lambda(G_K) \le \frac{2\gamma'\lambda(K)}{w\bigl(\frac{3}{2}\bigr)}
$$

である．

(Pr.) $K \in \mathscr{K}$ を固定する．$\lambda(I_\tau) \le \lambda(K)$ のとき

$$\sigma \in P \Rightarrow \tau \preceq \sigma \Rightarrow I_\sigma \subset I_\tau \Rightarrow \lambda(I_\sigma) \le \lambda(I_\tau) \le \lambda(K)$$

より $G_K = \emptyset$ であるから，$\lambda(G_K) = 0 \le \dfrac{2\gamma'\lambda(K)}{w\left(\frac{3}{2}\right)}$.

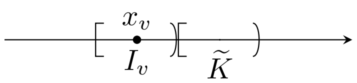
以下，$\lambda(I_\tau) > \lambda(K)$ とする．$\widetilde{K} \in \mathscr{D}$ を $K \subset \widetilde{K}$, $\lambda\big(\widetilde{K}\big) = 2\lambda(K)$ とする．K の極大性より $\widetilde{K} \notin \mathscr{J}$ [$(\because)$ $K \subsetneq \widetilde{K}$ より $\widetilde{K} \in \mathscr{J} \Rightarrow K \notin \mathscr{K}$]．$\mathscr{J}$ の定義より，$\lambda\big(\widetilde{K}\big) \ge \min_{\sigma \in P} \lambda(I_\sigma)$ で

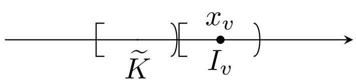
$$\exists \sigma \in P \ \ \text{s.t.} \ \ \lambda\big(\widetilde{K}\big) \ge \lambda(I_\sigma),\ I_\sigma \subset \widetilde{K}^*.$$

$\tau \preceq \sigma$, $\lambda(I_\sigma) \le \lambda\big(\widetilde{K}\big) = 2\lambda(K) \le \lambda(I_\tau)$ であるから，命題 2.11(iv) より

$$\exists ! v \in Q \ \ \text{s.t.} \ \ \begin{cases} \bullet\ \tau \preceq v \preceq \sigma, \\ \bullet\ \lambda(I_v) = \lambda\big(\widetilde{K}\big). \end{cases}$$

$I_\sigma \subset I_v$, $I_\sigma \subset \widetilde{K}^*$ より $I_v \cap \widetilde{K}^* \supset I_\sigma \cap \widetilde{K}^* = I_\sigma \neq \emptyset$．$\lambda(I_v) = \lambda\big(\widetilde{K}\big)$ なので，$I_v = \widetilde{K}$ または $I_v \cap \widetilde{K} = \emptyset$ だが，$I_v \cap \widetilde{K}^* \neq \emptyset$ より

$I_v = \widetilde{K}$ または 

または 

のいずれかとなる．このとき

$$|x - x_v| \le \frac{3}{2}\lambda(I_v) \quad (\forall x \in \widetilde{K}) \ \Leftrightarrow \ \frac{|x - x_v|}{\lambda(I_v)} \le \frac{3}{2} \quad (\forall x \in \widetilde{K})$$

となるから，$\forall x \in K$ に対して

$$\begin{aligned} w_v(x) &= \lambda(J_\tau)\, w\big(\lambda(J_v)(x - x_v)\big) \\ &= \frac{1}{\lambda(I_v)} w\left(\frac{|x - x_v|}{\lambda(I_v)}\right) \quad [(\because)\ w \text{ は偶関数}] \\ &\ge \frac{1}{2\lambda(K)} w\Big(\frac{3}{2}\Big) \quad [(\because)\ w(\cdot) \text{ は } [0,\infty) \text{ で単調減少}]. \end{aligned}$$

$\sigma \in P$, $v \preceq \sigma$ より

$$\int_{E \cap g^{-1}(J_v)} w_v(x)dx \le \mathrm{mass}_{E,g}(P) = \gamma'.$$

これと，先に述べた K 上での $w_v(\cdot)$ の下からの評価を合わせて

$$\begin{aligned} \gamma' &\ge \int_{E \cap g^{-1}(J_v)} w_v(x)dx \\ &\ge \int_{E \cap g^{-1}(J_v) \cap K} w_v(x)dx \\ &\ge \frac{1}{2\lambda(K)} w\Big(\frac{3}{2}\Big) \int_{E \cap g^{-1}(J_v) \cap K} dx = \frac{1}{2\lambda(K)} w\Big(\frac{3}{2}\Big) \lambda\left(E \cap g^{-1}(J_v) \cap K\right). \end{aligned}$$

整理して $\lambda\left(E \cap g^{-1}(J_v) \cap K\right) \le \dfrac{2\gamma'\lambda(K)}{w\left(\frac{3}{2}\right)}$.

今，$\sigma' \in P$, $\lambda(I_{\sigma'}) > \lambda(K)$ とする．$\lambda(I_{\sigma'}) \geq 2\lambda(K) = \lambda(\widetilde{K}) = \lambda(I_v)$ より

$$\lambda(J_v) = \frac{1}{\lambda(I_v)} \geq \frac{1}{\lambda(I_{\sigma'})} = \lambda(J_{\sigma'}).$$

$\tau \preceq \sigma'$, $\tau \preceq v$ より $J_\tau \subset J_{\sigma'}$, $J_\tau \subset J_v$ なので，$J_{\sigma'} \cap J_v \supset J_\tau \neq \emptyset$. このことから $J_{\sigma'} \subset J_v$, 従って $g^{-1}(J_{\sigma'}) \subset g^{-1}(J_v)$ となる．よって

$$G_K = K \cap E \cap \bigcup_{\substack{\sigma' \in P;\\ \lambda(I_{\sigma'}) > \lambda(K)}} g^{-1}(J_{\sigma'}) \subset K \cap E \cap g^{-1}(J_v).$$

Lebesgue 測度を取って $\lambda(G_K) \leq \lambda\left(K \cap E \cap g^{-1}(J_v)\right) \leq \dfrac{2\gamma'\lambda(K)}{w\left(\frac{3}{2}\right)}$.

Step 5-2 $\sigma, v \in P \setminus T_\tau$, $k_\sigma \neq k_v \Rightarrow J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_v^{\mathrm{r}} = \emptyset$.

(Pr.) $\sigma, v \in P \setminus T_\tau$ とする．$\sigma, v \in P$ より $\tau \preceq \sigma$, $\tau \preceq v$. $\sigma, v \notin T_\tau$ より，$\tau \not\preceq \sigma$ または $J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_\sigma^{\mathrm{r}}$, $\tau \not\preceq v$ または $J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_v^{\mathrm{r}}$. $\tau \preceq \sigma$, $\tau \preceq v$ であるから，$J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_\sigma^{\mathrm{r}}$ かつ $J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_v^{\mathrm{r}}$ である．

$k_\sigma \neq k_v$ とすると，$\lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma} \neq 2^{k_v} = \lambda(J_v)$. 従って $\lambda(J_\sigma) < \lambda(J_v)$ または $\lambda(J_\sigma) > \lambda(J_v)$.

$\lambda(J_\sigma) < \lambda(J_v)$ の場合，$\lambda(J_\sigma) \leq \frac{1}{2}\lambda(J_v) = \lambda(J_v^{\mathrm{r}})$ より $J_\sigma \subset J_v^{\mathrm{r}}$ または $J_\sigma \cap J_v^{\mathrm{r}} = \emptyset$. $J_\sigma \subset J_v^{\mathrm{r}}$ とすると，$J_\tau \subset J_\sigma$ [($\because$) $\tau \preceq \sigma$] より $J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\tau \subset J_\sigma \subset J_v^{\mathrm{r}}$. これは $J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_v^{\mathrm{r}}$ に矛盾するので $J_\sigma \not\subset J_v^{\mathrm{r}}$. ゆえに $J_\sigma \cap J_v^{\mathrm{r}} = \emptyset$ より $J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_v^{\mathrm{r}} = \emptyset$.

$\lambda(J_v) < \lambda(J_\sigma)$ の場合は，v と σ の役割を入れ替えると上の場合と同じとなり，$J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_v^{\mathrm{r}} = \emptyset$ である．

Step 5-3 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$v_2(x) = \Big|\sum_{(\sigma,K) \in W_2} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K}(x)\Big|$$

とすると

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists k \geq k_\tau \ \text{ s.t. } \ v_2(x) = \Big|\sum_{\substack{\sigma \in P;\\ k_\sigma = k}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x)\Big|.$$

(Pr.) まず

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\sigma,K) \in W_2} \left|\zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K}(x)\right| \\
&= \sum_{(\sigma,K) \in W_2} |\langle f, \phi_\sigma \rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K}(x) \quad [(\because)\ |\zeta_\sigma| = 1] \\
&= \sum_{\sigma \in P \setminus T_\tau} \sum_{\substack{K \in \mathscr{K};\\ \lambda(K) < \lambda(I_\sigma)}} |\langle f, \phi_\sigma \rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K}(x) \\
&= \sum_{\sigma \in P \setminus T_\tau} |\langle f, \phi_\sigma \rangle||\phi_\sigma(x)| \sum_{\substack{K \in \mathscr{K};\\ \lambda(K) < \lambda(I_\sigma)}} I_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K}(x) \\
&= \sum_{\sigma \in P \setminus T_\tau} |\langle f, \phi_\sigma \rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap \bigsqcup_{\substack{K \in \mathscr{K};\\ \lambda(K) < \lambda(I_\sigma)}} K}(x) \\
&\qquad \Big[(\because)\ \text{Step 1-2-3 (c) より } \{K;\ K \in \mathscr{K}\} \text{ は互いに素}\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{\sigma\in P} |\langle f,\phi_\sigma\rangle||\phi_\sigma(x)|I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}(x) \\
&< \infty \qquad [(\because)\ P\ \text{は有限集合}]
\end{aligned} \tag{56}
$$

に注意せよ．

$v_2(x)=0$ のときは，$k\gg k_\tau$ と取れば

$$\{\sigma\in P;\ k_\sigma=k\}=\emptyset$$

なので

$$\left|\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ k_\sigma=k}} \zeta_\sigma \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x)\right| = 0 = v_2(x).$$

以下，$v_2(x)>0$ とする．このとき "$x\notin E \Rightarrow v_2(x)=0$" だから $x\in E$．Step 1-2-3 (b), (c) より，$L\in\mathscr{K}$ を，$x\in L$ を満たすように取る．$x\notin K$ $(\forall K\in\mathscr{K}\setminus\{L\})$ より

$$
\begin{aligned}
v_2(x) &= \left|\sum_{\sigma\in P\setminus T_\tau} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)}} \zeta_\sigma \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x)\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{\sigma\in P\setminus T_\tau;\\ \lambda(I_\sigma)>\lambda(L)}} \zeta_\sigma \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}(x)\right| \quad [(\because)\ x\in E,\, L] \\
&= \left|\sum_{\substack{\sigma\in P\setminus T_\tau;\\ \lambda(I_\sigma)>\lambda(L)}} \zeta_\sigma \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{J_\sigma^{\mathrm{r}}}(g(x))\right|.
\end{aligned}
$$

今

$$P_x=\left\{\sigma\in P\setminus T_\tau;\ \lambda(I_\sigma)>\lambda(L),\ g(x)\in J_\sigma^{\mathrm{r}}\right\}$$

とする．$P_x\neq\emptyset$ である $[(\because)\ P_x=\emptyset\Rightarrow v_2(x)=0]$．このとき

$$v_2(x)=\left|\sum_{\sigma\in P_x} \zeta_\sigma \langle f,\phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x)\right| \tag{57}$$

である．$P_x\neq\emptyset$ より $v\in P_x$ を 1 つ取り，$k=k_v$ とすると，

$$v\in P\Rightarrow \tau\preceq v\Rightarrow k_\tau\leq k_v=k$$

で

$$P_x=\{\sigma\in P;\ k_\sigma=k\} \tag{58}$$

となる．なぜならば

$$
\begin{aligned}
\sigma\in(\text{右辺}) &\Rightarrow \lambda(I_\sigma)=2^{-k_\sigma}=2^{-k}=2^{-k_v}=\lambda(I_v)>\lambda(L), \\
&\qquad \lambda(J_\sigma)=2^{k_\sigma}=2^{k}=2^{k_v}=\lambda(J_v) \\
&\Rightarrow J_\sigma=J_v\ \text{または}\ J_\sigma\cap J_v=\emptyset \\
&\Rightarrow J_\sigma=J_v \quad [(\because)\ \tau\preceq\sigma,\ \tau\preceq v\ \text{より}\ J_\sigma\cap J_v\supset J_\tau\neq\emptyset] \\
&\Rightarrow J_\sigma^{\mathrm{r}}=J_v^{\mathrm{r}}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow g(x) \in J_v^{\mathrm{r}} = J_\sigma^{\mathrm{r}}.$$

$v \notin T_\tau$, $\tau \preceq v$ より $J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_v^{\mathrm{r}}$. $J_\sigma^{\mathrm{r}} = J_v^{\mathrm{r}}$ なので $J_\tau^{\mathrm{r}} \not\subset J_\sigma^{\mathrm{r}}$. 従って $\sigma \notin T_\tau$. 以上のことから, $\sigma \in$ (左辺).

一方

$$\begin{aligned} \sigma \in (\text{左辺}) \ \Rightarrow\ \sigma, v \in P \setminus T_\tau,\ g(x) \in J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap J_v^{\mathrm{r}} &\Rightarrow k_\sigma = k_v = k \qquad [(\because) \text{ Step 5-2}] \\ &\Rightarrow \sigma \in (\text{右辺}). \end{aligned}$$

さて, (58) 式と (57) 式より

$$v_2(x) = \left| \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) \right|$$

である.

Step 5-4 $v_2(x) \leq 2C_1\gamma$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

(Pr.) $v_2(x) > 0$ とする. $k \geq k_\tau$ を Step 5-3 のものとすると

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \left| \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) \right| \\ &\leq \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} |\langle f, \phi_\sigma \rangle| |\phi_\sigma(x)| \qquad [(\because)\ |\zeta_\sigma| = 1] \\ &\leq \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} \operatorname{energy}_f(\{\sigma\}) \cdot C_1 \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} w_\sigma(x) \quad [(\because) \text{ 補題 2.14, 命題 2.12(v)}] \\ &\leq \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} \lambda(I_\sigma) \gamma C_1 w_\sigma(x) \quad [(\because) \operatorname{energy}_f(\{\sigma\}) \leq \operatorname{energy}_f(P) = \gamma] \\ &= C_1\gamma \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} \lambda(I_\sigma) \cdot \lambda(J_\sigma) w\Big(\lambda(J_\sigma)(x - x_\sigma)\Big) \\ &= C_1\gamma \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} w\Big(2^{k_\sigma}(x - x_\sigma)\Big) \\ &= C_1\gamma \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ k_\sigma = k}} w\Big(2^{k}(x - x_\sigma)\Big) \\ &\leq C_1\gamma \sum_{n \in \mathbb{Z}} w\left(2^k x - n - \frac{1}{2}\right) \\ &\qquad \left[\begin{array}{l} (\because) \text{ Step 1-1 より} \\ \qquad\qquad \sigma, \sigma' \in P, k_\sigma = k_{\sigma'} = k, \sigma \neq \sigma' \Rightarrow J_\sigma = J_{\sigma'}, I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset \\ \text{である. } I_\sigma = \big[2^{-k}n_\sigma,\ 2^{-k}(n_\sigma + 1)\big)\ (n_\sigma \in \mathbb{Z}) \text{ とすると, } n_\sigma\ (\sigma \in P;\ k_\sigma = \\ k) \text{ は相異なる整数で, } x_\sigma = 2^{-k}\big(n_\sigma + \tfrac{1}{2}\big) \text{ より, } 2^k(x - x_\sigma) = 2^k x - n_\sigma - \tfrac{1}{2} \end{array}\right] \\ &\leq 2C_1\gamma \qquad [(\because) \text{ 命題 2.12(iv)}]. \end{aligned}$$

Step 5-5

$$
\begin{aligned}
|\alpha_2| &= \Big| \sum_{(\sigma,K)\in W_2} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma,K} \Big| \\
&= \Big| \sum_{(\sigma,K)\in W_2} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E\cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)\cap K} \phi_\sigma(x)dx \Big| \quad [\text{cf. } (46)] \\
&= \Big| \sum_{(\sigma,K)\in W_2} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{\mathbb{R}} \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)\cap K}(x)dx \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}} \sum_{(\sigma,K)\in W_2} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)\cap K}(x)dx \Big|
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
(\because)\ (56)\ \text{式より} \\
\int_{\mathbb{R}} \sum_{(\sigma,K)\in W_2} \Big| \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)\cap K}(x) \Big| dx \\
\le \int_{\mathbb{R}} \sum_{\sigma\in P} |\langle f, \phi_\sigma \rangle| |\phi_\sigma(x)| I_{E\cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)}(x)dx \\
\le \sum_{\sigma\in P} |\langle f, \phi_\sigma \rangle| \int_{\mathbb{R}} |\phi_\sigma(x)|dx < \infty \\
\text{なので，Fubini の定理が適用できる}
\end{array}
\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(\sigma,K)\in W_2} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)\cap K}(x) \Big| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} v_2(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{\{v_2(x)>0\}} v_2(x)dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} I_{G_K}(x) v_2(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
(\because)\ x \in \{v_2 > 0\}\ \text{とすると，}\ v_2(\cdot)\ \text{の定義より} \\
\qquad \exists(\sigma, K) \in W_2 \ \ \text{s.t.}\ \ x \in E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) \cap K. \\
W_2\ \text{の定義より} \\
\qquad \sigma \in P \setminus T_\tau,\ K \in \mathscr{K}\ ;\ \lambda(K) < \lambda(I_\sigma) \\
\text{なので，}\ x \in K \cap E \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) \subset K \cap E \cap g^{-1}(J_\sigma) \subset G_K.\ \ \sigma \in P \\
\text{より} \\
\qquad \tau \preceq \sigma \Rightarrow I_\sigma \subset I_\tau \Rightarrow \lambda(I_\sigma) \le \lambda(I_\tau) \\
\text{であるから}\ \lambda(K) < \lambda(I_\tau).\ \ \text{従って}\ x \in \bigcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} G_K.\ \ \text{よって} \\
\{v_2 > 0\} \subset \bigcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} G_K\ \text{である．}
\end{array}
\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} \int_{G_K} v_2(x)dx \\
&\le \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} 2C_1\gamma\lambda(G_K) \qquad [(\because)\ \text{Step 5-4}] \\
&\le \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} 2C_1\gamma \cdot \frac{2\gamma'\lambda(K)}{w\left(\frac{3}{2}\right)} \qquad [(\because)\ \text{Step 5-1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4C_1\gamma\gamma'}{w\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} \lambda(K) \\
&\le \frac{4C_1\gamma\gamma'}{w\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot 7\lambda(I_\tau) \qquad [(\because)\ \text{Step 1-3-2}] \\
&= \frac{28C_1\gamma\gamma'\lambda(I_\tau)}{w\left(\frac{3}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Step 6 ($|\alpha_3|$ の評価)

4 段階で示す.

Step 6-1 $P' = P\cap T_\tau$, $\widetilde{f} := \sum_{\sigma\in P'} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma$ とする．このとき

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2 \le C_3\gamma^2\lambda(I_\tau)$$

となる.

(Pr.) まず

$$\sigma,\sigma'\in P' \iff \sigma,\sigma'\in P\cap T_\tau \implies \sigma,\sigma'\in P,\ J_\tau^{\mathrm{r}}\subset J_\sigma^{\mathrm{r}},\ J_\tau^{\mathrm{r}}\subset J_{\sigma'}^{\mathrm{r}}$$

より

$$
\begin{aligned}
&k_\sigma\ne k_{\sigma'} \implies J_\sigma\ne J_{\sigma'},\ J_\sigma^{\mathrm{r}}\cap J_{\sigma'}^{\mathrm{r}}\ne\emptyset \implies \langle\phi_\sigma,\phi_{\sigma'}\rangle = 0 \quad [(\because)\ \text{命題 2.9(iv)}],\\
&\sigma\ne\sigma',\ k_\sigma = k_{\sigma'} \implies J_\sigma = J_{\sigma'} \quad [(\because)\ \text{Step 1-1}]
\end{aligned}
$$

に注意せよ．このとき

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2 &= \left\|\sum_{\sigma\in P'} \zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\phi_\sigma\right\|_2^2 \\
&= \sum_{\sigma,\,\sigma'\in P'} \zeta_\sigma \langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_{\sigma'}\rangle\langle\phi_{\sigma'},f\rangle\overline{\zeta_{\sigma'}} \\
&\le \sum_{\substack{\sigma,\,\sigma'\in P';\\ k_\sigma=k_{\sigma'}}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_{\sigma'}\rangle\langle\phi_{\sigma'},f\rangle| \\
&= \sum_{\substack{\sigma,\,\sigma'\in P';\\ k_\sigma=k_{\sigma'},\\ J_\sigma=J_{\sigma'}}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_{\sigma'}\rangle\langle\phi_{\sigma'},f\rangle| \\
&\le \sum_{\substack{\sigma,\,\sigma'\in P';\\ J_\sigma=J_{\sigma'}}} |\langle f,\phi_\sigma\rangle\langle\phi_\sigma,\phi_{\sigma'}\rangle\langle\phi_{\sigma'},f\rangle| \\
&\le C_3\Delta_f(P') \qquad [(\because)\ \text{補題 2.16(ii)}] \\
&= C_3\Delta_f(P\cap T_\tau) \\
&= C_3\lambda(I_\tau)\lambda(J_\tau)\Delta_f(P\cap T_\tau) \\
&\le C_3\lambda(I_\tau)\left(\mathrm{energy}_f(P)\right)^2 \qquad [\text{cf. energy の定義：定義 2.10}] \\
&= C_3\gamma^2\lambda(I_\tau).
\end{aligned}
$$

Step 6-2 $m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\widetilde{f_m} := \sum_{\substack{\sigma\in P';\\ k_\sigma\le m}} \zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\phi_\sigma$$

とする．このとき $\forall x, \forall x' \in \mathbb{R}$ with $|x-x'| \le \frac{1}{2^m}$ に対して

$$|\widetilde{f_m}(x)| \le \frac{1}{2} C_1 \widetilde{f}^*(x').$$

ここで

$$\widetilde{f}^*(x') = \sup_{a<b;\, a \le x' \le b} \frac{1}{b-a} \int_a^b |\widetilde{f}(t)| dt.$$

(Pr.) $m < k_\tau$ のときは，$\{\sigma' \in P';\ k_\sigma \le m\} = \emptyset$ $[(\because)\ \sigma \in P' \Rightarrow \tau \preceq \sigma \Rightarrow k_\tau \le k_\sigma]$ より

$$|\widetilde{f_m}(x)| = 0 \le \frac{1}{2} C_1 \widetilde{f}^*(x') \quad (\forall x, \forall x' \in \mathbb{R}).$$

以下，$m \ge k_\tau$ とする．

$\widehat{J} \in \mathscr{D}$ を，$J_\tau \subset \widehat{J}$, $\lambda(\widehat{J}) = 2^m$ なるものとする．命題 2.7 より，このような $\widehat{J}$ はただ 1 つ存在する．$\widehat{y} = \mathrm{c}(\widehat{J})$ とするとき

$$\psi = S_{-\widehat{y}} D_{\frac{2^{-m}}{3}} \widehat{\phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

とおく．すなわち

$$\psi(y) = \left(S_{-\widehat{y}} D_{\frac{2^{-m}}{3}} \widehat{\phi}\right)(y) = \left(D_{\frac{2^{-m}}{3}} \widehat{\phi}\right)(y-\widehat{y}) = \widehat{\phi}\Big(\frac{2^{-m}}{3}(y-\widehat{y})\Big), \quad y \in \mathbb{R} \tag{59}$$

である．

<u>Step 6-2-1</u> $\sigma \in P'$, $\widehat{\phi_\sigma}(y) \ne 0$ に対して

$$\psi(y) = \begin{cases} 1, & k_\sigma \le m, \\ 0, & k_\sigma > m. \end{cases}$$

(Pr.) $\sigma \in P'$, $\widehat{\phi_\sigma}(y) \ne 0$ とする．まず，

$$\begin{aligned}
& 0 \ne \widehat{\phi_\sigma}(y) = \lambda(I_\sigma)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-1} x_\sigma (y - y_\sigma^{\mathrm{l}})} \widehat{\phi}\Big(\lambda(I_\sigma)(y - y_\sigma^{\mathrm{l}})\Big) \quad [\text{cf. 命題 2.9(o)}] \\
& \Rightarrow\ \widehat{\phi}\Big(\lambda(I_\sigma)(y - y_\sigma^{\mathrm{l}})\Big) \ne 0 \\
& \Rightarrow\ \lambda(I_\sigma)|y - y_\sigma^{\mathrm{l}}| \le \frac{1}{5} \quad [(\because)\ \widehat{\phi} \le I_{[-\frac{1}{5},\, \frac{1}{5}]}] \\
& \Rightarrow\ |y - y_\sigma^{\mathrm{l}}| \le \frac{1}{5}\lambda(J_\sigma) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\lambda(J_\sigma) = \frac{2}{5}\lambda(J_\sigma^{\mathrm{l}}) < \frac{1}{2}\lambda(J_\sigma^{\mathrm{l}}) \\
& \Rightarrow\ y \in J_\sigma^{\mathrm{l}}
\end{aligned} \tag{60}$$

に注意せよ．また $J_\tau^{\mathrm{r}} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}}$ $[(\because)\ P' = P \cap T_\tau$ より $\sigma \in T_\tau]$ と $J_\tau \subset \widehat{J}$ より，$J_\sigma \cap \widehat{J} \supset J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap \widehat{J} \supset J_\tau^{\mathrm{r}} \ne \emptyset$ にも注意せよ．

$k_\sigma \le m$ のときは

$$\begin{aligned}
& \lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma} \le 2^m = \lambda(\widehat{J}) \\
& \Rightarrow\ J_\sigma \subset \widehat{J} \text{ または } J_\sigma \cap \widehat{J} = \emptyset \\
& \Rightarrow\ J_\sigma \subset \widehat{J} \quad [(\because) \text{ 上述の注意より } J_\sigma \cap \widehat{J} \ne \emptyset] \\
& \Rightarrow\ |y - \widehat{y}| \le \frac{1}{2} \cdot 2^m \quad \Big[(\because)\ y \in J_\sigma^{\mathrm{l}} \Rightarrow y \in J_\sigma \subset \widehat{J} \Rightarrow |y - \widehat{y}| \le \tfrac{1}{2}\lambda(\widehat{J}) = \tfrac{1}{2} \cdot 2^m\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \left|\frac{2^{-m}}{3}(y-\widehat{y})\right| = \frac{2^{-m}}{3}|y-\widehat{y}| \le \frac{2^{-m}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^m = \frac{1}{6} \\
&\Rightarrow\ \psi(y) = 1 \quad [(\because)\ I_{[-\frac{1}{6},\,\frac{1}{6}]} \le \widehat{\phi} \le 1].
\end{aligned}
$$

$k_\sigma > m$ のときは

$$
\begin{aligned}
&k_\sigma - 1 \ge m \\
&\quad\Rightarrow\ \lambda\left(J_\sigma^{\mathrm{r}}\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(J_\sigma\right) = \frac{1}{2}\cdot 2^{k_\sigma} = 2^{k_\sigma-1} \ge 2^m = \lambda\big(\widehat{J}\big) \\
&\quad\Rightarrow\ \widehat{J} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}}\ \text{または}\ \widehat{J} \cap J_\sigma^{\mathrm{r}} = \emptyset \\
&\quad\Rightarrow\ \widehat{J} \subset J_\sigma^{\mathrm{r}} \quad [(\because)\ \text{上述の注意より}\,\widehat{J} \cap J_\sigma^{\mathrm{r}} \ne \emptyset] \\
&\quad\Rightarrow\ \widehat{y} \in J_\sigma^{\mathrm{r}} \\
&\quad\Rightarrow\ y_\sigma \le \widehat{y} \\
&\quad\Rightarrow\ \widehat{y} - y_\sigma \ge \frac{1}{2}\cdot 2^m \\
&\qquad\quad \left[\begin{aligned}
&(\because)\quad \widehat{y} - y_\sigma < \tfrac{1}{2}\cdot 2^m \\
&\qquad\quad \Rightarrow\ \widehat{y} - \tfrac{1}{2}\cdot 2^m < y_\sigma \le \widehat{y} < \widehat{y} + \tfrac{1}{2}\cdot 2^m \\
&\qquad\quad \Rightarrow\ y_\sigma \in \left(\widehat{y} - \tfrac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J}\big),\ \widehat{y} + \tfrac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J}\big)\right) = \big(\widehat{J}\big)^\circ \\
&\qquad\quad \Rightarrow\ J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap \widehat{J} \ne \emptyset \\
&\qquad\quad \Rightarrow\ \widehat{J} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} \quad \left[\begin{aligned}&\because\ \lambda\left(J_\sigma^{\mathrm{l}}\right) = \tfrac{1}{2}\lambda\left(J_\sigma\right) = 2^{k_\sigma-1} \ge 2^m = \lambda\big(\widehat{J}\big) \\ &\ \text{より}\ \widehat{J} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}}\ \text{または}\ \widehat{J} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} = \emptyset\end{aligned}\right] \\
&\qquad\quad \Rightarrow\ \emptyset \ne \widehat{J} \subset J_\sigma^{\mathrm{l}} \cap J_\sigma^{\mathrm{r}} = \emptyset. \\
&\text{これは矛盾}
\end{aligned}\right] \\
&\quad\Rightarrow\ \widehat{y} - y = (\widehat{y} - y_\sigma) + (y_\sigma - y) \ge \frac{1}{2}\cdot 2^m + \frac{1}{10}\cdot 2^m = \frac{3}{5}\cdot 2^m \\
&\qquad\quad \left[\begin{aligned}
&(\because)\ y_\sigma - y_\sigma^{\mathrm{l}} = \tfrac{1}{4}\lambda\left(J_\sigma\right)\ \text{と}\ |y - y_\sigma^{\mathrm{l}}| \le \tfrac{1}{5}\lambda\left(J_\sigma\right)\ \text{より} \\
&\qquad y_\sigma - y = y_\sigma - y_\sigma^{\mathrm{l}} + y_\sigma^{\mathrm{l}} - y \\
&\qquad\qquad = (y_\sigma - y_\sigma^{\mathrm{l}}) - (y - y_\sigma^{\mathrm{l}}) \\
&\qquad\qquad \ge (y_\sigma - y_\sigma^{\mathrm{l}}) - |y - y_\sigma^{\mathrm{l}}| \\
&\qquad\qquad \ge \tfrac{1}{4}\lambda\left(J_\sigma\right) - \tfrac{1}{5}\lambda\left(J_\sigma\right) \\
&\qquad\qquad = \tfrac{1}{20}\lambda\left(J_\sigma\right) \\
&\qquad\qquad = \tfrac{1}{20}\cdot 2^{k_\sigma} = \tfrac{1}{10}\cdot 2^{k_\sigma-1} \ge \tfrac{1}{10}\cdot 2^m
\end{aligned}\right] \\
&\quad\Rightarrow\ \left|\frac{2^{-m}}{3}(\widehat{y} - y)\right| = \frac{2^{-m}}{3}(\widehat{y} - y) \ge \frac{2^{-m}}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2^m = \frac{1}{5} \\
&\quad\Rightarrow\ \psi(y) = 0 \\
&\qquad\quad \left[\begin{aligned}
&(\because)\ 0 \le \widehat{\phi} \le I_{[-\frac{1}{5},\,\frac{1}{5}]}\ \text{と}\ \widehat{\phi}\ \text{の連続性より} \\
&\qquad y \ge \tfrac{1}{5}\ \ \Rightarrow\ \widehat{\phi}(y) = \widehat{\phi}(y+) = 0, \\
&\qquad y \le -\tfrac{1}{5}\ \ \Rightarrow\ \widehat{\phi}(y) = \widehat{\phi}(y-) = 0
\end{aligned}\right].
\end{aligned}
$$

Step 6-2-2 Step 6-2-1 より，$\forall\sigma\in P'$, $\forall y\in\mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{\phi_\sigma}(y)\psi(y)=\begin{cases}\widehat{\phi_\sigma}(y), & k_\sigma\leq m,\\ 0, & k_\sigma>m\end{cases}$$

となるから

$$\begin{aligned}
(\widetilde{f_m})\widehat{\ }&=\Big(\sum_{\substack{\sigma\in P';\\ k_\sigma\leq m}}\zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\phi_\sigma\Big)\widehat{\ }\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in P';\\ k_\sigma\leq m}}\zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\widehat{\phi_\sigma}\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in P';\\ k_\sigma\leq m}}\zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\widehat{\phi_\sigma}\psi\\
&=\sum_{\sigma\in P'}\zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\widehat{\phi_\sigma}\psi\\
&=\Big(\sum_{\sigma\in P'}\zeta_\sigma\langle f,\phi_\sigma\rangle\phi_\sigma\Big)\widehat{\ }\psi\\
&=(\widetilde{f})\widehat{\ }\psi\\
&=(\widetilde{f})\widehat{\ }(\check{\psi})\widehat{\ }\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\widetilde{f}*\check{\psi}\big)\widehat{\ }\quad\left[\begin{array}{l}(\because)\ \widetilde{f}\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ \psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})\text{ より},\\ \text{命題 1.10(iii) を適用}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\widetilde{f_m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{f}*\check{\psi}.$$

命題 2.4(v) より

$$\begin{aligned}
\check{\psi}&=\big(S_{-\widehat{y}}D_{\frac{2^{-m}}{3}}\widehat{\phi}\big)\check{\ }\\
&=M_{\widehat{y}}\big(D_{\frac{2^{-m}}{3}}\widehat{\phi}\big)\check{\ }\\
&=M_{\widehat{y}}\Big(\frac{2^{-m}}{3}\Big)^{-1}D_{(\frac{2^{-m}}{3})^{-1}}(\widehat{\phi})\check{\ }\\
&=3\cdot 2^m M_{\widehat{y}}D_{3\cdot 2^m}\phi.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\check{\psi}(x)&=3\cdot 2^m\big(M_{\widehat{y}}D_{3\cdot 2^m}\phi\big)(x)\\
&=3\cdot 2^m e^{\sqrt{-1}\widehat{y}x}(D_{3\cdot 2^m}\phi)(x)\\
&=3\cdot 2^m e^{\sqrt{-1}\widehat{y}x}\phi(3\cdot 2^m x)
\end{aligned}$$

であるから，

$$\widetilde{f_m}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(x-t)\check{\psi}(t)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x-t) \cdot 3 \cdot 2^m e^{\sqrt{-1}\widehat{y}t} \phi(3 \cdot 2^m t) dt.$$

絶対値をとって

$$\begin{aligned}
|\widetilde{f_m}(x)| &\leq \frac{3 \cdot 2^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x-t)||\phi(3 \cdot 2^m t)| dt \\
&\leq \frac{3 \cdot 2^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x-t)| C_1 \left(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)^2\right) dt \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.12(\mathrm{v})] \\
&\leq \frac{3 \cdot 2^m C_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x-t)| \left(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)\right) dt \quad [(\because)\ 0 \leq w(\cdot) \leq 1] \\
&= \frac{3 \cdot 2^m C_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x+t)| \left(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)\right) dt \quad [(\because)\ w(\cdot) \text{ は偶関数}].
\end{aligned}$$

ここで，$0 < (w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)) \leq w(3)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ で，$(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m \cdot))$ は $[2^{-m}, \infty)$ 上で単調減少，$(-\infty, -2^{-m}]$ 上で単調増加，$[-2^{-m}, 2^{-m}]$ 上で定数 $(= w(3))$ であるから，補題 2.3 より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x+t)| \left(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)\right) dt \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)\right) dt \right) \sup_{\substack{a<b; \\ a \leq -2^{-m},\ b \geq 2^{-m}}} \frac{1}{b-a} \int_a^b |\widetilde{f}(x+t)| dt.
\end{aligned}$$

この評価を上式に用いると

$$\begin{aligned}
|\widetilde{f_m}(x)| &\leq \frac{3 \cdot 2^m C_1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(w(3) \wedge w(3 \cdot 2^m t)\right) dt \right) \sup_{\substack{a<b; \\ a \leq -2^{-m},\ b \geq 2^{-m}}} \frac{1}{b-a} \int_a^b |\widetilde{f}(x+t)| dt \\
&= \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(w(3) \wedge w(s)\right) ds \right) \sup_{a \leq -2^{-m},\ b \geq 2^{-m}} \frac{1}{b-a} \int_a^b |\widetilde{f}(x+t)| dt \\
&\qquad [(\because)\ \text{変数変換 } s = 3 \cdot 2^m t] \\
&\leq \frac{C_1}{2} \sup_{a \leq -2^{-m},\ b \geq 2^{-m}} \frac{1}{b-a} \int_a^b |\widetilde{f}(x+t)| dt \\
&\qquad \left[\begin{array}{l} (\because)\ \int_{\mathbb{R}} \left(w(3) \wedge w(s)\right) ds \leq \int_{\mathbb{R}} w(s) ds = 1 \quad [\text{cf. 命題 } 2.12(\mathrm{i})], \\ \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
&= \frac{C_1}{2} \sup_{a \leq -\frac{1}{2^{-m}},\ b \geq \frac{1}{2^{-m}}} \frac{1}{(b+x)-(a+x)} \int_{a+x}^{b+x} |\widetilde{f}(t)| dt.
\end{aligned}$$

今，$|x - x'| \leq \frac{1}{2^m}$ $\left(\Leftrightarrow -\frac{1}{2^m} \leq x - x' \leq \frac{1}{2^m}\right)$ とすると

$$a \leq -\frac{1}{2^m},\ b \geq \frac{1}{2^m} \ \Rightarrow\ a + x \leq x - \frac{1}{2^m} \leq x' \leq x + \frac{1}{2^m} \leq b + x$$

より

$$\begin{aligned}
&\sup_{a \leq -\frac{1}{2^m},\ b \geq \frac{1}{2^m}} \frac{1}{(b+x)-(a+x)} \int_{a+x}^{b+x} |\widetilde{f}(t)| dt \\
&\leq \sup_{a<b;\, a \leq x' \leq b} \frac{1}{b-a} \int_a^b |\widetilde{f}(t)| dt = \widetilde{f}^*(x') \quad [\text{cf. 定義 } 2.1].
\end{aligned}$$

ゆえに

$$|\widetilde{f_m}(x)| \leq \frac{C_1}{2}\widetilde{f}^*(x') \quad \Big(x,\, x' \in \mathbb{R} \ \text{ with } \ |x-x'| \leq \tfrac{1}{2^m}\Big)$$

が分かる．

$\underline{\underline{\text{Step 6-3}}}$　$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$v_3(x) = \Big|\sum_{(\sigma,K)\in W_3} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x)\Big|$$

とすると，$\forall L \in \mathscr{K}$, $\forall x$, $\forall x' \in L$ に対して

$$v_3(x) \leq C_1 \widetilde{f}^*(x').$$

(Pr.)　まず

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\sigma,K)\in W_3} \big|\zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x)\big| \\
&= \sum_{(\sigma,K)\in W_3} |\langle f, \phi_\sigma\rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x) \quad [(\because)\ |\zeta_\sigma| = 1] \\
&= \sum_{\sigma\in P'} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)}} |\langle f, \phi_\sigma\rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x) \\
&= \sum_{\sigma\in P'} |\langle f, \phi_\sigma\rangle||\phi_\sigma(x)| \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)}} I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x) \\
&= \sum_{\sigma\in P'} |\langle f, \phi_\sigma\rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap \bigsqcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)}} K}(x) \\
&\qquad \Big[(\because)\ \text{Step 1-2-3 (c) より } \{K;\, K \in \mathscr{K}\} \text{ は互いに素}\Big] \\
&\leq \sum_{\sigma\in P'} |\langle f, \phi_\sigma\rangle||\phi_\sigma(x)| I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}(x) < \infty
\end{aligned} \tag{61}$$

に注意せよ．このことより

$$v_3(x) = \Bigg|\sum_{\sigma\in P'} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\sigma)}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x)\Bigg|$$

である．

$L \in \mathscr{K}$, $x \in L$ とする．$x \notin E$ のときは $v_3(x) = 0$ となるので $x \in E$ とする．$K \in \mathscr{K}$, $K \neq L$ に対して $x \notin K$ である $[(\because)$ $\mathscr{K}$ の元は互いに素：$K \cap L = \emptyset]$ から

$$\begin{aligned}
v_3(x) &= \Bigg|\sum_{\substack{\sigma\in P';\\ \lambda(L)<\lambda(I_\sigma)}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x) I_{g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}(x)\Bigg| \\
&= \Bigg|\sum_{\substack{\sigma\in P';\\ \lambda(L)<\lambda(I_\sigma),\, g(x)\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x)\Bigg| \\
&= \Bigg|\sum_{\substack{\sigma\in P';\\ l_L>k_\sigma,\, g(x)\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma\rangle \phi_\sigma(x)\Bigg|.
\end{aligned} \tag{62}$$

$\{\sigma \in P';\ k_\sigma < l_L,\ g(x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma\} = \emptyset \Rightarrow v_3(x) = 0$ より，$\{\sigma \in P';\ k_\sigma < l_L,\ g(x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma\} \neq \emptyset$ とする．

$m := \min\{k_\sigma; \sigma \in P',\ k_\sigma < l_L,\ g(x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma\}$ とすると，$\sigma \in P'$, $k_\sigma < l_L$ に対して次が成り立つ：

$$g(x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma \Leftrightarrow k_\sigma \geq m.$$

“$\Rightarrow$” は明らかなので，“$\Leftarrow$” を確かめる．$\sigma_0 \in P'$ を，$m = k_{\sigma_0} < l_L$, $g(x) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0}$ と取る．このとき

$$\begin{aligned}
&\sigma \in P',\ k_\sigma < l_L,\ k_\sigma \geq m \\
&\Rightarrow\ \lambda\left(J^{\mathrm{r}}_\sigma\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(J_\sigma\right) = \frac{1}{2}\cdot 2^{k_\sigma} \geq \frac{1}{2}\cdot 2^m = \frac{1}{2}\cdot 2^{k_{\sigma_0}} = \frac{1}{2}\lambda\left(J_{\sigma_0}\right) = \lambda\left(J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0}\right) \\
&\Rightarrow\ J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0} \subset J^{\mathrm{r}}_\sigma \quad \text{または} \quad J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0} \cap J^{\mathrm{r}}_\sigma = \emptyset \\
&\Rightarrow\ J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0} \subset J^{\mathrm{r}}_\sigma \qquad \left[\begin{aligned}(\because)\ \sigma, \sigma_0 \in P' \ \Rightarrow\ \sigma, \sigma_0 \in T_\tau \ &\Rightarrow J^{\mathrm{r}}_\tau \subset J^{\mathrm{r}}_\sigma,\ J^{\mathrm{r}}_\tau \subset J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0} \\ &\Rightarrow J^{\mathrm{r}}_\sigma \cap J^{\mathrm{r}}_{\sigma_0} \supset J^{\mathrm{r}}_\tau \neq \emptyset\end{aligned}\right] \\
&\Rightarrow\ g(x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma.
\end{aligned}$$

従って (62) 式より

$$\begin{aligned}
v_3(x) &= \left| \sum_{\substack{\sigma \in P'; \\ k_\sigma < l_L,\, k_\sigma \geq m}} \zeta_\sigma \left\langle f, \phi_\sigma \right\rangle \phi_\sigma(x) \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{\sigma \in P'; \\ k_\sigma < l_L}} \zeta_\sigma \left\langle f, \phi_\sigma \right\rangle \phi_\sigma(x) - \sum_{\substack{\sigma \in P'; \\ k_\sigma < m}} \zeta_\sigma \left\langle f, \phi_\sigma \right\rangle \phi_\sigma(x) \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{\sigma \in P'; \\ k_\sigma \leq l_L - 1}} \zeta_\sigma \left\langle f, \phi_\sigma \right\rangle \phi_\sigma(x) - \sum_{\substack{\sigma \in P'; \\ k_\sigma \leq m-1}} \zeta_\sigma \left\langle f, \phi_\sigma \right\rangle \phi_\sigma(x) \right| \\
&= \left| \widetilde{f}_{l_L - 1}(x) - \widetilde{f}_{m-1}(x) \right|.
\end{aligned}$$

$x' \in L$ に対して

$$x,\, x' \in L = \left[\mathrm{c}\left(L\right) - \frac{\lambda\left(L\right)}{2},\ \mathrm{c}\left(L\right) + \frac{\lambda\left(L\right)}{2}\right)$$

より

$$|x - x'| \leq \lambda\left(L\right) = 2^{-l_L} = \frac{1}{2^{l_L}} < \frac{1}{2^{l_L - 1}}.$$

$m < l_L$ より $m \leq l_L - 1$ なので $\dfrac{1}{2^{l_L-1}} \leq \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{2^{m-1}}$．よって Step 6-2 より

$$\begin{aligned}
v_3(x) &\leq \left|\widetilde{f}_{l_L-1}(x)\right| + \left|\widetilde{f}_{m-1}(x)\right| \\
&\leq \frac{C_1}{2}\widetilde{f}^*(x') + \frac{C_1}{2}\widetilde{f}^*(x') = C_1 \widetilde{f}^*(x').
\end{aligned}$$

Step 6-4

$$
\begin{aligned}
|\alpha_3| &= \Bigg| \sum_{(\sigma,K)\in W_3} \zeta_\sigma \alpha_{\sigma,K} \Bigg| \\
&= \Bigg| \sum_{(\sigma,K)\in W_3} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K} \phi_\sigma(x)dx \Bigg| \quad \text{[cf. (46)]} \\
&= \Bigg| \sum_{(\sigma,K)\in W_3} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{\mathbb{R}} \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x)dx \Bigg| \\
&= \Bigg| \int_{\mathbb{R}} \sum_{(\sigma,K)\in W_3} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x)dx \Bigg| \\
&\qquad [\,(\because)\ (61)\ \text{式より Fubini の定理が適用できる}] \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \Bigg| \sum_{(\sigma,K)\in W_3} \zeta_\sigma \langle f, \phi_\sigma \rangle \phi_\sigma(x) I_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})\cap K}(x) \Bigg| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} v_3(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{\{v_3(x)>0\}} v_3(x)dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} I_{G_K}(x) v_3(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
(\because)\ x \in \{v_3 > 0\} \text{ とすると，} v_3(\cdot) \text{ の定義より} \\
\qquad\qquad \exists(\sigma,K) \in W_3 \ \ \text{s.t.}\ \ x \in E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \cap K. \\
W_3 \text{ の定義より} \\
\qquad\qquad\qquad \sigma \in P',\ K \in \mathscr{K};\ \lambda(K) < \lambda(I_\sigma) \\
\text{なので，}\ x \in K \cap E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}}) \subset K \cap E \cap g^{-1}(J_\sigma) \subset G_K. \\
\sigma \in P \text{ より} \\
\qquad\qquad\qquad \tau \preceq \sigma \Rightarrow I_\sigma \subset I_\tau \Rightarrow \lambda(I_\sigma) \le \lambda(I_\tau) \\
\text{であるから } \lambda(K) < \lambda(I_\tau).\ \text{従って } x \in \bigcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} G_K. \\
\text{よって } \{v_3 > 0\} \subset \bigcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} G_K \text{ である}
\end{array}
\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} \int_{G_K} v_3(x)dx \\
&\le \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} \lambda(G_K) \frac{C_1}{\lambda(K)} \int_K \widetilde{f}^*(t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
(\because)\ \text{定義より } G_K = K \cap E \cap \bigcup_{\substack{\sigma\in P;\\ \lambda(I_\sigma)>\lambda(K)}} g^{-1}(J_\sigma) \subset K. \\
\text{Step 6-3 より，} K \text{ 上で} \\
\qquad v_3(x) = \frac{1}{\lambda(K)} \int_K v_3(x)dx' \le \frac{1}{\lambda(K)} \int_K C_1 \widetilde{f}^*(x')dx' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{C_1}{\lambda(K)} \int_K \widetilde{f}^*(x')dx' \\
\text{なので} \\
\qquad\qquad \int_{G_K} v_3(x)dx \le \int_{G_K} dx \frac{C_1}{\lambda(K)} \int_K \widetilde{f}^*(t)dt \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda(G_K) \frac{C_1}{\lambda(K)} \int_K \widetilde{f}^*(t)dt
\end{array}
\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} \frac{2\gamma'\lambda(K)}{w\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{C_1}{\lambda(K)}\int_K \widetilde{f}^*(t)dt \quad [(\because)\ \text{Step 5-1}]\\
&= \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} \int_K \widetilde{f}^*(t)dt\\
&= \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)} \int_{\bigsqcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} K} \widetilde{f}^*(t)dt\\
&\le \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)} \int_{\widehat{I_\tau}} \widetilde{f}^*(t)dt
\end{aligned}
$$

$\left[\ (\because)\ \text{Step 1-3-1 より，} \forall K\in\mathscr{K};\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau) \text{ に対して } K\subset\widehat{I_\tau} \text{ なので } \bigsqcup_{\substack{K\in\mathscr{K};\\ \lambda(K)<\lambda(I_\tau)}} K\subset\widehat{I_\tau}\ \right]$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)}\lambda\left(\widehat{I_\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\widetilde{f}^*\right\|_2 \quad [(\because)\ \text{Schwarz の不等式}]\\
&\le \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)}\left(7\lambda(I_\tau)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2\left(\frac{2}{2-1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\widetilde{f}\right\|_2\\
&\qquad [(\because)\ \text{Step 1-3-1 の } \widehat{I_\tau} \text{ の定義，} \widetilde{f}\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ \text{定理 2.3}]\\
&\le \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)}7^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}C_3^{\frac{1}{2}}\gamma\lambda(I_\tau)^{\frac{1}{2}} \quad [(\because)\ \text{Step 6-1}]\\
&= \frac{2\gamma' C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)}7^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}C_3^{\frac{1}{2}}\lambda(I_\tau)\gamma\\
&= \frac{4C_1}{w\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{14C_3}\gamma\gamma'\lambda(I_\tau).
\end{aligned}
$$

Step 7 (結果)

(52) 式と，Step 3-2, 4, 5-5, 6-4 より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in P}\left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\right|\\
&= \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\
&\le |\alpha_0|+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\\
&\le \frac{7}{2}C_1\gamma\gamma'\lambda(I_\tau)+\frac{8}{7}C_1\gamma\gamma'\lambda(I_\tau)+\frac{28C_1\gamma\gamma'\lambda(I_\tau)}{w\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{4C_1\sqrt{14C_3}\gamma\gamma'\lambda(I_\tau)}{w\left(\frac{2}{3}\right)}\\
&= C_1\left(\frac{7}{2}+\frac{8}{7}+\frac{28}{w\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{4\sqrt{14C_3}}{w\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\gamma\gamma'\lambda(I_\tau)\\
&= C_7\gamma\gamma'\lambda(I_\tau).
\end{aligned}
$$

□

命題 2.20. $E\subset\mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合で $\lambda(E)\le 1$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数，$f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で $\|f\|_2=1$ とする．このとき

$$
\sum_{\sigma\in Q}\left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\right|\le C_8.
$$

ただし, $C_8=3C_7(C_5+C_6)$ である．

証明 3 段階で示す.

<u>Step 1</u> $P \subset Q$ は有限集合で $\left(\left(\mathrm{mass}_{E,g}\left(P\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \mathrm{energy}_f\left(P\right)\right) \leq \gamma$

$$\Rightarrow \ \exists R \subset Q \ \ \text{s.t.} \ \begin{cases} \gamma^2 \displaystyle\sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 + C_6, \\ \left(\left(\mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \mathrm{energy}_f\left(P \setminus R^+\right)\right) \leq \dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

(Pr.) $\mathrm{mass}_{E,g}\left(P\right) \leq \gamma^2$ より，補題 2.17 を適用して

$$\exists R_0 \subset Q \ \ \text{s.t.} \ \begin{cases} \gamma^2 \displaystyle\sum_{\tau \in R_0} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 \lambda\left(E\right) \leq C_5, \\ \mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R_0^+\right) \leq \dfrac{\gamma^2}{4}. \end{cases}$$

$\mathrm{energy}_f\left(P \setminus R_0^+\right) \leq \mathrm{energy}_f\left(P\right) \leq \gamma$ だから，補題 2.18 を適用して

$$\exists R_1 \subset Q \ \ \text{s.t.} \ \begin{cases} \gamma^2 \displaystyle\sum_{\tau \in R_1} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_6, \\ \mathrm{energy}_f\left(\left(P \setminus R_0^+\right) \setminus R_1^+\right) \leq \dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

ここで $R = R_0 \cup R_1$ とすると，$R^+ = R_0^+ \cup R_1^+$ $[(\because)\ \sigma \in R^+ \Leftrightarrow \exists \tau \in R \ \ \text{s.t.} \ \ \tau \preceq \sigma \Leftrightarrow \exists \tau \in R_0 \ \ \text{s.t.} \ \ \tau \preceq \sigma$ または $\exists \tau \in R_1 \ \ \text{s.t.} \ \ \tau \preceq \sigma \Leftrightarrow \sigma \in R_0^+$ または $\sigma \in R_1^+ \Leftrightarrow \sigma \in R_0^+ \cup R_1^+] \supset R_0^+$ である．ゆえに

$$\begin{aligned} \gamma^2 \sum_{\tau \in R} \lambda\left(I_\tau\right) &= \gamma^2 \sum_{\tau \in R_0 \cup R_1} \lambda\left(I_\tau\right) \\ &\leq \gamma^2 \sum_{\tau \in R_0} \lambda\left(I_\tau\right) + \gamma^2 \sum_{\tau \in R_1} \lambda\left(I_\tau\right) \\ &\leq C_5 + C_6, \end{aligned}$$

$$\mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right) \leq \mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R_0^+\right) \leq \frac{\gamma^2}{4},$$

$$\mathrm{energy}_f\left(P \setminus R^+\right) = \mathrm{energy}_f\left(P \setminus \left(R_0^+ \cup R_1^+\right)\right) = \mathrm{energy}_f\left(\left(P \setminus R_0^+\right) \setminus R_1^+\right) \leq \frac{\gamma}{2}.$$

従って，$\left(\left(\mathrm{mass}_{E,g}\left(P \setminus R^+\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \mathrm{energy}_f\left(P \setminus R^+\right)\right) \leq \left(\dfrac{\gamma}{2} \vee \dfrac{\gamma}{2}\right) = \dfrac{\gamma}{2}$ である.

<u>Step 2</u> $P \subset Q$ は有限集合とする．$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$\left(\left(\mathrm{mass}_{E,g}\left(P\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \mathrm{energy}_f\left(P\right)\right) \leq 2^k$$

と取る．mass の定義より $\mathrm{mass}_{E,g}\left(P\right) \leq 1$, 補題 2.15 より $\mathrm{energy}_f\left(P\right) < \infty$ であるから，このような k は存在する.

Step 1 を適用していく．$P_0 = P$, 2^k に対して

$$\exists R_0 \subset Q \ \ \text{s.t.} \ \begin{cases} \bullet\ 2^{2k} \displaystyle\sum_{\tau \in R_0} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 + C_6, \\ \bullet\ \left(\left(\mathrm{mass}_{E,g}\left(P_1\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \mathrm{energy}_f\left(P_1\right)\right) \leq 2^{k-1}, \end{cases}$$

ただし $P_1 = P_0 \setminus R_0^+ \subset P_0$.

P_1, 2^{k-1} に対して

$$\exists R_1 \subset Q \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \bullet\ 2^{2(k-1)} \displaystyle\sum_{\tau \in R_1} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 + C_6, \\ \bullet\ \left(\left(\operatorname{mass}_{E,g}\left(P_2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \operatorname{energy}_f\left(P_2\right)\right) \leq 2^{k-2}, \end{cases}$$
$$\text{ただし } P_2 = P_1 \setminus R_1^+ \subset P_1.$$

P_2, 2^{k-2} に対して

$$\exists R_2 \subset Q \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \bullet\ 2^{2(k-2)} \displaystyle\sum_{\tau \in R_2} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 + C_6, \\ \bullet\ \left(\left(\operatorname{mass}_{E,g}\left(P_3\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \operatorname{energy}_f\left(P_3\right)\right) \leq 2^{k-3}, \end{cases}$$
$$\text{ただし } P_3 = P_2 \setminus R_2^+ \subset P_2.$$

以下，これを繰り返して

$$\exists\{P_n\}_{n=0}^{\infty},\ \exists\{R_n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \bullet\ R_n \subset Q \quad (n \geq 0), \\ \quad P_0 = P, \\ \quad P_{n+1} = P_n \setminus R_n^+ \quad (n \geq 0), \\ \bullet\ 2^{2(k-n)} \displaystyle\sum_{\tau \in R_n} \lambda\left(I_\tau\right) \leq C_5 + C_6, \\ \quad \left(\left(\operatorname{mass}_{E,g}\left(P_n\right)\right)^{\frac{1}{2}} \vee \operatorname{energy}_f\left(P_n\right)\right) \leq 2^{k-n} \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

が分かる．

今

$$\begin{aligned} \sigma \in \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n \ &\Rightarrow\ \{\sigma\} \subset P_n \quad (\forall n \geq 0) \\ &\Rightarrow\ \lambda\left(J_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left|\langle f, \phi_\sigma\rangle\right| = \operatorname{energy}_f(\{\sigma\}) \leq \operatorname{energy}_f\left(P_n\right) \leq 2^{k-n} \to 0 \quad (n \to \infty) \\ &\Rightarrow\ \langle f, \phi_\sigma\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$P = P_0 = \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\left(P_n \setminus P_{n+1}\right) \sqcup \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in P}\left|\langle f, \phi_\sigma\rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx\right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in P_n \setminus P_{n+1}}\left|\langle f, \phi_\sigma\rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx\right| + \sum_{\sigma \in \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n}\left|\langle f, \phi_\sigma\rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx\right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in P_n \setminus P_{n+1}}\left|\langle f, \phi_\sigma\rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx\right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in P_n \cap R_n^+}\left|\langle f, \phi_\sigma\rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx\right| \end{aligned}$$

$$
\left[\begin{aligned}
(\because)\ P_n \setminus P_{n+1} &= P_n \cap P_{n+1}^{\complement} \\
&= P_n \cap \left(P_n \cap (R_n^+)^{\complement}\right)^{\complement} \\
&= P_n \cap (P_n^{\complement} \cup R_n^+) \\
&= (P_n \cap P_n^{\complement}) \cup (P_n \cap R_n^+) = P_n \cap R_n^+
\end{aligned}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tau \in R_n} \sum_{\substack{\sigma \in P_n; \\ \tau \preceq \sigma}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \right| \\
&\qquad \left[(\because)\ P_n \cap R_n^+ = P_n \cap \textstyle\bigcup_{\tau \in R_n} \{\sigma \in Q;\ \tau \preceq \sigma\} = \bigcup_{\tau \in R_n} \{\sigma \in P_n;\ \tau \preceq \sigma\}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tau \in R_n} \sum_{\sigma \in P_n \cap \{\tau\}^+} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \right| \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tau \in R_n} C_7 \mathrm{energy}_f \left(P_n \cap \{\tau\}^+\right) \mathrm{mass}_{E,g} \left(P_n \cap \{\tau\}^+\right) \lambda(I_\tau) \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.19] \\
&\le C_7 \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{energy}_f (P_n) \, \mathrm{mass}_{E,g} (P_n) \sum_{\tau \in R_n} \lambda(I_\tau) \\
&\le C_7 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{k-n} \cdot \left(1 \wedge 2^{2(k-n)}\right) \cdot 2^{-2(k-n)} (C_5 + C_6) \\
&= C_7 (C_5 + C_6) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{k-n} \cdot 2^{k-n} \left(2^{-(k-n)} \wedge 2^{k-n}\right) \cdot 2^{-2(k-n)} \\
&\le C_7 (C_5 + C_6) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(2^{n-k} \wedge 2^{-(n-k)}\right) \\
&= C_7 (C_5 + C_6) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(2^n \wedge 2^{-n}\right) \\
&= C_7 (C_5 + C_6) \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} \\
&\qquad \left[(\because)\ \left(2^n \wedge 2^{-n}\right) = \begin{cases} 2^{-n} & (n \ge 0), \\ 2^n & (n < 0) \end{cases} = 2^{-|n|}\right] \\
&= C_7 (C_5 + C_6) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\right) \\
&= C_7 (C_5 + C_6) \cdot 3 \\
&= C_8.
\end{aligned}
$$

Step 3　$N \in \mathbb{N}$ に対して，$P^{(N)} \subset Q$ を

$$
P^{(N)} := \left\{ \left(\left[2^{-k} m,\ 2^{-k}(m+1)\right),\ \left[2^k n,\ 2^k (n+1)\right) \right);\ -N \le k \le N,\ -N \le m, n \le N \right\}
$$

とすると，$P^{(N)}$ は有限集合で，$P^{(N)} \nearrow Q\ (N \to \infty)$ である．Step 2 より，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\sum_{\sigma \in P^{(N)}} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{E \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \right| \le C_8
$$

なので

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in Q}\left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\right| \\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{\sigma\in P^{(N)}}\left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{E\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\right|\le C_8.
\end{aligned}$$
□

命題 2.21. $F\subset\mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合で $\lambda(F)<\infty$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数, $f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．このとき

$$\sum_{\sigma\in Q}\left|\langle f,\phi_\sigma\rangle\int_{F\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\right|\le C_9\left\|f\right\|_2\lambda(F)^{\frac{1}{2}}.$$

ただし，$C_9=C_8\sqrt{2}$.

注 2.3. この命題は，命題 2.20 で課した Lebesgue 可測集合 E with $\lambda(E)<\infty$, および $f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の条件 $\lambda(E)\le 1$, $\left\|f\right\|_2=1$ が外れ，一般的な形になっている．

証明 まず

$$\begin{aligned}
\left\|f\right\|_2=0\ &\Rightarrow\ \langle f,\phi_\sigma\rangle=0\ \ (\forall\sigma\in Q)\\
&\Rightarrow(\text{左辺})=0=(\text{右辺})
\end{aligned}$$

より，$\left\|f\right\|_2>0$ とする．このとき，不等式の両辺を $\left\|f\right\|_2$ で割ることにより，はじめから $\left\|f\right\|_2=1$ としてよい．次に

$$\begin{aligned}
\lambda(F)=0\ &\Rightarrow\ \int_{F\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx=0\ \ (\forall\sigma\in Q)\\
&\Rightarrow(\text{左辺})=0=(\text{右辺})
\end{aligned}$$

より，$\lambda(F)>0$ とする．

$k\in\mathbb{Z}$ を，$2^{k-1}<\lambda(F)\le 2^k$ を満たすものとして取る．$\sigma\in Q$ に対し，$\sigma^*\in Q$ を次のように定義する：$\sigma=(I_\sigma,J_\sigma)$ のとき，$\sigma^*=(2^{-k}I_\sigma,2^kJ_\sigma)$, すなわち

$$\sigma=\Big(\big[2^{-k_\sigma}m_\sigma,2^{-k_\sigma}(m_\sigma+1)\big),\big[2^{k_\sigma}n_\sigma,2^{k_\sigma}(n_\sigma+1)\big)\Big)\ \ (m_\sigma,\,n_\sigma\in\mathbb{Z})$$

のとき

$$\sigma^*=\Big(\big[2^{-(k_\sigma+k)}m_\sigma,2^{-(k_\sigma+k)}(m_\sigma+1)\big),\big[2^{k_\sigma+k}n_\sigma,2^{k_\sigma+k}(n_\sigma+1)\big)\Big)$$

である．従って

$$\begin{aligned}
&k_{\sigma^*}=k_\sigma+k,\\
&x_{\sigma^*}=2^{-(k_\sigma+k)}\Big(m_\sigma+\frac{1}{2}\Big)=2^{-k}x_\sigma,\\
&y_{\sigma^*}=2^{k_\sigma+k}\Big(n_\sigma+\frac{1}{2}\Big)=2^ky_\sigma,\\
&y_{\sigma^*}^{\mathrm{l}}=2^{k_\sigma+k}\Big(n_\sigma+\frac{1}{4}\Big)=2^ky_\sigma^{\mathrm{l}},\\
&\phi_\sigma(2^kx)=\lambda(J_\sigma)^{\frac{1}{2}}\,e^{\sqrt{-1}y_\sigma^{\mathrm{l}}2^kx}\phi\big(\lambda(J_\sigma)(2^kx-x_\sigma)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2^{k_\sigma})^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1} y^1_\sigma 2^k x} \phi\bigl(2^{k_\sigma}(2^k x - x_\sigma)\bigr) \\
&= (2^{-k} \cdot 2^{k_\sigma + k})^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1} 2^k y^1_\sigma x} \phi\bigl(2^{k_\sigma + k}(x - 2^{-k} x_\sigma)\bigr) \\
&= (2^{-k})^{\frac{1}{2}} \lambda\,(J_{\sigma^*})^{\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1} y^1_{\sigma^*} x} \phi\bigl(\lambda\,(J_{\sigma^*})\,(x - x_{\sigma^*})\bigr) \\
&= (2^{-k})^{\frac{1}{2}} \phi_{\sigma^*}(x).
\end{aligned}
$$

$\widetilde{F} = 2^{-k} F$, $\widetilde{g}(x) = 2^k g(2^k x)$ とすると, $\widetilde{F} \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合, $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数で,

$$
\begin{aligned}
&\lambda\bigl(\widetilde{F}\bigr) = 2^{-k} \lambda\,(F) \leq 1 \quad [(\because)\ k \in \mathbb{Z}\ \text{の取り方}], \\
&F \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma) = \{x \in F;\, g(x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma\} \\
&\qquad = \{x \in 2^k \widetilde{F};\, 2^{-k} \widetilde{g}(2^{-k} x) \in J^{\mathrm{r}}_\sigma\} \\
&\qquad = \{x \in 2^k \widetilde{F};\, \widetilde{g}(2^{-k} x) \in 2^k J^{\mathrm{r}}_\sigma = J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*}\} \\
&\qquad = 2^k \{x \in \widetilde{F};\, \widetilde{g}(x) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*}\} \\
&\qquad\qquad \left[
\begin{aligned}
&(\because)\ y \in \{x \in 2^k \widetilde{F};\, \widetilde{g}(2^{-k} x) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*}\} \\
&\qquad \Leftrightarrow\ y \in 2^k \widetilde{F},\ \widetilde{g}(2^{-k} y) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*} \\
&\qquad \Leftrightarrow\ 2^{-k} y \in \widetilde{F},\ \widetilde{g}(2^{-k} y) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*} \\
&\qquad \Leftrightarrow\ 2^{-k} y \in \{x \in \widetilde{F};\, \widetilde{g}(x) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*}\} \\
&\qquad \Leftrightarrow\ y \in 2^k \{x \in \widetilde{F};\, \widetilde{g}(x) \in J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*}\}
\end{aligned}
\right] \\
&\qquad = 2^k \bigl(\widetilde{F} \cap \widetilde{g}^{-1}(J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*})\bigr).
\end{aligned}
$$

$\widetilde{f}(x) = 2^{\frac{k}{2}} f(2^k x)$ とすると, $\widetilde{f} \in L^2\,(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ で

$$
\begin{aligned}
\bigl\|\widetilde{f}\bigr\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(2^k x)|^2 \cdot 2^k dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y = 2^k x] \\
&= \|f\|_2 = 1, \\
\bigl\langle \widetilde{f}, \phi_{\sigma^*} \bigr\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x) \overline{\phi_{\sigma^*}(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{k}{2}} f(2^k x) \cdot \overline{2^{\frac{k}{2}} \phi_\sigma(2^k x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(2^k x) \overline{\phi_\sigma(2^k x)} 2^k dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\phi_\sigma(y)} dy \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ y = 2^k x] \\
&= \langle f, \phi_\sigma \rangle.
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&\bigl\langle \widetilde{f}, \phi_{\sigma^*} \bigr\rangle \int_{\widetilde{F} \cap \widetilde{g}^{-1}(J^{\mathrm{r}}_{\sigma^*})} \phi_{\sigma^*}(x) dx \\
&= \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{2^{-k}\left(F \cap g^{-1}(J^{\mathrm{r}}_\sigma)\right)} 2^{\frac{k}{2}} \phi_\sigma(2^k x) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} 2^{-\frac{k}{2}} \phi_\sigma(y) dy \quad [(\because) \text{ 変数変換 } y = 2^k x] \\
&= 2^{-\frac{k}{2}} \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(y) dy
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in Q} \left| \langle f, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \right| \\
&= \sum_{\sigma \in Q} \left| 2^{\frac{k}{2}} \left\langle \widetilde{f}, \phi_{\sigma^*} \right\rangle \int_{\widetilde{F} \cap \widetilde{g}^{-1}(J_{\sigma^*}^{\mathrm{r}})} \phi_{\sigma^*}(x) dx \right| \\
&= 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\sigma \in Q} \left| \left\langle \widetilde{f}, \phi_{\sigma^*} \right\rangle \int_{\widetilde{F} \cap \widetilde{g}^{-1}(J_{\sigma^*}^{\mathrm{r}})} \phi_{\sigma^*}(x) dx \right| \\
&= 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\sigma \in Q} \left| \left\langle \widetilde{f}, \phi_{\sigma^*} \right\rangle \int_{\widetilde{F} \cap \widetilde{g}^{-1}(J_{\sigma}^{\mathrm{r}})} \phi_{\sigma}(x) dx \right| \quad [(\because)\ Q \ni \sigma \mapsto \sigma^* \in Q \text{ は全単射}] \\
&\le 2^{\frac{k}{2}} C_8 \qquad [(\because) \text{ 命題 } 2.20] \\
&= 2^{\frac{1}{2}} C_8 2^{\frac{k-1}{2}} \\
&\le \sqrt{2} C_8 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_9 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

□

2.4. Fremlin's construction

補題 2.22. $\forall z, \forall y \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\#\{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}}\} \le 1.
$$

証明 $z, y \in \mathbb{R}$ を固定する．$J, K \in \mathscr{D}$ は $z \in J^{\mathrm{r}}$, $y \in J^{\mathrm{l}}$, $z \in K^{\mathrm{r}}$, $y \in K^{\mathrm{l}}$ とする．

$$
\begin{aligned}
z &\in J^{\mathrm{r}} \cap K^{\mathrm{r}} \subset J \cap K, \\
y &\in J^{\mathrm{l}} \cap K^{\mathrm{l}} \subset J \cap K
\end{aligned}
$$

より $J \subset K$ または $K \subset J$.

$\lambda(J) = \lambda(K)$ のときは $J = K$.

$\lambda(J) < \lambda(K)$ のときは，$\lambda(J) \le \frac{1}{2}\lambda(K) = \lambda\left(K^{\mathrm{l}}\right) = \lambda(K^{\mathrm{r}})$ と $J \cap K^{\mathrm{l}} \supset J^{\mathrm{l}} \cap K^{\mathrm{l}} \ni y$, $J \cap K^{\mathrm{r}} \supset J^{\mathrm{r}} \cap K^{\mathrm{r}} \ni z$ より $J \subset K^{\mathrm{l}}$, $J \subset K^{\mathrm{r}}$ となるが,

$$
\emptyset \subsetneq J \subset K^{\mathrm{l}} \cap K^{\mathrm{r}} = \emptyset
$$

となり矛盾が生じる.

$\lambda(K) < \lambda(J)$ のときは，$\lambda(K) \le \frac{1}{2}\lambda(J) = \lambda\left(J^{\mathrm{l}}\right) = \lambda(J^{\mathrm{r}})$ と $K \cap J^{\mathrm{l}} \supset K^{\mathrm{l}} \cap J^{\mathrm{l}} \ni y$, $K \cap J^{\mathrm{r}} \supset K^{\mathrm{r}} \cap J^{\mathrm{r}} \ni z$ より $K \subset J^{\mathrm{l}}$, $K \subset J^{\mathrm{r}}$ となるが,

$$
\emptyset \subsetneq K \subset J^{\mathrm{l}} \cap J^{\mathrm{r}} = \emptyset
$$

となり矛盾が生じる.

従って $J = K$ となるから，補題の主張は成り立つ. □

定義 2.11. $z,\, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta_z(y) := \begin{cases} 0, & \#\{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}}\} = 0, \\ \widehat{\phi}\left(\dfrac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right)^2, & \#\{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}}\} = 1 \end{cases}$$

と定義する．

命題 2.23. (i) $0 \leq \theta_z(y) \leq 1$.
(ii) $\theta_z(y) = 0 \ \ (y \geq z)$.
(iii) $\mathbb{R}^2 \ni (y, z) \mapsto \theta_z(y) \in [0, \infty)$ は Borel 可測である．

証明 (i) $I_{[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]} \leq \widehat{\phi} \leq I_{[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]}$ より，$0 \leq \theta_z(y) \leq 1$ は明らか．
(ii) $z \in J^{\mathrm{r}},\, y \in J^{\mathrm{l}} \Rightarrow y < z$ が成り立つから，この対偶をとって

$$y \geq z \Rightarrow \#\{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}}\} = 0 \Rightarrow \theta_z(y) = 0.$$

(iii) $a \in \mathbb{R}$ とする．$a < 0$ のときは

$$\theta_z(y) \geq 0 > a \ \ (\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2)$$

より

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2;\ \theta_z(y) > a\} = \mathbb{R}^2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2).$$

$a \geq 0$ のときは

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2;\ \theta_z(y) > a\} = \bigcup_{J \in \mathscr{D}} \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2;\ \widehat{\phi}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right)^2 > a,\ z \in J^{\mathrm{r}}\right\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2).$$

なぜならば

$$\begin{aligned}
&(y, z) \in (\text{右辺}) \\
&\Rightarrow\ \exists J \in \mathscr{D} \ \text{ s.t. } \ \widehat{\phi}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right)^2 > a,\ z \in J^{\mathrm{r}} \\
&\Rightarrow\ 0 \leq a < \widehat{\phi}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right)^2 \leq I_{[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right) \\
&\Rightarrow\ \left|\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right| \leq \frac{1}{5} \\
&\Rightarrow\ |y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)| \leq \frac{1}{5}\lambda\left(J\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\lambda\left(J\right) = \frac{2}{5}\lambda\left(J^{\mathrm{l}}\right) < \frac{1}{2}\lambda\left(J^{\mathrm{l}}\right) \\
&\Rightarrow\ y \in J^{\mathrm{l}} \\
&\Rightarrow\ \theta_z(y) = \widehat{\phi}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right)^2 > a \ \Rightarrow\ (y, z) \in (\text{左辺}), \\
&(y, z) \in (\text{左辺}) \\
&\Rightarrow\ \exists J \in \mathscr{D} \ \text{ s.t. } \ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}},\ \widehat{\phi}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(J^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(J\right)}\right)^2 > a \\
&\Rightarrow\ (y, z) \in (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

□

定義 2.12. $z \in \mathbb{R}$ に対して

$$M_z := \{k \in \mathbb{Z};\ \exists J \in \mathscr{D} \text{ s.t. } \lambda(J) = 2^k,\ z \in J^{\mathrm{r}}\}$$

と定義する.

定義 2.13. $z \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d_k(z) := \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor$$

と定義する.

命題 2.24. (i) $d_k(z) \in \{0, 1\} \quad (\forall z \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z})$.
(ii) $d_k(0) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$.
(iii) $z > 0$ のとき

$$\begin{aligned} & d_k(z) = 0 \quad \left(\forall k \geq \left\lfloor \frac{\log z}{\log 2} \right\rfloor + 1\right), \\ & \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k(z) 2^k = z. \end{aligned}$$

(iv) $z < 0$ のとき

$$\begin{aligned} & d_k(z) = 1 \quad \left(\forall k \geq \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil \right), \\ & \sum_{k=-\infty}^{k_1} d_k(z) 2^k = z - \left\lfloor 2^{-k_1-1} z \right\rfloor 2^{k_1+1} \quad (\forall k_1 \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

(v) $\forall z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\#\{k \leq 0;\ d_k(z) = 0\} = \infty.$$

(vi) $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$k \in M_z \Leftrightarrow d_{k-1}(z) = 1.$$

証明 (i) 一般に $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor &= \lfloor 2(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \\ &= \lfloor 2 \lfloor x \rfloor + 2\{x\} \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \\ &= 2 \lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \\ &= \lfloor 2\{x\} \rfloor \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq \{x\} < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となることから

$$d_k(z) = \left\lfloor 2 \cdot 2^{-k-1} z \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor = \left\lfloor 2\{2^{-k-1} z\} \right\rfloor \in \{0, 1\}.$$

(ii) $\left\lfloor 2^{-k} \cdot 0 \right\rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0,\ \left\lfloor 2^{-k-1} \cdot 0 \right\rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$ より $d_k(0) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$.
(iii) $z > 0$ とする. 簡単のため

$$k_0 = \left\lfloor \frac{\log z}{\log 2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
k_0 \le \frac{\log z}{\log 2} < k_0 + 1 \ &\Leftrightarrow k_0 \log 2 \le \log z < (k_0+1)\log 2 \\
&\Leftrightarrow 2^{k_0} \le z < 2^{k_0+1}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
k \ge k_0 + 1 \ &\Rightarrow \ -k + k_0 < -k + k_0 + 1 \le 0 \\
&\Rightarrow 2^{-k+k_0} < 2^{-k+k_0+1} \le 1 \\
&\Rightarrow 0 < 2^{-k+k_0} \le 2^{-k} z < 2^{-k+k_0+1} \le 1, \\
&\quad\ 0 < 2^{-k-1+k_0} \le 2^{-k-1} z < 2^{-k-1+k_0+1} = 2^{-k+k_0} < 1 \\
&\Rightarrow \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor = 0, \ \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor = 0 \\
&\Rightarrow d_k(z) = \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor = 0.
\end{aligned}
$$

これは前半の主張である．後半の主張は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k(z) 2^k &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor \right) 2^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor 2^k - \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor 2^{k+1} \right) \\
&= \lim_{K \to -\infty} \sum_{k=K}^{k_0} \left(\left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor 2^k - \left\lfloor 2^{-k-1} z \right\rfloor 2^{k+1} \right) \\
&= \lim_{K \to -\infty} \left(\sum_{k=K}^{k_0} \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor 2^k - \sum_{k=K}^{k_0} \left\lfloor 2^{-(k+1)} z \right\rfloor 2^{k+1} \right) \\
&= \lim_{K \to -\infty} \left(\sum_{k=K}^{k_0} \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor 2^k - \sum_{k=K+1}^{k_0+1} \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor 2^k \right) \\
&= \lim_{K \to -\infty} \left(\left\lfloor 2^{-K} z \right\rfloor 2^K - \left\lfloor 2^{-(k_0+1)} z \right\rfloor 2^{k_0+1} \right) \\
&= \lim_{K \to -\infty} \frac{\left\lfloor 2^{-K} z \right\rfloor}{2^{-K}} \quad [(\because)\ k \ge k_0 + 1 \ \Rightarrow \ \left\lfloor 2^{-k} z \right\rfloor = 0] \\
&= \lim_{K \to \infty} \frac{\left\lfloor 2^{K} z \right\rfloor}{2^{K}} \\
&= \lim_{K \to \infty} \frac{2^K z - \{2^K z\}}{2^K} \\
&= \lim_{K \to \infty} \left(z - \frac{\{2^K z\}}{2^K} \right) = z.
\end{aligned}
$$

(iv) $z < 0$ とする．簡単のため

$$
k_0' = \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil \in \mathbb{Z}
$$

とすると

$$
k_0' - 1 < \frac{\log(-z)}{\log 2} \le k_0' \ \Leftrightarrow (k_0' - 1)\log 2 < \log(-z) \le \log k_0'
$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2^{k_0'-1} < -z \le 2^{k_0'}\\&\Leftrightarrow -2^{k_0'} \le z < -2^{k_0'-1}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}k \ge k_0' \ &\Rightarrow -k + k_0' - 1 < -k + k_0' \le 0\\&\Rightarrow 2^{-k+k_0'-1} < 2^{-k+k_0'} \le 1\\&\Rightarrow -1 \le -2^{-k+k_0'} < -2^{-k+k_0'-1}\\&\Rightarrow -1 \le -2^{-k+k_0'} \le 2^{-k}z < -2^{-k+k_0'-1} < 0,\\&\quad\ -1 < -2^{-k+k_0'-1} \le 2^{-k-1}z < -2^{-k-1+k_0'-1} < 0\\&\Rightarrow \lfloor 2^{-k}z \rfloor = -1,\ \lfloor 2^{-k-1}z \rfloor = -1\\&\Rightarrow d_k(z) = \lfloor 2^{-k}z \rfloor - 2\lfloor 2^{-k-1}z \rfloor = -1 - 2\cdot(-1) = 1.\end{aligned}$$

これは前半の主張である．後半の主張については，$\forall k_1 \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{k_1} d_k(z)2^k &= \sum_{k=-\infty}^{k_1}\left(\lfloor 2^{-k}z \rfloor 2^k - \lfloor 2^{-k-1}z \rfloor 2^{k+1}\right)\\&= \lim_{K\to-\infty}\sum_{k=K}^{k_1}\left(\lfloor 2^{-k}z \rfloor 2^k - \lfloor 2^{-k-1}z \rfloor 2^{k+1}\right)\\&= \lim_{K\to-\infty}\left(\sum_{k=K}^{k_1}\lfloor 2^{-k}z \rfloor 2^k - \sum_{k=K}^{k_1}\left\lfloor 2^{-(k+1)}z \right\rfloor 2^{k+1}\right)\\&= \lim_{K\to-\infty}\left(\sum_{k=K}^{k_1}\lfloor 2^{-k}z \rfloor 2^k - \sum_{k=K+1}^{k_1+1}\lfloor 2^{-k}z \rfloor 2^{k}\right)\\&= \lim_{K\to-\infty}\left(\lfloor 2^{-K}z \rfloor 2^K - \left\lfloor 2^{-(k_1+1)}z \right\rfloor 2^{k_1+1}\right)\\&= \lim_{K\to-\infty}\left(\frac{\lfloor 2^{-K}z \rfloor}{2^{-K}} - \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1}\right)\\&= \lim_{K\to\infty}\left(\frac{\lfloor 2^{K}z \rfloor}{2^{K}} - \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1}\right)\\&= \lim_{K\to\infty}\left(\frac{2^K z - \{2^{K}z\}}{2^{K}} - \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1}\right)\\&= z - \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1}.\end{aligned}$$

(v) $z = 0$ のときは，(ii) より明らか．

$z > 0$ のときを考える．$\forall k_1 \in \mathbb{Z}$ をとって固定し，$d_k(z) = 1 \quad (\forall k \le k_1)$ と仮定する．(iii) より

$$\begin{aligned}z &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k(z)2^k\\&= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^k + \sum_{k\le k_1} d_k(z)2^k\\&= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^k + \sum_{k\le k_1} 2^k\\&= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^k + \sum_{k\ge -k_1} \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^k + 2^{k_1+1}.$$

$\forall j \leq k_1$ に対して

$$\begin{aligned}
2^{-j}z &= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^{-j+k} + 2^{-j+k_1+1} = \sum_{k>k_1} d_k(z)2^{k-k_1+k_1-j} + 2^{k_1-j+1}, \\
2^{-j-1}z &= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^{-j-1+k} + 2^{-j-1+k_1+1} = \sum_{k>k_1} d_k(z)2^{k-(k_1+1)+k_1-j} + 2^{k_1-j}.
\end{aligned}$$

$k > k_1$, $j \leq k_1$ に対して $k - k_1 + k_1 - j > k - (k_1+1) + k_1 - j \geq 0$, $k_1 - j + 1 > k_1 - j \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
\lfloor 2^{-j}z \rfloor &= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^{-j+k} + 2^{-j+k_1+1}, \\
\lfloor 2^{-j-1}z \rfloor &= \sum_{k>k_1} d_k(z)2^{-j-1+k} + 2^{-j-1+k_1+1}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
d_j(z) &= \lfloor 2^{-j}z \rfloor - 2\lfloor 2^{-j-1}z \rfloor \\
&= \Big(\sum_{k>k_1} d_k(z)2^{-j+k} + 2^{-j+k_1+1} \Big) - 2\Big(\sum_{k>k_1} d_k(z)2^{-j-1+k} + 2^{-j-1+k_1+1} \Big) = 0.
\end{aligned}$$

これは $d_j(z) = 1 \ \ (\forall j \leq k_1)$ に矛盾する．よって $\{k \leq k_1;\ d_k(z) = 0\} \neq \emptyset \ \ (\forall k_1 \in \mathbb{Z})$ となり，$\#\{k \leq 0;\ d_k(z) = 0\} = \infty$.

$z < 0$ のとき．$\forall k_1 \in \mathbb{Z}$ をとって固定し，$d_k(z) = 1 \ \ (\forall k \leq k_1)$ と仮定する．(iv) より

$$\begin{aligned}
z &= \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1} + \sum_{k=-\infty}^{k_1} d_k(z)2^k \\
&= \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1} + \sum_{k\leq k_1} 2^k \\
&= \lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor 2^{k_1+1} + 2^{k_1+1} \\
&= \big(\lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor + 1 \big) 2^{k_1+1}.
\end{aligned}$$

$\forall j \leq k_1$ に対して

$$\begin{aligned}
2^{-j}z &= \big(\lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor + 1 \big) 2^{-j+k_1+1} \in \mathbb{Z}, \\
2^{-j-1}z &= \big(\lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor + 1 \big) 2^{-j-1+k_1+1} = \big(\lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor + 1 \big) 2^{-j+k_1} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
d_j(z) &= \lfloor 2^{-j}z \rfloor - 2\lfloor 2^{-j-1}z \rfloor \\
&= \big(\lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor + 1 \big) 2^{-j+k_1+1} - \big(\lfloor 2^{-k_1-1}z \rfloor + 1 \big) 2^{-j+k_1+1} = 0.
\end{aligned}$$

これは $d_j(z) = 1 \ \ (\forall j \leq k_1)$ に矛盾する．よって $\{k \leq k_1;\ d_k(z) = 0\} \neq \emptyset \ \ (\forall k_1 \in \mathbb{Z})$ となり，$\#\{k \leq 0;\ d_k(z) = 0\} = \infty$ が分かる．

(vi) $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$ を固定する．

“$\Leftarrow$” について．$d_{k-1}(z)=1$ とする．$z>0$ のときは

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} d_j(z)2^j \\
&= \sum_{j>k-1} d_j(z)2^j + 2^{k-1} + \sum_{j<k-1} d_j(z)2^j \\
&= 2^k\Big(\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k} + \frac{1}{2} + \sum_{j<k-1} d_j(z)2^{j-k}\Big) \\
&= 2^k\Big(\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j<k-1} d_j(z)\frac{1}{2^{k-j-1}}\Big) \\
&\begin{cases} \geq 2^k\Big(\displaystyle\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k} + \frac{1}{2}\Big), \\ < 2^k\Big(\displaystyle\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k} + 1\Big) \end{cases} \\
&\qquad \left[\begin{array}{l} (\because)\ d_j(z)\in\{0,1\}\ (\forall j<k-1),\ \#\{j<k-1;\ d_j(z)=0\}=\infty \text{ より} \\ \qquad 0\leq \sum_{j<k-1} d_j(z)\frac{1}{2^{k-j-1}} < \sum_{j<k-1}\frac{1}{2^{k-j-1}} = 1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

従って

$$
z\in\left[2^k\Big(\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k}+\frac{1}{2}\Big),\ 2^k\Big(\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k}+1\Big)\right).
$$

$\displaystyle\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\Big[2^k\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k},\ 2^k\Big(\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k}+1\Big)\Big)\in\mathscr{D}, \\
&z\in\Big[2^k\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k},\ 2^k\Big(\sum_{j>k-1} d_j(z)2^{j-k}+1\Big)\Big)^{\mathrm{r}}
\end{aligned}
$$

なので $k\in M_z$ である．

$z<0$ のときは

$$
\begin{aligned}
z &= \lfloor 2^{-k}z\rfloor 2^k + \sum_{j=-\infty}^{k-1} d_j(z)2^j \\
&= \lfloor 2^{-k}z\rfloor 2^k + 2^{k-1} + \sum_{j<k-1} d_j(z)2^j \\
&= 2^k\Big(\lfloor 2^{-k}z\rfloor + \frac{1}{2} + \sum_{j<k-1} d_j(z)2^{j-k}\Big) \\
&= 2^k\Big(\lfloor 2^{-k}z\rfloor + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j<k-1} d_j(z)\frac{1}{2^{k-j-1}}\Big) \\
&\begin{cases} \geq 2^k\Big(\lfloor 2^{-k}z\rfloor + \dfrac{1}{2}\Big), \\ < 2^k\big(\lfloor 2^{-k}z\rfloor + 1\big). \end{cases}
\end{aligned}
$$

従って

$$z \in \left[2^k\Big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + \frac{1}{2}\Big),\ 2^k\big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1\big)\right).$$

よって $\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ に注意すると

$$\begin{aligned}&\Big[2^k \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor,\ 2^k\big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1\big)\Big) \in \mathscr{D},\\ z \in &\Big[2^k \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor,\ 2^k\big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1\big)\Big)^{\mathrm{r}}\end{aligned}$$

なので $k \in M_z$ である．

"$\Rightarrow$" について．$k \in M_z$ ならば

$$\exists J \in \mathscr{D} \quad \text{s.t.} \quad \lambda(J) = 2^k,\ z \in J^{\mathrm{r}}.$$

$J = \big[2^k m,\ 2^k(m+1)\big)$ (ただし $m \in \mathbb{Z}$) とすると

$$\begin{aligned} z \in J^{\mathrm{r}} &= \left[2^k\Big(m + \frac{1}{2}\Big),\ 2^k(m+1)\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2^k\Big(m + \frac{1}{2}\Big) \le z < 2^k(m+1) \\ \Rightarrow\ & m + \frac{1}{2} \le 2^{-k}z < m+1,\ 2m+1 \le 2^{-k+1}z < 2m+2 \\ \Rightarrow\ & d_{k-1}(z) = \left\lfloor 2^{-k+1}z \right\rfloor - 2\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor = (2m+1) - 2m = 1. \end{aligned}$$

このとき $m = \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor$．従って

$$J = \Big[2^k \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor,\ 2^k\big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1\big)\Big)$$

となることに注意せよ． □

命題 2.24(vi) と定義 2.12 により，次の系が分かる．

系 2.25.

$$M_z = \begin{cases} \emptyset, & z = 0, \\ \{k \in \mathbb{Z};\ d_{k-1}(z) = 1\} \neq \emptyset, & z \neq 0. \end{cases}$$

定義 2.14. $z \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\widehat{J_k}(z) = \big[2^k \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor,\ 2^k(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1)\big) \in \mathscr{D} \tag{63}$$

と定義する．このとき $\lambda\big(\widehat{J_k}(z)\big) = 2^k$, $z \in \widehat{J_k}(z)$ である $[(\because)\ \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor \le 2^{-k}z < \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1$ より $2^k \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor \le z < 2^k(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + 1)]$．さらに

$$\begin{aligned} \widehat{J_k}^{1}(z) &= \widehat{J_k}(z) \cap \Big(-\infty,\ \mathrm{c}\big(\widehat{J_k}(z)\big)\Big) \quad [\text{ i.e., } \widehat{J_k}(z) \text{ の左半分の右半開区間}] \\ &= \left[2^k \left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor,\ 2^k\Big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + \frac{1}{2}\Big)\right), \qquad (64) \\ \widehat{y_k}(z) &= \mathrm{c}\big(\widehat{J_k}^{1}(z)\big) = 2^k\Big(\left\lfloor 2^{-k}z \right\rfloor + \frac{1}{4}\Big), \qquad (65) \\ \psi_k(y; z) &= \widehat{\phi}\big(2^{-k}(y - \widehat{y_k}(z))\big)^2, \quad y \in \mathbb{R} \qquad (66) \end{aligned}$$

とおく．

$$\psi_k(\cdot;z)\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R};[0,\infty)\right), \tag{67}$$

そして

$$\operatorname{supp}\psi_k(\cdot;z)\subset\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z) \tag{68}$$

に注意せよ $[(\because)$ (66) 式より $\psi_k(\cdot;z)\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R};[0,\infty)\right)$ は明らか．また

$$\begin{aligned}
&\psi_k(y;z)\neq 0\\
&\Rightarrow\ 0<\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k}(z))\big)^2\leq I_{[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k}(z))\big)\\
&\Rightarrow\ \left|2^{-k}(y-\widehat{y_k}(z))\right|\leq\frac{1}{5}\\
&\Rightarrow\ |y-\widehat{y_k}(z)|\leq\frac{2^k}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}(z)\big)=\frac{2}{5}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big)<\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big)\\
&\Rightarrow\ y\in\left[\widehat{y_k}(z)-\frac{2}{5}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big),\ \widehat{y_k}(z)+\frac{2}{5}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big)\right]
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}\psi_k(\cdot;z)&=\overline{\{\psi_k(\cdot;z)\neq 0\}}\\
&\subset\left[\widehat{y_k}(z)-\frac{2}{5}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big),\ \widehat{y_k}(z)+\frac{2}{5}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big)\right]\\
&\subset\left(\widehat{y_k}(z)-\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big),\ \widehat{y_k}(z)+\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\big)\right)\\
&\subset\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)].
\end{aligned}$$

補題 2.26. $z\neq 0$ とする．
(i) $k\in M_z\Rightarrow\widehat{J_k}(z)$ は，$\lambda\left(J\right)=2^k$, $z\in J^{\mathrm{r}}$ なる唯一の dyadic interval である．
(ii) $k,\ k'\in M_z$, $k\neq k'\Rightarrow\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)\cap\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{l}}(z)=\emptyset$.

証明 $z\neq 0$ とする．
(i) 命題 2.24(vi) の "$\Rightarrow$" の証明より (i) の主張は明らか.
(ii) $k,\ k'\in M_z$, $k\neq k'$ とする．簡単のため，$\widehat{J_k}(z)$, $\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)$ 等の z を省略して $\widehat{J_k}$, $\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}$ 等と書くことにする．$\widehat{J_k}$, $\widehat{J_{k'}}\in\mathscr{D}$, $\lambda\big(\widehat{J_k}\big)=2^k$, $\lambda\big(\widehat{J_{k'}}\big)=2^{k'}$, $z\in\widehat{J_k}^{\mathrm{r}}$, $z\in\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}$ である．$\widehat{J_k}\cap\widehat{J_{k'}}\neq\emptyset$ なので

$$\begin{aligned}
&\widehat{J_k}\subset\widehat{J_{k'}}\quad\text{if}\ \ k<k',\\
&\widehat{J_{k'}}\subset\widehat{J_k}\quad\text{if}\ \ k'<k.
\end{aligned}$$

$k<k'$ のときは

$$\begin{aligned}
&\lambda\big(\widehat{J_k}\big)=2^k\leq 2^{k'-1}=\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_{k'}}\big)=\lambda\big(\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}\big)\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_k}\subset\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}\quad\text{または}\quad\widehat{J_k}\cap\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}=\emptyset\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_k}\subset\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}\qquad[(\because)\ z\in\widehat{J_k}^{\mathrm{r}}\cap\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}\subset\widehat{J_k}\cap\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}]\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\subset\widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \widehat{J_k}^{\mathrm{l}} \cap \widehat{J_{k'}}^{\mathrm{l}} \subset \widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}} \cap \widehat{J_{k'}}^{\mathrm{l}} = \emptyset.$$

$k' < k$ のときは

$$\begin{aligned}
&\lambda\big(\widehat{J_{k'}}\big) = 2^{k'} \le 2^{k-1} = \frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}\big) = \lambda\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{r}}\big)\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_{k'}} \subset \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} \quad \text{または} \quad \widehat{J_{k'}} \cap \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} = \emptyset\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_{k'}} \subset \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} \quad [(\because)\ z \in \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} \cap \widehat{J_{k'}}^{\mathrm{r}} \subset \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} \cap \widehat{J_{k'}}]\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_{k'}}^{\mathrm{l}} \subset \widehat{J_k}^{\mathrm{r}}\\
&\Rightarrow\ \widehat{J_k}^{\mathrm{l}} \cap \widehat{J_{k'}}^{\mathrm{l}} \subset \widehat{J_k}^{\mathrm{l}} \cap \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} = \emptyset.
\end{aligned}$$

□

命題 2.27. $\forall z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta_z(\cdot) = \sum_{k \in M_z} \psi_k(\cdot; z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k(\cdot; z).$$

証明 $z = 0$ のときは，$\{J \in \mathscr{D};\ 0 \in J^{\mathrm{r}}\} = \emptyset$ より (左辺) $= 0$．また $M_0 = \emptyset$ [cf. 系 2.25]．さらに $d_{k-1}(0) = 0\ \ (\forall k \in \mathbb{Z})$ [cf. 命題 2.24(ii)] より (中辺) $=$ (右辺) $= 0$．ゆえにこの等式は成立する．

$z \neq 0$ とする．以降簡単のため，$\widehat{J_k}(z)$, $\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)$, $\widehat{y_k}(z)$, $\psi_k(\cdot; z)$ の z を省略する．まず

$$\begin{aligned}
&\{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}}\}\\
&= \{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}}\} \cap \{J \in \mathscr{D};\ y \in J^{\mathrm{l}}\}\\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{J \in \mathscr{D};\ \lambda(J) = 2^k,\ z \in J^{\mathrm{r}}\} \cap \{J \in \mathscr{D};\ y \in J^{\mathrm{l}}\}\\
&= \Big\{\widehat{J_k};\ k \in M_z\Big\} \cap \{J \in \mathscr{D};\ y \in J^{\mathrm{l}}\}\\
&\qquad \left[\begin{array}{l}
(\because)\ \text{命題 2.24(vi) の証明より，} k \in \mathbb{Z}, K \in \mathscr{D} \text{ に対して}\\
\qquad \begin{aligned}
\lambda(K) = 2^k,\ z \in K^{\mathrm{r}}\ &\Rightarrow k \in M_z \quad [\text{cf. 定義 2.12}]\\
&\Rightarrow K = \widehat{J_k},\\
K = \widehat{J_k},\ k \in M_z\ &\Rightarrow z \in K^{\mathrm{r}},\ \lambda(K) = 2^k.
\end{aligned}\\
\text{従って } \lambda(K) = 2^k,\ z \in K^{\mathrm{r}}\ \Leftrightarrow\ K = \widehat{J_k},\ k \in M_z
\end{array}\right]\\
&= \Big\{\widehat{J_k};\ k \in M_z,\ y \in \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\Big\}
\end{aligned}$$

に注意せよ．$\theta_z(\cdot)$ の定義より

$$\begin{aligned}
\theta_z(y) \neq 0\ &\Rightarrow \#\{J \in \mathscr{D};\ z \in J^{\mathrm{r}},\ y \in J^{\mathrm{l}}\} > 0\\
&\Rightarrow \exists k \in M_z \ \text{ s.t. } \ y \in \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\\
&\Leftrightarrow y \in \bigcup_{k \in M_z} \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}
\end{aligned}$$

であるから，対偶をとって

$$\theta_z(\cdot) = 0 \quad \text{on} \quad \Big(\bigcup_{k \in M_z} \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\Big)^{\complement}.$$

$k \in M_z$ に対して

$$\begin{aligned} y \in \widehat{J_k}^{\mathrm{l}} &\Rightarrow z \in \widehat{J_k}^{\mathrm{r}},\ y \in \widehat{J_k}^{\mathrm{l}} \\ &\Rightarrow \theta_z(y) = \widehat{\phi}\left(\frac{y - \mathrm{c}\left(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\right)}{\lambda\left(\widehat{J_k}\right)}\right)^2 = \widehat{\phi}\left(2^{-k}(y - \widehat{y_k})\right)^2 = \psi_k(y). \end{aligned}$$

従って $\theta_z I_{\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}} = \psi_k I_{\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}}$, (68) 式により $\theta_z I_{\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}} = \psi_k$．補題 2.26(ii) より，$\{\widehat{J_k}^{\mathrm{l}};\ k \in M_z\}$ は互いに素なので

$$\begin{aligned} \theta_z &= \theta_z I_{\bigsqcup_{k \in M_z} \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}} + \theta_z I_{\left(\bigsqcup_{k \in M_z} \widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\right)^{\complement}} \\ &= \sum_{k \in M_z} \theta_z I_{\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}} \\ &= \sum_{k \in M_z} \psi_k \end{aligned}$$

が分かる．命題 2.24(vi) より

$$\sum_{k \in M_z} \psi_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k$$

である． □

命題 2.28. $z \neq 0$ とする．$h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $F \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合で $\lambda(F) < \infty$ とする．このとき $\forall k \in M_z$ に対して

$$2\pi \int_F \left(\widehat{h}\psi_k(\cdot;z)\right)\check{}\,(x)dx = \sum_{\substack{\sigma \in Q_k; \\ z \in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx.$$

ただし $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$Q_k := \{\sigma \in Q;\ k_\sigma = k\}.$$

証明 $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $F \subset \mathbb{R}$ は $\lambda(F) < \infty$ なる Lebesgue 可測集合とする．$z \neq 0$, $k \in M_z$ を固定する．簡単のため，$\widehat{J_k}(z)$, $\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}(z)$, $\widehat{y_k}(z)$, $\psi_k(\cdot;z)$ の z を省略する．$z \in \widehat{J_k}^{\mathrm{r}}$, $\lambda\left(\widehat{J_k}\right) = 2^k$ [cf. 補題 2.26] である．以降，5 段階で示す．

Step 1 $R_k = \{\sigma \in Q_k;\ z \in J_\sigma^{\mathrm{r}}\}$ とすると，

$$R_k = \left\{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right);\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(Pr.)

$$\begin{aligned} \sigma \in Q_k,\ z \in J_\sigma^{\mathrm{r}} &\Rightarrow \lambda(J_\sigma) = 2^{k_\sigma} = 2^k = \lambda\left(\widehat{J_k}\right),\ J_\sigma \cap \widehat{J_k} \supset J_\sigma^{\mathrm{r}} \cap \widehat{J_k}^{\mathrm{r}} \ni z \\ &\Rightarrow J_\sigma = \widehat{J_k}. \end{aligned}$$

Step 2 各 $\sigma = \left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right) \in R_k$ $(n \in \mathbb{Z})$ に対して

$$\begin{aligned} \langle h, \phi_\sigma \rangle &= \langle \widehat{h}, \widehat{\phi_\sigma} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t)\overline{\widehat{\phi_\sigma}(t)}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) \overline{\lambda\left(I_\sigma\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-1}x_\sigma (t-y_\sigma^{\mathrm{l}})} \widehat{\phi}\big(\lambda\left(I_\sigma\right)(t-y_\sigma^{\mathrm{l}})\big)} dt \quad [(\because)\ \text{命題 2.9(o)}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) 2^{-\frac{k}{2}} e^{\sqrt{-1}2^{-k}(n+\frac{1}{2})(t-\widehat{y_k})} \widehat{\phi}\big(2^{-k}(t-\widehat{y_k})\big) dt \\
&\qquad [(\because)\ \widehat{\phi}\ \text{は実数値},\ J_\sigma = \widehat{J_k}\ \text{より}\ y_\sigma^{\mathrm{l}} = \mathrm{c}\big(J_\sigma^{\mathrm{l}}\big) = \mathrm{c}\big(\widehat{J_k}^{\mathrm{l}}\big) = \widehat{y_k}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(2^k\tau + \widehat{y_k}) 2^{-\frac{k}{2}} e^{\sqrt{-1}(n+\frac{1}{2})\tau} \widehat{\phi}(\tau) 2^k d\tau \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \tau = 2^{-k}(t-\widehat{y_k})] \\
&= 2^{\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}) e^{\sqrt{-1}(n+\frac{1}{2})t} \widehat{\phi}(t) dt \\
&= 2^{\frac{k}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}) e^{\sqrt{-1}\frac{t}{2}} \widehat{\phi}(t) e^{\sqrt{-1}nt} dt \\
&\qquad [(\because)\ I_{[-\frac{1}{6},\,\frac{1}{6}]} \le \widehat{\phi} \le I_{[-\frac{1}{5},\,\frac{1}{5}]}\ \text{より}\ \widehat{\phi}(t) = 0 \quad \text{if} \quad |t| \ge \tfrac{1}{5}] \\
&= 2^{\frac{k}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{\sqrt{-1}nt} dt.
\end{aligned}
$$

ただし

$$
g(t) = \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}) e^{\sqrt{-1}\frac{t}{2}} \widehat{\phi}(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{69}
$$

とする.

<u>Step 3</u> $g \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\operatorname{supp} g \subset \left[-\frac{1}{5},\, \frac{1}{5}\right]$ に注意せよ $[(\because)\ I_{[-\frac{1}{6},\,\frac{1}{6}]} \le \widehat{\phi} \le I_{[-\frac{1}{5},\,\frac{1}{5}]}$ より $\operatorname{supp} g \subset \left[-\frac{1}{5},\, \frac{1}{5}\right]$. $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より $\widehat{h} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ [cf. 命題 1.13(ii)], また命題 1.15 より $\widehat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,\infty))$ なので $g \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. ゆえに $g \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})]$.

g の $L^2\big([-\pi,\pi);\mathbb{C}\big)$ での Fourier 係数を c_n $(n \in \mathbb{Z})$ とする：

$$
c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-\sqrt{-1}nt} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad [\text{cf. (6)}].
$$

このとき

$$
\sum_{|n| \le N} c_n e^{\sqrt{-1}nt} \rightrightarrows g(t) \quad \text{on} \quad [-\pi,\pi] \quad (N \to \infty), \tag{70}
$$

$$
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt, \tag{71}
$$

$$
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty. \tag{72}
$$

さらに Step 2 より

$$
\langle h, \phi_\sigma \rangle = 2^{\frac{k}{2}} \cdot 2\pi c_{-n}, \quad \sigma = \big([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\big) \in R_k \tag{73}
$$

である.

<u>Step 4</u> (i) $\displaystyle \sup_{y \in \mathbb{R}} \sum_{\sigma \in R_k} \left| \langle h, \phi_\sigma \rangle \widehat{\phi_\sigma}(y) \right| < \infty,$

$$
\sum_{\sigma \in R_k} \langle h, \phi_\sigma \rangle \widehat{\phi_\sigma}(y) = 2\pi \widehat{h}(y) \psi_k(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.
$$

(ii) $\displaystyle \sum_{\sigma \in R_k} \left| \langle h, \phi_\sigma \rangle \right| < \infty.$

(iii) $\displaystyle \sup_{\sigma \in R_k} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi_\sigma}(y)| dy < \infty.$

(Pr.) (i)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in R_k}\left|\langle h,\phi_\sigma\rangle\,\widehat{\phi_\sigma}(y)\right|\\
&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle h,\phi_{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right)}\right\rangle\left(\phi_{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right)}\right)\widehat{}(y)\right| \quad [(\because)\ \text{Step 1}]\\
&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|2^{\frac{k}{2}}\cdot 2\pi c_{-n}\cdot 2^{-\frac{k}{2}}e^{-\sqrt{-1}2^{-k}(n+\frac{1}{2})(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\right| \quad [(\because)\ (73)\ \text{と命題 } 2.9(\text{o})]\\
&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}2\pi|c_{-n}|\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\\
&\le 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|
\end{aligned}$$

なので，(72) 式より

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\sum_{\sigma\in R_k}\left|\langle h,\phi_\sigma\rangle\,\widehat{\phi_\sigma}(y)\right|\le 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<\infty.$$

$y\notin\widehat{J_k}^{1}$ のときは

$$\begin{aligned}
&y\notin\left[\widehat{y_k}-\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{1}\big),\ \widehat{y_k}+\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{1}\big)\right)\\
&\Rightarrow\ y<\widehat{y_k}-\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{1}\big)\ \ \text{または}\ \ y\ge\widehat{y_k}+\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{1}\big)\\
&\Rightarrow\ |y-\widehat{y_k}|\ge\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}^{1}\big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lambda\big(\widehat{J_k}\big)=\frac{1}{4}\cdot 2^k\\
&\Rightarrow\ \left|2^{-k}(y-\widehat{y_k})\right|\ge\frac{1}{4}\\
&\Rightarrow\ 0\le\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\le I_{[-\frac{1}{5},\,\frac{1}{5}]}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)=0,\\
&\psi_k(y)=0\quad[(\because)\ (68)\ \text{より}\ (\widehat{J_k}^{1})^{\complement}\subset(\operatorname{supp}\psi_k)^{\complement}].
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in R_k}\langle h,\phi_\sigma\rangle\,\widehat{\phi_\sigma}(y)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}2\pi c_{-n}e^{-\sqrt{-1}2^{-k}(n+\frac{1}{2})(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\\
&=0\\
&=2\pi\widehat{h}(y)\psi_k(y).
\end{aligned}$$

$y\in\widehat{J_k}^{1}$ のときは

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in R_k}\langle h,\phi_\sigma\rangle\,\widehat{\phi_\sigma}(y)\\
&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}2\pi c_{-n}e^{-\sqrt{-1}2^{-k}(n+\frac{1}{2})(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\\
&=2\pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{-n}e^{\sqrt{-1}(-n)2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\right)e^{-\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\\
&=2\pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{n}e^{\sqrt{-1}n2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\right)e^{-\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)\\
&=2\pi g\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)e^{-\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k})\big)
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ll}(\because)\ y \in \widehat{J_k}^1 & \Rightarrow y \in \left[\widehat{y_k} - \frac{1}{2}\lambda\left(\widehat{J_k}^1\right),\ \widehat{y_k} + \frac{1}{2}\lambda\left(\widehat{J_k}^1\right)\right) \\ & \Rightarrow\ -\frac{1}{2}\lambda\left(\widehat{J_k}^1\right) \leq y - \widehat{y_k} < \frac{1}{2}\lambda\left(\widehat{J_k}^1\right) \\ & \Rightarrow\ -\frac{1}{4}\cdot 2^k \leq y - \widehat{y_k} < \frac{1}{4}\cdot 2^k \\ & \Rightarrow\ -\frac{1}{4} \leq 2^{-k}(y - \widehat{y_k}) < \frac{1}{4} \\ & \Rightarrow 2^{-k}(y - \widehat{y_k}) \in [-\pi, \pi] \\ \text{よって (70) を適用する} & \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\widehat{h}\left(2^k\cdot 2^{-k}(y - \widehat{y_k}) + \widehat{y_k}\right)e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\left(2^{-k}(y - \widehat{y_k})\right) \\
&\quad\cdot e^{-\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-k}(y-\widehat{y_k})}\widehat{\phi}\left(2^{-k}(y - \widehat{y_k})\right) \\
&= 2\pi\widehat{h}(y)\widehat{\phi}\left(2^{-k}(y - \widehat{y_k})\right)^2 \\
&= 2\pi\widehat{h}(y)\psi_k(y) \quad [(\because)\ (66)].
\end{aligned}$$

(ii) (73) 式と (72) 式より

$$\sum_{\sigma\in R_k} |\langle h, \phi_\sigma\rangle| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|2^{\frac{k}{2}}\cdot 2\pi c_{-n}\right| = 2^{\frac{k}{2}}\cdot 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| < \infty.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy &= \int_{\mathbb{R}}\left|\lambda\left(I_\sigma\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\sqrt{-1}x_\sigma(y-y_\sigma^1)}\widehat{\phi}\left(\lambda\left(I_\sigma\right)(y - y_\sigma^1)\right)\right|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\lambda\left(I_\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{\phi}\left(\lambda\left(I_\sigma\right)(y - y_\sigma^1)\right)dy \\
&= \lambda\left(I_\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi}(x)\cdot\lambda\left(I_\sigma\right)^{-1}dx \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ x = \lambda\left(I_\sigma\right)(y - y_\sigma^1)] \\
&= \lambda\left(I_\sigma\right)^{-\frac{1}{2}}\|\widehat{\phi}\|_1 \\
&= 2^{\frac{k_\sigma}{2}}\|\widehat{\phi}\|_1
\end{aligned}$$

より

$$\sup_{\sigma\in R_k}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy = \sup_{\sigma\in R_k}2^{\frac{k_\sigma}{2}}\|\widehat{\phi}\|_1 = 2^{\frac{k}{2}}\|\widehat{\phi}\|_1 < \infty.$$

Step 5

$$\begin{aligned}
&2\pi\int_F(\widehat{h}\psi_k)^{\vee}(x)dx \\
&= 2\pi\int_{\mathbb{R}}I_F(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}(y)\psi_k(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}I_F(x)dx\int_{\mathbb{R}}2\pi\widehat{h}(y)\psi_k(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}I_F(x)dx\int_{\mathbb{R}}\sum_{\sigma\in R_k}\langle h, \phi_\sigma\rangle\widehat{\phi_\sigma}(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy \quad [(\because)\ \text{Step 4 (i)}] \\
&= \sum_{\sigma\in R_k}\langle h, \phi_\sigma\rangle\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi_\sigma}(y)dy\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}I_F(x)e^{\sqrt{-1}xy}dx
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l}(\because)\ \text{Step 4 の (ii), (iii) より} \\ \int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx \int_{\mathbb{R}} \sum_{\sigma\in R_k} |\langle h, \phi_\sigma\rangle| |\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy \\ \leq \lambda(F) \sum_{\sigma\in R_k} |\langle h, \phi_\sigma\rangle| \sup_{\sigma\in R_k} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy < \infty \\ \text{であるから，Fubini の定理を適用}\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\in R_k} \langle h, \phi_\sigma\rangle \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_\sigma}(y)\overline{\widehat{I_F}(y)}dy \\
&= \sum_{\sigma\in R_k} \langle h, \phi_\sigma\rangle \langle \widehat{\phi_\sigma}, \widehat{I_F}\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in R_k} \langle h, \phi_\sigma\rangle \langle \phi_\sigma, I_F\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in R_k} \langle h, \phi_\sigma\rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in Q_k; \\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h, \phi_\sigma\rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx.
\end{aligned}$$

□

定義 2.15. (i) $Q_k := \{\sigma \in Q;\ k_\sigma = k\},\ k \in \mathbb{Z}$,

$\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q) := \{P \subset Q;\ P \text{ は有限集合}\}$,

$\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}) := \{K \subset \mathbb{Z};\ K \text{ は有限集合}\}$,

$\mathscr{L} := \{L \subset Q;\ L \cap Q_k \text{は有限集合 } (\forall k \in \mathbb{Z})\}$.

(ii) $K \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}),\ L \in \mathscr{L}$ に対して

$$\mathscr{P}_{K,L} := \left\{P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q);\ \begin{array}{c} k \in K \text{ または } P \cap Q_k \neq \emptyset \text{ なる任意の } k \text{ に対して} \\ P \cap Q_k \supset L \cap Q_k \end{array}\right\}.$$

(iii) $\mathscr{F} := \{\mathscr{P} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q);\ \exists K \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}),\ \exists L \in \mathscr{L}\ \text{ s.t. }\ \mathscr{P} \supset \mathscr{P}_{K,L}\}$.

補題 2.29. (i) $\emptyset \in \mathscr{P}_{\emptyset,L}\ (\forall L \in \mathscr{L}),\ \mathscr{P}_{K,\emptyset} = \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)\ (\forall K \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}))$．特に $\mathscr{P}_{\emptyset,\emptyset} = \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$.

(ii) $\emptyset \neq K \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}),\ \emptyset \neq L \in \mathscr{L}$ に対して

$$\bigcup_{k\in K} (L \cap Q_k) \in \mathscr{P}_{K,L}.$$

(iii) $\mathscr{F}$ は $\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ の filter である．すなわち次が成り立つ：

(a) $\mathscr{P},\ \mathscr{P}' \in \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \in \mathscr{F}$,

(b) $\mathscr{P} \in \mathscr{F},\ \mathscr{P}' \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ が $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}' \Rightarrow \mathscr{P}' \in \mathscr{F}$.

証明 (i) $K = \emptyset$ のときは

$$\mathscr{P}_{\emptyset,L} = \left\{P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q);\ \begin{array}{c} P \cap Q_k \neq \emptyset \text{ なる任意の } k \text{ に対して} \\ P \cap Q_k \supset L \cap Q_k \end{array}\right\}.$$

$P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ が $P = \emptyset$ のとき，$P \cap Q_k = \emptyset\ (\forall k \in \mathbb{Z})$ より $\nexists k \in \mathbb{Z}\ \text{ s.t. }\ P \cap Q_k \neq \emptyset$ なので $\emptyset \in \mathscr{P}_{\emptyset,L}$.

$L = \emptyset$ のときは

$$\mathscr{P}_{K,\emptyset} = \left\{P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q);\ \begin{array}{c} k \in K \text{ または } P \cap Q_k \neq \emptyset \text{ なる任意の } k \text{ に対して} \\ P \cap Q_k \supset \emptyset \end{array}\right\}$$

より $\mathscr{P}_{K,\emptyset} = \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$.
(ii) $K \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z})$, $L \in \mathscr{L}$ は $K \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$ とし，

$$P = \bigcup_{k \in K} (L \cap Q_k)$$

とする．$L \cap Q_k$ は有限集合 [$(\because)$ $L \in \mathscr{L}$] ($\forall k \in \mathbb{Z}$), K は有限集合なので P もまた有限集合，従って $P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ である．$\{Q_l;\ l \in \mathbb{Z}\}$ は互いに素で，$\bigsqcup_{l \in \mathbb{Z}} Q_l = Q$ に注意する [$(\because)$ Q_l の定義より明らか]．$\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} P \cap Q_k &= \Big(\bigcup_{l \in K} (L \cap Q_l) \Big) \cap Q_k \\ &= \bigcup_{l \in K} (L \cap Q_l \cap Q_k) \\ &= \begin{cases} L \cap Q_k, & k \in K, \\ \emptyset, & k \notin K \end{cases} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &k \in K \ \Rightarrow\ P \cap Q_k = L \cap Q_k, \\ &P \cap Q_k \neq \emptyset \ \Rightarrow\ k \in K \ \Rightarrow\ P \cap Q_k = L \cap Q_k \end{aligned}$$

となる．これは $P \in \mathscr{P}_{K,L}$ を示している．
(iii) (a) について．$\mathscr{P}$, $\mathscr{P}' \in \mathscr{F}$ とする．$\mathscr{F}$ の定義より

$$\exists K, \exists K' \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}), \exists L,\ \exists L' \in \mathscr{L} \ \text{ s.t. } \ \mathscr{P}_{K,L} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{P}_{K',L'} \subset \mathscr{P}'.$$

明らかに $K \cup K' \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z})$, $L \cap L' \in \mathscr{L}$ である．このとき

$$\mathscr{P}_{K \cup K',\, L \cup L'} \subset \mathscr{P}_{K,L} \cap \mathscr{P}_{K',L'} \subset \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$$

となる．実際

$$\begin{aligned} &P \in \mathscr{P}_{K \cup K',\, L \cup L'} \\ &\Rightarrow\ P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q) \text{ で，} k \in K \cup K' \text{ または } P \cap Q_k \neq \emptyset \text{ なる任意の } k \text{ に対して} \\ &\qquad P \cap Q_k \supset (L \cup L') \cap Q_k \\ &\Rightarrow\ P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q) \text{ で，} \\ &\qquad \begin{cases} \bullet\ k \in K \text{ または } P \cap Q_k \neq \emptyset \text{ なる任意の } k \text{ に対して} \\ \quad P \cap Q_k \supset (L \cup L') \cap Q_k \supset L \cap Q_k, \\ \bullet\ k \in K' \text{ または } P \cap Q_k \neq \emptyset \text{ なる任意の } k \text{ に対して} \\ \quad P \cap Q_k \supset (L \cup L') \cap Q_k \supset L' \cap Q_k \end{cases} \\ &\Rightarrow\ P \in \mathscr{P}_{K,L} \ \text{ かつ } \ P \in \mathscr{P}_{K',L'} \\ &\Rightarrow\ P \in \mathscr{P}_{K,L} \cap \mathscr{P}_{K',L'}. \end{aligned}$$

従って $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \in \mathscr{F}$ である．
(b) について．$\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, $\mathscr{P}' \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ は $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}'$ を満たすとする．$\mathscr{F}$ の定義より

$$\exists K \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}), \exists L \in \mathscr{L} \ \text{ s.t. } \ \mathscr{P}_{K,L} \subset \mathscr{P}$$

であるから，$\mathscr{P}' \supset \mathscr{P}_{K,L}$．従って $\mathscr{P}' \in \mathscr{F}$. □

命題 2.30. $F \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合で $\lambda(F) < \infty$ を満たし，$h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$\lim_{P \to \mathscr{F}} \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ z \in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx = 2\pi \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{\ }(y)dy.$$

すなわち，$\forall z \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\exists \mathscr{P} \in \mathscr{F} \quad \text{s.t.} \quad \left| \sum_{\substack{\sigma \in P; \\ z \in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx - 2\pi \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{\ }(y)dy \right| < \varepsilon, \quad \forall P \in \mathscr{P}.$$

証明 $F \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合で $\lambda(F) < \infty$ とし，$h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．

$z = 0$ のときは，$\{\sigma \in P;\ 0 \in J_\sigma^{\mathrm{r}}\} = \emptyset$ $(\forall P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q))$ より

$$\sum_{\substack{\sigma \in P; \\ z \in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx = 0, \quad \forall P \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q);$$

$\theta_0 = 0$ より

$$2\pi \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{\ }(y)dy = 0$$

であるから，命題の収束は明らかに成り立つ．

$z \neq 0$ とする．$\varepsilon > 0$ を固定する．以下 5 段階で示す．

<u>Step 1</u> まず $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ [($\because$) 命題 1.13], $0 \le \theta_z \le 1$, $0 \le \psi_k(\cdot;z) \le 1$ より $\widehat{h}\theta_z$, $\widehat{h}\psi_k(\cdot;z) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である．よって $(\widehat{h}\theta_z)\check{\ }$, $(\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{\ } \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に注意せよ [cf. 命題 1.1].

次が成り立つ：

(i) $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \left| \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{\ }(x)dx \right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda(F) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|dy < \infty,$

(ii) $\displaystyle\int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{\ }(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{\ }(x)dx.$

(Pr.) (i)

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &\le \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_F \left| (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{\ }(x) \right| dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\psi_k(y;z)e^{\sqrt{-1}xy}dy \right| \\
&\le \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|\psi_k(y;z)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda(F) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k(y;z)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda(F) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|\theta_z(y)dy \quad [(\because)\ \text{命題 2.27}] \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda(F) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|dy < \infty \quad [(\because)\ 0 \le \theta_z \le 1,\ \widehat{h} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})].
\end{aligned}$$

(ii) (i) の証明より，Fubini の定理を用いて

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}(y)\psi_k(y;z)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}(y)\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k(y;z)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}(y)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.27] \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_F(x)(\widehat{h}\theta_z)^{\vee}(x)dx = (\text{左辺}).
\end{aligned}
$$

Step 2 Step 1 より

$$
\begin{aligned}
&\exists K\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}) \ \text{ s.t. } \ K'\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z}),\ K'\supset K \\
&\Rightarrow \left|\int_F(\widehat{h}\theta_z)^{\vee}(x)dx-\sum_{k\in K'}d_{k-1}(z)\int_F(\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))^{\vee}(x)dx\right|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

(Pr.) 簡単のため $a_k := d_{k-1}(z)\int_F(\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))^{\vee}(x)dx$ $(k\in\mathbb{Z})$, $S := \int_F(\widehat{h}\theta_z)^{\vee}(x)dx$ とおく．Step 1 (i) より，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\sum_{|k|>N}|a_k|<\varepsilon$. $K\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z})$ を $K:=\{k\in\mathbb{Z};|k|\le N\}$ とすると，$K'\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z})$, $K'\supset K$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Big|S-\sum_{k\in K'}a_k\Big| &= \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k-\sum_{k\in K'}a_k\Big| \quad [(\because)\ \text{Step 1 (ii)}] \\
&= \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K'}a_k\Big| \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K'}|a_k| \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K}|a_k| \quad [(\because)\ \mathbb{Z}\setminus K'\subset\mathbb{Z}\setminus K] \\
&= \sum_{|k|>N}|a_k|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Step 3 $\forall k\in\mathbb{Z}$ に対して

(i) $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}}\left|\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_F\phi_\sigma(x)dx\right|<\infty,$

(ii) $\displaystyle 2\pi d_{k-1}(z)\int_F(\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))^{\vee}(x)dx=\sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_F\phi_\sigma(x)dx.$

(Pr.) $k\notin M_z$ のときは $\{\sigma\in Q_k;\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}\}=\{\sigma\in Q;\ \lambda(J_\sigma)=2^k,\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}\}=\emptyset$, $d_{k-1}(z)=0$ $[(\because)$ 命題 2.24(vi)$]$ より，(i) と (ii) は明らかである．

$k\in M_z$ のときは，命題 2.24(vi) より $d_{k-1}(z)=1$ だから，(ii) は命題 2.28 より明らか．(i) については

$$
\sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}}\Big|\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_F\phi_\sigma(x)dx\Big|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \Big| \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_\sigma}(y)dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} I_F(x) e^{\sqrt{-1}xy}dx \Big| \quad [\text{cf. 命題 2.28 の証明 Step 5}] \\
&\le \sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} |\langle h,\phi_\sigma\rangle| \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} I_F(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F) \sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} |\langle h,\phi_\sigma\rangle| \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F) \Big(\sum_{\substack{\sigma\in Q_k;\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} |\langle h,\phi_\sigma\rangle| \Big) \sup_{\sigma\in Q_k;\, z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi_\sigma}(y)|dy \\
&< \infty \quad [(\because)\ \text{命題 2.28 Step 4 (ii) と (iii)}].
\end{aligned}
$$

Step 4　Step 3 より，$\forall k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\exists L_k \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q) \\
&\text{s.t.} \begin{cases} \bullet\ \emptyset \subsetneq L_k \subset Q_k, \\ \bullet\ \Big| 2\pi d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{}\,(x)dx - \sum_{\substack{\sigma\in L';\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| < 2^{-|k|}\varepsilon, \\ \qquad\qquad \forall L' \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q) \ \text{ with } \ L_k \subset L' \subset Q_k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(Pr.)　まず $k\notin M_z$ のときは，$d_{k-1}(z)=0$, $\{\sigma\in Q_k; z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma\}=\emptyset$ なので，$\forall L_k\subset\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ with $\emptyset\subsetneq L_k\subset Q_k$ に対して

$$
\begin{aligned}
&2\pi d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{}\,(x)dx = 0, \\
&\sum_{\substack{\sigma\in L';\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx = 0, \quad \forall L'\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q) \ \text{ with } \ L_k\subset L'\subset Q_k
\end{aligned}
$$

であるから，Step 4 の主張は明らかに成り立つ.

次に $k\in M_z$ のときは，命題 2.28 の証明 Step 1 より

$$
\{\sigma\in Q_k;\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma\} = \Big\{ \Big(\big[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)\big), \widehat{J_k} \Big);\ n\in\mathbb{Z} \Big\}
$$

であるから，Step 3 (i) より

$$
\exists N_k\in\mathbb{N} \ \text{ s.t. } \sum_{|n|>N_k} \Big| \Big\langle h, \phi_{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right)} \Big\rangle \int_F \phi_{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right)}(x)dx \Big| < 2^{-|k|}\varepsilon.
$$

$L_k\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ を

$$
L_k = \Big\{ \Big(\big[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)\big), \widehat{J_k} \Big);\ |n|\le N_k \Big\}
$$

とすると，$L'\in\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ with $L_k\subset L'\subset Q_k$ に対して

$$
\Big| 2\pi d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))\check{}\,(x)dx - \sum_{\substack{\sigma\in L';\\ z\in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \sum_{\substack{\sigma \in Q_k;\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx - \sum_{\substack{\sigma \in L';\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| \quad [(\because)\ \text{Step 3 (ii)}] \\
&= \Big| \sum_{\substack{\sigma \in Q_k \setminus L';\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| \\
&\le \sum_{\substack{\sigma \in Q_k \setminus L';\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \Big| \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| \\
&\le \sum_{\substack{\sigma \in Q_k \setminus L_k;\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \Big| \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| \\
&= \sum_{|n| > N_k} \Big| \Big\langle h, \phi_{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right)} \Big\rangle \int_F \phi_{\left([2^{-k}n,\ 2^{-k}(n+1)),\ \widehat{J_k}\right)}(x)dx \Big| \\
&< 2^{-|k|}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Step 5 $L = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k$ とすると，$L \cap Q_k = L_k \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)$ [$(\because)$ Q_k の定義より $\{Q_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ は互いに素で $L_k \subset Q_k$]．$L \cap Q_k \neq \emptyset$ $(k \in \mathbb{Z})$ より $L \in \mathscr{L}$．

$P \in \mathscr{P}_{K,L}$ とする．$K' = \{k \in \mathbb{Z};\ P \cap Q_k \neq \emptyset\}$ とおくと

- $K' \in \mathscr{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Z})$ $\quad [(\because)\ P = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (P \cap Q_k) = \bigsqcup_{k \in K'} (P \cap Q_k)$ より $\#P \ge \#K']$,
- $K' \supset K$ $\quad [(\because)\ k \in K \ \Rightarrow\ P \cap Q_k \supset L \cap Q_k = L_k \neq \emptyset \ \Rightarrow\ k \in K']$,
- $Q_k \supset P \cap Q_k \supset L_k$ $(\forall k \in K')$
  $[(\because)\ k \in K' \ \Rightarrow\ P \cap Q_k \neq \emptyset \ \Rightarrow\ Q_k \supset P \cap Q_k \supset L \cap Q_k \supset L_k]$

が成り立つ．Step 2 と Step 4 より

$$
\Big| \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x)dx - \sum_{k \in K'} d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;\, z))\check{}\,(x)dx \Big| < \varepsilon,
$$
$$
\Big| 2\pi d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;\, z))\check{}\,(x)dx - \sum_{\substack{\sigma \in P \cap Q_k;\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| < 2^{-|k|}\varepsilon,\ \forall k \in K'.
$$

従って

$$
\begin{aligned}
&\Big| 2\pi \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x)dx - \sum_{\substack{\sigma \in P;\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| \\
&= \Big| 2\pi \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x)dx - \sum_{k \in K'} \sum_{\substack{\sigma \in P \cap Q_k;\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big| \quad [(\because)\ P = \textstyle\bigsqcup_{k \in K'} (P \cap Q_k)] \\
&= \Big| 2\pi \Big(\int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x)dx - \sum_{k \in K'} d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;\, z))\check{}\,(x)dx \Big) \\
&\qquad + \sum_{k \in K'} \Big(2\pi d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;\, z))\check{}\,(x)dx - \sum_{\substack{\sigma \in P \cap Q_k;\\ z \in J^{\mathrm{r}}_\sigma}} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_F \phi_\sigma(x)dx \Big) \Big| \\
&\le 2\pi \Big| \int_F (\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x)dx - \sum_{k \in K'} d_{k-1}(z) \int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;\, z))\check{}\,(x)dx \Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k\in K'}\Big|2\pi d_{k-1}(z)\int_F (\widehat{h}\psi_k(\cdot;z))^{\vee}(x)dx-\sum_{\substack{\sigma\in P\cap Q_k;\\ z\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_F\phi_\sigma(x)dx\Big|\\
&<2\pi\varepsilon+\sum_{k\in K'}2^{-|k|}\varepsilon\\
&\le 2\pi\varepsilon+\Big(1+2\sum_{k\in\mathbb{N}}2^{-k}\Big)\varepsilon\\
&=2\pi\varepsilon+3\varepsilon\\
&=(2\pi+3)\varepsilon. \qquad\square
\end{aligned}
$$

補題 2.31. $(X,\mathscr{B},\mu)$ は測度空間，$E\in\mathscr{B}$, $f:X\to\mathbb{C}$ は $\mathscr{B}$-可測で $\int_X|f|d\mu<\infty$ とする．このとき

$$
\exists E'\in\mathscr{B}\ \text{ s.t. }\ \begin{cases}\bullet\ E'\subset E,\\ \bullet\ \displaystyle\int_E|f|d\mu\le 4\Big|\int_{E'}fd\mu\Big|.\end{cases}
$$

証明 $E\in\mathscr{B}$ を固定する．2 段階で示す．

Step 1 $f:X\to\mathbb{R}$ は $\mathscr{B}$-可測で，$\int_X|f|d\mu<\infty$ とする．

$f^+=f\vee 0$, $f^-=(-f)\vee 0$ とすると，$f^\pm:X\to[0,\infty)$ は $\mathscr{B}$-可測で，$f=f^+-f^-$, $|f|=f^++f^-$ である．

$\int_E f^+d\mu\ge\int_E f^-d\mu$ のときは

$$
\begin{aligned}
\int_E|f|d\mu&=\int_E f^+d\mu+\int_E f^-d\mu\\
&\le 2\int_E f^+d\mu\\
&=2\int_{E\cap\{f>0\}}fd\mu=2\Big|\int_{E\cap\{f>0\}}fd\mu\Big|;
\end{aligned}
$$

$\int_E f^+d\mu\le\int_E f^-d\mu$ のときは

$$
\begin{aligned}
\int_E|f|d\mu&=\int_E f^+d\mu+\int_E f^-d\mu\\
&\le 2\int_E f^-d\mu\\
&=2\int_{E\cap\{f<0\}}(-f)d\mu\\
&=-2\int_{E\cap\{f<0\}}fd\mu=2\Big|\int_{E\cap\{f<0\}}fd\mu\Big|.
\end{aligned}
$$

Step 2 $f:X\to\mathbb{C}$ は $\mathscr{B}$-可測で，$\int_X|f|d\mu<\infty$ とする．

$u=\operatorname{Re}f$, $v=\operatorname{Im}f$ とすると，$u,\ v:X\to\mathbb{R}$ は $\mathscr{B}$-可測で

$$
\begin{aligned}
&\int_X|u|d\mu<\infty,\ \int_X|v|d\mu<\infty,\\
&|f|=\sqrt{u^2+v^2}\le|u|+|v|,\\
&\Big|\int_F fd\mu\Big|=\sqrt{\Big(\int_F ud\mu\Big)^2+\Big(\int_F vd\mu\Big)^2}\ge\Big|\int_F ud\mu\Big|\vee\Big|\int_F vd\mu\Big|,\ \ \forall F\in\mathscr{B}
\end{aligned}
$$

である．

$\int_E |u|d\mu \geq \int_E |v|d\mu$ のときは

$$\begin{aligned}\int_E |f|d\mu &\leq \int_E |u|d\mu + \int_E |v|d\mu \\ &\leq 2\int_E |u|d\mu \\ &\leq 4\Big|\int_{E'} ud\mu\Big| \quad [(\because)\ \text{Step 1 より } \exists E' \in \mathscr{B} \ \text{ s.t. } \ E' \subset E] \\ &\leq 4\Big|\int_{E'} fd\mu\Big|;\end{aligned}$$

$\int_E |u|d\mu \leq \int_E |v|d\mu$ のときは

$$\begin{aligned}\int_E |f|d\mu &\leq \int_E |u|d\mu + \int_E |v|d\mu \\ &\leq 2\int_E |v|d\mu \\ &\leq 4\Big|\int_{E''} vd\mu\Big| \quad [(\because)\ \text{Step 1 より } \exists E'' \in \mathscr{B} \ \text{ s.t. } \ E'' \subset E] \\ &\leq 4\Big|\int_{E''} fd\mu\Big|.\end{aligned}$$

□

命題 2.32. $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{h} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) &\Rightarrow \widehat{h} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \quad [(\because)\ \text{命題 } 1.13(\mathrm{i})] \\ &\Rightarrow \widehat{h}\theta_z \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad [(\because)\ 0 \leq \theta_z \leq 1] \\ &\Rightarrow (\widehat{h}\theta_z)\check{} \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad [(\because)\ \text{命題 } 1.1]\end{aligned}$$

となる．各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{R} \ni z \mapsto (\widehat{h}\theta_z)\check{}(x) \in \mathbb{C}$$

は右連続である．

証明 $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する．3 段階で示す．

<u>Step 1</u> まず

$$\begin{aligned}(\widehat{h}\theta_z)\check{}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k(y;z)e^{\sqrt{-1}xy}dy \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.27] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)d_{k-1}(z)\psi_k(y;z)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\ &\qquad \left[\begin{aligned}&(\because)\ \textstyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k(y;z)dy \\ &\qquad = \textstyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|\theta_z(y)dy \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.27] \\ &\qquad \leq \textstyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)|dy < \infty \\ &\text{なので，Fubini の定理を適用}\end{aligned}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\psi_k(y;z) e^{\sqrt{-1}xy} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\widehat{\phi}\big(2^{-k}(y-\widehat{y_k}(z))\big)^2 e^{\sqrt{-1}xy} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z))\widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t+\widehat{y_k}(z))} 2^k dt \\
&\qquad [(\because)\ 変数変換\ t = 2^{-k}(y-\widehat{y_k}(z))] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{\mathbb{R}} 2^k\widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z))\widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t+\widehat{y_k}(z))} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} 2^k\widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z))\widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t+\widehat{y_k}(z))} dt \\
&\qquad [(\because)\ \operatorname{supp}\widehat{\phi} \subset [-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}]].
\end{aligned}
$$

Step 2 $\widehat{h} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より $\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)| < \infty$ なので

$$
\begin{aligned}
|\widehat{h}(x)| &= (1+x^2)|\widehat{h}(x)| \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
&\le \big(\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)|\big)\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&\big|2^k\widehat{h}(2^k t+\widehat{y_k}(z))\big| \\
&= 2^k\big|\widehat{h}(2^k t+\widehat{y_k}(z))\big| \\
&\le 2^k\big(\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)|\big)\frac{1}{1+(2^k t+\widehat{y_k}(z))^2} \\
&= 2^k\big(\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)|\big)\frac{1}{1+(2^k t+2^k(\lfloor 2^{-k}z\rfloor+\frac{1}{4}))^2} \quad [\text{cf. } (65)] \\
&= 2^k\big(\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)|\big)\frac{1}{1+(2^k)^2(t+\frac{1}{4}+\lfloor 2^{-k}z\rfloor)^2}
\end{aligned}
$$

となる．

$t \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ とする．$z \ge 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
2^{-k}z \ge 0 \ &\Rightarrow\ \lfloor 2^{-k}z \rfloor \ge 0 \\
&\Rightarrow\ \Big|t+\frac{1}{4}+\lfloor 2^{-k}z\rfloor\Big| \ge \Big|\frac{1}{4}+\lfloor 2^{-k}z\rfloor\Big| - |t| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ge \frac{1}{4} - |t| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ge \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{1+(2^k)^2(t+\frac{1}{4}+\lfloor 2^{-k}z\rfloor)^2} \le \frac{1}{1+(2^k)^2(\frac{1}{20})^2} < \frac{20^2}{(2^k)^2}
\end{aligned}
$$

より

$$
\big|2^k\widehat{h}(2^k t+\widehat{y_k}(z))\big| \le
\begin{cases}
\Big(\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)|\Big)2^k, & k \in \mathbb{Z}, \\
\Big(\sup_{y\in\mathbb{R}}(1+y^2)|\widehat{h}(y)|\Big)\cdot 20^2 \cdot \frac{1}{2^k}, & k \ge 0.
\end{cases}
$$

$z<0$ のときは

$$
\begin{aligned}
k \geq \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil \ &\Rightarrow \ \frac{\log(-z)}{\log 2} \leq \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil \leq k \\
&\Rightarrow \ \log(-z) \leq k\log 2 = \log 2^k \\
&\Rightarrow \ -z \leq 2^k \\
&\Rightarrow z \geq -2^k \\
&\Rightarrow \ -1 \leq 2^{-k}z < 0 \\
&\Rightarrow \ \lfloor 2^{-k}z \rfloor = -1 \\
&\Rightarrow \left| t + \frac{1}{4} + \lfloor 2^{-k}z \rfloor \right| = \left| t + \frac{1}{4} - 1 \right| = \left| t - \frac{3}{4} \right| \geq \frac{3}{4} - |t| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{1+(2^k)^2(t+\frac{1}{4}+\lfloor 2^{-k}z \rfloor)^2} \leq \frac{1}{1+(2^k)^2(\frac{11}{20})^2} < \left(\frac{20}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2^k)^2}
\end{aligned}
$$

より

$$
\left| 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z)) \right| \leq
\begin{cases}
\left(\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} (1+y^2) |\widehat{h}(y)| \right) 2^k, & k \in \mathbb{Z}, \\
\left(\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} (1+y^2) |\widehat{h}(y)| \right) \cdot \left(\frac{20}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^k}, & k \geq \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil.
\end{cases}
$$

Step 3 $z \geq 0$ の場合を考える．$z' \geq z$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left| d_{k-1}(z') 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z'))} \right| \\
&= d_{k-1}(z') 2^k \left| \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \right| \widehat{\phi}(t)^2 \\
&\leq 20^2 \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} (1+y^2) |\widehat{h}(y)| \right) 2^{-|k|} \widehat{\phi}(t)^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \left[-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}\right] \quad [(\because)\ \text{Step 2}].
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R} \ni a \mapsto \lfloor a \rfloor \in \mathbb{R}$ の右連続性より，$\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
d_{k-1}(z') &= \lfloor 2^{-k+1} z' \rfloor - 2 \lfloor 2^{-k} z' \rfloor \\
&\to \lfloor 2^{-k+1} z \rfloor - 2 \lfloor 2^{-k} z \rfloor = d_{k-1}(z) \quad (z' \to z+0), \\
\widehat{y_k}(z') &= 2^k \left(\lfloor 2^{-k} z' \rfloor + \frac{1}{4} \right) \to 2^k \left(\lfloor 2^{-k} z \rfloor + \frac{1}{4} \right) = \widehat{y_k}(z) \quad (z' \to z+0)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z'\to z+0} d_{k-1}(z') 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z'))} \\
&= d_{k-1}(z) 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z)) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z))}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \left[-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}\right].
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} 2^{-|k|} \widehat{\phi}(t)^2 dt = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-|k|} \right) \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \widehat{\phi}(t)^2 dt < \infty
$$

に注意すると，Lebesgue の収束定理より

$$
\lim_{z'\to z+0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z') \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z'))} dt
$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z)) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z))} dt.$$

よって，Step 1 により

$$\lim_{z' \to z+0} (\widehat{h}\theta_{z'})\check{}(x) = (\widehat{h}\theta_z)\check{}(x)$$

が分かる．

次に，$z < 0$ の場合を考える．Step 2 より，$z \leq z' < 0$ に対して

$$\begin{aligned}
& -z \geq -z' > 0 \\
& \Rightarrow \ \log(-z) \geq \log(-z') \\
& \Rightarrow \ \frac{\log(-z)}{\log 2} \geq \frac{\log(-z')}{\log 2} \\
& \Rightarrow \ \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\log(-z')}{\log 2} \right\rceil \\
& \Rightarrow \ \left| 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \right| \leq \begin{cases} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} (1+y^2) |\widehat{h}(y)| \right) 2^k, & k \in \mathbb{Z}, \\ \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} (1+y^2) |\widehat{h}(y)| \right) \cdot \left(\frac{20}{11} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^k}, & k \geq \left\lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \right\rceil \end{cases}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
& \left| d_{k-1}(z') 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z'))} \right| \\
& = d_{k-1}(z') 2^k \left| \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \right| \widehat{\phi}(t)^2 \\
& \leq \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} (1+y^2) |\widehat{h}(y)| \right) \left(2^k I_{\{k < \lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \rceil\}} + \left(\frac{20}{11} \right)^2 2^{-k} I_{\{k \geq \lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \rceil\}} \right) \widehat{\phi}(t)^2, \\
& \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall t \in [-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}].
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \left(2^k I_{\{k < \lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \rceil\}} + \left(\frac{20}{11} \right)^2 2^{-k} I_{\{k \geq \lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \rceil\}} \right) \widehat{\phi}(t)^2 dt \\
& = \left(\sum_{k < \lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \rceil} 2^k + \left(\frac{20}{11} \right)^2 \sum_{k \geq \lceil \frac{\log(-z)}{\log 2} \rceil} 2^{-k} \right) \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \widehat{\phi}(t)^2 dt \\
& < \infty
\end{aligned}$$

に注意すると，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}
& \lim_{z' \to z+0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z') \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z')) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z'))} dt \\
& = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{k-1}(z) \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} 2^k \widehat{h}(2^k t + \widehat{y_k}(z)) \widehat{\phi}(t)^2 e^{\sqrt{-1}x(2^k t + \widehat{y_k}(z))} dt.
\end{aligned}$$

よって，Step 1 により

$$\lim_{z' \to z+0} (\widehat{h}\theta_{z'})\check{}(x) = (\widehat{h}\theta_z)\check{}(x)$$

が分かる． □

命題 2.33. $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$Ah(x) := \sup_{z\in\mathbb{R}} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_z)^{\vee}(x)\right|, \quad x \in \mathbb{R} \tag{74}$$

とする．このとき
(i) $Ah : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ は Borel 可測.
(ii) 任意の $\lambda(F) < \infty$ なる Lebesgue 可測集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\int_F Ah(x)dx \le 4C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.$$

証明 $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする.
(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ を固定する．$\forall w \in \mathbb{R}$ に対して $(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(\cdot) \in C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ であるから

$$\lim_{x'\to x} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(x')\right| = \left|2\pi(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(x)\right|.$$

(74) 式より

$$Ah(x') = \sup_{z\in\mathbb{R}} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_z)^{\vee}(x')\right| \ge \left|2\pi(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(x')\right|, \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

$x' \to x$ とすると

$$\liminf_{x'\to x} Ah(x') \ge \lim_{x'\to x} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(x')\right| = \left|2\pi(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(x)\right|, \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

$w \in \mathbb{R}$ について sup をとると

$$\liminf_{x'\to x} Ah(x') \ge \sup_{w\in\mathbb{R}} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_w)^{\vee}(x)\right| = Ah(x).$$

これは $\mathbb{R} \ni x \mapsto Ah(x) \in [0,\infty]$ の下半連続性を示している．従って $Ah(\cdot)$ は Borel 可測である．
(ii) $F \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測で，$\lambda(F) < \infty$ とする．4 段階で示す.
<u>Step 1</u> $z_1, ..., z_n \in \mathbb{R}$ を固定する．ただし $z_i \ne z_j$ $(i \ne j)$ とする.

$$\begin{aligned} v_i(x) &:= 2\pi(\widehat{h}\theta_{z_i})^{\vee}(x) \quad (1 \le i \le n), \\ v(x) &:= \max_{1\le i\le n} |v_i(x)|, \end{aligned}$$

そして

$$E_i := \{x \in \mathbb{R};\ v(x) = |v_i(x)|\} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \{x \in \mathbb{R};\ v(x) = |v_j(x)|\} \quad (1 \le i \le n)$$

とおく．このとき

$$E_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \ \ (1 \le i \le n), \quad \mathbb{R} = \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i$$

に注意すると

$$\int_F v(x)dx = \int_F \sum_{i=1}^{n} v(x) I_{E_i}(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_F \sum_{i=1}^n |v_i(x)| I_{E_i}(x) dx \\
&= \int_F \Big| \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) \Big| dx.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big| I_F(x) v_i(x) \big| dx &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} I_F(x) \big| (\widehat{h}\theta_{z_i})\check{}\,(x) \big| dx \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} I_F(x) dx \Big| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y) \theta_{z_i}(y) e^{\sqrt{-1}xy} dy \Big| \\
&\leq \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} I_F(x) dx \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)| \theta_{z_i}(y) dy \\
&\leq \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} I_F(x) dx \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(y)| dy \\
&= \sqrt{2\pi} \lambda(F) \, \|\widehat{h}\|_1 < \infty \quad (1 \leq i \leq n)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big| I_F(x) \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) \Big| dx &= \int_{\mathbb{R}} I_F(x) \sum_{i=1}^n |v_i(x)| I_{E_i}(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} |I_F(x) v_i(x)| dx < \infty
\end{aligned}
$$

となるから $I_F \sum_{i=1}^n v_i I_{E_i} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ である．補題 2.31 を適用して

$$
\begin{aligned}
&F' \subset \mathbb{R}\text{: Lebesgue 可測集合} \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
\bullet\ F' \subset F, \\
\bullet\ \displaystyle\int_F \Big| \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) \Big| dx = \int_F \Big| I_F(x) \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) \Big| dx \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \displaystyle\leq 4 \Big| \int_{F'} I_F(x) \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) dx \Big| \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \displaystyle= 4 \Big| \int_{F'} \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) dx \Big|.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

<u>Step 2</u> $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$
g := \sum_{i=1}^n z_i I_{E_i}
$$

とおく．g は Borel 可測である．

$\varepsilon > 0$ を固定する．各 $1 \leq i \leq n$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_{F'} v_i(x) I_{E_i}(x) dx &= \int_{F' \cap E_i} v_i(x) dx \\
&= 2\pi \int_{F' \cap E_i} (\widehat{h}\theta_{z_i})\check{}\,(x) dx
\end{aligned}
$$

であるから，命題 2.30 より

$$
1 \leq \forall i \leq n,\ \exists \mathscr{P}_i \in \mathscr{F}
$$

$$\text{s.t.}\quad \Big|\int_{F'} v_i(x)I_{E_i}(x)dx - \sum_{\substack{\sigma\in P;\\ z_i\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_{F'\cap E_i}\phi_\sigma(x)dx\Big| < \varepsilon,\quad \forall P\in\mathscr{P}_i.$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ z_i\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_{F'\cap E_i}\phi_\sigma(x)dx\\
&=\int_{F'\cap E_i}\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ z_i\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h,\phi_\sigma\rangle\,\phi_\sigma(x)dx\\
&=\int_{F'\cap E_i}\sum_{\sigma\in P} I_{J_\sigma^{\mathrm{r}}}(z_i)\,\langle h,\phi_\sigma\rangle\,\phi_\sigma(x)dx\\
&=\int_{F'\cap E_i}\sum_{\sigma\in P} I_{g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}(x)\,\langle h,\phi_\sigma\rangle\,\phi_\sigma(x)dx\quad [(\because)\ g(x)=z_i\ \ \text{on } E_i]\\
&=\sum_{\sigma\in P}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_{F'\cap E_i\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx,\\
&\quad\mathscr{P}_1\cap\cdots\cap\mathscr{P}_n\in\mathscr{F}\quad [(\because)\ \mathscr{F}\text{ は }\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(Q)\text{ 上の filter}]
\end{aligned}$$

に注意すると，$\forall P\in\mathscr{P}_1\cap\cdots\cap\mathscr{P}_n$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ z_i\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}} \langle h,\phi_\sigma\rangle \int_{F'\cap E_i}\phi_\sigma(x)dx\\
&=\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in P}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_{F'\cap E_i\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\\
&=\sum_{\sigma\in P}\langle h,\phi_\sigma\rangle\sum_{i=1}^n\int_{F'\cap E_i\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\\
&=\sum_{\sigma\in P}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_{F'\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\quad [(\because)\ \textstyle\bigsqcup_{i=1}^n E_i=\mathbb{R}].
\end{aligned}$$

従って $\forall P\in\mathscr{P}_1\cap\cdots\cap\mathscr{P}_n$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{F'}\sum_{i=1}^n v_i(x)I_{E_i}(x)dx-\sum_{\sigma\in P}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_{F'\cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})}\phi_\sigma(x)dx\Big|\\
&=\Big|\sum_{i=1}^n\Big(\int_{F'}v_i(x)I_{E_i}(x)dx-\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ z_i\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_{F'\cap E_i}\phi_\sigma(x)dx\Big)\Big|\\
&\le\sum_{i=1}^n\Big|\int_{F'}v_i(x)I_{E_i}(x)dx-\sum_{\substack{\sigma\in P;\\ z_i\in J_\sigma^{\mathrm{r}}}}\langle h,\phi_\sigma\rangle\int_{F'\cap E_i}\phi_\sigma(x)dx\Big|\\
&<n\varepsilon.
\end{aligned}$$

Step 3　Step 1 と Step 2 より

$$\int_F\max_{1\le i\le n}|2\pi(\widehat{h}\theta_{z_i})\check{\ }(x)|dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_F v(x)dx \\
&= \int_F \Big| \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) \Big| dx \\
&\leq 4 \Big| \int_{F'} \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) dx \Big| \quad [(\because) \text{ Step 1}] \\
&= 4 \Big| \int_{F'} \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) dx - \sum_{\sigma \in P} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \\
&\qquad + \sum_{\sigma \in P} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \Big| \\
&\leq 4 \Big| \int_{F'} \sum_{i=1}^n v_i(x) I_{E_i}(x) dx - \sum_{\sigma \in P} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \Big| \\
&\qquad + 4 \Big| \sum_{\sigma \in P} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \Big| \\
&< 4n\varepsilon + 4 \Big| \sum_{\sigma \in P} \langle h, \phi_\sigma \rangle \int_{F \cap g^{-1}(J_\sigma^{\mathrm{r}})} \phi_\sigma(x) dx \Big|, \quad \forall P \in \mathscr{P}_1 \cap \cdots \cap \mathscr{P}_n \quad [(\because) \text{ Step 2}].
\end{aligned}
$$

命題 2.21 より

$$
(\text{最右辺の第 2 項}) \leq 4C_9 \left\| h \right\|_2 \lambda\left(F'\right)^{\frac{1}{2}} \leq 4C_9 \left\| h \right\|_2 \lambda\left(F\right)^{\frac{1}{2}}
$$

であるから

$$
\int_F \max_{1 \leq i \leq n} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_{z_i})\check{}\,(x) \right| dx < 4n\varepsilon + 4C_9 \left\| h \right\|_2 \lambda\left(F\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

$\varepsilon \to 0+$ とすると

$$
\int_F \max_{1 \leq i \leq n} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_{z_i})\check{}\,(x) \right| dx \leq 4C_9 \left\| h \right\|_2 \lambda\left(F\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Step 4　命題 2.32 より，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\mathbb{R} \ni z \mapsto \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x) \right| \in [0, \infty)
$$

は右連続なので，

$$
Ah(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x) \right| = \sup_{z \in \mathbb{Q}} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x) \right|
$$

である．なぜならば，各 $z \in \mathbb{R}$ に対して $z_n := \frac{\lfloor 2^n z \rfloor + 1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと，$z_n \in \mathbb{Q}$, $z_n \searrow z$ $(n \to \infty)$ である．$\left| 2\pi(\widehat{h}\theta_\cdot)\check{}\,(x) \right|$ の右連続性より，

$$
\left| 2\pi(\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x) \right| = \lim_{n \to \infty} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_{z_n})\check{}\,(x) \right| \leq \sup_{w \in \mathbb{Q}} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_w)\check{}\,(x) \right|.
$$

$z \in \mathbb{R}$ について sup を取って

$$
\sup_{z \in \mathbb{R}} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_z)\check{}\,(x) \right| \leq \sup_{w \in \mathbb{Q}} \left| 2\pi(\widehat{h}\theta_w)\check{}\,(x) \right|.
$$

逆向きの不等式は明らかに成り立つ.

$\mathbb{Q} = \{r_i;\ i \in \mathbb{N}\}$, ただし $r_i \neq r_j$ $(i \neq j)$ とすると,

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{Q}} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_z)\check{}(x)\right| &= \sup_{i\geq 1} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_{r_i})\check{}(x)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} (\nearrow) \max_{1\leq i\leq n} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_{r_i})\check{}(x)\right|\end{aligned}$$

であるから

$$Ah(x) = \lim_{n\to\infty} (\nearrow) \max_{1\leq i\leq n} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_{r_i})\check{}(x)\right|.$$

よって Step 3 より

$$\begin{aligned}\int_F Ah(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_F \max_{1\leq i\leq n} \left|2\pi(\widehat{h}\theta_{r_i})\check{}(x)\right| dx \quad [(\because)\ 単調収束定理] \\ &\leq 4C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

補題 2.34. $\alpha > 0$, y, z, $\beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta'_{z,\alpha,\beta}(y) = \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y + \beta) \tag{75}$$

とする. このとき

(i) $(0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \ni (\alpha,\beta,y,z) \mapsto \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \in [0,1]$ は Borel 可測.

(ii) $\theta'_{z,\alpha,\beta}(y) = 0$ if $y \geq z$.

(iii) $\forall h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\forall z \in \mathbb{R}$ に対して

$$2\pi\left|(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta})\check{}(x)\right| \leq \left(D_{\frac{1}{\alpha}} AM_\beta D_\alpha h\right)(x).$$

証明 (i) 命題 2.23(iii) より

$$\mathbb{R}^2 \ni (y,z) \mapsto \theta_z(y) \in [0,1]$$

は Borel 可測である. 明らかに

$$(0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \ni (\alpha,\beta,y,z) \mapsto (\alpha y+\beta, \alpha z+\beta) \in \mathbb{R}^2$$

は Borel 可測なので

$$(0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \ni (\alpha,\beta,y,z) \mapsto \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y+\beta) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \in [0,1]$$

も Borel 可測である.

(ii) 命題 2.23(ii) より

$$\begin{aligned} y \geq z\ &\Rightarrow \alpha y + \beta \geq \alpha z + \beta \quad [\alpha > 0 \text{ に注意}] \\ &\Rightarrow \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) = \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y+\beta) = 0.\end{aligned}$$

(iii) $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする. $\alpha > 0$, $\beta, z \in \mathbb{R}$ を固定する. $v = \alpha z + \beta$ とすると

$$(D_\alpha S_\beta \theta_v)(y) = (S_\beta\theta_v)(\alpha y) = \theta_v(\alpha y+\beta) = \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y+\beta) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y).$$

命題 2.4 より

$$
\begin{aligned}
\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta} &= \widehat{h} D_\alpha S_\beta \theta_v \\
&= D_\alpha S_\beta (S_{-\beta} D_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{h} \theta_v) \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.4(\mathrm{i}), (\mathrm{ii})] \\
&= D_\alpha S_\beta \big((S_{-\beta} \alpha \widehat{(D_\alpha h)}) \theta_v \big) \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.4(\mathrm{v})] \\
&= \alpha D_\alpha S_\beta \big((S_{-\beta} \widehat{(D_\alpha h)}) \theta_v \big) \\
&= \alpha D_\alpha S_\beta \big(\widehat{(M_\beta D_\alpha h)} \theta_v \big) \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.4(\mathrm{v})], \\
\big(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta}\big)^{\vee} &= \Big(\alpha D_\alpha S_\beta \big((M_\beta D_\alpha h)^{\wedge} \theta_v \big) \Big)^{\vee} \\
&= D_{\frac{1}{\alpha}} \Big(S_\beta \big((M_\beta D_\alpha h)^{\wedge} \theta_v \big) \Big)^{\vee} \quad [(\because)\ \text{命題 } 2.4(\mathrm{v})] \\
&= D_{\frac{1}{\alpha}} M_{-\beta} \big((M_\beta D_\alpha h)^{\wedge} \theta_v \big)^{\vee}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
2\pi \Big| \big(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta}\big)^{\vee}(x) \Big| &= 2\pi \Big| \Big(D_{\frac{1}{\alpha}} M_{-\beta} \big(\widehat{(M_\beta D_\alpha h)} \theta_v \big)^{\vee} \Big)(x) \Big| \\
&= 2\pi \Big| \Big(M_{-\beta} \big(\widehat{(M_\beta D_\alpha h)} \theta_v \big)^{\vee} \Big) \Big(\frac{x}{\alpha} \Big) \Big| \\
&= 2\pi \Big| e^{-\sqrt{-1}\beta \frac{x}{\alpha}} \big(\widehat{(M_\beta D_\alpha h)} \theta_v \big)^{\vee} \Big(\frac{x}{\alpha} \Big) \Big| \\
&= 2\pi \Big| \big(\widehat{(M_\beta D_\alpha h)} \theta_v \big)^{\vee} \Big(\frac{x}{\alpha} \Big) \Big| \\
&\le \big(A M_\beta D_\alpha h \big) \Big(\frac{x}{\alpha} \Big) \quad [\text{cf. } (74)] \\
&= \big(D_{\frac{1}{\alpha}} A M_\beta D_\alpha h \big)(x).
\end{aligned}
$$

□

補題 2.34(i) より，$(\alpha, y, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ を止めるごとに

$$
\mathbb{R} \ni \beta \mapsto \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \in [0, 1]
$$

は Borel 可測なので，積分 $\int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) d\beta$ は定義でき，各 $b > 0$ に対して

$$
(0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \ni (\alpha, y, z) \mapsto \frac{1}{b} \int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) d\beta \in [0, 1]
$$

も Borel 可測である．

命題 2.35. $\forall \alpha > 0,\ \forall y, \forall z \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) d\beta
$$

は存在する．この極限を $g(\alpha, y, z)$ と表すと

$$
(0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \ni (\alpha, y, z) \mapsto g(\alpha, y, z) \in [0, 1]
$$

は Borel 可測である．そこで $\mathbb{R}^2 \ni (y, z) \mapsto \widetilde{\theta_z}(y) \in [0, \infty)$ を

$$
\widetilde{\theta_z}(y) = \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y, z) d\alpha \tag{76}
$$

とすると，

$$\widetilde{\theta_z}(y) = \begin{cases} \widetilde{\theta_1}(0) > 0 & \text{if } \ y < z, \\ 0 & \text{if } \ y \geq z \end{cases}$$

となる．

証明 補題 2.34(ii) より

$$y \geq z \ \Rightarrow \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) = 0 \quad (\forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R})$$

なので

$$\frac{1}{b}\int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) d\beta = 0 \quad (\forall b > 0).$$

明らかに $b \to \infty$ のとき極限は存在し $g(\alpha, y, z) = 0$ である．従って $y \geq z$ のときは $\widetilde{\theta_z}(y) = 0$ となる．

以下，$y < z$ とする．6 段階で示す．

Step 1　$\alpha > 0$ に対して

$$l := \left\lfloor \frac{\log(20\alpha(z-y))}{\log 2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$$

とすると

$$\theta'_{z,\alpha,\beta+2^l}(y) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \quad (\forall \beta \in \mathbb{R}).$$

(Pr.)　2 段階で示す．

Step 1-1　$\theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \neq 0 \Rightarrow \theta'_{z,\alpha,\beta \pm 2^l}(y) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)$.

(Pr.)　$\theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y + \beta) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \neq 0$ より

$$\exists J \in \mathscr{D} \ \text{ s.t. } \ \alpha y + \beta \in J^{\mathrm{l}},\, \alpha z + \beta \in J^{\mathrm{r}}.$$

$J = \bigl[2^k m,\ 2^k(m+1)\bigr)$ (ただし $k,\ m \in \mathbb{Z}$) とすると，

$$\begin{aligned} &J^{\mathrm{r}} = \left[2^k\left(m + \frac{1}{2}\right),\ 2^k(m+1)\right), \\ &0 \neq \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y+\beta) = \widehat{\phi}\left(\frac{\alpha y + \beta - 2^k(m+\frac{1}{4})}{2^k}\right)^2 \quad [\text{cf. 定義 } 2.11] \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} &2^k\left(m+\frac{1}{2}\right) \leq \alpha z + \beta < 2^k(m+1), \\ &\left|\frac{\alpha y + \beta - 2^k(m+\frac{1}{4})}{2^k}\right| \leq \frac{1}{5} \ \Leftrightarrow \ \left|\alpha y + \beta - 2^k\left(m+\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{2^k}{5} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \ 2^k\left(m+\frac{1}{4}\right) - \frac{2^k}{5} \leq \alpha y + \beta \leq 2^k\left(m+\frac{1}{4}\right) + \frac{2^k}{5}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$2^k m + \frac{1}{2}\cdot 2^k \leq \alpha z + \beta < 2^k m + 2^k,\ -2^k m - \frac{9}{20}\cdot 2^k \leq -\alpha y - \beta \leq -2^k m - \frac{1}{20}\cdot 2^k$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \frac{1}{20}\cdot 2^k = \Big(\frac{1}{2}-\frac{9}{20}\Big)\cdot 2^k \le \alpha(z-y) < \Big(1-\frac{1}{20}\Big)\cdot 2^k = \frac{19}{20}\cdot 2^k\\
&\Rightarrow\ 2^k \le 20\alpha(z-y)\\
&\Rightarrow\ k\log 2 \le \log(20\alpha(z-y))\\
&\Rightarrow\ k \le \frac{\log(20\alpha(z-y))}{\log 2}\\
&\Rightarrow\ k \le \left\lfloor \frac{\log(20\alpha(z-y))}{\log 2}\right\rfloor = l \quad [k\in\mathbb{Z}\ \text{であることに注意}]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ \begin{cases}
\begin{array}{ccccc}
2^k\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\pm 2^l & \le \alpha z+\beta\pm 2^l < & 2^k(m+1)\pm 2^l\\
\parallel & & \parallel\\
2^k\Big(m\pm 2^{l-k}+\frac{1}{2}\Big) & & 2^k(m\pm 2^{l-k}+1),
\end{array}\\[2ex]
\begin{array}{ccccc}
2^k m\pm 2^l & \le \alpha y+\beta\pm 2^l < & 2^k\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\pm 2^l\\
\parallel & & \parallel\\
2^k(m\pm 2^{l-k}) & & 2^k\Big(m\pm 2^{l-k}+\frac{1}{2}\Big)
\end{array}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow\ \begin{cases}
\alpha z+\beta\pm 2^l \in \big[2^k(m\pm 2^{l-k}+\tfrac{1}{2}),\ 2^k(m\pm 2^{l-k}+1)\big)\\
\qquad\qquad\quad = \big[2^k(m\pm 2^{l-k}),\ 2^k(m\pm 2^{l-k}+1)\big)^{\mathrm{r}},\\
\alpha y+\beta\pm 2^l \in \big[2^k(m\pm 2^{l-k}),\ 2^k(m\pm 2^{l-k}+\tfrac{1}{2})\big)\\
\qquad\qquad\quad = \big[2^k(m\pm 2^{l-k}),\ 2^k(m\pm 2^{l-k}+1)\big)^{\mathrm{l}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \theta_{\alpha z+\beta\pm 2^l}(\alpha y+\beta\pm 2^l) = \widehat{\phi}\bigg(\frac{\alpha y+\beta\pm 2^l-2^k(m\pm 2^{l-k}+\frac{1}{4})}{2^k}\bigg)^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \widehat{\phi}\bigg(\frac{\alpha y+\beta-2^k(m+\frac{1}{4})}{2^k}\bigg)^2 = \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y+\beta)\\
&\Rightarrow\ \theta'_{z,\alpha,\beta\pm 2^l}(y) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y).
\end{aligned}
$$

<u>Step 1-2</u> $\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)=0 \Rightarrow \theta'_{z,\alpha,\beta+2^l}(y)=0=\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)$.

(Pr.) $\theta'_{z,\alpha,\beta+2^l}(y)\neq 0$ ならば，Step 1-1 より

$$\theta'_{z,\alpha,\beta}(y) = \theta'_{z,\alpha,\beta+2^l-2^l}(y) = \theta'_{z,\alpha,\beta+2^l}(y)$$

なので $\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)\neq 0$. 対偶をとると

$$\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)=0\ \Rightarrow\ \theta'_{z,\alpha,\beta+2^l}(y)=0.$$

<u>Step 2</u> $\forall\alpha>0$ に対して

$$\exists\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta =: g(\alpha,y,z).$$

(Pr.) $\alpha>0$ を固定する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b}\int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta\\
&= \frac{1}{b}\int_0^{2^l\lfloor\frac{b}{2^l}\rfloor}\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta + \frac{1}{b}\int_{2^l\lfloor\frac{b}{2^l}\rfloor}^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{2^l}\rfloor}\int_{(j-1)2^l}^{j2^l}\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta + \frac{1}{b}\int_{2^l\lfloor \frac{b}{2^l}\rfloor}^{b}\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta \\
&= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{2^l}\rfloor}\int_{0}^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma+(j-1)2^l}(y)d\gamma + \frac{1}{b}\int_{0}^{b-2^l\lfloor \frac{b}{2^l}\rfloor}\theta'_{z,\alpha,\gamma+2^l\lfloor \frac{b}{2^l}\rfloor}(y)d\gamma \\
&\qquad [(\because)\ \text{変数変換}\ \gamma=\beta-(j-1)2^l,\ \text{ただし}\ j=1,...,\lfloor \tfrac{b}{2^l}\rfloor+1] \\
&= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{2^l}\rfloor}\int_{0}^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma + \frac{1}{b}\int_{0}^{2^l\{\frac{b}{2^l}\}}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma \\
&\qquad [(\because)\ \text{Step 1 より}\ \theta'_{z,\alpha,\gamma+(j-1)2^l}(y)=\theta'_{z,\alpha,\beta}(y),\ j=1,...,\lfloor \tfrac{j}{2^l}\rfloor+1] \\
&= \frac{1}{b}\left\lfloor \frac{b}{2^l}\right\rfloor\int_{0}^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma + \frac{1}{b}\int_{0}^{2^l\{\frac{b}{2^l}\}}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma \\
&= \frac{1}{b}\Big(\frac{b}{2^l}-\Big\{\frac{b}{2^l}\Big\}\Big)\int_{0}^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma + \frac{1}{b}\int_{0}^{2^l\{\frac{b}{2^l}\}}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma \\
&= \frac{1}{2^l}\int_{0}^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma - \frac{1}{b}\Big\{\frac{b}{2^l}\Big\}\int_{0}^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma + \frac{1}{b}\int_{0}^{2^l\{\frac{b}{2^l}\}}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma.
\end{aligned}
$$

よって，$0 \le \{\frac{b}{2^l}\} < 1$ であるから

$$
\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta = \frac{1}{2^l}\int_0^{2^l}\theta'_{z,\alpha,\gamma}(y)d\gamma =: g(\alpha,y,z).
$$

Step 3 $\forall\gamma\in\mathbb{R}$ に対して

$$
\widetilde{\theta_{z+\gamma}}(y+\gamma) = \widetilde{\theta}_z(y).
$$

(Pr.) $\gamma\in\mathbb{R}$ を固定する．$\forall\alpha>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&g(\alpha,y+\gamma,z+\gamma) \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b \theta'_{z+\gamma,\alpha,\beta}(y+\gamma)d\beta \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b \theta_{\alpha(z+\gamma)+\beta}\big(\alpha(y+\gamma)+\beta\big)d\beta \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b \theta_{\alpha z+\alpha\gamma+\beta}(\alpha y+\alpha\gamma+\beta)d\beta \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_{\alpha\gamma}^{\alpha\gamma+b} \theta_{\alpha z+\delta}(\alpha y+\delta)d\delta \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \delta=\alpha\gamma+\beta] \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_{\alpha\gamma}^{\alpha\gamma+b} \theta'_{z,\alpha,\delta}(y)d\delta \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}\int_0^{\alpha\gamma+b} \theta'_{z,\alpha,\delta}(y)d\delta - \frac{1}{b}\int_0^{\alpha\gamma} \theta'_{z,\alpha,\delta}(y)d\delta\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\alpha\gamma+b}{b}\cdot\frac{1}{\alpha\gamma+b}\int_0^{\alpha\gamma+b} \theta'_{z,\alpha,\delta}(y)d\delta - \frac{1}{b}\int_0^{\alpha\gamma} \theta'_{z,\alpha,\delta}(y)d\delta\right) \\
&= g(\alpha,y,z).
\end{aligned}
$$

(76) 式より

$$\widetilde{\theta_{z+\gamma}}(y+\gamma) = \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y+\gamma, z+\gamma) d\alpha$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y, z) d\alpha = \widetilde{\theta_z}(y).$$

$\underline{\underline{\text{Step 4}}}$ $\forall \gamma > 0$ に対して

$$\int_\gamma^{2\gamma} \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y, z) d\alpha = \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y, z) d\alpha.$$

(Pr.) 命題 2.27 より

$$\theta_z(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{k-1}(z)\psi_k(y;z)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lfloor 2^{-k+1} z \rfloor - 2 \lfloor 2^{-k} z \rfloor \right) \widehat{\phi}\left(2^{-k}\left(y - 2^k \left(\lfloor 2^{-k} z \rfloor + \frac{1}{4} \right)\right)\right)^2$$

であるから

$$\theta_{2z}(2y)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lfloor 2^{-k+1} \cdot 2z \rfloor - 2 \lfloor 2^{-k} \cdot 2z \rfloor \right) \widehat{\phi}\left(2^{-k}\left(2y - 2^k \left(\lfloor 2^{-k} \cdot 2z \rfloor + \frac{1}{4} \right)\right)\right)^2$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lfloor 2^{-k+2} z \rfloor - 2 \lfloor 2^{-k+1} z \rfloor \right) \widehat{\phi}\left(2^{-k+1}\left(y - 2^{k-1} \left(\lfloor 2^{-k+1} z \rfloor + \frac{1}{4} \right)\right)\right)^2$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left\lfloor 2^{-(k-1)+1} z \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{-(k-1)} z \right\rfloor \right) \widehat{\phi}\left(2^{-(k-1)}\left(y - 2^{k-1} \left(\left\lfloor 2^{-(k-1)} z \right\rfloor + \frac{1}{4} \right)\right)\right)^2$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lfloor 2^{-k+1} z \rfloor - 2 \lfloor 2^{-k} z \rfloor \right) \widehat{\phi}\left(2^{-k}\left(y - 2^k \left(\lfloor 2^{-k} z \rfloor + \frac{1}{4} \right)\right)\right)^2$$
$$= \theta_z(y).$$

ゆえに

$$\theta'_{z,2\alpha,2\beta}(y) = \theta_{2\alpha z+2\beta}(2\alpha y + 2\beta)$$
$$= \theta_{2(\alpha z+\beta)}(2(\alpha y + \beta))$$
$$= \theta_{\alpha z+\beta}(\alpha y + \beta) = \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \quad (\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

従って

$$g(2\alpha, y, z) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \theta'_{z,2\alpha,\beta}(y) d\beta$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \theta'_{z,\alpha,\frac{\beta}{2}}(y) d\beta$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} \theta'_{z,\alpha,\beta'}(y) 2 d\beta' \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \beta' = \tfrac{\beta}{2}]$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \theta'_{z,\alpha,\beta'}(y) d\beta' = g(\alpha, y, z), \quad \alpha > 0,$$

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma^\delta \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha &= \int_\gamma^\delta \frac{1}{\alpha} g(2\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2\gamma}^{2\delta} \frac{1}{\alpha'} g(\alpha',y,z)d\alpha' \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \alpha' = 2\alpha] \\
&= \int_{2\gamma}^{2\delta} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha, \quad 0 < \gamma \le \delta.
\end{aligned}
$$

今，$\gamma > 0$ に対して $k = \left\lfloor \frac{\log\gamma}{\log 2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
k \le \frac{\log\gamma}{\log 2} < k+1 \ &\Leftrightarrow k\log 2 \le \log\gamma < (k+1)\log 2 \\
&\Leftrightarrow 2^k \le \gamma < 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

であるから，上の等式より

$$
\begin{aligned}
&\int_\gamma^{2\gamma} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha - \int_{2^k}^{\gamma} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha + \int_{2\cdot 2^k}^{2\gamma} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha.
\end{aligned}
$$

$k \in \mathbb{N}$ のときは

$$
\begin{aligned}
\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha &= \int_{2\cdot 2^{k-1}}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2\cdot 2^{k-2}}^{2\cdot 2^{k-1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2^{k-2}}^{2^{k-1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \cdots \\
&= \int_{2^0}^{2^1} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha = \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha.
\end{aligned}
$$

$k \in -\mathbb{N}$ のときは

$$
\begin{aligned}
\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha &= \int_{2\cdot 2^k}^{2\cdot 2^{k+1}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2\cdot 2^{k+1}}^{2\cdot 2^{k+2}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \int_{2^{k+2}}^{2^{k+3}} \frac{1}{\alpha} g(\alpha,y,z)d\alpha \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

$$= \int_{2^0}^{2^1} \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y, z) d\alpha = \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha, y, z) d\alpha.$$

$\underline{\underline{\text{Step 5}}}$ $\alpha,\ \gamma > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
g(\alpha, \gamma y, \gamma z) &= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \int_0^b \theta'_{\gamma z, \alpha, \beta}(\gamma y) d\beta \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \int_0^b \theta_{\alpha\gamma z + \beta}(\alpha\gamma y + \beta) d\beta \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \int_0^b \theta'_{z, \alpha\gamma, \beta}(y) d\beta = g(\alpha\gamma, y, z)
\end{aligned}$$

であるから，$\gamma > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta_{\gamma z}}(\gamma y) &= \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha, \gamma y, \gamma z) d\alpha \\
&= \int_1^2 \frac{1}{\alpha} g(\alpha\gamma, y, z) d\alpha \\
&= \int_\gamma^{2\gamma} \frac{1}{\frac{\alpha'}{\gamma}} g(\alpha', y, z) \frac{d\alpha'}{\gamma} \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \alpha' = \alpha\gamma] \\
&= \int_\gamma^{2\gamma} \frac{1}{\alpha'} g(\alpha', y, z) d\alpha' \\
&= \int_1^2 \frac{1}{\alpha'} g(\alpha', y, z) d\alpha' \quad [(\because)\ \text{Step 4}] \\
&= \widetilde{\theta}_z(y).
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}_z(y) &= \widetilde{\theta_{z-y}}(y - y) \quad [(\because)\ \text{Step 3}] \\
&= \widetilde{\theta_{z-y}}(0) \\
&= \widetilde{\theta_{(z-y)\cdot 1}}\big((z - y) \cdot 0\big) \\
&= \widetilde{\theta}_1(0) \quad [(\because)\ y < z \text{ より } z - y > 0 \text{ だから上式を適用}].
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Step 6}}}$ $\widetilde{\theta}_1(0) > 0$.
$\overline{\text{(Pr.)}}$ $1 \leq \alpha < \frac{7}{6}$ とする．$m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}
&2\Big(m + \frac{1}{12}\Big) \leq \beta \leq 2\Big(m + \frac{5}{12}\Big) \\
&\Rightarrow \begin{cases}
\bullet\ \beta \in \Big[2\big(m + \frac{1}{12}\big),\ 2\big(m + \frac{5}{12}\big)\Big] \subset \Big[2m,\ 2\big(m + \frac{1}{2}\big)\Big) = \big[2m,\ 2(m+1)\big)^{\mathrm{l}}, \\
\bullet\ 2m + \frac{1}{6} + 1 \leq \alpha + \beta < 2m + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2m + 2 = 2(m+1) \\
\qquad\qquad \parallel \\
\quad 2m + \frac{7}{6} = 2\big(m + \frac{7}{12}\big) > 2\big(m + \frac{1}{2}\big)
\end{cases} \\
&\Rightarrow\ \alpha + \beta \in \Big[2\big(m + \frac{1}{2}\big),\ 2(m+1)\Big) = \big[2m,\ 2(m+1)\big)^{\mathrm{r}} \\
&\Rightarrow\ \theta_{\alpha+\beta}(\beta) = \widehat{\phi}\bigg(\frac{\beta - 2m - \frac{1}{2}}{2}\bigg)^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l}(\because)\ 2m+\frac{1}{6}\le\beta\le 2m+\frac{5}{6}\\ \qquad\Rightarrow\ -\frac{1}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\le\beta-2m-\frac{1}{2}\le\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\\ \qquad\Rightarrow\ \left|\frac{\beta-2m-\frac{1}{2}}{2}\right|\le\frac{1}{6}\\ \qquad\Rightarrow\ 1\ge\widehat{\phi}\big(\frac{\beta-2m-\frac{1}{2}}{2}\big)^2\ge I_{[-\frac{1}{6},\,\frac{1}{6}]}\big(\frac{\beta-2m-\frac{1}{2}}{2}\big)=1\end{array}\right]$$

であるから，

$$\begin{aligned}
g(\alpha,0,1)&=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b\theta'_{1,\alpha,\beta}(0)d\beta\\
&=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b\theta_{\alpha\cdot 1+\beta}(\alpha\cdot 0+\beta)d\beta\\
&=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b\theta_{\alpha+\beta}(\beta)d\beta\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\int_0^{2M}\theta_{\alpha+\beta}(\beta)d\beta\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{2m}^{2(m+1)}\theta_{\alpha+\beta}(\beta)d\beta\\
&\ge\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{2(m+\frac{1}{12})}^{2(m+\frac{5}{12})}\theta_{\alpha+\beta}(\beta)d\beta\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\sum_{m=0}^{M-1}\left(2\Big(m+\frac{5}{12}\Big)-2\Big(m+\frac{1}{12}\Big)\right)\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{2}{3}\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\cdot\frac{2}{3}M=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta_1}(0)&=\int_1^2\frac{1}{\alpha}g(\alpha,0,1)d\alpha\\
&\ge\int_1^{\frac{7}{6}}\frac{1}{\alpha}g(\alpha,0,1)d\alpha\\
&\ge\int_1^{\frac{7}{6}}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{3}d\alpha\\
&=\frac{1}{3}\big[\log\alpha\big]_1^{\frac{7}{6}}=\frac{1}{3}\log\frac{7}{6}>0.
\end{aligned}$$

□

命題 2.36. $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して，$M_\beta D_\alpha h\in\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ だから，$D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ は Borel 可測である [cf. 命題 2.33(i)]．ただし $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$．このとき

(i) $(0,\infty)\times\mathbb{R}^2\ni(\alpha,\beta,x)\mapsto\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)\in[0,\infty]$ は Borel 可測.

(ii) $\mathbb{R}\ni x\mapsto\frac{1}{n}\int_1^2\frac{1}{\alpha}\int_0^n\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)d\alpha d\beta\in[0,\infty]$ は Borel 可測 $(\forall n\in\mathbb{N})$．従って

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&[0,\infty]\\ \cup&&\cup\\ x&\mapsto&(\widetilde{A}h)(x):=\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^2\frac{1}{\alpha}\int_0^n\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)d\alpha d\beta\end{array}\tag{77}$$

は Borel 可測である.

(iii) $\lambda(F) < \infty$ を満たす任意の Lebesgue 可測集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\int_F (\widetilde{A}h)(x)dx \leq 3C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.$$

(iv) $\forall x, \forall z \in \mathbb{R}$ に対して

$$2\pi\left|(\widehat{h}\widetilde{\theta_z})\check{}(x)\right| \leq (\widetilde{A}h)(x).$$

証明 $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する.

(i) (74) 式より，$\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(AM_\beta D_\alpha h)(x) = \sup_{z\in\mathbb{R}} \left|2\pi\big((M_\beta D_\alpha h)\widehat{}\theta_z\big)\check{}(x)\right|.$$

命題 2.4(v) より

$$(M_\beta D_\alpha h)\widehat{} = S_{-\beta}(D_\alpha h)\widehat{} = S_{-\beta}\frac{1}{\alpha}D_{\frac{1}{\alpha}}\widehat{h} = \frac{1}{\alpha}S_{-\beta}D_{\frac{1}{\alpha}}\widehat{h}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\big((M_\beta D_\alpha h)\widehat{}\theta_z\big)\check{}(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (M_\beta D_\alpha h)\widehat{}(y)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\alpha}S_{-\beta}D_{\frac{1}{\alpha}}\widehat{h}\Big)(y)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\alpha}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
&\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)\\
&= \big(AM_\beta D_\alpha h\big)\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|2\pi\big((M_\beta D_\alpha h)\widehat{}\theta_z\big)\check{}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\right|\\
&= \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\alpha}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{x}{\alpha}y}dy\right|\\
&= \frac{2\pi}{\alpha}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy\right|
\end{aligned}$$

となる．以下 2 段階で示す.

Step 1 各 $z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
(0,\infty)\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C}\\
\Psi & & \Psi\\
(\alpha,\beta,x) & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy
\end{array}$$

は連続である.

(Pr.) $\widehat{h} \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より

$$\begin{aligned}|\widehat{h}(t)| &= (1+t^2)|\widehat{h}(t)| \cdot \frac{1}{1+t^2} \\ &\le \Big(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}(1+\tau^2)|\widehat{h}(\tau)|\Big)\frac{1}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\Big|\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}\Big| &\le \Big|\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\Big| \quad [(\because)\ 0 \le \theta_z(y) \le 1] \\ &\le \Big(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}(1+\tau^2)|\widehat{h}(\tau)|\Big)\frac{1}{1+\big(\frac{y-\beta}{\alpha}\big)^2}. \end{aligned} \tag{78}$$

$|y| \ge |\beta|+1$ のとき

$$\begin{aligned}|y-\beta| - \frac{|y|}{|\beta|+1} &\ge |y| - |\beta| - \frac{|y|}{|\beta|+1} \\ &= \frac{(|\beta|+1)-1}{|\beta|+1}|y| - |\beta| \\ &= \frac{|\beta|}{|\beta|+1}\big(|y| - (|\beta|+1)\big) \ge 0\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}1+\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)^2 &= 1 + \frac{|y-\beta|^2}{|\alpha|^2} \\ &\ge I_{\{|y|<|\beta|+1\}} + I_{\{|y|\ge|\beta|+1\}}\Big(1+\frac{|y|^2}{|\alpha|^2(|\beta|+1)^2}\Big) \\ &\ge I_{\{|y|<|\beta|+1\}} + I_{\{|y|\ge|\beta|+1\}}\frac{|y|^2}{|\alpha|^2(|\beta|+1)^2}.\end{aligned}$$

逆数をとって

$$\frac{1}{1+\big(\frac{y-\beta}{\alpha}\big)^2} \le I_{\{|y|<|\beta|+1\}} + I_{\{|y|\ge|\beta|+1\}}\frac{|\alpha|^2(|\beta|+1)^2}{|y|^2}.$$

これを (78) 式に用いると

$$\begin{aligned}&\Big|\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}\Big| \\ &\le \Big(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}(1+\tau^2)|\widehat{h}(\tau)|\Big)\Big(I_{\{|y|<|\beta|+1\}} + I_{\{|y|\ge|\beta|+1\}}\frac{|\alpha|^2(|\beta|+1)^2}{|y|^2}\Big)\end{aligned}$$

となる．

今，$(\alpha,\beta,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^2$, $\big\{(\alpha_n,\beta_n,x_n)\big\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ は $(\alpha_n,\beta_n,x_n) \to (\alpha,\beta,x)$ $(n\to\infty)$ とする．$n \gg 1$ に対して

$$|\alpha_n| < 2|\alpha|, \quad |\beta| - \frac{1}{2} < |\beta_n| < |\beta| + \frac{1}{2}$$

であるから

$$\Big|\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta_n}{\alpha_n}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{x_n y}{\alpha_n}}\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \Big(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}(1+\tau^2)|\widehat{h}(\tau)|\Big)\Big(I_{\{|y|<|\beta_n|+1\}}+I_{\{|y|\ge|\beta_n|+1\}}\frac{|\alpha_n|^2(|\beta_n|+1)^2}{|y|^2}\Big)\\
&\le \Big(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}(1+\tau^2)|\widehat{h}(\tau)|\Big)\Big(I_{\{|y|<|\beta|+\frac{3}{2}\}}+I_{\{|y|\ge|\beta|+\frac{1}{2}\}}\frac{(2|\alpha|)^2(|\beta|+\frac{3}{2})^2}{y^2}\Big),\quad n\gg 1.
\end{aligned}
$$

$n\to\infty$ のとき

$$
\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta_n}{\alpha_n}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{x_ny}{\alpha_n}}\to\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}.
$$

明らかに

$$
\int_{\mathbb{R}}\Big(I_{\{|y|<|\beta|+\frac{3}{2}\}}+I_{\{|y|\ge|\beta|+\frac{1}{2}\}}\frac{(2|\alpha|)^2(|\beta|+\frac{3}{2})^2}{y^2}\Big)dy<\infty
$$

なので，Lebesgue の収束定理を適用して

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta_n}{\alpha_n}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{x_ny}{\alpha_n}}dy=\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy
$$

が分かる．これは

$$
(\alpha,\beta,x)\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy
$$

の連続性を示している．

Step 2　Step 1 より，$\forall z\in\mathbb{R}$ に対して

$$
(\alpha,\beta,x)\mapsto\frac{1}{\alpha}\Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy\Big|
$$

は連続であるので

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\beta,x)\mapsto&\frac{2\pi}{\alpha}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy\Big|\\
&=\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)
\end{aligned}
$$

は下半連続である．なぜならば

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{(\alpha',\beta',x')\to(\alpha,\beta,x)}\big(D_{\frac{1}{\alpha'}}AM_{\beta'}D_{\alpha'}h\big)(x')\\
&=\liminf_{(\alpha',\beta',x')\to(\alpha,\beta,x)}\frac{2\pi}{\alpha'}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta'}{\alpha'}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{x'y}{\alpha'}}dy\Big|\\
&\ge\lim_{(\alpha',\beta',x')\to(\alpha,\beta,x)}\frac{2\pi}{\alpha'}\Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta'}{\alpha'}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{x'y}{\alpha'}}dy\Big|\\
&=\frac{2\pi}{\alpha}\Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big)\theta_z(y)e^{\sqrt{-1}\frac{xy}{\alpha}}dy\Big|,\quad\forall z\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

であるから，$z\in\mathbb{R}$ について sup を取って $\liminf_{(\alpha',\beta',x')\to(\alpha,\beta,x)}\big(D_{\frac{1}{\alpha'}}AM_{\beta'}D_{\alpha'}h\big)(x')\ge\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)$ が成り立つ．従って，$(\alpha,\beta,x)\mapsto\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)$ は Borel 可測である．

(ii)　(i) より明らか.

(iii)　$F\subset\mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合で $\lambda(F)<\infty$ とする．$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\int_F\frac{1}{n}\int_1^2\frac{1}{\alpha}\int_0^n\big(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\big)(x)d\beta d\alpha dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\int_0^n \int_F \big(D_{\frac{1}{\alpha}} A M_\beta D_\alpha h\big)(x)dxd\beta d\alpha \\
&= \frac{1}{n}\int_1^2 d\alpha \int_0^n d\beta \int_F \big(A M_\beta D_\alpha h\big)\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\frac{dx}{\alpha} \\
&= \frac{1}{n}\int_1^2 d\alpha \int_0^n d\beta \int_{\frac{F}{\alpha}} \big(A M_\beta D_\alpha h\big)(\xi)d\xi \quad [(\because)\ \text{変数変換}\ \xi = \tfrac{x}{\alpha}] \\
&\leq \frac{1}{n}\int_1^2 d\alpha \int_0^n 4C_9 \big\|M_\beta D_\alpha h\big\|_2 \lambda\left(\frac{F}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\beta \quad [(\because)\ \text{命題 2.33(ii)}] \\
&= \frac{1}{n}\int_1^2 d\alpha \int_0^n 4C_9 \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \|h\|_2 \cdot \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \lambda(F)^{\frac{1}{2}} d\beta \quad [(\because)\ \text{命題 2.4(v)}] \\
&= 4C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} \int_1^2 \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{n}\int_0^n d\beta \\
&= 4C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} \big[\log\alpha\big]_1^2 \\
&= 4C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} \log 2 \\
&\leq 3C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} \quad [(\because)\ 2^4 < e^3\ \text{より}\ 4\log 2 < 3].
\end{aligned}
$$

Fatou の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\int_F (\widetilde{A}h)(x)dx \\
&= \int_F \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\int_0^n \big(D_{\frac{1}{\alpha}} A M_\beta D_\alpha h\big)(x)d\beta d\alpha dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_F \frac{1}{n}\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\int_0^n \big(D_{\frac{1}{\alpha}} A M_\beta D_\alpha h\big)(x)d\beta d\alpha dx \\
&\leq 3C_9 \|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

(iv) $x,\, z \in \mathbb{R}$ を固定する．$0 \leq \theta'_{z,\alpha,\beta}(y) \leq 1$ より

$$
0 \leq \frac{1}{n}\int_0^n \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta \leq 1
$$

なので，Lebesgue の収束定理を適用して

$$
\begin{aligned}
(\widehat{h}\widetilde{\theta}_z)\check{}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\widetilde{\theta}_z(y)e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta\Big)d\alpha e^{\sqrt{-1}xy}dy \quad [\text{cf. (76)}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta d\alpha e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n \theta'_{z,\alpha,\beta}(y)d\beta d\alpha e^{\sqrt{-1}xy}dy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(y)\theta'_{z,\alpha,\beta}(y)e^{\sqrt{-1}xy}dyd\beta d\alpha \\
&\qquad [(\because)\ \text{Fubini の定理}] \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n \big(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta}\big)\check{}(x)d\beta d\alpha.
\end{aligned}
$$

絶対値をとり，その後で両辺に 2π をかけて

$$
\begin{aligned}
&2\pi\left|(\widehat{h}\widetilde{\theta_z})\check{}(x)\right| \\
&= 2\pi\lim_{n\to\infty}\left|\int_1^2\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n\left(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta}\right)\check{}(x)d\beta d\alpha\right| \\
&\leq 2\pi\liminf_{n\to\infty}\int_1^2\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n\left|\left(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta}\right)\check{}(x)\right|d\beta d\alpha \\
&= \liminf_{n\to\infty}\int_1^2\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n 2\pi\left|\left(\widehat{h}\theta'_{z,\alpha,\beta}\right)\check{}(x)\right|d\beta d\alpha \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\int_1^2\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\int_0^n\left(D_{\frac{1}{\alpha}}AM_\beta D_\alpha h\right)(x)d\beta d\alpha \quad [(\because)\ \text{補題 2.34(iii)}] \\
&= (\widetilde{A}h)(x).
\end{aligned}
$$

□

命題 2.37. $f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して

$$
(\widehat{A}f)(y) := \sup_{a\leq b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|,\quad y\in\mathbb{R} \tag{79}
$$

と定義する．このとき

(i) $\mathbb{R}\ni y\mapsto(\widehat{A}f)(y)\in[0,\infty]$ は下半連続，従って Borel 可測である．

(ii) $\lambda(F)<\infty$ を満たす任意の Lebesgue 可測集合 $F\subset\mathbb{R}$ に対して

$$
\int_F(\widehat{A}f)(y)dy\leq C_{10}\|f\|_2\lambda(F)^{\frac{1}{2}}.
$$

ただし，$C_{10}=\frac{3C_9}{\pi\widehat{\theta}_1(0)}$.

証明 (i) $f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．$-\infty<a<b<\infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_a^b|f(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}}I_{[a,b]}(x)|f(x)|dx \\
&\leq\left(\int_{\mathbb{R}}I_{[a,b]}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad [(\because)\ \text{Schwarz の不等式}] \\
&= \sqrt{b-a}\,\|f\|_2<\infty.
\end{aligned}
$$

$y,\,y'\in\mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy'}dx\right| \\
&=\left|\int_a^b f(x)\left(e^{-\sqrt{-1}xy}-e^{-\sqrt{-1}xy'}\right)dx\right| \\
&\leq\int_b^a|f(x)|\left|e^{-\sqrt{-1}xy}-e^{-\sqrt{-1}xy'}\right|dx \\
&\leq\int_b^a|f(x)||x||y-y'|dx \\
&\quad\left[\begin{aligned}
&(\because)\ \left|e^{\sqrt{-1}u}-e^{\sqrt{-1}v}\right| \\
&\qquad=\left|\int_0^1\tfrac{d}{dt}(e^{\sqrt{-1}(tu+(1-t)v)})dt\right| \\
&\qquad=\left|\int_0^1 e^{\sqrt{-1}(tu+(1-t)v)}\sqrt{-1}(u-v)dt\right| \\
&\qquad\leq\int_0^1\left|e^{\sqrt{-1}(tu+(1-t)v)}\right||u-v|dt=|u-v|\quad(\forall u,\ \forall v\in\mathbb{R})
\end{aligned}\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|dx\,(|a|\vee|b|)\,|y-y'| \quad [(\because)\ a\leq x\leq b\ \Rightarrow\ |x|\leq(|a|\vee|b|)]$$

なので

$$\mathbb{R}\ni y\mapsto \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\in\mathbb{C}$$

は連続であることが分かる．従って

$$\mathbb{R}\ni y\mapsto \left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|\in[0,\infty)$$

も連続である．ゆえに

$$\mathbb{R}\ni y\mapsto \sup_{a\leq b}\left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|\in[0,\infty]$$

は下半連続である．

(ii) 3 段階で示す．

Step 1 $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $y\in\mathbb{R}$ に対して

$$(\widehat{A}h)(y)\leq\frac{1}{\pi\widetilde{\theta}_1(0)}(\widetilde{A\widetilde{h}})(-y).$$

(Pr.) $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $y\in\mathbb{R}$ を固定する．$-\infty<a<b<\infty$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b h(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^b h(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^a h(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{(\check{h})}(x)I_{(-\infty,b)}(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{(\check{h})}(x)I_{(-\infty,a)}(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx.
\end{aligned}$$

ここで，命題 2.35 より

$$\widetilde{\theta}_z(y)=I_{\{y<z\}}\widetilde{\theta}_z(y)+I_{\{y\geq z\}}\widetilde{\theta}_z(y)=I_{\{y<z\}}\widetilde{\theta}_1(0),$$

すなわち $I_{(-\infty,z)}(y)=\dfrac{1}{\widetilde{\theta}_1(0)}\widetilde{\theta}_z(y)$ であるから

$$\begin{aligned}
(\text{最右辺})&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{(\check{h})}(x)\frac{1}{\widetilde{\theta}_1(0)}\widetilde{\theta}_b(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{(\check{h})}(x)\frac{1}{\widetilde{\theta}_1(0)}\widetilde{\theta}_a(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\\
&=\frac{1}{\widetilde{\theta}_1(0)}\Big(\big(\widehat{(\check{h})}\widetilde{\theta}_b\big)\check{}(-y)-\big(\widehat{(\check{h})}\widetilde{\theta}_a\big)\check{}(-y)\Big).
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
(\widehat{A}h)(y)&=\sup_{a\leq b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^b h(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|\\
&=\sup_{a\leq b}\left|\frac{1}{\widetilde{\theta}_1(0)}\Big(\big(\widehat{(\check{h})}\widetilde{\theta}_b\big)\check{}(-y)-\big(\widehat{(\check{h})}\widetilde{\theta}_a\big)\check{}(-y)\Big)\right|\\
&\leq\frac{1}{\widetilde{\theta}_1(0)}\sup_{a\leq b}\Big(\big|\big(\widehat{(\check{h})}\widetilde{\theta}_b\big)\check{}(-y)\big|+\big|\big(\widehat{(\check{h})}\widetilde{\theta}_a\big)\check{}(-y)\big|\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\widetilde{\theta}_1(0)} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \left((\check{h})^{\wedge}\, \widetilde{\theta}_z \right)^{\vee}(-y) \right| \\
&\leq \frac{2}{\widetilde{\theta}_1(0)} \cdot \frac{1}{2\pi} (\widetilde{A}\check{h})(-y) \quad [(\because)\ 命題\ 2.36(\mathrm{iv})] \\
&= \frac{1}{\pi\widetilde{\theta}_1(0)} (\widetilde{A}\check{h})(-y).
\end{aligned}
$$

Step 2　$F \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測で $\lambda(F) < \infty$, $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．Step 1 より

$$
\begin{aligned}
\int_F (\widehat{A}h)(y)dy &\leq \frac{1}{\pi\widetilde{\theta}_1(0)} \int_F (\widetilde{A}\check{h})(-y)dy \\
&= \frac{1}{\pi\widetilde{\theta}_1(0)} \int_{-F} (\widetilde{A}\check{h})(y)dy \\
&\leq \frac{1}{\pi\widetilde{\theta}_1(0)} \cdot 3C_9 \|\check{h}\|_2 \lambda(-F)^{\frac{1}{2}} \quad [(\because)\ 命題\ 2.36(\mathrm{iii})] \\
&= \frac{3C_9}{\pi\widetilde{\theta}_1(0)} \|h\|_2 \,\lambda(F)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_{10} \|h\|_2 \,\lambda(F)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Step 3　$f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
(\widehat{A}_n f)(y) := \sup_{-n\leq a\leq b\leq n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^b f(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx \right|, \quad y \in \mathbb{R}
$$

とおく．$\widehat{A}_n f \nearrow \widehat{A}f\ (n \to \infty)$ に注意せよ．系 1.18 より，$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$
\exists h \in \mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \quad \text{s.t.} \quad \|f-h\|_2 < \varepsilon.
$$

$-\infty < a \leq b < \infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx - \int_a^b h(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx \right| \\
&= \left| \int_a^b (f(x)-h(x)) e^{-\sqrt{-1}xy} dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f(x)-h(x)| dx \\
&\leq \sqrt{b-a}\, \|f-h\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\varepsilon \quad [\text{cf. (i)}].
\end{aligned}
$$

$-n \leq a \leq b \leq n$ のときは

$$
\left| \int_a^b f(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx - \int_a^b h(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx \right| \leq \sqrt{2n}\varepsilon
$$

となるから，

$$
\begin{aligned}
(\widehat{A}_n f)(y) &= \sup_{-n\leq a\leq b\leq n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^b f(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx \right| \\
&\leq \sup_{-n\leq a\leq b\leq n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^b h(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx \right| + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{-n\le a\le b\le n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left| \int_a^b h(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx \right| + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \\
&= (\widehat{A}_n h)(y) + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \\
&\le (\widehat{A}h)(y) + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}
$$

Step 2 より

$$
\begin{aligned}
\int_F (\widehat{A}_n f)(y)dy &\le \int_F \left((\widehat{A}h)(y) + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \right) dy \\
&= \int_F (\widehat{A}h)(y)dy + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F) \\
&\le C_{10}\|h\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F) \\
&= C_{10}\|h-f+f\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F) \\
&\le C_{10}\big(\|h-f\|_2 + \|f\|_2\big)\lambda(F)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F) \\
&\le C_{10}\big(\varepsilon + \|f\|_2\big)\lambda(F)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\lambda(F).
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \to 0+$ とすると

$$
\int_F (\widehat{A}_n f)(y)dy \le C_{10}\|f\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.
$$

$n \to \infty$ とすると，単調収束定理より

$$
\int_F (\widehat{A} f)(y)dy \le C_{10}\|f\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}}. \qquad \square
$$

2.5. 主定理の証明

定理 2.1 の証明 $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を固定する．4 段階で示す．

Step 1 $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\gamma_n(y) := \sup_{a\le -n,\, b\ge n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left| \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx - \int_{-n}^n f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx \right| \in [0,\infty]
$$

とおく．このとき

(a) $\gamma_n(\cdot)$ は下半連続.

(b) $\inf_{n\ge 1}\gamma_n(y) = 0$ ならば

$$
\lim_{a\to-\infty,\, b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx
$$

は収束する.

(Pr.) (a) について．命題 2.37(i) の証明から，$-\infty < \forall a < \forall b < \infty$ に対して

$$
\mathbb{R} \ni y \mapsto \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx \in \mathbb{C}
$$

は連続である．$\gamma_n(\cdot)$ の下半連続性はこのことからすぐに分かる．

(b) について．$\inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)=0$ とすると

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists m\in\mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ \gamma_m(y)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき，$\forall a\leq -m, \forall b\geq m$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{80}$$

特に $n\geq m$ に対して，$-n\leq -m$ より

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^n f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{81}$$

これは，$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^n f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\}_{n=1}^\infty$ が $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であることを示している．従って

$$\exists\zeta\in\mathbb{C}\ \text{ s.t. }\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^n f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx=\zeta.$$

これと (81) 式より

$$\left|\zeta-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

よって (80) 式より

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\zeta\right|\\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\zeta\right|\\
&\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-m}^m f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\zeta\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad \forall a\leq -m,\ \forall b\geq m.
\end{aligned}$$

これは

$$\lim_{a\to-\infty,\,b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx=\zeta$$

を示している．

Step 2 $\lambda\left(\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}\right)=0.$

(Pr.) Step 1 (a) より $\gamma_n(\cdot)$ は下半連続だから Borel 可測なので，$\inf_{n\geq 1}\gamma_n(\cdot)$ は Borel 可測である．従って $\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}$ は Borel 可測集合である．

$$\lambda\Big(\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}\Big)=\lim_{m\to\infty}\lambda\Big(\{y\in\mathbb{R};\ |y|\leq m,\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)\geq\frac{1}{m}\}\Big)$$

に注意せよ．実際 $E_m:=\{y\in\mathbb{R};\ |y|\leq m,\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)\geq\frac{1}{m}\}$ とおくと，集合列 $\{E_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Borel 可測で，$E_m\nearrow\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}$ $(m\to\infty)$ より

$$\lim_{m\to\infty}\lambda\left(E_m\right)=\lambda\Big(\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}\Big)$$

である．

背理法により Step 2 の主張を示す．

$$\lambda\Big(\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}\Big)>0$$

と仮定する．$\varepsilon_0>0$ を

$$\lambda\Big(\{y\in\mathbb{R};\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)>0\}\Big)>\varepsilon_0$$

と取る．上の注意より

$$\exists m_0\in\mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ \lambda\left(\left\{y\in\mathbb{R};\ |y|\leq m_0.\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)\geq\frac{1}{m_0}\right\}\right)>\varepsilon_0.$$

$\varepsilon>0$ を，$0<\varepsilon<\left(\varepsilon_0\wedge\frac{1}{m_0}\right)$ を満たすものとし，

$$F:=\left\{y\in\mathbb{R};\ |y|\leq\frac{1}{\varepsilon},\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)\geq\varepsilon\right\}$$

とおく．F は Borel 可測集合で $F\subset[-\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\varepsilon}]$．さらに $\varepsilon<\varepsilon_0,\ \varepsilon<\frac{1}{m_0},\ m_0<\frac{1}{\varepsilon}$ より

$$F\supset\left\{y\in\mathbb{R};\ |y|\leq m_0,\ \inf_{n\geq 1}\gamma_n(y)\geq\frac{1}{m_0}\right\}$$

であるから，$\varepsilon<\lambda(F)\leq\frac{2}{\varepsilon}<\infty$.

$n\in\mathbb{N}$ を

$$C_{10}^2\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx-\int_{-n}^{n}|f(x)|^2dx\right)\leq\varepsilon^3$$

を満たすようにとり，

$$f_1:=f-fI_{[-n,n]}$$

とおく．$f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ より $f_1\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で

$$\begin{aligned}\|f_1\|_2^2&=\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)-f(x)I_{[-n,n]}(x)\right|^2dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\big(1-I_{[-n,n]}(x)\big)\right|^2dx\\&=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\big(1-I_{[-n,n]}(x)\big)dx\\&=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx-\int_{-n}^{n}|f(x)|^2dx\\&\leq\frac{\varepsilon^3}{C_{10}^2}\end{aligned}\tag{82}$$

となる．

$$\begin{aligned}&\sup_{a\leq -n,\,b\geq n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^b f_1(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|\\&=\sup_{a\leq -n,\,b\geq n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx-\int_a^b f(x)I_{[-n,n]}(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{a\le -n,\, b\ge n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx - \int_{(a\vee -n)}^{(b\wedge n)} f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx \right| \\
&= \sup_{a\le -n,\, b\ge n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx - \int_{-n}^{n} f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx \right| \\
&= \gamma_n(y)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\gamma_n(y) \le \sup_{a\le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^b f_1(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx \right| = (\widehat{A}f_1)(y).
$$

命題 2.37(ii) と (82) 式より

$$
\int_F \gamma_n(y)dy \le \int_F (\widehat{A}f_1)(y)dy \le C_{10} \|f_1\|_2 \lambda(F)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon^{\frac{3}{2}} \lambda(F)^{\frac{1}{2}}.
$$

一方

$$
\int_F \gamma_n(y)dy \ge \int_F \varepsilon dy = \varepsilon\lambda(F)
$$

であるから $\varepsilon\lambda(F) \le \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda(F)^{\frac{1}{2}}$．整理して $\lambda(F) \le \varepsilon$．これは $\lambda(F) > \varepsilon$ に反する．

従って

$$
\lambda\Big(\{y \in \mathbb{R};\ \inf_{n\ge 1} \gamma_n(y) > 0\}\Big) = 0
$$

でなければならない．

Step 3　Step 1, Step 2 より，a.e. $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\lim_{a\to-\infty,\, b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx
$$

は収束する．

Step 4　$n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n = fI_{[-n,n]}$ とすると，$f_n \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ で，

$$
\|f_n - f\|_2 = \|f(1 - I_{[-n,n)})\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).
$$

従って

$$
\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 = \|f_n - f\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

であるから，

$$
\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}: \text{ 部分列 s.t. } \widehat{f_{n_k}}(y) \to \widehat{f}(y) \quad (k \to \infty) \quad \text{a.e. } y.
$$

一方

$$
\widehat{f_n}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx, \quad y \in \mathbb{R}
$$

であるので，Step 3 より a.e. $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(y) = \lim_{a\to-\infty,\, b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)e^{-\sqrt{-1}xy}dx.
$$

よって

$$\lim_{a\to-\infty,\, b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) e^{-\sqrt{-1}xy} dx = \widehat{f}(y) \quad \text{a.e. } y$$

が分かる． □

定理 2.2 の証明 $f \in L^2([-\pi,\pi);\mathbb{C})$ を固定する．定理 2.2 の主張を定理 2.1 の主張に対応した形で次のように一般化する： $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_{M,N}(f;x) = \sum_{-M\le n\le N} \widehat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx}, \quad x \in [-\pi,\pi)$$

とするとき，a.e. $x \in [-\pi,\pi)$ に対して

$$\lim_{M,N\to\infty} S_{M,N}(f;x) = f(x).$$

$M = N$ のときが定理 2.2 の主張である．以下，3 段階で上の収束を示す．

Step 1 $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi,\, \pi), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-\pi,\, \pi) \end{cases}$$

とおくと，$f_1 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $g := \check{f_1} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap C_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ である．定理 2.1 より，a.e. $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{a,b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^b g(y) e^{-\sqrt{-1}xy} dy$$

は収束し，その極限は $\widehat{g}(x) = f_1(x)$ となる．特に a.e. $x \in [-\pi,\pi)$ に対して

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} g(y) e^{-\sqrt{-1}xy} dy = f(x).$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} g(y) e^{-\sqrt{-1}xy} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-1}xy} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) e^{\sqrt{-1}yt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) dt \int_{-N-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-1}y(x-t)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) I_{\{x-t\neq 0\}} \frac{e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(-N-\frac{1}{2})(x-t)}}{-\sqrt{-1}(x-t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) I_{\{x-t\neq 0\}} \frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}}{\sqrt{-1}(x-t)} dt
\end{aligned}$$

であるから， a.e. $x \in [-\pi,\pi)$ に対して

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) I_{\{x-t\neq 0\}} \frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}}{\sqrt{-1}(x-t)} dt = f(x).$$

Step 2 まず

$$
\begin{aligned}
S_{M,N}(f;x) &= \sum_{-M\le n\le N} \widehat{f}(n)e^{\sqrt{-1}nx} \\
&= \sum_{-M\le n\le N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\sqrt{-1}nt}dt\cdot e^{\sqrt{-1}nx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-M\le n\le N} e^{\sqrt{-1}n(x-t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_{M,N}(x-t)dt \qquad (83)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
D_{M,N}(y) = \sum_{-M\le n\le N} e^{\sqrt{-1}ny}, \quad y\in\mathbb{R}
$$

とする．

$D_{M,N}(y)$ を求める：

$$
\begin{aligned}
e^{-\sqrt{-1}y}D_{M,N}(y) &= \sum_{-M\le n\le N} e^{\sqrt{-1}(n-1)y} \\
&= \sum_{-M-1\le n\le N-1} e^{\sqrt{-1}ny} \\
&= \sum_{-M\le n\le N} e^{\sqrt{-1}ny} + e^{\sqrt{-1}(-M-1)y} - e^{\sqrt{-1}Ny} \\
&= D_{M,N}(y) - e^{\sqrt{-1}Ny} + e^{-\sqrt{-1}(M+1)y}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ (e^{-\sqrt{-1}y}-1)D_{M,N}(y) = -e^{\sqrt{-1}Ny} + e^{-\sqrt{-1}(M+1)y}
$$

$$
\parallel
$$

$$
e^{-\sqrt{-1}\frac{y}{2}}\left(e^{-\sqrt{-1}\frac{y}{2}} - e^{\sqrt{-1}\frac{y}{2}}\right)D_{M,N}(y) = e^{-\sqrt{-1}\frac{y}{2}}\cdot(-2)\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}\,D_{M,N}(y)
$$

$$
\Rightarrow\ -2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}\,D_{M,N}(y) = -e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})y} + e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})y}
$$

であることから，$y\notin 2\pi\mathbb{Z}$ のとき

$$
D_{M,N}(y) = \frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})y} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})y}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}}.
$$

$y\in 2\pi\mathbb{Z}$ のときは，$e^{\sqrt{-1}ny}=1\ \ (\forall n\in\mathbb{Z})$ だから，$D_{M,N}(y)=\sum_{-M\le n\le N}1 = M+N+1$．
従って

$$
D_{M,N}(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})y} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})y}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}}, & y\notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ M+N+1, & y\in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}
$$

である．これを (83) 式に用いると

$$
S_{M,N}(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)I_{\{x-t\notin 2\pi\mathbb{Z}\}}\frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{x-t}{2}}dt
$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) I_{\{x-t\neq 0\}} \frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{x-t}{2}} dt$$

$$[(\because)\ -\pi \le x < \pi,\ -\pi \le t < \pi \text{のとき},\ -2\pi < x-t < 2\pi \text{に注意}].$$

この表示より，$-\pi < x < \pi$ に対して

$$S_{M,N}(f;x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) I_{\{x-t\neq 0\}} \frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}}{\sqrt{-1}(x-t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) I_{\{x-t\neq 0\}} \left(\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}} - \frac{1}{x-t}\right)\left(e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}\right) dt$$

$$= \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f_1(x-\tau) I_{\{\tau\neq 0\}} \left(\frac{1}{2\sin\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{\tau}\right)\left(e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})\tau} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})\tau}\right) d\tau$$

$$[(\because)\ \text{変数変換}\ \tau = x-t]$$

$$= \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_1(x-\tau) I_{(x-\pi,\,0)\cup(0,\,x+\pi)}(\tau) \frac{\frac{\tau}{2} - \sin\frac{\tau}{2}}{\tau\sin\frac{\tau}{2}} \left(e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})\tau} - e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})\tau}\right) d\tau.$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{2} - \sin\frac{\tau}{2} &= \int_0^1 \left(\frac{\tau}{2}s - \sin\frac{\tau}{2}s\right)' ds \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau s}{2}\right) ds \\
&= \frac{\tau}{2}\int_0^1 \left(1 - \cos\frac{\tau s}{2}\right) ds \\
&= \frac{\tau}{2}\int_0^1 ds \int_0^1 \left(-\cos\frac{\tau s}{2}r\right)' dr \\
&= \frac{\tau}{2}\int_0^1 ds \int_0^1 \frac{\tau s}{2}\sin\frac{\tau s r}{2} dr \\
&= \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \int_0^1 s ds \int_0^1 \sin\frac{\tau s r}{2} dr
\end{aligned}$$

より，$\tau \in (x-\pi,\,0)\cup(0,\,x+\pi) \subset (-2\pi,\,0)\cup(0,\,2\pi)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{\tau}{2} - \sin\frac{\tau}{2}}{\tau\sin\frac{\tau}{2}}\right| &= \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}\int_0^1 s ds \int_0^1 \sin\frac{\tau s r}{2} dr\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}\right| \int_0^1 s ds \int_0^1 \left|\sin\frac{\tau s r}{2}\right| dr \\
&\le \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}\int_0^1 s ds \int_0^1 dr \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}.
\end{aligned}$$

$\sin t$ は，$[0,\,\pi]$ では上に凸，$[-\pi,\,0]$ では下に凸なので

$$\begin{aligned}
0 < \tau < x+\pi\ &\Rightarrow 0 < \frac{\tau}{2} < \frac{x+\pi}{2} < \frac{2\pi}{2} = \pi \\
&\Rightarrow \frac{\sin\frac{\tau}{2} - \sin 0}{\frac{\tau}{2} - 0} \ge \frac{\sin\frac{x+\pi}{2} - \sin 0}{\frac{x+\pi}{2} - 0} \\
&\Rightarrow 0 < \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}} \le \frac{\frac{x+\pi}{2}}{\sin\frac{x+\pi}{2}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x-\pi<\tau<0 \ &\Rightarrow -\pi=\frac{-2\pi}{2}<\frac{x-\pi}{2}<\frac{\tau}{2}<0\\
&\Rightarrow \frac{\sin 0-\sin\frac{x-\pi}{2}}{0-\frac{x-\pi}{2}}\leq\frac{\sin 0-\sin\frac{\tau}{2}}{0-\frac{\tau}{2}}\\
&\Rightarrow 0<\frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}\leq\frac{\frac{x-\pi}{2}}{\sin\frac{x-\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

となるから，

$$
\left|\frac{\frac{\tau}{2}-\sin\frac{\tau}{2}}{\tau\sin\frac{\tau}{2}}\right|\leq\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{x+\pi}{2}}{\sin\frac{x+\pi}{2}}\vee\frac{\frac{x-\pi}{2}}{\sin\frac{x-\pi}{2}}\right),\quad \tau\in(x-\pi,\,0)\cup(0,\,x+\pi).
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left|f_1(x-\tau)I_{(x-\pi,\,0)\cup(0,\,x+\pi)}(\tau)\frac{\frac{\tau}{2}-\sin\frac{\tau}{2}}{\tau\sin\frac{\tau}{2}}\right|d\tau\\
&\leq\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{x+\pi}{2}}{\sin\frac{x+\pi}{2}}\vee\frac{\frac{x-\pi}{2}}{\sin\frac{x-\pi}{2}}\right)\int_{\mathbb{R}}|f_1(x-\tau)|d\tau<\infty
\end{aligned}
$$

となり

$$
f_1(x-\tau)I_{(x-\pi,\,0)\cup(0,\,x+\pi)}(\tau)\frac{\frac{\tau}{2}-\sin\frac{\tau}{2}}{\tau\sin\frac{\tau}{2}}\in L^1\left(\mathbb{R};\mathbb{C}\right).
$$

以上のことから，Riemann-Lebesgue の定理 [cf. 補題 1.2] より

$$
\lim_{M,N\to\infty}\left(S_{M,N}(f;x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)I_{\{x-t\neq 0\}}\frac{e^{\sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})(x-t)}-e^{-\sqrt{-1}(M+\frac{1}{2})(x-t)}}{\sqrt{-1}(x-t)}dt\right)=0,
$$
$$
-\pi<\forall x<\pi.
$$

<u>Step 3</u>　Step 1 と Step 2 より， a.e. $x\in[-\pi,\,\pi)$ に対して

$$
\lim_{M,N\to\infty}S_{M,N}(f;x)=f(x)
$$

が成り立つ. □

謝辞

本論文の作成においては，実に多くの人々から指導や協力をいただいた．特に高信 敏先生には，私が学域生であった頃よりセミナーなどでお世話になり，私が分からなかった，理解の至らなかったところについて丁寧な解説を付けてくださったほか，論文作成に際し校正の指摘や助言を多数頂戴した．また修士 1 年次には Fourier 級数論の基礎について大塚 浩史先生にもご指導いただき，数多くの意見を頂戴した．私自身抜けのあるところも多かった中，最後まで親身にご指導・ご鞭撻いただいた両先生に，この場を借りて厚くお礼申し上げる．

また，授業内外を問わず関わってくださった大学の教職員の方々，ともに学ぶにあたって支えてくれた同期の皆，そして 6 年間の大学生活を様々な形でサポートしてくれた家族にも，感謝申し上げる．

参考文献

[1] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math,* **116** (1966), 135-157.

[2] C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. Math.,* **98** (1973), 551-571.

[3] D.H. Fremlin, Fourier analysis, *Measure theory,* Volume 2, Chapter 28.
`https://www1.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/chap28.pdf`

[4] M.T. Lacey, Carleson's theorem: proof, complements, variations, *Publ. Math.,* **48** (2004), 251-307.

[5] M.T. Lacey and C.M. Thiele, A proof of boundedness of the Carleson operator, *Math. Res. Lett.,* **7** (2000), 361-370.

[6] 高信 敏, Fourier 解析 2016 年度版.