



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Изучение динамических систем с непрерывным временем»

Студентка 315 группы
А. Ю. Скворцова

Руководитель курсовой работы
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Биологическая интерпретация	4
3	Введение безразмерных переменных	5
4	Неподвижные точки	5
4.1	Нахождение неподвижных точек	5
4.2	Устойчивость неподвижных точек	6
4.2.1	Случай $a < b$	6
4.2.2	Случай $a = b$	7
4.2.3	Случай $a > b$	7
5	Фазовые портреты системы	9
6	Предельные циклы	12
7	Интерпретация результатов	12

1 Постановка задачи

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a - bu - \frac{cuv}{A+u}, \\ \frac{dv}{dt} = d \frac{uvq}{1+u} - ev, \\ \frac{dq}{dt} = R - fq, \end{cases} \quad (u, v, q) \in \mathbb{R}_+^3; A, R, a, b, c, d, e, f > 0. \quad (1)$$

Система рассматривается в \mathbb{R}_+^3 . Требуется провести исследование, включающее в себя:

1. Биологическую интерпретацию характеристик системы;
2. Введение безразмерных переменных, максимально уменьшив число входящих параметров (выбрать два из них, остальные считать фиксированными);
3. Нахождение неподвижных точек системы и исследование их характера в зависимости от значений выбранных параметров;
4. Построение параметрического портрета системы;
5. Построение фазового портрета системы для каждой характерной области параметрического портрета и оценку поведения системы в каждом из этих случаев;
6. Исследование возможности возникновения предельного цикла (в положительном случае найти соответствующее ему первое ляпуновское число и исследовать характер предельного цикла);
7. Биологическую интерпретацию полученных результатов.

2 Биологическая интерпретация

Очистка сточной воды в промышленных объемах производится специальным реактором - аэротехом. Основным смыслом этого устройства заключается в том, чтобы из поступающей сточной воды получить на выходе воду с заранее установленным порогом концентрации органических загрязнений. При этом биохимические процессы, проходящие внутри аэротехи, отличаются высокой сложностью и до сих пор не до конца исследованы.

Система (1) представляет собой математическую модель процесса очистки сточных вод. Здесь загрязнитель рассматривается как «жертва», т.к. процесс биохимического окисления загрязнения трактуется как «поедание» его микроорганизмами активного ила. Биологически активный ил, соответственно, «хищник». В системе (1) $u(t)$ — это концентрация загрязнения воды, а $v(t)$ — плотность биомассы активного ила.

Важным будет заметить, что заданная модель учитывает еще одну компоненту. Это процесс аэрации — процесс насыщения ила кислородом, который значительно повышает способность переработки биологически активным илом загрязнителя. Таким образом $q(t)$ — концентрация кислорода.

Рассмотрим составляющие уравнений:

1. Постоянная $R > 0$ скорость притока кислорода в систему за единицу времени;
2. Слагаемое $-bu$ показывает естественный распад загрязнений;
3. $a > 0$ — это мощность источника загрязнения;
4. $\frac{uv}{A+u}$ и $\frac{uvq}{1+u}$ — функции, характеризующие процесс очистки загрязнителя биологически активным илом;
5. $e > 0$ — постоянная, характеризующая скорость убывания массы активного ила в чистой воде;

3 Введение безразмерных переменных

Исходная система содержит 8 параметров. Для упрощения введем новые, безразмерные переменные, которые позволят сократить количество параметров. Обозначим:

$$\begin{aligned} u = x(t) &\Rightarrow \dot{u} = \dot{x}(t), \\ v = \frac{1}{c}y(t) &\Rightarrow \dot{v} = \frac{d}{c}\dot{y}(t), \\ q = z(t) &\Rightarrow \dot{q} = f\dot{z}(t), \end{aligned}$$

Подставим в выражение (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = a - bx - \frac{cxy}{c(A+x)}, \\ \frac{d}{c}\dot{y} = \frac{dxyz}{c(1+x)} - \frac{e}{c}y, \\ f\dot{z} = R - fz, \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = a - bx - \frac{xy}{A+x}, \\ \dot{y} = \frac{xyz}{1+x} - \frac{e}{d}y, \\ \dot{z} = \frac{R}{f} - z. \end{cases}$$

Введем новые коэффициенты:

$$\psi = \frac{e}{d}, \mu = \frac{R}{f}.$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - bx - \frac{xy}{A+x}, \\ \dot{y} = \frac{xyz}{1+x} - \psi y, \\ \dot{z} = \mu - z, \end{cases} \quad \psi, \mu, A, a, b > 0.$$

Таким образом мы сократили количество входных параметров с 8 до 5.

4 Неподвижные точки

4.1 Нахождение неподвижных точек

Определение 1. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точкой динамической системы $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, где $(x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n, i = 1, n, f = (f_1, \dots, f_n)$, если $f(a) = 0$.

Для нахождения неподвижных точек решим следующую систему:

$$\begin{cases} 0 = a - bx - \frac{xy}{A+x}, \\ 0 = \frac{xyz}{1+x} - \psi y, \\ 0 = \mu - z, \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a - bx - \frac{xy}{A+x}, \\ 0 = y(\frac{x\mu}{1+x} - \psi), \\ z(t) = \mu. \end{cases}$$

Если $y(t) = 0$, то $x(t) = \frac{a}{b}$.

Если же $y(t) \neq 0$, то $x(t) = \frac{\psi}{\mu - \psi}$. Подставим в первое уравнение системы и получим, что $y(t) = \frac{(a(\mu - \psi) - b\psi)(A(\mu - \psi) + \psi)}{(\mu - \psi)\psi}$.

Тогда имеем две неподвижные точки:

$$P_1 = (\frac{a}{b}, 0, \mu), P_2 = (\frac{\psi}{\mu - \psi}, \frac{(a(\mu - \psi) - b\psi)(A(\mu - \psi) + \psi)}{(\mu - \psi)\psi}, \mu).$$

Зафиксируем $\mu = 2, \psi = 1, A = 1$. Тогда точки примут вид:

$$P_1 = \left(\frac{a}{b}, 0, 2\right), P_2 = (1, 2(a - b), 2).$$

Финально получим следующие условия:

1. при $a > b$ система имеет обе неподвижные точки P_1 и P_2 ;
2. при $a = b$ точки P_1 и P_2 совпадают и равны $(1, 0, 2)$;
3. при $a < b$, P_1 — единственная неподвижная точка.

4.2 Устойчивость неподвижных точек

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем

Теорема 1. Пусть u^* - положение равновесия, а $J(u)$ - матрица Якоби исследуемой динамической системы. Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы Якоби, вычисленные в точке u^* , таковы, что $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$. Если хотя бы одно собственное значение λ_i таково, что $Re(\lambda_i) > 0$, то неподвижная точка u^* неустойчива.

Построим матрицу Якоби для полученной системы:

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} -b - \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{x}{1+x} & 0 \\ \frac{yz}{(1+x)^2} & -1 + \frac{xz}{1+x} & \frac{xy}{1+x} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.2.1 Случай $a < b$

В этом случае имеется одна неподвижная точка $P_1 = (\frac{a}{b}, 0, 2)$. Матрица Якоби от этой точки:

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -b & -\frac{a}{a+b} & 0 \\ 0 & \frac{a-b}{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\det(J(P_1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -b - \lambda & -\frac{a}{a+b} & 0 \\ 0 & \frac{a-b}{a+b} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (b + \lambda)(1 + \lambda)\left(\frac{a-b}{a+b} - \lambda\right) = 0,$$

откуда имеем, что

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \frac{a-b}{a+b}.$$

Из условия, что $a < b$ следует, что точка P_1 — устойчивый узел.

4.2.2 Случай $a = b$

В этом случае $P_1 = P_2 = (1, 0, 2)$. Тогда матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -b & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы:

$$\det(J(P_1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -b - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(b + \lambda)(1 + \lambda) = 0$$

Тогда собственные значения находятся в явном виде:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b, \lambda_3 = -1.$$

Отсюда имеет, что одно из собственных значений нулевое, т.е. точка P_1 негиперболическая. Система неустойчива, и при изменении параметра может происходить значительное изменение фазового портрета.

4.2.3 Случай $a > b$

В этом случае мы рассматриваем две неподвижные точки $P_1 = (\frac{a}{b}, 0, 2)$, $P_2 = (1, 2(a - b), 2)$. При условии $a > b$ точка P_1 имеет $\lambda_3 > 0$, из чего следует, что P_1 неустойчива.

Матрица Якоби для точки P_2 :

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -\frac{a+b}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ a - b & 0 & a - b \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\det(J(P_2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{a+b}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ a - b & -\lambda & a - b \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)(\lambda(-\frac{a+b}{2} - \lambda) - \frac{1}{2}(a - b)) = 0$$

Легко видеть, что $\lambda_1 = -1$. Рассмотрим квадратное уравнение $-\lambda^2 - \lambda\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}(a - b) = 0$ и найдем его корни:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-a - b \pm \sqrt{D}}{4},$$

где $D = (a + b)^2 - 8(a - b)$. Собственные значения зависят от знака D . Найдем нули:

$$D = (a + b)^2 - 8(a - b) \Rightarrow a_{1,2} = 4 - b \pm \sqrt{1 - b} \Rightarrow b \in (0, 1]$$

Укажем $\lambda_{2,3}$ в явном виде:

1) При $a = 4 - b - \sqrt{1 - b}$, $b \in (0, 1]$ собственные значения

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1 + \frac{\sqrt{1 - b}}{4} \Rightarrow \{b \in (0, 1]\} \Rightarrow \lambda_{2,3} < 0.$$

По теореме Ляпунова–Пуанкаре точка асимптотически устойчива.

2) При $a = 4 - b + \sqrt{1 - b}$, $b \in (0, 1]$ собственные значения

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1 - \frac{\sqrt{1 - b}}{4} < 0.$$

Значит, эта точка асимптотически устойчива.

3) При $a > 4 - b + \sqrt{1 - b}$, $b \in (0, 1]$ собственное значение $\lambda_3 < 0$. Найдем знак λ_2 :

$$(a + b)^2 \vee (a + b)^2 - 8(a - b) \\ 0 \vee -8(a - b)$$

Т.к. у нас общий случай $a > b$, то $\lambda_2 < 0$. Точка асимптотически устойчива.

4) При $a < 4 - b - \sqrt{1 - b}$, $b \in (0, 1]$ получаем ситуацию, аналогичную пункту 3). Точка асимптотически устойчива.

5) При $a \in (4 - b - \sqrt{1 - b}, 4 - b + \sqrt{1 - b})$, $b \in (0, 1]$ дискриминант $D = -K$, $K > 0$. Тогда:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-a - b}{4} \pm i\sqrt{K}.$$

Точка асимптотически устойчива.

6) При $b > 1$ дискриминант $D > 0$. Анализ $\lambda_{2,3}$ идентичен случаю выше. Точка асимптотически устойчива.

5 Фазовые портреты системы

Приведем графики фазовых портретов рассмотренной системы для всех исследованных случаев.

Случай $a > b$:

На графике отмечены точки P_1 и P_2 , являющиеся устойчивыми.

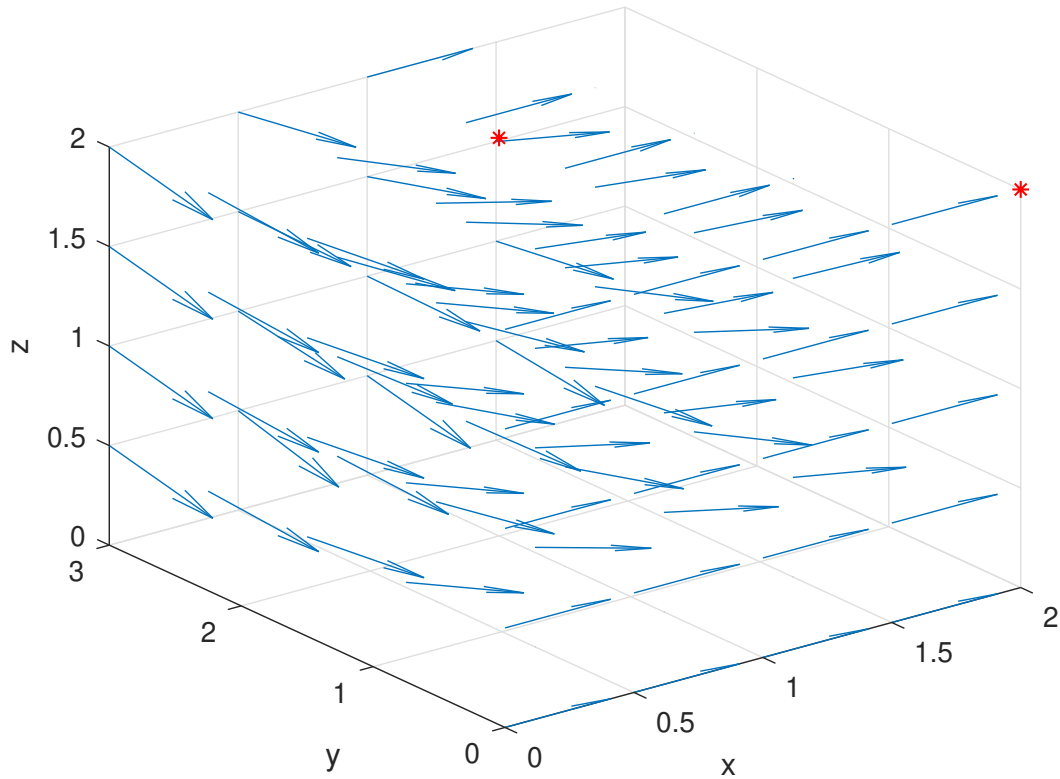


Рис. 1: Фазовый портрет системы, $a = 2, b = 1$.

Случай $a < b$:

Графически показано, что точка P_1 - устойчивый узел.

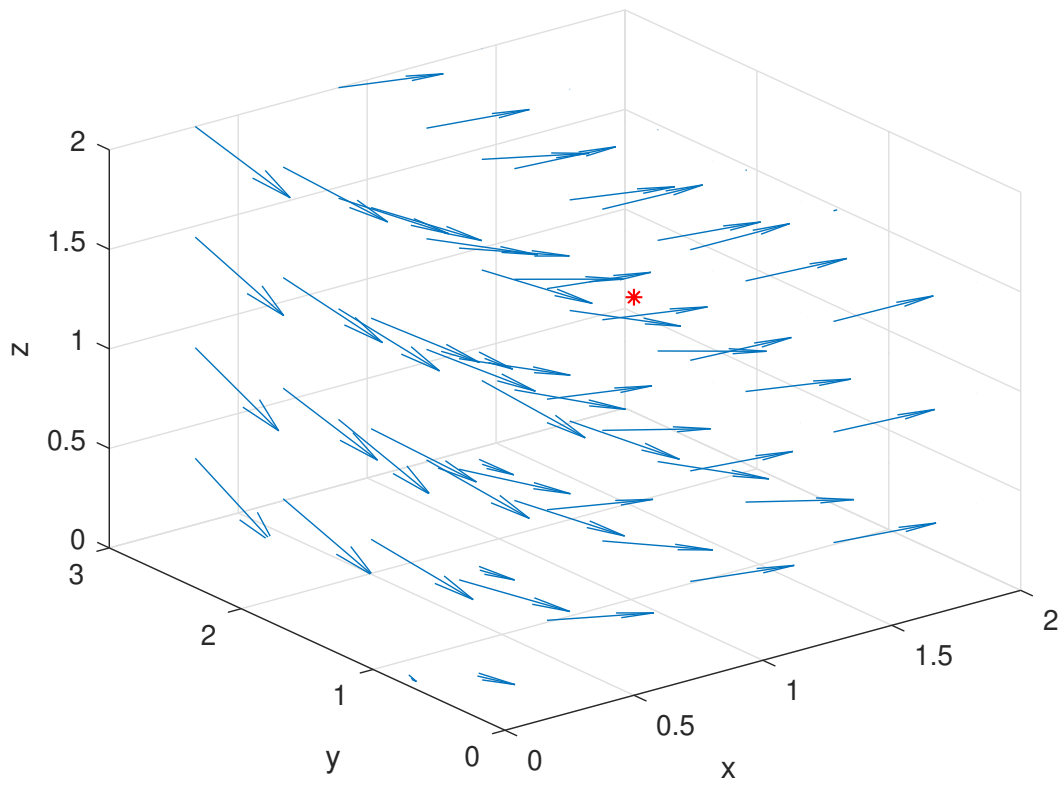


Рис. 2: Фазовый портрет системы, $a = 1, b = 2$.

Случай $a = b$:
Точки P_1 и P_2 совпадают.

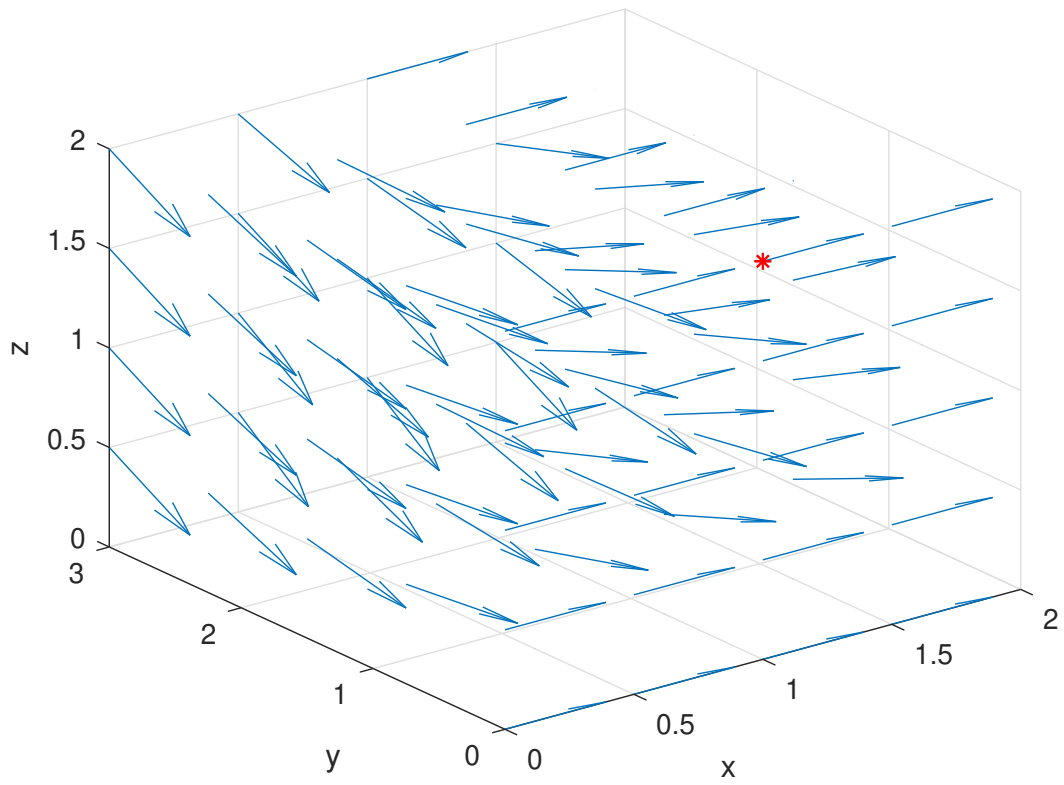


Рис. 3: Фазовый портрет системы, $a = 1, b = 1$.

6 Пределные циклы

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем

$$\dot{u} = f(u), u \in U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Определение 2. Замкнутая траектория $\gamma(u_0)$ системы (2) называется предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых орбит.

Определение 3. Решение $u(t)$ системы (2) называется периодическим с периодом $T > 0$, если $u(t + T) = u(t)$ для любого t , период T — наименьшее из таких чисел, для которых выполняется последнее равенство.

Определение 4. Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm iw_0, w_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре-Андронova-Хопфа или бифуркацией рождения цикла.

Исследование собственных значений матриц Якоби каждой точки в различных случаях показало, что ни одно из собственных значений не соответствует бифуркации рождения цикла. Из этого следует, что исходная система не имеет предельных циклов.

7 Интерпретация результатов

Исследование показало, что возможны два существенных случая. Заметим, что в обоих из них наступает стабилизация системы.

В первом случае если воды загрязняются быстрее, чем успевает разлагаться загрязнитель, то благодаря активному илу концентрацию загрязнения всегда можно установить на одном уровне.

Во втором случае концентрация ила стремится к нулевому значению, однако концентрация загрязнений не увеличивается вследствие естественного распада.

Список литературы

- [1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.