Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Практическая работа №2»

Студентка 315 группы
А. Ю. Скворцова

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Пункт 8

Постановка задачи: Подготовить 3 примера с аналитически рассчитанными опорными функциями: эллипс, квадрат, ромб. В каждом случае центр не обязательно нулевой — центр и полуоси являются параметрами. Вывести формулы опорных функций.

1.1 Эллипс

1. Эллипс с центром в точке $c = (x_0, y_0)$:

   Такой эллипс задается множеством

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его как эллипс с центром в точке (0,0) — множество E_1, сдвинутый на радиус-вектор точки центра c (множество сдвинуто на точку c):

$$E_0 = E_1 + c.$$

   При этом множество E_1, описывающее несмещенный эллипс, имеет вид:

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x)^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его в виде $E_1 = TB_1(0)$, где

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

   Тогда опорная функция несдвинутого эллипса имеет вид:

$$\rho\left(l \middle| E_1\right) = \sqrt{a^2 \cdot l_1^2 + b^2 \cdot l_2^2}.$$

   Итоговая формула опорной функции:

$$\rho(l \,| E_0) = \rho(l \,| E_1 + c) = \sqrt{a^2 \cdot l_1^2 + b^2 \cdot l_2^2} + \langle l, c \rangle.$$

2. Эллипс с центром в точке $c = (x_0, y_0)$, главная полуось которого составляет с осью Ox угол α:

   Такой эллипс задается множеством:

$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x' - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y' - y_0)^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его как эллипс с центром в точке (0,0), главная полуось которого составляет с осью Ox угол α — множество E_3, сдвинутый на радиус-вектор точки центра c (множество сдвинуто на точку c):

$$E_2 = E_3 + c.$$

При этом несдвинутый повернутый эллипс с цетром в (0,0) имеет вид:

$$E_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} \leqslant 1 \right\},$$

где x', y' — координаты, в которых полуось эллипса лежит на прямой Ox:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Из преобразованных координат получаем матрицу поворота:

$$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффциентов имеет вид

$$T^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Введем матрицу конфигурации $P = C' \cdot T \cdot C$.
Тогда имеем, что $E_3 = C \cdot T \cdot B_1(0)$, где $B_1(0)$ — это единичный шар. Тогда имеем, что опорная функция для E_3 имеет вид:

$$\rho(l \,|E_3\,) = \sqrt{\langle TC'l, TC'l \rangle} = \sqrt{\langle l, Pl \rangle}.$$

Итоговая опорная функция:

$$\rho(l \,|E_2\,) = \rho(l \,|E_3 + c) = \sqrt{\langle l, Pl \rangle} + \langle l, c \rangle.$$

1.2 Ромб

1. Ромб с центром в точке $c = (x_0, y_0)$ и диагоналями a, b:

   Такой ромб задается множеством

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{2|x - x_0|}{a} + \frac{2|y - y_0|}{b} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его как единичный ромб с центром в точке (0,0) — множество E_1 — с измененными диагоналями и сдвинутым центром на радиус вектор точки c:

$$E_0 = T \cdot E_1 + c,$$

   где

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |x| + |y| \leqslant 1 \right\}.$$

Опорная функция для E_1 имеет вид:

$$\rho(l\,|E_1\,) = \sup_{a \in E_1} \langle l, a \rangle.$$

Тогда итоговая опорная функция имеет вид:
$\rho(l\,|E_0\,) = \rho(l|T \cdot E_1 + c) = \sup_{a \in E_1} \langle l, a \rangle + \langle l, c \rangle = \max(|a \cdot l_1|, |b \cdot l_2|) + \langle l, c \rangle$.

1.3 Квадрат

1. Квадрат с центром в точке $a = (x_0, y_0)$ и стороной длины c:

   Такой квадрат задается множеством E_0, где

   $$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \max(|x - x_0|, |y - y_0|) \leqslant c/2 \right\}.$$

   Разложим его на простейшие и представим как единичный квадрат с измененными сторонами и сдвинутым в точку c центром:

   $$E_0 = E_1 \cdot c + a,$$

   где

   $$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \max(|x|, |y|) \leqslant 1 = c/2 \right\}.$$

   Опорная функция для E_1 имеет вид:

   $$\rho(l\,|E_1\,) = \sup_{a \in E_1} \langle l, a \rangle \ \leqslant \sup_{a \in E_1} \sum_{i=1}^{n} |l_i| \cdot |a_i| \leqslant l_1.$$

   Заметим, что равенство достигается только при $a = (\pm 1, \pm 1)$, тогда функция примет вид:

   $$\rho(l\,|E_1\,) = \frac{c}{2} \cdot l_1 = |l_1| + |l_2|.$$

   Итоговая формула для E_0:

   $$\rho(l\,|E_0\,) = \rho(l\,|E_1 \cdot c + a) = \frac{c}{2} \cdot l_1 + \langle l, a \rangle = c \cdot \frac{|l_1| + |l_2|}{2} + \langle l, a \rangle.$$

2 Пункт 10

Постановка задачи: Выписать вывод уравнений, описывающих поляру для эллипса или ромба.

Определение 1. Полярой множества $A \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $A^\circ = \left\{ p \in \mathbb{R}^{d_*} \middle| \forall x \in A \langle p, x \rangle \leqslant 1 \right\}$ [1, с. 53–54].

Определение 2. Полярой множества $A \subset \mathbb{R}^2$ называется множество $A^\circ = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \middle| \rho(l \,|A\,) \leqslant 1 \right\}$ [3, с. 29–30].

2.1 Ромб

Ромб с диагоналями a, b и цетром в точке $c = (x_0, y_0)$ представим множеством

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{2|x - x_0|}{a} + \frac{2|y - y_0|}{b} \leqslant 1 \right\}$$

Ромб также является выпуклой оболочкой, т.о.

$$A = \operatorname{conv} \left\{ (x_0 + a/2, y_0), (x_0 - a/2, y + 0), (x_0, y_0 + b/2), (x_0, y_0 - b/2) \right\}.$$

Опорная функция этого множества имеет вид:

$$\rho(l \,|A\,) = \max(\|a \cdot l_1\|, \|b \cdot l_2\|) + \langle l, c \rangle = \max(\|a \cdot l_1\|, \|b \cdot l_2\|) + l_1 \cdot x_0 + l_2 \cdot y_0,$$

где c - радиус-вектор точки центра.
Полярой множества A является множество A°, при этом

$$A^\circ = \operatorname{conv} \left\{ (x_0 + a/2, y_0), (x_0 - a/2, y + 0), (x_0, y_0 + b/2), (x_0, y_0 - b/2) \right\}^\circ.$$

Применяя свойство $(\operatorname{conv}(A))^\circ = A^\circ$ [1, с. 53–54], получим:

$$A^\circ = \left\{ (x_0 + a/2, y_0), (x_0 - a/2, y + 0), (x_0, y_0 + b/2), (x_0, y_0 - b/2) \right\}^\circ.$$

Дальше, по свойству $(\cup A_i)^\circ = \cap A_i^\circ$ [3, с. 29–30], имеем:
$E^\circ = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{cases} l_1 \cdot (x_0 \pm a/2) + l_2 \cdot y_0 \leqslant 1 \\ l_1 \cdot x_0 + l_2 \cdot (y_0 \pm b/2) \leqslant 1 \end{cases} \right\}.$

Заметим, что по определению 2, можно записать поляру через опорную функцию:

$$A^\circ = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 \middle| \max(\|a \cdot l_1\|, \|b \cdot l_2\|) + l_1 \cdot x_0 + l_2 \cdot y_0 \leqslant 1 \right\}.$$

Список литературы

[1] Локуциевский Л. В. Элементы конечномерного выпуклого анализа. Конспект Лекций. Мехмат МГУ, 2017. (https://kafedra-opu.ru/sites/default/files/main_courses/ca_lokutsievskiy_0.pdf)

[2] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва, изд. МИР, 1973 г.

[3] Коробков М. В. Конспект лекций. ММФ НГУ, 2016. (http://phys.nsu.ru/korobkov/f_an_16-17/Topos-lecture_notes_2016-17.pdf)