3.1 Definition

Jeawon Na

3.1 Definition

A real function φ defined on a segment (a, b), where $-\infty \leq a < b \leq \infty$, is called *convex* if the inequality

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \tag{1}$$

eq:convex

holds whenever $a < x < b$, $a < y < b$, and $0 \leq \lambda \leq 1$.

식 (1)은 다음 식과 동치이다.

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \tag{2}$$

note:1 whenever $a < s < t < u < b$. [1]

같은 방식으로, 다음 식과도 동치이다.

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s} \tag{3}$$

whenever $a < s < t < u < b$.

같은 방식으로, 다음 식과도 동치이다.

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \tag{4}$$

whenever $a < s < t < u < b$.

만약 ϕ가 (a, b)에서 미분 가능한 함수였다면, mean value theorem에 의해, 식 (1)은 다음과도 동치이다.

$$\phi'(s) \leq \phi'(t) \tag{5}$$

whenever $a < s < t < b$. 즉, 미분한 함수가 증가함수이면 convex이다.

note 1

Let $t = (1-\lambda)s + \lambda u$. Then

$$\lambda = \frac{t-s}{u-s}, \quad 1-\lambda = \frac{u-t}{u-s}. \tag{6}$$

식 (1)에 대입하면

$$\varphi(t) \leq \frac{u-t}{u-s}\varphi(s) + \frac{t-s}{u-s}\varphi(u), \tag{7}$$

$$(u-s)\varphi(t) \leq (u-t)\varphi(s) + (t-s)\varphi(u), \tag{8}$$

$$(u-t+t-s)\varphi(t) \leq (u-t)\varphi(s) + (t-s)\varphi(u), \tag{9}$$

$$(u-t)(\varphi(t)-\varphi(s)) \leq (t-s)(\varphi(u)-\varphi(t)), \tag{10}$$

$$\therefore \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \tag{11}$$

역방향도 그대로 성립. 동치임을 알 수 있음.