실해석학 스터디 5주차

JEAWON NA

교재: Walter Rudin - Real and Complex Analysis-McGraw-Hill Education (1986)
범위: CHAPER TWO, "POSITIVE BOREL MEASURES": The Riesz Representation Theorem

The Riesz Representation Theorem

2.14

Let X be a locally compact Hausdorff space, and let Λ be a positive linear functional on $C_c(X)$.
Then there exists a σ-algebra $\mathfrak{M}$ in X which contains all Borel sets in X, and there exists a unique positive measure μ on $\mathfrak{M}$ which represents Λ in the sense that

(a) $\Lambda f = \int_X f d\mu$ for every $f \in C_c(X)$, and which has the following additional properties:
(b) $\mu(K) < \infty$ for every compact set $K \subset X$.
(c) For every $E \in \mathfrak{M}$, we have

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\, V \text{ open}\}.$$

(d) The relation

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\, K \text{ compact}\}$$

holds for every open set E, and for every $E \in \mathfrak{M}$ with $\mu(E) < \infty$.
(e) If $E \in \mathfrak{M}$, $A \subset E$, and $\mu(E) = 0$, then $A \in \mathfrak{M}$.

지난 시간에는 μ와 $\mathfrak{M}$을 적당히 정의한 뒤, STEP I부터 IV까지 증명했었다. 이번에는 지난 증명에 이어서 진행해보자.

STEP V

If $E \in \mathfrak{M}_F$ and $\epsilon > 0$, there is a compact K and an open V such that $K \subset E \subset V$ and $\mu(V - K) < \epsilon$.

Date: 2025. 6. 3.

어떤 집합 E가 $\mathfrak{M}_F$에 있으면 E를 사이에 둔 상태에서 충분히 가까운 compact K와 open V를 찾을 수 있다.

⟨ proof ⟩

$\mu(E)$는 정의에 의해 $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ open}\}$이고, $\mathfrak{M}_F$에 속한다고 했으므로 $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compact}\}$이다. 따라서, 다음과 같은 $K \subset E \subset V$를 찾을 수 있다.

$$\mu(V) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2}$$

이 때 locally compact Hausdorff space에서 compact이면 closed이므로 K^c는 open이고, 따라서 $V - K = V \cap K^c$는 open이다. STEP III에 의해 open이면 $\mathfrak{M}_F$에 속한다. 따라서 $V - K \in \mathfrak{M}_F$이고, STEP IV에 의해

$$\mu(K) + \mu(V - K) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon$$

이다. (K와 V-K는 당연히 disjoint이다.) 따라서 $\mu(V - K) < \epsilon$.

STEP VI

If $A \in \mathfrak{M}_F$ and $B \in \mathfrak{M}_F$, then $A - B$, $A \cup B$, and $A \cap B$ belong to $\mathfrak{M}_F$.

⟨ proof ⟩

Let $\epsilon > 0$. STEP V에 의해, A와 B에 대해 $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset A \subset V_2$, and $\mu(V_1 - K_1) < \epsilon$, $\mu(V_2 - K_2) < \epsilon$인 K_i와 V_i를 찾을 수 있다. 이 때 간단한 집합 연산에 의해

$$A - B \subset V_1 - K_2 \subset (V_1 - K_1) \cup (K_1 - V_2) \cup (V_2 - K_2)$$

가 성립한다. * 직관적인 이해: 우변 $V_1 - K_1$에서, 빠질땐 K_1의 일부만 빠짐. (겹치는 부분만). 근데 합칠때는 $K_1 - V_2$에서 다 합침. 그리고 다시 V_2에서 일부만 빠짐. 만약에 합칠 때 빠졌던 부분(일부)만 그대로 합친다면 좌변과 동일. 근데 그거보다 더 많이 합치니까, 커짐.

따라서, 다음이 성립한다.

$$\mu(A - B) \leq \mu((V_1 - K_1) \cup (K_1 - V_2) \cup (V_2 - K_2)) \leq \epsilon + \mu(K_1 - V_2) + \epsilon. \tag{14}$$

$K_1 - V_2$는 compact subset of $A - B$이다. 왜냐하면 $K_1 - V_2 = K_1 \cap V_2^c$이고, Hausdorff space에서 closed와 compact의 교집합은 compact이니까. (see Corollary (b) of Theorem 2.5).

그러므로, $\sup\{\mu(K) : K \subset A - B, K \text{ compact}\} < \mu(A - B)$일 수 없다. 왜냐면 $\mu(A - B)$보다 조금이라도 작은 값에 대해서는 그것보다 큰 K_1, V_2를 찾아낼 수 있으니까. (ϵ을 반토막 내서 등호 빼버릴 수 있음.)

따라서 $\sup\{\mu(K) : K \subset A-B, K \text{ compact}\} \geq \mu(A-B)$이다. 그리고 μ의 monotone 에 의해, $\sup\{\mu(K) : K \subset A-B, K \text{ compact}\} \leq \mu(A-B)$. 따라서 $\sup\{\mu(K) : K \subset A-B, K \text{ compact}\} = \mu(A-B)$. $A-B \subset A$에서 finite 조건은 쉽게 알 수 있다. 따라서, $A-B \in \mathfrak{M}_F$.

$A \cup B = (A-B) \cup B$, $A-B \in \mathfrak{M}_F$, 따라서 $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$. $A \cap B = A-(A-B)$, $A-B \in \mathfrak{M}_F$, 따라서 $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$.

STEP VII

$\mathfrak{M}$ is a σ-algebra in X which contains all Borel sets.

⟨ proof ⟩

1. $A \in \mathfrak{M}$이면, $A^c \in \mathfrak{M}$임을 보이자.
Let K be an arbitrary compact set in X. $A \in \mathfrak{M}$, then $A^c \cap K = K - (A \cap K)$, 이 때 compact set $K \in \mathfrak{M}_F$이고, $\mathfrak{M}$의 정의에 의해 $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$, 따라서 $A^c \cap K \in \mathfrak{M}_F$, for arbitrary compact set K. 따라서 $A^c \in \mathfrak{M}$.

2. $\mathfrak{M}$이 countable union에 대해 닫혀있음을 보이자.
Let K be an arbitrary compact set in X. $A_i \in \mathfrak{M}$인 A_i들에 대해, $A = \bigcup_1^\infty A_i$라 하자. $B_1 = A_1 \cap K$라 두고, B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$B_n = (A_n \cap K) - (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \qquad (n = 2, 3, 4, \dots). \tag{15}$$

즉, B_n은 K 중에서 A_1부터 A_{n-1}을 모두 피하다가 A_n과 딱 겹치는 부분을 의미한다. 이렇게 하면, B_n을 만들 때 B_{n-1}까지를 다 빼버리니까 $\{B_n\}$이 disjoint임은 자명하다. 그리고 $A_1 \in \mathfrak{M}_F$, $K \in \mathfrak{M}_F$(since K is compact), 따라서 $A_1 \cap K \in \mathfrak{M}_F$(by STEP VI), 그리고 B_1부터 B_{n-1}까지 $\mathfrak{M}_F$에 속한다고 가정하면 $B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1} \in \mathfrak{M}_F$(by STEP VI), 그리고 $A_n \in \mathfrak{M}_F$, 따라서 $B_n \in \mathfrak{M}_F$, induction에 의해 $B_n \in \mathfrak{M}_F$ for all n. 이 때 $A_n \cap K = \bigcup_1^n B_i$, $A \cap K = \bigcup_1^\infty B_n$(마찬가지로 엄밀하게는 by induction)에서 $\bigcup_1^\infty B_n \in \mathfrak{M}_F$(By STEP VI), $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$, for arbitrary compact set K. 따라서 $A \in \mathfrak{M}$.

3. 전체집합 $X \in \mathfrak{M}$임을 보이자.
모든 closed set C는 $\mathfrak{M}$에 속한다. 왜냐하면, 임의의 compact set K에 대해, $C \cap K$는 compact 이고, compact set은 항상 $\mathfrak{M}_F$에 속하기 때문이다. X는 closed이므로, $X \in \mathfrak{M}$.

모든 closed set이 $\mathfrak{M}$에 속한다는 것은, 모든 open set이 $\mathfrak{M}$에 속한다는 말과 같다. 왜냐하면, 어떤 open set V에 대해, V^c는 closed이므로 $V^c \in \mathfrak{M}$이니까 $(V^c)^c = V \in \mathfrak{M}$. 따라서, $\mathfrak{M}$

은 모든 open set을 포함하는 σ-algebra이므로, 모든 Borel set을 포함해야 한다. (Borel set이 제일 작은거니까.)

STEP VIII

$\mathfrak{M}_F$ consists of precisely those sets $E \in \mathfrak{M}$ for which $\mu(E) < \infty$.
$\mathfrak{M}_F$는 사실 $\mathfrak{M}$ 중에서 $\mu(E) < \infty$인 E들만 모아놓았던 것이었다. 이 STEP을 통해, Theorem 의 (d)번을 증명할 수 있다.

⟨ proof ⟩

($\Rightarrow$) If $E \in \mathfrak{M}_F$, then STEP II에서 $K \in \mathfrak{M}_F$, STEP VI에 의해 $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$ for every compact K이다.

($\Leftarrow$) Suppose $E \in \mathfrak{M}$ and $\mu(E) < \infty$. (2)번 식, μ의 정의에 의해 $\exists$ open set $V \supset E$ with $\mu(V) < \mu(E) + \epsilon$ for any $\epsilon > 0$. STEP III에 의해, such V is in $\mathfrak{M}_F$. STEP V에 의해, $\exists$ open set W and $\exists$ compact set K such that $K \subset V \subset W$ and $\leq \mu(W - K) < \epsilon$. $E \in \mathfrak{M}$이고, $\mathfrak{M}$의 정의에 의해 $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$이므로, (3)번 식에 의해 $\exists$ compact set $H \subset E \cap K$ with

$$\mu(E \cap K) - \epsilon < \mu(H).$$

Since $E = (E \cap K) \cup (E \cap K^c) \subset (E \cap K) \cup (W - K)$, it follows that

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(W - K) < \mu(H) + 2\epsilon.$$

즉, $\mu(E) \leq \mu(H)$ for all compact set $H \subset E \Rightarrow \mu(E) \leq \sup\{\mu(H) : H \subset E, H \text{ compact}\}$, μ의 monotone 성질에 의해 $\mu(E) \geq \sup\{\mu(H) : H \subset E, H \text{ compact}\}$, 따라서 $\mu(E) = \sup\{\mu(H) : H \subset E, H \text{ compact}\}$, $E \in \mathfrak{M}_F$.

STEP IX

μ is a measure on $\mathfrak{M}$.

⟨ proof ⟩

만약 μ의 값에 ∞가 있는 경우, 양쪽 모두 ∞가 됨. (한쪽은 monotone, 한쪽은 0이상 더하기에 무한대 있어서.) 모두 finite 한 경우, STEP IV와 STEP VIII에 의해 바로 증명됨.

STEP X

For every $f \in C_c(X)$, $\Lambda f = \int_x f d\mu$.

⟨ proof ⟩

complex function $f = u + iv$에 대해,

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i\int_E v^+ d\mu - i\int_E v^- d\mu$$

이고, u^+, u^-, v^+, v^-는 모두 0 이상인 real function이므로, real function에 대해서만 (a)를 증명하면 Λ의 linearlity에 의해 complex function에 대해서도 보일 수 있다. 그리고 우리는

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu \tag{16}$$

for every real $f \in C_c(X)$만 증명하면 된다. 왜냐면, (16)번 식으로 인해

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_X (-f) d\mu = -\int_X f d\mu$$

가 성립하기 때문이다.

Real function $f \in C_c(X)$에 대해, f의 support를 K라고 하자. Theorem 2.10의 Corollary에 의해, $f(K)$의 range는 complex plane에서의 compact subset이다. f는 real function이므로, $f(X) \in [a, b]$ 인 a, b를 찾을 수 있다. 그리고 임의의 $\epsilon > 0$에 대해, a와 b 사이에 간격이 ϵ보다 작아지도록 y_i를 다음과 같이 배치하자.

$$y_0 < a < y_1 < \cdots < y_n = b. \tag{17}$$

구간의 길이가 finite이므로, finite개의 y_n을 찾아낼 수 있다. E_i를

$$E_i = \{x : y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

으로 정의하자. 이는 f의 range를 ϵ보다 작게 조각내놓은 것과 대응되는 preimage 조각들이다. 이들은 disjoint하면서 합집합이 K가 된다.

$f \in C_c(X)$에서 f가 continuous이므로 f는 Borel measurable이다. 그래서 $(y_{i-1}, y_i]$의 preimage인 E_i들은 X에서 Borel set이다. (왜냐하면 $(y_{i-1}, y_i]$은 Borel set in $\mathbb{R}$, see Theorem 1.12 (b).)

$E_i \subset K$에서, $\mu(K) < \infty$이므로 식 (2)에 의해

$$\mu(W_i) < \mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

인 $W_i \supset E_i$를 E_i마다 찾아낼 수 있다. 그리고 $W_i' = f^{-1}([-\infty, y_i + \epsilon))$으로 정의하면, W_i'는 open이고 $W_i' \supset E_i$. 그리고 $V_i = W_i \cap W_i'$로 두면, $V_i \supset E_i$는 (19)번 식을 만족하면서 $f(x) < y_i + \epsilon$ for all $x \in V_i$ 인 open set. 따라서 Theorem 2.13에 의해, $h_i \prec V_i$ such that $\sum h_i = 1$ on K인 h_i들을 찾을 수 있다. 이 때, $\sum h_i = 1 \Rightarrow f = \sum h_i f$이고, $K \prec \sum h_i$이므로 STEP II에 의해

$$\mu(K) \leq \Lambda(\sum h_i) = \sum \Lambda h_i$$

QQQQQ
Q. $K \prec \sum h_i$ 맞음? Theorem에서는 $\sum h_i = 1$ on K라고만 했는데, K 밖에서 h_i들 중 일부가 만나 1보다 커지면 어떡하지? 2.13 증명과정 중 식 (3)에서 $\sum h_i \leq 1$임을 확인할 수 있음.
QQQQQ

따라서 $h_i f \le (y_i+\epsilon)h_i$ on $E_i \subset V_i$, $y_i - \epsilon < f(x)$ on $E_i \subset V_i$이고, E_i들은 disjoint하고 합집합이 K임으로, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \Lambda(\sum_{i=1}^n h_i f) = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \le \sum_{i=1}^n \Lambda(y_i+\epsilon)h_i \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i+\epsilon)\Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon)\Lambda h_i - |a|\sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\le \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon)[\mu(E_i)+\epsilon/n] - |a|\mu(K) \\
&= \frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon) + \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon)\mu(E_i) - |a|\mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n [(y_i-\epsilon)\mu(E_i) + 2\epsilon\mu(E_i) + |a|\mu(E_i)] - |a|\mu(K) + \frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i-\epsilon)\mu(E_i) + 2\epsilon\mu(K) + \frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon) \\
&\le \int_X f\,d\mu + \epsilon[2\mu(K)+|a|+b+\epsilon].
\end{aligned}$$

(Since 1. $h_i \prec V_i$, $\Lambda h_i \le \mu(V_i)$ by the definition of $\mu(V_i) \Rightarrow \Lambda h_i \le \mu(V_i) < \mu(E_i)+\epsilon/n$)

(2. $\mu(K) \le \sum_{i=1}^n \Lambda h_i$는 아까 했음.)

(3. $\sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \mu(K)$, by STEP IV, and E_i are Borel sets in X, hence $E_i \in \mathfrak{M}$.)

(4. $\sum_{i=1}^n (y_i-\epsilon)\mu(E_i) \le \int_X f\,d\mu$, since $y_i - <\le y_{i-1} < f(x)$ for all $x \in E_i$)

(5. $\sum_{i=1}^n y_i < \sum_{i=1}^n b = nb$)