# さんすうのーと

わたし

2025 年 11 月 17 日

# 目次

## まえがき

さんすうのーとです。
私ではない誰かのアイデアを多分に含みます。
引用・注釈はありません。内容が正しいことを保証しません。
間違いや美しくない部分があれば教えてください。私が喜びます。

（追記）いくつかの証明を考察してくれた O 君に感謝を。

# 1　記号論理学

## 1.1　命題

***Def.* 1.1.1.** 命題
　真偽が確定している言明を、命題と呼ぶ。

***Def.* 1.1.2.** 解釈
　各命題のそれぞれに真偽を対応させる対応関係を、解釈と呼ぶ。

***Def.* 1.1.3.** 矛盾
　あらゆる解釈において偽を与える命題を、矛盾と呼ぶ。

## 1.2　命題結合子と推論規則

***Def.* 1.2.1.** 推論
　命題 $\phi, \psi$ について、$\phi$ から $\psi$ が推論されることを、$\phi \vdash \psi$ で表す。
　このとき、$\phi$ を前提、$\psi$ を帰結と呼ぶ。

***Rem.* 1.2.1.** 命題論理の推論体系
　ここでは推論を行う上で許される規則として、後述する公理 1.2.1、公理 1.2.2、公理 1.2.3、公理 1.2.4、公理 1.2.5、公理 1.2.6、公理 1.2.7 を与える。

***Rem.* 1.2.2.** 命題の結合順序
　1 つまたは 2 つの命題から新たな命題を作り出す記号は、命題結合子と呼ばれる。
　複数の命題結合子がある場合には結合される順序により与えられる命題が変わるため、厳密さのために () によって結合順序を定める。

***Ax.* 1.2.1.** 同一律
　命題 $\phi$ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \phi$$

***Ax.* 1.2.2.** カット規則
　命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \psi \text{ と } \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vdash \chi$$

***Def.* 1.2.2.** 連言
　命題 $\phi, \psi$ について、$\phi \wedge \psi$ は命題である。「$\phi$ かつ $\psi$」と呼ぶ。

***Ax.* 1.2.3.** 連言の導入則

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下を定める。

$$\chi \vdash \phi \text{ と } \chi \vdash \psi \text{ から、 } \chi \vdash \phi \land \psi$$

***Ax.* 1.2.4.** 連言の除去則

命題 $\phi, \psi$ について、以下の 2 つを定める。

$$\phi \land \psi \vdash \phi$$
$$\phi \land \psi \vdash \psi$$

***Def.* 1.2.3.** 含意

命題 $\phi, \psi$ について、$\phi \to \psi$ は命題である。「$\phi$ ならば $\psi$」と呼ぶ。

***Ax.* 1.2.5.** 演繹定理

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下を定める。

$$\phi \land \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vdash \psi \to \chi$$

***Ax.* 1.2.6. Modus Ponens**

命題 $\phi, \psi$ について、以下を定める。

$$\phi \land (\phi \to \psi) \vdash \psi$$

***Ax.* 1.2.7.** 二重否定の除去

命題 $\phi$ について、以下を定める。

$$(\phi \to \bot) \to \bot \vdash \phi$$

## 1.3 いくつかの重要な定理

***Thm.* 1.3.1.** 連言の交換

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \land \psi \vdash \psi \land \phi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \phi$

1、2 行目と公理 1.2.3 より、$\phi \land \psi \vdash \psi \land \phi$ ■

***Thm.* 1.3.2. 連言の結合**

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \phi \land (\psi \land \chi)$$
$$\phi \land (\psi \land \chi) \vdash (\phi \land \psi) \land \chi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \phi \land \psi$

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \phi$

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \psi$

1、2 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \phi$

1、3 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \chi$

5、6 行目と公理 1.2.3 より、$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \psi \land \chi$ である。

4、7 行目と公理 1.2.3 より、$(\phi \land \psi) \land \chi \vdash \phi \land (\psi \land \chi)$ である。

逆も同様。 ■

***Thm.* 1.3.3. 連言の冪等**

命題 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \land \phi$$

*Proof.*

公理 1.2.1 より $\phi \vdash \phi$

1 行目と公理 1.2.3 より成り立つ。 ■

***Thm.* 1.3.4. 含意の推移**

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \vdash \phi \to \chi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \phi$

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash (\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)$

公理 1.2.4 より、$(\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \vdash \phi \to \psi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \phi \to \psi$

1、4 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \phi \land (\phi \to \psi)$

公理 1.2.6 より、$\phi \land (\phi \to \psi) \vdash \psi$

5、6 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、$(\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \vdash \psi \to \chi$

2、8 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \psi \to \chi$

7、9 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \psi \land (\psi \to \chi)$

公理 1.2.6 より、$\psi \land (\psi \to \chi) \vdash \chi$

10、11 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \land \phi \vdash \chi$

公理 1.2.5 より、$(\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \vdash \phi \to \chi$ ■

***Thm.* 1.3.5. 逆演繹定理**

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \psi \to \chi \text{ から、 } \phi \land \psi \vdash \chi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \phi$

1 行目、所与の推論と公理 1.2.2 より、$\phi \land \psi \vdash \psi \to \chi$

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \psi$

2、3 行目と公理 1.2.3 より、$\phi \land \psi \vdash \psi \land (\psi \to \chi)$

公理 1.2.6 より、$\psi \land (\psi \to \chi) \vdash \chi$

4、5 行目と公理 1.2.2 より、$\phi \land \psi \vdash \chi$ ■

***Thm.* 1.3.6. Łukasiewicz の第一公理**

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \psi \to \phi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \phi$

1 行目と公理 1.2.5 より、$\phi \vdash \psi \to \phi$ ■

***Thm.* 1.3.7. 無矛盾律**

命題 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \land (\phi \to \bot) \vdash \bot$$

*Proof.*

公理 1.2.6 より成り立つ。 ■

***Thm.* 1.3.8. 不条理則**

命題 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\bot \vdash \phi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$\bot \land (\phi \to \bot) \vdash \bot$

1 行目と公理 1.2.5 より、$\bot \vdash (\phi \to \bot) \to \bot$

公理 1.2.7 より、$(\phi \to \bot) \to \bot \vdash \phi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、$\bot \vdash \phi$ ■

***Thm.* 1.3.9. Peirce 則**

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \to \psi) \to \phi \vdash \phi$$

*Proof.*

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash \phi \to \bot$

定理 1.3.7 より、$(\phi \to \bot) \land \phi \vdash \bot$

定理 1.3.8 より、$\bot \vdash \psi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \to \bot) \land \phi \vdash \psi$

4 行目と公理 1.2.5 より、$\phi \to \bot \vdash \phi \to \psi$

1、5 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash \phi \to \psi$

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash (\phi \to \psi) \to \phi$

6、7 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash (\phi \to \psi) \land ((\phi \to \psi) \to \phi)$

公理 1.2.6 より、$(\phi \to \psi) \land ((\phi \to \psi) \to \phi) \vdash \phi$

8、9 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash \phi$

1、10 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash \phi \land (\phi \to \bot)$

2、11 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash \bot$

12 行目と公理 1.2.5 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \vdash (\phi \to \bot) \to \bot$

公理 1.2.7 より、$(\phi \to \bot) \to \bot \vdash \phi$

13、14 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \to \psi) \to \phi \vdash \phi$ ■

***Thm.* 1.3.10. 背理法**

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \land (\psi \to \bot) \vdash \bot \text{ から、 } \phi \vdash \psi$$

*Proof.*

所与の推論と公理 1.2.5 より、$\phi \vdash (\psi \to \bot) \to \bot$

公理 1.2.7 より、$(\psi \to \bot) \to \bot \vdash \psi$

1、2 行目と公理 1.2.2 より、$\phi \vdash \psi$ ■

***Thm.* 1.3.11. 対偶法**

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$\chi \land (\psi \to \bot) \vdash \phi \to \bot \text{ から、 } \chi \land \phi \vdash \psi$$

*Proof.*

定理 1.5.6 から、$(\phi \land \chi) \land (\psi \to \bot) \vdash \phi \land (\chi \land (\psi \to \bot))$

所与の推論と定理 1.3.5 から、$\phi \land (\chi \land (\psi \to \bot)) \vdash \bot$

1, 2 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \land \chi) \land (\psi \to \bot) \vdash \bot$

3 行目と定理 1.3.10 より、$\phi \land \chi \vdash \psi$

定理 1.3.1 より、$\chi \land \phi \vdash \phi \land \chi$

4、5 行目と公理 1.2.2 より、$\chi \land \phi \vdash \psi$ ■

## 1.4　同値

***Rem.*** **1.4.1.** 命題の定義記号

定義記号 $:\leftrightarrow$ を導入する。

これは左辺を用いて表現された命題は、議論において全てその左辺と一致する部分を右辺に置き換えて理解するという意味である。

以降に定義する述語の定義にも同様に用いる。

***Def.*** **1.4.1.** 同値

新たな命題結合子 $\leftrightarrow$ を定める。

命題 $\phi, \psi$ について、命題 $\phi \leftrightarrow \psi$ を以下で定める。

$$\phi \leftrightarrow \psi :\leftrightarrow (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$$

「$\phi$ と $\psi$ は必要十分」と呼ぶ。

***Lem.*** **1.4.1.** 連言における命題の代入原理

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \land \chi) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \psi \land \chi$$

*Proof.*

明らか。 ■

***Lem.*** **1.4.2.** 含意の前件における命題の代入原理

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \to \chi) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \psi \to \chi$$

*Proof.*

定理 1.3.4 より明らか。 ■

***Lem.*** **1.4.3.** 含意の後件における命題の代入原理

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$(\chi \to \phi) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \chi \to \psi$$

*Proof.*

定理 1.3.4 より明らか。 ■

***Thm.*** **1.4.4.** 命題の代入原理

命題 $\phi, \psi$ と、$\land, \to$ によって $\ldots$ と結合される命題 $P$ について、以下が成り立つ。

$$P(\phi, \ldots) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash P(\psi, \ldots)$$

*Proof.*

補題 1.4.1、補題 1.4.2、補題 1.4.3 から、帰納的に成り立つ。 ■

## 1.5 いくつかの命題結合子と重要な定理

***Def.* 1.5.1.** 定理

新たな命題 $\top$ を以下で定める。

$$\top :\leftrightarrow \bot \to \bot$$

***Rem.* 1.5.1.** 定理からの帰結

命題 $\phi$ について、簡単のために $\top \vdash \phi$ を $\vdash \phi$ で表す。

***Def.* 1.5.2.** 左含意

新たな命題結合子 $\leftarrow$ を定める。

命題 $\phi, \psi$ について、命題 $\phi \leftarrow \psi$ を以下で定める。

$$\phi \leftarrow \psi :\leftrightarrow \psi \to \phi$$

***Def.* 1.5.3.** 否定

新たな命題結合子 $\neg$ を定める。

命題 $\phi$ について、命題 $\neg\phi$ を以下で定める。

$$\neg\phi :\leftrightarrow \phi \to \bot$$

***Def.* 1.5.4.** 選言

新たな命題結合子 $\vee$ を定める。

命題 $\phi, \psi$ について、命題 $\phi \vee \psi$ を以下で定める。

$$\phi \vee \psi :\leftrightarrow \neg\phi \to \psi$$

***Rem.* 1.5.2.** 命題結合子の優先順序

結合の順序は以下で定めるものとする。

1. 否定 $\neg$
2. 連言 $\wedge$
3. 選言 $\vee$
4. 含意 $\to$
5. 左含意 $\leftarrow$
6. 同値 $\leftrightarrow$

ただし () がある場合は、その中を先に結合する。

***Thm.* 1.5.1. 定理は全てに導かれる**
命題 $\phi$ について、以下が成り立つ。
$$\phi \vdash \top$$

*Proof.*
明らかか。 ■

***Thm.* 1.5.2. 否定の導入則**
命題 $\phi, \chi$ について、以下が成り立つ。
$$\chi \wedge \phi \vdash \bot \text{ から、 } \chi \vdash \neg\phi$$

*Proof.*
公理 1.2.5 より明らか。 ■

***Thm.* 1.5.3. 選言の導入則**
命題 $\phi, \psi$ について、以下の 2 つが成り立つ。
$$\phi \vdash \phi \vee \psi$$
$$\psi \vdash \phi \vee \psi$$

*Proof.*
第一式を示す。
定理 1.3.7 と定理 1.3.8 より、$\phi \wedge \neg\phi \vdash \psi$
公理 1.2.5 より成り立つ。

第二式は、定理 1.3.6 より明らか。 ■

***Thm.* 1.5.4. 選言の除去則**
命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。
$$\phi \vdash \chi \text{ と } \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vee \psi \vdash \chi$$

*Proof.*
$\phi \vdash \chi$ から $\neg\chi \wedge \phi \vdash \bot$ であるので、$\neg\chi \vdash \neg\phi$ である。
$(\phi \vee \psi) \wedge \neg\chi \vdash \psi$ である。
$\psi \vdash \chi$ から、$(\phi \vee \psi) \wedge \neg\chi \vdash \bot$ であるので、$\phi \vee \psi \vdash \neg\neg\chi$ である。
二重否定を除去して成り立つ。 ■

***Thm.* 1.5.5. 選言の交換**
命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。
$$\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi$$

*Proof.*
明らか。 ■

***Thm.* 1.5.6. 連言の結合**

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \lor \psi) \lor \chi \vdash \phi \lor (\psi \lor \chi)$$
$$\phi \lor (\psi \lor \chi) \vdash (\phi \lor \psi) \lor \chi$$

*Proof.*

略。 ■

***Thm.* 1.5.7. 選言の冪等**

命題 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \lor \phi$$

*Proof.*

定理 1.5.3 より明らか。。 ■

***Thm.* 1.5.8. 選言三段論法**

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \lor \psi) \land \neg\phi \vdash \psi$$

*Proof.*

明らか。 ■

***Thm.* 1.5.9. 吸収律**

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi \lor (\phi \land \psi) \vdash \phi$$
$$\phi \vdash \phi \land (\phi \lor \psi)$$

*Proof.*

略。 ■

***Thm.* 1.5.10. 分配律**

命題 $\phi, \psi, \chi$ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \phi \lor (\psi \land \chi) \leftrightarrow (\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \chi)$$
$$\vdash \phi \land (\psi \lor \chi) \leftrightarrow (\phi \land \psi) \lor (\phi \land \chi)$$

*Proof.*

略。 ■

***Thm.* 1.5.11. De Morgan の法則**

命題 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \neg\phi \lor \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \land \psi)$$
$$\vdash \neg\phi \land \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \lor \psi)$$

*Proof.*

略。 ■

***Thm.* 1.5.12. 排中律**

命題 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \phi \lor \neg\phi$$

*Proof.*

明らか。 ■

## 1.6 意味論

***Def.* 1.6.1. 恒真命題**

あらゆる解釈において真を与える命題を、恒真命題と呼ぶ。

***Def.* 1.6.2. 意味論的同値**

命題 $\phi, \psi$ について、あらゆる解釈においてその真偽が一致するとき、$\phi$ と $\psi$ は意味論的に同値であると言う。

***Def.* 1.6.3. 論理的帰結**

命題 $\phi, \psi$ について、$\phi$ が真であるあらゆる解釈において $\psi$ が真であるとき、$\phi \models \psi$ で表す。

特に $\psi$ が恒真命題であるとき、$\models \psi$ で表す。

***Def.* 1.6.4. 健全性**

ある推論体系（推論規則と命題結合子の解釈）を考える。

あらゆる命題 $\phi$ について、この推論体系が以下を満たすとき、その推論体系は健全であるという。

$$\vdash \phi \text{ から、 } \models \phi$$

***Def.* 1.6.5. 完全性**

ある推論体系（推論規則と命題結合子の解釈）を考える。

あらゆる命題 $\phi$ について、この推論体系が以下を満たすとき、その推論体系は完全であるという。

$$\models \phi \text{ から、 } \vdash \phi$$

## 1.7 述語論理

***Rem.* 1.7.1. 述語論理の推論体系**

ここでは推論を行う上で許される規則として、後述する公理 1.7.1、公理 1.7.2 を加える。

***Def.* 1.7.1.** 個体

学問における対象を、個体と呼ぶ。

個体を表す記号を項と呼び、各項のそれぞれに個体を対応させる対応関係を、解釈と呼ぶ。

***Def.* 1.7.2.** 議論領域

議論領域とは、個体の全体である。

***Def.* 1.7.3.** 述語

0 個以上の個体の列について、その全てが確定したときに命題となる言明を、述語と呼ぶ。

述語を表す記号である述語記号 $\phi$ と、個体を表す記号である項の列 $x, \ldots$ を用いて $\phi(x, \ldots)$ で表す。

述語が要求する個体の数を、その述語のアリティと呼ぶ。

***Def.* 1.7.4.** 全称量化子

量化子 $\forall$ を定める。

アリティ 1 の述語 $\phi$ について、$\forall x(\phi(x))$ は命題である。

***Ax.* 1.7.1.** 全称の導入則

項 $x$、項 $x$ を出現させない命題 $\phi$、アリティ 1 の述語 $\psi$ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \psi(x) \text{ から、 } \phi \vdash \forall x(\psi(x))$$

***Ax.* 1.7.2.** 全称の除去則

項 $y$ とアリティ 1 の述語 $\phi$ について、以下を定める。

$$\forall x(\phi(x)) \vdash \phi(y)$$

## 1.8 述語論理におけるいくつかの重要な概念と定理

***Thm.* 1.8.1.** 健全性定理

小節 1.2、小節 1.7 により得られる推論は健全である。

*Proof.*

$\phi \land \psi$ は、$\phi$ と $\psi$ がともに真であるときに真であるとして、そうでないときは偽とする。

$\phi \to \psi$ は、$\phi$ が真で $\psi$ が偽であるときに偽であるとして、そうでないときは真とする。

$\forall x(\phi(x))$ は、議論領域上のあらゆる $x$ について $\phi(x)$ が真であるときに真であるとして、そうでないときは偽とする。

このとき各推論規則は、真の前提から真の帰結を与える。 ■

***Def.* 1.8.1.** 存在量化子

量化子 $\exists$ を定める。

アリティ 1 の述語 $\phi$ について、存在量化子 $\exists$ を以下で定める。

$$\exists x(\phi(x)) :\leftrightarrow \neg\forall x(\neg\phi(x))$$

***Thm.* 1.8.2.** 存在の導入則

アリティ 1 の述語 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\phi(y) \vdash \exists x(\phi(x))$$

*Proof.*

$\forall x(\neg\phi(x))$ を仮定する。

全称の除去則より $\neg\phi(y)$ であり、前提より $\phi(y)$ であるので、矛盾。

定理 1.3.10 より、$\neg\forall x(\neg\phi(x))$ を得る。 ■

***Thm.* 1.8.3.** 存在の除去則

アリティ 1 の述語 $\phi$、項 $x$ を出現させない命題 $\psi, \chi$ について、以下を定める。

$$\chi \land \phi(x) \vdash \psi \text{ から、 } \chi \land \exists y(\phi(y)) \vdash \psi$$

*Proof.*

公理 1.2.5 より、$\chi \vdash \phi(x) \to \psi$ である。

$\neg\psi$ を仮定する。

$\phi(x)$ を仮定すると、前提 $\chi$ より矛盾するので、定理 1.3.10 より $\neg\phi(x)$ である。

$\chi, \neg\psi$ は項 $x$ を出現させないので、$\forall x(\neg\psi(x))$ である。

$\exists y(\phi(y)) :\leftrightarrow \neg\forall x(\neg\phi(x))$ であるため、矛盾する。

定理 1.3.10 より $\psi$ を得る。 ■

***Thm.* 1.8.4.** 量化子と連言

アリティ 1 の述語 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \forall x(\phi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow \forall x(\phi(x)) \land \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\phi(x) \land \psi(x)) \vdash \exists x(\phi(x)) \land \exists x(\psi(x))$$

*Proof.*

略。 ■

***Thm.* 1.8.5.** 量化子と選言

アリティ 1 の述語 $\phi, \psi$ について、以下が成り立つ。

$$\forall x(\phi(x)) \lor \forall x(\psi(x)) \vdash \forall x(\phi(x) \lor \psi(x))$$
$$\vdash \exists x(\phi(x) \lor \psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \lor \exists x(\psi(x))$$

*Proof.*

略。 ■

***Thm.* 1.8.6. 量化子と否定**

アリティ 1 の述語 $\phi$ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \forall x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(\phi(x))$$
$$\vdash \exists x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\forall x(\phi(x))$$

*Proof.*

定義より明らか。 ■

***Def.* 1.8.2. 一意存在量化子**

量化子 ∃! を定める。

アリティ 1 の述語 $\phi$ について、存在量化子 ∃! を以下で定める。

$$\exists! x(\phi(x)) :\leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \land \forall y, z(\phi(y) \land \phi(z) \to y = z)$$

***Def.* 1.8.3. 等号**

アリティ 2 の述語記号 $=$ を定める。

$=(x, y)$ を、簡単のために $x = y$ で表す。

***Ax.* 1.8.1. 等号の反射律**

項 $x$ について、以下を定める。

$$\vdash x = x$$

***Ax.* 1.8.2. 等号の代入原理**

アリティ 2 の述語 $\phi$、項 $x, y$ について、以下を定める。

$$\phi(x, x) \land x = y \vdash \phi(x, y)$$

***Thm.* 1.8.7. 等号の対称律**

項 $x, y$ について、以下が成り立つ。

$$x = y \vdash y = x$$

*Proof.*

$x = x \land x = y$ である。

左命題の左辺に、右命題から得る代入を行って、$y = x$ を得る。 ■

***Thm.* 1.8.8. 等号の推移律**

項 $x, y, z$ について、以下が成り立つ。

$$x = y \land y = z \vdash x = z$$

*Proof.*

明らか。 ■

***Def.* 1.8.4.** 等号否定

アリティ 2 の述語記号 $\neq$ を定める。

項 $x, y$ について、以下で定める。

$$\neq(x, y) :\leftrightarrow \neg(x = y)$$

$\neq(x, y)$ を、簡単のために $x \neq y$ で表す。

***Rem.* 1.8.1.** 項の定義記号

定義記号 $:=$ を導入する。

これは左辺にある項は、議論において全てその左辺と一致する項を右辺に置き換えて理解するという意味である。

以降に定義する関数クラスの定義にも同様に用いる。

## 1.9 類と関数クラス

***Def.* 1.9.1.** 類

アリティ 1 の述語 $\boldsymbol{A}$ を、類と呼ぶ。

類であることを強調するために、$\boldsymbol{A}(x)$ を $x \in \boldsymbol{A}$ と書く。

***Def.* 1.9.2.** 類の否定

類 $\boldsymbol{A}$ と項 $x$ について、記号 $\notin$ を以下で定める。

$$x \notin \boldsymbol{A} :\leftrightarrow \neg(x \in \boldsymbol{A})$$

***Rem.* 1.9.1.** 類についての略記

略記 $\forall,$ と $\exists,$ を、アリティ 2 の述語 $\phi$ について、以下で定める。

$$\forall x, y(\phi(x, y)) :\leftrightarrow \forall x \forall y(\phi(x, y))$$
$$\exists x, y(\phi(x, y)) :\leftrightarrow \exists x \exists y(\phi(x, y))$$

これは、3 個以上についても同様に定める。

略記 $\forall \in, \exists \in$ を、類 $X$ とアリティ 1 の述語 $\phi$ について、以下で定める。

$$\forall x \in X(\phi(x)) :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to \phi(x))$$
$$\exists x \in X(\phi(x)) :\leftrightarrow \exists x(x \in X \land \phi(x))$$

***Rem.* 1.9.2.** 類は個体ではない

類は個体ではない（ある制限のもとで類を個体とみなすことはできる、集合論など)。

そのため、類の類を定義することはできない。

***Rem.* 1.9.3.** 存在の誤謬

類 $X$ とアリティ 1 の述語 $\phi$ について、$\forall x \in X(\phi(x))$ から $\exists x \in X(\phi(x))$ を導くことはできない。

これは存在の誤謬と呼ばれる初歩的な誤謬の一種である。

***Def.* 1.9.3.** **関数クラス**

以下を満たす述語 $\phi$ を考える。

$$\forall x \ldots \exists ! y(\phi(x, \ldots, y))$$

この対応関係を関数クラスと呼び、関数クラスを表す記号である関数記号 $F$ と項の列 $x, \ldots$ を用いて、$y$ を $F(x, \ldots)$ で表す。

要求する $x, \ldots$ の個数を、関数クラス $F$ のアリティと定める。

***Def.* 1.9.4.** **恒等関数**

アリティ 1 の関数記号 id を定める。

項 $x$ について、以下で定める。

$$\mathrm{id}(x) \coloneqq x$$

# 2　圏論

## 2.1　射の公理

***Rem.*** **2.1.1.** 対象と恒等射の同一視
本ノートでは対象を恒等射と同一視する。一般的でないことに注意されたい。

***Def.*** **2.1.1.** 射
圏論では、6 つの公理（公理 2.1.1、公理 2.1.2、公理 2.1.3、公理 2.1.4、公理 2.1.5、公理 2.1.6）が与えられる。
項を射と呼ぶ。

***Def.*** **2.1.2.** 始域
アリティ 1 の関数記号 dom() を考える。
射 $f$ について、$\mathrm{dom}(f)$ を $f$ の始域と呼ぶ。

***Ax.*** **2.1.1.** 始域は冪等

$$\forall f(\mathrm{dom}(\mathrm{dom}(f)) = \mathrm{dom}(f))$$

***Def.*** **2.1.3.** 終域
アリティ 1 の関数記号 cod() を考える。
射 $f$ について、$\mathrm{cod}(f)$ を $f$ の終域と呼ぶ。

***Ax.*** **2.1.2.** 終域は冪等

$$\forall f(\mathrm{cod}(\mathrm{cod}(f)) = \mathrm{cod}(f))$$

***Ax.*** **2.1.3.** 対象

$$\forall f(f = \mathrm{dom}(f) \leftrightarrow f = \mathrm{cod}(f))$$

***Def.*** **2.1.4.** 合成
アリティ 2 の関数記号 $\circ()$ を考える。
$\circ(f, g)$ を、簡単のために $g \circ f$ で表す。
射 $f, g$ について、$g \circ f$ を $f$ と $g$ の合成と呼ぶ。

***Def.*** **2.1.5.** 可合成
アリティ 2 の述語記号 Comp() を、以下で定める。

$$\mathrm{Comp}(f, g) :\leftrightarrow \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$$

***Ax.* 2.1.4.** 合成射の始域と終域

$$\forall f, g(\mathrm{Comp}(f, g) \to \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) \land \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g))$$

***Ax.* 2.1.5.** 合成射の結合

$$\forall f, g, h(\mathrm{Comp}(f, g) \land \mathrm{Comp}(g, h) \to h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$$

***Ax.* 2.1.6.** 対象は恒等射

$$\forall f(f = f \circ \mathrm{dom}(f) \land f = \mathrm{cod}(f) \circ f)$$

***Def.* 2.1.6.** 対象

以下を満たす射 $a$ を、対象、または、恒等射と呼ぶ。

$$a = \mathrm{dom}(a)$$

## 2.2 圏と関手

***Def.* 2.2.1.** 圏

類 $\boldsymbol{C}$ が圏であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall f \in \boldsymbol{C}(\mathrm{dom}(f) \in \boldsymbol{C} \land \mathrm{cod}(f) \in \boldsymbol{C})$$
$$\forall f, g \in \boldsymbol{C}(\mathrm{Comp}(f, g) \to g \circ f \in \boldsymbol{C})$$

***Def.* 2.2.2.** 対象の類

以下で定める類 $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ を、圏 $\boldsymbol{C}$ の対象の類と呼ぶ。

$$f \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} :\leftrightarrow f \in \boldsymbol{C} \land f = \mathrm{dom}(f)$$

***Cor.* 2.2.1.**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ は圏である。

***Def.* 2.2.3.** 離散圏

圏 $\boldsymbol{C}$ が離散であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall f(f \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow f \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}})$$

このとき、$\boldsymbol{C}$ を離散圏と呼ぶ。

***Def.* 2.2.4. Hom 類**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の対象 $a, b$ について、類 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a,b)$ を以下で定める。

$$f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a,b) :\leftrightarrow f \in \boldsymbol{C} \land \mathrm{dom}(f) = a \land \mathrm{cod}(f) = b$$

***Rem.* 2.2.1. 射の域の明示**

$f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a,b)$ を、簡単のため、$\boldsymbol{C}$ の射 $f\colon a \to b$ と表記する。

***Def.* 2.2.5. End 類**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の対象 $a$ について、類 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(a)$ を以下で定める。

$$f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(a) :\leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a,a)$$

***Def.* 2.2.6. 圏 1**

以下を満たす圏を、$\mathbf{1}$ で表す。

$$\exists! a \in \mathbf{1}$$

圏 $\mathbf{1}$ の唯一の射を、$*$ で表す。

***Def.* 2.2.7. 関手**

アリティ 1 の関数記号 $F$ が、圏 $\boldsymbol{C}$ から圏 $\boldsymbol{D}$ への関手であるとは、以下の 3 つを満たすことである。

$$\forall f \in \boldsymbol{C}(F(f) \in \boldsymbol{D})$$
$$\forall f \in \boldsymbol{C}\Big(\mathrm{dom}(F(f)) = F(\mathrm{dom}(f)) \land \mathrm{cod}(F(f)) = F(\mathrm{cod}(f))\Big)$$
$$\forall f, g \in \boldsymbol{C}\Big(\mathrm{Comp}(f,g) \to F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)\Big)$$

***Cor.* 2.2.2.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(F(a) \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}})$$

***Cor.* 2.2.3.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\forall f \in \boldsymbol{C}\big(f \text{ が同型射} \to F(f) \text{ が同型射}\big)$$

***Def.* 2.2.8. 関手の合成**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ を考える。

$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 $G$ について、以下で示すアリティ 1 の関数記号 $H$ は、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手である。

$$H(f) \coloneqq G(F(f))$$

この $H$ を、$F$ と $G$ の合成と呼び、$G \circ F$ で表す。

***Def.*** **2.2.9.** 恒等関手

圏 $\boldsymbol{C}$ について、関数記号 id は、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手である。

圏論において、id を恒等関手と呼ぶ。また、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への恒等関手であることを、明示的に $\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ で表す。

***Def.*** **2.2.10.** 圏同型

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $G$ が存在して、以下が成り立つとき、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ は圏同型であると言う。

$$G \circ F = \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}} \wedge F \circ G = \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}}$$

## 2.3 自然変換と関手圏

***Def.*** **2.3.1.** 自然変換

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F, F'$ を考える。

アリティ 1 の関数記号 $\eta$ が、$F$ から $F'$ への自然変換であるとは、以下の 3 つ全てを満たすことである。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(\eta(a) \in \boldsymbol{D})$$
$$\forall f \in \boldsymbol{C}\Big(\mathrm{Comp}(\eta(\mathrm{dom}(f)), F'(f)) \wedge \mathrm{Comp}(F(f), \eta(\mathrm{cod}(f)))\Big)$$
$$\forall f \in \boldsymbol{C}\Big(F'(f) \circ \eta(\mathrm{dom}(f)) = \eta(\mathrm{cod}(f)) \circ F(f)\Big)$$

$$\boldsymbol{C} \qquad \qquad \qquad \boldsymbol{D}$$

$$a \xrightarrow{f} b \qquad \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(a)"'] & F(b) \arrow[d, "\eta(b)"] \\ F'(a) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(b) \end{tikzcd}$$

***Def.*** **2.3.2.** 恒等な自然変換

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ について、関数記号 $F$ は、$F$ から $F$ への自然変換である。

$F$ が自然変換であることを明示的に、関手 $F$ に対する恒等な自然変換 $F$ と呼ぶ。

***Cor.*** **2.3.1.** 恒等な自然変換は自然同型

関手 $F$ に対する恒等な自然変換 $F$ は、$F$ から $F$ への自然同型である。

***Def.*** **2.3.3.** 自然変換の垂直合成

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F, F', F''$ を考える。

$F$ から $F'$ への自然変換 $\eta$ と $F'$ から $F''$ への自然変換 $\theta$ について、以下で定義するアリティ 1 の関数記号 $\theta \circ \eta$ は $F$ から $F''$ への自然変換である。

$$(\theta \circ \eta)(a) :\equiv \theta(a) \circ \eta(a)$$

$\theta \circ \eta$ を、$\eta$ と $\theta$ の垂直合成と呼ぶ。

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{C} & & \boldsymbol{D} \\
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}
& &
\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(a)"'] \arrow[dd, bend right, red, "(\theta\circ\eta)(a)"'] & F(b) \arrow[d, "\eta(b)"] \arrow[dd, bend left, red, "(\theta\circ\eta)(b)"] \\
F'(a) \arrow[r, "F'(f)"'] \arrow[d, "\theta(a)"'] & F'(b) \arrow[d, "\theta(b)"] \\
F''(a) \arrow[r, "F''(f)"'] & F''(b)
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

***Cor.*** **2.3.2.**

圏 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F,F'$ を考える。

$F$ から $F'$ への自然変換 $\eta$ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}\Big(\eta(a) = (\eta \circ F)(a) \land \eta(a) = (F' \circ \eta)(a)\Big)$$

***Def.*** **2.3.4. 自然変換の水平合成**

圏 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F,F'$、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 $G,G'$ を考える。

$F$ から $F'$ への自然変換 $\eta$ と、$G$ から $G'$ への自然変換 $\theta$ について、以下で定義するアリティ 1 の関数記号 $\theta * \eta$ は $G \circ F$ から $G' \circ F'$ への自然変換である。

$$(\theta * \eta)(a) :\equiv \theta(F'(a)) \circ G(\eta(a))$$

$\theta * \eta$ を、$\eta$ と $\theta$ の水平合成と呼ぶ。

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \\
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(a)"'] & F(b) \arrow[d, "\eta(b)"] \\
F'(a) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(b)
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
& G'(F(a)) \arrow[rr, "G'(F(f))"] \arrow[dd] & & G'(F(b)) \arrow[dd, "G'(\eta(b))"] \\
G(F(a)) \arrow[ur, "\theta(F(a))"] \arrow[rr, "G(F(f))"] \arrow[dd, "G(\eta(a))"'] \arrow[dr, red, "(\theta*\eta)(a)"] & & G(F(b)) \arrow[ur, "\theta(F(b))"] \arrow[dd, "G(\eta(b))"] \arrow[dr, red, "(\theta*\eta)(b)"] & \\
& G'(F'(a)) \arrow[rr] & & G'(F'(b)) \\
G(F'(a)) \arrow[ur, "\theta(F'(a))"] \arrow[rr, "G(F'(f))"'] & & G(F'(b)) \arrow[ur, "\theta(F'(b))"'] &
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

***Cor.*** **2.3.3.**

圏 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F,F'$、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 $G,G'$ を考える。

$F$ から $F'$ への自然変換 $\eta$ と、$G$ から $G'$ への自然変換 $\theta$ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}\Big((\theta * F)(a) = \theta(F(a)) \land (G * \eta)(a) = G(\eta(a))\Big)$$

***Lem.*** **2.3.4.**

圏 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F,F'$、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 $G,G'$ を考える。

$F$ から $F'$ への自然変換 $\eta$ と、$G$ から $G'$ への自然変換 $\theta$ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \boldsymbol{C}\Big(\theta(F'(a)) \circ G(\eta(a)) = G'(\eta(a)) \circ \theta(F(a))\Big)$$

*Proof.*

$\theta$ は $G$ から $G'$ への自然変換であるので、明らか。 ■

***Thm.* 2.3.5. 相互交換法則**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F, F', F''$、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 $G, G', G''$ を考える。

$F$ から $F'$ への自然変換 $\sigma$、$F'$ から $F''$ への自然変換 $\tau$、$G$ から $G'$ への自然変換 $\eta$、$G'$ から $G''$ への自然変換 $\theta$ について、以下が成り立つ。

$$(\theta \circ \eta) * (\tau \circ \sigma) = (\theta * \tau) \circ (\eta * \sigma)$$

*Proof.*

$\boldsymbol{C}$ の任意の対象 $a$ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
((\theta \circ \eta) * (\tau \circ \sigma))(a) &= (\theta \circ \eta)(F''(a)) \circ G((\tau \circ \sigma)(a)) \\
&= \theta(F''(a)) \circ \eta(F''(a)) \circ G(\tau(a)) \circ G(\sigma(a)) \\
&= \theta(F''(a)) \circ G'(\tau(a)) \circ \eta(F'(a)) \circ G(\sigma(a)) \\
&= (\theta * \tau)(a) \circ (\eta * \sigma)(a) \\
&= ((\theta * \tau) \circ (\eta * \sigma))(a)
\end{aligned}$$

ただし第二行から第三行へは、$\eta$ が $G$ から $G'$ への自然変換であることを用いた。 ■

$\boldsymbol{E}$

$$\begin{tikzcd}
G(F(a)) \arrow[r, "\eta(F(a))"] \arrow[d, "G(\sigma(a))"'] \arrow[dr, "(\eta*\sigma)(a)"] \arrow[dd, bend right=60, "G((\tau\circ\sigma)(a))"'] & G'(F(a)) \arrow[r, "\theta(F(a))"] \arrow[d, "G'(\sigma(a))"] & G''(F(a)) \arrow[d, "G''(\sigma(a))"] \\
G(F'(a)) \arrow[r, "\eta(F'(a))"] \arrow[d, "G(\tau(a))"'] & G'(F'(a)) \arrow[r, "\theta(F'(a))"] \arrow[d, "G'(\tau(a))"] \arrow[dr, "(\theta*\tau)(a)"] & G''(F'(a)) \arrow[d, "G''(\tau(a))"] \\
G(F''(a)) \arrow[r, "\eta(F''(a))"'] \arrow[rr, bend right=30, "(\theta\circ\eta)(F''(a))"'] & G'(F''(a)) \arrow[r, "\theta(F''(a))"'] & G''(F''(a))
\end{tikzcd}$$

***Rem.* 2.3.1. 自然変換は射**

圏 $\boldsymbol{D}$ から圏 $\boldsymbol{C}$ への関手 $F, G$ について、$F$ から $G$ への自然変換 $\eta$ を考える。

$\mathrm{dom}(\eta)$ を $F$ に対する恒等な自然変換 $F$、$\mathrm{cod}(\eta)$ を $G$ に対する恒等な自然変換 $G$ として、合成を垂直合成で定義すると、自然変換は射の公理をみたす。

***Def.* 2.3.5. 関手圏**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、自然変換を射とみなすと、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手間の自然変換であることは、圏となる。

この圏に以下の相等の定義を加えたものを、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手圏と呼び、$\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ または $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{D}}$ と表す。

1. 対象（関手）$F, F'$ について、$\forall f \in \boldsymbol{C}(F(f) = F'(f)) \to F = F'$
2. 射（自然変換）$\eta, \theta$ について、$\mathrm{dom}(\eta) = \mathrm{dom}(\theta) \land \mathrm{cod}(\eta) = \mathrm{cod}(\theta) \land \forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(\eta(a) = \theta(a)) \to \eta = \theta$

1 行目は恒等な自然変換ではなく関手として扱っていることに注意されたい。

***Def.* 2.3.6.** 対角関手

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ への以下で定める関手 $\Delta$ を考える。

1. $c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ について、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $\Delta(c), \forall d \in \boldsymbol{D}(\Delta(c)(d) \coloneqq c)$ を与える。
2. $f \notin \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ について、$\Delta(\mathrm{dom}(f))$ から $\Delta(\mathrm{cod}(f))$ への自然変換 $\forall d \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}}(\Delta(f)(d) \coloneqq f)$ を与える。

このように定めた関手 $\Delta$ を対角関手と呼ぶ。

## 2.4 双対

***Def.* 2.4.1.** 反対射

射 $f$ について、以下を満たすアリティ 1 の関数記号 op を考える。簡単のために、$\mathrm{op}(f)$ を $f^{\mathrm{op}}$ で表す。

$$\forall f((f^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = f)$$
$$\forall f(f = \mathrm{dom}(f) \to f = f^{\mathrm{op}})$$
$$\forall f(\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{cod}(f)^{\mathrm{op}})$$
$$\forall f(\mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{op}})$$
$$\forall f, g(\mathrm{Comp}(f, g) \to f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} = (g \circ f)^{\mathrm{op}})$$

***Def.* 2.4.2.** 反対圏

圏 $\boldsymbol{C}$ について、以下で定める類 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ は圏である。

$$f \in \boldsymbol{C}^{\mathrm{op}} :\leftrightarrow f^{\mathrm{op}} \in \boldsymbol{C}$$

***Def.* 2.4.3.** 反対関手

$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ について、以下で定める $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ から $\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}$ への関手を、$F^{\mathrm{op}}$ で表す。

$$F^{\mathrm{op}}(f) \coloneqq (F(f^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$$

***Rem.* 2.4.1.** 双対性

圏論における命題は、dom() と cod() を入れ替えて、合成 $g \circ f$ を $f \circ g$ に置き換えても、その真偽は変わらない。

より簡単に言えば、$\boldsymbol{C}$ で成り立つ命題は、$\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ でも成り立つ。

***Cor.* 2.4.1.** 圏 **1** の双対

$\mathbf{1}^{\mathrm{op}}$ は、$\mathbf{1}$ である。

***Cor.* 2.4.2.** 関手圏の双対

$\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})^{\mathrm{op}}$ と $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{C}^{\mathrm{op}})$ は圏同型である。

## 2.5 簡約と逆

***Def.* 2.5.1.** 左簡約可能

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f$ について、以下を満たすとき、$f$ は $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能であるという。

$$\forall g, h \in \boldsymbol{C}\Big(\mathrm{Comp}(g, f) \wedge \mathrm{Comp}(h, f) \wedge f \circ g = f \circ h \rightarrow g = h\Big)$$

左簡約可能な射を単射と呼ぶ。

***Def.* 2.5.2.** 右簡約可能

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f$ について、$f^{\mathrm{op}}$ が $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ で左簡約可能であるとき、$f$ は $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能であるという。

右簡約可能な射を全射と呼ぶ。

***Def.* 2.5.3.** 左可逆

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f$ について、以下を満たすとき、$f$ は $\boldsymbol{C}$ において左可逆であるという。

$$\exists g \in \boldsymbol{C}(\mathrm{Comp}(g, f) \wedge g \circ f = \mathrm{dom}(f))$$

***Cor.* 2.5.1.**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ において左可逆な射は、$\boldsymbol{C}$ において左簡約可能である。

***Def.* 2.5.4.** 右可逆

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f$ について、$f^{\mathrm{op}}$ が $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ で左可逆であるとき、$f$ は $\boldsymbol{C}$ において右可逆であるという。

***Cor.* 2.5.2.**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ において右可逆な射は、$\boldsymbol{C}$ において右簡約可能である。

***Cor.* 2.5.3.**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f, g$ について、$\mathrm{Comp}(f, g)$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1. $f, g$ がともに $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能である。
2. $f, g$ がともに $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能である。
3. $f, g$ がともに $\boldsymbol{C}$ において左可逆ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において左可逆である。
4. $f, g$ がともに $\boldsymbol{C}$ において右可逆ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において右可逆である。

***Cor.* 2.5.4.**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f, g$ について、$\mathrm{Comp}(f, g)$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1. $g \circ f$ が $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能ならば、$f$ は $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能である。
2. $g \circ f$ が $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能ならば、$g$ は $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能である。

***Def.* 2.5.5.** 逆射

射 $f$ について、以下を満たす射 $g$ を $f$ の逆射と呼ぶ。

$$\mathrm{Comp}(f, g) \wedge \mathrm{Comp}(g, f) \wedge g \circ f = \mathrm{dom}(f) \wedge f \circ g = \mathrm{cod}(f)$$

***Lem.* 2.5.5.** 逆射の一意性

射 $g, h$ が $f$ の逆射であるとき、$g = h$ である。

*Proof.*

以下より成り立つ。

$g = g \circ \mathrm{dom}(g) = g \circ \mathrm{cod}(f) = g \circ f \circ h = \mathrm{dom}(f) \circ h = \mathrm{cod}(h) \circ h = h$ より、成り立つ。 ■

***Rem.* 2.5.1.** 逆射

$f$ の逆射は、補題 2.5.5 より一意に定まるので、これを $f^{-1}$ と表す。

***Cor.* 2.5.6.**

逆射を持つ射 $f$ について、以下が成り立つ。

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

***Lem.* 2.5.7.** 同型射

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f$ について、以下の 2 つは同値である。

1. $f$ は、$\boldsymbol{C}$ に逆射を持つ。
2. $f$ は、$\boldsymbol{C}$ において、左可逆かつ右可逆である。

*Proof.*

1. → 2. は明らか。

2. → 1. を示す。

左可逆より、射 $g$ が存在して $g \circ f = \mathrm{dom}(f)$ であり、右可逆より、射 $h$ が存在して $f \circ h = \mathrm{cod}(f)$ である。

$g = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = h$ であるので、$g = h$

ゆえに、$g$ は $f \circ g = \mathrm{cod}(f)$ を満たす。 ■

***Def.* 2.5.6.** 同型射

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ において左可逆かつ右可逆な射を、$\boldsymbol{C}$ の同型射と呼ぶ。

***Cor.* 2.5.8.** 恒等射は同型射

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ の恒等射 $f$ の逆射は自身であり、ゆえに $f$ は $\boldsymbol{C}$ の同型射である。

***Cor.* 2.5.9.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $F$ を考える。

$\boldsymbol{C}$ の同型射 $f$ について、$F(f)$ は $\boldsymbol{D}$ の同型射である。

***Def.* 2.5.7.** 自然同型

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。関手圏 $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ の同型射を自然同型と呼ぶ。

***Cor.* 2.5.10.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F, F'$ を考える。

自然変換 $\eta\colon F \to F'$ が自然同型であるとは、以下と同値である。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}}\bigl(\eta(a) \text{ は } \boldsymbol{C} \text{ の同型射}\bigr)$$

***Def.* 2.5.8. 圏同値**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G$、自然同型 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \theta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ が存在するとき、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ は圏同値であると言う。

$$\boldsymbol{D}\quad\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[d, bend left, "\theta(a)"] & & b \arrow[d, bend left, "\theta(b)"] \\ (G\circ F)(a) \arrow[u, bend left, "\theta(a)^{-1}"] \arrow[rr, "(G\circ F)(f)"] & & (G\circ F)(b) \arrow[u, bend left, "\theta(b)^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \boldsymbol{C}\quad\begin{tikzcd} c \arrow[rr, "g"] \arrow[d, bend left, "\epsilon(c)^{-1}"] & & d \arrow[d, bend left, "\epsilon(d)^{-1}"] \\ (F\circ G)(c) \arrow[u, bend left, "\epsilon(c)"] \arrow[rr, "(F\circ G)(g)"] & & (F\circ G)(d) \arrow[u, bend left, "\epsilon(d)"] \end{tikzcd}$$

***Cor.* 2.5.11. 圏同型ならば圏同値**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ が圏同型ならば、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ は圏同値である。

## 2.6 普遍

***Def.* 2.6.1. 普遍射**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ の対象 $a$ を考える。

$F$ から $a$ への普遍射とは、$\boldsymbol{D}$ の対象 $x$ と圏 $\boldsymbol{C}$ の射 $u\colon F(x) \to a$ の組であって、以下を満たすものである。

$$\forall y \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}} \forall f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}\left(F(y), a\right) \exists! g \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(y, x)(f = u \circ F(g))$$

$$\boldsymbol{D}\quad\begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted, "g"] & x \end{tikzcd} \qquad \boldsymbol{C}\quad\begin{tikzcd} F(y) \arrow[r, dotted, "F(g)"] \arrow[dr, "f"'] & F(x) \arrow[d, "u"] \\ & a \end{tikzcd}$$

***Lem.* 2.6.1. 普遍射の一意性**

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ の対象 $a$ について、$x, u$ と $x', u'$ が $F$ から $a$ への普遍射であるとする。

このとき、以下を満たす。

$$\exists! h \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(x', x)(u' = u \circ F(h))$$

さらに上で与える $h$ は同型射である。

*Proof.*

$x, u$ は普遍射であるので、$x', u'$ について定義より、$\boldsymbol{D}$ の射 $g\colon x' \to x$ であって $u' = u \circ F(g)$ なる射が一意に存在する。

同様に $x', u'$ は普遍射であるので、$x, u$ について定義より、$\boldsymbol{D}$ の射 $g'\colon x \to x'$ であって $u = u' \circ F(g')$ なる射が一意に存在する。

ゆえに、$u = u' \circ F(g') = u \circ F(g) \circ F(g') = u \circ F(g \circ g')$ が成り立つ。

$x, u$ は普遍射であるので、$x, u$ について定義より、$\boldsymbol{D}$ の射 $i\colon x \to x$ であって $u = u \circ F(i)$ なる射が一意に存在する。

$x, g \circ g'$ は $i$ の条件を満たすので、$i = x = g \circ g'$

同様に、$x' = g' \circ g$ である。

したがって、$g'$ は $g$ の逆射である。 ■

***Def.* 2.6.2.** 終対象

圏 $\boldsymbol{C}$ を考える。

$\boldsymbol{C}$ から圏 $\mathbf{1}$ への関手は一意に定まる。これを $U$ とすると、$U$ から $*$ への普遍射 $x, u$ は、$u = *$ となる。

この $x$ を、$\boldsymbol{C}$ の終対象と呼ぶ。

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted, "g"] & x \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{1} \qquad \begin{tikzcd} * = U(y) \arrow[r, dotted, "*=U(g)"] \arrow[dr, "*"'] & * = U(x) \arrow[d, "*"] \\ & * \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.3.** 極限

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ への対角関手 $\Delta$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $X$ について、$\Delta$ から $X$ への普遍射 $x, u$ を $X$ の極限と呼ぶ。

$$\boldsymbol{D} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} & y \arrow[d, dotted, "q"] \arrow[ddl, bend right, "p(a)"'] \arrow[ddr, bend left, "p(b)"] & \\ & x \arrow[dl, "u(a)"'] \arrow[dr, "u(b)"] & \\ X(a) \arrow[rr, "X(f)"'] & & X(b) \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}) \qquad \begin{tikzcd} \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(x) \arrow[d, "u"] \\ & X \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.4.** 積

離散圏 $\boldsymbol{J}$、圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $X$ を考える。

このとき、$X$ の極限を $X$ の積と呼ぶ。X の積 $x, u$ について、この $x$ を $\prod X$ と表す。

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[dr, "p(j)"'] & \prod X \arrow[d, "u(j)"] \\ & X(j) \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}) \qquad \begin{tikzcd} \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(\prod X) \arrow[d, "u"] \\ & X \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.5.** 引き戻し

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f, g$ を考える。$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ とする。

以下で定める類 $\to\leftarrow$ は、圏である。

$$h \in \to\leftarrow :\leftrightarrow h = f \vee h = g \vee h = \mathrm{dom}(f) \vee h = \mathrm{dom}(g) \vee h = \mathrm{cod}(f)$$

圏 $\to\leftarrow$ から $\boldsymbol{C}$ への以下で定める関手 id を考える。

$$\mathrm{id}(h) := h$$

このとき、id の極限を、$f, g$ の引き戻しと呼ぶ。

$$\rightarrow\leftarrow \qquad \begin{tikzcd} & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} & y \arrow[d, dotted, red, "q"] \arrow[ddl, "p(a)"'] \arrow[ddr, "p(c)"] \arrow[drr, "p(b)"] & & \\ & x \arrow[dl, "u(a)"'] \arrow[dr, "u(c)"] \arrow[rr, "u(b)"] & & b \arrow[dl, "g"] \\ a \arrow[rr, "f"'] & & c & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Func}(\rightarrow\leftarrow, \boldsymbol{C}) \qquad \begin{tikzcd} \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(x) \arrow[d, "u"] \\ & \mathrm{id} \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.6. 等化子**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f, g$ を考える。$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ とする。

以下で定める類 $\rightrightarrows$ は、圏である。

$$h \in \rightrightarrows :\leftrightarrow h = f \vee h = g \vee h = \mathrm{dom}(f) \vee h = \mathrm{cod}(f)$$

圏 $\rightrightarrows$ から $\boldsymbol{C}$ への以下で定める関手 id を考える。

$$\mathrm{id}(h) \coloneqq h$$

このとき、id の極限を、$f, g$ の等価子と呼ぶ。

$$\rightrightarrows \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} & y \arrow[d, dotted, red, "q"] \arrow[ddl, "p(a)"'] \arrow[ddr, "p(b)"] \arrow[drr, "p(a)"] & & \\ & \mathrm{Eq}(f,g) \arrow[dl, "u(a)"'] \arrow[dr, "u(b)"] \arrow[rr, "u(a)"] & & a \arrow[dl, "g"] \\ a \arrow[rr, "f"'] & & b & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Func}(\rightrightarrows, \boldsymbol{C}) \qquad \begin{tikzcd} \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(\mathrm{Eq}(f,g)) \arrow[d, "u"] \\ & \mathrm{id} \end{tikzcd}$$

***Lem.* 2.6.2. 等化子から得る単射**

$f$ と $g$ の等化子 $\mathrm{Eq}(f,g), u$ について、$u(\mathrm{dom}(f))$ は単射である。

*Proof.*

$e \coloneqq u(\mathrm{dom}(f))$ とする。

$e \circ h_1 = e \circ h_2$ なる射 $h_1, h_2 \colon y \to \mathrm{Eq}(f,g)$ と、射 $w \coloneqq e \circ h_1$ を考える。

このとき、$f \circ w = f \circ e \circ h_1 = g \circ e \circ h_1 = g \circ w$ より、等化子の普遍性から $w = e \circ h$ なる $h$ が一意に存在する。

ゆえに、$h_1 = h_2$ である。

したがって、$e$ は左簡約可能である。 ■

***Thm.* 2.6.3. 極限の存在定理**

以下を満たす圏 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}$ を考える。

1. $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、積を持つ。
2. $\boldsymbol{J}$ の射を対象とする離散圏 $\hat{\boldsymbol{J}}$ について、$\hat{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、積を持つ。
3. $\boldsymbol{C}$ の任意の射 $f, g$ は、等化子を持つ。

このとき、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $X$ は極限を持つ。

*Proof.*

$\hat{\boldsymbol{J}}$ から $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ への関手 cod、$\mathrm{cod}\left(\hat{f}\right) = \mathrm{cod}(f)$ と、$\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{J}$ への自明な関手 $I$ を考える。

$P = X \circ I$ と、$R = X \circ I \circ \mathrm{cod}$ を考える。$P$ の積を $\prod P, \pi$、$R$ の積を $\prod R, r$ とする。

$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}\left(\hat{\boldsymbol{J}}, \boldsymbol{C}\right)$ への対角関手 $\Delta_1$ を考える。

自然変換 $s \colon \Delta_1(\prod P) \to R$、$s(j) = \pi(\mathrm{cod}(j))$ を考える。積の定義より、一意な射 $\overline{s} \colon \prod P \to \prod R$ が存在して、$s = r \circ \Delta_1(\overline{s})$ である。

自然変換 $t \colon \Delta_1(\prod P) \to R$、$t(j) = X(j) \circ \pi(\mathrm{dom}(j))$ を考える。積の定義より、一意な射 $\overline{t} \colon \prod P \to \prod R$ が存在して、$t = r \circ \Delta_1(\overline{t})$ である。

仮定より、$\overline{s}$ と $\overline{t}$ の等化子 $\mathrm{Eq}\left(\overline{s}, \overline{t}\right), u$ が存在する。

$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$ への対角関手 $\Delta_2$ を考える。

$\lambda \coloneqq \pi \circ \Delta_2(u(\prod P))$ が、$\Delta_2(\mathrm{Eq}\left(\overline{s}, \overline{t}\right))$ から $X$ への自然変換であることを示す。

$\boldsymbol{J}$ の射 $j$ について、等化子と積の定義より以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
X(j) \circ \lambda(\mathrm{dom}(j)) &= X(j) \circ \pi(\mathrm{dom}(j)) \circ \Delta_2(u(\prod P))(\mathrm{dom}(j)) \\
&= X(j) \circ \pi(\mathrm{dom}(j)) \circ u(\prod P) \\
&= t(j) \circ u(\prod P) \\
&= r(j) \circ \overline{t} \circ u(\prod P) \\
&= r(j) \circ \overline{s} \circ u(\prod P) \\
&= s(j) \circ u(\prod P) \\
&= \pi(\mathrm{cod}(j)) \circ u(\prod P) \\
&= \lambda(\mathrm{cod}(j))
\end{aligned}$$

$\mathrm{Eq}\left(\overline{s}, \overline{t}\right), \lambda$ が極限であることを示す。

$\boldsymbol{C}$ の対象 $y$ と、自然変換 $p \colon \Delta_2(y) \to X$ を考える。

$\prod P$ は積より、一意な $\boldsymbol{C}$ の射 $w \colon y \to \prod P$ が存在して、$\forall j \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}(p(j) = \pi(j) \circ w)$ が成り立つ。

等化子より、一意な $\boldsymbol{C}$ の射 $l \colon y \to \mathrm{Eq}\left(\overline{s}, \overline{t}\right)$ が存在して、$w = u(\prod P) \circ l$ である。

したがって、一意な $\boldsymbol{C}$ の射 $l$ が存在して、$p = \lambda \circ \Delta_2(l)$ である。 ■

$\mathrm{Func}\left(\hat{\boldsymbol{J}}, \boldsymbol{C}\right)$

$$\begin{tikzcd}
& \Delta_1(\prod P) \arrow[d, "\Delta_1(\overline{t})"'] \arrow[ddr, "t"] & \\
\Delta_1(\prod P) \arrow[r, "\Delta_1(\overline{s})"] \arrow[drr, "s"'] & \Delta_1(\prod R) \arrow[dr, "r"] & \\
& & R
\end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}\left(\overline{s}, \overline{t}\right) \arrow[r, "u(\prod P)"] \arrow[dd, "u(\prod P)"'] \arrow[ddr, "u(\prod R)"] & \prod P \arrow[dd, "\overline{t}"] \arrow[dr, "\pi(\mathrm{dom}(j))"] \arrow[dddr, "t(j)"] & \\
& & X(\mathrm{dom}(j)) \arrow[dd, "X(j)"] \\
\prod P \arrow[r, "\overline{s}"] \arrow[drr, "s(j)=\pi(\mathrm{cod}(j))"'] & \prod R \arrow[dr, "r(j)"] & \\
& & R(j) = X(\mathrm{cod}(j))
\end{tikzcd}$$

## 2.7　余普遍

***Def.* 2.7.1.** 余普遍射

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ の対象 $a$ を考える。

$a$ から $F$ への余普遍射とは、$F^{\mathrm{op}}$ から $a$ への普遍射 $x, u$ について、$x, u^{\mathrm{op}}$ である。

$$\boldsymbol{D} \qquad \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted, "g^{\mathrm{op}}"] & x \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}} \qquad \begin{tikzcd} F^{\mathrm{op}}(y) \arrow[r, dotted, "F^{\mathrm{op}}(g^{\mathrm{op}})"] \arrow[dr, "f"'] & F^{\mathrm{op}}(x) \arrow[d, "u"] \\ & a \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} F(y) & F(x) \arrow[l, dotted, "F(g)"'] \\ & a \arrow[ul, "f^{\mathrm{op}}"] \arrow[u, "u^{\mathrm{op}}"'] \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.7.2. 始対象**

圏 $\boldsymbol{C}$ を考える。

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ の終対象を、$\boldsymbol{C}$ の始対象と呼ぶ。

***Def.* 2.7.3. 余極限**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ への対角関手 $\Delta$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $X$ について、$X$ から $\Delta$ への余普遍射を $X$ の余極限と呼ぶ。

***Def.* 2.7.4. 和**

離散圏 $\boldsymbol{J}$、圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $X$ を考える。

このとき、$X$ の余極限を $X$ の和と呼ぶ。

***Def.* 2.7.5. 押し出し**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f, g$ を考える。$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ とする。

このとき、$f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}$ の引き戻しを、$f, g$ の押し出しと呼ぶ。

***Def.* 2.7.6. 余等化子**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f, g$ を考える。$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ とする。

このとき、$f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}$ の等化子を、$f, g$ の余等化子と呼ぶ。

***Lem.* 2.7.1. 余等化子から得る全射**

$f$ と $g$ の余等化子 $x, u$ について、$u(\mathrm{cod}(f))$ は全射である。

*Proof.*

補題 2.6.2 より、双対性から明らか。 ■

***Thm.* 2.7.2. 余極限の存在定理**

以下を満たす圏 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}$ を考える。

1. $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、和を持つ。
2. $\boldsymbol{J}$ の射を対象とする離散圏 $\hat{\boldsymbol{J}}$ について、$\hat{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、和を持つ。
3. $\boldsymbol{C}$ の任意の射 $f, g$ は、余等化子を持つ。

このとき、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $X$ は余極限を持つ。

*Proof.*

定理 2.6.3 より、双対性より明らか。 ■

## 2.8　随伴

***Def.* 2.8.1. 左随伴関手**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G$ と、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ が存在して、以下を満たすとする。

$$\forall c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} \big( G(c), \epsilon(c) \text{ は、} F \text{ から } c \text{ への普遍射である。} \big)$$

このとき $F$ を、右随伴が $G$ で余単位を $\epsilon$ とする左随伴関手と呼ぶ。

***Lem.* 2.8.1. 随伴の一意性**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G, G'$ と、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \epsilon'\colon F \circ G' \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ を考える。

$F$ は、右随伴が $G$ で余単位を $\epsilon$ とする左随伴関手であり、右随伴が $G'$ で余単位を $\epsilon'$ とする左随伴関手であるとする。

このとき自然同型 $\theta\colon G \to G'$ が存在して、以下が成り立つ。

$$\epsilon' \circ (F * \theta) = \epsilon$$

*Proof.*

$\forall c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ について、$G'(c), \epsilon'(c)$ は $F$ から $c$ への普遍射である。

ゆえに一意な $\boldsymbol{D}$ の射 $\alpha$ が存在して、$\epsilon(c) = \epsilon'(c) \circ F(\alpha)$ が成り立つ。

$c$ に対して $\alpha$ を与えるアリティ 1 の関数記号を、$\theta$ とする。

$\theta$ が $G$ から $G'$ への自然変換であることを示す。

$\boldsymbol{C}$ の射 $f$ を考える。$\epsilon, \epsilon'$ の自然性と、$\theta$ の定義より以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ F(\theta(\mathrm{cod}(f)) \circ G(f)) &= \epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ (F * \theta)(\mathrm{cod}(f)) \circ (F \circ G)(f) \\
&= \epsilon(\mathrm{cod}(f)) \circ (F \circ G)(f) \\
&= f \circ \epsilon(\mathrm{dom}(f)) \\
&= f \circ \epsilon'(\mathrm{dom}(f)) \circ (F * \theta)(\mathrm{dom}(f)) \\
&= \epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ (F \circ G)(f) \circ (F * \theta)(\mathrm{dom}(f)) \\
&= \epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ F(G(f) \circ \theta(\mathrm{dom}(f)))
\end{aligned}$$

普遍性より、$\theta(\mathrm{cod}(f)) \circ G(f) = G(f) \circ \theta(\mathrm{dom}(f))$ である。

ゆえに、$\theta$ は自然変換である。

自然同型であることを示す。

同様に自然変換 $\zeta\colon G' \to G$ を考えることができる。

定義より、$\forall c \in \boldsymbol{C}$ について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\epsilon(c) &= \epsilon'(c) \circ F(\theta(c)) \\
&= \epsilon(c) \circ F(\zeta(c)) \circ F(\theta(c)) \\
&= \epsilon(c) \circ F(\zeta(c) \circ \theta(c))
\end{aligned}$$

普遍性より、$\zeta(c) \circ \theta(c) = G(c)$ である。

すなわち、$\zeta$ は $\theta$ の逆射である。 ■

***Thm.* 2.8.2.** 三角恒等式

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G$、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ を考える。

$F$ は、右随伴が $G$ で余単位を $\epsilon$ とする左随伴関手であるとする。

このとき、自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ が存在して、以下を満たす。

$$\begin{aligned} F &= (\epsilon * F) \circ (F * \eta) \\ G &= (G * \epsilon) \circ (\eta * G) \end{aligned}$$

*Proof.*

まず第一式と、自然変換であることを示す。

$d \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}}$ について、$(G \circ F)(d), (\epsilon * F)(d)$ は $F$ から $F(d)$ への普遍射である。

したがって、$d$ と恒等射 $F(d)$ について、射 $g$ が一意に存在して、$F(d) = (\epsilon * F)(d) \circ F(g)$ である。

$d$ に対して、この $g$ を与える関数記号を $\eta$ とする。

$\boldsymbol{D}$ の射 $f\colon d \to d'$ を考える。

$$\begin{aligned} (\epsilon * F)(d') \circ F((G \circ F)(f) \circ \eta(d)) &= (\epsilon * F)(d') \circ (F \circ G \circ F)(f) \circ (F * \eta)(d) \\ &= F(f) \circ (\epsilon * F)(d) \circ (F * \eta)(d) \\ &= F(f) \\ &= (\epsilon * F)(d') \circ (F * \eta)(d') \circ F(f) \\ &= (\epsilon * F)(d') \circ F(\eta(d') \circ f) \end{aligned}$$

$(G \circ F)(d'), (\epsilon * F)(d')$ は、$F$ から $F(d')$ への普遍射であるため、$d$ と $F(f)$ について、$F(f) = (\epsilon * F)(d') \circ F(e)$ なる $e$ が一意に存在する。

したがって、$e = (G \circ F)(f) \circ \eta(d) = \eta(d') \circ f$ である。

ゆえに、$\eta$ は自然変換である。

第二式を示す。

$c \in \mathrm{Obj}_C$ を考える。

$\epsilon$ は自然変換であるので、射 $w\colon (F \circ G)(c) \to c$ について $\epsilon(c) \circ (F \circ G)(w) = w \circ \epsilon(F \circ G(c))$ である。

$w = \epsilon(c)$ として、$\epsilon(c) \circ (F \circ G)(\epsilon(c)) = \epsilon(c) \circ \epsilon(F \circ G(c))$ である。

第一式より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \epsilon(c) &= \epsilon(c) \circ F(G(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ (\epsilon * F)(G(c)) \circ (F * \eta)(G(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ \epsilon((F \circ G)(c)) \circ F((\eta * G)(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ (F \circ G)(\epsilon(c)) \circ F((\eta * G)(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ F\big(((G * \epsilon) \circ (\eta * G))(c)\big) \end{aligned}$$

$G(c), \epsilon(c)$ は $F$ から $c$ への普遍射であるため、$G(c)$ と $\epsilon(c)\colon F(G(c)) \to c$ について、一意な射 $i\colon G(c) \to G(c)$ が存在して、$\epsilon(c) = \epsilon(c) \circ F(i)$ である。

$i = G(c)$ は明らかに条件を満たすので、一意性より以下を得る。

$$((G * \epsilon) \circ (\eta * G))(c) = G(c)$$

■

$\boldsymbol{D}$

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, dotted, "\eta(d)"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(d) \arrow[d, "(G \circ F)(f)"] \\
d' \arrow[r, dotted, "\eta(d')"] & (G \circ F)(d')
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{C}$

$$
\begin{tikzcd}
F(d) \arrow[r, "(F*\eta)(d)"] \arrow[drr, "F(d)"'] \arrow[dd, "F(f)"'] & (F \circ G \circ F)(d) \arrow[dr, "(\epsilon*F)(d)"] \arrow[dd, "(F \circ G \circ F)(f)"] & \\
& & F(d) \arrow[dd, "F(f)"] \\
F(d') \arrow[r, "(F*\eta)(d')"] \arrow[drr, "F(d')"'] & (F \circ G \circ F)(d') \arrow[dr, "(\epsilon*F)(d')"] & \\
& & F(d')
\end{tikzcd}
$$

***Def.* 2.8.2. 右随伴関手**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G$、自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ を考える。

$G^{\mathrm{op}}$ が、右随伴が $F^{\mathrm{op}}$ で余単位を $\eta^{\mathrm{op}}$ とする左随伴関手であるとする。

このとき $G$ を、左随伴が $F$ で単位を $\eta$ とする右随伴関手と呼ぶ。

***Thm.* 2.8.3. 三角恒等ならば随伴**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G$ と、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ について、以下を満たすとする。

$$
\begin{aligned}
F &= (\epsilon * F) \circ (F * \eta) \\
G &= (G * \epsilon) \circ (\eta * G)
\end{aligned}
$$

このとき、$F$ は右随伴が $G$ で余単位を $\epsilon$ とする左随伴関手となり、$G$ は左随伴が $F$ で単位を $\eta$ とする右随伴関手となる。

*Proof.*

双対性から、$F$ が左随伴関手であることを示せば十分である。

$\boldsymbol{C}$ の任意の対象 $a$ について、$G(a), \epsilon(a)$ が $F$ から $a$ への普遍射となることを示す。

$\boldsymbol{D}$ の対象 $y$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f\colon F(y) \to a$ を考える。

このとき、$g \coloneqq G(f) \circ \eta(y)$ を考えると、$\epsilon$ の自然性と $F = (\epsilon * F) \circ (F * \eta)$ より、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\epsilon(a) \circ F(g) &= \epsilon(a) \circ (F \circ G)(f) \circ (F * \eta)(y) \\
&= f \circ (\epsilon * F)(y) \circ (F * \eta)(y) \\
&= f \circ F(y) \\
&= f
\end{aligned}
$$

次に、$\boldsymbol{D}$ の射 $g'\colon y \to G(a)$ が存在して、$f = \epsilon(a) \circ F(g')$ であるとする。

このとき、$G = (G * \epsilon) \circ (\eta * G)$ と $\eta$ の自然性より、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
g' &= G(a) \circ g' \\
&= (G * \epsilon)(a) \circ (\eta * G)(a) \circ g' \\
&= (G * \epsilon)(a) \circ (G \circ F)(g') \circ \eta(y) \\
&= G(\epsilon(a) \circ F(g')) \circ \eta(y) \\
&= G(f) \circ \eta(y) \\
&= g
\end{aligned}
$$

ゆえに一意である。 ■

$$\boldsymbol{D}\qquad
\begin{tikzcd}
y \arrow[d, "\eta(y)"] \arrow[dr, dotted, red, "g=G(f)\circ\eta(y)"] & \\
(G\circ F)(y) \arrow[r, "G(f)"] & G(a)
\end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C}\qquad
\begin{tikzcd}
 & & F(y) \arrow[ddll, "F(y)"'] \arrow[d, "(F*\eta)(y)"] \arrow[ddr, "f"] \arrow[drr, dotted, "F(g)"] & & \\
 & & (F\circ G\circ F)(y) \arrow[rr, "(F\circ G)(f)"] \arrow[dll, "(\epsilon*F)(y)"] & & (F\circ G)(a) \arrow[dl, "\epsilon(a)"] \\
F(y) \arrow[rrr, "f"'] & & & a &
\end{tikzcd}$$

***Lem.* 2.8.4. 圏同値ならば随伴**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ が圏同値であるとする。

定義 2.5.8 の主張する $F, G, \epsilon, \theta$ について、$F$ は、$G$ を右随伴で $\epsilon$ を余単位とする左随伴関手である。

*Proof.*

??? ■

***Thm.* 2.8.5. 左随伴は余極限を保存する**

圏 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $X$、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $F$、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 $G$ と、自然変換 $\epsilon\colon F\circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G\circ F$ を考える。

$F$ は右随伴が $G$ で余単位を $\epsilon$ とする左随伴関手であるとする。

$x, u$ が $X$ の余極限であるならば、$F(x), F*u$ は $F\circ X$ の余極限である。

*Proof.*

$\boldsymbol{D}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{D})$ への対角関手を $\Delta_{\boldsymbol{D}}$、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$ への対角関手を $\Delta_{\boldsymbol{C}}$ とする。

$\boldsymbol{C}$ の対象 $y$ と、$F\circ X$ から $\Delta_{\boldsymbol{C}}(y)$ への自然変換 $f$ を考える。

$G(y), \epsilon(y)$ は、$F$ から $y$ への普遍射である。

したがって $\boldsymbol{J}$ の任意の対象 $j$ について、$\epsilon(y)\circ F(w(j)) = f(j)$ を満たす射 $w(j)$ が一意に存在する。

ここで、$f$ は $F\circ X$ から $\Delta_{\boldsymbol{C}}(y)$ への自然性であるので、$\boldsymbol{J}$ の任意の対象 $j, j'$ について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\epsilon(y)\circ F(w(j')\circ X(i)) &= \epsilon(y)\circ F(w(j'))\circ (F\circ X)(i)\\
&= f(j')\circ (F\circ X)(i)\\
&= f(j)\\
&= \epsilon(y)\circ F(w(j))
\end{aligned}$$

一意性より、$w(j')\circ X(i) = w(j)$ である。よって、$w$ は $X$ から $\Delta_{\boldsymbol{D}}$ への自然変換である。

$x, u$ は $X$ から $\Delta_{\boldsymbol{D}}$ への余普遍射であるので、$w = \Delta_{\boldsymbol{D}}(h)\circ u$ を満たす $\boldsymbol{D}$ の射 $h$ が一意に存在する。

ここで、$g \coloneqq \epsilon(y)\circ F(h)$ とすると、$\boldsymbol{J}$ の任意の対象 $j$ について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
g\circ (F*u)(j) &= \epsilon(y)\circ F(h)\circ (F*u)(j)\\
&= \epsilon(y)\circ F(h\circ u(j))\\
&= \epsilon(y)\circ (F*w)(j)\\
&= f(j)
\end{aligned}$$

したがって、$\Delta_{\boldsymbol{C}}(g)\circ (F*u) = f$ である。

次に、$\boldsymbol{C}$ の射 $g'$ が存在して、$\Delta_{\boldsymbol{C}}(g')\circ (F*u) = f$ であるとする。

$G(y), \epsilon(y)$ は $F$ から $y$ への普遍射であるため、$g' = \epsilon(y)\circ F(h')$ を満たす $\boldsymbol{D}$ の射 $h'$ が一意に存在する。

$\boldsymbol{J}$ の任意の対象 $j$ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\epsilon(y) \circ F(h \circ u(j)) &= f(j) \\ &= g'(j) \circ (F * u)(j) \\ &= \epsilon(y) \circ F(h') \circ (F * u)(j) \\ &= \epsilon(y) \circ F(h' \circ u(j))\end{aligned}$$

再び $G(y), \epsilon(y)$ は $F$ から $y$ への普遍射であるため、一意性より $h \circ u(j) = h' \circ u(j)$ である。ゆえに、$\Delta_{\boldsymbol{D}}(h') \circ u = \Delta_{\boldsymbol{D}}(h) \circ u$ である。

$x, u$ は、$X$ の余極限であるため、一意性より $h = h'$ である。したがって、$g = g'$ である。 ■

$\boldsymbol{J}$

$$\begin{tikzcd} j \arrow[r, "i"] & j' \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{D}$

$$\begin{tikzcd} G(y) & & \\ & x \arrow[ul, "h"'] & \\ X(j) \arrow[uu, "w(j)"] \arrow[ur, "u(j)"] \arrow[rr, "X(i)"'] & & X(j') \arrow[ul, "u(j')"'] \arrow[uull, bend right, "w(j')"'] \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{C}$

$$\begin{tikzcd} & (F \circ G)(y) \arrow[dl, "\epsilon(y)"'] & \\ y & & F(x) \arrow[ul, "F(h)"'] \arrow[ll, dotted, "g"'] \\ & (F \circ X)(j) \arrow[uu, "(F*w)(j)"] \arrow[ul, "f(j)"] \arrow[ur, "(F*u)(j)"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{D})$

$$\begin{tikzcd} \Delta_{\boldsymbol{D}}(G(y)) & \\ & \Delta_{\boldsymbol{D}}(x) \arrow[ul, "\Delta_{\boldsymbol{D}}(h)"'] \\ X \arrow[uu, "w"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$

$$\begin{tikzcd} & \Delta_{\boldsymbol{C}}((F \circ G)(y)) \arrow[dl, "\Delta_{\boldsymbol{C}}(\epsilon(y))"'] & \\ \Delta_{\boldsymbol{C}}(y) & & \Delta_{\boldsymbol{C}}(F(x)) \arrow[ul, "\Delta_{\boldsymbol{C}}(F(h))"'] \arrow[ll, dotted, "\Delta_{\boldsymbol{C}}(g)"'] \\ & F \circ X \arrow[uu, "F*w"] \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "F*u"'] & \end{tikzcd}$$

# 3 集合論

## 3.1 集合論の述語

***Def.* 3.1.1.** 集合

集合論では、9 つの公理（公理 3.2.1、公理 3.2.2、公理 3.2.3、公理 3.2.4、公理 3.6.1、公理 3.3.1、公理 3.3.2、公理 3.4.1、公理 3.2.5）が与えられる。

項を集合と呼ぶ。

***Def.* 3.1.2.** 所属

アリティ 2 の述語記号 $\in$ を定める。

$\in(x, y)$ を、簡単のために $x \in y$ で表す。

***Rem.* 3.1.1.** 集合は類

集合 $y$ について、$\in(, y)$ はアリティ 1 の述語、すなわち類となる。

ここで、類の $\in$ と、所属の $\in$ は同一視される。

一方で、類に対して対応する集合を一般には与えることができない点に注意されたい。

***Def.* 3.1.3.** 要素

集合 $x, X$ について、$x \in X$ であるとき、$x$ は $X$ の要素または元と呼ぶ。

***Rem.*** **3.1.2.** 集合系

その要素に要素があることを強調したいとき、この集合を集合系と呼ぶ。

***Def.*** **3.1.4.** 包含

集合 $X, Y$ について、アリティ 2 の述語記号 $\subset$ を以下で定める。

$$\subset (X, Y) :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to x \in Y)$$

$\subset (X, Y)$ を、簡単のために $X \subset Y$ で表す。

***Def.*** **3.1.5.** 真包含

集合 $X, Y$ について、アリティ 2 の述語記号 $\subsetneq$ を以下で定める。

$$\subsetneq (X, Y) :\leftrightarrow X \subset Y \land X \neq Y$$

$\subsetneq (X, Y)$ を、簡単のために $X \subsetneq Y$ で表す。

***Def.*** **3.1.6.** 左包含

集合 $X, Y$ について、アリティ 2 の述語記号 $\supset$ を以下で定める。

$$\supset (X, Y) :\leftrightarrow Y \subset X$$

$\supset (X, Y)$ を、簡単のために $X \supset Y$ で表す。

***Def.*** **3.1.7.** 左真包含

集合 $X, Y$ について、アリティ 2 の述語記号 $\supsetneq$ を以下で定める。

$$\supsetneq (X, Y) :\leftrightarrow Y \subsetneq X$$

$\supsetneq (X, Y)$ を、簡単のために $X \supsetneq Y$ で表す。

## 3.2 集合の構成

***Ax.*** **3.2.1.** 外延性の公理

$$\forall X \forall Y (\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \to X = Y)$$

***Cor.*** **3.2.1.** 相等の定義

以下が成り立つ。

$$\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

***Cor.*** **3.2.2.** 包含の半順序性

以下が成り立つ。

$$\forall X (X \subset X)$$
$$\forall X \forall Y (X \subset Y \land Y \subset X \to X = Y)$$
$$\forall X \forall Y \forall Z (X \subset Y \land Y \subset Z \to X \subset Z)$$

***Rem.* 3.2.1.** 集合の外延的定義

公理 3.2.1 より、全ての要素を書き下せば集合は一意に定まる。このような全ての要素を書き下す集合の定義方法を、外延的定義と呼ぶ。

例えば、要素が $x, y, z$ であり、かつ、それのみである集合 $X$ に対して以下のような定義をする。

$$X = \{x, y, z\}$$

***Ax.* 3.2.2.** 空集合の公理

$$\exists A \forall x (x \notin A)$$

***Def.* 3.2.1.** 空集合

公理 3.2.1 から、公理 3.2.2 が主張する集合が一意に定まる。この集合を空集合と呼び、$\varnothing$ で表す。

外延的に $\{\}$ とも表す。

***Cor.* 3.2.3.**

$$\forall X (\varnothing \subset X)$$

***Ax.* 3.2.3.** 対の公理

$$\forall x \forall y \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t = x \lor t = y)$$

***Def.* 3.2.2.** 単集合

$x = y$ を考えることで、集合 $\{x, x\}$ が存在する。この集合は、公理 3.2.1 から、$\{x\}$ とも表せる。

このような単一の元からなる集合を単集合（singleton）と呼ぶ。

***Ax.* 3.2.4.** 正則性の公理

$$\forall X (X \neq \varnothing \to \exists x (x \in X \land \forall y (y \in X \to y \notin x)))$$

***Lem.* 3.2.4.**

$$\forall x \forall y (x \notin y \lor y \notin x)$$

*Proof.*

公理 3.2.3 より、$\{x, y\}$ が存在する。

公理 3.2.4 より、

$$\exists z (z \in \{x, y\} \land \forall t (t \in \{x, y\} \land t \notin z))$$

よって、

$$\forall t (t \in \{x, y\} \land t \notin x) \lor \forall t (t \in \{x, y\} \land t \notin y)$$

ゆえに、

$$(x \notin x \wedge y \notin x) \vee (x \notin y \wedge y \notin y)$$

したがって、

$$y \notin x \vee x \notin y$$

■

***Cor.* 3.2.5.**

$$\forall x(x \notin x)$$

***Ax.* 3.2.5.** 選択の公理

$$\forall X(\varnothing \notin X \wedge \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to \exists A \forall x(x \in X \to \exists t(x \cap A = \{t\})))$$

## 3.3 集合の和と冪

***Ax.* 3.3.1.** 和集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists B(t \in B \wedge B \in X))$$

***Def.* 3.3.1.** 和集合

集合系 $X$ について、公理 3.3.1 の主張する集合 $A$ が存在して、これは公理 3.2.1 から一意に定まる。このような集合 $A$ を、$X$ の和集合と呼び、$\bigcup X$ で表す。

和集合 $\bigcup\{x,y\}$ を、簡単のために $x \cup y$ とも表す。

***Cor.* 3.3.1.**

$$\forall X \forall x\left(x \in X \to x \subset \bigcup X\right)$$

***Cor.* 3.3.2.**

$$\forall X \forall Y\left(X \subset Y \to \bigcup X \subset \bigcup Y\right)$$

***Cor.* 3.3.3.**

$$\forall x \forall y \forall z(x \subset y \to x \cup z \subset y \cup z)$$

***Cor.*** **3.3.4.**

$$\bigcup \varnothing = \varnothing$$

***Cor.*** **3.3.5.**

$$\forall x \Big( \bigcup \{x\} = x \Big)$$

***Ax.*** **3.3.2.** 冪集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \subset X)$$

***Def.*** **3.3.2.** 冪集合

集合 $X$ について、公理 3.3.2 の主張する集合 $A$ が存在して、これは公理 3.2.1 から一意に定まる。このような集合 $A$ を、冪集合と呼び、$\mathfrak{P}(X)$ で表す。

***Rem.*** **3.3.1.** 包含される量化子についての略記

略記 $\forall \subset, \exists \subset$ を以下で定める。

$$\forall x \subset X(p(x)) :\leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{P}(X)(p(x))$$
$$\exists x \subset X(p(x)) :\leftrightarrow \exists x \in \mathfrak{P}(X)(p(x))$$

***Cor.*** **3.3.6.**

$$\forall X (\varnothing \in \mathfrak{P}(X) \land X \in \mathfrak{P}(X))$$

***Cor.*** **3.3.7.**

$$\forall X (\mathfrak{P}(X) \notin X)$$

***Cor.*** **3.3.8.**

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \to \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y))$$

***Cor.*** **3.3.9.**

$$\mathfrak{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

***Cor.* 3.3.10.**

$$\forall x(\mathfrak{P}(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\})$$

***Cor.* 3.3.11.**

$$\forall X\left(\bigcup \mathfrak{P}(X) = X\right)$$

***Def.* 3.3.3.** 被覆

集合 $A$ について、以下を満たす集合 $X$ を $A$ の被覆と呼ぶ。

$$X \subset \mathfrak{P}(A) \land A = \bigcup X$$

## 3.4 集合の置換

***Ax.* 3.4.1.** 置換の公理図式

アリティ 2 の述語記号 $\psi$ をパラメータとする以下の公理図式を考える。

$$\forall x \forall y \forall z(\psi(x, y) \land \psi(x, z) \to y = z) \to \forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \land \psi(x, t)))$$

***Rem.* 3.4.1.** 集合の内包的定義１

公理 3.2.1 より、公理 3.4.1 より主張される集合 $A$ は一意に定まる。公理 3.4.1 に基づく定義方法を、内包的定義と呼び、公理 3.4.1 の前件を満たすアリティ 2 の述語記号 $\psi$ について、以下で表す。

$$A = \{y \mid \exists x \in X(\psi(x, y))\}$$

***Thm.* 3.4.1.** 分出の公理図式

アリティ 1 の述語記号 $\psi$ について、以下が成り立つ。

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \land \psi(t))$$

*Proof.*

アリティ 1 の述語記号 $P$ を考える。排中律より、

$$\forall X(\exists a(a \in X \land P(a)) \lor \forall a \neg(a \in X \land P(a)))$$

$\forall a \neg(a \in X \land P(a))$ のとき、$A = \varnothing$ で示される。

$\exists a(a \in X \land P(a))$ のとき、以下のようなアリティ 2 の述語記号 $\psi$ を考える。

$$\psi(x, y) :\leftrightarrow (P(x) \land y = x) \lor (\neg P(x) \land y = a)$$

公理 3.4.1 より、

$$\exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \land ((P(x) \land y = x) \lor (\neg P(x) \land y = a))))$$

すなわち、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists x((x \in X \wedge P(x) \wedge t = x) \vee (x \in X \wedge \neg P(x) \wedge t = a)))$$

$\exists$ を除去して、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow (t \in X \wedge P(t)) \vee t = a)$$

$t = a \to (a \in X \wedge P(a))$ より、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \wedge P(t))$$

■

***Rem.* 3.4.2.** 集合の内包的定義２

公理 3.2.1 より、定理 3.4.1 より主張される集合 $A$ は一意に定まる。定理 3.4.1 に基づく定義方法も、内包的定義と呼び、以下で表す。

$$A = \{t \mid t \in X \wedge \psi(t)\}$$

簡単のために、以下でも表す。

$$A = \{t \in X \mid \psi(t)\}$$

***Def.* 3.4.1.** 共通集合

集合系 $X$ について、以下で定める集合を、$X$ の共通集合と呼び、$\bigcap X$ で表す。

$$\bigcap X := \left\{x \mid x \in \bigcup X \wedge \forall Y(Y \in X \to x \in Y)\right\}$$

共通集合 $\bigcap\{x, y\}$ を、簡単のために $x \cap y$ とも表す。

***Rem.* 3.4.3.** 共通集合の定義について

本ノートにおける共通集合の定義は、$\bigcap\varnothing$ の取り扱いにおいて一般的ではないことに注意されたい。

***Cor.* 3.4.2.**

$$\bigcap\varnothing = \varnothing$$

***Cor.* 3.4.3.**

$$\forall x \forall X\left(x \in X \to \bigcap X \subset x\right)$$

***Cor.* 3.4.4.**

$$\forall x \forall y \forall z(x \subset y \to x \cap z \subset y \cap z)$$

***Cor.* 3.4.5.**

$$\forall X \forall Y\left(X \neq \varnothing \wedge X \subset Y \to \bigcap Y \subset \bigcap X\right)$$

***Cor.* 3.4.6.**

$$\forall x\left(\bigcap\{x\} = x\right)$$

***Cor.* 3.4.7.** 吸収法則

$$\forall x \forall y (x \cup (x \cap y) = x)$$
$$\forall x \forall y (x \cap (x \cup y) = x)$$

***Cor.* 3.4.8.** 分配法則

$$\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$$

***Cor.* 3.4.9.**

$$\forall X\left(\bigcap X \subset \bigcup X\right)$$

***Cor.* 3.4.10.**

$$\forall X \forall Y (\mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cap Y))$$

***Def.* 3.4.2.** 分割

集合 $A$ について、以下を満たす $A$ の被覆 $X$ を $A$ の分割と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X (x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$$

明示的に以下で表す。

$$A = \bigsqcup X$$

***Def.* 3.4.3.** 差集合

集合 $X, Y$ について、以下で定める集合を、$X$ と $Y$ の差集合と呼び、$X \setminus Y$ で表す。

$$X \setminus Y \coloneqq \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$$

***Cor.* 3.4.11.**

$$\forall X \forall Y (X \setminus Y \subset X)$$

***Cor.* 3.4.12.**

$$\forall X (X \setminus X = \varnothing)$$
$$\forall X (X \setminus \varnothing = X)$$
$$\forall X (\varnothing \setminus X = \varnothing)$$

***Cor.* 3.4.13.**

$$\forall X \forall Y \forall Z (X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z))$$

***Cor.* 3.4.14.**

$$\forall X \forall Y \forall Z (Y \subset Z \to X \setminus Z \subset X \setminus Y)$$

***Cor.* 3.4.15.**

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \leftrightarrow X \setminus Y = \varnothing)$$

***Thm.* 3.4.16. De Morgan の法則**

集合 $X$ と空でない集合系 $A$ について、以下が成り立つ。

$$X \setminus \bigcup A = \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$
$$X \setminus \bigcap A = \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

*Proof.*

第一の定理を示す。

$$\begin{aligned} x \in X \setminus \bigcup A &\leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcup A \\ &\leftrightarrow x \in X \wedge \forall Y (Y \in A \to x \notin Y) \leftrightarrow x \in X \wedge \forall Y (Y \in A \to x \notin X \setminus Y) \end{aligned}$$

$A \neq \varnothing$ より、

$$\leftrightarrow x \in X \wedge x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \leftrightarrow x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

第二の定理を示す。

$$\begin{aligned}x \in X \setminus \bigcap A \leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcap A \leftrightarrow x \in X \wedge \Big(x \notin \bigcup A \vee \exists Y(Y \in A \wedge x \notin Y)\Big)\\ \leftrightarrow x \in X \setminus \bigcup A \vee \exists Y(Y \in A \wedge x \in X \setminus Y)\\ \leftrightarrow x \in X \setminus \bigcup A \vee x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\\ \leftrightarrow x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \vee x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\\ \leftrightarrow x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\end{aligned}$$

最後から 2 行目への変形には、第一の定理を用いた。 ■

## 3.5 順序対と集合の直積

***Def.* 3.5.1.** 順序対
公理 3.2.3 から、$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ が存在する。このような集合を、順序対と呼び、$(x, y)$ で表す。

***Cor.* 3.5.1.** 順序対の相等

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((x_1, x_2) = (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$$

***Cor.* 3.5.2.** 順序対の順序性

$$\forall x \forall y (x \neq y \to (x, y) \neq (y, x))$$

***Cor.* 3.5.3.** 順序対の取り出し

$$\forall x \forall y \Big(x = \bigcup \bigcap (x, y)\Big)$$

$$\forall x \forall y \Big(y = \bigcup \bigcap (x, y) \wedge \Big(\bigcap (x, y) = \bigcap (x, y)\Big)\Big) \vee \Big(y = \bigcup \Big(\bigcup (x, y) \setminus \bigcap (x, y)\Big) \wedge \Big(\bigcap (x, y) \neq \bigcap (x, y)\Big)\Big)$$

***Lem.* 3.5.4.**

$$\forall X \forall Y \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in Y \to (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)))$$

*Proof.*

$$\begin{gathered}x \in X \wedge y \in Y\\ \{x\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \wedge \{x, y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y)\\ (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y))\end{gathered}$$

■

***Def.* 3.5.2.** 直積集合

集合 $X, Y$ について、以下を満たす集合を $X$ と $Y$ の直積集合と呼び、$X \times Y$ で表す。

$$X \times Y \coloneqq \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \exists y(x \in X \land y \in Y \land z = (x, y))\}$$

***Cor.* 3.5.5.**

$$\forall X(X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing)$$

***Cor.* 3.5.6.**

$$\begin{gathered}\forall X_1, X_2, Y((X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)) \\ \forall X_1, X_2, Y_1, Y_2((X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2)) \\ \forall X_1, X_2, Y((X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y))\end{gathered}$$

## 3.6 無限系譜

***Ax.* 3.6.1.** 無限の公理

$$\exists A(\varnothing \in A \land \forall x(x \in A \to x \cup \{x\} \in A))$$

***Def.* 3.6.1.** 無限系譜

集合 $X$ が無限系譜であるとは、以下を満たすことである。

$$\varnothing \in X \land \forall x(x \in X \to x \cup \{x\} \in X)$$

公理 3.6.1 より無限系譜は存在する。

***Cor.* 3.6.1.**

$$\forall X \forall Y \bigl(X \text{ は無限系譜である} \land Y \text{ は無限系譜である} \to X \cap Y \text{ は無限系譜である}\bigr)$$

***Lem.* 3.6.2.**

以下が成り立つ。

$$\forall A\Bigl(A \neq \varnothing \land \forall X \in A\bigl(X \text{ は無限系譜である}\bigr) \to \bigcap A \text{ は無限系譜である}\Bigr)$$

*Proof.*

空でない $A$ を考える。

$\forall X \in A(\varnothing \in X)$ であるので、$\varnothing \in \bigcap A$ である。

$\forall x \in \bigcap A$ について、$\forall X \in A(x \in X)$ であり、無限系譜であることから $x \cup \{x\} \in X$ である。

ゆえに、$x \cup \{x\} \in \bigcap A$ である。
よって、$\bigcap A$ は無限系譜である。 ■

***Lem.* 3.6.3.**
無限系譜 $X$ について、以下で定める集合は無限系譜である。

$$\bigcap \left\{ Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である} \right\}$$

*Proof.*
$A := \left\{ Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である} \right\}$ とすると、$X \in A$ より、$A \neq \varnothing$ である。
補題 3.6.2 より成り立つ。 ■

***Lem.* 3.6.4. 最小無限系譜の一意性**
補題 3.6.3 で定める集合は、無限系譜 $X$ の取り方によらずに一意に定まる。
*Proof.*
$\omega(X) := \bigcap \left\{ Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である} \right\}$ とする。
$X_1, X_2$ の 2 つの無限系譜を考える。
補題 3.6.2 より $X_1 \cap X_2$ も無限系譜であり、定義より $\omega(X_2) \subset X_1 \cap X_2 \subset X_1$ である。
定義より、$\omega(X_1) \subset \omega(X_2)$ である。
同様に $\omega(X_1) \supset \omega(X_2)$ であるため、示される。 ■

# 4 写像

## 4.1 関係

***Def.* 4.1.1. 関係**
集合 $X, Y$ と、集合系 $G \subset X \times Y$ について、順序対 $\mathfrak{R} := ((X, Y), G)$ を関係と呼ぶ。

記号の濫用であるが、$\mathfrak{R}$ を以下で定めるアリティ 2 の述語としても扱う。

$$\mathfrak{R}(x, y) :\leftrightarrow (x, y) \in G$$

***Def.* 4.1.2. 左一意的**
関係 $\mathfrak{R}$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は左一意的であると言う。

$$\forall w, x (\exists y \in Y (\mathfrak{R}(w, y) \land \mathfrak{R}(x, y)) \to w = x)$$

***Def.* 4.1.3. 右一意的**
関係 $\mathfrak{R}$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は右一意的であると言う

$$\forall y, z (\exists x \in X (\mathfrak{R}(x, y) \land \mathfrak{R}(x, z)) \to y = z)$$

***Def.* 4.1.4. 一対一**

関係 $\mathfrak{R}$ が左一意的かつ右一意的であるとき、$\mathfrak{R}$ は一対一であると言う。

***Def.* 4.1.5. 左全域的**

関係 $\mathfrak{R} = ((X, Y), G)$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は左全域的であると言う。

$$\forall x \in X \exists y \in Y (\mathfrak{R}(x, y))$$

***Def.* 4.1.6. 右全域的**

関係 $\mathfrak{R} = ((X, Y), G)$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は右全域的であると言う。

$$\forall y \in Y \exists x \in X (\mathfrak{R}(x, y))$$

## 4.2 写像

***Def.* 4.2.1. 写像**

右一意的かつ左全域的な関係 $f = ((X, Y), G)$ を写像と呼ぶ。

記号の濫用であるが、$f()$ を以下で定める $x \in X$ についての略記としても扱う。

$$f(x) \coloneqq \bigcup \{y \in Y \mid \mathfrak{R}(x, y)\}$$

$f(x)$ を $x$ での $f$ の値と呼ぶ。

***Rem.* 4.2.1. 関数クラスによる写像の定義**

集合 $X, Y$ と、関数クラス $F$ について、順序対 $((X, Y), \{(x, F(x)) \mid x \in X\})$ は写像である。
このとき、記号の濫用であるが、この写像を $F$ で表す。

***Rem.* 4.2.2. 集合の内包的定義３**

写像 $f \colon X \to Y$ について、以下を満たすアリティ 2 の述語記号 $\psi(x, y)$ を考える。

$$\forall x, y (\psi(x, y) :\leftrightarrow y = f(x))$$

$f$ が写像であることから公理 3.4.1 の主張する集合 $A$ が存在する。
$A$ は、より簡潔に以下でも表す。

$$A = \{f(x) \mid x \in X\}$$

***Def.* 4.2.2. 恒等写像**

集合 $X$ について、以下で定める集合系 $\Delta$ を考える。

$$\Delta \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\}$$

写像 $((X, X), \Delta)$ を恒等写像と呼び、$\mathrm{id}_X$ で表す。

***Cor.*** **4.2.1.**
集合 $X, Y$ について、以下が成り立つ。
$$X = Y \leftrightarrow \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y$$

***Def.*** **4.2.3. 合成写像**
写像 $f = ((X, Y), G_f), g = ((Y, Z), G_g)$ について、以下で定める集合系 $G$ を考える。
$$G \coloneqq \{(x, z) \mid \exists y \in Y (y = f(x) \land z = g(y))\}$$
関係 $((X, Z), G)$ は写像であり、これを $f$ と $g$ の合成写像、または単に合成と呼び、$g \circ f$ で表す。

***Cor.*** **4.2.2. 写像の合成の結合法則**
写像 $f = ((X, Y), G_f), g = ((Y, Z), G_g), h = ((Z, W), G_h)$ について、以下が成り立つ。
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

***Rem.*** **4.2.3. 写像の相等**
写像の相等は、集合の相等により定義される。
これは次のように言い換えることができる。写像 $f, g$ について、$f = g$ とは、以下を満たすことである。
$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \land \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g) \land \forall x \in \mathrm{dom}(f)(f(x) = g(x))$$

***Def.*** **4.2.4. 包含写像**
集合 $X$ と、その部分 $A$ について、以下で定める関係 $\iota_{A,X}$ は写像である。
$$\iota_{A,X} \coloneqq ((A, X), \{(x, x) \mid x \in A\})$$
この $\iota_{A,X}$ を部分写像と呼ぶ。

***Def.*** **4.2.5. 制限写像**
写像 $f = ((X, Y), G)$ と、$X$ の部分 $A$ について、以下で定める写像 $f|_A$ を、$f$ の $A$ への制限写像、または単に制限と呼ぶ。
$$f|_A \coloneqq f \circ \iota_{A,X}$$

## 4.3 集合と写像の圏

***Rem.*** **4.3.1. 写像は射**
写像 $f = ((X, Y), G)$ を考える。$\mathrm{dom}(f)$ を $\mathrm{id}_X$、$\mathrm{cod}(f)$ を $\mathrm{id}_Y$ として、合成を定義 4.2.3 で定義すると、写像は射の公理をみたす。
ここで記号の濫用であるが、$\mathrm{id}_X$ をして $X$ を表し、$X$ をして $\mathrm{id}_X$ を表す。

***Def.*** **4.3.1. 集合と写像の圏**
写像を射とみなすと、写像であることは、圏となる。この圏を、集合と写像の圏と呼び、**Set** と表す。

***Cor.*** **4.3.1.**
集合 $X, Y$ について、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ は以下を満たす。

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) \leftrightarrow f \in \big\{((X, Y), G) \mid G \subset X \times Y \land G\text{ は右一意かつ左全域}\big\}$$

***Def.*** **4.3.2.** 写像の全体
記号の濫用であるが、$X$ から $Y$ への写像全体がなす集合を、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ で表す。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) \coloneqq \big\{((X, Y), G) \mid G \subset X \times Y \land G\text{ は右一意かつ左全域}\big\}$$

***Cor.*** **4.3.2.**
以下が成り立つ。

$$\forall Y(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\varnothing, Y) = \{((\varnothing, Y), \varnothing)\})$$
$$\forall X(X \neq \varnothing \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \varnothing) = \varnothing)$$

***Cor.*** **4.3.3.**
単集合は $\mathbf{Set}$ の終対象である。

***Cor.*** **4.3.4.**
空集合は $\mathbf{Set}$ の始対象である。

***Def.*** **4.3.3.** 空写像
空集合は $\mathbf{Set}$ の始対象であるので、終域 $Y$ について、始域が空集合である写像は一意に定まる。
この写像を $Y$ の空写像と呼ぶ。

***Cor.*** **4.3.5.**
写像 $f, g \colon X \to Y$ を考える。
以下を満たす $\mathrm{Eq}(f, g), u$ は、$f, g$ の等価子である。

$$\mathrm{Eq}(f, g) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
$$u(\mathrm{dom}(f)) \coloneqq \iota_{\mathrm{Eq}(f,g),\mathrm{dom}(f)}$$

***Def.*** **4.3.4.** 小さい圏
圏 $\boldsymbol{C}$ について、集合 $C$ が存在して以下を満たすとき、$\boldsymbol{C}$ を小さいと呼ぶ。

$$\forall f \in \boldsymbol{C}(f \in \mathbf{Set})$$
$$\forall c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(c \in C)$$

***Cor.*** **4.3.6.**
小さい圏 $\boldsymbol{J}$ について、$\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ は小さい。

***Cor.* 4.3.7.**

小さい離散圏 $\boldsymbol{J}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\mathbf{Set}$ への関手 $X$ を考える。

このとき、以下で定める $\prod X, \pi$ は $X$ の積である。

$$\prod X \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}} \left( \boldsymbol{J}, \bigcup \{X(j) \mid j \in \boldsymbol{J}\} \right) \mid \forall j \in \boldsymbol{J}(f(j) \in X(j)) \right\}$$
$$\pi(j)(f) \coloneqq f(j)$$

***Cor.* 4.3.8.**

小さい離散圏 $\boldsymbol{J}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\mathbf{Set}$ への関手 $X$ を考える。

このとき、以下で定める $x, u$ は $X$ の和である。

$$x \coloneqq \bigcup \{\{(j, x) \mid x \in X(j)\} \mid j \in \boldsymbol{J}\}$$
$$u(j)(x) \coloneqq (j, x)$$

## 4.4 選択

***Thm.* 4.4.1.** 選択公理が与える写像

集合 $X, Y$ とアリティ 2 の述語記号 $\psi$ について、$\forall x \in X \exists y \in Y(\psi(x, y))$ が成り立つとする。

このとき、以下を満たす写像 $f \colon X \to Y$ が存在する。

$$\forall x \in X \forall y \in Y(f(x) = y \to \psi(x, y))$$

*Proof.*

$X = \varnothing$ のとき、空写像が存在する。

$X \neq \varnothing$ のときを考える。以下の集合 $Z$ を考える。

$$Z \coloneqq \{\{(x, y) \mid y \in Y \land \psi(x, y)\} \mid x \in X\}$$

$Z$ について公理 3.2.5 の主張する集合 $A$ が存在する。

関係 $((X, Y), A)$ は、仮定より $X$ について左全域的で、$A$ の定義より右一意的である。 ■

***Thm.* 4.4.2.** 選択関数の存在

任意の集合 $X$ について、写像 $f \colon X \setminus \{\varnothing\} \to \bigcup X$ が存在して、以下が成り立つ。

$$\forall x \in X \setminus \{\varnothing\}(f(x) \in x)$$

*Proof.*

$\forall x \in X \setminus \{\varnothing\}$ について、$\exists y(y \in x)$ である。この $y$ は、$y \in x$ より、$y \in \bigcup X$ である。

ゆえに、定理 4.4.1 より存在する。 ■

***Thm.* 4.4.3.** 非空からなる積は非空

空でない集合 $J$ から $\mathbf{Set}$ への関手 $X$ について、以下が成り立つ。

$$\forall j \in J(X(j) \neq \varnothing) \to \prod X \neq \varnothing$$

*Proof.*

$Z \coloneqq \{X(j) \mid j \in J\}$ について、定義より $Z \neq \varnothing \land \varnothing \notin Z$ である。

定理 4.4.2 より、写像 $f\colon Z \to \bigcup Z$ が存在して、$\forall z \in Z(f(z) \in z)$ である。

写像 $g\colon J \to \bigcup Z$ を $g(j) \coloneqq f(X(j))$ で定義すると、$\forall j \in J(f(j) \in X(j))$ であるので、$f \in \prod X$ である。

ゆえに、$\prod X \neq \varnothing$ である。 ■

## 4.5 像と原像

***Def.* 4.5.1.** 像

写像 $f\colon X \to Y$ と、$X$ の部分集合 $A$ について、以下で定める集合を $A$ の $f$ による像と呼び、$f(A)$ で表す。

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$$

また、$f(X)$ を $\mathrm{Im}(f)$ でも表す。

***Thm.* 4.5.1.** 像の性質

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2 \subset X(A_1 \subset A_2 \to f(A_1) \subset f(A_2))$$
$$\forall B \subset \mathfrak{P}(X)\Big(f\Big(\bigcup B\Big) = \bigcup \{f(A) \mid A \in B\}\Big)$$
$$\forall B \subset \mathfrak{P}(X)\Big(f\Big(\bigcap B\Big) \subset \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}\Big)$$
$$\forall A_1, A_2 \subset X(f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2))$$

*Proof.*

第一式について、$y \in f(A_1)$ のとき、$\exists x \in A_1(y = f(x))$、$\exists x \in A_2(y = f(x))$、ゆえに $y \in f(A_2)$

第二式について、

$$y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\}$$
$$\exists A \in B(y \in f(A))$$
$$\exists A \in B \exists x \in A(y = f(x))$$
$$\exists x \in \bigcup B(y = f(x))$$
$$y \in f\Big(\bigcup B\Big)$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$
\begin{gathered}
y \in f\Bigl(\bigcap B\Bigr) \\
\exists x\Bigl(x \in \bigcap B \land y = f(x)\Bigr) \\
\exists x\Bigl(x \in \bigcup B \land \forall A(A \in B \to x \in A) \land y = f(x)\Bigr) \\
\exists x\Bigl(x \in \bigcup B \land y = f(x)\Bigr) \land \exists x(\forall A(A \in B \to x \in A) \land y = f(x)) \\
y \in f\Bigl(\bigcup B\Bigr) \land \forall A(A \in B \to y \in f(A)) \\
y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \land \forall A(A \in B \to y \in f(A)) \\
y \in \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}
\end{gathered}
$$

第四式について、

$$
\begin{gathered}
y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \\
\exists x(y = f(x) \land x \in A_1) \land \forall x(y = f(x) \to x \notin A_2) \\
\exists x(y = f(x) \land x \in A_1 \setminus A_2) \\
y \in f(A_1 \setminus A_2)
\end{gathered}
$$

■

***Def.* 4.5.2. 原像**
写像 $f\colon X \to Y$ と集合 $A$ について、以下で定める集合を、集合 $A$ の原像と呼び、$f^{-1}(A)$ で表す。

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

***Cor.* 4.5.2. 像と原像**
写像 $f\colon X \to Y$ について、以下が成り立つ。

$$
\begin{gathered}
\forall A \subset X\bigl(f^{-1}(f(A)) \supset A\bigr) \\
\forall B\bigl(f\bigl(f^{-1}(B)\bigr) \subset B\bigr)
\end{gathered}
$$

***Thm.* 4.5.3. 原像の性質**
写像 $f$ について、以下が成り立つ。

$$
\begin{gathered}
\forall A_1, A_2\bigl(A_1 \subset A_2 \to f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2)\bigr) \\
\forall B\Bigl(f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr) = \bigcup \bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr) \\
\forall B\Bigl(f^{-1}\Bigl(\bigcap B\Bigr) = \bigcap \bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr) \\
\forall A_1, A_2\bigl(f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \setminus A_2)\bigr)
\end{gathered}
$$

*Proof.*
第一式について、$x \in f^{-1}(A_1)$ のとき、$f(x) \in A_1 \subset A_2$ ゆえに $x \in f^{-1}(A_2)$

第二式について、

$$
\begin{gathered}
x \in \bigcup \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in B \right\} \\
\exists A \in B\bigl(x \in f^{-1}(A)\bigr) \\
\exists A \in B(f(x) \in A) \\
f(x) \in \bigcup B \\
x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr)
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$
\begin{gathered}
x \in f^{-1}\Bigl(\bigcap B\Bigr) \\
f(x) \in \bigcap B \\
f(x) \in \bigcup B \land \forall A(A \in B \to f(x) \in A) \\
x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr) \land \forall A\bigl(A \in B \to x \in f^{-1}(A)\bigr) \\
x \in \bigcup \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in B \right\} \land \forall A\bigl(A \in B \to x \in f^{-1}(A)\bigr) \\
x \in \bigcap \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in B \right\}
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。

第四式について、

$$
\begin{gathered}
x \in f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) \\
f(x) \in A_1 \land f(x) \notin A_2 \\
f(x) \in A_1 \setminus A_2 \\
x \in f^{-1}(A_1 \setminus A_2)
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。 ■

## 4.6 単射と全射

***Lem.* 4.6.1. 単射**

写像 $f$ について、以下の 3 つは同値である。

1. $f$ が左簡約可能（$f$ が単射）
2. $f$ が左一意的
3. $f$ が、空写像または左可逆

*Proof.*

1. $\to$ 2. を示す。

$f$ が空写像であるとき、左一意的である。$f$ が空写像でないときを考える。

$x \in \mathrm{dom}(f)$ について、写像 $g_x \colon \{\varnothing\} \to \mathrm{dom}(f), g(\varnothing) \coloneqq x$ を考える。

$f(x) = f(y)$ であるとき、$f \circ g_x = f \circ g_y$ であり、左簡約可能より $g_x = g_y$、すなわち $x = y$ である。

2. $\to$ 3. を示す。左一意的かつ空写像でないならば、左可逆であることを示す。

空でないので $\exists x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ より、以下で定める集合 $G$ が存在する。

$$G \coloneqq \{(y,x) \in \mathrm{cod}(f) \times \mathrm{dom}(f) \mid y = f(x)\} \cup \{(y, x_0) \mid y \in \mathrm{cod}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)\}$$

写像 $g \coloneqq ((\mathrm{cod}(f), \mathrm{dom}(f)), G)$ は、定義より $f$ の左逆写像となる。

3. → 1. を示す。
$f$ が空写像であるときを考える。
$f$ に右から合成可能、すなわち、終域を空集合とする写像は、$g_0 \colon \varnothing \to \varnothing$ のみであるので、左簡約可能である。
$f$ が左可逆であるとき、左可逆ならば左簡約可能であるため、明らか。 ■

***Cor.* 4.6.2.**
包含写像は単射である。

***Lem.* 4.6.3.**
集合 $X, Y$ について、単射 $f \colon X \to Y$ が存在するならば、単射 $g \colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ が存在する。

*Proof.*
$g(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$ で定義する写像は、単射である。 ■

***Lem.* 4.6.4. 全射**
写像 $f$ について、以下の 3 つは同値である。

1. $f$ が右簡約可能（$f$ が全射）
2. $f$ が右全域的
3. $f$ が右可逆

*Proof.*
1. → 2. を示す。
右全域的でないとすると、$\exists y \in Y \forall x \in X (f(x) \neq y)$ である。
$g, h \in \mathrm{Map}(Y, \{\varnothing, \{\varnothing\}\})$ について、$g(y) = \varnothing, h(y) = \{\varnothing\}$ であり、$\forall w \in Y \setminus \{y\}(g(w) = h(w))$ とする。
$g \circ f = h \circ f$ であるが、$g \neq h$ であり、右簡約可能ではない。
対偶法より示される。

2. → 3. を示す。
定理 4.4.1 の与える写像は、右逆写像である。

3. → 1. は、右可逆ならば右簡約可能であるため、明らか。 ■

***Def.* 4.6.1. 全単射**
写像 $f$ が同型射であるとき、$f$ を全単射と呼ぶ。

***Def.* 4.6.2. 逆写像**
写像 $f$ の逆射を逆写像と呼ぶ。

***Lem.* 4.6.5.**
全単射 $f \colon X \to Y$ と $Y$ の部分集合 $A$ について、原像 $f^{-1}(A)$ と逆写像の像 $f^{-1}(A)$ は一致する。

*Proof.*

全単射より、$\forall y \in A \exists x \in X(y = f(x))$ である。定義より明らか。 ■

***Thm.* 4.6.6. Cantor の対角線論法**
単射 $f\colon \mathfrak{P}(A) \to A$ は存在しない。

*Proof.*
存在すると仮定する。
以下の集合 $Y$ を考える。

$$Y := \{f(X) \mid X \subset A \wedge f(X) \notin X\}$$

このとき $Y \subset A$ である。
$f(Y) \notin Y$ とすると、定義より $f(Y) \in Y$。ゆえに矛盾。
$f(Y) \in Y$ とすると、$f$ の単射性より $Y \subset A \wedge f(Y) \notin Y$。ゆえに矛盾。
背理法より示される。 ■

# 5 関係

## 5.1 自己関係

***Def.* 5.1.1.** 自己関係
関係 $((X, Y), G)$ について、$X = Y$ であるとき、$X$ 上の自己関係、または単に $X$ 上の関係と呼ぶ。

***Def.* 5.1.2.** 反射的
集合 $X$ 上の関係 $\mathfrak{R}$ が反射的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x \in X(\mathfrak{R}(x, x))$$

***Def.* 5.1.3.** 対称的
集合 $X$ 上の関係 $\mathfrak{R}$ が対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(\mathfrak{R}(x, y) \to \mathfrak{R}(y, x))$$

***Def.* 5.1.4.** 反対称的
集合 $X$ 上の関係 $\mathfrak{R}$ が反対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(y, x) \to x = y)$$

***Def.* 5.1.5.** 推移的
集合 $X$ 上の関係 $\mathfrak{R}$ が推移的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y, z \in X(\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(y, z) \to \mathfrak{R}(x, z))$$

***Cor.* 5.1.1.**
$\varnothing$ 上の関係は一意に定まり、それは、反射的、対称的、反対称的、推移的である。

***Def.* 5.1.6. 完全**
集合 $X$ 上の関係 $\mathfrak{R}$ が完全であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(\mathfrak{R}(x, y) \vee \mathfrak{R}(y, x))$$

## 5.2 前順序

***Def.* 5.2.1. 前順序**
反射的かつ推移的な自己関係 $\preccurlyeq := ((X, X), G)$ を、前順序と呼ぶ。
前順序であることを明示的に記号 $\preccurlyeq$ で表す。

簡単のため、$\preccurlyeq (x, y)$ を $x \preccurlyeq y$ でも表す。
略記 $\prec, \succcurlyeq, \succ$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} x \prec y &:\leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y \\ x \succcurlyeq y &:\leftrightarrow y \preccurlyeq x \\ x \succ y &:\leftrightarrow y \prec x \end{aligned}$$

組 $(X, \preccurlyeq)$ を、前順序集合、または単に前順序と呼ぶ。

***Rem.* 5.2.1. 前順序の定義**
より簡単に、$x \preccurlyeq y :\leftrightarrow \cdots$ の形式によって述語として前順序を定義できる。

***Cor.* 5.2.1.**
前順序集合 $X$ について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \vee x = y)$$
$$\forall x, y \in X(x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \succ y \vee x = y)$$

***Def.* 5.2.2. 上界**
前順序集合 $X$ について、その部分集合 $A$ を考える。
$A$ が上に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(a \preccurlyeq b)$$

このとき、$b$ を $A$ の上界と呼ぶ。

***Def.* 5.2.3. 下界**
前順序集合 $X$ について、その部分集合 $A$ を考える。
$A$ が下に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(b \preccurlyeq a)$$

このとき、$b$ を $A$ の下界と呼ぶ。

***Def.* 5.2.4.** 有界

前順序集合 $X$ について、その部分集合 $A$ を考える。

$A$ が有界であるとは、$A$ が上に有界かつ下に有界であることである。

***Cor.* 5.2.2.**

空でない前順序集合 $X$ について、$\varnothing$ は有界である。

***Def.* 5.2.5.** 有向集合

前順序集合 $\Lambda$ が以下を満たすとき、$\Lambda$ を有向集合と呼ぶ。

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \big(\{\lambda, \mu\} \text{ は上に有界}\big)$$

***Def.* 5.2.6.** 上方集合

有向集合 $\Lambda$ とその元 $\lambda_0 \in \Lambda$ について、集合 $\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}, \Lambda_{\succ \lambda_0}$ を以下で定める。

$$\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0} \coloneqq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \preccurlyeq \lambda\}$$
$$\Lambda_{\succ \lambda_0} \coloneqq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \prec \lambda\}$$

***Def.* 5.2.7.** 単調

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f \colon X \to Y$ について、以下を満たすとき、$f$ は単調であるという。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq_X y \to f(x) \preccurlyeq_Y f(y))$$

***Def.* 5.2.8.** 狭義単調

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f \colon X \to Y$ について、以下を満たすとき、$f$ は単調であるという。

$$\forall x, y \in X(x \prec_X y \to f(x) \prec_Y f(y))$$

***Cor.* 5.2.3.**

狭義単調な写像は、単調である。

## 5.3 同値関係

***Def.* 5.3.1.** 同値関係

対称的な前順序を、同値関係と呼ぶ。同値関係であることを明示的に記号 $\sim$ で表す。

***Cor.* 5.3.1.**

等号は同値関係である。集合 $X$ 上の同値関係であることを明示的に、$=_X$ で表す。

***Def.* 5.3.2. 同値類**

空でない集合 $X$ 上で定義された同値関係 $\sim$ と、$X$ の要素 $a$ について、以下で定める集合を $a$ の同値類と呼び、$[a]$ で表す。この $a$ を特に代表元と呼ぶ。

$$[a] \coloneqq \{x \in X \mid x \sim a\}$$

***Cor.* 5.3.2.**

空でない集合 $X$ 上で定義された同値関係 $\sim$ について、以下が成り立つ。

$$X = \bigsqcup \{[x] \mid x \in X\}$$

***Def.* 5.3.3. 商集合**

同値関係の定義された空でない集合 $X$ について、以下で定める集合を商集合と呼び、$X/\sim$ で表す。

$$X/\sim \coloneqq \{[x] \mid x \in X\}$$

***Def.* 5.3.4. 商写像**

写像 $[]\colon X \to X/\sim$ を商写像と呼ぶ。

***Cor.* 5.3.3.**

商写像は全射である。

***Thm.* 5.3.4. well-defined な写像**

空でない集合 $X$ 上の同値関係 $\sim_X$、集合 $Y$ 上の同値関係 $\sim_Y$ について、写像 $f\colon X \to Y$ を考える。

$f$ が $\sim_X, \sim_Y$ と両立することは、写像 $h\colon X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ が存在して以下を満たすことと必要十分である。

$$[]_Y \circ f = h \circ []_X$$

さらに、上で定まる写像 $h$ は一意である。

*Proof.*

$[]_X$ は全射より、右逆写像 $r$ が存在する。

まず、必要性を示す。仮定より以下を満たす。

$$\forall x \in X/\sim_X \ \forall z, w \in x([f(z)]_Y = [f(w)]_Y)$$

ゆえに $h \coloneqq []_Y \circ f \circ r$ を考えると、$[]_Y \circ f = h \circ []_X$ を満たす。

十分性を示す。$\forall x, y \in X$ について、$x \sim_X y$ ならば、$[f(x)]_Y = h([x]_X) = h([y]_X) = [f(y)]_Y$ である。よって、$f(x) \sim_Y f(y)$

一意であることを示す。相異なる 2 つが存在すると仮定すると、$h \circ []_X = h' \circ []_X$ である。右から $r$ をかけて、$h = h'$ であり、矛盾する。 ■

***Def.* 5.3.5.** 写像に付随する同値関係

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下で定める $X$ 上の関係 $\sim_f$ は同値関係であり、これを写像 $f$ に付随する同値関係と呼ぶ。

$$x \sim_f y :\leftrightarrow f(x) = f(y)$$

***Cor.* 5.3.5.**

写像 $f\colon X \to Y$ について、$f$ は $\sim_f, =_Y$ と両立する。

***Thm.* 5.3.6.** 標準分解

写像 $f\colon X \to Y$ について、全単射 $\overline{f}\colon X/\sim_f \to \mathrm{Im}(f)$ が存在する。

*Proof.*

定理 5.3.4 より、写像 $\overline{f}\colon X/\sim_f \to Y$ が存在して、$\mathrm{Im}(\overline{f}) = \mathrm{Im}(f)$ である。

単射であることを示す。$\overline{f}([x]) = \overline{f}([y])$ のとき、$f(x) = f(y)$ より、$[x] = [y]$ である。 ■

# 6 順序

## 6.1 半順序

***Def.* 6.1.1.** 半順序

反対称的な前順序を、半順序と呼ぶ。

集合 $P$ 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、順序対 $(P, \preccurlyeq)$ を半順序集合と呼ぶ。または単に $P$ と書き、半順序集合と集合どちらも表すものとする。

***Cor.* 6.1.1.**

集合 $P$ について、$(P, \subset)$ は半順序集合である。また、$(P, \supset)$ も半順序集合である。

***Def.* 6.1.2.** 単調

半順序 $\preccurlyeq$ と両立する写像を単調である、または広義単調であると呼ぶ。

特に、$\prec$ と両立する写像を、狭義単調であると呼ぶ。

***Def.* 6.1.3.** 極大元

半順序集合 $P$ について、以下の元 $b$ を $P$ の極大元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(\neg b \prec a)$$

***Def.* 6.1.4.** 最大元

半順序集合 $P$ について、以下の元 $b$ を $P$ の最大元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(a \preccurlyeq b)$$

***Def.* 6.1.5.** 極小元

半順序集合 $P$ について、以下の元 $b$ を $P$ の極小元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(\neg b \succ a)$$

***Def.* 6.1.6.** 最小元

半順序集合 $P$ について、以下の元 $b$ を $P$ の最小元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(a \succcurlyeq b)$$

***Cor.* 6.1.2.**

半順序集合 $P$ の最大元は、極大元である。

***Cor.* 6.1.3.** 最大元の一意性

半順序集合 $P$ の最大元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。

ここから、半順序集合 $P$ の最大元 $b$ を $\max P \coloneqq b$ と表す。

***Cor.* 6.1.4.**

半順序集合 $P$ の最小元は、極小元である。

***Cor.* 6.1.5.** 最小元の一意性

半順序集合 $P$ の最小元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。

ここから、半順序集合 $P$ の最小元 $b$ を $\min P \coloneqq b$ と表す。

***Def.* 6.1.7.** 上限

半順序集合 $P$ について、その部分集合 $A$ を考える。

$A$ の上界全体の集合に最小元が存在するとき、これを $A$ の上限と呼び、$\sup A$ で表す。

***Def.* 6.1.8.** 下限

半順序集合 $P$ について、その部分集合 $A$ を考える。

$A$ の下界全体の集合に最大元が存在するとき、これを $A$ の下限と呼び、$\inf A$ で表す。

## 6.2 束

***Def.* 6.2.1.** 束

以下を満たす半順序集合 $P$ を束と呼ぶ。

$$\forall x, y \in P \exists z, w \in P(z = \sup\{x, y\} \land w = \inf\{x, y\})$$

***Cor.* 6.2.1.**

束は有向集合である。

***Lem.* 6.2.2.** 分配不等式

束 $P$ について、以下が成り立つ。

$$\sup\{x, \inf\{y, z\}\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$$
$$\inf\{x, \sup\{y, z\}\} \succcurlyeq \sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\}$$

*Proof.*

$x$ は $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界であるので、$x \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

$\inf\{y, z\}$ は、$\{y, z\}$ の下界であり、推移性より $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界である。ゆえに、$\inf\{y, z\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

よって $\inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ は、$\{x, \inf\{y, z\}\}$ の上界である。

したがって第一式が成り立つ。

第二式も同様に成り立つ。 ■

***Def.* 6.2.2.** 全順序

集合 $P$ 上の以下を満たす半順序 $\preccurlyeq$ を全順序と呼ぶ。全順序であることを明示的に記号 $\leq$ で表す。

$$\forall x, y \in P(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$$

集合 $P$ 上の全順序 $\leq$ について、順序対 $(P, \leq)$ を全順序集合と呼ぶ。または単に $P$ と書き、全順序集合と集合どちらも表すものとする。

略記 $<, \geq, >$ を以下のように定める。

$$x < y :\leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$
$$x \geq y :\leftrightarrow y \leq x$$
$$x > y :\leftrightarrow y < x$$

***Cor.* 6.2.3.**

全順序集合 $P$ の極大元は最大元であり、極小元は最小元である。

***Cor.* 6.2.4.**

全順序集合は束である。

***Def.* 6.2.3.** 区間

全順序集合 $P$ と $a, b \in P$ について、以下で定める $P$ の部分集合をそれぞれ、開区間 $]a, b[$、閉区間 $[a, b]$ と呼ぶ。

$$]a, b[ \coloneqq \{x \in P \mid a < x \wedge x < b\}$$
$$[a, b] \coloneqq \{x \in P \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$$

開区間、閉区間をまとめて区間と呼ぶ。

## 6.3 Zorn の補題

***Def.* 6.3.1.** 帰納的

空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ を考える。

$P$ の任意の部分集合 $A$ について、順序対 $(A, \preccurlyeq)$ が全順序集合ならば $A$ が上に有界となるとき、$P$ は帰納的であると言う。

***Lem.*** **6.3.1.**
帰納的な半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、以下の集合系 $\mathcal{M}$、すなわち $P$ の全順序部分集合の全体を考える。

$$\mathcal{M} \coloneqq \{M \subset P \mid \forall x, y \in M (x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)\}$$

このとき、$P$ が極大元を持たないならば、以下を満たす写像 $f \colon \mathcal{M} \to P$ が存在する。

$$\forall M \in \mathcal{M} \forall m \in M (m \prec f(M))$$

*Proof.*
帰納的であることより、$\forall M \in \mathcal{M}$ に対して上界 $u$ が存在する。
今、$u$ は $P$ の極大元ではないので、$\exists v \in P (u \prec v)$ である。$\forall m \in M (m \preccurlyeq u \prec v)$ である。
定理 4.4.1 より存在する。 ■

***Def.*** **6.3.2. タワー**
極大元を持たない半順序集合 $P$ を考える。
補題 6.3.1 で定めた集合系 $\mathcal{M}$ と写像 $f$ を考える。
以下を満たす集合系 $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ を、$P$ のタワーと呼ぶ。

$$\varnothing \in \mathcal{T}$$
$$\forall T \in \mathcal{T} (T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T})$$
$$\forall \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Big( (\mathcal{S}, \subset) \text{ は全順序集合} \to \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T} \Big)$$

***Lem.*** **6.3.2.**
極大元を持たない半順序集合 $P$ について、以下の集合を考える。

$$\mathcal{T}_0 \coloneqq \bigcap \big\{ \mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(P) \mid \mathcal{T} \text{ は } P \text{ のタワー} \big\}$$

このとき、$\mathcal{T}_0$ は $P$ のタワーである。

*Proof.*
$\mathcal{M}$ は $P$ のタワーであるので、$\big\{ \mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(P) \mid \mathcal{T} \text{ は } P \text{ のタワー} \big\} \neq \varnothing$ である。
タワーの定義より、明らか。 ■

***Lem.*** **6.3.3.**
極大元を持たない半順序集合 $P$ を考える。
補題 6.3.1 で定めた $f$ について、以下で定める写像 $g \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を考える。

$$g(M) \coloneqq M \cup \{f(M)\}$$

このとき、補題 6.3.2 で定めた $\mathcal{T}_0$ は、以下を満たす。

$$\forall T \in \mathcal{T}_0 (\forall T' \in \mathcal{T}_0 (T \subset T' \vee T' \subset T) \to \forall T' \in \mathcal{T}_0 (T' \subset T \vee g(T) \subset T'))$$

*Proof.*
前件を満たす $T$ について、以下の集合系を考える。

$$\mathcal{T}_T \coloneqq \{T' \in \mathcal{T}_0 \mid T' \subset T \vee g(T) \subset T'\}$$

定義より、$\mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_0$ である。

今、$\varnothing \subset T$ であるので、$\varnothing \in \mathcal{T}_T$ である。

$T' \in \mathcal{T}_T$ を考える。
$g(T) \subset T'$ であるとき、$g(T) \subset T' \subset g(T')$ より、$g(T') \in \mathcal{T}_T$ である。
$T' \subset T$ であるとき、$g(T') \subset T$ ならば $g(T') \in \mathcal{T}_T$ である。
$g(T') \setminus T \neq \varnothing$ ならば、$g(T') \setminus T = \{f(T')\}$ であるため、$T = T'$ である。ゆえに、$g(T') = g(T) \in \mathcal{T}_T$ である。

$\mathcal{T}_T$ の全順序部分 $\mathcal{S}$ を考える。
$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_0$ より、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_0$ である。
$\forall S \in \mathcal{S}(S \subset T)$ ならば、$\bigcup \mathcal{S} \subset T$ であり、$\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_T$ である。
$\exists S \in \mathcal{S}(g(T) \subset S)$ ならば、$g(T) \subset \bigcup \mathcal{S}$ であり、$\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_T$ である。

ゆえに $\mathcal{T}_T$ は、$P$ のタワーである。
よって、$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_T$ が成り立つので、$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_T$ である。
したがって後件を満たす。 ■

***Lem.* 6.3.4.**
極大元を持たない半順序集合 $P$ を考える。
補題 6.3.2 で定めた $\mathcal{T}_0$ について、$(\mathcal{T}_0, \subset)$ は全順序集合である。

*Proof.*
以下の集合系を考える。
$$\mathcal{T}_1 \coloneqq \{T \in \mathcal{T}_0 \mid \forall T' \in \mathcal{T}_0(T \subset T' \vee T' \subset T)\}$$
定義より、$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$ である。

今、$\varnothing \subset T$ であるので、$\varnothing \in \mathcal{T}_1$ である。

$T \in \mathcal{T}_1$ を考える。
補題 6.3.3 より、$\forall T' \in \mathcal{T}_0(T' \subset T \subset g(T) \vee g(T) \subset T')$ であるため、$g(T) \in \mathcal{T}_1$ である。

$\mathcal{T}_1$ の全順序部分 $\mathcal{S}$ を考える。
$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$ より、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_0$ である。
$\forall T' \in \mathcal{T}_0$ を考える。
$\forall S \in \mathcal{S}(S \subset T')$ ならば、$\bigcup \mathcal{S} \subset T'$ である。$\exists S \in \mathcal{S}(T' \subset S)$ ならば、$T' \subset \bigcup \mathcal{S}$ である。
ゆえに、$T' \subset \bigcup \mathcal{S} \vee \bigcup \mathcal{S} \subset T'$ である。
したがって、$\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_1$ である。

ゆえに $\mathcal{T}_1$ は、$P$ のタワーである。
よって、$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ が成り立つので、$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$ である。 ■

***Thm.* 6.3.5. Zorn の補題**
帰納的な半順序集合には極大元が存在する。

*Proof.*
極大元を持たないと仮定する。
補題 6.3.4 より $(\mathcal{T}_0, \subset)$ は全順序であるため、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_0$ である。
タワーの定義より $g(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \mathcal{T}_0$ であるので、から $f(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \bigcup \mathcal{T}_0$ である。

これは、補題 6.3.2 における $f$ の定義に反する。

背理法より示される。 ■

## 6.4 フィルターとネット

***Def.* 6.4.1.** フィルター

半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ と $P$ の空でない部分集合 $F$ について、以下を満たすとき、$F$ を $P$ のフィルターと呼ぶ。

$$\forall x, y \in F \exists z \in F(z \preccurlyeq x \wedge z \preccurlyeq y)$$
$$\forall x \in F \forall y \in P(x \preccurlyeq y \to y \in F)$$

***Cor.* 6.4.1.**

フィルターは逆順序について有向集合である。

***Def.* 6.4.2.** 細分

半順序集合 $P$ のフィルター $F, G$ に対して、$F \subset G$ であるとき、$G$ は $F$ の細分であると呼ぶ。

***Def.* 6.4.3.** 超フィルター

自身以外の細分を持たないフィルターを超フィルターと呼ぶ。

***Thm.* 6.4.2.** 超フィルターの存在

半順序集合 $P$ のフィルター $F$ について、その細分である超フィルターが存在する。

*Proof.*

$F$ の細分の全体 $\mathcal{F}$ と半順序集合 $(\mathcal{F}, \subset)$ を考える。

$\mathcal{F}$ の空でない全順序部分集合 $A$ について、上界 $\bigcup A \in \mathcal{F}$ が存在する。

$\mathcal{F}$ の全順序部分集合 $\varnothing$ について、$F$ は上界である。

ゆえに、$\mathcal{F}$ は帰納的である。

定理 6.3.5 より極大元が存在する。これは超フィルターである。 ■

***Def.* 6.4.4.** 集合におけるフィルター

集合 $X$ について、半順序集合 $(\mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, \subset)$ のフィルターを、集合 $X$ のフィルターと呼ぶ。

***Cor.* 6.4.3.**

集合 $X$ のフィルター $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$X \in \mathcal{F}$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$$

***Thm.* 6.4.4.** 集合の超フィルター

集合 $X$ のフィルター $\mathcal{F}$ について、以下の 2 つは同値である。

1. $\mathcal{F}$ は超フィルターである
2. $\forall A \subset X(A \in \mathcal{F} \vee X \setminus A \in \mathcal{F})$

*Proof.*

1. $\to$ 2. を示す。

$A \in \mathcal{F}$ のとき明らかであるので、$A \notin \mathcal{F}$ のときを考える。

$\mathcal{S} \coloneqq \{S \subset X \mid A \cup S \in \mathcal{F}\}$ について、定義より $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \land X \setminus A \in \mathcal{S}$ である。

今、$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について、$A \cup (S_1 \cap S_2) = (A \cup S_1) \cap (A \cup S_2) \in \mathcal{F}$ より、$S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ である。

$S \in \mathcal{S} \land T \subset X \land S \subset T$ とすると、$A \cup S \in \mathcal{F} \to A \cup T \in \mathcal{F}$ より $T \in \mathcal{S}$

$A \cup X = X \in \mathcal{F}$ より、$X \in \mathcal{S}$ である。すなわち、$\mathcal{S} \neq \varnothing$

$\varnothing \notin \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S}$ はフィルターでありかつ $\mathcal{F}$ の細分である。

ここで、$\mathcal{F}$ は超フィルターであるので $X \setminus A \in \mathcal{S} = \mathcal{F}$

2. $\to$ 1. を示す。

超フィルターでないとすると、$\mathcal{F}$ の細分 $\mathcal{F}'$ が存在して、$\exists A \in \mathcal{F}'(A \notin \mathcal{F} \land A \in \mathcal{F}')$ である。

仮定より、$X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であり、$\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ よりフィルターの定義に矛盾。背理法より示される。

■

***Def.* 6.4.5. ネット**

有向集合 $\Lambda$ から集合 $X$ への写像を、$X$ 上のネットと呼ぶ。

ネットは、明示的に $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と表す。このとき、$x_\lambda$ は $X$ 上の元で、$\lambda \in \Lambda$ での値を表す。

また誤解のない限り、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で値域を表す。

***Def.* 6.4.6. 部分ネット**

集合 $X$ 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と有向集合 $M$ について、写像 $\varphi\colon M \to \Lambda$ が以下を満たすとき、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分ネットと呼ぶ。

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in M(\mu_1 \preccurlyeq \mu_2 \to \varphi(\mu_1) \preccurlyeq \varphi(\mu_2))$$
$$\forall \lambda \in \Lambda \exists \mu \in M(\lambda \preccurlyeq \varphi(\mu))$$

***Def.* 6.4.7. 普遍**

集合 $X$ 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は普遍であると呼ぶ。

$$\forall A \subset X \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset A \lor (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset X \setminus A\Big)$$

***Thm.* 6.4.5. ネットの定めるフィルター**

集合 $X$ 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、以下で定める集合系 $\mathcal{F}$ は $X$ のフィルターである。

$$\mathcal{F} \coloneqq \Big\{F \subset X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset F\Big)\Big\}$$

*Proof.*

明らかに $\varnothing \notin \mathcal{F} \land X \in \mathcal{F}$ である。

$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ について、定義より $\exists \lambda_1, \lambda_2 \subset \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_1}} \subset F_1 \land (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_2}} \subset F_2\Big)$ である。

$\Lambda$ が有向集合であることから、$\exists \lambda_3 \in \Lambda(\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \land \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ であり、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_3}} \subset F_1 \cap F_2$。

ゆえに $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ である。

$\forall F \in \mathcal{F} \forall G \subset \mathfrak{P}(X)$ について、$F \subset G$ ならば定義より明らかに $G \in \mathcal{F}$ ■

***Lem.* 6.4.6.**

集合 $X$ 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と定理 6.4.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ を考える。

このとき、$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ について、以下が成り立つ。

$$\forall F \in \mathcal{F}' \forall \lambda_0 \in \Lambda \exists \lambda \in \Lambda (\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \land x_\lambda \in F)$$

*Proof.*

$\exists F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda \in \Lambda (\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \to x_\lambda \notin F)$ とする。

今、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であるので、$\varnothing = F \cap (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \in \mathcal{F}'$ より、フィルターの定義に矛盾。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 6.4.7. フィルターの定める部分ネット**

集合 $X$ 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と、定理 6.4.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ について考える。

$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ に対して、ある部分ネット $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M}$ が存在して、定理 6.4.5 から定まるその部分ネットのフィルターは $\mathcal{F}'$ の細分となる。

*Proof.*

$M \coloneqq \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F}' \mid x_\lambda \in F\}$ を考える。

$M$ 上の前順序 $\forall (\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M((\lambda_1, F_1) \preccurlyeq (\lambda_2, F_2) :\leftrightarrow \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \land F_1 \supset F_2)$ を考える。

$(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M$ とする。

$\mathcal{F}'$ はフィルターより $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$

$\Lambda$ は有向集合であるので、$\exists \lambda_3 \in \Lambda (\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \land \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ である。

補題 6.4.6 より $\exists \lambda_4 \in \Lambda (\lambda_3 \preccurlyeq \lambda_4 \land x_{\lambda_4} \in F_1 \cap F_2)$

$(\lambda_4, F_1 \cap F_2)$ は、$\{(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)\}$ の上界であるので、$M$ は有向集合である。

ここで、写像 $\varphi \colon M \to \Lambda, \varphi(\lambda, F) \coloneqq \lambda$ を定める。

補題 6.4.6 より $\forall \lambda \in \Lambda \exists F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_1 \in \Lambda (\lambda \preccurlyeq \lambda_1 = \varphi(\lambda_1, F) \land (\lambda_1, F) \in M)$ である。

したがって、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M}$ は部分ネットである。

今、補題 6.4.6 より $\forall F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_0 \in \Lambda ((\lambda_0, F) \in M)$

$\forall (\lambda', F') \in M$ について、$(\lambda_0, F) \preccurlyeq (\lambda', F')$ ならば、$x_{\lambda'} \in F' \subset F$ となる。

よって、$F \in \left\{ F \subset X \mid \exists \mu_0 \in M \left( \left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M_{\succcurlyeq \mu_0}} \subset F \right) \right\}$ ■

***Thm.* 6.4.8. 普遍部分ネットの存在**

任意のネットは、普遍な部分ネットを持つ。

*Proof.*

ネットに対して定理 6.4.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ が存在する。

定理 6.4.2 より $\mathcal{F}$ の細分である超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する。

定理 6.4.7 より、定理 6.4.5 の定めるフィルターが $\mathcal{U}$ に一致する部分ネットが存在する。

定理 6.4.4 より、この部分ネットは普遍である。 ■