さんすうのーと

わたし

2026 年 1 月 12 日

目次

まえがき

さんすうのーとです。
私ではない誰かのアイデアを多分に含みます。
引用・注釈はありません。内容が正しいことを保証しません。
間違いや美しくない部分があれば教えてください。私が喜びます。

（追記）いくつかの証明を考察してくれた O 君に感謝を。

1　記号論理学

***Rem.* 1.0.1.** 古典論理

本ノートでは、古典論理のみを扱う。

1.1　命題

***Def.* 1.1.1.** 命題

真偽が確定している言明を、命題と呼ぶ。

***Def.* 1.1.2.** 解釈

各命題のそれぞれに真偽を対応させる対応関係を、解釈と呼ぶ。

***Def.* 1.1.3.** 矛盾

あらゆる解釈において偽を与える命題を、矛盾と呼び、$\perp$ で表す。

1.2　命題結合子と推論規則

***Def.* 1.2.1.** 推論

命題 ϕ, ψ について、ϕ から ψ が推論されることを、$\phi \vdash \psi$ で表す。
このとき、ϕ を前提、ψ を帰結と呼ぶ。

***Rem.* 1.2.1.** 命題論理の推論体系

ここでは推論を行う上で許される規則として、後述する公理 1.2.1、公理 1.2.2、公理 1.2.3、公理 1.2.4、公理 1.2.5、公理 1.2.6、公理 1.2.7 を与える。

***Rem.* 1.2.2.** 命題の結合順序

1 つまたは 2 つの命題から新たな命題を作り出す記号は、命題結合子と呼ばれる。
複数の命題結合子がある場合には結合される順序により与えられる命題が変わるため、厳密さのために () によって結合順序を定める。

***Ax.* 1.2.1.** 同一律

命題 ϕ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \phi$$

***Ax.* 1.2.2.** カット規則

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \psi \text{ と } \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vdash \chi$$

***Def.* 1.2.2.** 連言

命題 ϕ, ψ について、$\phi \wedge \psi$ は命題である。「ϕ かつ ψ」と呼ぶ。

***Ax.* 1.2.3.** 連言の導入則

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$\chi \vdash \phi \text{ と } \chi \vdash \psi \text{ から、 } \chi \vdash \phi \wedge \psi$$

***Ax.* 1.2.4.** 連言の除去則

命題 ϕ, ψ について、以下の 2 つを定める。

$$\phi \wedge \psi \vdash \phi$$
$$\phi \wedge \psi \vdash \psi$$

***Def.* 1.2.3.** 含意

命題 ϕ, ψ について、$\phi \to \psi$ は命題である。「ϕ ならば ψ」と呼ぶ。

***Ax.* 1.2.5.** 演繹定理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$\phi \wedge \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vdash \psi \to \chi$$

***Ax.* 1.2.6. Modus Ponens**

命題 ϕ, ψ について、以下を定める。

$$\phi \wedge (\phi \to \psi) \vdash \psi$$

***Ax.* 1.2.7.** 二重否定の除去

命題 ϕ について、以下を定める。

$$(\phi \to \bot) \to \bot \vdash \phi$$

1.3 いくつかの重要な定理

***Thm.* 1.3.1.** 連言の交換

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$\phi \wedge \psi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、$\phi \wedge \psi \vdash \phi$

1、2 行目と公理 1.2.3 より、$\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$ ■

***Thm.* 1.3.2. 連言の結合**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$$
$$\phi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\phi \wedge \psi) \wedge \chi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi \wedge \psi$

公理 1.2.4 より、$\phi \wedge \psi \vdash \phi$

公理 1.2.4 より、$\phi \wedge \psi \vdash \psi$

1、2 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi$

1、3 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \chi$

5、6 行目と公理 1.2.3 より、$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \psi \wedge \chi$ である。

4、7 行目と公理 1.2.3 より、$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ である。

逆も同様。 ■

***Thm.* 1.3.3. 連言の冪等**

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \wedge \phi$$

Proof.

公理 1.2.1 より $\phi \vdash \phi$

1 行目と公理 1.2.3 より成り立つ。 ■

***Thm.* 1.3.4. 仮言三段論法**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vdash \phi \to \chi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \phi$

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)$

公理 1.2.4 より、$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vdash \phi \to \psi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \phi \to \psi$

1、4 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \phi \wedge (\phi \to \psi)$

公理 1.2.6 より、$\phi \wedge (\phi \to \psi) \vdash \psi$

5、6 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vdash \psi \to \chi$

2、8 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \psi \to \chi$

7、9 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \psi \wedge (\psi \to \chi)$

公理 1.2.6 より、$\psi \wedge (\psi \to \chi) \vdash \chi$

10、11 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \wedge \phi \vdash \chi$

公理 1.2.5 より、$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vdash \phi \to \chi$ ■

***Thm.* 1.3.5.** 逆演繹定理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \psi \to \chi \text{ から、 } \phi \land \psi \vdash \chi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \phi$

1 行目、所与の推論と公理 1.2.2 より、$\phi \land \psi \vdash \psi \to \chi$

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \psi$

2、3 行目と公理 1.2.3 より、$\phi \land \psi \vdash \psi \land (\psi \to \chi)$

公理 1.2.6 より、$\psi \land (\psi \to \chi) \vdash \chi$

4、5 行目と公理 1.2.2 より、$\phi \land \psi \vdash \chi$ ■

***Thm.* 1.3.6. Łukasiewicz の第一公理**

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \psi \to \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$\phi \land \psi \vdash \phi$

1 行目と公理 1.2.5 より、$\phi \vdash \psi \to \phi$ ■

***Thm.* 1.3.7.** 無矛盾律

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \land (\phi \to \bot) \vdash \bot$$

Proof.

公理 1.2.6 より成り立つ。 ■

***Thm.* 1.3.8.** 不条理則

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\bot \vdash \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$\bot \land (\phi \to \bot) \vdash \bot$

1 行目と公理 1.2.5 より、$\bot \vdash (\phi \to \bot) \to \bot$

公理 1.2.7 より、$(\phi \to \bot) \to \bot \vdash \phi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、$\bot \vdash \phi$ ■

***Thm.* 1.3.9. Peirce 則**

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \to \psi) \to \phi \vdash \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \land (\phi \to \bot) \vdash \phi \to \bot$

定理 1.3.7 より、$(\phi \to \bot) \wedge \phi \vdash \bot$
定理 1.3.8 より、$\bot \vdash \psi$
2、3 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \to \bot) \wedge \phi \vdash \psi$
4 行目と公理 1.2.5 より、$\phi \to \bot \vdash \phi \to \psi$
1、5 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \wedge (\phi \to \bot) \vdash \phi \to \psi$
公理 1.2.4 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \wedge (\phi \to \bot) \vdash (\phi \to \psi) \to \phi$
6、7 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \wedge (\phi \to \bot) \vdash (\phi \to \psi) \wedge ((\phi \to \psi) \to \phi)$
公理 1.2.6 より、$(\phi \to \psi) \wedge ((\phi \to \psi) \to \phi) \vdash \phi$
8、9 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \wedge (\phi \to \bot) \vdash \phi$
1、10 行目と公理 1.2.3 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \wedge (\phi \to \bot) \vdash \phi \wedge (\phi \to \bot)$
2、11 行目と公理 1.2.2 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \wedge (\phi \to \bot) \vdash \bot$
12 行目と公理 1.2.5 より、$((\phi \to \psi) \to \phi) \vdash (\phi \to \bot) \to \bot$
公理 1.2.7 より、$(\phi \to \bot) \to \bot \vdash \phi$
13、14 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \to \psi) \to \phi \vdash \phi$ ■

***Thm.* 1.3.10. 背理法**
命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \wedge (\psi \to \bot) \vdash \bot \text{ から、 } \phi \vdash \psi$$

Proof.
所与の推論と公理 1.2.5 より、$\phi \vdash (\psi \to \bot) \to \bot$
公理 1.2.7 より、$(\psi \to \bot) \to \bot \vdash \psi$
1、2 行目と公理 1.2.2 より、$\phi \vdash \psi$ ■

***Thm.* 1.3.11. 対偶法**
命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\chi \wedge (\psi \to \bot) \vdash \phi \to \bot \text{ から、 } \chi \wedge \phi \vdash \psi$$

Proof.
定理 1.5.6 から、$(\phi \wedge \chi) \wedge (\psi \to \bot) \vdash \phi \wedge (\chi \wedge (\psi \to \bot))$
所与の推論と定理 1.3.5 から、$\phi \wedge (\chi \wedge (\psi \to \bot)) \vdash \bot$
1, 2 行目と公理 1.2.2 より、$(\phi \wedge \chi) \wedge (\psi \to \bot) \vdash \bot$
3 行目と定理 1.3.10 より、$\phi \wedge \chi \vdash \psi$
定理 1.3.1 より、$\chi \wedge \phi \vdash \phi \wedge \chi$
4、5 行目と公理 1.2.2 より、$\chi \wedge \phi \vdash \psi$ ■

1.4 同値

Rem. **1.4.1.** 命題の定義記号

定義記号 $:\leftrightarrow$ を導入する。

これは左辺を用いて表現された命題は、議論において全てその左辺と一致する部分を右辺に置き換えて理解するという意味である。

以降に定義する述語の定義にも同様に用いる。

Def. **1.4.1.** 同値

新たな命題結合子 $\leftrightarrow$ を定める。

命題 ϕ, ψ について、命題 $\phi \leftrightarrow \psi$ を以下で定める。

$$\phi \leftrightarrow \psi :\leftrightarrow (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$$

「ϕ と ψ は必要十分」と呼ぶ。

Lem. **1.4.1.** 連言における命題の代入原理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \land \chi) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \psi \land \chi$$

Proof.

明らかか。 ■

Lem. **1.4.2.** 含意における命題の代入原理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \to \chi) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \psi \to \chi$$
$$(\chi \to \phi) \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \chi \to \psi$$

Proof.

定理 1.3.4 より明らか。 ■

Lem. **1.4.3.** 否定における命題の代入原理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\neg\phi \land (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \neg\psi$$

Proof.

$\neg\phi :\leftrightarrow \phi \to \bot$ であるので、補題 1.4.2 より成り立つ。 ■

1.5　いくつかの命題結合子と重要な定理

***Def.* 1.5.1.** 定理

新たな命題 $\top$ を以下で定める。

$$\top :\leftrightarrow \bot \to \bot$$

***Rem.* 1.5.1.** 定理からの帰結

命題 ϕ について、簡単のために $\top \vdash \phi$ を $\vdash \phi$ で表す。

***Def.* 1.5.2.** 左含意

新たな命題結合子 $\leftarrow$ を定める。

命題 ϕ, ψ について、命題 $\phi \leftarrow \psi$ を以下で定める。

$$\phi \leftarrow \psi :\leftrightarrow \psi \to \phi$$

***Def.* 1.5.3.** 否定

新たな命題結合子 $\neg$ を定める。

命題 ϕ について、命題 $\neg\phi$ を以下で定める。

$$\neg\phi :\leftrightarrow \phi \to \bot$$

***Def.* 1.5.4.** 選言

新たな命題結合子 $\vee$ を定める。

命題 ϕ, ψ について、命題 $\phi \vee \psi$ を以下で定める。

$$\phi \vee \psi :\leftrightarrow \neg\phi \to \psi$$

***Rem.* 1.5.2.** 命題結合子の優先順序

結合の順序は以下で定めるものとする。

1. 否定 $\neg$
2. 連言 $\wedge$
3. 選言 $\vee$
4. 含意 $\to$
5. 左含意 $\leftarrow$
6. 同値 $\leftrightarrow$

ただし () がある場合は、その中を先に結合する。

***Thm.* 1.5.1.** 定理は全てに導かれる

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \top$$

Proof.

明らか。 ■

Thm. 1.5.2. 否定の導入則

命題 ϕ, χ について、以下が成り立つ。

$$\chi \land \phi \vdash \bot \text{ から、 } \chi \vdash \neg\phi$$

Proof.

公理 1.2.5 より明らか。 ■

Thm. 1.5.3. 選言の導入則

命題 ϕ, ψ について、以下の 2 つが成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \lor \psi$$
$$\psi \vdash \phi \lor \psi$$

Proof.

第一式を示す。

定理 1.3.7 と定理 1.3.8 より、$\phi \land \neg\phi \vdash \psi$

公理 1.2.5 より成り立つ。

第二式は、定理 1.3.6 より明らか。 ■

Thm. 1.5.4. 選言の除去則

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \chi \text{ と } \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \lor \psi \vdash \chi$$

Proof.

$\phi \vdash \chi$ と $\chi \vdash \neg\neg\chi$ から $\phi \vdash \neg\neg\chi$ である。

ゆえに $\neg\chi \land \phi \vdash \bot$ であるので、$\neg\chi \vdash \neg\phi$ である。

$(\phi \lor \psi) \land \neg\chi \vdash \psi$ である。

$\psi \vdash \chi$ から、$(\phi \lor \psi) \land \neg\chi \vdash \bot$ であるので、$\phi \lor \psi \vdash \neg\neg\chi$ である。

二重否定を除去して成り立つ。 ■

Thm. 1.5.5. 選言の交換

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \lor \psi \vdash \psi \lor \phi$$

Proof.

明らか。 ■

***Thm.* 1.5.6. 連言の結合**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \lor \psi) \lor \chi \vdash \phi \lor (\psi \lor \chi)$$
$$\phi \lor (\psi \lor \chi) \vdash (\phi \lor \psi) \lor \chi$$

Proof.

略。 ■

***Thm.* 1.5.7. 選言の冪等**

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \lor \phi$$

Proof.

定理 1.5.3 より明らか。 ■

***Thm.* 1.5.8. 選言三段論法**

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \lor \psi) \land \neg\phi \vdash \psi$$

Proof.

選言の定義より明らか。 ■

***Thm.* 1.5.9. 吸収律**

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \lor (\phi \land \psi) \vdash \phi$$
$$\phi \vdash \phi \land (\phi \lor \psi)$$

Proof.

略。 ■

***Thm.* 1.5.10. 分配律**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \phi \lor (\psi \land \chi) \leftrightarrow (\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \chi)$$
$$\vdash \phi \land (\psi \lor \chi) \leftrightarrow (\phi \land \psi) \lor (\phi \land \chi)$$

Proof.

略。 ■

***Thm.* 1.5.11. De Morgan の法則**
命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \neg\phi \lor \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \land \psi)$$
$$\vdash \neg\phi \land \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \lor \psi)$$

Proof.
略。 ■

***Thm.* 1.5.12. 排中律**
命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \phi \lor \neg\phi$$

Proof.
選言の定義より明らか。 ■

***Thm.* 1.5.13. Dummett の法則**
命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\vdash (\phi \to \psi) \lor (\psi \to \phi)$$

Proof.
略。 ■

1.6 述語論理

***Rem.* 1.6.1. 述語論理の推論体系**
ここでは推論を行う上で許される規則として、後述する公理 1.6.1、公理 1.6.2 を加える。

***Def.* 1.6.1. 個体**
学問における対象を、個体と呼ぶ。
個体を表す記号を項と呼び、各項のそれぞれに個体を対応させる対応関係を、解釈と呼ぶ。

***Def.* 1.6.2. 議論領域**
議論領域とは、個体の全体である。

***Def.* 1.6.3. 述語**
0 個以上の個体の列について、その全てが確定したときに命題となる言明を、述語と呼ぶ。
述語を表す記号である述語記号 ϕ と、個体を表す記号である項の列 $x, \ldots$ を用いて $\phi(x, \ldots)$ で表す。

述語が要求する個体の数を、その述語のアリティと呼ぶ。

***Def.* 1.6.4. 全称量化子**
量化子 $\forall$ を定める。
項 x を出現させないアリティ 1 の述語 ϕ について、$\forall x(\phi(x))$ は命題である。

***Ax.* 1.6.1.** 全称の導入則

項 x を出現させない命題 ϕ、項 x を出現させないアリティ 1 の述語 ψ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \psi(x) \text{ から、 } \phi \vdash \forall x(\psi(x))$$

***Ax.* 1.6.2.** 全称の除去則

項 y、項 x を出現させないアリティ 1 の述語 ϕ について、以下を定める。

$$\forall x(\phi(x)) \vdash \phi(y)$$

1.7 述語論理におけるいくつかの重要な概念と定理

***Thm.* 1.7.1.** 項の入れ替え

項 x, y を出現させないアリティ 1 の述語 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\forall x(\phi(x)) \vdash \forall y(\phi(y))$$

Proof.

公理 1.6.2 より、$\forall x(\phi(x)) \vdash \phi(y)$ である。

$\forall x(\phi(x))$ は項 y を出現させないので、公理 1.6.1 より、$\forall y(\phi(y))$ を得る。 ■

***Def.* 1.7.1.** 存在量化子

量化子 $\exists$ を定める。

項 x を出現させないアリティ 1 の述語 ϕ について、存在量化子 $\exists$ を以下で定める。

$$\exists x(\phi(x)) :\leftrightarrow \neg\forall x(\neg\phi(x))$$

***Thm.* 1.7.2.** 存在の導入則

項 x を出現させないアリティ 1 の述語 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi(y) \vdash \exists x(\phi(x))$$

Proof.

$\forall x(\neg\phi(x))$ を仮定する。

全称の除去則より $\neg\phi(y)$ であり、前提より $\phi(y)$ であるので、矛盾。

定理 1.3.10 より、$\neg\forall x(\neg\phi(x))$ を得る。 ■

***Thm.* 1.7.3.** 存在の除去則

アリティ 1 の述語 ϕ、項 x を出現させない命題 ψ, χ について、以下を定める。

$$\chi \wedge \phi(x) \vdash \psi \text{ から、 } \chi \wedge \exists y(\phi(y)) \vdash \psi$$

Proof.

公理 1.2.5 より、$\chi \vdash \phi(x) \to \psi$ である。
$\neg\psi$ を仮定する。
$\phi(x)$ を仮定すると、前提 χ より矛盾するので、定理 1.3.10 より $\neg\phi(x)$ である。
$\chi, \neg\psi$ は項 x を出現させないので、$\forall x(\neg\phi(x))$ である。
$\exists y(\phi(y))$ を仮定すると、$\exists y(\phi(y)) :\leftrightarrow \neg\forall x(\neg\phi(x))$ であるため矛盾するので、定理 1.3.10 より ψ を得る。 ■

***Thm.* 1.7.4.** **量化子と連言**
アリティ 1 の述語 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \forall x(\phi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow \forall x(\phi(x)) \land \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\phi(x) \land \psi(x)) \vdash \exists x(\phi(x)) \land \exists x(\psi(x))$$

Proof.
略。 ■

***Thm.* 1.7.5.** **量化子と選言**
アリティ 1 の述語 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\forall x(\phi(x)) \lor \forall x(\psi(x)) \vdash \forall x(\phi(x) \lor \psi(x))$$
$$\vdash \exists x(\phi(x) \lor \psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \lor \exists x(\psi(x))$$

Proof.
略。 ■

***Thm.* 1.7.6.** **量化子と否定**
アリティ 1 の述語 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \forall x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(\phi(x))$$
$$\vdash \exists x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\forall x(\phi(x))$$

Proof.
定義より明らか。 ■

***Thm.* 1.7.7.** **酒場の法則**
アリティ 1 の述語 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \exists x(\phi(x) \to \forall y(\phi(y)))$$

Proof.
略。 ■

***Def.* 1.7.2.** 一意存在量化子

量化子 $\exists!$ を定める。

アリティ 1 の述語 ϕ について、存在量化子 $\exists!$ を以下で定める。

$$\exists! x(\phi(x)) :\leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \land \forall y, z(\phi(y) \land \phi(z) \to y = z)$$

***Def.* 1.7.3.** 等号

アリティ 2 の述語記号 $=$ を定める。

$= (x, y)$ を、簡単のために $x = y$ で表す。

***Ax.* 1.7.1.** 等号の反射律

項 x について、以下を定める。

$$\vdash x = x$$

***Ax.* 1.7.2.** 等号の代入原理

アリティ 2 の述語 ϕ、項 x, y について、以下を定める。

$$\phi(x, x) \land x = y \vdash \phi(x, y)$$

***Thm.* 1.7.8.** 等号の対称律

項 x, y について、以下が成り立つ。

$$x = y \vdash y = x$$

Proof.

$x = x \land x = y$ である。

左命題の左辺に、右命題から得る代入を行って、$y = x$ を得る。 ■

***Thm.* 1.7.9.** 等号の推移律

項 x, y, z について、以下が成り立つ。

$$x = y \land y = z \vdash x = z$$

Proof.

明らか。 ■

***Def.* 1.7.4.** 等号否定

アリティ 2 の述語記号 $\neq$ を定める。

項 x, y について、以下で定める。

$$\neq (x, y) :\leftrightarrow \neg(x = y)$$

$\neq (x, y)$ を、簡単のために $x \neq y$ で表す。

***Rem.* 1.7.1. 項の定義記号**

定義記号 $:=$ を導入する。

これは左辺にある項は、議論において全てその左辺と一致する項を右辺に置き換えて理解するという意味である。

以降に定義する関数クラスの定義にも同様に用いる。

1.8　類と関数クラス

***Def.* 1.8.1. 類**

アリティ 1 の述語 $\boldsymbol{A}$ を、類と呼ぶ。

類であることを強調するために、$\boldsymbol{A}(x)$ を $x \in \boldsymbol{A}$ と書く。

***Def.* 1.8.2. 類の否定**

類 $\boldsymbol{A}$ と項 x について、記号 $\notin$ を以下で定める。

$$x \notin \boldsymbol{A} :\leftrightarrow \neg(x \in \boldsymbol{A})$$

***Rem.* 1.8.1. 類についての略記**

略記 $\forall,$ と $\exists,$ を、アリティ 2 の述語 ϕ について、以下で定める。

$$\forall x, y(\phi(x, y)) :\leftrightarrow \forall x \forall y(\phi(x, y))$$
$$\exists x, y(\phi(x, y)) :\leftrightarrow \exists x \exists y(\phi(x, y))$$

これは、3 個以上についても同様に定める。

略記 $\forall \in, \exists \in$ を、類 X とアリティ 1 の述語 ϕ について、以下で定める。

$$\forall x \in X(\phi(x)) :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to \phi(x))$$
$$\exists x \in X(\phi(x)) :\leftrightarrow \exists x(x \in X \land \phi(x))$$

***Rem.* 1.8.2. 類は個体ではない**

類は個体ではない（ある制限のもとで類を個体とみなすことはできる、集合論など)。

そのため、類の類を定義することはできない。

***Rem.* 1.8.3. 存在の誤謬**

類 X とアリティ 1 の述語 ϕ について、$\forall x \in X(\phi(x))$ から $\exists x \in X(\phi(x))$ を導くことはできない。

これは存在の誤謬と呼ばれる初歩的な誤謬の一種である。

***Def.* 1.8.3. 関数クラス**

以下を満たす述語 ϕ を考える。

$$\forall x \ldots \exists! y(\phi(x, \ldots, y))$$

この対応関係を関数クラスと呼び、関数クラスを表す記号である関数記号 F と項の列 $x, \ldots$ を用いて、y を $F(x, \ldots)$ で表す。

要求する $x, \ldots$ の個数を、関数クラス F のアリティと定める。

***Def.* 1.8.4. 恒等関数**

アリティ 1 の関数記号 id を定める。

項 x について、以下で定める。

$$\mathrm{id}(x) \coloneqq x$$

2 圏論

2.1 射の公理

***Rem.* 2.1.1.** 対象と恒等射の同一視

本ノートでは対象を恒等射と同一視する。一般的でないことに注意されたい。

***Def.* 2.1.1.** 射

圏論では、6 つの公理（公理 2.1.1、公理 2.1.2、公理 2.1.3、公理 2.1.4、公理 2.1.5、公理 2.1.6）が与えられる。項を射と呼ぶ。

***Def.* 2.1.2.** 始域

アリティ 1 の関数記号 dom() を考える。

射 f について、$\mathrm{dom}(f)$ を f の始域と呼ぶ。

***Ax.* 2.1.1.** 始域は冪等

$$\forall f(\mathrm{dom}(\mathrm{dom}(f)) = \mathrm{dom}(f))$$

***Def.* 2.1.3.** 終域

アリティ 1 の関数記号 cod() を考える。

射 f について、$\mathrm{cod}(f)$ を f の終域と呼ぶ。

***Ax.* 2.1.2.** 終域は冪等

$$\forall f(\mathrm{cod}(\mathrm{cod}(f)) = \mathrm{cod}(f))$$

***Ax.* 2.1.3.** 始域の冪等性と終域の冪等性

$$\forall f(f = \mathrm{dom}(f) \leftrightarrow f = \mathrm{cod}(f))$$

***Def.* 2.1.4.** 合成

アリティ 2 の関数記号 $\circ()$ を考える。

$\circ(f, g)$ を、簡単のために $g \circ f$ で表す。

射 f, g について、$g \circ f$ を f と g の合成と呼ぶ。

***Def.* 2.1.5.** 可合成

アリティ 2 の述語記号 Comp() を、以下で定める。

$$\mathrm{Comp}(f, g) :\leftrightarrow \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$$

***Ax.* 2.1.4.** 合成射の始域と終域

$$\forall f, g(\mathrm{Comp}(f, g) \to \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) \land \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g))$$

***Ax.* 2.1.5.** 合成射の結合

$$\forall f, g, h(\mathrm{Comp}(f, g) \land \mathrm{Comp}(g, h) \to h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$$

***Ax.* 2.1.6.** 対象は恒等射

$$\forall f(f = f \circ \mathrm{dom}(f) \land f = \mathrm{cod}(f) \circ f)$$

***Def.* 2.1.6.** 対象

以下を満たす射 a を、対象、または、恒等射と呼ぶ。

$$a = \mathrm{dom}(a)$$

2.2 圏と関手

***Def.* 2.2.1.** 圏

類 $\boldsymbol{C}$ が圏であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall f \in \boldsymbol{C}(\mathrm{dom}(f) \in \boldsymbol{C} \land \mathrm{cod}(f) \in \boldsymbol{C})$$
$$\forall f, g \in \boldsymbol{C}(\mathrm{Comp}(f, g) \to g \circ f \in \boldsymbol{C})$$

***Def.* 2.2.2.** 対象の類

以下で定める類 $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ を、圏 $\boldsymbol{C}$ の対象の類と呼ぶ。

$$f \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} :\leftrightarrow f \in \boldsymbol{C} \land f = \mathrm{dom}(f)$$

***Cor.* 2.2.1.**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ は圏である。

***Def.* 2.2.3.** 離散圏

圏 $\boldsymbol{C}$ が離散であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall f(f \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow f \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}})$$

このとき、$\boldsymbol{C}$ を離散圏と呼ぶ。

***Def.* 2.2.4. Hom 類**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の対象 a, b について、類 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a, b)$ を以下で定める。

$$f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a, b) :\leftrightarrow f \in \boldsymbol{C} \wedge \mathrm{dom}(f) = a \wedge \mathrm{cod}(f) = b$$

***Rem.* 2.2.1. 射の域の明示**

$f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a, b)$ を、簡単のため、$\boldsymbol{C}$ の射 $f\colon a \to b$ と表記する。

***Def.* 2.2.5. End 類**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の対象 a について、類 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(a)$ を以下で定める。

$$f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(a) :\leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(a, a)$$

***Def.* 2.2.6. 圏 1**

以下を満たす圏を、$\mathbf{1}$ で表す。

$$\exists! a (a \in \mathbf{1})$$

圏 $\mathbf{1}$ の唯一の射を、$*$ で表す。

***Def.* 2.2.7. 圏 →←**

m_0, m_1 について、以下で定める類 $\boldsymbol{\rightarrow\leftarrow}$ は、圏である。

1. $f \in \boldsymbol{\rightarrow\leftarrow} \leftrightarrow\ f = m_0 \vee f = m_1 \vee f = \mathrm{dom}(m_0) \vee f = \mathrm{dom}(m_1) \vee f = \mathrm{cod}(m_0)$
2. $m_0, m_1 \notin \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{\rightarrow\leftarrow}}$
3. $\mathrm{cod}(m_0) = \mathrm{cod}(m_1)$
4. $m_0 \neq m_1 \wedge \mathrm{dom}(m_0) \neq \mathrm{dom}(m_1) \wedge \mathrm{dom}(m_0) \neq \mathrm{cod}(m_0) \wedge \mathrm{dom}(m_1) \neq \mathrm{cod}(m_0)$

***Def.* 2.2.8. 圏 ⇉**

m_0, m_1 について、以下で定める類 $\boldsymbol{\rightrightarrows}$ は、圏である。

1. $f \in \boldsymbol{\rightrightarrows} \leftrightarrow\ f = m_0 \vee f = m_1 \vee f = \mathrm{dom}(m_0) \vee f = \mathrm{cod}(m_0)$
2. $m_0, m_1 \notin \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{\rightrightarrows}}$
3. $\mathrm{dom}(m_0) = \mathrm{dom}(m_1) \wedge \mathrm{cod}(m_0) = \mathrm{cod}(m_1)$
4. $m_0 \neq m_1 \wedge \mathrm{dom}(m_0) \neq \mathrm{cod}(m_0)$

***Def.* 2.2.9. 関手**

アリティ 1 の関数記号 F が、圏 $\boldsymbol{C}$ から圏 $\boldsymbol{D}$ への関手であるとは、以下の 3 つを満たすことである。

$$\forall f \in \boldsymbol{C} (F(f) \in \boldsymbol{D})$$

$$\forall f \in \boldsymbol{C} \Big(\mathrm{dom}(F(f)) = F(\mathrm{dom}(f)) \wedge \mathrm{cod}(F(f)) = F(\mathrm{cod}(f)) \Big)$$

$$\forall f, g \in \boldsymbol{C} \Big(\mathrm{Comp}(f, g) \to F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \Big)$$

***Cor.* 2.2.2.**
圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(F(a) \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}})$$

***Cor.* 2.2.3.**
圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\forall f \in \boldsymbol{C}\big(f \text{ が同型射} \to F(f) \text{ が同型射}\big)$$

***Def.* 2.2.10.** 関手の合成
圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ を考える。
$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 G について、以下で示すアリティ 1 の関数記号 H は、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手である。

$$H(f) \coloneqq G(F(f))$$

この H を、F と G の合成と呼び、$G \circ F$ で表す。

***Def.* 2.2.11.** 恒等関手
圏 $\boldsymbol{C}$ について、関数記号 id は、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手である。
圏論において、id を恒等関手と呼ぶ。また、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への恒等関手であることを、明示的に $\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ で表す。

***Def.* 2.2.12.** 圏同型
圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。
$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 G が存在して、以下が成り立つとき、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ は圏同型であると言う。

$$G \circ F = \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}} \land F \circ G = \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}}$$

2.3 自然変換と関手圏

***Def.* 2.3.1.** 自然変換
圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F' を考える。
アリティ 1 の関数記号 η が、F から F' への自然変換であるとは、以下の 2 つ全てを満たすことである。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(\eta(a) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(a), F'(a)))$$
$$\forall f \in \boldsymbol{C}\Big(F'(f) \circ \eta(\mathrm{dom}(f)) = \eta(\mathrm{cod}(f)) \circ F(f)\Big)$$

$\boldsymbol{C}$

$$a \xrightarrow{f} b$$

$\boldsymbol{D}$

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(a)"'] & F(b) \arrow[d, "\eta(b)"] \\ F'(a) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(b) \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.3.2. 恒等な自然変換**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F について、関数記号 F は、F から F への自然変換である。

F が自然変換であることを明示的に、関手 F に対する恒等な自然変換 F と呼ぶ。

***Cor.* 2.3.1. 恒等な自然変換は自然同型**

関手 F に対する恒等な自然変換 F は、F から F への自然同型である。

***Def.* 2.3.3. 自然変換の垂直合成**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F', F'' を考える。

F から F' への自然変換 η と F' から F'' への自然変換 θ について、以下で定義するアリティ 1 の関数記号 $\theta \circ \eta$ は F から F'' への自然変換である。

$$(\theta \circ \eta)(a) \coloneqq \theta(a) \circ \eta(a)$$

$\theta \circ \eta$ を、η と θ の垂直合成と呼ぶ。

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd} \qquad\qquad \boldsymbol{D} \qquad \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(a)"'] \arrow[dd, bend right=60, red, "(\theta\circ\eta)(a)"'] & F(b) \arrow[d, "\eta(b)"] \arrow[dd, bend left=60, red, "(\theta\circ\eta)(b)"] \\ F'(a) \arrow[r, "F'(f)"'] \arrow[d, "\theta(a)"'] & F'(b) \arrow[d, "\theta(b)"] \\ F''(a) \arrow[r, "F''(f)"'] & F''(b) \end{tikzcd}$$

***Cor.* 2.3.2.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F' を考える。

F から F' への自然変換 η について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} \Big(\eta(a) = (\eta \circ F)(a) \land \eta(a) = (F' \circ \eta)(a) \Big)$$

***Cor.* 2.3.3.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F', F'', F''' を考える。

F から F' への自然変換 η、F' から F'' への自然変換 θ、F'' から F''' への自然変換 ϵ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} \Big((\epsilon \circ (\theta \circ \eta))(a) = ((\epsilon \circ \theta) \circ \eta)(a) \Big)$$

***Def.* 2.3.4. 自然変換の水平合成**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F'、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 G, G' を考える。

F から F' への自然変換 η と、G から G' への自然変換 θ について、以下で定義するアリティ 1 の関数記号 $\theta * \eta$ は $G \circ F$ から $G' \circ F'$ への自然変換である。

$$(\theta * \eta)(a) \coloneqq \theta(F'(a)) \circ G(\eta(a))$$

$\theta * \eta$ を、η と θ の水平合成と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \boldsymbol{C} \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \boldsymbol{D} \\ F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(a)"'] & F(b) \arrow[d, "\eta(b)"] \\ F'(a) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(b) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E} \\
& G'(F(a)) \arrow[rr, "G'(F(f))"] \arrow[dd] & & G'(F(b)) \arrow[dd, "G'(\eta(b))"] \\
G(F(a)) \arrow[ur, "\theta(F(a))"] \arrow[rr, "G(F(f))"] \arrow[dd, "G(\eta(a))"'] \arrow[dr, red, "(\theta*\eta)(a)"] & & G(F(b)) \arrow[ur, "\theta(F(b))"] \arrow[dd, "G(\eta(b))"] \arrow[dr, red, "(\theta*\eta)(b)"] & \\
& G'(F'(a)) \arrow[rr] & & G'(F'(b)) \\
G(F'(a)) \arrow[ur, "\theta(F'(a))"] \arrow[rr, "G(F'(f))"'] & & G(F'(b)) \arrow[ur, "\theta(F'(b))"'] &
\end{tikzcd}$$

***Cor.* 2.3.4.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F'、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 G, G' を考える。

F から F' への自然変換 η と、G から G' への自然変換 θ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} \Big((\theta * F)(a) = \theta(F(a)) \land (G * \eta)(a) = G(\eta(a)) \Big)$$

***Lem.* 2.3.5.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F'、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 G, G' を考える。

F から F' への自然変換 η と、G から G' への自然変換 θ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \boldsymbol{C} \Big(\theta(F'(a)) \circ G(\eta(a)) = G'(\eta(a)) \circ \theta(F(a)) \Big)$$

Proof.

θ は G から G' への自然変換であるので、明らか。 ■

***Thm.* 2.3.6. 相互交換法則**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F, F', F''、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{E}$ への関手 G, G', G'' を考える。

F から F' への自然変換 σ、F' から F'' への自然変換 τ、G から G' への自然変換 η、G' から G'' への自然変換 θ について、以下が成り立つ。

$$(\theta \circ \eta) * (\tau \circ \sigma) = (\theta * \tau) \circ (\eta * \sigma)$$

Proof.

$\boldsymbol{C}$ の任意の対象 a について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
((\theta \circ \eta) * (\tau \circ \sigma))(a) &= (\theta \circ \eta)(F''(a)) \circ G((\tau \circ \sigma)(a)) \\
&= \theta(F''(a)) \circ \eta(F''(a)) \circ G(\tau(a)) \circ G(\sigma(a)) \\
&= \theta(F''(a)) \circ G'(\tau(a)) \circ \eta(F'(a)) \circ G(\sigma(a)) \\
&= (\theta * \tau)(a) \circ (\eta * \sigma)(a) \\
&= ((\theta * \tau) \circ (\eta * \sigma))(a)
\end{aligned}$$

ただし第二行から第三行へは、η が G から G' への自然変換であることを用いた。 ■

$\boldsymbol{E}$

$$\begin{tikzcd}
G(F(a)) \arrow[r, "\eta(F(a))"] \arrow[d, "G(\sigma(a))"'] \arrow[dr, "(\eta*\sigma)(a)"] \arrow[dd, bend right=60, "G((\tau\circ\sigma)(a))"'] & G'(F(a)) \arrow[r, "\theta(F(a))"] \arrow[d, "G'(\sigma(a))"] & G''(F(a)) \arrow[d, "G''(\sigma(a))"] \\
G(F'(a)) \arrow[r, "\eta(F'(a))"] \arrow[d, "G(\tau(a))"'] & G'(F'(a)) \arrow[r, "\theta(F'(a))"] \arrow[d, "G'(\tau(a))"] \arrow[dr, "(\theta*\tau)(a)"] & G''(F'(a)) \arrow[d, "G''(\tau(a))"] \\
G(F''(a)) \arrow[r, "\eta(F''(a))"'] \arrow[rr, bend right=30, "(\theta\circ\eta)\big(F''(a)\big)"'] & G'(F''(a)) \arrow[r, "\theta(F''(a))"'] & G''(F''(a))
\end{tikzcd}$$

***Rem.* 2.3.1. 自然変換は射**

圏 $\boldsymbol{D}$ から圏 $\boldsymbol{C}$ への関手 F, G について、F から G への自然変換 η を考える。

$\mathrm{dom}(\eta)$ を F に対する恒等な自然変換 F、$\mathrm{cod}(\eta)$ を G に対する恒等な自然変換 G として、合成を垂直合成で定義すると、自然変換は射の公理をみたす。

***Def.* 2.3.5. 関手圏**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、自然変換を射とみなすと、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手間の自然変換であることは、圏となる。

この圏に以下の相等の定義を加えたものを、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手圏と呼び、$\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ または $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{D}}$ と表す。

1. 対象（関手）F, F' について、$\forall f \in \boldsymbol{C}(F(f) = F'(f)) \to F = F'$
2. 射（自然変換）η, θ について、$\mathrm{dom}(\eta) = \mathrm{dom}(\theta) \land \mathrm{cod}(\eta) = \mathrm{cod}(\theta) \land \forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}(\eta(a) = \theta(a)) \to \eta = \theta$

1 行目は恒等な自然変換ではなく関手として扱っていることに注意されたい。

***Def.* 2.3.6. 対角関手**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ への以下で定める関手 Δ を考える。

1. $c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ について、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 $\Delta(c), \forall d \in \boldsymbol{D}(\Delta(c)(d) := c)$ を与える。
2. $f \notin \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ について、$\Delta(\mathrm{dom}(f))$ から $\Delta(\mathrm{cod}(f))$ への自然変換 $\forall d \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}}(\Delta(f)(d) := f)$ を与える。

このように定めた関手 Δ を対角関手と呼ぶ。

2.4　双対

***Def.* 2.4.1. 反対射**

射 f について、以下を満たすアリティ 1 の関数記号 op を考える。簡単のために、$\mathrm{op}(f)$ を f^{op} で表す。

$$\forall f((f^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = f)$$
$$\forall f(f = \mathrm{dom}(f) \to f = f^{\mathrm{op}})$$
$$\forall f(\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{cod}(f)^{\mathrm{op}})$$
$$\forall f(\mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{op}})$$
$$\forall f, g(\mathrm{Comp}(f, g) \leftrightarrow \mathrm{Comp}(g^{\mathrm{op}}, f^{\mathrm{op}}))$$
$$\forall f, g(\mathrm{Comp}(f, g) \to f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} = (g \circ f)^{\mathrm{op}})$$

***Def.* 2.4.2.** 反対圏

圏 $\boldsymbol{C}$ について、以下で定める類 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ は圏である。

$$f \in \boldsymbol{C}^{\mathrm{op}} :\leftrightarrow f^{\mathrm{op}} \in \boldsymbol{C}$$

***Def.* 2.4.3.** 反対関手

$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F について、以下で定める $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ から $\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}$ への関手を、F^{op} で表す。

$$F^{\mathrm{op}}(f) \coloneqq (F(f^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$$

***Rem.* 2.4.1.** 双対性

圏論における命題は、dom() と cod() を入れ替えて、合成 $g \circ f$ を $f \circ g$ に置き換えても、その真偽は変わらない。

より簡単に言えば、$\boldsymbol{C}$ で成り立つ命題は、$\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ でも成り立つ。

***Cor.* 2.4.1.** 圏 $\mathbf{1}$ の双対

$\mathbf{1}^{\mathrm{op}}$ は、$\mathbf{1}$ である。

***Cor.* 2.4.2.** 関手圏の双対

$\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})^{\mathrm{op}}$ と $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{C}^{\mathrm{op}})$ は圏同型である。

2.5 簡約と逆

***Def.* 2.5.1.** 左簡約可能

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f について、以下を満たすとき、f は $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能であるという。

$$\forall g, h \in \boldsymbol{C}\Big(\mathrm{Comp}(g, f) \land \mathrm{Comp}(h, f) \land f \circ g = f \circ h \to g = h\Big)$$

$\boldsymbol{C}$ において左簡約可能な射を、$\boldsymbol{C}$ のモノ射と呼ぶ。特に圏 $\boldsymbol{C}$ が明らかな場合は、単にモノ射と呼ぶ。

***Def.* 2.5.2.** 右簡約可能

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f について、f^{op} が $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ で左簡約可能であるとき、f は $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能であるという。

$\boldsymbol{C}$ において右簡約可能な射を、$\boldsymbol{C}$ のエピ射と呼ぶ。特に圏 $\boldsymbol{C}$ が明らかな場合は、単にエピ射と呼ぶ。

***Def.* 2.5.3.** 左可逆

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f について、以下を満たすとき、f は $\boldsymbol{C}$ において左可逆であるという。

$$\exists g \in \boldsymbol{C}(\mathrm{Comp}(g, f) \land g \circ f = \mathrm{dom}(f))$$

***Cor.* 2.5.1.**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ において左可逆な射は、$\boldsymbol{C}$ において左簡約可能である。

***Def.* 2.5.4.** 右可逆

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f について、f^{op} が $\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ で左可逆であるとき、f は $\boldsymbol{C}$ において右可逆であるという。

***Cor.* 2.5.2.**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ において右可逆な射は、$\boldsymbol{C}$ において右簡約可能である。

***Cor.* 2.5.3.**
圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f, g について、$\mathrm{Comp}(f, g)$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1. f, g がともに $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能である。
2. f, g がともに $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能である。
3. f, g がともに $\boldsymbol{C}$ において左可逆ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において左可逆である。
4. f, g がともに $\boldsymbol{C}$ において右可逆ならば、$g \circ f$ は $\boldsymbol{C}$ において右可逆である。

***Cor.* 2.5.4.**
圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f, g について、$\mathrm{Comp}(f, g)$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1. $g \circ f$ が $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能ならば、f は $\boldsymbol{C}$ において左簡約可能である。
2. $g \circ f$ が $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能ならば、g は $\boldsymbol{C}$ において右簡約可能である。

***Def.* 2.5.5. 逆射**
射 f について、以下を満たす射 g を f の逆射と呼ぶ。

$$\mathrm{Comp}(f, g) \wedge \mathrm{Comp}(g, f) \wedge g \circ f = \mathrm{dom}(f) \wedge f \circ g = \mathrm{cod}(f)$$

***Lem.* 2.5.5. 逆射の一意性**
射 g, h が f の逆射であるとき、$g = h$ である。

Proof.
以下より成り立つ。
$g = g \circ \mathrm{dom}(g) = g \circ \mathrm{cod}(f) = g \circ f \circ h = \mathrm{dom}(f) \circ h = \mathrm{cod}(h) \circ h = h$ より、成り立つ。 ■

***Rem.* 2.5.1. 逆射**
f の逆射は、補題 2.5.5 より一意に定まるので、これを f^{-1} と表す。

***Cor.* 2.5.6.**
逆射を持つ射 f について、以下が成り立つ。

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

***Lem.* 2.5.7. 同型射**
圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f について、以下の 2 つは同値である。

1. f は、$\boldsymbol{C}$ に逆射を持つ。
2. f は、$\boldsymbol{C}$ において、左可逆かつ右可逆である。

Proof.
1. $\to$ 2. は明らか。

2. $\to$ 1. を示す。
左可逆より、射 g が存在して $g \circ f = \mathrm{dom}(f)$ であり、右可逆より、射 h が存在して $f \circ h = \mathrm{cod}(f)$ である。
$g = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = h$ であるので、$g = h$
ゆえに、g は $f \circ g = \mathrm{cod}(f)$ を満たす。 ■

***Def.* 2.5.6. 同型射**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ において左可逆かつ右可逆な射を、$\boldsymbol{C}$ の同型射と呼ぶ。

***Cor.* 2.5.8. 恒等射は同型射**

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ の恒等射 f の逆射は自身であり、ゆえに f は $\boldsymbol{C}$ の同型射である。

***Cor.* 2.5.9.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 F を考える。

$\boldsymbol{C}$ の同型射 f について、$F(f)$ は $\boldsymbol{D}$ の同型射である。

***Def.* 2.5.7. 自然同型**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。関手圏 $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ の同型射を自然同型と呼ぶ。

***Cor.* 2.5.10.**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F, F' を考える。

自然変換 $\eta\colon F \to F'$ が自然同型であるとは、以下と同値である。

$$\forall a \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}}\bigl(\eta(a) \text{ は } \boldsymbol{C} \text{ の同型射}\bigr)$$

***Def.* 2.5.8. 圏同値**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F と、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G、自然同型 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \theta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ が存在するとき、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ は圏同値であると言う。

$\boldsymbol{D}$
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[d, bend left, "\theta(a)"] & & b \arrow[d, bend left, "\theta(b)"] \\
(G\circ F)(a) \arrow[rr, "(G\circ F)(f)"] \arrow[u, bend left, "\theta(a)^{-1}"] & & (G\circ F)(b) \arrow[u, bend left, "\theta(b)^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{C}$
$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "g"] \arrow[d, bend left, "\epsilon(c)^{-1}"] & & d \arrow[d, bend left, "\epsilon(d)^{-1}"] \\
(F\circ G)(c) \arrow[rr, "(F\circ G)(g)"] \arrow[u, bend left, "\epsilon(c)"] & & (F\circ G)(d) \arrow[u, bend left, "\epsilon(d)"]
\end{tikzcd}$$

***Cor.* 2.5.11. 圏同型ならば圏同値**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ について、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ が圏同型ならば、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ は圏同値である。

2.6 普遍

***Def.* 2.6.1. 普遍射**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ の対象 a を考える。

F から a への普遍射とは、$\boldsymbol{D}$ の対象 x と圏 $\boldsymbol{C}$ の射 $u\colon F(x) \to a$ の組であって、以下を満たすものである。

$$\forall y \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}} \forall f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}\left(F(y), a\right) \exists! g \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(y, x)(f = u \circ F(g))$$

$$\boldsymbol{D} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted, "g"] & x \end{tikzcd} \qquad\qquad \boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} F(y) \arrow[r, dotted, "F(g)"] \arrow[dr, "f"'] & F(x) \arrow[d, "u"] \\ & a \end{tikzcd}$$

***Cor.* 2.6.1. 普遍射に同型ならば普遍射**

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ の対象 a について、x, u が F から a への普遍射であるとする。

同型射 $h\colon x' \to x$ が存在するとき、$x', u \circ F(h)$ は普遍射である。

***Lem.* 2.6.2. 普遍射の一意性**

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ の対象 a について、x, u と x', u' が F から a への普遍射であるとする。

このとき、以下を満たす。

$$\exists! h \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(x', x)(u' = u \circ F(h))$$

さらに上で与える h は同型射である。

Proof.

x, u は普遍射であるので、x', u' について定義より、$\boldsymbol{D}$ の射 $g\colon x' \to x$ であって $u' = u \circ F(g)$ なる射が一意に存在する。

同様に x', u' は普遍射であるので、x, u について定義より、$\boldsymbol{D}$ の射 $g'\colon x \to x'$ であって $u = u' \circ F(g')$ なる射が一意に存在する。

ゆえに、$u = u' \circ F(g') = u \circ F(g) \circ F(g') = u \circ F(g \circ g')$ が成り立つ。

x, u は普遍射であるので、x, u について定義より、$\boldsymbol{D}$ の射 $i\colon x \to x$ であって $u = u \circ F(i)$ なる射が一意に存在する。

$x, g \circ g'$ は i の条件を満たすので、$i = x = g \circ g'$

同様に、$x' = g' \circ g$ である。

したがって、g' は g の逆射である。 ■

***Def.* 2.6.2. 終対象**

圏 $\boldsymbol{C}$ を考える。

$\boldsymbol{C}$ から圏 $\mathbf{1}$ への関手は一意に定まり、これを U とする。

U から $*$ への普遍射 x, u が存在するならば、$u = *$ となり、x を $\boldsymbol{C}$ の終対象と呼ぶ。

$$\boldsymbol{C} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted, "g"] & x \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathbf{1} \qquad \begin{tikzcd} * = U(y) \arrow[r, dotted, "*=U(g)"] \arrow[dr, "*"'] & * = U(x) \arrow[d, "*"] \\ & * \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.3. 極限**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ への対角関手 Δ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 X について、Δ から X への普遍射 x, u が存在するならば、x, u を X の極限と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \boldsymbol{D} \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} & & \\ & y \arrow[ddl, bend right, "p(a)"'] \arrow[ddr, bend left, "p(b)"] \arrow[d, dotted, red, "q"] & \\ & x \arrow[dl, "u(a)"'] \arrow[dr, "u(b)"] & \\ X(a) \arrow[rr, "X(f)"'] & & X(b) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}) & \\ \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(x) \arrow[d, "u"] \\ & X \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.4. 積**

離散圏 $\boldsymbol{J}$、圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 X を考える。

このとき、X の極限 x, u が存在するならば、x, u を X の積と呼ぶ。

特に、この x を $\prod X$ と表す。

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} & \\ y \arrow[r, dotted, red, "q"] \arrow[dr, "p(j)"'] & \prod X \arrow[d, "u(j)"] \\ & X(j) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}) & \\ \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(\prod X) \arrow[d, "u"] \\ & X \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.5. 引き戻し**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f, g を考える。$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ とする。

以下で定める圏 $\rightarrow\leftarrow$ から圏 $\boldsymbol{C}$ への関手 X を考える。

$$X(m_0) = f \land X(m_1) = g$$

このとき X の極限 x, u が存在するならば、$x, (u(\mathrm{dom}(m_0)), u(\mathrm{dom}(m_1)))$ を f, g の引き戻しと呼ぶ。

これは、$(u(\mathrm{dom}(m_0)), u(\mathrm{dom}(m_1)))$ が与えられれば自然性から u が与えられるからである。

$$\begin{tikzcd} \rightarrow\leftarrow & \\ & b' \arrow[d, "m_1"] \\ a' \arrow[r, "m_0"'] & c' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} & & \\ & y \arrow[ddl, "p(a')"'] \arrow[d, dotted, red, "q"] \arrow[ddr, "p(c')"] \arrow[dr, "p(b')"] & \\ & x \arrow[dl, "u(a')"'] \arrow[dr, "u(c')"] \arrow[r, "u(b')"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Func}(\rightarrow\leftarrow, \boldsymbol{C}) & \\ \Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(x) \arrow[d, "u"] \\ & \mathrm{id} \end{tikzcd}$$

***Def.* 2.6.6. 核対**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f を考える。

f, f の引き戻し $x, (\pi_0, \pi_1)$ が存在するならば、$x, (\pi_0, \pi_1)$ を f の核対と呼ぶ。

***Cor.* 2.6.3.**

f の核対 $x, (\pi_0, \pi_1)$ が存在するとする。

このとき、π_0, π_1 はともに右可逆である。

***Lem.* 2.6.4. 核対と左簡約可能性**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f について、f の核対 $R, (\pi_0, \pi_1)$ が存在するとする。
このとき、以下の 3 つは同値である。

1. f は左簡約可能
2. $\pi_0 = \pi_1$
3. π_0, π_1 はともに同型射

Proof.

1. → 2. を示す。
核対より $f \circ \pi_0 = f \circ \pi_1$ であり、左簡約可能より $\pi_0 = \pi_1$ である。

2. → 3. を示す。
$f \circ \mathrm{dom}(f) = f \circ \mathrm{dom}(f)$ より、普遍性から射 $u\colon \mathrm{dom}(f) \to R$ が存在して、$\pi_0 \circ u = \mathrm{dom}(f) = \pi_1 \circ u$ である。
$\pi_0 = \pi_1$ より、$\pi_1 = \pi_0 = \pi_1 \circ u \circ \pi_0 = \pi_0 \circ u \circ \pi_0$ である。
$f \circ \pi_0 = f \circ \pi_0$ より、普遍性から一意な $e\colon R \to R$ が存在して、$\pi_0 \circ e = \pi_0 = \pi_1 \circ e$ である。
$e = R$ が成り立つため、一意性から $e = R = u \circ \pi_0$ である。
したがって、π_0 は同型射である。

3. → 2. を示す。
$f \circ \pi_0 = f \circ \pi_0$ より、一意な射 $e\colon R \to R$ が存在して、$\pi_0 = \pi_0 \circ e = \pi_1 \circ e$ である。
π_0 は同型射より、$e = R$ である。ゆえに、$\pi_0 = \pi_1$ である。

2. → 1. を示す。
$\boldsymbol{C}$ の射 g, h について、$f \circ g = f \circ h$ とする。
普遍性より、一意な射 $q\colon \mathrm{dom}(g) \to x$ が存在して、$g = \pi_0 \circ q \wedge h = \pi_1 \circ q$ である。
$\pi_0 = \pi_1$ より、$g = h$ である。 ■

***Def.* 2.6.7. 等化子**

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f, g を考える。$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ とする。
以下で定める圏 $\rightrightarrows$ から圏 $\boldsymbol{C}$ への関手 X を考える。

$$X(m_0) = f \wedge X(m_1) = g$$

このとき X の極限 x, u が存在するならば、$x, u(\mathrm{dom}(m_0))$ を f, g の等化子と呼ぶ。
これは、$u(\mathrm{dom}(m_0))$ が与えられれば自然性から u が与えられるからである。

$\rightrightarrows$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "m_1"] \arrow[r, bend right, "m_0"'] & b'
\end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[ddl, "p(a')"'] \arrow[d, dashed, red, "q"] \arrow[ddr, "p(b')"] \arrow[drr, "p(a')"] & & \\
 & \mathrm{Eq}(f,g) \arrow[rr, "u(a')"] \arrow[dl, "u(a')"'] \arrow[dr, "u(b')"] & & a \arrow[dl, "g"] \\
a \arrow[rr, "f"'] & & b &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Func}(\rightrightarrows, \boldsymbol{C})$

$$\begin{tikzcd}
\Delta(y) \arrow[r, dotted, "\Delta(q)"] \arrow[dr, "p"'] & \Delta(\mathrm{Eq}(f,g)) \arrow[d, "u"] \\
 & \mathrm{id}
\end{tikzcd}$$

***Lem.* 2.6.5. 等化子から得るモノ射**

f と g の等化子 $\mathrm{Eq}(f,g), \pi$ が存在するとする。

このとき、π は左簡約可能である。

Proof.

$\pi \circ h_1 = \pi \circ h_2$ なる射 $h_1, h_2 \colon y \to \mathrm{Eq}(f,g)$ と、射 $w \coloneqq \pi \circ h_1$ を考える。

このとき、$f \circ w = f \circ \pi \circ h_1 = g \circ \pi \circ h_1 = g \circ w$ より、等化子の普遍性から $w = \pi \circ h$ なる h が一意に存在する。

ゆえに、$h_1 = h_2$ である。

したがって、π は左簡約可能である。 ■

***Thm.* 2.6.6. 極限の存在定理**

以下を満たす圏 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}$ を考える。

1. $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、積を持つ。
2. $\boldsymbol{J}$ の射を対象とする離散圏 $\hat{\boldsymbol{J}}$ について、$\hat{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、積を持つ。
3. $\boldsymbol{C}$ の任意の射 f, g について $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \land \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ ならば、等化子を持つ。

このとき、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 X は極限を持つ。

Proof.

$\hat{\boldsymbol{J}}$ から $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ への関手 c、$c(\hat{f}) = \mathrm{cod}(f)$ と、$\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{J}$ への自明な関手 I を考える。

$P = X \circ I$ と、$R = X \circ I \circ c$ を考える。P の積を $\prod P, \pi$、R の積を $\prod R, r$ とする。

$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}\left(\hat{\boldsymbol{J}}, \boldsymbol{C}\right)$ への対角関手 Δ_1 を考える。

自然変換 $s \colon \Delta_1(\prod P) \to R$、$s(j) = \pi(\mathrm{cod}(j))$ を考える。積の定義より、一意な射 $\overline{s} \colon \prod P \to \prod R$ が存在して、$s = r \circ \Delta_1(\overline{s})$ である。

自然変換 $t \colon \Delta_1(\prod P) \to R$、$t(j) = X(j) \circ \pi(\mathrm{dom}(j))$ を考える。積の定義より、一意な射 $\overline{t} \colon \prod P \to \prod R$ が存在して、$t = r \circ \Delta_1(\overline{t})$ である。

仮定より、$\overline{s}$ と $\overline{t}$ の等化子 $\mathrm{Eq}(\overline{s}, \overline{t}), u$ が存在する。

$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$ への対角関手 Δ_2 を考える。

$\lambda \coloneqq \pi \circ \Delta_2(u)$ が、$\Delta_2(\mathrm{Eq}(\overline{s}, \overline{t}))$ から X への自然変換であることを示す。

$\boldsymbol{J}$ の射 j について、等化子と積の定義より以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
X(j) \circ \lambda(\mathrm{dom}(j)) &= X(j) \circ \pi(\mathrm{dom}(j)) \circ \Delta_2(u)(\mathrm{dom}(j)) \\
&= t(j) \circ u \\
&= r(j) \circ \overline{t} \circ u \\
&= r(j) \circ \overline{s} \circ u \\
&= s(j) \circ u \\
&= \pi(\mathrm{cod}(j)) \circ u \\
&= \lambda(\mathrm{cod}(j))
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Eq}(\overline{s}, \overline{t}), \lambda$ が極限であることを示す。

$\boldsymbol{C}$ の対象 y と、自然変換 $p \colon \Delta_2(y) \to X$ を考える。

$\prod P$ は積より、一意な $\boldsymbol{C}$ の射 $w \colon y \to \prod P$ が存在して、$\forall j \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}(p(j) = \pi(j) \circ w)$ が成り立つ。

等化子より、一意な $\boldsymbol{C}$ の射 $l \colon y \to \mathrm{Eq}(\overline{s}, \overline{t})$ が存在して、$w = u \circ l$ である。

したがって、一意な $\boldsymbol{C}$ の射 l が存在して、$p = \lambda \circ \Delta_2(l)$ である。 ■

$\mathrm{Func}\left(\hat{\boldsymbol{J}}, \boldsymbol{C}\right)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \Delta_1(\prod P) \arrow[d, "\Delta_1(\bar{t})"'] \arrow[ddr, "t"] & \\
\Delta_1(\prod P) \arrow[r, "\Delta_1(\bar{s})"] \arrow[drr, "s"'] & \Delta_1(\prod R) \arrow[dr, "r"] & \\
 & & R
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{C}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}\left(\bar{s}, \bar{t}\right) \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "u"'] & \prod P \arrow[dr, "\pi(\mathrm{dom}(j))"] \arrow[dd, "\bar{t}"] \arrow[ddr, "t(j)"'] & \\
 & & X(\mathrm{dom}(j)) \arrow[d, "X(j)"] \\
\prod P \arrow[r, "\bar{s}"] \arrow[rr, bend right, "s(j)=\pi(\mathrm{cod}(j))"'] & \prod R \arrow[r, "r(j)"] & R(j) = X(\mathrm{cod}(j))
\end{tikzcd}
$$

2.7 余普遍

***Def.* 2.7.1.** 余普遍射

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ の対象 a を考える。

F^{op} から a への普遍射 x, u が存在するならば、x, u^{op} を a から F への余普遍射と呼ぶ。

$\boldsymbol{D}$
$$
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, dotted, "g"']
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}$
$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, dotted, "g^{\mathrm{op}}"] & x
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$
$$
\begin{tikzcd}
F^{\mathrm{op}}(y) \arrow[r, dotted, "F^{\mathrm{op}}(g^{\mathrm{op}})"] \arrow[dr, "f"'] & F^{\mathrm{op}}(x) \arrow[d, "u"] \\
 & a
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{C}$
$$
\begin{tikzcd}
F(y) & F(x) \arrow[l, dotted, "F(g)"'] \\
 & a \arrow[ul, "f^{\mathrm{op}}"] \arrow[u, "u^{\mathrm{op}}"']
\end{tikzcd}
$$

***Def.* 2.7.2.** 始対象

圏 $\boldsymbol{C}$ を考える。

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{op}}$ の終対象が存在するならば、これを $\boldsymbol{C}$ の始対象と呼ぶ。

***Def.* 2.7.3.** 余極限

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ への対角関手 Δ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 X について、X から Δ への余普遍射が存在するならば、これを X の余極限と呼ぶ。

***Def.* 2.7.4.** 和

離散圏 $\boldsymbol{J}$、圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 X を考える。

このとき、X の余極限が存在するならば、これを X の和と呼ぶ。

***Def.* 2.7.5.** 押し出し

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f, g を考える。$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ とする。

このとき、$f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}$ の引き戻しが存在するならば、これを f, g の押し出しと呼ぶ。

***Def.* 2.7.6.** 余等化子

圏 $\boldsymbol{C}$ と、$\boldsymbol{C}$ の射 f, g を考える。$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ とする。

このとき、$f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}$ の等化子が存在するならば、これを f, g の余等化子と呼ぶ。

***Lem.* 2.7.1.** 余等化子から得るエピ射

f と g の余等化子 x, u について、u は右簡約可能である。

Proof.

補題 2.6.5 より、双対性から明らか。 ■

***Thm.* 2.7.2. 余極限の存在定理**

以下を満たす圏 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}$ を考える。

1. $\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、和を持つ。
2. $\boldsymbol{J}$ の射を対象とする離散圏 $\hat{\boldsymbol{J}}$ について、$\hat{\boldsymbol{J}}$ から $\boldsymbol{C}$ への任意の関手は、和を持つ。
3. $\boldsymbol{C}$ の任意の射 f, g について $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ ならば、余等化子を持つ。

このとき、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 X は余極限を持つ。

Proof.

定理 2.6.6 より、双対性より明らか。 ■

2.8 随伴

***Def.* 2.8.1. 左随伴関手**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F について、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G と、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ が存在して、以下を満たすとする。

$$\forall c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}} \big(G(c), \epsilon(c) \text{ は、} F \text{ から } c \text{ への普遍射である。} \big)$$

このとき F を、右随伴が G で余単位を ϵ とする左随伴関手と呼ぶ。

***Lem.* 2.8.1. 随伴の一意性**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G, G' と、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \epsilon'\colon F \circ G' \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ を考える。

F は、右随伴が G で余単位を ϵ とする左随伴関手であり、右随伴が G' で余単位を ϵ' とする左随伴関手であるとする。

このとき自然同型 $\theta\colon G \to G'$ が存在して、以下が成り立つ。

$$\epsilon' \circ (F * \theta) = \epsilon$$

Proof.

$\forall c \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{C}}$ について、$G'(c), \epsilon'(c)$ は F から c への普遍射である。

ゆえに一意な $\boldsymbol{D}$ の射 α が存在して、$\epsilon(c) = \epsilon'(c) \circ F(\alpha)$ が成り立つ。

c に対して α を与えるアリティ 1 の関数記号を、θ とする。

θ が G から G' への自然変換であることを示す。

$\boldsymbol{C}$ の射 f を考える。ϵ, ϵ' の自然性と、θ の定義より以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ F(\theta(\mathrm{cod}(f)) \circ G(f)) &= \epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ (F * \theta)(\mathrm{cod}(f)) \circ (F \circ G)(f) \\
&= \epsilon(\mathrm{cod}(f)) \circ (F \circ G)(f) \\
&= f \circ \epsilon(\mathrm{dom}(f)) \\
&= f \circ \epsilon'(\mathrm{dom}(f)) \circ (F * \theta)(\mathrm{dom}(f)) \\
&= \epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ (F \circ G)(f) \circ (F * \theta)(\mathrm{dom}(f)) \\
&= \epsilon'(\mathrm{cod}(f)) \circ F(G(f) \circ \theta(\mathrm{dom}(f)))
\end{aligned}$$

普遍性より、$\theta(\mathrm{cod}(f)) \circ G(f) = G(f) \circ \theta(\mathrm{dom}(f))$ である。

ゆえに、θ は自然変換である。

自然同型であることを示す。
同様に自然変換 $\zeta\colon G' \to G$ を考えることができる。
定義より、$\forall c \in \boldsymbol{C}$ について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\epsilon(c) &= \epsilon'(c) \circ F(\theta(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ F(\zeta(c)) \circ F(\theta(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ F(\zeta(c) \circ \theta(c))\end{aligned}$$

普遍性より、$\zeta(c) \circ \theta(c) = G(c)$ である。
すなわち、ζ は θ の逆射である。 ■

***Thm.* 2.8.2.** 三角恒等式
圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ を考える。
F は、右随伴が G で余単位を ϵ とする左随伴関手であるとする。
このとき、自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ が存在して、以下を満たす。

$$\begin{aligned}F &= (\epsilon * F) \circ (F * \eta) \\ G &= (G * \epsilon) \circ (\eta * G)\end{aligned}$$

Proof.
まず第一式と、自然変換であることを示す。
$d \in \mathrm{Obj}_{\boldsymbol{D}}$ について、$(G \circ F)(d), (\epsilon * F)(d)$ は F から $F(d)$ への普遍射である。
したがって、d と恒等射 $F(d)$ について、射 g が一意に存在して、$F(d) = (\epsilon * F)(d) \circ F(g)$ である。
d に対して、この g を与える関数記号を η とする。
$\boldsymbol{D}$ の射 $f\colon d \to d'$ を考える。

$$\begin{aligned}(\epsilon * F)(d') \circ F((G \circ F)(f) \circ \eta(d)) &= (\epsilon * F)(d') \circ (F \circ G \circ F)(f) \circ (F * \eta)(d) \\ &= F(f) \circ (\epsilon * F)(d) \circ (F * \eta)(d) \\ &= F(f) \\ &= (\epsilon * F)(d') \circ (F * \eta)(d') \circ F(f) \\ &= (\epsilon * F)(d') \circ F(\eta(d') \circ f)\end{aligned}$$

$(G \circ F)(d'), (\epsilon * F)(d')$ は、F から $F(d')$ への普遍射であるため、d と $F(f)$ について、$F(f) = (\epsilon * F)(d') \circ F(e)$ なる e が一意に存在する。
したがって、$e = (G \circ F)(f) \circ \eta(d) = \eta(d') \circ f$ である。
ゆえに、η は自然変換である。

第二式を示す。
$c \in \mathrm{Obj}_C$ を考える。
ϵ は自然変換であるので、射 $w\colon (F \circ G)(c) \to c$ について $\epsilon(c) \circ (F \circ G)(w) = w \circ \epsilon(F \circ G(c))$ である。
$w = \epsilon(c)$ として、$\epsilon(c) \circ (F \circ G)(\epsilon(c)) = \epsilon(c) \circ \epsilon(F \circ G(c))$ である。
第一式より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\epsilon(c) &= \epsilon(c) \circ F(G(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ (\epsilon * F)(G(c)) \circ (F * \eta)(G(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ \epsilon((F \circ G)(c)) \circ F((\eta * G)(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ (F \circ G)(\epsilon(c)) \circ F((\eta * G)(c)) \\ &= \epsilon(c) \circ F\big(((G * \epsilon) \circ (\eta * G))(c)\big)\end{aligned}$$

$G(c), \epsilon(c)$ は F から c への普遍射であるため、$G(c)$ と $\epsilon(c)\colon F(G(c)) \to c$ について、一意な射 $i\colon G(c) \to G(c)$ が存在して、$\epsilon(c) = \epsilon(c) \circ F(i)$ である。

$i = G(c)$ は明らかに条件を満たすので、一意性より以下を得る。

$$((G * \epsilon) \circ (\eta * G))(c) = G(c)$$

■

$$\boldsymbol{D}\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, dotted, "\eta(d)"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(d) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\
d' \arrow[r, dotted, "\eta(d')"] & (G \circ F)(d')
\end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{C}\qquad
\begin{tikzcd}
F(d) \arrow[r, "(F*\eta)(d)"] \arrow[drr, "F(d)"'] \arrow[dd, "F(f)"'] & (F \circ G \circ F)(d) \arrow[dr, "(\epsilon*F)(d)"] \arrow[dd, "(F\circ G\circ F)(f)"] & \\
 & & F(d) \arrow[dd, "F(f)"] \\
F(d') \arrow[r, "(F*\eta)(d')"] \arrow[drr, "F(d')"'] & (F \circ G \circ F)(d') \arrow[dr, "(\epsilon*F)(d')"] & \\
 & & F(d')
\end{tikzcd}$$

***Def.* 2.8.2. 右随伴関手**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G、自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ を考える。

G^{op} が、右随伴が F^{op} で余単位を η^{op} とする左随伴関手であるとする。

このとき G を、左随伴が F で単位を η とする右随伴関手と呼ぶ。

***Lem.* 2.8.3. 三角恒等ならば随伴**

圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を考える。

$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G と、自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \eta\colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ について、以下を満たすとする。

$$\begin{aligned}
F &= (\epsilon * F) \circ (F * \eta) \\
G &= (G * \epsilon) \circ (\eta * G)
\end{aligned}$$

このとき、F は右随伴が G で余単位を ϵ とする左随伴関手となり、G は左随伴が F で単位を η とする右随伴関手となる。

Proof.

双対性から、F が左随伴関手であることを示せば十分である。

$\boldsymbol{C}$ の任意の対象 a について、$G(a), \epsilon(a)$ が F から a への普遍射となることを示す。

$\boldsymbol{D}$ の対象 y と、$\boldsymbol{C}$ の射 $f\colon F(y) \to a$ を考える。

このとき、$g \coloneqq G(f) \circ \eta(y)$ を考えると、ϵ の自然性と $F = (\epsilon * F) \circ (F * \eta)$ より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\epsilon(a) \circ F(g) &= \epsilon(a) \circ (F \circ G)(f) \circ (F * \eta)(y) \\
&= f \circ (\epsilon * F)(y) \circ (F * \eta)(y) \\
&= f \circ F(y) \\
&= f
\end{aligned}$$

次に、$\boldsymbol{D}$ の射 $g'\colon y \to G(a)$ が存在して、$f = \epsilon(a) \circ F(g')$ であるとする。

このとき、$G = (G * \epsilon) \circ (\eta * G)$ と η の自然性より、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
g' &= G(a) \circ g' \\
&= (G * \epsilon)(a) \circ (\eta * G)(a) \circ g' \\
&= (G * \epsilon)(a) \circ (G \circ F)(g') \circ \eta(y) \\
&= G(\epsilon(a) \circ F(g')) \circ \eta(y) \\
&= G(f) \circ \eta(y) \\
&= g
\end{aligned}
$$

ゆえに一意である。 ■

$\boldsymbol{D}$

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[d, "\eta(y)"] \arrow[dr, dotted, red, "g=G(f)\circ\eta(y)"] & \\
(G \circ F)(y) \arrow[r, "G(f)"] & G(a)
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{C}$

$$
\begin{tikzcd}
 & F(y) \arrow[ddl, "F(y)"'] \arrow[d, "(F*\eta)(y)"] \arrow[ddr, "f"] \arrow[dr, dotted, "F(g)"] & \\
 & (F \circ G \circ F)(y) \arrow[r, "(F\circ G)(f)"] \arrow[dl, "(\epsilon * F)(y)"] & (F \circ G)(a) \arrow[d, "\epsilon(a)"] \\
F(y) \arrow[rr, "f"'] & & a
\end{tikzcd}
$$

***Thm.* 2.8.4. 左随伴は余極限を保存する**

圏 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 X、$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{C}$ への関手 F、$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{D}$ への関手 G と、自然変換 $\epsilon \colon F \circ G \to \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}, \eta \colon \mathrm{id}_{\boldsymbol{D}} \to G \circ F$ を考える。

F は右随伴が G で余単位を ϵ とする左随伴関手であるとする。

x, u が X の余極限であるならば、$F(x), F * u$ は $F \circ X$ の余極限である。

Proof.

$\boldsymbol{D}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{D})$ への対角関手を $\Delta_{\boldsymbol{D}}$、$\boldsymbol{C}$ から $\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$ への対角関手を $\Delta_{\boldsymbol{C}}$ とする。

$\boldsymbol{C}$ の対象 y と、$F \circ X$ から $\Delta_{\boldsymbol{C}}(y)$ への自然変換 f を考える。

$G(y), \epsilon(y)$ は、F から y への普遍射である。

したがって $\boldsymbol{J}$ の任意の対象 j について、$\epsilon(y) \circ F(w(j)) = f(j)$ を満たす射 $w(j)$ が一意に存在する。

ここで、f は $F \circ X$ から $\Delta_{\boldsymbol{C}}(y)$ への自然性であるので、$\boldsymbol{J}$ の任意の対象 j, j' について以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\epsilon(y) \circ F(w(j') \circ X(i)) &= \epsilon(y) \circ F(w(j')) \circ (F \circ X)(i) \\
&= f(j') \circ (F \circ X)(i) \\
&= f(j) \\
&= \epsilon(y) \circ F(w(j))
\end{aligned}
$$

一意性より、$w(j') \circ X(i) = w(j)$ である。よって、w は X から $\Delta_{\boldsymbol{D}}$ への自然変換である。

x, u は X から $\Delta_{\boldsymbol{D}}$ への余普遍射であるので、$w = \Delta_{\boldsymbol{D}}(h) \circ u$ を満たす $\boldsymbol{D}$ の射 h が一意に存在する。

ここで、$g \coloneqq \epsilon(y) \circ F(h)$ とすると、$\boldsymbol{J}$ の任意の対象 j について以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
g \circ (F * u)(j) &= \epsilon(y) \circ F(h) \circ (F * u)(j) \\
&= \epsilon(y) \circ F(h \circ u(j)) \\
&= \epsilon(y) \circ (F * w)(j) \\
&= f(j)
\end{aligned}
$$

したがって、$\Delta_{\boldsymbol{C}}(g) \circ (F * u) = f$ である。

次に、$\boldsymbol{C}$ の射 g' が存在して、$\Delta_{\boldsymbol{C}}(g') \circ (F * u) = f$ であるとする。

$G(y), \epsilon(y)$ は F から y への普遍射であるため、$g' = \epsilon(y) \circ F(h')$ を満たす $\boldsymbol{D}$ の射 h' が一意に存在する。

$\boldsymbol{J}$ の任意の対象 j について、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\epsilon(y) \circ F(h \circ u(j)) &= f(j) \\
&= g'(j) \circ (F * u)(j) \\
&= \epsilon(y) \circ F(h') \circ (F * u)(j) \\
&= \epsilon(y) \circ F(h' \circ u(j))
\end{aligned}
$$

再び $G(y), \epsilon(y)$ は F から y への普遍射であるため、一意性より $h \circ u(j) = h' \circ u(j)$ である。ゆえに、$\Delta_{\boldsymbol{D}}(h') \circ u = \Delta_{\boldsymbol{D}}(h) \circ u$ である。

x, u は、X の余極限であるため、一意性より $h = h'$ である。したがって、$g = g'$ である。 ■

$\boldsymbol{J}$

$$
\begin{tikzcd}
j \arrow[r, "i"] & j'
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{D}$

$$
\begin{tikzcd}
G(y) & & \\
& x \arrow[ul, "h"'] & \\
X(j) \arrow[uu, "w(j)"] \arrow[ur, "u(j)"'] \arrow[rr, "X(i)"'] & & X(j') \arrow[ul, "u(j')"] \arrow[uull, bend right, "w(j')"']
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{C}$

$$
\begin{tikzcd}
& (F \circ G)(y) \arrow[dl, "\epsilon(y)"'] & \\
y & & F(x) \arrow[ul, "F(h)"'] \arrow[ll, dotted, "g"'] \\
& (F \circ X)(j) \arrow[ul, "f(j)"] \arrow[uu, "(F*w)(j)"] \arrow[ur, "(F*u)(j)"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{D})$

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_{\boldsymbol{D}}(G(y)) & \\
& \Delta_{\boldsymbol{D}}(x) \arrow[ul, "\Delta_{\boldsymbol{D}}(h)"'] \\
X \arrow[uu, "w"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Func}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$

$$
\begin{tikzcd}
& \Delta_{\boldsymbol{C}}((F \circ G)(y)) \arrow[dl, "\Delta_{\boldsymbol{C}}(\epsilon(y))"'] & \\
\Delta_{\boldsymbol{C}}(y) & & \Delta_{\boldsymbol{C}}(F(x)) \arrow[ul, "\Delta_{\boldsymbol{C}}(F(h))"'] \arrow[ll, dotted, "\Delta_{\boldsymbol{C}}(g)"'] \\
& F \circ X \arrow[ul, "f"] \arrow[uu, "F*w"] \arrow[ur, "F*u"'] &
\end{tikzcd}
$$

3 集合論

3.1 集合論の述語

***Def.* 3.1.1.** 集合

集合論では、9 つの公理（公理 3.2.1、公理 3.2.2、公理 3.2.3、公理 3.2.4、公理 3.6.1、公理 3.3.1、公理 3.3.2、公理 3.4.1、公理 3.2.5）が与えられる。

項を集合と呼ぶ。

***Def.* 3.1.2.** 所属

アリティ 2 の述語記号 $\in$ を定める。

$\in (x, y)$ を、簡単のために $x \in y$ で表す。

***Rem.* 3.1.1.** 集合は類

集合 y について、$\in (, y)$ はアリティ 1 の述語、すなわち類となる。

ここで、類の $\in$ と、所属の $\in$ は同一視される。

一方で、類に対して対応する集合を一般には与えることができない点に注意されたい。

***Def.* 3.1.3.** 要素

集合 x, X について、$x \in X$ であるとき、x は X の要素または元と呼ぶ。

***Rem.* 3.1.2.** 集合系

その要素に要素があることを強調したいとき、この集合を集合系と呼ぶ。

***Def.* 3.1.4.** 包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 $\subset$ を以下で定める。

$$\subset (X, Y) :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to x \in Y)$$

$\subset (X, Y)$ を、簡単のために $X \subset Y$ で表す。

***Def.* 3.1.5.** 真包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 $\subsetneq$ を以下で定める。

$$\subsetneq (X, Y) :\leftrightarrow X \subset Y \land X \neq Y$$

$\subsetneq (X, Y)$ を、簡単のために $X \subsetneq Y$ で表す。

***Def.* 3.1.6.** 左包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 $\supset$ を以下で定める。

$$\supset (X, Y) :\leftrightarrow Y \subset X$$

$\supset (X, Y)$ を、簡単のために $X \supset Y$ で表す。

***Def.* 3.1.7.** 左真包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 $\supsetneq$ を以下で定める。

$$\supsetneq (X, Y) :\leftrightarrow Y \subsetneq X$$

$\supsetneq (X, Y)$ を、簡単のために $X \supsetneq Y$ で表す。

3.2 集合の構成

***Ax.* 3.2.1.** 外延性の公理

$$\forall X \forall Y (\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \to X = Y)$$

***Cor.* 3.2.1.** 相等の定義

以下が成り立つ。

$$\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

***Cor.* 3.2.2.** 包含の半順序性

以下が成り立つ。

$$\forall X(X \subset X)$$
$$\forall X \forall Y(X \subset Y \land Y \subset X \to X = Y)$$
$$\forall X \forall Y \forall Z(X \subset Y \land Y \subset Z \to X \subset Z)$$

***Rem.* 3.2.1.** 集合の外延的定義

公理 3.2.1 より、全ての要素を書き下せば集合は一意に定まる。このような全ての要素を書き下す集合の定義方法を、外延的定義と呼ぶ。

例えば、要素が x, y, z であり、かつ、それのみである集合 X に対して以下のような定義をする。

$$X = \{x, y, z\}$$

***Ax.* 3.2.2.** 空集合の公理

$$\exists A \forall x(x \notin A)$$

***Def.* 3.2.1.** 空集合

公理 3.2.1 から、公理 3.2.2 が主張する集合が一意に定まる。この集合を空集合と呼び、$\varnothing$ で表す。

外延的に $\{\}$ とも表す。

***Cor.* 3.2.3.**

$$\forall X(\varnothing \subset X)$$

***Ax.* 3.2.3.** 対の公理

$$\forall x \forall y \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t = x \lor t = y)$$

***Def.* 3.2.2.** 単集合

$x = y$ を考えることで、集合 $\{x, x\}$ が存在する。この集合は、公理 3.2.1 から、$\{x\}$ とも表せる。

このような単一の元からなる集合を単集合（singleton）と呼ぶ。

***Cor.* 3.2.4.**

$$\forall x, y(x \in y \leftrightarrow \{x\} \subset y)$$

***Ax.* 3.2.4.** 正則性の公理

$$\forall X(X \neq \varnothing \to \exists x(x \in X \land \forall y(y \in X \to y \notin x)))$$

***Lem.* 3.2.5.** 循環所属の禁止

$$\forall x \forall y(x \notin y \lor y \notin x)$$

Proof.
公理 3.2.3 より、$\{x, y\}$ が存在する。
公理 3.2.4 より、

$$\exists z(z \in \{x, y\} \land \forall t(t \in \{x, y\} \to t \notin z))$$

よって、

$$\forall t(t \in \{x, y\} \to t \notin x) \lor \forall t(t \in \{x, y\} \to t \notin y)$$

ゆえに、

$$(x \notin x \land y \notin x) \lor (x \notin y \land y \notin y)$$

したがって、

$$y \notin x \lor x \notin y$$

■

***Cor.* 3.2.6.** 自己所属の禁止

$$\forall x(x \notin x)$$

***Ax.* 3.2.5.** 選択の公理

$$\forall X(\varnothing \notin X \land \forall x \forall y(x \in X \land y \in X \land x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to \exists A \forall x(x \in X \to \exists t(x \cap A = \{t\})))$$

3.3 集合の和と冪

***Ax.* 3.3.1.** 和集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists B(t \in B \land B \in X))$$

***Def.* 3.3.1.** 和集合
集合系 X について、公理 3.3.1 の主張する集合 A が存在して、これは公理 3.2.1 から一意に定まる。このような集合 A を、X の和集合と呼び、$\bigcup X$ で表す。
和集合 $\bigcup\{x, y\}$ を、簡単のために $x \cup y$ とも表す。

***Cor.* 3.3.1.**

$$\forall X \forall x \Big(x \in X \to x \subset \bigcup X \Big)$$

***Cor.* 3.3.2.**

$$\forall X \forall Y \Big(X \subset Y \to \bigcup X \subset \bigcup Y \Big)$$

***Cor.* 3.3.3.**

$$\forall x \forall y \forall z (x \subset y \to x \cup z \subset y \cup z)$$

***Cor.* 3.3.4.**

$$\bigcup \varnothing = \varnothing$$

***Cor.* 3.3.5.**

$$\forall x \Big(\bigcup \{x\} = x \Big)$$

***Ax.* 3.3.2.** 冪集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \subset X)$$

***Def.* 3.3.2.** 冪集合

集合 X について、公理 3.3.2 の主張する集合 A が存在して、これは公理 3.2.1 から一意に定まる。このような集合 A を、冪集合と呼び、$\mathfrak{P}(X)$ で表す。

***Rem.* 3.3.1.** 包含される量化子についての略記

略記 $\forall \subset, \exists \subset$ を以下で定める。

$$\forall x \subset X(p(x)) :\leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{P}(X)(p(x))$$
$$\exists x \subset X(p(x)) :\leftrightarrow \exists x \in \mathfrak{P}(X)(p(x))$$

***Cor.* 3.3.6.**

$$\forall X (\varnothing \in \mathfrak{P}(X) \land X \in \mathfrak{P}(X))$$

***Cor.* 3.3.7.**

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \to \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y))$$

***Cor.* 3.3.8.**

$$\mathfrak{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

***Cor.* 3.3.9.**

$$\forall x (\mathfrak{P}(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\})$$

***Cor.* 3.3.10.**

$$\forall X \left(\bigcup \mathfrak{P}(X) = X \right)$$

***Def.* 3.3.3.** 被覆

集合 A について、以下を満たす集合 X を A の被覆と呼ぶ。

$$X \subset \mathfrak{P}(A) \land A = \bigcup X$$

3.4 集合の置換

***Ax.* 3.4.1.** 置換の公理図式

アリティ 2 の述語記号 ψ をパラメータとする以下の公理図式を考える。

$$\forall x \forall y \forall z (\psi(x, y) \land \psi(x, z) \to y = z) \to \forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists x (x \in X \land \psi(x, t)))$$

***Rem.* 3.4.1.** 集合の内包的定義１

公理 3.2.1 より、公理 3.4.1 より主張される集合 A は一意に定まる。公理 3.4.1 に基づく定義方法を、内包的定義と呼び、公理 3.4.1 の前件を満たすアリティ 2 の述語記号 ψ について、以下で表す。

$$A = \{y \mid \exists x \in X (\psi(x, y))\}$$

***Thm.* 3.4.1.** 分出の公理図式

アリティ 1 の述語記号 ψ について、以下が成り立つ。

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \in X \land \psi(t))$$

Proof.

アリティ 1 の述語記号 P を考える。排中律より、

$$\forall X\Big(\exists a(a \in X \land P(a)) \lor \forall a \neg(a \in X \land P(a))\Big)$$

$\forall a \neg(a \in X \land P(a))$ のとき、$A = \varnothing$ で示される。

$\exists a(a \in X \land P(a))$ のとき、以下のようなアリティ 2 の述語記号 ψ を考える。

$$\psi(x, y) :\leftrightarrow (P(x) \land y = x) \lor (\neg P(x) \land y = a)$$

$\psi(x, y) \land \psi(x, z)$ とすると、$P(x)$ であるとき $y = x = z$ であり、$\neg P(x)$ であるとき $y = a = z$ である。
排中律より、$y = z$ が成り立つ。
したがって公理 3.4.1 より、

$$\exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \land ((P(x) \land y = x) \lor (\neg P(x) \land y = a))))$$

すなわち、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists x((x \in X \land P(x) \land t = x) \lor (x \in X \land \neg P(x) \land t = a)))$$

$\exists$ を除去して、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow (t \in X \land P(t)) \lor t = a)$$

$t = a \to (a \in X \land P(a))$ より、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \land P(t))$$

■

***Rem.* 3.4.2. 集合の内包的定義２**

公理 3.2.1 より、定理 3.4.1 より主張される集合 A は一意に定まる。定理 3.4.1 に基づく定義方法も、内包的定義と呼び、以下で表す。

$$A = \{t \mid t \in X \land \psi(t)\}$$

簡単のために、以下でも表す。

$$A = \{t \in X \mid \psi(t)\}$$

***Def.* 3.4.1. 共通集合**

集合系 X について、以下で定める集合を、X の共通集合と呼び、$\bigcap X$ で表す。

$$\bigcap X := \Big\{x \mid x \in \bigcup X \land \forall Y(Y \in X \to x \in Y)\Big\}$$

共通集合 $\bigcap\{x, y\}$ を、簡単のために $x \cap y$ とも表す。

***Rem.* 3.4.3. 共通集合の定義について**

本ノートにおける共通集合の定義は、$\bigcap \varnothing$ の取り扱いにおいて一般的ではないことに注意されたい。

***Cor.* 3.4.2.**

$$\bigcap \varnothing = \varnothing$$

***Cor.* 3.4.3.**

$$\forall x \forall X\left(x \in X \to \bigcap X \subset x\right)$$

***Cor.* 3.4.4.**

$$\forall x \forall y \forall z(x \subset y \to x \cap z \subset y \cap z)$$

***Cor.* 3.4.5.**

$$\forall X \forall Y\left(X \neq \varnothing \land X \subset Y \to \bigcap Y \subset \bigcap X\right)$$

***Cor.* 3.4.6.**

$$\forall x\left(\bigcap \{x\} = x\right)$$

***Cor.* 3.4.7. 吸収法則**

$$\forall x \forall y(x \cup (x \cap y) = x)$$
$$\forall x \forall y(x \cap (x \cup y) = x)$$

***Cor.* 3.4.8. 分配法則**

$$\forall x \forall y \forall z(x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$
$$\forall x \forall y \forall z(x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$$

***Cor.* 3.4.9.**

$$\forall X\left(\bigcap X \subset \bigcup X\right)$$

***Cor.* 3.4.10.**

$$\forall X \forall Y(\mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cap Y))$$

***Def.* 3.4.2. 分割**

集合 A について、以下を満たす A の被覆 X を A の分割と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$$

明示的に以下で表す。

$$A = \bigsqcup X$$

***Def.* 3.4.3. 差集合**

集合 X, Y について、以下で定める集合を、X と Y の差集合と呼び、$X \setminus Y$ で表す。

$$X \setminus Y \coloneqq \{x \mid x \in X \land x \notin Y\}$$

***Cor.* 3.4.11.**

$$\forall X \forall Y(X \setminus Y \subset X)$$

***Cor.* 3.4.12.**

$$\forall X(X \setminus X = \varnothing)$$
$$\forall X(X \setminus \varnothing = X)$$
$$\forall X(\varnothing \setminus X = \varnothing)$$

***Cor.* 3.4.13.**

$$\forall X \forall Y \forall Z(X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z))$$

***Cor.* 3.4.14.**

$$\forall X \forall Y \forall Z(Y \subset Z \to X \setminus Z \subset X \setminus Y)$$

***Cor.* 3.4.15.**

$$\forall X \forall Y(X \subset Y \leftrightarrow X \setminus Y = \varnothing)$$

***Thm.* 3.4.16. De Morgan の法則**

集合 X と空でない集合系 A について、以下が成り立つ。

$$X \setminus \bigcup A = \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$
$$X \setminus \bigcap A = \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

Proof.

第一の定理を示す。以下は上からも下からも成り立つ。

$$x \in X \setminus \bigcup A$$
$$x \in X \land x \notin \bigcup A$$
$$x \in X \land \forall Y(Y \in A \to x \notin Y)$$
$$x \in X \land \forall Y(Y \in A \to x \in X \setminus Y)$$

$A \neq \varnothing$ より、以下が上からも下からも成り立つ。

$$x \in X \setminus \bigcup A$$
$$x \in X \land x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$
$$x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

第二の定理を示す。以下は上からも下からも成り立つ。

$$x \in X \setminus \bigcap A$$
$$x \in X \land x \notin \bigcap A$$
$$x \in X \land \Big(x \notin \bigcup A \lor \exists Y(Y \in A \land x \notin Y)\Big)$$
$$x \in X \setminus \bigcup A \lor \exists Y(Y \in A \land x \in X \setminus Y)$$
$$x \in X \setminus \bigcup A \lor x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$
$$x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \lor x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$
$$x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

最後から 2 行目への変形には、第一の定理を用いた。 ■

3.5 順序対と集合の直積

***Def.* 3.5.1.** 順序対

集合 x, y について、公理 3.2.3 から、$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ が存在する。
この集合を、順序対と呼び、(x, y) で表す。

***Cor.* 3.5.1.** 順序対の相等

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2((x_1, x_2) = (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 = y_1 \land x_2 = y_2)$$

***Cor.* 3.5.2.** 順序対の順序性

$$\forall x \forall y (x \neq y \to (x, y) \neq (y, x))$$

***Cor.* 3.5.3.** 順序対の取り出し

$$\forall x \forall y \Big(x = \bigcup \bigcap (x, y) \Big)$$
$$\forall x \forall y \Big(\Big(\bigcup (x, y) \setminus \bigcap (x, y) \Big) = \varnothing \to y = \bigcup \bigcap (x, y) \Big)$$
$$\forall x \forall y \Big(\Big(\bigcup (x, y) \setminus \bigcap (x, y) \Big) \neq \varnothing \to y = \bigcup \Big(\bigcup (x, y) \setminus \bigcap (x, y) \Big) \Big)$$

***Lem.* 3.5.4.**

$$\forall X \forall Y \forall x \forall y (x \in X \land y \in Y \to (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)))$$

Proof.

$$x \in X \land y \in Y$$
$$\{x\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \land \{x, y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y)$$
$$(x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y))$$

■

***Def.* 3.5.2.** 直積集合

集合 X, Y について、以下を満たす集合を X と Y の直積集合と呼び、$X \times Y$ で表す。

$$X \times Y \coloneqq \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \exists y (x \in X \land y \in Y \land z = (x, y))\}$$

***Cor.* 3.5.5.**

$$\forall X (X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing)$$

***Cor.* 3.5.6.**

$$\forall X_1, X_2, Y ((X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y))$$
$$\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 ((X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2))$$
$$\forall X_1, X_2, Y ((X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y))$$

3.6 後者と無限

***Def.* 3.6.1.** 後者

集合 x について、公理 3.2.3、公理 3.3.1 より、$x \cup \{x\}$ が存在する。

この集合を x の後者と呼び、x^+ で表す。

***Lem.* 3.6.1.**

以下が成り立つ。

$$\forall x\bigl(x \neq x^+\bigr)$$

Proof.

系 3.2.6 より成り立つ。 ■

***Lem.* 3.6.2.** 後続と包含

以下が成り立つ。

$$\forall x, y\bigl(x \subset y \wedge y \subset x^+ \to x = y \vee x^+ = y\bigr)$$

Proof.

$x \in y$ のときを考える。

$x \subset y \wedge \{x\} \subset y$ より、$x^+ \subset y$ である。仮定より $x^+ \subset y$ であるので、$x^+ = y$ である。

$x \notin y$ のときを考える。

仮定より $y \subset x \cup \{x\}$ より、$y \subset x$ である。$x \subset y$ であるので、$x = y$ である。 ■

***Lem.* 3.6.3.** 後者は単射的

以下が成り立つ。

$$\forall x, y\bigl(x^+ = y^+ \to x = y\bigr)$$

Proof.

$x \in x^+$ より、$x \in y^+$ であるため、$x \in y \vee x = y$ である。

同様に、$y \in y^+$ より、$y \in x \vee x = y$ である。

$x \neq y$ とすると、$x \in y \wedge y \in x$ となるが、補題 3.2.5 より矛盾する。 ■

***Ax.* 3.6.1.** 無限の公理

$$\exists A(\varnothing \in A \wedge \forall x(x \in A \to x \cup \{x\} \in A))$$

***Def.* 3.6.2.** 無限系譜

集合 X が無限系譜であるとは、以下を満たすことである。

$$\varnothing \in X \wedge \forall x\bigl(x \in X \to x^+ \in X\bigr)$$

公理 3.6.1 より無限系譜は存在する。

***Cor.* 3.6.4.**

$$\forall X \forall Y \bigl(X \text{ は無限系譜である} \land Y \text{ は無限系譜である} \to X \cap Y \text{ は無限系譜である}\bigr)$$

***Lem.* 3.6.5.** 無限系譜の共通部分は無限系譜

以下が成り立つ。

$$\forall A \Bigl(A \neq \varnothing \land \forall X \in A \bigl(X \text{ は無限系譜である}\bigr) \to \bigcap A \text{ は無限系譜である}\Bigr)$$

Proof.

空でない A を考える。

$\forall X \in A(\varnothing \in X)$ であるので、$\varnothing \in \bigcap A$ である。

$\forall x \in \bigcap A$ について、$\forall X \in A(x \in X)$ であり、無限系譜であることから $x^+ \in X$ である。

ゆえに、$x^+ \in \bigcap A$ である。

よって、$\bigcap A$ は無限系譜である。 ■

***Thm.* 3.6.6.** 最小無限系譜の一意性

無限系譜 X について、以下で定める集合は無限系譜である。

$$\bigcap \bigl\{Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である}\bigr\}$$

この集合は、無限系譜 X の取り方によらずに一意に定まる。

Proof.

$A :\!= \bigl\{Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である}\bigr\}$ とすると、$X \in A$ より、$A \neq \varnothing$ である。

補題 3.6.5 より成り立つ。

$\omega(X) :\!= \bigcap \bigl\{Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である}\bigr\}$ とする。

X_1, X_2 の 2 つの無限系譜を考える。

補題 3.6.5 より $X_1 \cap X_2$ も無限系譜であり、定義より $\omega(X_2) \subset X_1 \cap X_2 \subset X_1$ である。

定義より、$\omega(X_1) \subset \omega(X_2)$ である。

同様に $\omega(X_1) \supset \omega(X_2)$ であるため、示される。 ■

4 写像

4.1 関係

***Def.* 4.1.1.** 関係

集合 X, Y と、集合系 $G \subset X \times Y$ について、順序対 $\mathfrak{R} :\!= ((X, Y), G)$ を関係と呼ぶ。

記号の濫用であるが、$\mathfrak{R}$ を以下で定めるアリティ 2 の述語としても扱う。

$$\mathfrak{R}(x, y) :\leftrightarrow (x, y) \in G$$

***Def.* 4.1.2.** 左一意的

関係 $\mathfrak{R}$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は左一意的であると言う。

$$\forall w, x(\exists y \in Y(\mathfrak{R}(w, y) \wedge \mathfrak{R}(x, y)) \to w = x)$$

***Def.* 4.1.3.** 右一意的

関係 $\mathfrak{R}$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は右一意的であると言う

$$\forall y, z(\exists x \in X(\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(x, z)) \to y = z)$$

***Def.* 4.1.4.** 一対一

関係 $\mathfrak{R}$ が左一意的かつ右一意的であるとき、$\mathfrak{R}$ は一対一であると言う。

***Def.* 4.1.5.** 左全域的

関係 $\mathfrak{R} = ((X, Y), G)$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は左全域的であると言う。

$$\forall x \in X \exists y \in Y(\mathfrak{R}(x, y))$$

***Def.* 4.1.6.** 右全域的

関係 $\mathfrak{R} = ((X, Y), G)$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は右全域的であると言う。

$$\forall y \in Y \exists x \in X(\mathfrak{R}(x, y))$$

4.2 写像

***Def.* 4.2.1.** 写像

右一意的かつ左全域的な関係 $f = ((X, Y), G)$ を写像と呼ぶ。

記号の濫用であるが、$f()$ を以下で定める $x \in X$ についての略記としても扱う。

$$f(x) :\equiv \bigcup \{y \in Y \mid \mathfrak{R}(x, y)\}$$

$f(x)$ を x での f の値と呼ぶ。

***Rem.* 4.2.1.** 関数クラスによる写像の定義

集合 X, Y と、関数クラス F について、順序対 $((X, Y), \{(x, F(x)) \mid x \in X\})$ は写像である。

このとき、記号の濫用であるが、この写像を F で表す。

***Rem.* 4.2.2. 集合の内包的定義３**

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たすアリティ 2 の述語記号 $\psi(x,y)$ を考える。

$$\forall x, y(\psi(x,y) :\leftrightarrow y = f(x))$$

f が写像であることから公理 3.4.1 の主張する集合 A が存在する。

A は、より簡潔に以下でも表す。

$$A = \{f(x) \mid x \in X\}$$

***Def.* 4.2.2. 恒等写像**

集合 X について、以下で定める集合系 Δ を考える。

$$\Delta \coloneqq \{(x,x) \mid x \in X\}$$

写像 $((X,X),\Delta)$ を恒等写像と呼び、id_X で表す。

***Cor.* 4.2.1.**

集合 X, Y について、以下が成り立つ。

$$X = Y \leftrightarrow \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y$$

***Def.* 4.2.3. 合成写像**

写像 $f = ((X,Y),G_f), g = ((Y,Z),G_g)$ について、以下で定める集合系 G を考える。

$$G \coloneqq \{(x,z) \mid \exists y \in Y(y = f(x) \land z = g(y))\}$$

関係 $((X,Z),G)$ は写像であり、これを f と g の合成写像、または単に合成と呼び、$g \circ f$ で表す。

***Cor.* 4.2.2. 写像の合成の結合法則**

写像 $f = ((X,Y),G_f), g = ((Y,Z),G_g), h = ((Z,W),G_h)$ について、以下が成り立つ。

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

***Rem.* 4.2.3. 写像の相等**

写像の相等は、集合の相等により定義される。

これは次のように言い換えることができる。写像 f, g について、$f = g$ とは、以下を満たすことである。

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \land \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g) \land \forall x \in \mathrm{dom}(f)(f(x) = g(x))$$

終域まで含めて相等とすることに注意されたい。

***Rem.* 4.2.4. 写像は射**

写像 $f = ((X,Y),G)$ を考える。$\mathrm{dom}(f)$ を id_X、$\mathrm{cod}(f)$ を id_Y として、合成を定義 4.2.3 で定義すると、写像は射の公理をみたす。

ここで記号の濫用であるが、id_X をして X を表し、X をして id_X を表す。

***Def.* 4.2.4. 集合と写像の圏**

写像を射とみなすと、写像であることは、圏となる。この圏を、集合と写像の圏と呼び、**Set** と表す。

***Cor.* 4.2.3.**
集合 X, Y について、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ は以下を満たす。

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) \leftrightarrow f \in \left\{((X, Y), G) \mid G \subset X \times Y \land G \text{ は右一意かつ左全域}\right\}$$

***Def.* 4.2.5. 写像の全体**
記号の濫用であるが、X から Y への写像全体がなす集合を、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ または Y^X で表す。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) \coloneqq \left\{((X, Y), G) \mid G \subset X \times Y \land G \text{ は右一意かつ左全域}\right\}$$

***Cor.* 4.2.4.**
以下が成り立つ。

$$\forall Y(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\varnothing, Y) = \{((\varnothing, Y), \varnothing)\})$$
$$\forall X(X \neq \varnothing \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \varnothing) = \varnothing)$$

4.3 像と原像

***Def.* 4.3.1. 像**
写像 $f\colon X \to Y$ と、X の部分集合 A について、以下で定める集合を A の f による像と呼び、$f(A)$ で表す。

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$$

また、$f(X)$ を $\mathrm{Im}(f)$ でも表す。

***Lem.* 4.3.1. 像の性質**
写像 $f\colon X \to Y$ について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2 \subset X(A_1 \subset A_2 \to f(A_1) \subset f(A_2))$$
$$\forall B \subset \mathfrak{P}(X)\left(f\left(\bigcup B\right) = \bigcup \{f(A) \mid A \in B\}\right)$$
$$\forall B \subset \mathfrak{P}(X)\left(f\left(\bigcap B\right) \subset \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}\right)$$
$$\forall A_1, A_2 \subset X(f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2))$$

Proof.
第一式を示す。
$y \in f(A_1)$ のとき、$\exists x \in A_1(y = f(x))$、$\exists x \in A_2(y = f(x))$、ゆえに $y \in f(A_2)$

第二式を示す。

$$y \in f\left(\bigcup B\right)$$
$$\exists x \in \bigcup B(y = f(x))$$
$$\exists A \in B \exists x \in A(y = f(x))$$
$$\exists A \in B(y \in f(A))$$
$$y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\}$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。

第三式を示す。
$y \in f(\bigcap B)$ を考える。
$\exists x(x \in \bigcup B \land \forall A \in B(x \in A) \land y = f(x))$ である。
$\exists x(x \in \bigcup B \land y = f(x))$ より、$y \in f(\bigcup B)$ であり、第二式より $y \in \bigcup\{f(A) \mid A \in B\}$ である。
$\exists x(\forall A \in B(x \in A) \land y = f(x))$ より、$\forall A \in B(y \in f(A))$ である。
ゆえに、$y \in \bigcap\{f(A) \mid A \in B\}$ である。

第四式を示す。
$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ を考える。
$\exists x(y = f(x) \land x \in A_1) \land \forall x(y = f(x) \to x \notin A_2)$ である。
ただちに、$\exists x(y = f(x) \land x \in A_1 \setminus A_2)$ である。
したがって、$y \in f(A_1 \setminus A_2)$ である。 ■

***Def.* 4.3.2. 原像**
写像 $f\colon X \to Y$ と集合 A について、以下で定める集合を、集合 A の原像と呼び、$f^{-1}(A)$ で表す。

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

***Cor.* 4.3.2. 像と原像**
写像 $f\colon X \to Y$ について、以下が成り立つ。

$$\forall A \subset X\bigl(f^{-1}(f(A)) \supset A\bigr)$$
$$\forall B\bigl(f\bigl(f^{-1}(B)\bigr) \subset B\bigr)$$

***Lem.* 4.3.3. 原像の性質**
写像 f について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2\bigl(A_1 \subset A_2 \to f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2)\bigr)$$
$$\forall B\Bigl(f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr) = \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr)$$
$$\forall B\Bigl(f^{-1}\Bigl(\bigcap B\Bigr) = \bigcap\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr)$$
$$\forall A_1, A_2\bigl(f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \setminus A_2)\bigr)$$

Proof.
第一式を示す。
$x \in f^{-1}(A_1)$ について、$f(x) \in A_1 \subset A_2$ ゆえに $x \in f^{-1}(A_2)$

第二式を示す。

$$
\begin{gathered}
x \in f^{-1}\Big(\bigcup B\Big) \\
f(x) \in \bigcup B \\
\exists A \in B(f(x) \in A) \\
\exists A \in B\big(x \in f^{-1}(A)\big) \\
x \in \bigcup \big\{f^{-1}(A) \mid A \in B\big\}
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。

第三式を示す。

$$
\begin{gathered}
x \in f^{-1}\Big(\bigcap B\Big) \\
f(x) \in \bigcap B \\
f(x) \in \bigcup B \wedge \forall A \in B(f(x) \in A) \\
x \in f^{-1}\Big(\bigcup B\Big) \wedge \forall A \in B\big(x \in f^{-1}(A)\big) \\
x \in \bigcup \big\{f^{-1}(A) \mid A \in B\big\} \wedge \forall A \in B\big(x \in f^{-1}(A)\big) \\
x \in \bigcap \big\{f^{-1}(A) \mid A \in B\big\}
\end{gathered}
$$

4 行目から 5 行目に第二式を用いている。
上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。

第四式について、

$$
\begin{gathered}
x \in f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) \\
f(x) \in A_1 \wedge f(x) \notin A_2 \\
f(x) \in A_1 \setminus A_2 \\
x \in f^{-1}(A_1 \setminus A_2)
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 3.2.1 より成り立つ。 ■

4.4 いくつかの重要な集合と写像

***Def.* 4.4.1.** 包含写像

集合 X と、その部分 A について、以下で定める関係 $\iota_{A,X}$ は写像である。

$$\iota_{A,X} \coloneqq ((A,X), \{(x,x) \mid x \in A\})$$

この $\iota_{A,X}$ を包含写像と呼ぶ。

***Def.* 4.4.2.** 制限写像

写像 $f = ((X,Y),G)$ と、X の部分 A について、以下で定める写像 $f|_A$ を、f の A への制限写像、または単に制限と呼ぶ。

$$f|_A \coloneqq f \circ \iota_{A,X}$$

***Cor.* 4.4.1.**

単集合は **Set** の終対象である。

***Cor.* 4.4.2.**

空集合は $\mathbf{Set}$ の始対象である。

***Def.* 4.4.3.** 空写像

空集合は $\mathbf{Set}$ の始対象であるので、終域 Y について、始域が空集合である写像は一意に定まる。

この写像を Y の空写像と呼ぶ。

***Lem.* 4.4.3.** 集合の圏における等化子の存在

写像 $f, g \colon X \to Y$ を考える。

以下を満たす $\mathrm{Eq}(f, g), u$ は、f, g の等化子である。

$$\mathrm{Eq}(f, g) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
$$u \coloneqq \iota_{\mathrm{Eq}(f,g),X}$$

Proof.

$f \circ h = g \circ h$ なる $h \colon Z \to X$ を考える。

$\forall z \in Z(f(h(z)) = g(h(z)))$ より、$\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Eq}(f, g)$ である。

ゆえに $k = ((Z, \mathrm{Eq}(f, g)), \{(z, h(z)) \mid z \in Z\})$ は写像である。

$h = u \circ k$ である。

$k' \colon Z \to \mathrm{Eq}(f, g)$ について、$k' \neq k$ とすると直ちに $h \neq u \circ k'$ である。

したがって一意である。 ■

***Def.* 4.4.4.** 小さい圏

圏 $\boldsymbol{C}$ について、$\boldsymbol{C}$ の射を対象とする離散圏 $\hat{\boldsymbol{C}}$ が集合であるとき、$\boldsymbol{C}$ を小さいと呼ぶ。

***Cor.* 4.4.4.**

小さい圏 $\boldsymbol{J}$ について、$\mathrm{Obj}_{\boldsymbol{J}}$ は小さい。

***Cor.* 4.4.5.**

小さい離散圏 $\boldsymbol{J}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\mathbf{Set}$ への関手 X を考える。

このとき、以下で定める $\prod X, \pi$ は X の積である。

$$\prod X \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(\boldsymbol{J}, \bigcup\{X(j) \mid j \in \boldsymbol{J}\}\right) \mid \forall j \in \boldsymbol{J}(f(j) \in X(j)) \right\}$$
$$\pi(j)(f) \coloneqq f(j)$$

***Cor.* 4.4.6.**

集合 X, Y について、以下で定める離散圏 $\mathbf{2}$ と $\mathbf{2}$ から $\mathbf{Set}$ への関手 F を考える。

$$f \in \mathbf{2} \leftrightarrow f = 0 \vee f = 1$$
$$F(0) = X \wedge F(1) = Y$$

このとき、$X \times Y, \pi$ は F の積である。

ただし、$\pi(0)((x, y)) = x, \pi(1)((x, y)) = y$ とする。

***Cor.* 4.4.7.**
小さい離散圏 $\boldsymbol{J}$ と、$\boldsymbol{J}$ から $\mathbf{Set}$ への関手 X を考える。
このとき、以下で定める x, u は X の和である。

$$x \coloneqq \bigcup \{\{(j, x) \mid x \in X(j)\} \mid j \in \boldsymbol{J}\}$$
$$u(j)(x) \coloneqq (j, x)$$

4.5 選択

***Lem.* 4.5.1. 選択公理が与える写像**
集合 X, Y とアリティ 2 の述語記号 ψ について、$\forall x \in X \exists y \in Y(\psi(x, y))$ が成り立つとする。
このとき、以下を満たす写像 $f\colon X \to Y$ が存在する。

$$\forall x \in X \forall y \in Y(f(x) = y \to \psi(x, y))$$

Proof.
$X = \varnothing$ のとき、空写像が存在する。

$X \neq \varnothing$ のときを考える。以下の集合 Z を考える。

$$Z \coloneqq \{\{(x, y) \mid y \in Y \wedge \psi(x, y)\} \mid x \in X\}$$

Z について公理 3.2.5 の主張する集合 A が存在する。
関係 $((X, Y), A)$ は、仮定より X について左全域的で、A の定義より右一意的である。 ■

***Thm.* 4.5.2. 選択関数の存在**
任意の集合 X について、写像 $f\colon X \setminus \{\varnothing\} \to \bigcup X$ が存在して、以下が成り立つ。

$$\forall x \in X \setminus \{\varnothing\}(f(x) \in x)$$

Proof.
$\forall x \in X \setminus \{\varnothing\}$ について、$\exists y(y \in x)$ である。この y は、$y \in x$ より、$y \in \bigcup X$ である。
ゆえに、補題 4.5.1 より存在する。 ■

***Lem.* 4.5.3. 非空からなる積は非空**
空でない集合 J から $\mathbf{Set}$ への関手 X について、以下が成り立つ。

$$\forall j \in J(X(j) \neq \varnothing) \to \prod X \neq \varnothing$$

Proof.
$Z \coloneqq \{X(j) \mid j \in J\}$ について、定義より $Z \neq \varnothing \wedge \varnothing \notin Z$ である。
定理 4.5.2 より、写像 $f\colon Z \to \bigcup Z$ が存在して、$\forall z \in Z(f(z) \in z)$ である。
写像 $g\colon J \to \bigcup Z$ を $g(j) \coloneqq f(X(j))$ で定義すると、$\forall j \in J(g(j) \in X(j))$ であるので、$g \in \prod X$ である。
ゆえに、$\prod X \neq \varnothing$ である。 ■

4.6　単射と全射

***Lem.* 4.6.1. 単射**

写像 f について、以下の 3 つは同値である。

1. f が左簡約可能
2. f が左一意的（単射）
3. f が、空写像または左可逆

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。
f が空写像であるとき、左一意的である。f が空写像でないときを考える。
$x \in \mathrm{dom}(f)$ について、写像 $g_x \colon \{\varnothing\} \to \mathrm{dom}(f), g(\varnothing) \coloneqq x$ を考える。
$f(x) = f(y)$ であるとき、$f \circ g_x = f \circ g_y$ であり、左簡約可能より $g_x = g_y$、すなわち $x = y$ である。

2. $\to$ 3. を示す。左一意的かつ空写像でないならば、左可逆であることを示す。
空でないので $\exists x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ より、以下で定める集合 G が存在する。

$$G \coloneqq \{(y, x) \in \mathrm{cod}(f) \times \mathrm{dom}(f) \mid y = f(x)\} \cup \{(y, x_0) \mid y \in \mathrm{cod}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)\}$$

写像 $g \coloneqq ((\mathrm{cod}(f), \mathrm{dom}(f)), G)$ は、定義より f の左逆写像となる。

3. $\to$ 1. を示す。
f が空写像であるときを考える。
f に右から合成可能、すなわち、終域を空集合とする写像は、$g_0 \colon \varnothing \to \varnothing$ のみであるので、左簡約可能である。
f が左可逆であるとき、左可逆ならば左簡約可能であるため、明らか。 ■

***Cor.* 4.6.2.**

包含写像は単射である。

***Lem.* 4.6.3.**

集合 X, Y について、単射 $f \colon X \to Y$ が存在するならば、単射 $g \colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ が存在する。

Proof.

$g(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$ で定義する写像は、単射である。 ■

***Lem.* 4.6.4. 全射**

写像 f について、以下の 3 つは同値である。

1. f が右簡約可能
2. f が右全域的（全射）
3. f が右可逆

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。
右全域的でないとすると、$\exists y \in Y \forall x \in X (f(x) \neq y)$ である。
$g, h \in \mathrm{Map}(Y, \{\varnothing, \{\varnothing\}\})$ について、$g(y) = \varnothing, h(y) = \{\varnothing\}$ であり、$\forall w \in Y \setminus \{y\} (g(w) = h(w))$ とする。
$g \circ f = h \circ f$ であるが、$g \neq h$ であり、右簡約可能ではない。

対偶法より示される。

2. $\to$ 3. を示す。
補題 4.5.1 の与える写像は、右逆写像である。

3. $\to$ 1. は、右可逆ならば右簡約可能であるため、明らか。 ■

***Def.* 4.6.1. 全単射**
写像 f が同型射であるとき、f を全単射と呼ぶ。

***Def.* 4.6.2. 逆写像**
写像 f の逆射を逆写像と呼ぶ。

***Lem.* 4.6.5.**
全単射 $f\colon X \to Y$ と Y の部分集合 A について、原像 $f^{-1}(A)$ と逆写像の像 $f^{-1}(A)$ は一致する。

Proof.
全単射より、$\forall y \in A \exists x \in X(y = f(x))$ である。定義より明らか。 ■

***Thm.* 4.6.6. Cantor の対角線論法**
単射 $f\colon \mathfrak{P}(A) \to A$ は存在しない。

Proof.
存在すると仮定する。
以下の集合 Y を考える。

$$Y \coloneqq \{f(X) \mid X \subset A \land f(X) \notin X\}$$

このとき $Y \subset A$ である。
$f(Y) \notin Y$ とすると、定義より $f(Y) \in Y$ である。ゆえに矛盾。
$f(Y) \in Y$ とすると、$\exists Z \subset A(f(Z) \notin Z \land f(Z) = f(Y))$ であるが、f の単射性より $Y = Z$ ゆえに $f(Y) \notin Y$ である。ゆえに矛盾。
背理法より示される。 ■

5 関係

5.1 自己関係

***Def.* 5.1.1. 自己関係**
関係 $((X, Y), G)$ について、$X = Y$ であるとき、X 上の自己関係、または単に X 上の関係と呼ぶ。
簡単のために、X 上の関係と書いて G を表すものとする。
また、X 上の関係 G について、アリティ 2 の述語記号 G を以下で定める。

$$G(x, y) :\leftrightarrow (x, y) \in G$$

***Def.* 5.1.2.** 反射的

集合 X 上の関係 G が反射的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x \in X(G(x,x))$$

***Def.* 5.1.3.** 対称的

集合 X 上の関係 G が対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y \in X(G(x,y) \to G(y,x))$$

***Def.* 5.1.4.** 反対称的

集合 X 上の関係 G が反対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y \in X(G(x,y) \land G(y,x) \to x = y)$$

***Def.* 5.1.5.** 推移的

集合 X 上の関係 G が推移的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y,z \in X(G(x,y) \land G(y,z) \to G(x,z))$$

***Def.* 5.1.6.** 完全

集合 X 上の関係 G が完全であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y \in X(x \neq y \to G(x,y) \lor G(y,x))$$

***Cor.* 5.1.1.**

$\varnothing$ 上の関係は一意に定まり、それは、反射的、対称的、反対称的、推移的、完全である。

***Def.* 5.1.7.** 写像が誘導する自己関係

写像 $f\colon X \to Y$ と、Y 上の自己関係 G_Y を考える。

このとき、以下で定める X 上の自己関係 G_X を考える。

$$G_X(x,y) :\leftrightarrow G_Y(f(x),f(y))$$

この G_X を、f が G_Y から誘導する自己関係と呼ぶ。

***Rem.* 5.1.1.** 包含写像が誘導する自己関係

集合 X 上の自己関係 G について、特に明示しなければ X の部分 A の自己関係を、包含写像が誘導する自己関係で定めるものとする。

Cor. **5.1.2.** 写像が誘導する自己関係

写像 $f\colon X \to Y$ と、Y 上の自己関係 G_Y を考える。

f が G_Y から誘導する自己関係 G_X を考える。

このとき、以下が成り立つ。

1. G_Y が反射的ならば、G_X は反射的である。
2. G_Y が対称的ならば、G_X は対称的である。
3. f が単射かつ G_Y が反対称的ならば、G_X は反対称的である。
4. G_Y が推移的ならば、G_X は推移的である。
5. G_Y が完全ならば、G_X は完全である。

5.2 前順序

Def. **5.2.1.** 前順序

集合 X 上の反射的かつ推移的な自己関係 G を、前順序と呼ぶ。

前順序であることを明示的に記号 $\preccurlyeq$ で表す。

簡単のため、$\preccurlyeq (x,y)$ を $x \preccurlyeq y$ でも表す。

組 $(X, \preccurlyeq)$ を、前順序集合、または単に前順序と呼ぶ。

Rem. **5.2.1.** 前順序の定義

より簡単に、$x \preccurlyeq y :\leftrightarrow \cdots$ の形式によって述語として前順序を定義できる。

Def. **5.2.2.** 前順序に関わるいくつかの述語

アリティ 2 の述語 $\prec, \succcurlyeq, \succ$ を以下のように定める。

$$
\begin{aligned}
x \prec y &:\leftrightarrow x \preccurlyeq y \land x \neq y \\
x \succcurlyeq y &:\leftrightarrow y \preccurlyeq x \\
x \succ y &:\leftrightarrow y \prec x
\end{aligned}
$$

Cor. **5.2.1.**

前順序集合 X について、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\forall x, y \in X (x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \lor x = y) \\
&\forall x, y \in X (x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \succ y \lor x = y)
\end{aligned}
$$

Def. **5.2.3.** 上界

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が上に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A (a \preccurlyeq b)$$

このとき、b を A の上界と呼ぶ。

***Def.* 5.2.4. 下界**

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が下に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(b \preccurlyeq a)$$

このとき、b を A の下界と呼ぶ。

***Def.* 5.2.5. 有界**

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が有界であるとは、A が上に有界かつ下に有界であることである。

***Cor.* 5.2.2.**

空でない前順序集合 X について、$\varnothing$ は有界である。

***Def.* 5.2.6. 有向集合**

前順序集合 Λ が以下を満たすとき、Λ を有向集合と呼ぶ。

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda\bigl(\{\lambda, \mu\} \text{ は上に有界}\bigr)$$

***Def.* 5.2.7. 共終**

前順序集合 X について、X の部分 A が以下を満たすとき、A を共終な部分と呼ぶ。

$$\forall x \in X \exists a \in A(x \preccurlyeq a)$$

***Def.* 5.2.8. 上方集合**

前順序集合 X とその元 $x_0 \in X$ について、集合 $X_{\succcurlyeq x_0}, X_{\succ x_0}$ を以下で定める。

$$X_{\succcurlyeq x_0} \coloneqq \{x \in X \mid x_0 \preccurlyeq x\}$$
$$X_{\succ x_0} \coloneqq \{x \in X \mid x_0 \prec x\}$$

***Def.* 5.2.9. 単調**

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たすとき、f は単調であるという。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq_X y \to f(x) \preccurlyeq_Y f(y))$$

***Cor.* 5.2.3.**

単調な $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ について、$g \circ f$ は単調である。

***Def.* 5.2.10. 狭義単調**

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たすとき、f は狭義単調であるという。

$$\forall x, y \in X(x \prec_X y \to f(x) \prec_Y f(y))$$

***Cor.* 5.2.4.**
狭義単調な写像は、単調である。

5.3 前順序と圏論

***Def.* 5.3.1.** 前順序集合の圏
単調写像を射とみなすと、単調写像であることは圏となる。
この圏を前順序集合の圏と呼び、**Ord** で表す。

***Def.* 5.3.2.** 順序同型
Ord の同型射を順序同型と呼ぶ。

***Cor.* 5.3.1.**
順序同型ならば狭義単調である。

***Def.* 5.3.3.** 前順序が誘導する圏
前順序集合 $(X, \preccurlyeq)$ について、$\preccurlyeq$ の元 (x, y) を考える。$\mathrm{dom}((x, y)) = (x, x), \mathrm{cod}((x, y)) = (y, y)$ として、合成を $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$ で定義すると、G は圏となる。
このように定める圏 G を、前順序 X が誘導する圏と呼ぶ。
誤解のない範囲で、前順序 X が誘導する圏を前順序集合 X で表す。
ここで記号の濫用であるが、(x, x) をして x を表し、x をして (x, x) を表す。

***Cor.* 5.3.2.**
前順序が誘導する圏 X について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y \in X \forall f, g \in \mathrm{Hom}_X(x, y)(f = g)$$

***Def.* 5.3.4.** 最大元
前順序集合 X について、X の終対象が存在するならば、この終対象 m を X の最大元と呼ぶ。
すなわち、以下である。

$$\forall x \in X(x \preccurlyeq m)$$

***Def.* 5.3.5.** 最小元
前順序集合 X について、X の始対象が存在するならば、この始対象 m を X の最小元と呼ぶ。
すなわち、以下である。

$$\forall x \in X(m \preccurlyeq x)$$

***Def.* 5.3.6.** 下限
前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。
離散圏 A から前順序が誘導する圏 X への関手 id について、この積 x, u が存在するならば、x を A の下限と呼ぶ。
すなわち、以下である。

$$\forall a \in A(x \preccurlyeq a) \land \forall x' \in X(\forall a \in A(x' \preccurlyeq a) \to x' \preccurlyeq x)$$

***Def.* 5.3.7.** 上限

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

離散圏 A から前順序が誘導する圏 X への関手 id について、この和 x, u が存在するならば、x を A の上限と呼ぶ。

すなわち、以下である。

$$\forall a \in A(a \preccurlyeq x) \land \forall x' \in X(\forall a \in A(a \preccurlyeq x') \to x \preccurlyeq x')$$

***Lem.* 5.3.3.** 単調像と上限

前順序集合 X, Y について、単調写像 $f\colon X \to Y$ を考える。

X の部分 A について、A の上限 x と、$f(A)$ の上限 y が存在するとする。

このとき、以下が成り立つ。

$$y \preccurlyeq f(x)$$

Proof.

x は上限より、$\forall a \in A(a \preccurlyeq x)$ であり、単調性より $\forall a \in A(f(a) \preccurlyeq f(x))$ である。

ゆえに、$f(x)$ は $f(A)$ の上界であるので、$f(x) \preccurlyeq \sup f(A) = y$ である。 ■

***Lem.* 5.3.4.** 単調像と下限

前順序集合 X, Y について、単調写像 $f\colon X \to Y$ を考える。

X の部分 A について、A の下限 x と、$f(A)$ の下限 y が存在するとする。

このとき、以下が成り立つ。

$$f(x) \preccurlyeq y$$

Proof.

補題 5.3.3 と同様に示せる。 ■

***Def.* 5.3.8.** 射影系

前順序集合 Λ と圏 $\boldsymbol{C}$ について、Λ^{op} から $\boldsymbol{C}$ への関手 X を、射影系と呼ぶ。

***Def.* 5.3.9.** 射影極限

射影系 X ついて、X の極限を射影極限と呼ぶ。

***Def.* 5.3.10.** 帰納極限

射影系 X ついて、X の余極限を帰納極限と呼ぶ。

5.4 同値関係

***Def.* 5.4.1.** 同値関係

対称的な前順序を、同値関係と呼ぶ。同値関係であることを明示的に記号 $\sim$ で表す。

***Cor.* 5.4.1.**

等号は同値関係である。集合 X 上の同値関係であることを明示的に、$=_X$ で表す。

***Def.* 5.4.2.** 写像が誘導する同値関係

写像 $f\colon X \to Y$ について、f が $=_Y$ から誘導する X 上の自己関係は同値関係である。

この同値関係を、写像 f が誘導する X 上の同値関係と呼ぶ。

***Cor.* 5.4.2.**
写像 $f\colon X \to Y$ について、f が誘導する X 上の同値関係 $\sim_f$ を考える。
$\sim_f$ について、$\sim_f, (\pi_0, \pi_1)$ は f の核対である。
ただし、$\pi_0((x,y)) = x, \pi_1((x,y)) = y$ とする。

***Def.* 5.4.3. 同値類**
集合 X 上の同値関係 $\sim$ と、X の要素 a について、集合 $X_{\sim a}$ を a の同値類と呼ぶ。

***Cor.* 5.4.3.**
集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、以下が成り立つ。

$$X = \bigsqcup \{X_{\sim x} \mid x \in X\}$$

***Def.* 5.4.4. 商集合**
集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、以下で定める集合を商集合と呼び、$X/\sim$ で表す。

$$X/\sim \coloneqq \{X_{\sim x} \mid x \in X\}$$

***Def.* 5.4.5. 商写像**
集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、以下で定める写像 π を $\sim$ の商写像と呼ぶ。

$$\pi(x) \coloneqq X_{\sim x}$$

***Lem.* 5.4.4. 集合の圏における余等化子の存在**
写像 $f, g\colon X \to Y$ について、積 $Y \times Y, \pi$ が存在するので、一意な射 q が存在して $f = \pi(0) \circ q \land g = \pi(1) \circ q$ である。
以下の集合 $\sim$ を考える。

$$\sim \coloneqq \bigcap \{G' \in Y \times Y \mid \mathrm{Im}(q) \subset G' \land G' \text{ は } Y \text{ 上の同値関係}\}$$

共通部分をとられる集合は $Y \times Y$ を要素に持ち空ではないので、$\sim$ は Y 上の同値関係となる。
$\sim$ の商写像 u について、$Y/\sim, u$ は余等化子である。

Proof.
$\sim$ の定義より、$\forall x \in X(f(x) \sim g(x))$ である。ゆえに、$u \circ f = u \circ g$ である。
写像 $h\colon Y \to Z$ について、$h \circ f = h \circ g$ であるとする。
h が誘導する Y 上の同値関係 $\sim_h$ について、$\forall x_0, x_1 \in X((f(x_0), g(x_1)) \in \sim_f)$ である。
すなわち $\mathrm{Im}(q) \subset \sim_f$ であり、G の定義より $G \subset \sim_f$ である。
したがって、$\forall y_0, y_1 \in Y(y_0 \sim y_1 \to h(y_0) = h(y_1))$ である。
写像 $k \coloneqq ((Y/\sim, Z), \{(Y_{\sim y}, h(y)) \mid y \in Y\})$ は、$k \circ u = h$ を満たす。
$k'\colon Y/\sim \to Z, k' \neq k$ を考えると明らかに満たさないので、k は一意である。 ■

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \\
X \arrow[ddrr, bend left, "f"] \arrow[dr, dotted, "q"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & & \\
& Y \times Y \arrow[r, "\pi(0)"] \arrow[d, "\pi(1)"'] & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
& Y \arrow[r, "u"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y/\sim \arrow[dr, dotted, "k"] & \\
& & & Z
\end{tikzcd}
$$

***Cor.* 5.4.5. 商集合は余等化子**

集合 X 上の同値関係 $\sim$、$\sim$ の商写像 u、積 $X \times X, \pi$ を考える。

$X/\sim, u$ は、$\pi_0, \pi_1 \colon G \to X$ の余等化子である。

***Thm.* 5.4.6. 写像の標準分解**

写像 $f \colon X \to Y$ と、$\sim_f$ の商写像 u を考える。

このとき一意な単射 $g \colon X/\sim_f \to Y$ が存在して、$f = g \circ u$ が成り立つ。

Proof.

写像 f が誘導する同値関係 $\sim_f$ とする。

このとき、$\sim_f, (\pi_0, \pi_1)$ は f の核対であり、$X/\sim_f, u$ は π_0, π_1 の余等化子である。

余等化子の普遍性より、写像 $g \colon X/\sim_f \to Y$ が一意に存在して、$f = g \circ u$ である。

$g(x) = g(y)$ とする。

u は右簡約可能であり、補題 4.6.4 より全射であるため、$\exists z, w \in X (x = u(z) \land y = u(w))$ である。

今、$f(z) = g(u(z)) = g(x) = g(y) = g(u(w)) = f(w)$ であるので、$z \sim_f w$ である。

したがって、$x = u(z) = X_{\sim_f z} = X_{\sim_f w} = u(w) = y$ が成り立つ。

ゆえに単射である。 ■

$$
\begin{tikzcd}
\sim_f \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
X \arrow[r, "u"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X/\sim_f \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

6 順序

6.1 半順序

***Def.* 6.1.1. 半順序**

反対称的な前順序を、半順序と呼ぶ。

集合 P 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、順序対 $(P, \preccurlyeq)$ を半順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、半順序集合と集合どちらも表すものとする。

***Rem.* 6.1.1. 狭義半順序による定義**

集合 P 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、誤解のない範囲において順序対 $(P, \prec)$ で半順序集合を表すものとする。

***Cor.* 6.1.1.**

集合 P について、$(P, \subset)$ は半順序集合である。また、$(P, \supset)$ も半順序集合である。

***Def.* 6.1.2. 極大元**

半順序集合 P について、P の元 b を P の極大元と呼ぶ。

$$\forall a \in P(\neg b \prec a)$$

***Def.* 6.1.3. 極小元**

半順序集合 P について、P の元 b を P の極小元と呼ぶ。

$$\forall a \in P(\neg b \succ a)$$

***Cor.* 6.1.2.**

半順序集合 P について、最大元は極大元であり、最小元は極小元である。

***Cor.* 6.1.3. 半順序における諸概念**

半順序が誘導する圏 P について、同型射は恒等射である。したがって、以下が成り立つ。

1. P の最大元は、存在するならば一意である。これを、$\max P$ で表す。
2. P の最小元は、存在するならば一意である。これを、$\min P$ で表す。
3. P の部分 A について、A の下限は、存在するならば一意である。これを、$\inf A$ で表す。
4. P の部分 A について、A の上限は、存在するならば一意である。これを、$\sup A$ で表す。

***Def.* 6.1.4. 束**

以下を満たす半順序集合 L を束と呼ぶ。

$$\forall x, y \in L \exists z, w \in L(z = \sup\{x, y\} \land w = \inf\{x, y\})$$

***Cor.* 6.1.4.**

束は有向集合である。

***Lem.* 6.1.5. 分配不等式**

束 L について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y, z \in L(\sup\{x, \inf\{y, z\}\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\})$$
$$\forall x, y, z \in L(\inf\{x, \sup\{y, z\}\} \succcurlyeq \sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\})$$

Proof.

x は $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界であるので、$x \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

$\inf\{y, z\}$ は、$\{y, z\}$ の下界であり、推移性より $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界である。ゆえに、$\inf\{y, z\} \preccurlyeq$

$\inf\{\sup\{x,y\},\sup\{x,z\}\}$ である。

よって $\inf\{\sup\{x,y\},\sup\{x,z\}\}$ は、$\{x,\inf\{y,z\}\}$ の上界である。

したがって第一式が成り立つ。

第二式も同様に成り立つ。 ■

***Def.* 6.1.5. 完備束**

束 L について、L の任意の部分が上限と下限を持つとき、L を完備束と呼ぶ。

***Cor.* 6.1.6.**

空でない完備束 L は最大元と最小元を持つ。

***Cor.* 6.1.7.**

集合 X について、$(\mathfrak{P}(X),\subset)$ は完備束である。

***Def.* 6.1.6. 全順序**

完全な半順序を、全順序と呼ぶ。全順序であることを明示的に記号 $\leq$ で表す。

集合 P 上の全順序 $\leq$ について、順序対 $(P,\leq)$ を全順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、全順序集合と集合どちらも表すものとする。

略記 $<,\geq,>$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}x<y &:\leftrightarrow x\leq y\land x\neq y\\ x\geq y &:\leftrightarrow y\leq x\\ x>y &:\leftrightarrow y<x\end{aligned}$$

***Cor.* 6.1.8.**

全順序集合 P の極大元は最大元であり、極小元は最小元である。

***Cor.* 6.1.9.**

全順序集合は束である。

***Def.* 6.1.7. 区間**

全順序集合 P と $a,b\in P$ について、以下で定める P の部分集合をそれぞれ、開区間 $]a,b[$、閉区間 $[a,b]$ と呼ぶ。

$$\begin{aligned}]a,b[&\coloneqq \{x\in P\mid a<x\land x<b\}\\ [a,b] &\coloneqq \{x\in P\mid a\leq x\land x\leq b\}\end{aligned}$$

開区間、閉区間をまとめて区間と呼ぶ。

***Def.* 6.1.8. 整列集合**

全順序集合 $(S,\leq)$ について、S の任意の空でない部分が最小元を持つとき、S を整列集合と呼ぶ。

***Cor.* 6.1.10.**

整列集合 $(S,\leq)$ とその部分 A について、$(A,\leq)$ は整列集合である。

6.2 順序数

***Def.* 6.2.1. 順序数**

以下が成り立つ集合 α を考える。

$$\forall x \in \alpha (x \subset \alpha)$$

このとき $(\alpha, \in)$ が整列集合であるとき、α を順序数と呼ぶ。

***Lem.* 6.2.1.**

空でない順序数 α について、$\varnothing \in \alpha$ である。

Proof.

$\varnothing \notin \alpha$ とする。

整列集合より、最小元 $\min \alpha$ が存在する。

$\min \alpha \neq \varnothing$ より、$\exists \beta (\beta \in \min \alpha)$ である。

$\min \alpha \subset \alpha$ であるので、$\beta \in \alpha$ より最小性に反する。 ■

***Lem.* 6.2.2. 順序数の元は順序数**

順序数 α について、α の元 β は順序数である。

特に、$\beta = \alpha_{<\beta}$ が成り立つ。

Proof.

$\beta \subset \alpha$ より、$\in$ は狭義全順序である。

β の任意の空でない部分は、α の空でない部分であるので、$(\beta, \in)$ は整列集合である。

$\gamma \in \beta$ について、$\gamma \in \beta \subset \alpha$ であるため、$\gamma \in \alpha$ である。

$\delta \in \gamma$ を考えると、同様に $\delta \in \alpha$ である。

今、推移的であるため、$\delta \in \gamma \wedge \gamma \in \beta \to \delta \in \beta$ である。

任意の $\delta \in \gamma$ について成り立つので、$\gamma \subset \beta$ である。

定義より、$\alpha_{<\beta} = \{x \in \alpha \mid x \in \beta\} = \alpha \cap \beta$ である。

$\beta \in \alpha$ より $\beta \subset \alpha$ であるので、$\alpha \cap \beta = \beta$ である。 ■

***Cor.* 6.2.3.**

空集合は順序数である。

***Cor.* 6.2.4.**

順序数 α, β について、$\alpha \cap \beta$ は順序数である。

***Cor.* 6.2.5. 順序数の後者は順序数**

順序数 α について、α^+ は順序数である。

***Cor.* 6.2.6.**

集合 α について、$(\alpha^+, \in)$ が順序数ならば $(\alpha, \in)$ は順序数である。

***Cor.* 6.2.7.**
順序数 α について、以下が成り立つ。
$$\alpha = \bigcup \alpha^+$$

***Lem.* 6.2.8.** 順序数の所属と真包含の同値性
順序数 α, β について、以下の 2 つは同値である。

1. $\alpha \in \beta$
2. $\alpha \subsetneq \beta$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
順序数の定義より $\alpha \subset \beta$ である。
$\alpha = \beta$ とすると、$\alpha \in \alpha$ より系 3.2.6 に反する。
ゆえに、$\alpha \subsetneq \beta$ である。

2. $\to$ 1. を示す。
$\beta = \varnothing$ のとき、明らか。
$\beta \neq \varnothing$ について、$\beta \setminus \alpha$ は整列集合の空でない部分であるので、$\min(\beta \setminus \alpha)$ が存在する。これを γ とする。
定義より、$\gamma \in \beta \setminus \alpha$ すなわち $\gamma \notin \alpha$ である。

任意の $x \in \gamma$ について、$\gamma \subset \beta$ より $x \in \beta$ である。
$x \notin \alpha$ とすると、$x \in \beta \setminus \alpha$ より、$\gamma = x \vee \gamma \in x$ であり、補題 3.2.5 に反する。
ゆえに $x \in \alpha$ であるので、$\gamma \subset \alpha$ である。

任意の $y \in \alpha$ について、$\alpha \subset \beta$ より $y \in \beta$ であるため、β が全順序より $y \in \gamma \vee y = \gamma \vee \gamma \in y$ である。
$y = \gamma$ のとき、$\gamma \in \alpha$ であるが γ の定義に反する。
$\gamma \in y$ ならば、$y \in \alpha$ より、$\gamma \in \alpha$ となり、同様に反する。
ゆえに $y \in \gamma$ であるので、$\alpha \subset \gamma$ である。

したがって $\alpha = \gamma$ であり、$\gamma \in \beta$ より成り立つ。 ■

***Lem.* 6.2.9.** 順序数の比較可能性
順序数 α, β について、以下が成り立つ。
$$\alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

補題 6.2.8 より特に以下が成り立つ。
$$\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$$

Proof.
成り立たないとすると、$\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha \wedge \alpha \cap \beta \subsetneq \beta$ である。
補題 6.2.8 より、$\alpha \cap \beta \in \alpha \wedge \alpha \cap \beta \in \beta$ である。
したがって、$\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$ となるが、系 3.2.6 に反する。 ■

***Lem.* 6.2.10.** 順序数からなる整列集合
集合 A について、その元が全て順序数ならば、$(A, \in)$ は整列集合である。

Proof.

補題 6.2.9 より、$(A, \in)$ は全順序集合である。

A の空でない部分 B を考える。

空でないので、$b \in B$ が存在する。

$b \cap B = \varnothing$ のとき、$b = \min B$ である。

$b \cap B \neq \varnothing$ のとき、$b \cap B \subset b$ であり、b は整列集合であるため、$\min(b \cap B)$ が存在する。これは、B の最小元である。 ■

***Lem.* 6.2.11. 順序数の後者と比較**

順序数 α について、以下が成り立つ。

$$\forall \beta \in \alpha\bigl(\beta^+ \in \alpha \vee \beta^+ = \alpha\bigr)$$

Proof.

$\beta \in \alpha \wedge \beta^+ \notin \alpha$ とする。

補題 6.2.8 より、$\beta \in \alpha$ から $\beta \subsetneq \alpha$ すなわち $\beta \subset \alpha \wedge \beta \neq \alpha$ を得る。

補題 6.2.9 より、$\alpha \subset \beta^+$ を得る。

補題 3.6.2 より、$\alpha = \beta \vee \alpha = \beta^+$ であるので、$\beta \neq \alpha$ から $\alpha = \beta^+$ である。 ■

***Lem.* 6.2.12. 順序数の類別**

順序数 α について、以下が成り立つ。

$$\exists \beta\bigl(\alpha = \beta^+\bigr) \vee \alpha = \bigcup \alpha$$

Proof.

第一命題について $\forall \beta(\alpha \neq \beta^+) \to \alpha = \bigcup \alpha$ を示すことで示す。

任意の $x \in \bigcup \alpha$ について、$\exists \beta \in \alpha(x \in \beta)$ であり、$\beta \subset \alpha$ から $x \in \alpha$ である。

ゆえに、$\bigcup \alpha \subset \alpha$ である。

任意の $x \in \alpha$ について、補題 6.2.11 より $x^+ \in \alpha \vee x^+ = \alpha$ であり、仮定より $x^+ \neq \alpha$ であるので、$x^+ \in \alpha$ である。

$x \in x^+ \wedge x^+ \in \alpha$ より、$\exists \beta \in \alpha(x \in \beta)$ すなわち $x \in \bigcup \alpha$ である。

したがって $\alpha \subset \bigcup \alpha$ である。 ■

***Thm.* 6.2.13. 超限帰納法**

以下が成り立つアリティ 1 の述語記号 ψ を考える。

$$\forall \beta\Bigl(\beta \text{ が順序数} \to \Bigl(\forall \gamma \in \beta(\psi(\gamma)) \to \psi(\beta)\Bigr)\Bigr)$$

このとき任意の順序数 α について、$\psi(\alpha)$ が成り立つ。

Proof.

ある順序数 α が存在して、成り立たないとする。

$A \coloneqq \{\beta \in \alpha^+ \mid \neg\psi(\beta)\}$ とする。

A は順序数 α^+ の部分であり、$\alpha \in A$ より A は空でない。ゆえに最小元 $\min A$ が存在する。

$\min A \subset \alpha^+$ と、最小性より $\forall \gamma \in \min A(\psi(\gamma))$ である。

仮定より $\psi(\min A)$ が成り立つが、A の定義より $\neg\psi(\min A)$ であり、反する。 ■

Thm. 6.2.14. 無限降下法

アリティ 1 の述語記号 ψ について、以下が成り立つ。

$$\forall\alpha\Big(\alpha \text{ は順序数} \wedge \psi(\alpha) \to \exists\beta \in \alpha(\psi(\beta))\Big) \to \forall\alpha\Big(\alpha \text{ は順序数} \to \neg\psi(\alpha)\Big)$$

Proof.

ある順序数 α が存在して、$\psi(\alpha)$ であるとする。

$A \coloneqq \{\beta \in \alpha^+ \mid \psi(\alpha)\}$ とすると、$\alpha \in A$ より、A は空でない。

A は順序数 α^+ の部分であるので、最小元 $\min A$ が存在する。

仮定より $\exists\beta \in \min A(\psi(\beta))$ であるので、$\beta \in A$ である。

$\beta \in \min A$ より、$\min A$ の最小性に反する。

背理法より示される。 ■

Thm. 6.2.15. 超限再帰

順序数 α と集合 A について、写像 $G\colon \bigcup\left\{A^\xi \mid \xi \in \alpha\right\} \to A$ が与えられている。

このとき、以下を満たす写像 $f\colon \alpha \to A$ は一意に定まる。

$$\forall\xi \in \alpha(f(\xi) = G(f \circ \iota_{\xi,\alpha}))$$

Proof.

順序数 $\beta \subset \alpha$ について、以下を満たす写像 $f_\beta\colon \beta \to A$ の存在して、これが一意であることを示す。

$$\forall\xi \in \beta(f_\beta(\xi) = G(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta}))$$

$\beta = \varnothing$ のとき、空写像 $f_\varnothing\colon \varnothing \to A$ は条件を満たす。

空写像は一意であるので、$f_\varnothing$ は一意である。

$\beta = \gamma^+$ なる順序数 γ が存在するとき、$\xi \in \beta$ について f_ξ が一意に存在するとする。

このとき、以下で定める $f_\beta\colon \beta \to A$ を考える。

1. $\xi \in \gamma$ について $f_\beta(\xi) = f_\gamma(\xi)$
2. $f_\beta(\gamma) = G(f_\gamma)$

$\xi \in \gamma$ について、f_γ の条件と定義より $f_\beta(\xi) = f_\gamma(\xi) = G(f_\gamma \circ \iota_{\xi,\gamma}) = G(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})$ である。

また、定義より $f_\beta(\gamma) = G(f_\gamma) = G(f_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta})$ である。

ゆえに条件を満たす。

f'_β も成り立つとすると、条件と f_γ の一意性より $f'_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta} = f_\gamma = f_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}$ である。

また、条件より $f'_\beta(\gamma) = G(f'_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}) = G(f_\gamma) = f_\beta(\gamma)$ である。

ゆえに $f_\beta = f'_\beta$ である。

空でない β について $\beta = \bigcup\beta$ であり、任意の $\xi \in \beta$ について f_ξ が一意に存在するとする。

このとき、以下で定める $f_\beta\colon \beta \to A$ を考える。

1. $\xi \in \beta$ について $f_\beta(\xi) = f_{\xi^+}(\xi)$

$\xi \in \beta$ について、$\exists\gamma \in \xi(f_\xi(\gamma) \neq (f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})(\gamma))$ とする。

$\gamma^+ \in \beta$ より f_{γ^+} の一意性から $f_{\gamma^+} = f_\xi \circ \iota_{\gamma^+,\xi}$ であり、定義より $(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})(\gamma) = f_{\gamma^+}(\gamma)$ であるので、一致する。

ゆえに、$f_\xi = f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta}$ である。

f_{ξ^+} の条件と f_ξ の一意性より $f_\beta(\xi) = f_{\xi^+}(\xi) = G(f_{\xi^+} \circ \iota_{\xi,\xi^+}) = G(f_\xi) = G(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})$ である。

f'_β が成り立ちとすると、$\gamma \in \beta$ について、条件と f_γ の一意性から $f_\beta(\gamma) = G(f_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}) = G(f_\gamma) = G(f'_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}) = f'_\beta(\gamma)$ であるので、$f_\beta = f'_\beta$ である。

定理 6.2.13 より成り立つ。 ■

6.3 いくつかの重要な定理

***Lem.* 6.3.1.** 順序数の濃度の上限

順序数 α, β について、以下が成り立つとき、単射 $\alpha \to \beta$ が存在する。

$$\forall \xi \in \alpha \bigl(\text{全射 } \xi \to \beta \text{ が存在しない}\bigr)$$

Proof.

$h \in \left\{\bigcup \beta^\xi \mid \xi \in \alpha\right\}$ について、h は全射でないので、$\beta \setminus \mathrm{Im}(h) \neq \varnothing$ である。

以下で与える写像 $G\colon \left\{\bigcup \beta^\xi \mid \xi \in \alpha\right\} \to \beta$ を考える。

$$G(h) \coloneqq \min\left(\beta \setminus \mathrm{Im}(h)\right)$$

このとき、定理 6.2.15 より以下を満たす $f\colon \alpha \to \beta$ が一意に定まる。

$$\forall \xi \in \alpha(f(\xi) = G(f \circ \iota_{\xi,\alpha}))$$

$\xi \in \eta$ のときを考える。

$f(\eta) = G(f \circ \iota_{\eta,\alpha}) = \min\left(\beta \setminus \mathrm{Im}(f \circ \iota_{\eta,\alpha})\right) \notin \mathrm{Im}(f \circ \iota_{\eta,\alpha})$ である。

$f(\xi) \in \mathrm{Im}(f \circ \iota_{\eta,\alpha})$ より、$f(\xi) \neq f(\eta)$ である。

$\eta \in \xi$ のときも同様である。

補題 6.2.9 より、$\xi \neq \eta$ のとき $\xi \in \eta \vee \eta \in \xi$ であるので、$\xi \neq \eta$ ならば $f(\xi) \neq f(\eta)$ すなわち f は単射である。 ■

***Lem.* 6.3.2.** 整列集合の自己単調単射は増大

整列集合 $(W, \leq)$ と、狭義単調写像 $f\colon W \to W$ について、以下が成り立つ。

$$\forall x \in W(x \leq f(x))$$

Proof.

$A \coloneqq \{x \in W \mid f(x) < x\}$ を考える。

$A \neq \varnothing$ とすると、定義より $\min A$ が存在する。

A の定義より $f(\min A) < \min A$ であり、狭義単調より $f(f(\min A)) < f(\min A)$ であるので、$f(\min A) \in A$ であり、$\min A \leq f(\min A)$ である。これは反する。 ■

***Lem.* 6.3.3.** 切片からの狭義単調は存在しない

空でない整列集合 $(W, \leq)$ と $a \in W$ について、狭義単調な $f\colon W \to W_{<a}$ は存在しない。

Proof.

存在するとする。

$\iota_{W_{<a},W}$ は狭義単調より、$\iota_{W_{<a},W} \circ f$ は狭義単調である。

補題 6.3.2 より、$a \leq (\iota_{W_{<a},W} \circ f)(a)$ である。

$\iota_{W_{<a},W}$ は包含写像より、$\forall x \in W(\iota_{W_{<a},W}(x) < a)$ より反する。 ■

***Cor.* 6.3.4.**

順序数 α, β について、$\alpha \neq \beta$ ならば、任意の写像 $f\colon \alpha \to \beta$ は順序同型とならない。

***Lem.* 6.3.5. 整列集合は順序型を持つ**

整列集合 W について、W と順序同型な順序数が一意に存在する。

Proof.

補題 6.2.9、補題 6.3.3 より、存在すれば一意である。

存在することを示す。

以下で定める集合 X を考える。

$$X \coloneqq \left\{ w \in W \mid \text{ある順序数 } \alpha \text{ が存在して、順序同型 } \alpha \to W_{<w} \text{ が存在する。} \right\}$$

一意性と公理 3.4.1 より、集合 A が存在して、以下を満たす。

$$A = \left\{ \alpha \mid w \in X \wedge \text{順序同型 } \alpha \to W_{<w} \text{ が存在する。} \right\}$$

補題 6.2.10 より、$(A, \in)$ は整列集合である。

$\alpha \in A$ について、定義よりある $w \in X$ が存在して順序同型 $f\colon \alpha \to W_{<w}$ が存在する。

任意の $\beta \in \alpha$ について、写像 $f \circ \iota_{\beta,\alpha}\colon \beta \to W_{<f(\beta)}$ が順序同型であるため、$\beta \in A$ である。

ゆえに、$\alpha \subset A$ である。

したがって、A は順序数である。

順序同型を与える写像 $\varphi\colon (X, \leq) \to (A, \in)$ は、明らかに単調であり、補題 6.3.3 より全単射である。すなわち順序同型である。

$W \neq X$ とする。

$x \coloneqq \min(W \setminus X)$ について $X = W_{<x}$ であるので、上の議論より $x \in X$ となり反する。

したがって、$W = X$ である。 ■

***Lem.* 6.3.6. Hartogs の補題**

集合 X について、順序数 α が存在して、任意の写像 $f\colon \alpha \to X$ が単射とならない。

Proof.

$W \coloneqq \left\{ (S, R) \mid S \subset X \wedge R \subset S \times S \wedge (S, R) \text{ は整列集合} \right\}$ を考える。

補題 6.3.5 と公理 3.4.1 より、以下で定める集合 A が存在する。

$$A \coloneqq \left\{ w \text{ と順序同型な順序数} \mid w \in W \right\}$$

補題 6.2.10 より、$(A, \in)$ は整列集合である。

$\alpha \in A$ を考えると、$S \subset X$ について整列集合 (S, R) が存在して、順序同型 $g\colon (\alpha, \in) \to (S, R)$ が存在する。

任意の $\beta \in \alpha$ について、$g \circ \iota_{\beta,\alpha}\colon \beta \to \mathrm{Im}(g)$ は順序同型であるので、$\beta \in A$ である。

ゆえに、$\alpha \subset A$ である。

したがって、A は順序数である。

順序数 α について、単射 $f\colon \alpha \to X$ が存在するとする。

このとき、f の左逆写像 g を用いて、$\mathrm{Im}(f)$ 上に以下の整列順序 $\leq$ を定義できる。

$$x < y :\leftrightarrow g(x) \in g(y)$$

ゆえに、$\alpha \in A$ である。
対偶を考えて、$\alpha \notin A$ ならば、単射 $\alpha \to X$ は存在しない。

$A \notin A$ より、単射 $A \to X$ は存在しない。 ■

***Thm.* 6.3.7. Bourbaki-Witt の定理**
空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、P の任意の空でない全順序部分が上限を持つとする。
以下を満たす写像 $f\colon P \to P$ を考える。

$$\forall x \in P(x \preccurlyeq f(x))$$

このとき、以下を満たす。

$$\exists x_1 \in P(x_1 = f(x_1))$$

Proof.
補題 6.3.6 より、P への単射が構成できない順序数 α が存在する。
P は空でないので、$\exists x_0 \in P$ である。
以下で与える写像 $G\colon \left\{\bigcup P^{\xi} \mid \xi \in \alpha\right\} \to P$ を考える。

$$G(h) \coloneqq \begin{cases} x_0 & \mathrm{dom}(h) = \varnothing \\ f(h(\beta)) & \exists\beta(\beta^+ = \mathrm{dom}(h)) \\ \sup \mathrm{Im}(h) & \mathrm{dom}(h) = \bigcup \mathrm{dom}(h) \land (\mathrm{Im}(h), \preccurlyeq) \text{ は全順序} \\ x_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 6.2.15 より、以下を満たす $g\colon \alpha \to P$ が一意に定まる。

$$\forall \xi \in \alpha(g(\xi) = G(g \circ \iota_{\xi,\alpha}))$$

$\forall \eta \in \alpha \forall \xi \in \eta(g(\xi) \preccurlyeq g(\eta))$ を超限帰納法で示す。
$\eta = \varnothing$ のとき、明らか。
$\exists \beta(\eta = \beta^+)$ のとき、以下が成り立つ。

$$g(\beta) \preccurlyeq f(g(\beta)) = f\big((g \circ \iota_{\beta^+,\alpha})(\beta)\big) = G(g \circ \iota_{\beta^+,\alpha}) = g(\beta^+) = g(\eta)$$

仮定より $\forall \xi \in \beta(g(\xi) \preccurlyeq g(\beta))$ であるので、$\forall \xi \in \eta(g(\xi) \preccurlyeq g(\eta))$
$\eta = \bigcup \eta \land \eta \neq \varnothing$ のときを考える。
仮定より、$\mathrm{Im}(g \circ \iota_{\eta,\alpha})$ は全順序である。
ゆえに、$g(\eta) = G(g \circ \iota_{\eta,\alpha}) = \sup \mathrm{Im}(g \circ \iota_{\eta,\alpha})$ であるので、$\forall \xi \in \eta(g(\xi) \preccurlyeq g(\eta))$ である。
定理 6.2.13 より成り立つ。

α の定義より、$g\colon \alpha \to P$ は単射ではない。
ゆえに、$\exists \beta, \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma \land g(\beta) = g(\gamma))$ である。
$\beta^+ \in \gamma \lor \beta^+ = \gamma$ より、$g(\beta) \preccurlyeq g(\beta^+) \preccurlyeq g(\gamma)$ であるので、$g(\beta) = g(\beta^+)$ である。
したがって、$g(\beta) = g(\beta^+) = f(g(\beta))$ である。 ■

***Lem.* 6.3.8. Amann の不動点定理**

空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、P の任意の空でない全順序部分が上限を持つとする。
以下を満たす単調写像 $f\colon P \to P$ を考える。

$$\exists x_0 \in P(x_0 \preccurlyeq f(x_0))$$

このとき、以下の集合 S について、$(S, \preccurlyeq)$ は最小元を持つ。

$$S = \{x \in P_{\succcurlyeq x_0} \mid x = f(x)\}$$

Proof.

$M \coloneqq \{x \in P_{\succcurlyeq x_0} \mid x \preccurlyeq f(x)\}$ を考える。
$x_0 \in M$ より、$M \neq \varnothing$ である。
$x \in M$ について、$x_0 \preccurlyeq x \preccurlyeq f(x)$ より、単調性から $x_0 \preccurlyeq f(x) \preccurlyeq f(f(x))$ である。ゆえに $f(x) \in M$ である。

M の空でない全順序部分 C について、仮定より $\sup C \in P$ が存在する。
$\exists c_0 \in C(x_0 \preccurlyeq c_0 \preccurlyeq \sup C)$ より、$x_0 \preccurlyeq \sup C$ である。
$\forall c \in C(c \preccurlyeq \sup C)$ より、$\forall c \in C(c \preccurlyeq f(c) \preccurlyeq f(\sup C))$ である。
ゆえに $f(\sup C)$ は C の上界であるので、$\sup C \preccurlyeq f(\sup C)$ である。
したがって、$\sup C \in M$ である。

よって、$(M, \preccurlyeq)$ は空でない半順序集合であり、任意の空でない全順序部分が M に上限を持つ。
また、以下で定める $g\colon M \to M$ が存在して、$\forall x \in M(x \preccurlyeq g(x))$ である。

$$g(x) \coloneqq f(x)$$

定理 6.3.7 より、$\exists x \in M(x = g(x) = f(x))$ である。
したがって、S は非空集合である。

$N \coloneqq \{x \in M \mid \forall y \in S(x \preccurlyeq y)\}$ を考える。
$x_0 \in N$ より、$N \neq \varnothing$ である。
$x \in N$ について、$f(x) \in f(N) \subset f(M) \subset M$ である。
$\forall y \in S(x \preccurlyeq y)$ より、単調性から $\forall y \in P_{\succcurlyeq x_0}(y = f(y) \to f(x) \preccurlyeq f(y) = y)$ である。
したがって、$f(x) \in N$ である。

N の空でない全順序部分 C について、$N \subset M$ より $\sup C \in M$ が存在する。
$C \subset N$ より、任意の $y \in S$ について、$\forall c \in C(c \preccurlyeq y)$ すなわち y は C の上界である。
ゆえに $\sup C \preccurlyeq y$ である。
したがって、$\sup C \in N$ である。

よって、$(N, \preccurlyeq)$ は空でない半順序集合であり、任意の空でない全順序部分が N に上限を持つ。
また、以下で定める $h\colon N \to N$ が存在して、$\forall x \in N(x \preccurlyeq h(x))$ である。

$$h(x) \coloneqq f(x)$$

定理 6.3.7 より、$\exists x_1 \in N(x_1 = h(x_1) = f(x_1))$ である。
$x_1 \in N$ より、x_1 は S の最小元である。 ■

***Thm.* 6.3.9. Knaster-Tarski の不動点定理**

完備束 $(L, \preccurlyeq)$ と、単調写像 $f\colon L \to L$ を考える。

このとき、以下の集合 S について、$(S, \preccurlyeq)$ は空でない完備束である。

$$S = \{x \in L \mid x = f(x)\}$$

Proof.

完備束は最小元を持つので、$\min L \preccurlyeq f(\min L)$ である。

完備性から補題 6.3.8 より、S は最小元を持つ。

同様に、S は最大元を持つ。

S の部分集合 A について、完備性より $\sup A \in L$ が存在する。また、定義より $A = f(A)$ である。

$P \coloneqq \{x \in L \mid \forall a \in A(a \preccurlyeq x) \land f(x) \preccurlyeq x\}$ を考える。

$\max S \in P$ より、P は空ではない。

任意の $a \in A$ について、$\forall x \in P(a \preccurlyeq x)$ より、a は P の下界であるので、$a \preccurlyeq \inf P$ である。ゆえに、$\inf P$ は A の上界である。

したがって $\sup A \preccurlyeq \inf P$ であり、補題 5.3.3 と単調性より $\sup A = \sup f(A) \preccurlyeq f(\sup A) \preccurlyeq f(\inf P)$ である。

よって、$f(\inf P)$ は A の上界である。

$\forall x \in P(\inf f(P) \preccurlyeq f(x) \preccurlyeq x)$ より $\inf f(P)$ は P の下界であることと補題 5.3.4 から、$f(\inf P) \preccurlyeq \inf f(P) \preccurlyeq \inf P$ である。

単調性より、$f(f(\inf P)) \preccurlyeq f(\inf P)$ である。

したがって、$f(\inf P) \in P$ である。

よって $\inf P \preccurlyeq f(\inf P)$ を得るので、$\inf P = f(\inf P)$ すなわち $\inf P \in S$ である。

すでに示した $\sup A \preccurlyeq \inf P$ と $\sup A \preccurlyeq f(\inf P) = \inf P$ より、$\sup A = \inf P \in S$ である。

同様に $\inf A \in S$ である。 ■

***Thm.* 6.3.10. Cantor-Schröder-Bernstein の定理**

集合 A, B について、単射 $f\colon A \to B$ と単射 $g\colon B \to A$ が存在するならば、全単射 $h\colon A \to B$ が存在する。

Proof.

B が空のとき、f の存在から A も空となり、空写像が条件を満たす。

B が空でないとする。

以下の写像 $F\colon \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$ を考える。

$$F(X) \coloneqq A \setminus g(B \setminus f(X))$$

$X \subset Y \subset A$ について、補題 4.3.1 より $f(X) \subset f(Y)$ であり、$B \setminus f(X) \supset B \setminus f(Y)$ であり、補題 4.3.1 より $g(B \setminus f(X)) \supset g(B \setminus f(Y))$ であり、$F(X) \subset F(Y)$ である。

ゆえに、F は完備束 $(\mathfrak{P}(A), \subset)$ 上の単調写像である。

定理 6.3.9 より、$\exists X_0 \subset A(X_0 = F(X_0))$ である。

g は空写像でない単射より補題 4.6.1 から左逆写像 g^{-1} を持つため、以下の写像 $h\colon A \to B$ が存在する。

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & (x \in X_0) \\ g^{-1}(x) & (x \notin X_0) \end{cases}$$

$h(x)=h(y)$ とする。
$x \in X_0 \land y \notin X_0$ のとき、$h(x) \in f(X_0) \land h(y) \in B \setminus f(X_0)$ より、$h(x) \neq h(y)$ となるので、$x, y \in X_0 \lor x, y \notin X_0$ である。
$x, y \in X_0$ のとき、f の単射性から $x=y$ である。
$x, y \notin X_0$ のとき、$x, y \in g(B \setminus f(X_0))$ より $\exists x', y' \in B(x=g(x') \land y=g(y'))$ である。
$x=g(x')=g(g^{-1}(g(x')))=g(g^{-1}(x))=g(g^{-1}(y))=g(g^{-1}(g(y')))=g(y')=y$ である。
したがって、h は単射である。

$z \in f(X_0)$ について、$\exists z_0 \in X_0(z=f(z_0)=h(z_0))$ である。
$z \notin f(X_0)$ について、$g(z) \notin X_0$ であり、$g(z) \in g(B \setminus f(X_0))=A \setminus X_0$ より、$z=g^{-1}(g(z))=h(g(z))$ である。
ゆえに h は全射である。 ■

6.4 順序と選択

***Lem.* 6.4.1. 冪集合の鎖の基本補題**
空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、以下で定める半順序集合 $(M, \subset)$ を考える。

$$M \coloneqq \left\{C \subset P \mid C \neq \varnothing \land (C, \preccurlyeq) \text{ は全順序集合}\right\}$$

このとき、$M \neq \varnothing$ であり、M の任意の空でない全順序部分 A は上限 $\bigcup A$ を M に持つ。

Proof.
空でないので、$\exists x(x \in P)$ であり、$\{x\} \in M$ より、$M \neq \varnothing$ である。

$\bigcup A \in M$ を示す。
$x, y \in \bigcup A$ について、定義より P の全順序部分 C_x, C_y が存在して $x \in C_x \land y \in C_y$ である。
A は全順序集合より、$C_x \subset C_y \lor C_y \subset C_x$ である。
$C_x \subset C_y$ であるとき、$x, y \in C_y$ より、$x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x$ である。
$C_y \subset C_x$ であるときも同様である。

$A \neq \varnothing$ より $\bigcup A \neq \varnothing$ である。
$\bigcup A$ は A の上界であり、A の任意の上界 U について、$\forall C \in A(C \subset U)$ から $\bigcup A \subset U$ であるため、$\bigcup A$ は A の上限である。 ■

***Thm.* 6.4.2. Zorn の補題**
空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、P の任意の空でない全順序部分が上界を持つとする。
このとき、P は極大元を持つ。

Proof.
$M \coloneqq \left\{C \subset P \mid C \neq \varnothing \land (C, \preccurlyeq) \text{ は全順序集合}\right\}$ を考える。
補題 6.4.1 より、半順序集合 $(M, \subset)$ は空でないかつ任意の空でない全順序部分は上限を持つ。

M が極大元を持たないとする。
このとき $\forall C \in M \exists C' \in M(C \subsetneq C')$ である。
補題 4.5.1 より、$f \colon M \to M$ であって、$\forall C \in M(C \subsetneq f(C))$ が存在する。
定理 6.3.7 より、$\exists C_0 \in M(C_0 = f(C_0))$ であるが、f の定義より反する。
ゆえに、M は極大元を持つ。

M の極大元 C_1 について、上界 u が存在する。
u が極大元でない、すなわち $\exists a \in P(u \prec a)$ とする。
a は C_1 の上界であるので、$(C_1 \cup \{a\}, \preccurlyeq)$ は空でない全順序集合である。
$a \in C_1$ とすると、u が C_1 の上界であることに反するので、$a \notin C_1$ である。
ゆえに $C_1 \subsetneq C_1 \cup \{a\}$ となり、C_1 の極大性に反する。
したがって、u は極大元である。 ■

***Thm.* 6.4.3. 整列可能定理**
集合 X について、X 上の自己関係 $\leq$ が存在して、$(X, \leq)$ は整列集合となる。

Proof.
以下で定める集合 W を考える。

$$W \coloneqq \{(A, \leq) \mid A \subset X \land (A, \leq) \text{ は整列集合}\}$$

$(\varnothing, \varnothing) \in W$ より、$W \neq \varnothing$ である。
W 上の関係 $\preccurlyeq$ を以下で定める。

$$(A_1, \leq_1) \preccurlyeq (A_2, \leq_2) :\leftrightarrow A_1 \subset A_2 \land \leq_1 = \leq_2 \cap (A_1 \times A_1)$$

W の全順序部分 C について、以下の組は整列集合であり、C の上界である。

$$\left(\bigcup\{A \mid (A, \leq) \in C\}, \bigcup\{\leq \mid (A, \leq) \in C\}\right)$$

定理 6.4.2 より、極大元 $(A_0, \leq_0)$ が存在する。
$A_0 \subsetneq X$ とすると、$\exists a \in X(a \notin A_0)$ であり、以下で定める組 G が存在する。

$$G \coloneqq (A_0 \cup \{a\}, \leq_0 \cup (A_0 \times \{a\}))$$

$G \in W$ であり、$(A_0, \leq_0) \prec G$ であるので、極大性に反する。
ゆえに、$A_0 = X$ である。 ■

***Thm.* 6.4.4. 濃度の比較可能定理**
集合 A, B について、単射 $f \colon A \to B$ または単射 $g \colon B \to A$ のいずれかが存在する。

Proof.
定理 6.4.3 と補題 6.3.5 より、順序数 α, β が存在して、全単射 $\psi_a \colon \alpha \to A, \psi_b \colon \beta \to B$ が存在する。
補題 6.2.9 より、$\alpha \subset \beta \lor \beta \subset \alpha$ である。
$\alpha \subset \beta$ のとき、$\psi_b \circ \iota_{\alpha,\beta} \circ \psi_a^{-1}$ は A から B への単射である。
$\beta \subset \alpha$ も同様である。 ■

6.5 フィルターとネット

***Def.* 6.5.1. フィルター**
半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、以下の 2 つを満たす P の空でない部分 F を、P のフィルターと呼ぶ。

$$\forall x, y \in F \exists z \in F(z \preccurlyeq x \land z \preccurlyeq y)$$
$$\forall x \in F \forall y \in P(x \preccurlyeq y \to y \in F)$$

***Cor.* 6.5.1.**
フィルターは逆順序について有向集合である。

***Def.* 6.5.2. 細分**
半順序集合 P のフィルター F, G に対して、$F \subset G$ であるとき、G は F の細分であると呼ぶ。

***Def.* 6.5.3. 超フィルター**
自身以外の細分を持たないフィルターを超フィルターと呼ぶ。

***Thm.* 6.5.2. 超フィルターの存在**
半順序集合 P のフィルター F について、その細分である超フィルターが存在する。

Proof.
F の細分の全体 $\mathcal{F}$ と半順序集合 $(\mathcal{F}, \subset)$ を考える。
$\mathcal{F}$ の空でない全順序部分集合 A について、上界 $\bigcup A \in \mathcal{F}$ が存在する。
$\mathcal{F}$ の全順序部分集合 $\varnothing$ について、F は上界である。
ゆえに、$\mathcal{F}$ は帰納的である。
定理 6.4.2 より極大元が存在する。これは超フィルターである。 ■

***Def.* 6.5.4. 集合におけるフィルター**
集合 X について、半順序集合 $(\mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, \subset)$ のフィルターを、集合 X のフィルターと呼ぶ。

***Cor.* 6.5.3.**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$X \in \mathcal{F}$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$$

***Thm.* 6.5.4. 集合の超フィルター**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ について、以下の 2 つは同値である。

1. $\mathcal{F}$ は超フィルターである
2. $\forall A \subset X(A \in \mathcal{F} \vee X \setminus A \in \mathcal{F})$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$A \in \mathcal{F}$ のとき明らかであるので、$A \notin \mathcal{F}$ のときを考える。
$\mathcal{S} \coloneqq \{S \subset X \mid A \cup S \in \mathcal{F}\}$ について、定義より $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \wedge X \setminus A \in \mathcal{S}$ である。
今、$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について、$A \cup (S_1 \cap S_2) = (A \cup S_1) \cap (A \cup S_2) \in \mathcal{F}$ より、$S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ である。
$S \in \mathcal{S} \wedge T \subset X \wedge S \subset T$ とすると、$A \cup S \in \mathcal{F} \to A \cup T \in \mathcal{F}$ より $T \in \mathcal{S}$
$A \cup X = X \in \mathcal{F}$ より、$X \in \mathcal{S}$ である。すなわち、$\mathcal{S} \neq \varnothing$
$\varnothing \notin \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S}$ はフィルターでありかつ $\mathcal{F}$ の細分である。
ここで、$\mathcal{F}$ は超フィルターであるので $X \setminus A \in \mathcal{S} = \mathcal{F}$

2. $\to$ 1. を示す。
超フィルターでないとすると、$\mathcal{F}$ の細分 $\mathcal{F}'$ が存在して、$\exists A \in \mathcal{F}'(A \notin \mathcal{F} \wedge A \in \mathcal{F}')$ である。
仮定より、$X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であり、$\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ よりフィルターの定義に矛盾。背理法より示される。

■

***Def.* 6.5.5. ネット**

有向集合 Λ から集合 X への写像を、X 上のネットと呼ぶ。

ネットは、明示的に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と表す。このとき、x_λ は X 上の元で、$\lambda\in\Lambda$ での値を表す。

また誤解のない限り、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で値域を表す。

***Def.* 6.5.6. 部分ネット**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と有向集合 M について、写像 $\varphi\colon M\to\Lambda$ が以下を満たすとき、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネットと呼ぶ。

$$\forall\mu_1,\mu_2\in M(\mu_1\preccurlyeq\mu_2\to\varphi(\mu_1)\preccurlyeq\varphi(\mu_2))$$
$$\forall\lambda\in\Lambda\exists\mu\in M(\lambda\preccurlyeq\varphi(\mu))$$

***Def.* 6.5.7. 普遍**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は普遍であると呼ぶ。

$$\forall A\subset X\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset A\vee(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset X\setminus A\Big)$$

***Thm.* 6.5.5. ネットの定めるフィルター**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、以下で定める集合系 $\mathcal{F}$ は X のフィルターである。

$$\mathcal{F}\coloneqq\Big\{F\subset X\mid\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset F\Big)\Big\}$$

Proof.

明らかに $\varnothing\notin\mathcal{F}\wedge X\in\mathcal{F}$ である。

$F_1,F_2\in\mathcal{F}$ について、定義より $\exists\lambda_1,\lambda_2\subset\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}}\subset F_1\wedge(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_2}}\subset F_2\Big)$ である。

Λ が有向集合であることから、$\exists\lambda_3\in\Lambda(\lambda_1\preccurlyeq\lambda_3\wedge\lambda_2\preccurlyeq\lambda_3)$ であり、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_3}}\subset F_1\cap F_2$。

ゆえに $F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$ である。

$\forall F\in\mathcal{F}\forall G\subset\mathfrak{P}(X)$ について、$F\subset G$ ならば定義より明らかに $G\in\mathcal{F}$ ■

***Lem.* 6.5.6. ネットとフィルターの基本補題**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と定理 6.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ を考える。

このとき、$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ について、以下が成り立つ。

$$\forall F\in\mathcal{F}'\forall\lambda_0\in\Lambda\exists\lambda\in\Lambda(\lambda_0\preccurlyeq\lambda\wedge x_\lambda\in F)$$

Proof.

$\exists F\in\mathcal{F}'\exists\lambda_0\in\Lambda\forall\lambda\in\Lambda(\lambda_0\preccurlyeq\lambda\to x_\lambda\notin F)$ とする。

今、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$ であるので、$\varnothing=F\cap(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\in\mathcal{F}'$ より、フィルターの定義に矛盾。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 6.5.7.** フィルターの定める部分ネット

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、定理 6.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ について考える。

$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ に対して、ある部分ネット $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ が存在して、定理 6.5.5 から定まるその部分ネットのフィルターは $\mathcal{F}'$ の細分となる。

Proof.

$M \coloneqq \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F}' \mid x_\lambda \in F\}$ を考える。

M 上の前順序 $\forall(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M((\lambda_1, F_1) \preccurlyeq (\lambda_2, F_2) :\leftrightarrow \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \land F_1 \supset F_2)$ を考える。

$(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M$ とする。

$\mathcal{F}'$ はフィルターより $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$

Λ は有向集合であるので、$\exists\lambda_3 \in \Lambda(\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \land \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ である。

補題 6.5.6 より $\exists\lambda_4 \in \Lambda(\lambda_3 \preccurlyeq \lambda_4 \land x_{\lambda_4} \in F_1 \cap F_2)$

$(\lambda_4, F_1 \cap F_2)$ は、$\{(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)\}$ の上界であるので、M は有向集合である。

ここで、写像 $\varphi\colon M \to \Lambda, \varphi(\lambda, F) \coloneqq \lambda$ を定める。

補題 6.5.6 より $\forall\lambda \in \Lambda\exists F \in \mathcal{F}'\exists\lambda_1 \in \Lambda(\lambda \preccurlyeq \lambda_1 = \varphi(\lambda_1, F) \land (\lambda_1, F) \in M)$ である。

したがって、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ は部分ネットである。

今、補題 6.5.6 より $\forall F \in \mathcal{F}'\exists\lambda_0 \in \Lambda((\lambda_0, F) \in M)$

$\forall(\lambda', F') \in M$ について、$(\lambda_0, F) \preccurlyeq (\lambda', F')$ ならば、$x_{\lambda'} \in F' \subset F$ となる。

よって、$F \in \left\{F \subset X \mid \exists\mu_0 \in M\left(\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M_{\succcurlyeq\mu_0}} \subset F\right)\right\}$ ■

***Thm.* 6.5.8.** 普遍部分ネットの存在

任意のネットは、普遍な部分ネットを持つ。

Proof.

ネットに対して定理 6.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ が存在する。

定理 6.5.2 より $\mathcal{F}$ の細分である超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する。

定理 6.5.7 より、定理 6.5.5 の定めるフィルターが $\mathcal{U}$ に一致する部分ネットが存在する。

定理 6.5.4 より、この部分ネットは普遍である。 ■

7　自然数

7.1　自然数の公理

***Def.* 7.1.1.** 自然数

自然数論では、3 つの公理（公理 7.1.1、公理 7.1.2、公理 7.1.3）が与えられる。
項を自然数と呼ぶ。

***Def.* 7.1.2.** 零

アリティ 0 の函数記号 0 を考える。

***Def.* 7.1.3.** 後者

アリティ 1 の函数記号 s を考える。
自然数 n について、$s(n)$ を n の後者と呼ぶ。

***Ax.* 7.1.1.** 零は後者ではない

$$\forall n(s(n) \neq 0)$$

***Ax.* 7.1.2.** 後者は単射

$$\forall n, m(s(n) = s(m) \to n = m)$$

***Ax.* 7.1.3.** 数学的帰納法

アリティ 1 の述語記号 ψ について、以下が成り立つ。

$$\psi(0) \land \forall k\Big(\psi(k) \to \psi(s(k))\Big) \to \forall n(\psi(n))$$

7.2　集合論における自然数

***Thm.* 7.2.1. Peano の公理**

定理 3.6.6 より、無限系譜 X の取り方によらず $\omega(X)$ が一意に定まる。これを $\mathbb{N}$ で表す。
$\mathbb{N}$ は以下の全てを満たす。

$$\begin{gathered}\varnothing \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}\big(n^+ \in \mathbb{N}\big) \\ \forall n \in \mathbb{N}\big(n^+ \neq \varnothing\big) \\ \forall n, m \in \mathbb{N}\big(n^+ = m^+ \to n = m\big) \\ \forall E\big(E \subset \mathbb{N} \land \varnothing \in E \land \forall n\big(n \in E \to n^+ \in E\big) \to E = \mathbb{N}\big)\end{gathered}$$

Proof.

第一、第二の公理は、無限系譜であることより明らか。

第三の公理は $n \in n^+$ と、空集合は要素を持たないことから示される。

第四の公理は、補題 3.6.3 より示される。

第五の公理を示す。
前件より、$E \subset \mathbb{N}$ である。
$\varnothing \in E \land \forall n(n \in E \to n^+ \in E)$ より、E は無限系譜である。
最小無限系譜であるので、$\mathbb{N} = \omega(E) \subset E$ である。 ■

***Thm.* 7.2.2.** 数学的帰納法
アリティ 1 の述語記号 ψ について、

$$\forall n \in \mathbb{N}(\psi(n)) \leftrightarrow \psi(0) \land \forall n \in \mathbb{N}\Big(\psi(n) \to \psi(n^+)\Big)$$

Proof.
右は明らか。

左は、$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n)\}$ として、定理 7.2.1 第五式から示される。 ■

***Def.* 7.2.1.** 自然数集合
定理 7.2.1、定理 7.2.2 より、以下と $n \in \mathbb{N}$ で定める議論領域は自然数である。

$$0 \coloneqq \varnothing$$
$$s(n) \coloneqq n^+$$

$\mathbb{N}$ を自然数集合と呼ぶ。
誤解のない限り、自然数集合を自然数と呼ぶ。

***Lem.* 7.2.3.**
以下が成り立つ。

$$\forall n \in \mathbb{N}\big(n \text{ は順序数}\big)$$

Proof.
$n = 0$ のとき、$\varnothing$ は順序数より成り立つ。
ある n が順序数であるとき、系 6.2.5 より $s(n)$ は順序数である。
定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について成り立つ。 ■

***Def.* 7.2.2.** 自然数の順序
自然数 $\mathbb{N}$ 上で二項関係 $\leq$ を以下のように定める。補題 6.2.9 より、$\leq$ は全順序である。

$$n \leq m :\leftrightarrow n \subset m$$

***Lem.* 7.2.4.** 自然数は推移的

以下が成り立つ。

$$\forall n \in \mathbb{N}(m \in n \to m \in \mathbb{N})$$

Proof.

$n = 0 = \varnothing$ のとき明らか。

ある n で成り立つとき、$s(n) = n \cup \{n\}$ より、$s(n)$ で成り立つ。

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について成り立つ。 ■

***Lem.* 7.2.5.** 最小値原理

自然数 $\mathbb{N}$ の空でない部分集合 A は最小元を持つ。

Proof.

持たないと仮定する。

このとき、$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}(m \leq n \to m \notin A)$ を示す。

$n = 0$ のとき、$0 \in A$ ならば仮定に反するので明らか。

ある n で成り立つとする。$s(n) \in A$ ならば $s(n)$ は A の最小元となるので、$s(n) \notin A$。

定理 7.2.2 を用いて上の命題が示されるので、$\forall n \in \mathbb{N}(n \notin A)$ が直ちに言える。

これは A が空でないことに反する。背理法より、示される。 ■

***Thm.* 7.2.6.** 自然数は順序数

自然数 $\mathbb{N}$ は順序数である。

Proof.

補題 7.2.4 と補題 7.2.5 より、順序数である。 ■

7.3 自然数の加法

***Def.* 7.3.1.** 自然数の加法

自然数 n について、以下で定める写像 $G_n \colon \bigcup\{\mathbb{N}^m \mid m \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$ を考える。

$$G_n(h) := \begin{cases} n & (\mathrm{dom}(h) = 0) \\ s(h(\bigcup \mathrm{dom}(h))) & (\mathrm{dom}(h) \neq 0) \end{cases}$$

このとき、定理 6.2.15 が定める写像 $+_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する。

誤解のない限り、$+_n(m)$ を $n + m$ と表す。

***Lem.* 7.3.1.**

以下が成り立つ。

$$\forall n \in \mathbb{N}(n + 0 = n)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n + s(m) = s(n + m))$$

Proof.

第一式について、定義より $+_n(0) = G(+_n \circ \iota_{0,\mathbb{N}}) = n$ である。

第二式について、定義より $+_n(s(m)) = G(+_n \circ \iota_{s(m),\mathbb{N}}) = s(+_n(\bigcup s(m))) = s(+_n(m)) = s(n+m)$ である。 ■

***Lem.* 7.3.2.** 自然数の加法の結合法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n+m)+l = n+(m+l))$$

つまり上の等式の両辺は、$n+m+l$ と表記してもよい。

Proof.
$l=0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n+m)+0 = n+m = n+(m+0)$$

ある自然数 l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n+m)+s(l) &= s((n+m)+l) \\ &= s(n+(m+l)) \\ &= n+s(m+l) \\ &= n+(m+s(l))\end{aligned}$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 l について示される。 ■

***Lem.* 7.3.3.** 自然数の加法の単位元

$$\forall n \in \mathbb{N}(n+0 = 0+n = n)$$

Proof.
$\forall n \in \mathbb{N}(n+0=n)$ はすでに示されている。
$\forall n \in \mathbb{N}(0+n=n)$ を示す。
$n=0$ のとき、$0+0=0$ より満たす。
ある自然数 n で成り立つとき、

$$0+s(n) = s(0+n) = s(n)$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について示される。 ■

***Lem.* 7.3.4.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(s(n)+m = s(n+m))$$

Proof.
$m=0$ のとき、以下より成り立つ。

$$s(n)+0 = s(n) = s(n+0)$$

ある自然数 m について成り立つとき、

$$s(n)+s(m) = s(s(n)+m) = s(s(n+m)) = s(n+s(m))$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 m について示される。 ■

***Lem.* 7.3.5.** 自然数の加法の交換法則

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n+m = m+n)$$

Proof.

$m = 0$ のとき、補題 7.3.3 より示される。

ある m で成り立つとき、

$$n + s(m) = s(n + m) = s(m + n) = s(m) + n$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 m について示される。 ■

***Lem.* 7.3.6. 自然数の順序の加法による保存**

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n < m \to n + l < m + l)$$

Proof.

$l = 0$ のとき、明らか。

ある自然数 l で成り立つとき、補題 6.2.11 より、

$$n + s(l) = s(n + l) < s(m + l) = m + s(l)$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について示される。 ■

***Lem.* 7.3.7. 自然数の順序の加法による特徴づけ**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(m \leq n \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(m + k = n))$$

右について、この k は一意に定まる。

Proof.

左は、全順序性、補題 7.3.6、$\forall k \in \mathbb{N}(0 \leq k)$ を用いて、背理法より示される。

右について考える。

$n = 0$ のとき、$m = 0$ ならば $k = 0$ が存在。$m \neq 0$ ならば前件否定。

ある n で成り立つときを考える。$n < m \vee m \leq n$ である。

$n < m$ のとき、補題 6.2.11 より $s(n) \leq m$ である。$s(n) < m$ のとき前件否定より自明。$s(n) = m$ のとき、$k = 0$ で存在。

$m \leq n$ のとき、仮定より $\exists k \in \mathbb{N}(m + k = n)$

ゆえに、$m \leq s(n)$ かつ $s(n) = s(m + k) = m + s(k)$ となる。

定理 7.2.2 より、任意の n について示される。

$k < k'$ とすると、補題 7.3.6 より矛盾。$k > k'$ でも同様より、示される。 ■

***Def.* 7.3.2. 自然数の減法**

自然数 n, m について、$m \leq n$ であるとき、補題 7.3.7 より一意に定まる k を $n - m$ と表す。

7.4 自然数の乗法

***Def.* 7.4.1.** 自然数の乗法

自然数 n について、以下で定める写像 $G_n\colon \bigcup\{\mathbb{N}^m \mid m \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$ を考える。

$$G_n(h) \coloneqq \begin{cases} 0 & (\mathrm{dom}(h) = 0) \\ h(\bigcup \mathrm{dom}(h)) + n & (\mathrm{dom}(h) \neq 0) \end{cases}$$

このとき、定理 6.2.15 が定める写像 $\times_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する。

誤解のない限り、$\times_n(m)$ を $n \times m$ と表す。

***Lem.* 7.4.1.**

以下が成り立つ。

$$\forall n \in \mathbb{N}(n \times 0 = 0)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times s(m) = n \times m + n)$$

Proof.

第一式について、定義より $\times_n(0) = G(\times_n \circ \iota_{0,\mathbb{N}}) = 0$ である。

第二式について、定義より $\times_n(s(m)) = G(\times_n \circ \iota_{s(m),\mathbb{N}}) = \times_n(\bigcup s(m)) + n = \times_n(m) + n$ である。 ■

***Lem.* 7.4.2.** 左零元

$$\forall n \in \mathbb{N}(0 \times n = 0)$$

Proof.

$n = 0$ のとき、$0 \times 0 = 0$

ある自然数 n で成り立つとき、

$$0 \times s(n) = 0 \times n + 0 = 0 + 0 = 0$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について示される。 ■

***Def.* 7.4.2. 1**

自然数において、$1 \coloneqq s(0)$ で定める。

***Lem.* 7.4.3.** 自然数の乗法の単位元

$$\forall n \in \mathbb{N}(n = n \times 1 = 1 \times n)$$

Proof.

左について $1 = s(0)$ より、

$$n \times 1 = n \times s(0) = n \times 0 + n = 0 + n = n$$

右について考える。

$n = 0$ のとき、$1 \times 0 = 0$

ある自然数 n で成り立つとき、

$$1 \times s(n) = 1 \times n + 1 = n + 1 = n + s(0) = s(n + 0) = s(n)$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について示される。 ■

Lem. 7.4.4. 自然数の右分配法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n+m) \times l = n \times l + m \times l)$$

Proof.

$l = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n+m) \times 0 = 0 = 0 + 0 = n \times 0 + m \times 0$$

ある自然数 l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n+m) \times s(l) &= (n+m) \times l + (n+m) \\ &= n \times l + m \times l + n + m \\ &= n \times s(l) + m \times s(l)\end{aligned}$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 l について示される。 ■

Lem. 7.4.5. 自然数の乗法の交換法則

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times m = m \times n)$$

Proof.

補題 7.4.2 より、$m = 0$ について、$n \times 0 = 0 \times n$

ある自然数 m で成り立つとき、

$$\begin{aligned}n \times s(m) &= n \times m + n \\ &= m \times n + n \\ &= m \times n + 1 \times n \\ &= (m+1) \times n \\ &= s(m) \times n\end{aligned}$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 m について示される。 ■

Lem. 7.4.6. 自然数の分配法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n+m) \times l = n \times l + m \times l)$$
$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n \times (m+l) = n \times m + n \times l)$$

Proof.

右分配法則と交換法則より示される。 ■

Lem. 7.4.7. 自然数の乗法の結合法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n \times m) \times l = n \times (m \times l))$$

つまり上の等式の両辺は、$n \times m \times l$ と表記してもよい。

Proof.
$l=0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n\times m)\times 0=0=n\times 0=n\times(m\times 0)$$

ある自然数 l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n\times m)\times s(l)&=(n\times m)\times l+n\times m\\&=n\times(m\times l)+n\times m\\&=(m\times l)\times n+m\times n\\&=(m\times l+m)\times n\\&=(m\times l+m\times 1)\times n\\&=n\times(m\times(l+1))\\&=n\times(m\times s(l))\end{aligned}$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 l について示される。 ■

***Lem.* 7.4.8.** 自然数の順序の乗法による保存

$$\forall n,m,l\in\mathbb{N}((n\neq 0\land m<l)\to n\times m<n\times l)$$

Proof.
$n=0$ のとき、前件否定より明らか。
$n=1$ のとき、1 が乗法の単位元であることから明らか。
ある自然数 $n\geq 1$ で成り立つとき、

$$s(n)\times m=n\times m+m<n\times m+l<n\times l+l=s(n)\times l$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について示される。 ■

***Lem.* 7.4.9.** 自然数の乗法の簡約則

$$\forall n,m,l\in\mathbb{N}(n\times m=n\times l\land n\neq 0\to m=l)$$

Proof.
$m<l$ のとき、補題 7.4.8 より $n\times m<n\times l$。ゆえに、$n\times m\neq n\times l$。
$l<m$ のとき、同様に $n\times m\neq n\times l$。
背理法より示される。 ■

***Lem.* 7.4.10.**

$$\forall n,m\in\mathbb{N}(n\times m=0\to n=0\lor m=0)$$

Proof.
$n=0$ のとき自明。
$n\neq 0$ のとき、$n\times m=n\times 0$ より、自然数の乗法の簡約則から $m=0$。 ■

7.5 自然数の除法

***Def.* 7.5.1. 自然数の除法**

0 でない自然数 b について、以下で定める写像 $G_b\colon \bigcup\{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^a \mid a\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を考える。

$$G_n(h) \coloneqq \begin{cases}(0,0) & (\mathrm{dom}(h)=0)\\ (q,s(r)) & (\mathrm{dom}(h)\neq 0\land s(r)\in b)\\ (s(q),0) & (\mathrm{dom}(h)\neq 0\land s(r)\notin b)\end{cases} \qquad \text{ただし、}(q,r)\coloneqq h(\bigcup\mathrm{dom}\,h)\text{ とする。}$$

このとき、定理 6.2.15 が定める写像 $\div_b\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ が存在する。
誤解のない限り、$\div_b(a)=(q,r)$ を $a\div b=q\cdots r$ と表す。
特に、q を商、r を余りと呼ぶ。

***Lem.* 7.5.1.**

以下が成り立つ。

$$\forall b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}(0\div b\coloneqq 0\cdots 0)$$
$$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}(s(a)\div b=q\cdots s(r))$$

Proof.

第一式について、定義より $\times_n(0)=G(\times_n\circ\iota_{0,\mathbb{N}})=0$ である。
第二式について、定義より $\times_n(s(m))=G(\times_n\circ\iota_{s(m),\mathbb{N}})=\times_n(\bigcup s(m))+n=\times_n(m)+n$ である。 ■

***Def.* 7.5.2. 倍数**

自然数 n,m について、$n\div m$ の余りが 0 のとき、n は m の倍数、または m は n の約数と言う。

***Cor.* 7.5.2.**

任意の自然数 n について、0 は n の倍数であり、1 は n の約数である。また、n は n の倍数でも約数でもある。

***Def.* 7.5.3. 2**

自然数において、$2\coloneqq s(s(0))$ で定める。

***Def.* 7.5.4. 偶奇**

自然数 n について、2 で割った余りが 0 であるとき、n を偶数と呼ぶ。
そうでないとき、n を奇数と呼ぶ。

***Def.* 7.5.5. 素数**

約数をちょうど 2 つ持つ自然数を素数と呼ぶ。

***Cor.* 7.5.3.**

素数 p の約数は、1 と p である。

7.6 点列

***Def.* 7.6.1. 有限列**

自然数 $n\in\mathbb{N}$ から集合 X へのネットを、X 上の有限列、または組、n-組と呼ぶ。

***Def.* 7.6.2.** 点列

自然数 $\mathbb{N}$ から集合 X へのネットを、X 上の点列と呼ぶ。

***Def.* 7.6.3.** 点列の部分列

単射 $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を用いて表せる部分ネット $\left(x_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ を点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列と呼ぶ。

***Def.* 7.6.4.** 非交叉列

点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について以下が成り立つとき、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を非交叉列と呼ぶ。

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \neq m \to x_n \cap x_m = \varnothing)$$

***Def.* 7.6.5.** 単調列

半順序集合 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、以下のいずれかを満たす点列を単調列と呼ぶ。

$$\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}\big(x_n < x_{s(n)}\big)\\ \forall n \in \mathbb{N}\big(x_n \leq x_{s(n)}\big)\\ \forall n \in \mathbb{N}\big(x_n > x_{s(n)}\big)\\ \forall n \in \mathbb{N}\big(x_n \geq x_{s(n)}\big)\end{gathered}$$

特にそれぞれ、第一式を満たす点列を狭義単調増加列、第二式を広義単調増加列、第三式を狭義単調減少列、第四式を広義単調減少列と呼ぶ。

8 有限と可算

8.1 有限

***Def.* 8.1.1.** 有限集合

集合 X について、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して全単射 $f\colon n \to X$ が構成できるとき、X を有限集合と呼ぶ。または、単に X は有限であると呼ぶ。

***Lem.* 8.1.1.** 全射と要素数

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ について、n から m への全射が存在するならば、$m \leq n$

Proof.

$n = 0$ のとき、$m \neq 0$ ならば全射が存在しない。$m = 0$ より示される。

ある自然数 n で成り立つとする。
全射 $f\colon s(n) \to m$ が存在するとする。
$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\,(s(n), 0) = \varnothing$ より、$m \neq 0$ である。
$\exists k \in n(f(k) = f(n))$ のとき、全射 $f \circ \iota_{n,s(n)}$ を構成できて、仮定より $m \leq n \leq s(n)$
$\forall k \in n(f(k) \neq f(n))$ のとき、以下のような全射 $g\colon n \to \bigcup m$ を構成できる。

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) < f(n)) \\ \bigcup f(x) & (f(x) > f(n)) \end{cases}$$

仮定より $\bigcup m \leq n$ より、$m = s(\bigcup m) \leq s(n)$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について成り立つ。 ■

***Lem.* 8.1.2. 単射と要素数**

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ について、n から m への単射が存在するならば、$n \leq m$

Proof.

$n = 0$ のとき、明らか。

$n \neq 0$ のとき、補題 4.6.1 より m から n への左逆写像すなわち全射を構成できて、補題 8.1.1 より $n \leq m$ ■

***Thm.* 8.1.3. 鳩の巣原理**

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ について、$m < n$ ならば n から m への単射が存在しない。

Proof.

補題 8.1.2 の対偶である。■

***Lem.* 8.1.4. 要素数の一意性**

有限集合 X について、全単射 $f \colon n \to X$ が構成できる自然数 $n \in \mathbb{N}$ は一意に定まる。

Proof.

補題 8.1.1、補題 8.1.2 より、背理法より示される。■

***Def.* 8.1.2. 要素数**

有限集合 X について、補題 8.1.4 より主張される自然数を要素数 $|X|$ と呼ぶ。

また、集合 X が有限集合であることを主張するときは、アリティ 1 の述語記号 $|X| < \infty$ を用いる。

***Lem.* 8.1.5. 単射と有限**

自然数 n と集合 A について、以下の 2 つは同値である。

1. A は有限集合であり、$|A| \leq n$
2. 単射 $f \colon A \to n$ が存在する。

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

全単射 $f \colon A \to |A|$ が存在して、単射 $g \colon |A| \to n$ が存在する。

ゆえに、単射 $g \circ f \colon A \to n$ が存在する。

2. $\to$ 1. を示す。

$n = 0$ のとき、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, n) \neq \varnothing$ より、$A = \varnothing$ である。

ある自然数 n について成り立つとする。

$f \colon A \to s(n)$ が存在するとする。

$\forall a \in A(f(a) \neq n)$ のとき、以下で定める単射 $\widetilde{f} \colon A \to n$ が存在する。

$$\widetilde{f}(m) \coloneqq f(m)$$

よって $|A| \leq n \leq s(n)$ である。

$\exists a \in A(f(a) = n)$ のとき、単射 $\widetilde{f} \colon A \setminus \{a\} \to n$ が構成できる。

仮定より $A \setminus \{a\}$ は有限集合であり、$|A \setminus \{a\}| \leq n$ である。

ゆえに全単射 $g \colon A \setminus \{a\} \to |A \setminus \{a\}|$ が存在する。

ここで、以下のような全単射 $h \colon A \to s(|A \setminus \{a\}|)$ を構成できる。

$$h(x) = \begin{cases} |A \setminus \{a\}| & (x = a) \\ g(f(x)) & (x \neq a) \end{cases}$$

$|A| = s(|A \setminus \{a\}|) \leq s(n)$ を得るので成り立つ。■

8.2　有限集合

Lem. **8.2.1.** 有限集合の部分
有限集合 X について、X の部分 Y は有限であり、$|Y| \leq |X|$ である。

Proof.
単射 $f\colon Y \to X, f(y) = y$ と、$n \in \mathbb{N}$ で全単射 $g\colon X \to n$ が存在する。
ゆえに、単射 $g \circ f\colon Y \to n$ が存在して、補題 8.1.5 より成り立つ。 ■

Lem. **8.2.2.** 有限集合の像
有限集合 X、集合 Y、写像 $f\colon X \to Y$ について、像 $f(X)$ は有限であり、$|f(X)| \leq |X|$ である。

Proof.
補題 4.6.4 より、$f\colon X \to f(X)$ は右逆写像すなわち単射 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ を持つ。
$n \in \mathbb{N}$ と全単射 $g\colon X \to n$ が存在するので、単射 $g \circ f^{-1}\colon f(X) \to n$ が存在して、補題 8.1.5 より成り立つ。 ■

Lem. **8.2.3.** 有限集合の商
有限集合 X と、X 上の同値関係 $\sim$ について、商集合 $X/\sim$ は有限であり、$|X/\sim| \leq |X|$ である。

Proof.
商写像 π について、$X/\sim = \pi(X)$ である。補題 8.2.2 より成り立つ。 ■

Lem. **8.2.4.** 有限集合の和
有限集合 X, Y について、$X \cap Y = \varnothing$ ならば、$X \cup Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|$$

Proof.
X, Y は有限より、全単射 $f\colon |X| \to X, f'\colon |Y| \to Y$ が存在する。
ゆえに、以下のような全単射 $g\colon |X| + |Y| \to X \cup Y$ を構成できる。

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < |X|) \\ f'(x - |X|) & (|X| \leq x < |X| + |Y|) \end{cases}$$

■

Lem. **8.2.5.** 有限集合の和と共通部分
有限集合 X, Y について、$X \cup Y, X \cap Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$$

Proof.
単射 $f\colon X \cap Y \to X$ が構成できるので、補題 8.1.5 より $X \cap Y$ は有限集合である。
補題 8.2.4 より、$|X| = |X \cap Y| + |X \setminus Y|$
補題 8.2.4 より、$|X \cup Y| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y|$
したがって、$|X \cup Y| + |X \cap Y| + |X \setminus Y| = |X \setminus Y| + |Y| + |X|$
定義 7.3.2 より成り立つ。 ■

***Lem.* 8.2.6. 有限集合の直積**

有限集合 X, Y について、$X \times Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

Proof.

全単射 $x\colon |X| \to X$ が存在する。

$\forall n \in |X|$ について、$Z_n \coloneqq \{(x(n), y) \mid y \in Y\}$ を考えると、$|Z_n| = |Y|$ である。

$X \times Y = \bigsqcup \{Z_n \mid n \in |X|\}$ が成り立つ。

補題 8.2.4 より、$|X|$ についての帰納法を用いて、$|X \times Y| = |X| \times |Y|$ ■

***Thm.* 8.2.7. 有限有向集合の上界**

空でない有向集合の有限部分 A は、上界を持つ。

Proof.

$|A| = 1$ のとき、A は唯一つの元を持ち、上界である。

$|A| = 2$ のとき、$a_0 \neq a_1$ を用いて $A = \{a_0, a_1\}$ と書ける。有向集合であることより上界が存在する。

$|A| = n$ のとき成り立つとする。

$|A| = s(n)$ について、A のある元 a を考える。集合 $A \setminus \{a\}$ は要素数が n であるため、仮定より上界 a_n を持つ。

ゆえに、今、集合 $\{a, a_n\}$ は上界 $a_{s(n)}$ を持ち、推移律から A の上界となる。

要素数 $|A|$ について、定理 7.2.2 より示される。 ■

***Thm.* 8.2.8. 有限全順序集合の最大元**

全順序集合の空でない有限部分 A は、最大元と最小元を持つ。

Proof.

$|A| = 1$ のとき、A は唯一つの元を持ち、最大元かつ最小元である。

$|A| = 2$ のとき、$a_0 \neq a_1$ を用いて $A = \{a_0, a_1\}$ と書ける。全順序性より $a_0 > a_1 \vee a_0 < a_1$ である。

$a_0 > a_1$ のとき、最大元 a_0、最小元 a_1 である。$a_0 < a_1$ のとき、最大元 a_1、最小元 a_0 である。

$|A| = n$ のとき成り立つとする。

$|A| = s(n)$ について、A のある元 a を考える。集合 $A \setminus \{a\}$ は要素数が n であるため、仮定より最大元 $a_{\max}$ と最小元 $a_{\min}$ を持つ。

ゆえに、A は最大元 $\max\{a, a_{\max}\}$ を持ち、A は最小元 $\min\{a, a_{\min}\}$ を持つ。

要素数 $|A|$ について、定理 7.2.2 より示される。 ■

***Thm.* 8.2.9. 自然数の上界と有限**

$\mathbb{N}$ の部分 A について、A が上に有界ならば A は有限である。

Proof.

上界 n について考える。

$n = 0$ のとき、$A \neq \varnothing$ ならば全射が存在しないので、示される。

ある n で成り立つとき、A が有限であることを考える。

$s(n)$ が上界で、n が上界でないとき、$s(n) \in A$ である。

仮定より、$\exists m \in \mathbb{N}$ で、全単射 $f_0\colon m \to A \setminus \{s(n)\}$ が存在する。

したがって、以下のような全単射 $f\colon s(m) \to A$ を構成できる。

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & (x \neq m) \\ s(n) & (x = m) \end{cases}$$

定理 7.2.2 より、任意の自然数 n について成り立つ。 ■

8.3 濃度

***Lem.* 8.3.1.**

集合 X について、全単射 $\sigma\colon \mathfrak{P}(X) \to 2^X$ が存在する。

Proof.

$x \in X$ について、以下のように σ を定める。

$$\sigma(A)(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

以下で定める σ^{-1} は逆写像である。

$$\sigma^{-1}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

補題 4.6.1、補題 4.6.4 より全単射である。 ■

***Lem.* 8.3.2.**

集合 X と $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、全単射 $\sigma\colon X^n \times X \to X^{s(n)}$ が存在する。

また、全単射 $\sigma'\colon X \to X^1$ が存在する。

Proof.

以下で定める σ は全単射である。

$$\sigma((x_m)_{m \in n}, x)(l) = \begin{cases} x_l & (l \in n) \\ x & (l = n) \end{cases}$$

以下で定める σ' は全単射である。

$$\sigma(x)(0) = x$$

■

***Lem.* 8.3.3.**

集合 X, Y, Z について、自然な全単射 $\sigma\colon (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ が存在する。

Proof.

$\sigma((x, y), z) = (x, (y, z))$ は全単射である。 ■

***Def.* 8.3.1. 可算**

集合 X について、X が空集合または全射 $f\colon \mathbb{N} \to X$ が存在するとき、X を可算集合と呼ぶ。または、単に X は可算であると呼ぶ。

また、集合 X が可算集合であることを主張するときは、アリティ 1 の述語記号 $|X| \leq \aleph_0$ を用いる。

***Cor.* 8.3.4.**

可算集合の部分集合は可算集合である。

***Lem.* 8.3.5. 自然数は最小の無限順序数**

有限でない順序数 α について、$\mathbb{N} \subset \alpha$ である。

Proof.

自然数は順序数であるので、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、補題 6.2.9 より $n \in \alpha \vee \alpha \subset n$ である。

$\alpha \subset n$ であるとき、補題 8.1.5 より α は有限となり、反する。

したがって、$n \in \alpha$ である。

ゆえに、$\mathbb{N} \subset \alpha$ である。 ■

***Thm.* 8.3.6.** 無限集合は可算部分を含む

有限でない集合 X について、単射 $\mathbb{N} \to X$ が存在する。

Proof.

定理 6.4.3 と補題 6.3.5 より、順序数 α が存在して全単射 $\varphi\colon \alpha \to X$ を持つ。

補題 8.3.5 より、$\varphi \circ \iota_{\mathbb{N},\alpha}$ は求める単射である。 ■

***Lem.* 8.3.7.** 無限順序数の後続の濃度

有限でない順序数 α について、単射 $\alpha^+ \to \alpha$ が存在する。

Proof.

補題 8.3.5 より、$\mathbb{N} \subset \alpha$ である。

以下で定める $\varphi\colon \alpha^+ \to \alpha$ は単射である。

$$\varphi(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & (x = \alpha) \\ n+1 & (x \in \mathbb{N}) \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

■

***Lem.* 8.3.8.** 無限順序数の直積

有限でない順序数 α について、全単射 $\alpha \times \alpha \to \alpha$ が存在する。

Proof.

ある有限でない順序数 α について、全単射 $\alpha \times \alpha \to \alpha$ が存在しないとする。

$A \coloneqq \left\{\beta \in \alpha^+ \mid \neg(|\beta| < \infty) \wedge \text{単射 } \beta \times \beta \to \beta \text{ が存在しない。}\right\}$ を考える。

$\alpha \in A$ より $A \neq \varnothing$ であるので、$\min A$ が存在する。

任意の $\beta \in \min A$ について、単射 $\min A \to \beta$ が存在しないことを示す。

β が有限のとき、単射 $\min A \to \beta$ が存在するならば補題 8.1.5 より $\min A$ は有限集合となり、$\min A \in A$ に反する。

β が有限でないときを考える。

存在するとすると、$\iota_{\beta,\min A}$ は単射より、定理 6.3.10 より全単射 $\min A \to \beta$ が存在する。

単射 $\beta \times \beta \to \beta$ が存在するとすると、単射 $\min A \times \min A \to \min A$ を構成できるので、単射 $\beta \times \beta \to \beta$ は存在しない。

ゆえに、$\beta \in A$ の最小性に反する。

よって任意の $\beta \in \min A$ について、単射 $\min A \to \beta$ が存在しない。

以下で定める $\min A \times \min A$ 上の関係 $\leq$ について、$(\min A \times \min A, \leq)$ は整列集合である。

$$\begin{aligned}&(\xi_0, \xi_1) \leq (\eta_0, \eta_1) \\ &:\leftrightarrow \max\{\xi_0, \xi_1\} < \max\{\eta_0, \eta_1\} \vee \Big(\max\{\xi_0, \xi_1\} = \max\{\eta_0, \eta_1\} \wedge \big(\xi_0 < \eta_0 \vee (\xi_0 = \eta_0 \wedge \xi_1 \leq \eta_1)\big)\Big)\end{aligned}$$

任意の $(\xi_0, \xi_1) \in \min A \times \min A$ について、$\xi_2 \coloneqq \max\{\xi_0, \xi_1\}^+$ として、以下が成り立つ。

$$(\min A \times \min A)_{<(\xi_0,\xi_1)} \subset \xi_2 \times \xi_2$$

補題 6.2.11 より、$\xi_2 \in \min A \vee \xi_2 = \min A$ であり、$\xi_2 = \min A$ のとき補題 8.3.7 より単射 $\min A \to \max\{\xi_0, \xi_1\}$ が存在しないことに反する。

ゆえに、$\xi_2 \in \min A$ である。

$\xi_2 \notin A$ より、ξ_2 は有限である、または、単射 $\xi_2 \times \xi_2 \to \xi_2$ が存在する。

ξ_2 が有限であるとき、補題 8.2.6 より $\xi_2 \times \xi_2$ も有限であるので、補題 8.1.5 より単射 $\min A \to \xi_2 \times \xi_2$ は存在しない。

単射 $\xi_2 \times \xi_2 \to \xi_2$ が存在するとき、$\xi_2 \in \min A$ より単射 $\min A \to \xi_2$ は存在しないので、単射 $\min A \to \xi_2 \times \xi_2$ は存在しない。

したがって、全射 $(\min A \times \min A)_{<(\xi_0, \xi_1)} \to \min A$ は存在しない。

補題 6.3.5 より、順序数 α_2 が一意に存在して、順序同型 $\varphi\colon (\min A \times \min A, <) \to (\alpha_2, \in)$ が存在する。

上の議論より、$\forall \xi \in \alpha_2$(全射 $\xi \to \min A$ が存在しない。) であるので、補題 6.3.1 から単射 $\alpha_2 \to \min A$ が存在する。

ゆえに、単射 $\min A \times \min A \to \min A$ が存在して、反する。 ■

***Thm.* 8.3.9.** **無限濃度の直積**

有限でない集合 X について、全単射 $X \times X \to X$ が存在する。

Proof.

定理 6.4.3、補題 6.3.5、補題 8.3.8 より明らかである。 ■