さんすうのーと

わたし

2025 年 3 月 22 日

目次

まえがき

さんすうのーとです。
私ではない誰かのアイデアを多分に含みます。
引用・注釈はありません。内容が正しいことを保証しません。
間違いや美しくない部分があれば教えてください。私が喜びます。

（追記）いくつかの証明を考察してくれた O 君に感謝を。

0　論理学

***Rem.* 0.0.1.** 簡単のための記号の導入

並列 , を断りなく用いる。

() で定める優先順序を断りなく用いる。

0.1　命題と命題結合子

***Def.* 0.1.1.** 命題

真偽が確定している言明を、命題と呼ぶ。

***Def.* 0.1.2.** 否定

命題 ϕ について、$\neg\phi$ は命題である。

$\neg\phi$ を、「ϕ でない」と呼ぶ。

以下の約束をする。

- ϕ が真であるとき、$\neg\phi$ は偽である。
- ϕ が偽であるとき、$\neg\phi$ は真である。

***Def.* 0.1.3.** 含意

命題 ϕ, ψ について、$\phi \to \psi$ は命題である。

$\phi \to \psi$ を、「ϕ ならば ψ」、「ϕ は ψ に十分」、「ψ は ϕ に必要」と呼ぶ。

以下の約束をする。

- ϕ が偽であるとき、$\phi \to \psi$ は真である。
- ψ が真であるとき、$\phi \to \psi$ は真である。
- ϕ が真であり、ψ が偽であるとき、$\phi \to \psi$ は偽である。

このとき、ϕ を前件、ψ を後件と呼ぶ。

***Rem.* 0.1.1.** 命題の定義記号

定義記号 $:\leftrightarrow$ を導入する。

これは左辺を用いて表現された命題は、全てその左辺と一致する部分を右辺に置き換えて理解するという意味である。

***Def.* 0.1.4.** 左含意

命題 ϕ, ψ について、$\psi \leftarrow \phi$ は、以下で定める命題である。

$$\psi \leftarrow \phi :\leftrightarrow \phi \to \psi$$

同様に、「ϕ ならば ψ」、「ϕ は ψ に十分」、「ψ は ϕ に必要」と呼ぶ。

***Def.* 0.1.5.** 連言

命題 ϕ, ψ について、$\phi \wedge \psi$ は、以下で定める命題である。

$$\phi \wedge \psi :\leftrightarrow (\neg\phi) \to \psi$$

$\phi \wedge \psi$ を、「ϕ かつ ψ」と呼ぶ。

***Def.* 0.1.6.** 選言

命題 ϕ, ψ について、$\phi \vee \psi$ は、以下で定める命題である。

$$\phi \vee \psi :\leftrightarrow \neg((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$$

$\phi \vee \psi$ を、「ϕ または ψ」と呼ぶ。

***Def.* 0.1.7.** 同値

命題 ϕ, ψ について、$\phi \leftrightarrow \psi$ は、以下で定める命題である。

$$\phi \leftrightarrow \psi :\leftrightarrow (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$$

$\phi \leftrightarrow \psi$ を、「ϕ と ψ は同値」、「ϕ と ψ は必要十分」と呼ぶ。

***Def.* 0.1.8.** 命題結合子

否定 $\neg$、連言 $\wedge$、選言 $\vee$、含意 $\to$、同値 $\leftrightarrow$ を、総称して命題結合子と呼ぶ。

***Rem.* 0.1.2.** 命題結合子の優先順序

特に () で定められていなければ、以下に示す順序で優先されるものとする。

1. 否定 $\neg$
2. 連言 $\wedge$
3. 選言 $\vee$
4. 含意 $\to$
5. 同値 $\leftrightarrow$

0.2 恒真命題

***Def.* 0.2.1.** 恒真命題

命題結合子により結合されている命題 ψ を考える。結合されている各命題の真偽によらず、ψ が真となる命題を、恒真命題と呼ぶ。

***Def.* 0.2.2.** 矛盾

偽である命題を矛盾と呼び、$\perp$ で表す。

***Cor.* 0.2.1.**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下に示す全ては恒真命題である。

1. 同一律
   - $\phi \to \phi$
2. 冪等律
   - $\phi \leftrightarrow \phi \wedge \phi$
   - $\phi \leftrightarrow \phi \vee \phi$
3. Łukasiewicz の第一公理
   - $\phi \to (\psi \to \phi)$
4. 結合律
   - $\phi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \chi$
   - $\phi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \chi$
5. 交換律
   - $\phi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \phi$
   - $\phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi$
6. 吸収律
   - $\phi \vee (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \phi$
   - $\phi \wedge (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \phi$
7. 分配律
   - $\phi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$
   - $\phi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$
8. 推移律
   - $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$
9. De Morgan の法則
   - $\neg\phi \vee \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$
   - $\neg\phi \wedge \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \vee \psi)$
10. 無矛盾律
    - $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$
11. 不条理則
    - $\bot \to \phi$
12. 二重否定除去
    - $\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$
13. 排中律
    - $\phi \vee \neg\phi$
14. Peirce 則
    - $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$
15. 背理法
    - $(\phi \wedge \neg\psi \to \bot) \to (\phi \to \psi)$
16. 対偶法
    - $(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)$
17. 選言三段論法
    - $(\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi \to \psi$

当然これらは代表的な例であり、全てではない。

0.3　推論と推論規則

***Rem.* 0.3.1. 古典論理**

以降、古典論理（NK）の推論規則を導入する。

***Def.* 0.3.1. 推論**

命題 ϕ, ψ について、ϕ から ψ が推論されるとき、$\phi \vdash \psi$ で明示的に表す。

***Ax.* 0.3.1. 連言の導入則**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$((\chi \vdash \phi), (\chi \vdash \psi)) \vdash (\chi \vdash \phi \wedge \psi)$$

***Ax.* 0.3.2. 連言の除去則**

命題 ϕ, ψ について、以下の 2 つを定める。

$$\phi \wedge \psi \vdash \phi$$
$$\phi \wedge \psi \vdash \psi$$

***Ax.* 0.3.3. 選言の導入則**

命題 ϕ, ψ について、以下の 2 つを定める。

$$\phi \vdash \phi \vee \psi$$
$$\psi \vdash \phi \vee \psi$$

***Ax.* 0.3.4. 選言の除去則**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$((\phi \vdash \chi), (\psi \vdash \chi)) \vdash (\phi \vee \psi \vdash \chi)$$

***Ax.* 0.3.5. 含意の導入則（演繹定理）**

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$(\chi \wedge \phi \vdash \psi) \vdash (\chi \vdash (\phi \to \psi))$$

***Ax.* 0.3.6. 含意の除去則（Modus Ponens）**

命題 ϕ, ψ について、以下を定める。

$$\phi \wedge (\phi \to \psi) \vdash \psi$$

含意の導入、除去則より、演繹と含意を似たような意味で扱うことができる。

***Ax.* 0.3.7.** 否定の導入則

命題 ϕ, ψ について、以下を定める。

$$(\phi \wedge \psi \vdash \bot) \vdash (\phi \vdash \neg\psi)$$

***Ax.* 0.3.8.** 否定の除去則（二重否定の除去）

命題 ϕ について、以下を定める。

$$\neg\neg\phi \vdash \phi$$

0.4 述語論理

***Def.* 0.4.1.** 述語

一つないし複数の変項を持ち、その変項の全てが確定したときに命題となる言明を、述語と呼ぶ。

述語を表す記号である述語記号 ϕ と変項 x を用いて $\phi(x)$ で表す。

述語記号が要求する変項の数を、その述語記号のアリティと呼ぶ。

***Rem.* 0.4.1.** 変項の定義記号

定義記号 $:=$ を導入する。

これは左辺を用いて表現された変項は、全てその左辺と一致する部分を右辺に置き換えて理解するという意味である。

***Def.* 0.4.2.** 全称量化子

述語 $\phi(x)$ について、$\forall x(\phi(x))$ は命題である。

***Ax.* 0.4.1.** 全称量化子の導入則

変項 x を出現させない述語 ψ と述語記号 ϕ について、以下を定める。

$$(\psi \vdash \phi(x)) \vdash (\psi \vdash \forall x(\phi(x)))$$

***Ax.* 0.4.2.** 全称量化子の除去則

述語記号 ϕ について、以下を定める。

$$\forall x(\phi(x)) \vdash \phi(y)$$

***Def.* 0.4.3.** 存在量化子

述語 $\phi(x)$ について、$\exists x(\phi(x))$ は命題である。

***Ax.* 0.4.3.** 存在量化子の導入則

述語記号 ϕ について、以下を定める。

$$\phi(y) \vdash \exists x(\phi(x))$$

***Ax.* 0.4.4. 存在量化子の除去則**

述語記号 ϕ、変項 y を出現させない述語 ψ、命題 χ について、以下を定める。

$$(\chi \land \phi(y) \vdash \psi) \vdash (\chi \land \exists x(\phi(x)) \vdash \psi)$$

***Cor.* 0.4.1. 量化子と連言**

述語記号 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\forall x(\phi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow \forall x(\phi(x)) \land \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\phi(x) \land \psi(x)) \rightarrow \exists x(\phi(x)) \land \exists x(\psi(x))$$

***Cor.* 0.4.2. 量化子と選言**

述語記号 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\forall x(\phi(x) \lor \psi(x)) \leftarrow \forall x(\phi(x)) \lor \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\phi(x) \lor \psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \lor \exists x(\psi(x))$$

***Cor.* 0.4.3. 量化子と否定**

述語記号 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\forall x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(\phi(x))$$
$$\exists x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\forall x(\phi(x))$$

***Def.* 0.4.4. 等号**

アリティ 2 の述語記号 $=$ を定める。

$=(x, y)$ を、簡単のために $x = y$ で表す。

***Ax.* 0.4.5. 等号の導入則（反射律）**

変項 x について、以下を定める。

$$x = x$$

***Ax.* 0.4.6. 等号の除去則（代入原理）**

述語記号 ϕ、変項 x, y について、以下を定める。

$$\phi(x) \land x = y \vdash \phi(y)$$

***Lem.* 0.4.4. 等号の対称律**

変項 x, y について、以下が成り立つ。

$$x = y \vdash y = x$$

Proof.

$x = x \wedge x = y$

左命題の左辺に、右命題から得る代入を行って、$y = x$ を得る。 ■

Cor. 0.4.5. 等号の推移律

変項 x, y, z について、以下が成り立つ。

$$x = y \wedge y = z \vdash x = z$$

Def. 0.4.5. 等号否定

略記 $\neq$ を以下のように定める。

$$a \neq b :\leftrightarrow \neg(a = b)$$

1　集合

***Def.* 1.0.1.** 集合
述語記号 $\in$ を定める。
略記 $\notin$ を以下で定める。

$$x \notin X :\leftrightarrow \neg(x \in X)$$

略記 $\forall \in, \exists \in$ を以下で定める。

$$\forall x \in X(p(x)) :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to p(x))$$
$$\exists x \in X(p(x)) :\leftrightarrow \exists x(x \in X \land p(x))$$

$\in$ に関わる、全ての公理を満たす変項を集合（set、集まり collection とは区別される）と呼ぶ。

***Def.* 1.0.2.** 要素
集合 x, X について、$x \in X$ であるとき、x は X の要素または元と呼ぶ。

***Def.* 1.0.3.** 集合系
集合を要素としている集合であることを強調したいとき、この集合を集合系と呼ぶ。

***Def.* 1.0.4.** 包含
集合 X, Y が以下を満たすとき、X は Y の部分集合であると呼び、$X \subset Y$ と表す。

$$\forall X \forall Y(X \subset Y :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to x \in Y))$$

略記 $\supset, \subsetneq, \supsetneq$ を以下で定める。

$$\forall X \forall Y(X \subsetneq Y :\leftrightarrow X \subset Y \land X \neq Y)$$
$$\forall X \forall Y(X \supset Y :\leftrightarrow Y \subset X)$$
$$\forall X \forall Y(X \supsetneq Y :\leftrightarrow Y \subsetneq X)$$

1.1　集合の構成

***Ax.* 1.1.1.** 外延性の公理

$$\forall X \forall Y(\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \to X = Y)$$

***Cor.* 1.1.1.** 相等の定義
以下が成り立つ。

$$\forall X \forall Y(X = Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

***Cor.* 1.1.2.** 包含の半順序性

以下が成り立つ。

$$\forall X(X \subset X)$$
$$\forall X \forall Y(X \subset Y \land Y \subset X \to X = Y)$$
$$\forall X \forall Y \forall Z(X \subset Y \land Y \subset Z \to X \subset Z)$$

***Rem.* 1.1.1.** 集合の外延的定義

公理 1.1.1 より、全ての要素を書き下せば集合は一意に定まる。このような全ての要素を書き下す集合の定義方法を、外延的定義と呼ぶ。

例えば、要素が x, y, z であり、かつ、それのみである集合 X に対して以下のような定義をする。

$$X = \{x, y, z\}$$

***Ax.* 1.1.2.** 空集合の公理

$$\exists A \forall x(x \notin A)$$

***Def.* 1.1.1.** 空集合

公理 1.1.1 から、公理 1.1.2 が主張する集合が一意に定まる。この集合を空集合と呼び、$\varnothing$ で表す。

外延的に $\{\}$ とも表す。

***Cor.* 1.1.3.**

$$\forall X(\varnothing \subset X)$$

***Ax.* 1.1.3.** 対の公理

$$\forall x \forall y \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t = x \lor t = y)$$

***Def.* 1.1.2.** 単集合

$x = y$ を考えることで、集合 $\{x, x\}$ が存在する。この集合は、公理 1.1.1 から、$\{x\}$ とも表せる。

このような単一の元からなる集合を単集合（singleton）と呼ぶ。

***Ax.* 1.1.4.** 正則性の公理

$$\forall X(X \neq \varnothing \to \exists x(x \in X \land \forall t(t \in X \to t \notin x)))$$

***Lem.* 1.1.4.**

$$\forall x \forall y \neg (x \in y \land y \in x)$$

Proof.

公理 1.1.3 より、$\{x, y\}$ が存在する。

公理 1.1.4 より、

$$\exists z (z \in \{x, y\} \land \forall t (t \in \{x, y\} \land t \notin z))$$

よって、

$$\forall t (t \in \{x, y\} \land t \notin x) \lor \forall t (t \in \{x, y\} \land t \notin y)$$

ゆえに、

$$(x \notin x \land y \notin x) \lor (x \notin y \land y \notin y)$$

したがって、

$$y \notin x \lor x \notin y$$

■

***Cor.* 1.1.5.**

$$\forall x (x \notin x)$$

1.2　集合の和と冪

***Ax.* 1.2.1. 和集合の公理**

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists Y (t \in Y \land Y \in X))$$

***Def.* 1.2.1. 和集合**

集合系 X について、公理 1.2.1 の主張する集合 A が存在して、これは公理 1.1.1 から一意に定まる。このような集合 A を、X の和集合と呼び、$\bigcup X$ で表す。

和集合 $\bigcup \{x, y\}$ を、簡単のために $x \cup y$ とも表す。

***Cor.* 1.2.1.**

$$\forall X \forall x \Big(x \in X \to x \subset \bigcup X \Big)$$

***Cor.* 1.2.2.**

$$\forall X \forall Y \Big(X \subset Y \to \bigcup X \subset \bigcup Y \Big)$$

Cor. **1.2.3.**

$$\forall x \forall y \forall z (x \subset y \to x \cup z \subset y \cup z)$$

Cor. **1.2.4.**

$$\bigcup \varnothing = \varnothing$$

Cor. **1.2.5.**

$$\forall x \Big(\bigcup \{x\} = x \Big)$$

Ax. **1.2.2. 冪集合の公理**

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \subset X)$$

Def. **1.2.2. 冪集合**

集合 X について、公理 1.2.2 の主張する集合 A が存在して、これは公理 1.1.1 から一意に定まる。このような集合 A を、冪集合と呼び、$\mathfrak{P}(X)$ で表す。

Rem. **1.2.1. 冪の要素と部分**

$\forall x \in \mathfrak{P}(X)$ や $\exists x \in \mathfrak{P}(X)$ を、簡単のために、$\forall x \subset X$ や $\exists x \subset X$ とも表す。

Cor. **1.2.6.**

$$\forall X (\varnothing \in \mathfrak{P}(X) \land X \in \mathfrak{P}(X))$$

Cor. **1.2.7.**

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \to \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y))$$

Cor. **1.2.8.**

$$\mathfrak{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

Cor. **1.2.9.**

$$\forall x (\mathfrak{P}(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\})$$

***Cor.* 1.2.10.**

$$\forall X\left(\bigcup \mathfrak{P}(X) = X\right)$$

***Def.* 1.2.3.** 被覆

集合 A について、以下を満たす集合 X を A の被覆と呼ぶ。

$$X \subset \mathfrak{P}(A) \land A = \bigcup X$$

1.3 集合の共通と差

***Ax.* 1.3.1.** 置換の公理図式

アリティ 2 の述語記号 ψ をパラメータとする以下の公理図式を考える。

$$\forall x \forall y \forall z(\psi(x, y) \land \psi(x, z) \to y = z) \to \forall X \exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \land \psi(x, y)))$$

***Rem.* 1.3.1.** 集合の内包的定義１

公理 1.1.1 より、公理 1.3.1 より主張される集合 A は一意に定まる。公理 1.3.1 に基づく定義方法を、内包的定義と呼び、公理 1.3.1 の前件を満たすアリティ 2 の述語記号 ψ について、以下で表す。

$$A = \{y \mid \exists x \in X(\psi(x, y))\}$$

***Thm.* 1.3.1.** 分出の公理図式

アリティ 1 の述語記号 ψ について、以下が成り立つ。

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \land \psi(t))$$

Proof.

アリティ 1 の述語記号 P を考える。排中律より、

$$\forall X(\exists a(a \in X \land P(a)) \lor \forall a \neg(a \in X \land P(a)))$$

$\forall a \neg(a \in X \land P(a))$ のとき、$A = \varnothing$ で示される。

$\exists a(a \in X \land P(a))$ のとき、以下のようなアリティ 2 の述語記号 ψ を考える。

$$\psi(x, y) :\leftrightarrow (P(x) \land y = x) \lor (\neg P(x) \land y = a)$$

公理 1.3.1 より、

$$\exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \land ((P(x) \land y = x) \lor (\neg P(x) \land y = a))))$$

すなわち、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists x((x \in X \land P(x) \land t = x) \lor (x \in X \land \neg P(x) \land t = a)))$$

$\exists$ を除去して、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow (t \in X \land P(t)) \lor t = a)$$

$t = a \to (a \in X \wedge P(a))$ より、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \wedge P(t))$$

■

***Rem.* 1.3.2. 集合の内包的定義２**

公理 1.1.1 より、定理 1.3.1 より主張される集合 A は一意に定まる。定理 1.3.1 に基づく定義方法も、内包的定義と呼び、以下で表す。

$$A = \{t \mid t \in X \wedge \psi(t)\}$$

簡単のために、以下でも表す。

$$A = \{t \in X \mid \psi(t)\}$$

***Def.* 1.3.1. 共通集合**

集合系 X について、以下で定める集合を、X の共通集合と呼び、$\bigcap X$ で表す。

$$\bigcap X := \left\{x \mid x \in \bigcup X \wedge \forall Y(Y \in X \to x \in Y)\right\}$$

共通集合 $\bigcap\{x, y\}$ を、簡単のために $x \cap y$ とも表す。

***Rem.* 1.3.3. 共通集合の定義について**

本ノートにおける共通集合の定義は、$\bigcap\varnothing$ の取り扱いにおいて一般的ではないことに注意されたい。

***Thm.* 1.3.2. 共通集合**

$$\bigcap\varnothing = \varnothing$$
$$X \neq \varnothing \to \bigcap X = \{x \mid \forall Y(Y \in X \to x \in Y)\}$$

Proof.

第一式は、定義より自明。

第二式について考える。以下が成り立つ。

$$\forall X \forall x \forall Y(Y \in X \to x \in Y)$$
$$\forall X \forall x(X = \varnothing \vee \exists Y(Y \in X \wedge x \in Y))$$
$$\forall X \forall x\left(X = \varnothing \vee x \in \bigcup X\right)$$

■

***Cor.* 1.3.3.**

$$\forall x \forall X\left(x \in X \to \bigcap X \subset x\right)$$

***Cor.* 1.3.4.**

$$\forall x \forall y \forall z(x \subset y \to x \cap z \subset y \cap z)$$

***Cor.* 1.3.5.**

$$\forall X \forall Y \Big(X \neq \varnothing \land X \subset Y \to \bigcap Y \subset \bigcap X \Big)$$

***Cor.* 1.3.6.**

$$\forall x \Big(\bigcap \{x\} = x \Big)$$

***Cor.* 1.3.7.** 吸収法則

$$\forall x \forall y (x \cup (x \cap y) = x)$$
$$\forall x \forall y (x \cap (x \cup y) = x)$$

***Cor.* 1.3.8.** 分配法則

$$\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$$

***Cor.* 1.3.9.**

$$\forall X \Big(\bigcap X \subset \bigcup X \Big)$$

***Cor.* 1.3.10.**

$$\forall X \forall Y (\mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cap Y))$$

***Def.* 1.3.2.** 分割

集合 A について、以下を満たす A の被覆 X を A の分割と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X (x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$$

明示的に以下で表す。

$$A = \bigsqcup X$$

***Def.* 1.3.3. 差集合**
集合 X, Y について、以下で定める集合を、X と Y の差集合と呼び、$X \setminus Y$ で表す。

$$X \setminus Y \coloneqq \{x \mid x \in X \land x \notin Y\}$$

***Cor.* 1.3.11.**

$$\forall X \forall Y (X \setminus Y \subset X)$$

***Cor.* 1.3.12.**

$$\begin{gathered}\forall X (X \setminus X = \varnothing) \\ \forall X (X \setminus \varnothing = X) \\ \forall X (\varnothing \setminus X = \varnothing)\end{gathered}$$

***Cor.* 1.3.13.**

$$\forall X \forall Y \forall Z (X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z))$$

***Cor.* 1.3.14.**

$$\forall X \forall Y \forall Z (Y \subset Z \to X \setminus Z \subset X \setminus Y)$$

***Cor.* 1.3.15.**

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \leftrightarrow X \setminus Y = \varnothing)$$

***Thm.* 1.3.16. De Morgan の法則**
集合 X と空でない集合系 A について、以下が成り立つ。

$$\begin{gathered}X \setminus \bigcup A = \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \\ X \setminus \bigcap A = \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\end{gathered}$$

Proof.
第一の定理を示す。

$$\begin{aligned}x \in X \setminus \bigcup A &\leftrightarrow x \in X \land x \notin \bigcup A \\ &\leftrightarrow x \in X \land \forall Y (Y \in A \to x \notin Y) \leftrightarrow x \in X \land \forall Y (Y \in A \to x \notin X \setminus Y)\end{aligned}$$

$A \neq \varnothing$ より、

$$\leftrightarrow x \in X \land x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \leftrightarrow x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

第二の定理を示す。

$$\begin{aligned}x \in X \setminus \bigcap A \leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcap A \leftrightarrow x \in X \wedge \Big(x \notin \bigcup A \vee \exists Y(Y \in A \wedge x \notin Y)\Big)\\ \leftrightarrow x \in X \setminus \bigcup A \vee \exists Y(Y \in A \wedge x \in X \setminus Y)\\ \leftrightarrow x \in X \setminus \bigcup A \vee x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\\ \leftrightarrow x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\end{aligned}$$

最後の変形には、第一の定理を用いた。 ■

1.4　順序対と集合の直積

***Def.* 1.4.1.** 順序対

公理 1.1.3 から、$\{\{x\},\{x,y\}\}$ が存在する。このような集合を、順序対と呼び、(x,y) で表す。

***Cor.* 1.4.1.** 順序対の相等

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2((x_1,x_2)=(y_1,y_2) \leftrightarrow x_1=y_1 \wedge x_2=y_2)$$

***Cor.* 1.4.2.** 順序対の順序性

$$\forall x \forall y(x \neq y \to (x,y) \neq (y,x))$$

***Cor.* 1.4.3.** 順序対の取り出し

$$\forall x \forall y\Big(x = \bigcup \bigcap (x,y)\Big)$$

$$\forall x \forall y\Big(y = \bigcup \bigcap (x,y) \wedge \Big(\bigcap (x,y) = \bigcap (x,y)\Big)\Big) \vee \Big(y = \bigcup \Big(\bigcup (x,y) \setminus \bigcap (x,y)\Big) \wedge \Big(\bigcap (x,y) \neq \bigcap (x,y)\Big)\Big)$$

***Lem.* 1.4.4.**

$$\forall X \forall Y \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in Y \to (x,y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)))$$

Proof.

$$\begin{gathered}x \in X \wedge y \in Y\\ \{x\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \wedge \{x,y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y)\\ (x,y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y))\end{gathered}$$

■

***Def.* 1.4.2.** 直積集合

集合 X, Y について、以下を満たす集合を X と Y の直積集合と呼び、$X \times Y$ で表す。

$$X \times Y \coloneqq \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = (x, y))\}$$

***Cor.* 1.4.5.**

$$\forall X (X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing)$$

***Cor.* 1.4.6.**

$$\forall X_1, X_2, Y ((X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y))$$
$$\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 ((X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2))$$
$$\forall X_1, X_2, Y ((X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y))$$

1.5 関係

***Def.* 1.5.1.** 関係

集合 X, Y と、集合系 $G \subset X \times Y$ について、順序対 $\mathfrak{R} \coloneqq ((X, Y), G)$ を関係と呼ぶ。

記号の濫用であるが、$\mathfrak{R}$ を以下で定めるアリティ 2 の述語記号としても扱う。

$$\mathfrak{R}(x, y) :\leftrightarrow (x, y) \in G$$

***Def.* 1.5.2.** 左一意的

関係 $\mathfrak{R}$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は左一意的であると言う。

$$\forall w, x (\exists y (\mathfrak{R}(w, y) \wedge \mathfrak{R}(x, y)) \to w = x)$$

***Def.* 1.5.3.** 右一意的

関係 $\mathfrak{R}$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は右一意的であると言う

$$\forall y, z (\exists x (\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(x, z)) \to y = z)$$

***Def.* 1.5.4.** 一対一

関係 $\mathfrak{R}$ が左一意的かつ右一意的であるとき、$\mathfrak{R}$ は一対一であると言う。

***Def.* 1.5.5.** 左全域的

関係 $\mathfrak{R} = ((X,Y),G)$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は左全域的であると言う。

$$\forall x \in X \exists y(\mathfrak{R}(x,y))$$

***Def.* 1.5.6.** 右全域的

関係 $\mathfrak{R} = ((X,Y),G)$ が以下を満たすとき、$\mathfrak{R}$ は右全域的であると言う。

$$\forall y \in Y \exists x(\mathfrak{R}(x,y))$$

2　写像

***Ax.* 2.0.1.** 選択公理

$$\forall X(\varnothing \notin X \land \forall x \forall y(x \in X \land y \in X \land x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to \exists A \forall x(x \in X \to \exists t(x \cap A = \{t\})))$$

2.1　写像

***Def.* 2.1.1.** 写像

右一意的かつ左全域的な関係 $f = ((X,Y),G)$ を写像と呼ぶ。

記号の濫用であるが、$f()$ を以下で定める $x \in X$ についての略記としても扱う。

$$f(x) \coloneqq \bigcup \{y \in Y \mid \mathfrak{R}(x,y)\}$$

$f(x)$ を x での f の値と呼ぶ。

***Rem.* 2.1.1.** 写像の構成的な定義

集合 X,Y と、X の要素 x から Y の要素 y を対応させる規則 f を考えると、順序対 $((X,Y),\{(x,f(x)) \mid x \in X\})$ は写像である。

このとき、記号の濫用であるが、この写像を f で表す。

より簡単に、$f\colon X \to Y, f(x) \coloneqq \cdots$ の形式によって写像を定義する。

***Rem.* 2.1.2.** 部分写像

左全域性が担保されていない写像を部分写像と呼ぶ。

この場合においても、写像の構成的な定義と同様の定義方法が行える。

***Rem.* 2.1.3. 集合の内包的定義３**

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たすアリティ 2 の述語記号 $\psi(x,y)$ を考える。

$$\forall x, y(\psi(x,y) :\leftrightarrow y = f(x))$$

f が写像であることから公理 1.3.1 の主張する集合 A が存在する。

A は、より簡潔に以下でも表す。

$$A = \{f(x) \mid x \in X\}$$

***Def.* 2.1.2. 写像の定義域と終域**

写像 $f = ((X,Y),G)$ を考える。

X を定義域と呼び、$\mathrm{dom}(f)$ で表す。

Y を終域と呼び、$\mathrm{ran}(f)$ で表す。

***Def.* 2.1.3. 写像の全体**

集合 X,Y について、Y^X で表す集合を以下で定める。

$$Y^X \coloneqq \big\{((X,Y),G) \mid G \subset X \times Y \land \big(((X,Y),G)\text{ は写像}\big)\big\}$$

また Y^X は、$\mathrm{Map}(X,Y)$ とも表す。

***Cor.* 2.1.1.**

以下が成り立つ。

$$\forall Y\big(Y^{\varnothing} = \{((\varnothing,Y),\varnothing)\}\big)$$
$$\forall X\big(X \neq \varnothing \to \varnothing^X = \varnothing\big)$$

***Def.* 2.1.4. 空写像**

定義域が空集合である写像は、一意に定まる。

このような写像を空写像と呼ぶ。

***Def.* 2.1.5. 制限写像**

写像 $f = ((X,Y),G)$ と、X の部分 A について、以下で定める集合系 G_A を考える。

$$G_A \coloneqq \{(x,y) \in G \mid x \in A\}$$

写像 $((A,Y),G_A)$ を、f の A への制限写像、または単に制限と呼び、$f|_A$ で表す。

***Def.* 2.1.6. 恒等写像**

集合 X について、以下で定める集合系 Δ を考える。

$$\Delta \coloneqq \{(x,x) \mid x \in X\}$$

写像 $((X,X),\Delta)$ を恒等写像と呼び、id_X で表す。

***Def.* 2.1.7.** 合成写像

写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ について、以下で定める集合系 G を考える。

$$G \coloneqq \{(x,z) \mid \exists y \in Y(y = f(x) \land z = g(y))\}$$

写像 $((X,Z),G)$ を f と g の合成写像、または単に合成と呼び、$g \circ f$ で表す。

***Cor.* 2.1.2.** 写像の合成の結合法則

写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z, h\colon Z \to W$ について、以下が成り立つ。

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

***Thm.* 2.1.3.** 選択公理が与える写像

集合 X, Y とアリティ 2 の述語記号 ψ について、$\forall x \in X \exists y \in Y(\psi(x,y))$ が成り立つとする。

このとき、以下を満たす写像 $f\colon X \to Y$ が存在する。

$$\forall x \in X \forall y \in Y(f(x) = y \to \psi(x,y))$$

Proof.

$X = \varnothing$ のとき、空写像が存在する。

$X \neq \varnothing$ のときを考える。以下の集合 Z を考える。

$$Z \coloneqq \{\{(x,y) \mid y \in Y \land \psi(x,y)\} \mid x \in X\}$$

Z について公理 2.0.1 の主張する集合 A が存在する。

関係 $((X,Y),A)$ は、仮定より X について左全域的で、A の定義より右一意的である。 ■

2.2 像と原像

***Def.* 2.2.1.** 像

写像 $f\colon X \to Y$ と、X の部分集合 A について、以下で定める集合を A の f による像と呼び、$f(A)$ で表す。

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$$

また、$f(X)$ を $\mathrm{Im}(f)$ でも表す。

***Thm.* 2.2.1.** 像の性質

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2 \subset X(A_1 \subset A_2 \to f(A_1) \subset f(A_2))$$
$$\forall B \subset \mathfrak{P}(X)\Big(f\Big(\bigcup B\Big) = \bigcup\{f(A) \mid A \in B\}\Big)$$
$$\forall B \subset \mathfrak{P}(X)\Big(f\Big(\bigcap B\Big) \subset \bigcap\{f(A) \mid A \in B\}\Big)$$
$$\forall A_1, A_2 \subset X(f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2))$$

Proof.

第一式について、$y \in f(A_1)$ のとき、$\exists x \in A_1(y = f(x))$、$\exists x \in A_2(y = f(x))$、ゆえに $y \in f(A_2)$

第二式について、

$$
\begin{gathered}
y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \\
\exists A \in B(y \in f(A)) \\
\exists A \in B \exists x \in A(y = f(x)) \\
\exists x \in \bigcup B(y = f(x)) \\
y \in f\Bigl(\bigcup B\Bigr)
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$
\begin{gathered}
y \in f\Bigl(\bigcap B\Bigr) \\
\exists x\Bigl(x \in \bigcap B \land y = f(x)\Bigr) \\
\exists x\Bigl(x \in \bigcup B \land \forall A(A \in B \to x \in A) \land y = f(x)\Bigr) \\
\exists x\Bigl(x \in \bigcup B \land y = f(x)\Bigr) \land \exists x(\forall A(A \in B \to x \in A) \land y = f(x)) \\
y \in f\Bigl(\bigcup B\Bigr) \land \forall A(A \in B \to y \in f(A)) \\
y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \land \forall A(A \in B \to y \in f(A)) \\
y \in \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}
\end{gathered}
$$

第四式について、

$$
\begin{gathered}
y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \\
\exists x(y = f(x) \land x \in A_1) \land \forall x(y = f(x) \to x \notin A_2) \\
\exists x(y = f(x) \land x \in A_1 \setminus A_2) \\
y \in f(A_1 \setminus A_2)
\end{gathered}
$$

■

***Def.* 2.2.2.** 原像

写像 $f\colon X \to Y$ と集合 A について、以下で定める集合を、集合 A の原像と呼び、$f^{-1}(A)$ で表す。

$$
f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}
$$

***Cor.* 2.2.2.** 像と原像

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下が成り立つ。

$$
\begin{gathered}
\forall A \subset X\bigl(f^{-1}(f(A)) \supset A\bigr) \\
\forall B\bigl(f\bigl(f^{-1}(B)\bigr) \subset B\bigr)
\end{gathered}
$$

***Thm.* 2.2.3.** 原像の性質

写像 f について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2\bigl(A_1 \subset A_2 \to f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2)\bigr)$$
$$\forall B\Bigl(f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr) = \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr)$$
$$\forall B\Bigl(f^{-1}\Bigl(\bigcap B\Bigr) = \bigcap\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr)$$
$$\forall A_1, A_2\bigl(f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \setminus A_2)\bigr)$$

Proof.

第一式について、$x \in f^{-1}(A_1)$ のとき、$f(x) \in A_1 \subset A_2$ ゆえに $x \in f^{-1}(A_2)$

第二式について、

$$x \in \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}$$
$$\exists A \in B\bigl(x \in f^{-1}(A)\bigr)$$
$$\exists A \in B(f(x) \in A)$$
$$f(x) \in \bigcup B$$
$$x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr)$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$x \in f^{-1}\Bigl(\bigcap B\Bigr)$$
$$f(x) \in \bigcap B$$
$$f(x) \in \bigcup B \land \forall A(A \in B \to f(x) \in A)$$
$$x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup B\Bigr) \land \forall A\bigl(A \in B \to x \in f^{-1}(A)\bigr)$$
$$x \in \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\} \land \forall A\bigl(A \in B \to x \in f^{-1}(A)\bigr)$$
$$x \in \bigcap\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。

第四式について、

$$x \in f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2)$$
$$f(x) \in A_1 \land f(x) \notin A_2$$
$$f(x) \in A_1 \setminus A_2$$
$$x \in f^{-1}(A_1 \setminus A_2)$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。 ■

2.3 単射と全射

***Def.* 2.3.1.** 単射

写像 f が左一意的であるとき、f は単射であると言う。

単射な写像を、単に単射と呼ぶ。

***Cor.* 2.3.1.**

単射 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ について、$g \circ f$ は単射である。

***Lem.* 2.3.2.**

集合 X, Y について、単射 $f\colon X \to Y$ が存在するならば、単射 $g\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ が存在する。

Proof.

$g(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$ で定義する写像は、単射である。 ■

***Def.* 2.3.2. 全射**

写像 f が右全域的であるとき、f は全射であると言う。

全射な写像を、単に全射と呼ぶ。

***Def.* 2.3.3. 全単射**

写像 f が、単射かつ全射であるとき、f は全単射であると言う。

全単射な写像を、単に全単射と呼ぶ。

***Cor.* 2.3.3.**

恒等写像は全単射である。

***Def.* 2.3.4. 左逆写像**

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たす写像 $g\colon Y \to X$ を左逆写像と呼ぶ。

$$g \circ f = \mathrm{id}_X$$

***Cor.* 2.3.4.**

左逆写像は全射である。

***Thm.* 2.3.5. 単射と左逆写像**

空でない集合 X と、写像 $f\colon X \to Y$ について、f が単射であることは、写像 f が左逆写像 g を持つことと同値である。

Proof.

必要性を示す。

空でないので $\exists x_0 \in X$ より、以下で定める集合 G が存在する。

$$G \coloneqq \{(y,x) \in Y \times X \mid y = f(x)\} \cup \{(y, x_0) \mid y \in Y \setminus \mathrm{Im}(f)\}$$

写像 $g \coloneqq ((Y,X),G)$ は、定義より f の左逆写像となる。

十分性を示す。

単射でない、すなわち $\exists x, y \in X (x \neq y \land f(x) = f(y))$ とする。

定義より、$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$ であるので矛盾。

背理法より示される。 ■

***Def.* 2.3.5.** 右逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たす写像 $g\colon Y \to X$ を右逆写像と呼ぶ。

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

***Cor.* 2.3.6.**

右逆写像は単射である。

***Thm.* 2.3.7.** 全射と右逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ について、f が全射であることは、写像 f が右逆写像 g を持つことと同値である。

Proof.

必要性を示す。定理 2.1.3 の与える写像は、右逆写像である。

十分性を示す。

全射でないとすると、$\exists y \in Y \forall x \in X(f(x) \neq y)$ で仮定に反する。

背理法より示される。 ■

***Def.* 2.3.6.** 逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ について、写像 $g\colon Y \to X$ が f の左逆写像かつ右逆写像であるとき、逆写像と呼ぶ。

***Cor.* 2.3.8.**

逆写像は全単射である。

***Thm.* 2.3.9.** 全単射と逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ について、f が全単射であることは、写像 f が逆写像 g を持つことと同値である。

Proof.

必要性を示す。f は全射より、$\mathrm{Im}(f) = Y$

以下のような集合系 G が存在する。

$$G \coloneqq \{(y, x) \in Y \times X \mid y = f(x)\}$$

写像 $g = ((Y, X), G)$ は定義より f の逆写像となる。

十分性を示す。

X が空のとき、逆写像を持つので Y は空である。ゆえに全単射。

X が空でないとき、定理 2.3.5 と定理 2.3.7 より f は全単射。 ■

***Lem.* 2.3.10.**

写像 $f\colon X \to Y$ について、f の逆写像が存在するならば、一意に定まる。

ここから、f の逆写像を f^{-1} で表す。

Proof.

逆写像 g, h について、$g(y) = h \circ f \circ g(y) = h(y)$ である。ゆえに一意。 ■

***Cor.* 2.3.11.**
全単射 $f\colon X \to Y$ について、
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

***Lem.* 2.3.12.**
全単射 $f\colon X \to Y$ と Y の部分集合 A について、原像 $f^{-1}(A)$ と逆写像の像 $f^{-1}(A)$ は一致する。

Proof.
全単射より、$\forall y \in A \exists x \in A(y = f(x))$。定義より明らか。 ■

***Thm.* 2.3.13. Cantor の対角線論法**
単射 $f\colon \mathfrak{P}(A) \to A$ は存在しない。

Proof.
存在すると仮定する。
以下の集合 Y を考える。
$$Y \coloneqq \{f(X) \mid X \subset A \land f(X) \notin X\}$$
このとき $Y \subset A$ である。
$f(Y) \notin Y$ とすると、定義より $f(Y) \in Y$。ゆえに矛盾。
$f(Y) \in Y$ とすると、f の単射性より $Y \subset A \land f(Y) \notin Y$。ゆえに矛盾。
背理法より示される。 ■

3 関係

3.1 自己関係

***Def.* 3.1.1. 自己関係**
関係 $((X, Y), G)$ について、$X = Y$ であるとき、X 上の自己関係、または単に X 上の関係と呼ぶ。

***Def.* 3.1.2. 反射的**
集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が反射的であるとは、以下を満たすことである。
$$\forall x \in X(\mathfrak{R}(x, x))$$

***Def.* 3.1.3. 対称的**
集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が対称的であるとは、以下を満たすことである。
$$\forall x, y \in X(\mathfrak{R}(x, y) \to \mathfrak{R}(y, x))$$

***Def.* 3.1.4. 反対称的**
集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が反対称的であるとは、以下を満たすことである。
$$\forall x, y \in X(\mathfrak{R}(x, y) \land \mathfrak{R}(y, x) \to x = y)$$

***Def.* 3.1.5.** 推移的

集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が推移的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y, z \in X(\mathfrak{R}(x, y) \land \mathfrak{R}(y, z) \to \mathfrak{R}(x, z))$$

***Cor.* 3.1.1.**

$\varnothing$ 上の関係 $\mathfrak{R}$ は、反射的、対称的、反対称的、推移的である。

3.2 前順序

***Def.* 3.2.1.** 前順序

反射的かつ推移的な自己関係 $\preccurlyeq := ((X, X), G)$ を、前順序と呼ぶ。

前順序であることを明示的に記号 $\preccurlyeq$ で表す。

簡単のため、$\preccurlyeq (x, y)$ を $x \preccurlyeq y$ でも表す。

略記 $\prec, \succcurlyeq, \succ$ を以下のように定める。

$$x \prec y :\leftrightarrow x \preccurlyeq y \land x \neq y$$
$$x \succcurlyeq y :\leftrightarrow y \preccurlyeq x$$
$$x \succ y :\leftrightarrow y \prec x$$

順序対 $(X, \preccurlyeq)$ を、前順序集合、または単に前順序と呼ぶ。

***Rem.* 3.2.1.** 前順序の定義

より簡単に、$x \preccurlyeq y :\leftrightarrow \cdots$ の形式によって前順序を定義する。

***Cor.* 3.2.1.**

前順序集合 X について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \lor x = y)$$
$$\forall x, y \in X(x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \succ y \lor x = y)$$

***Def.* 3.2.2.** 上界

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が上に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(a \preccurlyeq b)$$

このとき、b を A の上界と呼ぶ。

***Def.* 3.2.3.** 下界

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が下に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(b \preccurlyeq a)$$

このとき、b を A の下界と呼ぶ。

***Def.* 3.2.4. 有界**
前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。
A が有界であるとは、A が上に有界かつ下に有界であることである。

***Cor.* 3.2.2.**
空でない前順序集合 X について、$\varnothing$ は有界である。

***Def.* 3.2.5. 有向集合**
前順序集合 Λ について、任意の二元 $\lambda, \mu \in \Lambda$ から成る集合 $\{\lambda, \mu\}$ が上に有界であるとき、前順序集合 Λ を有向集合と呼ぶ。

***Def.* 3.2.6. 上方集合**
有向集合 Λ とその元 $\lambda_0 \in \Lambda$ について、集合 $\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}, \Lambda_{\succ \lambda_0}$ を以下で定める。

$$\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0} \coloneqq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \preccurlyeq \lambda\}$$
$$\Lambda_{\succ \lambda_0} \coloneqq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \prec \lambda\}$$

***Def.* 3.2.7. 前順序との両立**
集合 X と X 上の前順序 $\preccurlyeq_X$、集合 Y と Y 上の前順序 $\preccurlyeq_Y$ について、写像 $f\colon X \to Y$ が $\preccurlyeq_X, \preccurlyeq_Y$ と両立するとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq_X y \to f(x) \preccurlyeq_Y f(y))$$

3.3 同値関係

***Def.* 3.3.1. 同値関係**
対称的な前順序を、同値関係と呼ぶ。同値関係であることを明示的に記号 $\sim$ で表す。

***Cor.* 3.3.1.**
等号は同値関係である。集合 X 上の同値関係であることを明示的に、$=_X$ で表す。

***Def.* 3.3.2. 同値類**
空でない集合 X 上で定義された同値関係 $\sim$ と、X の要素 a について、以下で定める集合を a の同値類と呼び、$[a]$ で表す。この a を特に代表元と呼ぶ。

$$[a] \coloneqq \{x \in X \mid x \sim a\}$$

***Cor.* 3.3.2.**
空でない集合 X 上で定義された同値関係 $\sim$ について、以下が成り立つ。

$$X = \bigsqcup \{[x] \mid x \in X\}$$

***Def.* 3.3.3. 商集合**

同値関係の定義された空でない集合 X について、以下で定める集合を商集合と呼び、$X/\sim$ で表す。

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

***Def.* 3.3.4. 商写像**

写像 $[]\colon X \to X/\sim$ を商写像と呼ぶ。

***Cor.* 3.3.3.**

商写像は全射である。

***Thm.* 3.3.4. well-defined な写像**

空でない集合 X 上の同値関係 $\sim_X$、集合 Y 上の同値関係 $\sim_Y$ について、写像 $f\colon X \to Y$ を考える。

f が $\sim_X, \sim_Y$ と両立することは、写像 $h\colon X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ が存在して以下を満たすことと必要十分である。

$$[]_Y \circ f = h \circ []_X$$

さらに、上で定まる写像 h は一意である。

Proof.

$[]_X$ は全射より、右逆写像 r が存在する。

まず、必要性を示す。仮定より以下を満たす。

$$\forall x \in X/\sim_X \forall z, w \in x([f(z)]_Y = [f(w)]_Y)$$

ゆえに $h := []_Y \circ f \circ r$ を考えると、$[]_Y \circ f = h \circ []_X$ を満たす。

十分性を示す。$\forall x, y \in X$ について、$x \sim_X y$ ならば、$[f(x)]_Y = h([x]_X) = h([y]_X) = [f(y)]_Y$ である。よって、$f(x) \sim_Y f(y)$

一意であることを示す。相異なる 2 つが存在すると仮定すると、$h \circ []_X = h' \circ []_X$ である。右から r をかけて、$h = h'$ であり、矛盾する。 ■

***Def.* 3.3.5. 写像に付随する同値関係**

写像 $f\colon X \to Y$ について、以下で定める X 上の関係 $\sim_f$ は同値関係であり、これを写像 f に付随する同値関係と呼ぶ。

$$x \sim_f y :\leftrightarrow f(x) = f(y)$$

***Cor.* 3.3.5.**

写像 $f\colon X \to Y$ について、f は $\sim_f, =_Y$ と両立する。

***Thm.* 3.3.6. 標準分解**

写像 $f\colon X \to Y$ について、全単射 $\overline{f}\colon X/\sim_f \to \mathrm{Im}(f)$ が存在する。

Proof.

定理 3.3.4 より、写像 $\overline{f}\colon X/\sim_f \to Y$ が存在して、$\mathrm{Im}(\overline{f}) = \mathrm{Im}(f)$ である。

単射であることを示す。$\overline{f}([x]) = \overline{f}([y])$ のとき、$f(x) = f(y)$ より、$[x] = [y]$ である。 ■

4　順序

4.1　半順序

***Def.* 4.1.1.** 半順序

反対称的な前順序を、半順序と呼ぶ。

集合 P 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、順序対 $(P, \preccurlyeq)$ を半順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、半順序集合と集合どちらも表すものとする。

***Cor.* 4.1.1.**

集合 P について、$(P, \subset)$ は半順序集合である。また、$(P, \supset)$ も半順序集合である。

***Def.* 4.1.2.** 単調

半順序 $\preccurlyeq$ と両立する写像を単調である、または広義単調であると呼ぶ。

特に、$\prec$ と両立する写像を、狭義単調であると呼ぶ。

***Def.* 4.1.3.** 極大元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の極大元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(\neg b \prec a)$$

***Def.* 4.1.4.** 最大元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の最大元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(a \preccurlyeq b)$$

***Def.* 4.1.5.** 極小元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の極小元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(\neg b \succ a)$$

***Def.* 4.1.6.** 最小元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の最小元と呼ぶ。

$$b \in P \land \forall a \in P(a \succcurlyeq b)$$

***Cor.* 4.1.2.**

半順序集合 P の最大元は、極大元である。

***Cor.* 4.1.3.** 最大元の一意性

半順序集合 P の最大元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。

ここから、半順序集合 P の最大元 b を $\max P \coloneqq b$ と表す。

Cor. **4.1.4.**

半順序集合 P の最小元は、極小元である。

Cor. **4.1.5. 最小元の一意性**

半順序集合 P の最小元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。

ここから、半順序集合 P の最小元 b を $\min P \coloneqq b$ と表す。

Def. **4.1.7. 上限**

半順序集合 P について、その部分集合 A を考える。

A の上界全体の集合に最小元が存在するとき、これを A の上限と呼び、$\sup A$ で表す。

Def. **4.1.8. 下限**

半順序集合 P について、その部分集合 A を考える。

A の下界全体の集合に最大元が存在するとき、これを A の下限と呼び、$\inf A$ で表す。

4.2 束

Def. **4.2.1. 束**

以下を満たす半順序集合 P を束と呼ぶ。

$$\forall x, y \in P \exists z, w \in P (z = \sup\{x, y\} \land w = \inf\{x, y\})$$

Cor. **4.2.1.**

束は有向集合である。

Lem. **4.2.2. 分配不等式**

束 P について、以下が成り立つ。

$$\sup\{x, \inf\{y, z\}\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$$
$$\inf\{x, \sup\{y, z\}\} \succcurlyeq \sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\}$$

Proof.

x は $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界であるので、$x \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

$\inf\{y, z\}$ は、$\{y, z\}$ の下界であり、推移性より $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界である。ゆえに、$\inf\{y, z\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

よって $\inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ は、$\{x, \inf\{y, z\}\}$ の上界である。

したがって第一式が成り立つ。

第二式も同様に成り立つ。 ■

***Def.* 4.2.2.** 全順序

集合 P 上の以下を満たす半順序 $\preccurlyeq$ を全順序と呼ぶ。全順序であることを明示的に記号 $\leq$ で表す。

$$\forall x, y \in P(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$$

集合 P 上の全順序 $\leq$ について、順序対 $(P, \leq)$ を全順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、全順序集合と集合どちらも表すものとする。

略記 $<, \geq, >$ を以下のように定める。

$$x < y :\leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$
$$x \geq y :\leftrightarrow y \leq x$$
$$x > y :\leftrightarrow y < x$$

***Cor.* 4.2.3.**

全順序集合 P の極大元は最大元であり、極小元は最小元である。

***Cor.* 4.2.4.**

全順序集合は束である。

***Def.* 4.2.3.** 区間

全順序集合 P と $a, b \in P$ について、以下で定める P の部分集合をそれぞれ、開区間 $]a, b[$、閉区間 $[a, b]$ と呼ぶ。

$$]a, b[\coloneqq \{x \in P \mid a < x \wedge x < b\}$$
$$[a, b] \coloneqq \{x \in P \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$$

開区間、閉区間をまとめて区間と呼ぶ。

4.3 Zorn の補題

***Def.* 4.3.1.** 帰納的

空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ を考える。

P の任意の部分集合 A について、順序対 $(A, \preccurlyeq)$ が全順序集合ならば A が上に有界となるとき、P は帰納的であると言う。

***Lem.* 4.3.1.**

帰納的な半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、以下の集合系 $\mathcal{M}$、すなわち P の全順序部分集合の全体を考える。

$$\mathcal{M} \coloneqq \{M \subset P \mid \forall x, y \in M(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)\}$$

このとき、P が極大元を持たないならば、以下を満たす写像 $f\colon \mathcal{M} \to P$ が存在する。

$$\forall M \in \mathcal{M} \forall m \in M(m \prec f(M))$$

Proof.

帰納的であることより、$\forall M \in \mathcal{M}$ に対して上界 u が存在する。

今、u は P の極大元ではないので、$\exists v \in P(u \prec v)$ である。$\forall m \in M(m \preccurlyeq u \prec v)$ である。

定理 2.1.3 より存在する。 ■

***Def.* 4.3.2.** タワー

極大元を持たない半順序集合 P を考える。

補題 4.3.1 で定めた集合系 $\mathcal{M}$ と写像 f を考える。

以下を満たす集合系 $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ を、P のタワーと呼ぶ。

$$\varnothing \in \mathcal{T}$$
$$\forall T \in \mathcal{T}(T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T})$$
$$\forall \mathcal{S} \subset \mathcal{T}\Big((\mathcal{S}, \subset) \text{ は全順序集合} \to \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}\Big)$$

***Lem.* 4.3.2.**

極大元を持たない半順序集合 P について、以下の集合を考える。

$$\mathcal{T}_0 \coloneqq \bigcap \big\{\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(P) \mid \mathcal{T} \text{ は } P \text{ のタワー}\big\}$$

このとき、$\mathcal{T}_0$ は P のタワーである。

Proof.

$\mathcal{M}$ は P のタワーであるので、$\big\{\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(P) \mid \mathcal{T} \text{ は } P \text{ のタワー}\big\} \neq \varnothing$ である。

タワーの定義より、明らか。 ■

***Lem.* 4.3.3.**

極大元を持たない半順序集合 P を考える。

補題 4.3.1 で定めた f について、以下で定める写像 $g \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を考える。

$$g(M) \coloneqq M \cup \{f(M)\}$$

このとき、補題 4.3.2 で定めた $\mathcal{T}_0$ は、以下を満たす。

$$\forall T \in \mathcal{T}_0(\forall T' \in \mathcal{T}_0(T \subset T' \vee T' \subset T) \to \forall T' \in \mathcal{T}_0(T' \subset T \vee g(T) \subset T'))$$

Proof.

前件を満たす T について、以下の集合系を考える。

$$\mathcal{T}_T \coloneqq \{T' \in \mathcal{T}_0 \mid T' \subset T \vee g(T) \subset T'\}$$

定義より、$\mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_0$ である。

今、$\varnothing \subset T$ であるので、$\varnothing \in \mathcal{T}_T$ である。

$T' \in \mathcal{T}_T$ を考える。

$g(T) \subset T'$ であるとき、$g(T) \subset T' \subset g(T')$ より、$g(T') \in \mathcal{T}_T$ である。

$T' \subset T$ であるとき、$g(T') \subset T$ ならば $g(T') \in \mathcal{T}_T$ である。

$g(T') \setminus T \neq \varnothing$ ならば、$g(T') \setminus T = \{f(T')\}$ であるため、$T = T'$ である。ゆえに、$g(T') = g(T) \in \mathcal{T}_T$ である。

$\mathcal{T}_T$ の全順序部分 $\mathcal{S}$ を考える。

$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_0$ より、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_0$ である。

$\forall S \in \mathcal{S}(S \subset T)$ ならば、$\bigcup \mathcal{S} \subset T$ であり、$\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_T$ である。

$\exists S \in \mathcal{S}(g(T) \subset S)$ ならば、$g(T) \subset \bigcup \mathcal{S}$ であり、$\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_T$ である。

ゆえに $\mathcal{T}_T$ は、P のタワーである。
よって、$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_T$ が成り立つので、$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_T$ である。
したがって後件を満たす。 ■

Lem. **4.3.4.**
極大元を持たない半順序集合 P を考える。
補題 4.3.2 で定めた $\mathcal{T}_0$ について、$(\mathcal{T}_0, \subset)$ は全順序集合である。

Proof.
以下の集合系を考える。

$$\mathcal{T}_1 \coloneqq \{T \in \mathcal{T}_0 \mid \forall T' \in \mathcal{T}_0 (T \subset T' \lor T' \subset T)\}$$

定義より、$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$ である。

今、$\varnothing \subset T$ であるので、$\varnothing \in \mathcal{T}_1$ である。

$T \in \mathcal{T}_1$ を考える。
補題 4.3.3 より、$\forall T' \in \mathcal{T}_0 (T' \subset T \subset g(T) \lor g(T) \subset T')$ であるため、$g(T) \in \mathcal{T}_1$ である。

$\mathcal{T}_1$ の全順序部分 $\mathcal{S}$ を考える。
$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$ より、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_0$ である。
$\forall T' \in \mathcal{T}_0$ を考える。
$\forall S \in \mathcal{S}(S \subset T')$ ならば、$\bigcup \mathcal{S} \subset T'$ である。$\exists S \in \mathcal{S}(T' \subset S)$ ならば、$T' \subset \bigcup \mathcal{S}$ である。
ゆえに、$T' \subset \bigcup \mathcal{S} \lor \bigcup \mathcal{S} \subset T'$ である。
したがって、$\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_1$ である。

ゆえに $\mathcal{T}_1$ は、P のタワーである。
よって、$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ が成り立つので、$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$ である。 ■

Thm. **4.3.5. Zorn の補題**
帰納的な半順序集合には極大元が存在する。

Proof.
極大元を持たないと仮定する。
補題 4.3.4 より $(\mathcal{T}_0, \subset)$ は全順序であるため、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_0$ である。
タワーの定義より $g(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \mathcal{T}_0$ であるので、から $f(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \bigcup \mathcal{T}_0$ である。
これは、補題 4.3.2 における f の定義に反する。
背理法より示される。 ■

4.4 フィルターとネット

Def. **4.4.1.** フィルター
半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ と P の空でない部分集合 F について、以下を満たすとき、F を P のフィルターと呼ぶ。

$$\forall x, y \in F \exists z \in F (z \preccurlyeq x \land z \preccurlyeq y)$$
$$\forall x \in F \forall y \in P (x \preccurlyeq y \to y \in F)$$

***Cor.* 4.4.1.**
フィルターは逆順序について有向集合である。

***Def.* 4.4.2. 細分**
半順序集合 P のフィルター F, G に対して、$F \subset G$ であるとき、G は F の細分であると呼ぶ。

***Def.* 4.4.3. 超フィルター**
自身以外の細分を持たないフィルターを超フィルターと呼ぶ。

***Thm.* 4.4.2. 超フィルターの存在**
半順序集合 P のフィルター F について、その細分である超フィルターが存在する。

Proof.
F の細分の全体 $\mathcal{F}$ と半順序集合 $(\mathcal{F}, \subset)$ を考える。
$\mathcal{F}$ の空でない全順序部分集合 A について、上界 $\bigcup A \in \mathcal{F}$ が存在する。
$\mathcal{F}$ の全順序部分集合 $\varnothing$ について、F は上界である。
ゆえに、$\mathcal{F}$ は帰納的である。
定理 4.3.5 より極大元が存在する。これは超フィルターである。 ■

***Def.* 4.4.4. 集合におけるフィルター**
集合 X について、半順序集合 $(\mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, \subset)$ のフィルターを、集合 X のフィルターと呼ぶ。

***Cor.* 4.4.3.**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$X \in \mathcal{F}$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$$

***Thm.* 4.4.4. 集合の超フィルター**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ について、以下の 2 つは同値である。

1. $\mathcal{F}$ は超フィルターである
2. $\forall A \subset X(A \in \mathcal{F} \vee X \setminus A \in \mathcal{F})$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$A \in \mathcal{F}$ のとき明らかであるので、$A \notin \mathcal{F}$ のときを考える。
$\mathcal{S} \coloneqq \{S \subset X \mid A \cup S \in \mathcal{F}\}$ について、定義より $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \wedge X \setminus A \in \mathcal{S}$ である。
今、$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について、$A \cup (S_1 \cap S_2) = (A \cup S_1) \cap (A \cup S_2) \in \mathcal{F}$ より、$S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ である。
$S \in \mathcal{S} \wedge T \subset X \wedge S \subset T$ とすると、$A \cup S \in \mathcal{F} \to A \cup T \in \mathcal{F}$ より $T \in \mathcal{S}$
$A \cup X = X \in \mathcal{F}$ より、$X \in \mathcal{S}$ である。すなわち、$\mathcal{S} \neq \varnothing$
$\varnothing \notin \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S}$ はフィルターでありかつ $\mathcal{F}$ の細分である。
ここで、$\mathcal{F}$ は超フィルターであるので $X \setminus A \in \mathcal{S} = \mathcal{F}$

2. $\to$ 1. を示す。
超フィルターでないとすると、$\mathcal{F}$ の細分 $\mathcal{F}'$ が存在して、$\exists A \in \mathcal{F}'(A \notin \mathcal{F} \wedge A \in \mathcal{F}')$ である。
仮定より、$X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であり、$\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ よりフィルターの定義に矛盾。背理法より示される。

■

***Def.* 4.4.5. ネット**

有向集合 Λ から集合 X への写像を、X 上のネットと呼ぶ。

ネットは、明示的に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と表す。このとき、x_λ は X 上の元で、$\lambda\in\Lambda$ での値を表す。

また誤解のない限り、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で値域を表す。

***Def.* 4.4.6. 部分ネット**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と有向集合 M について、写像 $\varphi\colon M\to\Lambda$ が以下を満たすとき、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネットと呼ぶ。

$$\forall\mu_1,\mu_2\in M(\mu_1\preccurlyeq\mu_2\to\varphi(\mu_1)\preccurlyeq\varphi(\mu_2))$$
$$\forall\lambda\in\Lambda\exists\mu\in M(\lambda\preccurlyeq\varphi(\mu))$$

***Def.* 4.4.7. 普遍**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は普遍であると呼ぶ。

$$\forall A\subset X\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset A\vee(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset X\setminus A\Big)$$

***Thm.* 4.4.5. ネットの定めるフィルター**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、以下で定める集合系 $\mathcal{F}$ は X のフィルターである。

$$\mathcal{F}\coloneqq\Big\{F\subset X\mid\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset F\Big)\Big\}$$

Proof.

明らかに $\varnothing\notin\mathcal{F}\wedge X\in\mathcal{F}$ である。

$F_1,F_2\in\mathcal{F}$ について、定義より $\exists\lambda_1,\lambda_2\subset\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}}\subset F_1\wedge(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_2}}\subset F_2\Big)$ である。

Λ が有向集合であることから、$\exists\lambda_3\in\Lambda(\lambda_1\preccurlyeq\lambda_3\wedge\lambda_2\preccurlyeq\lambda_3)$ であり、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_3}}\subset F_1\cap F_2$。

ゆえに $F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$ である。

$\forall F\in\mathcal{F}\forall G\subset\mathfrak{P}(X)$ について、$F\subset G$ ならば定義より明らかに $G\in\mathcal{F}$ ■

***Lem.* 4.4.6.**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と定理 4.4.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ を考える。

このとき、$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ について、以下が成り立つ。

$$\forall F\in\mathcal{F}'\forall\lambda_0\in\Lambda\exists\lambda\in\Lambda(\lambda_0\preccurlyeq\lambda\wedge x_\lambda\in F)$$

Proof.

$\exists F\in\mathcal{F}'\exists\lambda_0\in\Lambda\forall\lambda\in\Lambda(\lambda_0\preccurlyeq\lambda\to x_\lambda\notin F)$ とする。

今、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$ であるので、$\varnothing=F\cap(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\in\mathcal{F}'$ より、フィルターの定義に矛盾。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 4.4.7.** フィルターの定める部分ネット

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、定理 4.4.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ について考える。

$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ に対して、ある部分ネット $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ が存在して、定理 4.4.5 から定まるその部分ネットのフィルターは $\mathcal{F}'$ の細分となる。

Proof.

$M \coloneqq \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F}' \mid x_\lambda \in F\}$ を考える。

M 上の前順序 $\forall(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M((\lambda_1, F_1) \preccurlyeq (\lambda_2, F_2) :\leftrightarrow \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \land F_1 \supset F_2)$ を考える。

$(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M$ とする。

$\mathcal{F}'$ はフィルターより $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$

Λ は有向集合であるので、$\exists\lambda_3 \in \Lambda(\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \land \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ である。

補題 4.4.6 より $\exists\lambda_4 \in \Lambda(\lambda_3 \preccurlyeq \lambda_4 \land x_{\lambda_4} \in F_1 \cap F_2)$

$(\lambda_4, F_1 \cap F_2)$ は、$\{(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)\}$ の上界であるので、M は有向集合である。

ここで、写像 $\varphi\colon M \to \Lambda, \varphi(\lambda, F) \coloneqq \lambda$ を定める。

補題 4.4.6 より $\forall\lambda \in \Lambda\exists F \in \mathcal{F}'\exists\lambda_1 \in \Lambda(\lambda \preccurlyeq \lambda_1 = \varphi(\lambda_1, F) \land (\lambda_1, F) \in M)$ である。

したがって、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ は部分ネットである。

今、補題 4.4.6 より $\forall F \in \mathcal{F}'\exists\lambda_0 \in \Lambda((\lambda_0, F) \in M)$

$\forall(\lambda', F') \in M$ について、$(\lambda_0, F) \preccurlyeq (\lambda', F')$ ならば、$x_{\lambda'} \in F' \subset F$ となる。

よって、$F \in \left\{F \subset X \mid \exists\mu_0 \in M\left(\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M_{\succcurlyeq\mu_0}} \subset F\right)\right\}$ ■

***Thm.* 4.4.8.** 普遍部分ネットの存在

任意のネットは、普遍な部分ネットを持つ。

Proof.

ネットに対して定理 4.4.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ が存在する。

定理 4.4.2 より $\mathcal{F}$ の細分である超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する。

定理 4.4.7 より、定理 4.4.5 の定めるフィルターが $\mathcal{U}$ に一致する部分ネットが存在する。

定理 4.4.4 より、この部分ネットは普遍である。 ■

5 自然数

5.1 自然数の構成

***Ax.* 5.1.1.** 無限の公理

$$\exists A(\varnothing \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A))$$

***Def.* 5.1.1.** 無限系譜

集合 X が無限系譜であるとは、以下を満たすことである。

$$\varnothing \in X \land \forall x(x \in X \to x \cup \{x\} \in X)$$

公理 5.1.1 より無限系譜は存在する。

***Cor.* 5.1.1.**

$$\forall X \forall Y \big(X \text{ は無限系譜である} \land Y \text{ は無限系譜である} \to X \cap Y \text{ は無限系譜である} \big)$$

***Def.* 5.1.2. 後者関数**

無限系譜 X について、以下のように定める写像 $s\colon X \to X$ を後者関数（successor）と呼ぶ。

$$s(x) \coloneqq x \cup \{x\}$$

***Lem.* 5.1.2.**

以下が成り立つ。

$$\forall A \Big(A \neq \varnothing \land \forall X \in A \big(X \text{ は無限系譜である} \big) \to \bigcap A \text{ は無限系譜である} \Big)$$

Proof.

空でない A を考える。

$\forall X \in A (\varnothing \in X)$ であるので、$\varnothing \in \bigcap A$ である。

$\forall x \in \bigcap A$ について、$\forall X \in A (x \in X)$ であり、無限系譜であることから $s(x) \in X$ である。ゆえに、$s(x) \in \bigcap A$

よって、$\bigcap A$ は無限系譜である。 ■

***Lem.* 5.1.3.**

無限系譜 X について、以下で定める集合は無限系譜である。

$$\bigcap \big\{ Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である} \big\}$$

Proof.

$A \coloneqq \big\{ Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である} \big\}$ とすると、$X \in A$ より、$A \neq \varnothing$ である。

補題 5.1.2 より成り立つ。 ■

***Lem.* 5.1.4.**

補題 5.1.3 で定める集合は、無限系譜 X の取り方によらずに一意に定まる。

Proof.

$\omega(X) \coloneqq \bigcap \big\{ Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である} \big\}$ とする。

X_1, X_2 の 2 つの無限系譜を考える。

X_1 の部分で無限系譜である Y を考える。

補題 5.1.2 より $X_2 \cap Y$ も無限系譜であり、定義より $\omega(X_2) \subset X_2 \cap Y \subset Y$ である。

任意の Y について成り立つので、$\omega(X_2) \subset \omega(X_1)$ である。

同様に $\omega(X_1) \subset \omega(X_2)$ であるため、示される。 ■

***Def.* 5.1.3. 自然数**

補題 5.1.4 より、無限系譜 X の取り方によらず $\omega(X)$ が一意に定まる。これを自然数 $\mathbb{N}$（または ω）と呼ぶ。誤解のない範囲で、自然数 $\mathbb{N}$ の要素も自然数と呼ぶ。

***Def.* 5.1.4. 数字**
数字を定義する。

$$0 \coloneqq \{\}, 1 \coloneqq \{0\}, 2 \coloneqq \{0,1\}, 3 \coloneqq \{0,1,2\}, \cdots$$

***Thm.* 5.1.5. Peano の公理**
以下の全てを満たす。

$$\begin{gathered}
0 \in \mathbb{N} \\
\forall n \in \mathbb{N}(s(n) \in N) \\
\forall n \in \mathbb{N}(s(n) \neq 0) \\
\forall n, m \in \mathbb{N}(s(n) = s(m) \to n = m) \\
\forall E(E \subset \mathbb{N} \land 0 \in E \land \forall n(n \in E \to s(n) \in E) \to E = \mathbb{N})
\end{gathered}$$

Proof.
第一、第二の公理は、無限系譜であることより明らか。

第三の公理は $n \in s(n)$ と、空集合は要素を持たないことから示される。

第四の公理を示す。
$n \in s(n) \to n \in s(m)$ であり、$n \in s(m) \to n = m \lor n \in m$
よって、$(n = m \lor n \in m) \land (m = n \lor m \in n)$
公理 1.1.4 より示される。

第五の公理を示す。
前件より、$E \subset \mathbb{N}$ である。
$0 \in E \land \forall n(n \in E \to s(n) \in E)$ より、E は無限系譜である。
定義より $\mathbb{N} = \omega(E) \subset E$ である。 ■

***Thm.* 5.1.6. 数学的帰納法**
アリティ 1 の述語記号 P について、

$$\forall n(n \in \mathbb{N} \to P(n)) \leftrightarrow P(0) \land \forall n\Big(n \in \mathbb{N} \land \big(P(n) \to P(s(n))\big)\Big)$$

Proof.
右は明らか。

左は、$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ として定理 5.1.5 第五式から示される。 ■

***Def.* 5.1.5. 前者関数**
後者関数 s は、定理 5.1.5 の第四式より単射であるため、左逆写像を持つ。
これを前者関数 $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ と呼ぶ。

***Lem.* 5.1.7.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(n \neq 0 \to s(p(n)) = n)$$

Proof.
$n = 0$ のとき前件否定より成り立つ。
ある n で成り立つとき、p が s の左逆写像より $s(p(s(n))) = s(n)$ が成り立つ。
定理 5.1.6 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Lem.* 5.1.8.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(m \in n \to m \in \mathbb{N})$$

Proof.
$n = 0 = \varnothing$ のとき自明。
ある n で成り立つとき、$s(n) = n \cup \{n\}$ より、$s(n)$ で成り立つ。
定理 5.1.6 より、任意の n について成り立つ。 ■

5.2 自然数の順序

***Def.* 5.2.1.** 自然数の順序
自然数 $\mathbb{N}$ 上で二項関係 $\leq$ を以下のように定める。包含の半順序性より、$\leq$ は半順序である。

$$n \leq m :\leftrightarrow n \subset m$$

***Cor.* 5.2.1.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n)$$

***Cor.* 5.2.2.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(n < s(n))$$

***Lem.* 5.2.3.** 自然数の順序の要素のよる特徴づけ

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \subsetneq m \leftrightarrow n \in m)$$

Proof.
0 は空集合より、$\neg(n \in 0) \land \neg(n \subsetneq 0)$ ゆえに、$n \subsetneq 0 \leftrightarrow n \in 0$
ある m で成り立つとする。

左について、仮定より、

$$
\begin{gathered}
n \in s(m) \\
n \in m \cup \{m\} \\
n \in m \vee n = m \\
n \subsetneq m \vee n = m \\
n \subset m
\end{gathered}
$$

$m \notin m$ より、

$$n \subsetneq m \cup \{m\} = s(m)$$

定理 5.1.6 より、左が成り立つ。

右について、既に示した左を用いて、

$$
\begin{gathered}
m \in n \wedge n \subsetneq s(m) \\
m \subsetneq n \wedge n \subsetneq s(m) \\
\perp \\
n \subsetneq s(m) \to m \notin n
\end{gathered}
$$

ゆえに、

$$
\begin{gathered}
n \subsetneq s(m) = m \cup \{m\} \\
n \subset m \\
n \subsetneq m \vee n = m
\end{gathered}
$$

選言の一つ目について、仮定より、

$$
\begin{gathered}
n \subsetneq m \\
n \in m \\
n \in s(m)
\end{gathered}
$$

選言の二つ目について、

$$n = m \to n \in s(m)$$

定理 5.1.6 より左が成り立つ。 ■

***Lem.* 5.2.4. 後者と順序**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \to s(n) \leq m)$$

Proof.

$n \leq m \wedge n \neq m$ より、$n \subsetneq m$
補題 5.2.3 より、$n \in m$。ゆえに、$s(n) = n \cup \{n\} \subset m$ ■

***Thm.* 5.2.5. 自然数の全順序**

$(\mathbb{N}, \leq)$ は全順序集合、すなわち以下を満たす。

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \leq m \vee m \leq n)$$

Proof.

$n = 0$ について、$\forall m(n \leq m)$ である。

ある $n \in \mathbb{N}$ で成り立つとすると、$m \leq n$ のとき、$m \leq n \leq s(n)$

$n \leq m \wedge \neg(m \leq n)$ すなわち $n \leq m \wedge n \neq m$ のとき、補題 5.2.4 より、$s(n) \leq m$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 5.2.6.** 自然数の順序の後者による保存

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \to s(n) < s(m))$$

Proof.

$n < m \wedge s(m) \leq s(n)$ を仮定する。

$m < s(m)$ であるので、$m < s(n)$、ゆえに、$m \in s(n) = n \cup \{n\}$

したがって、$m \in n \vee m = n$

補題 5.2.3 より、$m \leq n$。矛盾する。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 5.2.7.** 最小値原理

自然数 $\mathbb{N}$ の空でない部分集合 A は最小元を持つ。

Proof.

持たないと仮定する。

このとき、$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}(m \leq n \to m \notin A)$ を示す。

$n = 0$ のとき、$0 \in A$ ならば仮定に反するので明らか。

ある n で成り立つとする。$s(n) \in A$ ならば $s(n)$ は A の最小元となるので、$s(n) \notin A$。

定理 5.1.6 を用いて上の命題が示されるので、$\forall n \in \mathbb{N}(n \notin A)$ が直ちに言える。

これは A が空でないことに反する。背理法より、示される。 ■

***Thm.* 5.2.8.** 無限降下法

アリティ 1 の述語記号 P について、

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}(m < n \wedge P(n) \to P(m)) \to \forall n \in \mathbb{N}(\neg P(n))$$

Proof.

$\exists n \in \mathbb{N}(P(n))$ とすると、$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ は空でない。定理 5.2.7 より、最小値 n_0 を持つ。

これは仮定に反するので、背理法より示される。 ■

5.3 自然数の加法

***Lem.* 5.3.1.**

以下で定める部分写像 $+$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について左全域的である。

$$\forall n \in \mathbb{N}(+((n, 0)) \coloneqq n)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(+((n, s(m))) \coloneqq s(n + m))$$

Proof.
$\forall(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して、$+((n,m))$ が存在することを示す。
$m=0$ のとき定義より成り立つ。
ある m で成り立つとすると、定義より $(n,s(m))$ でも成り立つ。
定理 5.1.6 より、任意の m について示される。 ■

***Def.* 5.3.1. 自然数の加法**
補題 5.3.1 より定まる写像を加法と呼び、$+$ で表す。
書き直して再掲する。

$$\forall n \in \mathbb{N}(n+0 \coloneqq n)$$
$$\forall n,m \in \mathbb{N}(n+s(m) \coloneqq s(n+m))$$

***Cor.* 5.3.2. 1 の和**

$$\forall n \in \mathbb{N}(s(n) = n+1)$$

***Lem.* 5.3.3. 自然数の加法の結合法則**

$$\forall n,m,l \in \mathbb{N}((n+m)+l = n+(m+l))$$

つまり上の等式の両辺は、$n+m+l$ と表記してもよい。
Proof.
$l=0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n+m)+0 = (n+m) = n+m = n+(m+0)$$

ある l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n+m)+s(l) &= s((n+m)+l)\\ &= s(n+(m+l))\\ &= n+s((m+l))\\ &= n+(m+s(l))\end{aligned}$$

定理 5.1.6 より、任意の l について示される。 ■

***Lem.* 5.3.4. 自然数の加法の単位元**

$$\forall n \in \mathbb{N}(n+0 = 0+n = n)$$

Proof.
定義より、

$$n+0 = n$$

$\forall n \in \mathbb{N}(0+n = n)$ を示す。
$n=0$ のとき、$0+0=0$ より満たす。

ある n で成り立つとき、

$$0 + s(n) = s(0 + n) = s(n)$$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 5.3.5.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(s(n) + m = s(n + m))$$

Proof.
$m = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$s(n) + 0 = s(n) = s(n + 0)$$

ある m について成り立つとき、

$$s(n) + s(m) = s(s(n) + m) = s(s(n + m)) = s(n + s(m))$$

定理 5.1.6 より、任意の m について示される。 ■

***Lem.* 5.3.6.** 自然数の加法の交換法則

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n + m = m + n)$$

Proof.
$m = 0$ のとき、補題 5.3.4 より示される。
ある m で成り立つとき、補題 5.3.5 より、

$$n + s(m) = s(n + m) = s(m + n) = s(m) + n$$

定理 5.1.6 より、任意の m について示される。 ■

***Lem.* 5.3.7.** 自然数の順序の加法による保存

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n < m \to n + l < m + l)$$

Proof.
$l = 0$ のとき、明らか。
ある l で成り立つとき、補題 5.2.6 より、

$$n + s(l) = s(n + l) < s(m + l) = m + s(l)$$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 5.3.8.** 自然数の順序の加法による特徴づけ

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(m \leq n \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(m + k = n))$$

右について、この k は一意に定まる。

Proof.

左は、全順序性、補題 5.3.7、$\forall k \in \mathbb{N}(0 \leq k)$ を用いて、背理法より示される。

右について考える。

$n = 0$ のとき、$m = 0$ ならば $k = 0$ が存在。$m \neq 0$ ならば前件否定。

ある n で成り立つときを考える。$n < m \vee m \leq n$ である。

$n < m$ のとき、補題 5.2.4 より $s(n) \leq m$ である。$s(n) < m$ のとき前件否定より自明。$s(n) = m$ のとき、$k = 0$ で存在。

$m \leq n$ のとき、仮定より $\exists k \in \mathbb{N}(m + k = n)$

ゆえに、$m \leq s(n)$ かつ $s(n) = s(m + k) = m + s(k)$ となる。

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。

$k < k'$ とすると、補題 5.3.7 より矛盾。$k > k'$ でも同様より、示される。 ■

***Def.* 5.3.2.** 自然数の減法

自然数 n, m について、$m \leq n$ であるとき、補題 5.3.8 より一意に定まる k を $n - m$ と表す。

5.4 自然数の乗法

***Lem.* 5.4.1.**

以下で定める部分写像 $\times$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について左全域的である。

$$\forall n \in \mathbb{N}(\times((n, 0)) \coloneqq 0)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(\times((n, s(m))) \coloneqq n + \times((n, m)))$$

Proof.

$\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対して、$\times((n, m))$ が存在することを示す。

$m = 0$ のとき定義より成り立つ。

ある m で成り立つとすると、定義と加法の定義より $(n, s(m))$ でも成り立つ。

定理 5.1.6 より、任意の m について示される。 ■

***Def.* 5.4.1.** 自然数の乗法

補題 5.4.1 より定まる二項演算を乗法と呼び、$\times$ で表す。

書き直して再掲する。

$$\forall n \in \mathbb{N}(n \times 0 \coloneqq 0)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times s(m) \coloneqq n + n \times m)$$

乗法 $\times$ は、加法 $+$ よりも先に演算される。

また、$m \times n$ を誤解のない範囲で mn と略記する。

***Lem.* 5.4.2.** 左零元

$$\forall n \in \mathbb{N}(0 \times n = 0)$$

Proof.

$n = 0$ のとき、$0 \times 0 = 0$

ある n で成り立つとき、

$$0 \times s(n) = 0 + 0 \times n = 0 + 0 = 0$$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 5.4.3.** 自然数の乗法の単位元

$$\forall n \in \mathbb{N}(n = n \times 1 = 1 \times n)$$

Proof.

左について $1 = s(0)$ より、

$$n \times 1 = n \times s(0) = n + n \times 0 = n + 0 = n$$

右について考える。

$n = 0$ のとき、$1 \times 0 = 0$

ある n で成り立つとき、

$$1 \times s(n) = 1 + 1 \times n = 1 + n = s(n)$$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 5.4.4.** 自然数の右分配法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n + m) \times l = n \times l + m \times l)$$

Proof.

$l = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n + m) \times 0 = 0 = 0 + 0 = n \times 0 + m \times 0$$

ある l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n + m) \times s(l) &= n + m + (n + m) \times l \\ &= n + m + n \times l + m \times l \\ &= n \times s(l) + m \times s(l)\end{aligned}$$

定理 5.1.6 より、任意の l について示される。 ■

***Lem.* 5.4.5.** 自然数の乗法の交換法則

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times m = m \times n)$$

Proof.

補題 5.4.2 より、$m = 0$ について、$n \times 0 = 0 \times n$

ある m で成り立つとき、

$$\begin{aligned}n \times s(m) &= n + n \times m \\ &= n + m \times n \\ &= m \times n + n \\ &= m \times n + 1 \times n \\ &= (m + 1) \times n \\ &= s(m) \times n\end{aligned}$$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

Lem. 5.4.6. **自然数の乗法の結合法則**

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n \times m) \times l = n \times (m \times l))$$

つまり上の等式の両辺は、$n \times m \times l$ と表記してもよい。

Proof.

$l = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n \times m) \times 0 = 0 = n \times 0 = n \times (m \times 0)$$

ある l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n \times m) \times s(l) &= n \times m + (n \times m) \times l \\ &= n \times m + n \times (m \times l) \\ &= m \times n + (m \times l) \times n \\ &= (m + m \times l) \times n \\ &= n \times (m + m \times l) \\ &= n \times (1 \times m + l \times m) \\ &= n \times (s(l) \times m) \\ &= n \times (m \times s(l))\end{aligned}$$

定理 5.1.6 より、任意の l について示される。 ■

Lem. 5.4.7. **自然数の分配法則**

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n + m) \times l = n \times l + m \times l)$$
$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n \times (m + l) = n \times m + n \times l)$$

Proof.

右分配法則と交換法則より示される。 ■

Lem. 5.4.8. **自然数の順序の乗法による保存**

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n \neq 0 \land m < l) \to n \times m < n \times l)$$

Proof.

$n = 0$ のとき、前件否定より明らか。

$n = 1$ のとき、1 が乗法の単位元であることから明らか。

ある $n \geq 1$ で成り立つとき、

$$s(n) \times m = n \times m + m < n \times m + l < n \times l + l = s(n) \times l$$

定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 5.4.9.** 自然数の乗法の簡約則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n \times m = n \times l \land n \neq 0 \to m = l)$$

Proof.
$m < l$ のとき、補題 5.4.8 より $n \times m < n \times l$。ゆえに、$n \times m \neq n \times l$。
$l < m$ のとき、同様に $n \times m \neq n \times l$。
背理法より示される。 ■

***Lem.* 5.4.10.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times m = 0 \to n = 0 \lor m = 0)$$

Proof.
$n = 0$ のとき自明。
$n \neq 0$ のとき、$n \times m = n \times 0$ より、自然数の乗法の簡約則から $m = 0$。 ■

5.5 自然数の除法

***Lem.* 5.5.1.**

$$\forall a, b \in \mathbb{N}(b \neq 0 \to \exists q, r \in \mathbb{N}(a = bq + r \land r < b))$$

Proof.
$a = 0$ のとき、$q = r = 0$ で成り立つ。
ある a で成り立つとき、すなわち n_a, r_a が存在するときを考える。
$r_a < b$ より、$s(r_a) \leq b$ である。
$s(r_a) < b$ のとき、$q_{s(a)} = n_a, r_{s(a)} = s(r_a)$ は仮定より満たす。
$s(r_a) = b$ のとき、$q_{s(a)} = s(n_a), r_{s(a)} = 0$ は仮定より満たす。
定理 5.1.6 より、任意の a について成り立つ。 ■

***Lem.* 5.5.2.**

$$\forall a, b \in \mathbb{N}(b \neq 0 \to \forall q, r, q', r' \in \mathbb{N}(a = qb + r \land r < b \land a = q'b + r' \land r' < b \to q = q' \land r = r'))$$

Proof.
$q < q'$ とすると補題 5.3.8 より、$\exists q_d \in \mathbb{N}(q + q_d = q' \land q_d \geq 1)$
このとき $a = bq + r = bq' + r'$ より、自然数の加法の簡約則から $r = bq_d + r'$
これは $r < b \leq bq_d \leq bq_d + r$ より矛盾。よって $q \geq q'$
同様に $q \leq q'$。したがって、$q = q'$
自然数の加法の簡約則から、$r = r'$
よって示される。 ■

***Def.* 5.5.1.** 自然数の除法
補題 5.5.1、補題 5.5.2 より、以下の写像 $\div \colon \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を定義できる。

$$a \div b = q \cdots r :\leftrightarrow a = bq + r$$

$\div((a,b))$ を $a \div b$ と、値域の元 (q,r) を $q \cdots r$ と表記するものとする。
特に、q を商、r を余りと呼ぶ。

***Def.* 5.5.2.** 倍数
自然数 n, m について、$n \div m$ の余りが 0 のとき、n は m の倍数、または m は n の約数と言う。

***Cor.* 5.5.3.**
任意の自然数 n について、0 は n の倍数であり、1 は n の約数である。また、n は n の倍数でも約数でもある。

***Def.* 5.5.3.** 偶奇
自然数 n について、2 で割った余りが 0 であるとき、n を偶数と呼ぶ。
そうでないとき、n を奇数と呼ぶ。

***Def.* 5.5.4.** 素数
約数をちょうど 2 つ持つ自然数を素数と呼ぶ。

***Cor.* 5.5.4.**
素数 p の約数は、1 と p である。

6　有限と可算

6.1　有限

***Def.* 6.1.1.** 有限集合
集合 X について、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して全単射 $f \colon n \to X$ が構成できるとき、X を有限集合と呼ぶ。または、単に X は有限であると呼ぶ。

***Lem.* 6.1.1.** 全射と要素数
$\forall n, m \in \mathbb{N}$ について、n から m への全射が存在するならば、$m \leq n$

Proof.
$n = 0$ のとき、$m \neq 0$ ならば全射が存在しない。$m = 0$ より示される。

ある n で成り立つとき、全射 $f \colon s(n) \to m$ が存在することを考える。
$0^{s(n)} = \varnothing$ より、$m \neq 0$ である。
$\exists k \in n(f(k) = f(n))$ のとき、自明な全射 $f|_n$ を構成できて、仮定より $m \leq n \leq s(n)$
$\forall k \in n(f(k) \neq f(n))$ のとき、以下のような全射 $g \colon n \to p(m)$ を構成できる。

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) < f(n)) \\ p(f(x)) & (f(x) > f(n)) \end{cases}$$

仮定より $p(m) \leq n$ より、$m = s(p(m)) \leq s(n)$

定理 5.1.6 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Lem.* 6.1.2.** 単射と要素数

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ について、n から m への単射が存在するならば、$n \leq m$

Proof.

$n = 0$ のとき、明らか。

$n \neq 0$ のとき、定理 2.3.5 より m から n への左逆写像すなわち全射を構成できて、補題 6.1.1 より $n \leq m$ ■

***Thm.* 6.1.3.** 鳩の巣原理

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ について、$m < n$ ならば n から m への単射が存在しない。

Proof.

補題 6.1.2 の対偶である。 ■

***Lem.* 6.1.4.**

有限集合 X について、全単射 $f\colon n \to X$ が構成できる自然数 $n \in \mathbb{N}$ は一意に定まる。

Proof.

補題 6.1.1、補題 6.1.2 より、背理法より示される。 ■

***Def.* 6.1.2.** 要素数

有限集合 X について、補題 6.1.4 より主張される自然数を要素数 $|X|$ と呼ぶ。

また、集合 X が有限集合であることを主張するときは、アリティ 1 の述語記号 $|X| < \infty$ を用いる。

***Lem.* 6.1.5.** 単射と有限

自然数 n と集合 A について、以下の 2 つは同値である。

1. A は有限集合であり、$|A| \leq n$
2. 単射 $f\colon A \to n$ が存在する。

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

全単射 $f_1\colon A \to |A|$ が存在して、単射 $f_2\colon |A| \to n$ が存在する。

ゆえに、単射 $f_2 \circ f_1\colon A \to n$ が存在する。

2. $\to$ 1. を示す。

$n = 0$ のとき、$n^A \neq \varnothing$ より、$A = \varnothing$ である。

ある n について成り立つとする。

$\forall a \in A(f(a) \neq n)$ のとき、自明な単射 $\widetilde{f}\colon A \to n$ が存在する。よって $|A| \leq n \leq s(n)$

$\exists a \in A(f(a) = n)$ のとき、単射 $\widetilde{f}\colon A \setminus \{a\} \to n$ が構成できる。

仮定より $\exists m \in \mathbb{N}(m \leq n)$ であり、全単射 $g\colon A \setminus \{a\} \to m$ が存在する。

ここで、以下のような全単射 $h\colon A \to s(m)$ を構成できる。

$$h(x) = \begin{cases} m & (x = a) \\ g(f(x)) & (x \neq a) \end{cases}$$

$|A| = s(m) \leq s(n)$ を得るので成り立つ。 ■

***Lem.* 6.1.6.** 有限集合の部分

有限集合 X について、X の部分 Y は有限であり、$|Y| \leq |X|$ である。

Proof.

単射 $f\colon Y \to X, f(y) = y$ と、$n \in \mathbb{N}$ で全単射 $g\colon X \to n$ が存在する。
ゆえに、単射 $g \circ f\colon Y \to n$ が存在して、補題 6.1.5 より成り立つ。 ■

***Lem.* 6.1.7. 有限集合の像**
有限集合 X、集合 Y、写像 $f\colon X \to Y$ について、像 $f(X)$ は有限であり、$|f(X)| \leq |X|$ である。

Proof.
定理 2.3.7 より、$f\colon X \to f(X)$ は右逆写像すなわち単射 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ を持つ。
$n \in \mathbb{N}$ と全単射 $g\colon X \to n$ が存在するので、単射 $g \circ f^{-1}\colon f(X) \to n$ が存在して、補題 6.1.5 より成り立つ。 ■

***Lem.* 6.1.8. 有限集合の商**
有限集合 X と、X 上の同値関係 $\sim$ について、商集合 $X/\sim$ は有限であり、$|X/\sim| \leq |X|$ である。

Proof.
商写像 $[]$ について、$X/\sim = [X]$ である。補題 6.1.7 より成り立つ。 ■

***Lem.* 6.1.9. 有限集合の和**
有限集合 X, Y について、$X \cap Y = \varnothing$ ならば、$X \cup Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|$$

Proof.
X, Y は有限より、全単射 $f\colon |X| \to X, f'\colon |Y| \to Y$ が存在する。
ゆえに、以下のような全単射 $g\colon |X| + |Y| \to X \cup Y$ を構成できる。

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & (x < |X|) \\ g'(x - |X|) & (|X| \leq x < |X| + |Y|) \end{cases}$$

■

***Lem.* 6.1.10. 有限集合の和と共通部分**
有限集合 X, Y について、$X \cup Y, X \cap Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$$

Proof.
単射 $f\colon X \cap Y \to X$ が構成できるので、補題 6.1.5 より $X \cap Y$ は有限集合である。
補題 6.1.9 より、$|X| = |X \cap Y| + |X \setminus Y|$
補題 6.1.9 より、$|X \cup Y| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y|$
したがって、$|X \cup Y| + |X \cap Y| + |X \setminus Y| = |X \setminus Y| + |Y| + |X|$
定義 5.3.2 より成り立つ。 ■

***Lem.* 6.1.11. 有限集合の直積**
有限集合 X, Y について、$X \times Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

Proof.

全単射 $x\colon |X| \to X$ が存在する。

$\forall n \in |X|$ について、$Z_n \coloneqq \{(x(n), y) \mid y \in Y\}$ を考えると、$|Z_n| = |Y|$ である。

$X \times Y = \bigsqcup \{Z_n \mid n \in |X|\}$ が成り立つ。

補題 6.1.9 より、$|X|$ についての帰納法を用いて、$|X \times Y| = |X| \times |Y|$ ■

***Thm.* 6.1.12. 有限有向集合の上界**

空でない有向集合の有限部分集合 A は、上界を持つ。

Proof.

$|A| = 1$ のとき、A は唯一つの元を持ち、上界である。

$|A| = 2$ のとき、$a_0 \neq a_1$ を用いて $A = \{a_0, a_1\}$ と書ける。有向集合であることより上界が存在する。

$|A| = n$ のとき成り立つとする。

$|A| = s(n)$ について、A のある元 a を考える。集合 $A \setminus \{a\}$ は要素数が n であるため、仮定より上界 a_n を持つ。

ゆえに、今、集合 $\{a, a_n\}$ は上界 $a_{s(n)}$ を持ち、推移律から A の上界となる。

要素数 $|A|$ について、定理 5.1.6 より示される。 ■

***Thm.* 6.1.13. 有限全順序集合の最大元**

空でない全順序集合の有限部分集合 A は、最大元と最小元を持つ。

Proof.

$|A| = 1$ のとき、A は唯一つの元を持ち、最大元かつ最小元である。

$|A| = 2$ のとき、$a_0 \neq a_1$ を用いて $A = \{a_0, a_1\}$ と書ける。全順序性より $a_0 > a_1 \lor a_0 < a_1$ である。

$a_0 > a_1$ のとき、最大元 a_0、最小元 a_1 である。$a_0 < a_1$ のとき、最大元 a_1、最小元 a_0 である。

$|A| = n$ のとき成り立つとする。

$|A| = s(n)$ について、A のある元 a を考える。集合 $A \setminus \{a\}$ は要素数が n であるため、仮定より最大元 $a_{\max}$ と最小元 $a_{\min}$ を持つ。

ゆえに、A は最大元 $\max\{a, a_{\max}\}$ を持ち、A は最小元 $\min\{a, a_{\min}\}$ を持つ。

要素数 $|A|$ について、定理 5.1.6 より示される。 ■

***Thm.* 6.1.14. 自然数の上界と有限**

$\mathbb{N}$ の部分集合 A について、A が上に有界ならば A は有限である。

Proof.

上界 n について考える。

$n = 0$ のとき、$A \neq \varnothing$ ならば全射が存在しないので、示される。

ある n で成り立つとき、A が有限であることを考える。

$s(n)$ が上界で、n が上界でないとき、$s(n) \in A$ である。

仮定より、$\exists m \in \mathbb{N}$ で、全単射 $f_0\colon m \to A \setminus \{s(n)\}$ が存在する。

したがって、以下のような全単射 $f\colon s(m) \to A$ を構成できる。

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & (x \neq m) \\ s(n) & (x = m) \end{cases}$$

定理 5.1.6 より、任意の n について成り立つ。 ■

6.2 可算

***Def.* 6.2.1. 可算**
集合 X について、X が空集合または全射 $f\colon \mathbb{N} \to X$ が存在するとき、X を可算集合と呼ぶ。または、単に X は可算であると呼ぶ。
また、集合 X が可算集合であることを主張するときは、アリティ 1 の述語記号 $|X| \leq \aleph_0$ を用いる。

***Cor.* 6.2.1.**
可算集合の部分集合は可算集合である。

***Def.* 6.2.2. 有限列**
自然数 $n \in \mathbb{N}$ から集合 X へのネットを、X 上の有限列、または組、n-組と呼ぶ。

***Def.* 6.2.3. 点列**
自然数 $\mathbb{N}$ から集合 X へのネットを、X 上の点列と呼ぶ。

***Def.* 6.2.4. 点列の部分列**
単射な写像 $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を用いて表せる部分ネット $\left(x_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ を点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列と呼ぶ。

***Def.* 6.2.5. 非交叉列**
点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について以下が成り立つとき、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を非交叉列と呼ぶ。

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \neq m \to x_n \cap x_m = \varnothing)$$

***Def.* 6.2.6. 単調列**
半順序集合 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、以下のいずれかを満たす点列を単調列と呼ぶ。

$$\begin{gathered}
\forall n \in \mathbb{N}\big(x_n < x_{s(n)}\big) \\
\forall n \in \mathbb{N}\big(x_n \leq x_{s(n)}\big) \\
\forall n \in \mathbb{N}\big(x_n > x_{s(n)}\big) \\
\forall n \in \mathbb{N}\big(x_n \geq x_{s(n)}\big)
\end{gathered}$$

特にそれぞれ、第一式を満たす点列を狭義単調増加列、第二式を広義単調増加列、第三式を狭義単調減少列、第四式を広義単調減少列と呼ぶ。

***Thm.* 6.2.2. 無限集合は可算部分を含む**
有限でない集合 X について、単射 $a\colon \mathbb{N} \to X$ が存在する。

Proof.
$\forall A \subset X \setminus \{\varnothing\} \exists a \in A(a \in A)$ である。
定理 2.1.3 より定まる写像 $f\colon \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X, f(X) \in A$ を考える。
X は空でないので、$\exists a_0 \in X$ である。
$\forall n \in \mathbb{N}$ について、点列 $a_{s(n)} := f(X \setminus \{a_m \mid m \in s(n)\})$ を考えることができる。
なぜなら、$\exists n \in \mathbb{N}(X \setminus \{a_m \mid m \in s(n)\} = \varnothing)$ とすると、X は有限となり仮定に反する。
定義より $\forall n, m \in \mathbb{N}(a_n \neq a_m)$
単射 $a\colon \mathbb{N} \to X$ を持つ。 ■

***Thm.* 6.2.3.** 自然数の直積は可算

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算である。

Proof.

全単射 $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \varphi(n, m) = ((n+m) \times (n+m+1)) \div 2 + n$ が存在する。

ただし、$a \div b$ を除算の商を表すものとする。 ■

6.3 濃度の比較

***Lem.* 6.3.1.**

集合 X について、自然な全単射 $\sigma\colon \mathfrak{P}(X) \to 2^X$ が存在する。

Proof.

$x \in X$ について、以下のように σ を定める。

$$\sigma(A)(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

以下で定める σ^{-1} は逆写像である。

$$\sigma^{-1}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

定理 2.3.9 より全単射である。 ■

***Lem.* 6.3.2.** 自然数から集合への写像の全体

集合 X と $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、全単射 $\sigma\colon X^n \times X \to X^{s(n)}$ が存在する。

また、全単射 $\sigma'\colon X \to X^1$ が存在する。

Proof.

以下で定める σ は全単射である。

$$\sigma((x_m)_{m \in n}, x)(l) = \begin{cases} x_l & (l \in n) \\ x & (l = n) \end{cases}$$

以下で定める σ' は全単射である。

$$\sigma(x)(0) = x$$

■

***Thm.* 6.3.3.**

集合 X, Y, Z について、自然な全単射 $\sigma\colon (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ が存在する。

Proof.

$\sigma((x, y), z) = (x, (y, z))$ は全単射である。 ■

***Thm.* 6.3.4. Bernstein の定理**

集合 A, B について、A から B への単射 f が存在して、B から A の単射 g が存在するならば、A から B への全単射が存在する。

Proof.

以下のような点列 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。

$$\begin{cases} C_0 \coloneqq A \setminus g(B) \\ C_{s(n)} \coloneqq g(f(C_n)) \end{cases}$$

点列の値域全体の和集合 $C \coloneqq \bigcup \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考える。

今、定理 1.3.16 より $A \setminus C \subset g(B)$ と、g の単射性から、以下のような写像 $h\colon A \to B$ が構成できる。

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & (x \in C) \\ g^{-1}(x) & (x \in A \setminus C) \end{cases}$$

単射でないと仮定すると、$x \in C_n \land y \in A \setminus C$ について、

$$h(x) = h(y) \to g(f(x)) = y \in C_{s(n)}$$

矛盾するので、背理法より単射。

$D \coloneqq \bigcup \{C_{s(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ について、$D \subset g(B)$ であり、定理 2.2.1 より、

$$g^{-1}(D) = \bigcup \{g^{-1}(C_{s(n)}) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{f(C_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = f(C)$$

今、$g(B) \subset A$ より、

$$A \setminus C = A \setminus (C_0 \cup D) = (A \setminus C_0) \setminus D = (A \setminus (A \setminus g(B))) \setminus D = g(B) \setminus D$$

したがって g の単射性と定理 2.2.3 より

$$h(A \setminus C) = g^{-1}(A \setminus C) = g^{-1}(g(B) \setminus D) = B \setminus g^{-1}(D) = B \setminus f(C)$$

ゆえに全射。 ■

***Thm.* 6.3.5. 濃度の比較可能定理**

集合 A, B について、単射 $f\colon A \to B$ または単射 $f'\colon B \to A$ が存在する。

Proof.

以下で定義する半順序集合 $(\mathcal{M}, \subset)$ を考える。

$$\mathcal{M} \coloneqq \{G \subset A \times B \mid \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(x_1 = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2)\}$$

$\mathcal{M}$ の全順序部分 C を考える。

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bigcup C \exists G_1, G_2 \in C((x_1, y_1) \in G_1 \land (x_2, y_2) \in G_2)$ である。

ここで $G_1 \subset G_2 \lor G_2 \subset G_1$ より、$x_1 = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2$ である。

ゆえに、$\bigcup C \in \mathcal{M}$ は上界である。

したがって、$\mathcal{M}$ は帰納的である。

定理 4.3.5 より、極大元 G_0 が存在する。

二項関係 $\mathfrak{R}_0 \coloneqq ((X, Y), G_0)$ を考える。

$\exists (x, y) \in (A \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{R}_0)) \times (B \setminus \mathrm{ran}(\mathfrak{R}_0))$ とする。

このとき、$G_1 = \{(x, y)\} \cup G_0 \in \mathcal{M}$ となるので、G_0 の極大性に反する。

ゆえに、$A = \mathrm{dom}(\mathfrak{R}_0) \lor B = \mathrm{ran}(\mathfrak{R}_0)$ である。

$A = \mathrm{dom}(\mathfrak{R}_0)$ のとき、$\mathfrak{R}_0$ は写像であり、$\mathcal{M}$ の定義より単射である。

$B = \mathrm{ran}(\mathfrak{R}_0)$ のとき、$((B, A), \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in G_0\})$ は写像であり、$\mathcal{M}$ の定義より単射である。 ■

7　位相空間

7.1　位相

***Def.* 7.1.1.** 開基
　空でない集合 X について、以下を満たす集合系 $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ を開基と呼ぶ。

$$\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}(x \in B)$$
$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B_1 \cap B_2)$$

***Def.* 7.1.2.** 開集合系
　空でない集合 X の開基 $\mathcal{B}$ について、以下で与える集合系 $\mathcal{O}$ を開集合系と呼ぶ。

$$\mathcal{O} \coloneqq \{O \subset X \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset O)\}$$

　また、$\mathcal{O}$ の要素を開集合と呼ぶ。

***Cor.* 7.1.1.**
　空でない集合 X の開基 $\mathcal{B}$ と、$\mathcal{B}$ の与える開集合系 $\mathcal{O}$ は、以下を満たす。

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$$

***Lem.* 7.1.2.** 開集合系の一意性
　集合 X の開基 $\mathcal{B}$ と集合系 $\mathcal{B}' \subset \mathfrak{P}(X)$ について、以下を満たすとき、$\mathcal{B}'$ は開基である。

$$\forall B' \in \mathcal{B}' \forall x \in B' \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B')$$
$$\forall B \in \mathcal{B} \forall x \in B \exists B' \in \mathcal{B}'(x \in B' \land B' \subset B)$$

　さらに $\mathcal{B}$ の定める開集合系と、$\mathcal{B}'$ の定める開集合系、この 2 つは一致する。

Proof.
　第一式を考える。定義 7.1.1 第一式から $\exists B \in \mathcal{B}$ であり、$\exists x \in X$ より、仮定から $\exists B' \in \mathcal{B}'$

　第二式を考える。仮定より $\forall B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}' \forall x \in B'_1 \cap B'_2 \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x \in B_1 \cap B_2 \subset B'_1 \cap B'_2)$ である。
　定義 7.1.1 第二式から $\exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B_1 \cap B_2)$ である。再び仮定より、$\exists B' \in \mathcal{B}(x \in B' \subset B \subset B'_1 \cap B'_2)$

　$\forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B} \exists B' \in \mathcal{B}'(x \in B' \subset B \subset O)$ である。ゆえに、$O \in \mathcal{O}'$ である。
　同様に $\forall O' \in \mathcal{O}'(O \in \mathcal{O}')$ である。 ■

***Thm.* 7.1.3.** 開集合系の公理
　空でない集合 X の開集合系 $\mathcal{O}$ について、以下が成り立つ。

$$X \in \mathcal{O}$$
$$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O})$$
$$\forall A \subset \mathcal{O}\left(\bigcup A \in \mathcal{O}\right)$$

Proof.

第一式を示す。

定義 7.1.1 第一式より、$\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset X)$ であるので、$X \in \mathcal{O}$

第二式を示す。$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ について、$\forall x \in O_1 \cap O_2 \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x \in B_1 \cap B_2 \land B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2)$

定義 7.1.1 第二式より、$\exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B_1 \cap B_2)$ であるので、$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

第三式を示す。$A \subset \mathcal{O}$ について、$\forall x \in \bigcup A \exists O \in \mathcal{O} \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset O \land O \subset \bigcup A)$ であるので $\bigcup A \in \mathcal{O}$ ■

***Lem.* 7.1.4.** 開集合系の公理を満たす集合系

空でない集合 X と、定理 7.1.3 を満たす集合系 $\mathcal{O}$ を考える。

このとき $\mathcal{O}$ は開基であり、さらに、$\mathcal{O}$ の定める開集合系 $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ に一致する。

Proof.

定理 7.1.3 第一式、第二式より、開基である。

定義 7.1.2 より $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ を得る。

定義 7.1.2 より $\forall O' \in \mathcal{O}' \forall x \in O' \exists O_x \in \mathcal{O}(x \in O_x \land O_x \subset O')$ である。

$O' = \bigcup \{O_x \mid x \in O'\} \in \mathcal{O}$ である。 ■

***Def.* 7.1.3.** 位相空間

空でない集合 X と、X 上の開集合系 $\mathcal{O}$ について、順序対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間と呼ぶ。または単に X と書き、位相空間と集合どちらも表すものとする。

$\mathcal{O}$ をとくに位相と呼ぶ。また、位相空間の元を点と呼ぶ。

***Def.* 7.1.4.** 連続

位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$ について、写像 $f\colon X \to X'$ が以下を満たすとき、f は連続であると呼ぶ。

$$\forall O' \in \mathcal{O}' \bigl(f^{-1}(O') \in \mathcal{O}\bigr)$$

***Lem.* 7.1.5.** 開基と連続

位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$ と X' の開基 $\mathcal{B}'$、および写像 $f\colon X \to X'$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. f は連続。
2. $\forall B' \in \mathcal{B}' \bigl(f^{-1}(B') \in \mathcal{O}\bigr)$

Proof.

1. → 2. は、$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ より明らか。

2. → 1. を示す。$O' \in \mathcal{O}'$ について考える。

定理 7.1.3 より $\forall x \in O' \exists B' \in \mathcal{B}'(x \in B' \land B' \subset O')$ である。

ゆえに、$O' = \bigcup \{B'(x) \mid x \in O'\}$ である。。

定理 2.2.3 より $f^{-1}(O') = \bigcup \bigl\{f^{-1}(B'(x)) \mid x \in O'\bigr\}$ であるので、定理 7.1.3 第三式より示される。 ■

***Thm.* 7.1.6.** 連続写像の合成

位相空間 X_1, X_2, X_3 について、写像 $f\colon X_1 \to X_2, g\colon X_2 \to X_3$ がともに連続であるとき、合成 $g \circ f$ は連続である。

Proof.

$\forall O_3 \in \mathcal{O}_3\bigl(g^{-1}(O_3) \in \mathcal{O}_2\bigr)$ であり、$f^{-1}(g^{-1}(O_3)) \in \mathcal{O}_1$ である。 ■

***Def.* 7.1.5.** 同相

位相空間 X, X' と写像 $f\colon X \to X'$ について、f が全単射かつ f と f^{-1} がともに連続であるとき、f を同相写像と呼ぶ。

また、同相写像 $f\colon X \to X'$ が存在するとき、X と X' は位相同型または同相であると呼ぶ。

***Cor.* 7.1.7.**

位相空間 X について、id_X は同相写像である。

7.2 誘導位相

***Lem.* 7.2.1.**

空でない集合 X と、位相空間 $(X', \mathcal{O}')$、$\mathcal{O}'$ を与える X の開基 $\mathcal{B}'$、写像 $f\colon X \to X'$ を考える。

このとき、以下の集合系 $\mathcal{B}$ は X の開基である。

$$\mathcal{B} \coloneqq \bigl\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}'\bigr\}$$

さらに、$\mathcal{B}$ の与える開集合系 $\mathcal{O}_1$ と、$\mathcal{O}'$ からこの補題により与える開基 $\mathcal{O}_2$ は一致する。

Proof.

第一式を考える。$\forall x \in X$ について、定義 7.1.1 第一式より $\exists B' \in \mathcal{B}'(f(x) \in B')$ であるので、$x \in f^{-1}(B')$

第二式を考える。$\forall B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}'$ について考える。

$\forall x \in f^{-1}(B'_1) \cap f^{-1}(B'_2)$ について、定理 2.2.3 より $f(x) \in B'_1 \cap B'_2$ である。

ゆえに定義 7.1.1 第二式より $\exists B' \in \mathcal{B}'(f(x) \in B' \wedge B' \subset B'_1 \cap B'_2)$ である。

定理 2.2.3 より $x \in f^{-1}(B') \wedge f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B'_1 \cap B'_2) = f^{-1}(B'_1) \cap f^{-1}(B'_2)$

補題 7.1.4 を用いて、$\mathcal{O}_2$ が開集合であることを示す。

第一式を考える。定理 7.1.3 第一式より $X' \in \mathcal{O}'$ であるので、$X = f^{-1}(X') \in \mathcal{O}_2$

第二式を考える。定理 2.2.3 と定理 7.1.3 第二式より $\forall O'_1, O'_2 \in \mathcal{O}'\bigl(f^{-1}(O'_1) \cap f^{-1}(O'_2) = f^{-1}(O'_1 \cap O'_2) \in \mathcal{O}_2\bigr)$

第三式を考える。定理 2.2.3 と定理 7.1.3 第三式より $\forall A' \subset \mathcal{O}'\bigl(\bigcup\bigl\{f^{-1}(O') \mid O' \in A'\bigr\} = f^{-1}(\bigcup A') \in \mathcal{O}_2\bigr)$

ゆえに $\mathcal{O}_2$ は開集合系である。

$\forall B' \in \mathcal{B}' \forall x \in f^{-1}(B')\bigl(f^{-1}(B') \in \mathcal{O}_2 \wedge x \in f^{-1}(B')\bigr)$ である。

$\forall O' \in \mathcal{O}' \forall x \in f^{-1}(O')$ について、$\exists B' \in \mathcal{B}'(f(x) \in B' \wedge B' \subset O')$ である。

よって、定理 2.2.3 より $x \in f^{-1}(B') \wedge f^{-1}(B') \subset f^{-1}(O')$

補題 7.1.2 より成り立つ。 ■

***Def.* 7.2.1.** 誘導空間

空でない集合 X と、位相空間 $(X', \mathcal{O}')$、写像 $f\colon X \to X'$ について、補題 7.2.1 より定まる開集合系 $\mathcal{O}$ が存在する。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を f に誘導された位相空間と呼ぶ。

***Def.* 7.2.2.** 部分空間

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と、X の空でない部分集合 A を考える。

$f = \mathrm{id}_X|_A$ に誘導された位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ を部分空間と呼ぶ。

***Lem.* 7.2.2.**

位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ と $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を与える開基 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を考える。

このとき、$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ は $X_1 \times X_2$ の開基である。

さらに、$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ の与える開集合系と、$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ からこの補題により与える開基の定める開集合系、この 2 つは一致する。

Proof.

第一式を考える。

定義 7.1.1 第一式より $\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \exists (B_1, B_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 (x_1 \in B_1 \land x_2 \in B_2)$ である。

第二式を考える。$\forall (B_{11}, B_{21}), (B_{12}, B_{22}) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \forall (x_1, x_2) \in (B_{11} \cap B_{12}, B_{21} \cap B_{22})$ を考える。

定義 7.1.1 第二式より $\exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 (x_1 \in B_1 \subset B_{11} \cap B_{12} \land x_2 \in B_2 \subset B_{21} \cap B_{22})$

$(B_{11} \cap B_{12}, B_{21} \cap B_{22}) = (B_{11}, B_{21}) \cap (B_{12}, B_{22})$ であるので成り立つ。

$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ である。

$\forall (O_1, O_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ について考える。

定義 7.1.2 より $\exists (B_1, B_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 (x_1 \in B_1 \land B_1 \subset O_1 \land x_2 \in B_2 \land B_2 \subset O_2)$

$(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \land B_1 \times B_2 \subset O_1 \times O_2$ である。

したがって、補題 7.1.2 より成り立つ。 ■

***Def.* 7.2.3.** 直積空間

位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ について、補題 7.2.2 より定まる位相空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ を直積空間と呼ぶ。また位相 $\mathcal{O}$ を箱位相と呼ぶ。

***Lem.* 7.2.3.** 直積と連続

位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), (Y, \mathcal{O})$ について、連続写像 $f\colon X_1 \times X_2 \to Y$ を考える。

このとき、$\forall w \in X_1$ について写像 $f_w\colon X_2 \to Y, f_w(x) = f(w, x)$ は連続である。

Proof.

$\forall O \in \mathcal{O}$ について、$f_w^{-1}(O) = \{x \in X_2 \mid f(w, x) \in O\}$ である。

f は連続より $\forall x \in f_w^{-1}(O) \exists (O_1, O_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \big((w, x) \in O_1 \times O_2 \land O_1 \times O_2 \subset f^{-1}(O)\big)$

$\forall z \in O_2$ について、$(w, z) \in O_1 \times O_2 \subset f^{-1}(O)$ より、$f(w, z) \in O$ である。したがって $O_2 \subset f_w^{-1}(O)$ である。

$f_w^{-1}(O) = \bigcup \big\{O_2 \mid x \in f_w^{-1}(O)\big\} \in \mathcal{O}_2$ より連続。 ■

7.3　近傍

***Def.* 7.3.1.** 基本近傍系
空でない集合 X とその任意の点 x について、以下を満たす集合系 $\mathcal{B}(x) \subset \mathfrak{P}(X)$ を基本近傍系と呼ぶ。

$$\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$$
$$\forall B \in \mathcal{B}(x)(x \in B)$$
$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B_1 \cap B_2)$$
$$\forall B \in \mathcal{B}(x)\exists B' \in \mathcal{B}(x)\forall y \in B'\exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B)$$

***Cor.* 7.3.1.** 有向集合としての基本近傍系
空でない集合 X とその点 $x \in X$ について、$(\mathcal{B}(x), \supset)$ は有向集合である。

***Def.* 7.3.2.** 近傍系
空でない集合 X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下で与える集合系 $\mathcal{N}(x)$ を近傍系と呼ぶ。

$$\mathcal{N}(x) \coloneqq \{N \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset N)\}$$

***Cor.* 7.3.2.**
空でない集合 X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ と、$\mathcal{B}(x)$ の与える開集合系 $\mathcal{N}(x)$ は、以下を満たす。

$$\forall x \in X(\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x))$$

***Lem.* 7.3.3.** 近傍系の一意性
空でない集合 X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ と集合系 $\mathcal{B}'(x) \subset \mathfrak{P}(X)$ について、以下を満たすとき、$\mathcal{B}'(x)$ は基本近傍系である。

$$\forall B' \in \mathcal{B}'(x)\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$$
$$\forall B \in \mathcal{B}(x)\exists B' \in \mathcal{B}'(x)(B' \subset B)$$

さらに $\mathcal{B}(x)$ の定める近傍系と、$\mathcal{B}'(x)$ の定める近傍系、この 2 つは一致する。

Proof.
第一式を考える。定義 7.3.1 第一式から $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ より、仮定から $\exists B' \in \mathcal{B}'(x)$

第二式を考える。定義 7.3.1 第二式より $\forall B' \in \mathcal{B}'(x)\exists B \in \mathcal{B}(x)(x \in B \subset B')$

第三式を考える。定義 7.3.1 第三式より $\forall B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}'(x)\exists B_1, B_2, B \in \mathcal{B}(x)\exists B' \in \mathcal{B}'(x)(B' \subset B \subset B_1 \cap B_2 \subset B'_1 \cap B'_2)$

第四式を考える。仮定より $\forall B' \in \mathcal{B}'(x)\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$ である。
定義 7.3.1 第四式より $\exists C \in \mathcal{B}(x)\forall y \in C\exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B)$ である。
仮定より $\exists C' \in \mathcal{B}'(x)(C' \subset C)$ より、$\forall y \in C'\exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B)$ である。
仮定より $\exists D' \in \mathcal{B}'(y)(D' \subset D)$ であり、$D' \subset D \subset B' \subset B$ より成り立つ。

$\forall N \in \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x) \exists B' \in \mathcal{B}'(x)(B' \subset B \subset N)$ である。ゆえに、$N \in \mathcal{N}'(x)$ である。
$\forall N' \in \mathcal{N}'(x) \exists B' \in \mathcal{B}'(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B' \subset N')$ である。ゆえに、$N' \in \mathcal{N}(x)$ である。 ■

***Lem.* 7.3.4. 近傍系は基本近傍系**
近傍系 $\mathcal{N}(x)$ は基本近傍系である。さらに $\mathcal{N}(x)$ から定義 7.3.2 より定まる近傍系は、$\mathcal{N}(x)$ に一致する。

Proof.
定義より $\forall \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset N)$ である。
$\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ である。
補題 7.3.3 より成り立つ。 ■

***Thm.* 7.3.5. 開基の定める基本近傍系**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と、$\mathcal{O}$ を与える X' の開基 $\mathcal{B}$ を考える。
X の任意の点 x について、以下を満たす集合系 $\mathcal{B}(x)$ は基本近傍系である。

$$\mathcal{B}(x) \coloneqq \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

さらに $\mathcal{B}(x)$ の与える近傍系と、$\mathcal{O}$ からこの定理の与える基本近傍系 $\mathcal{B}'(x)$ が与える近傍系、この 2 つは一致する。

Proof.
第一式を考える。定義 7.1.1 第一式と定義より成り立つ。

第二式は定義より明らか。

第三式を考える。定義 7.1.1 第二式より $\exists B \in \mathcal{B}(x \in B \wedge B \subset B_1 \cap B_2)$ が成り立つ。
ゆえに、$B \in \mathcal{B}(x)$

第四式を考える。定義より $B = B' = D$ として成り立つ。

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ より、$\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}'(x)$ である。
$\forall B' \in \mathcal{B}'(x)$ について、$x \in B' \wedge \forall y \in B' \exists B \in \mathcal{B}(y \in B \wedge B \subset B')$ である。ゆえに、$\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$
補題 7.3.3 より成り立つ。 ■

***Thm.* 7.3.6. 基本近傍系の定める位相**
空でない集合 X とその任意の点 x について、基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が与えられているとする。
このとき、以下の集合 $\mathcal{O}$ は X の開基であり、かつ $\mathcal{O}$ の定める開集合系は $\mathcal{O}$ である。

$$\mathcal{O} \coloneqq \{O \subset X \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset O)\}$$

さらに $\mathcal{O}$ と、$\mathcal{N}(x)$ からこの定理の与える開集合系 $\mathcal{O}'$、この 2 つは一致する。

Proof.
補題 7.1.4 を用いて示す。

第一式を考える。定義 7.3.1 第一式より $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset X)$ であるので、$X \in \mathcal{O}$

第二式を考える。$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ とする。
$\forall x \in O_1 \cap O_2$ について、定義より $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)(B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2)$ である。
定義 7.3.1 第三式より $\exists B \in \mathcal{B}(B \subset B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2)$ であるので、$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{N}(x)$ である。

第三式を考える。$A \subset \mathcal{O}$ を考える。
$A = \varnothing$ のとき、$\bigcup A = \bigcup \varnothing = \varnothing \in \mathcal{O}$ より成り立つ。
$A \neq \varnothing$ のとき、$\forall x \in \bigcup A$ について、$\exists O \in \mathcal{O}(x \in O \subset \bigcup A)$ である。
定義より $\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset O \subset \bigcup A)$ である。定義より示される。

$\forall x \in X(\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x))$ より、$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ である。
$\forall O' \in \mathcal{O}' \forall y \in O' \exists N \in \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(N \subset B \subset O)$ より、$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ である。 ■

***Lem.* 7.3.7.**
空でない集合 X を考える。

X の開基 $\mathcal{B}$ の定める開集合系 $\mathcal{O}$ と、定理 7.3.5 と定理 7.3.6 により定まる開集合系 $\mathcal{O}'$ は、一致する。

X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、定理 7.3.6 と定理 7.3.5 の定める基本近傍系 $\mathcal{B}'(x)$ を考える。
$\mathcal{B}(x)$ の定める近傍系と、$\mathcal{B}'(x)$ の定める近傍系は、一致する。

Proof.
以下より一致する。

$$\mathcal{O}' = \{O \subset X \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset O)\} = \{O \subset X \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset O)\} = \mathcal{O}$$

定義より、以下である。

$$\mathcal{B}'(x) = \{B' \subset X \mid x \in B' \land \forall y \in B' \exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B')\}$$

$\forall B' \in \mathcal{B}'(x)$ について、定義 7.3.1 第二式より $x \in B'$ であるので、定義から $\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$ である。

$\forall B \in \mathcal{B}(x)$ について、$B' \coloneqq \{y \in X \mid \exists E \in \mathcal{B}(y)(E \subset B)\}$ を考える。定義より $B' \subset B$ であり、$x \in B'$ である。
$\forall y \in B' \exists E \in \mathcal{B}(y)(E \subset B)$ について、定義 7.3.1 第四式より $\exists C \in \mathcal{B}(y) \forall z \in C \exists D \in \mathcal{B}(z)(D \subset E \subset B)$ である。
定義より $z \in B'$ である。したがって $C \subset B'$ である。
よって $B' \subset B$ である。

補題 7.3.3 より成り立つ。 ■

***Def.* 7.3.3. 収束**
位相空間 X と X 上の点 a について、X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は a に収束すると呼ぶ。

$$\forall N \in \mathcal{N}(a) \exists \lambda_0 \in \Lambda \Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset N \Big)$$

また、この a を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の収束先と呼び、一意に定まるとき $\lim_{\lambda \to \infty} (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \coloneqq a$ と表す。

***Cor.* 7.3.8.**
位相空間 X について、X 上の点 a に収束するネットの部分ネットは a に収束する。

***Lem.* 7.3.9. 基本近傍系と収束**

位相空間 X と X 上の点 a と、$\mathcal{N}(a)$ を与える X の基本近傍系 $\mathcal{B}(a)$、および X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は a に収束する。
2. $\forall B\in\mathcal{B}(a)\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset B\Big)$

Proof.

1. → 2. は、$\mathcal{B}(a)\subset\mathcal{N}(a)$ より明らか。

2. → 1. を示す。

$\forall N\in\mathcal{N}(a)\exists B\in\mathcal{B}(a)\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset B\subset N\Big)$ ■

***Def.* 7.3.4. 点連続**

位相空間 X,X' と点 $x\in X$、写像 $f\colon X\to X'$ について、以下を満たすとき、写像 f は点 x で連続であると言う。

$$\forall N'\in\mathcal{N}(f(x))\exists N\in\mathcal{N}(x)(f(N)\subset N')$$

***Cor.* 7.3.10.**

位相空間 X_1,X_2,X_3 と点 $x\in X_1$、写像 $f\colon X_1\to X_2, g\colon X_2\to X_3$ について、f は点 x で連続であり、g が点 $f(x)$ で連続であるとき、合成写像 $g\circ f$ は点 x で連続である。

***Thm.* 7.3.11. 点連続と収束**

位相空間 X,X' と点 $x\in X$、写像 $f\colon X\to X'$ と、近傍系 $\mathcal{N}(x)$ を与える基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下の 3 つは同値である。

1. f が x で連続
2. $\forall B'\in\mathcal{B}(f(x))\exists B\in\mathcal{B}(x)(f(B)\subset B')$
3. x に収束する任意のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、ネット $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は $f(x)$ に収束する。

Proof.

1. → 2. を示す。

$$\forall B'\in\mathcal{B}(f(x))\subset\mathcal{N}(f(x))\exists N\in\mathcal{N}(x)\exists B\in\mathcal{B}(x)(f(B)\subset f(N)\subset B')$$

2. → 3. を示す。

$$\forall B'\in\mathcal{B}(f(x))\exists B\in\mathcal{B}(x)\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\in f(B)\subset B'\Big)$$

3. → 1. を示す。f が x で連続でないと仮定する。

$$\exists N'\in\mathcal{N}(f(x))\forall N\in\mathcal{N}(x)\exists y\in N(f(y)\notin N')$$

定理 2.1.3 より、写像 $g\colon\mathcal{N}(x)\to X, f(g(N))\notin N'$ が存在して、$(\mathcal{N}(x),\supset)$ は系 7.3.1 より有向集合である。

今、g から構成されるネットは、順序を包含で定義したことから x に収束するが、$f\circ g$ から構成されるネットは $f(x)$ に収束しない。背理法より示される。 ■

***Thm.* 7.3.12.** 連続と点連続

位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O})$ と写像 $f\colon X \to X'$ について、以下の 2 つは同値である。

1. f は X 上の任意の点 x で連続
2. f は連続

Proof.

$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を与える開基 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を考える。

1. $\to$ 2. を示す。

$B' \in \mathcal{B}'$ について、$f^{-1}(B') = \varnothing$ のとき明らか。$f^{-1}(B') \neq \varnothing$ のときを考える。

$\forall x \in f^{-1}(B')$ について、$B' \in \mathcal{B}(f(x))$ であるので点連続性から $\exists B \in \mathcal{B}(x)(f(B) \subset B')$ となる。

系 2.2.2 より $B \subset f^{-1}(f(B)) \subset f^{-1}(B')$ であるので、定理 7.3.6 より、$f^{-1}(B')$ は開集合である。

2. $\to$ 1. を示す。

$\forall x \in X \forall B' \in \mathcal{B}(f(x))$ について、$B' \in \mathcal{B}'$ より、$f^{-1}(B') \in \mathcal{O}$ である。

今、$x \in f^{-1}(B')$ であるので、定義 7.1.2 より $\exists B \in \mathcal{B}(x)\big(B \subset f^{-1}(B')\big)$ となる。

したがって、系 2.2.2 より $f(B) \subset f(f^{-1}(B')) \subset B'$ ■

7.4 閉集合

***Def.* 7.4.1.** 閉集合系

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下を満たす集合系 $\mathcal{F}$ を閉集合系と呼ぶ。

$$\mathcal{F} \coloneqq \{F \subset X \mid X \setminus F \in \mathcal{O}\}$$

また、$\mathcal{F}$ の要素を閉集合と呼ぶ。

***Thm.* 7.4.1.** 閉集合系

位相空間 X について、閉集合系 $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$\varnothing, X \in \mathcal{F}$$
$$\forall A \subset \mathcal{F}\Big(A \neq \varnothing \to \bigcap A \in \mathcal{F}\Big)$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F})$$

Proof.

定理 1.3.16 と定理 7.1.3 より示される。 ■

***Def.* 7.4.2.** 閉包

位相空間 X と X の部分集合 A について、以下で定義する集合を閉包と呼び、$\overline{A}$ で表す。

$$\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} \mid A \subset F\}$$

***Cor.* 7.4.2.**

位相空間 X について、以下が成り立つ。

$$\forall A, B \subset X\big(A \subset B \to \overline{A} \subset \overline{B}\big)$$
$$\forall D \subset \mathfrak{P}(X)\left(\bigcup\{\overline{A} \mid A \in D\} \subset \overline{\bigcup D}\right)$$

***Thm.* 7.4.3. 閉包**

位相空間 X と X の部分集合 A と、近傍系 $\mathcal{N}(x)$ を与える基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下の 4 つは同値である。

1. $x \in \overline{A}$
2. $\forall N \in \mathcal{N}(x)(A \cap N \neq \varnothing)$
3. $\forall B \in \mathcal{B}(x)(A \cap B \neq \varnothing)$
4. x に収束する A 上のネットが存在する。

Proof.

1. $\to$ 2. を考える。
$\exists N \in \mathcal{N}(x)(A \cap N = \varnothing)$ と仮定する。
$\exists O \in \mathcal{O}(x \in O \land O \subset N)$ であるので、$x \notin X \setminus O$
$X \setminus O \in \mathcal{F}$ であり、$A \subset X \setminus N \subset X \setminus O$
$x \in \overline{A}$ とすると、$x \in X \setminus O$ となり矛盾。背理法より示される。

2. $\to$ 3. は $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ より明らか。

3. $\to$ 4. を考える。
仮定より $\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists y \in A(y \in B)$ である。
系 7.3.1 より、$(\mathcal{B}(x), \supset)$ は有向集合である。
ネット $(y_B)_{B \in \mathcal{B}(x)}$ は、順序を包含で定義したことから x に収束する。

4. $\to$ 1. を考える。
$x \notin \overline{A}$ に収束するネット $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$ が存在すると仮定する。
$\exists F \in \mathcal{F}(x \notin F \cap A \subset F)$ より、$\exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset X \setminus F \subset X \setminus A\Big)$
これは A 上のネットであることに反する。背理法より示される。 ■

***Def.* 7.4.3. 開被覆**

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその被覆 C について、以下が成り立つとき、C を開被覆と呼ぶ。

$$C \subset \mathcal{O}$$

***Def.* 7.4.4. コンパクト**

位相空間 X について、その任意の開被覆が、開被覆となる有限部分集合を持つとき、X はコンパクトであると呼ぶ。

***Lem.* 7.4.4.** コンパクトの言い換え

コンパクトな位相空間について、以下が成り立つ。

$$\forall A \subset \mathcal{F}\Big(A \neq \varnothing \land \bigcap A = \varnothing \to \exists A' \subset A\Big(A' \neq \varnothing \land \bigcap A' = \varnothing \land |A'| < \infty\Big)\Big)$$

Proof.

コンパクトの定義と定理 1.3.16 より成り立つ。 ■

***Thm.* 7.4.5.** ネットによるコンパクトの特徴づけ

位相空間 X について、以下の 3 つは同値である。

1. X はコンパクトである。
2. X 上の任意の普遍ネットは収束する。
3. X 上の任意のネットは収束する部分ネットを持つ。

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

X 上の普遍ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$F \coloneqq \bigcap\Big\{\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}} \mid \lambda\in\Lambda\Big\}$ を考える。

$F = \varnothing$ とすると、補題 7.4.4 より $\exists n \in \mathbb{N}\Big(n > 0 \land \bigcap\Big\{\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda(m)}}} \mid m < n\Big\} = \varnothing\Big)$ である。

ここで定理 6.1.12 から $\exists\mu' \in \Lambda\forall m \in n(\mu' \succcurlyeq \lambda_m)$ であり、$x_{\mu'} \in \bigcap\Big\{\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}} \mid m \leq n\Big\}$ より反する。

背理法より $\exists a \in F$ である。

$\forall\lambda \in \Lambda\Big(a \in \overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}}\Big)$ であるので、閉包の定義より $\forall N \in \mathcal{N}(a)\forall\lambda \in \Lambda\Big(N \cap (x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}} \neq \varnothing\Big)$ である。

すなわち、$\forall N \in \mathcal{N}(a)\forall\lambda \in \Lambda\exists\mu \in \Lambda(\lambda \preccurlyeq \mu \land x_\mu \in N)$

普遍ネットの定義とあわせて、$\forall N \in \mathcal{N}(a)\exists\lambda \in \Lambda\Big((x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}} \subset N\Big)$

2. $\to$ 3. を示す。

仮定と定理 4.4.8 より明らか。

3. $\to$ 1. を示す。

コンパクトでないと仮定する。その任意の有限部分集合が開被覆とならない X の開被覆 C が存在する。

$P \coloneqq \{A \subset C \mid |A| < \infty \land A \neq \varnothing\}$ について $(P, \subset)$ は有向集合であり、コンパクトでないことから $\forall A \in P\exists x \in X \setminus \bigcup A$ である。このようなネット $(x_A)_{A\in P}$ を考える。

仮定より、$a \in X$ に収束する部分ネット $\big(x_{\varphi(\mu)}\big)_{\mu\in M}$ を持つ。

開被覆であることより $\exists C_0 \in C(a \in C_0 \land \{C_0\} \in P)$ であり、定義 4.4.6 より $\exists\mu_0 \in M(\{C_0\} \subset \varphi(\mu_0))$ である。

$a \in \bigcup\varphi(\mu_0) \in \mathcal{O}$ であり、収束することと有向性より $\exists\mu_1 \in M\big(\varphi(\mu_0) \subset \varphi(\mu_1) \land x_{\varphi(\mu_1)} \in \bigcup\varphi(\mu_0) \subset \bigcup\varphi(\mu_1)\big)$ であるが、このネットの定義に反する。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 7.4.6.** Tychonoff の定理

コンパクトな位相空間 X, Y について、位相空間 $X \times Y$ はコンパクトである。

Proof.

$X \times Y$ 上の普遍ネット $((x_\lambda, y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。

今、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は普遍ネットである。これは定理 7.4.5 より収束する。収束先を x_0 とする。

同様に $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ も y_0 に収束する。
したがって、もとの普遍ネットは (x_0, y_0) に収束する。定理 7.4.5 より示される。 ■

***Thm.* 7.4.7. コンパクト空間の連続像はコンパクト**
コンパクトな位相空間 $(X,\mathcal{O})$ と、位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ について、連続写像 $f\colon X\to X'$ を考える。このとき、像 $f(X)$ はコンパクトである。

Proof.
$f(X)$ の任意の開被覆 C' について、$C\coloneqq\left\{f^{-1}(O')\mid O'\in C'\right\}$ を考える。
連続性より $\forall O'\in C'\big(f^{-1}(O')\in\mathcal{O}\big)$ である。
$\forall x\in X\exists O'\in C'(f(x)\in O')$ より、C は X の開被覆である。
コンパクト性から、$\exists A'\subset C'\big(|A'|<\infty\land X=\bigcup\left\{f^{-1}(O')\mid O'\in A'\right\}\big)$
定理 2.2.1、系 2.2.2 から $f(X)=\bigcup\left\{f(f^{-1}(O'))\mid O'\in A'\right\}\subset\bigcup\{O'\mid O'\in A'\}$ より A' は有限開被覆である。
■

***Def.* 7.4.5. Lindelöf**
位相空間 X について、その任意の開被覆が、開被覆となる可算部分集合を持つとき、X は Lindelöf であると呼ぶ。

***Cor.* 7.4.8.**
位相空間 X について、X がコンパクトならば X は Lindelöf である。

***Def.* 7.4.6. 点列コンパクト**
位相空間 X について、X 上の任意の点列が収束する部分列を持つとき、X は点列コンパクトであると呼ぶ。

***Thm.* 7.4.9.**
Lindelöf で点列コンパクトな位相空間 X は、コンパクトである。

Proof.
コンパクトでないと仮定する。その任意の有限部分集合が開被覆とならない X の開被覆 C が存在する。
仮定より可算な部分開被覆 $C'\coloneqq\{O_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が存在する。
$n\in\mathbb{N}$ について、$P_n\coloneqq\{O_m\mid m\in\mathbb{N}\land m\leq n\}$ を考える。
C の定義より $\bigcup P_n\neq X$ である。
したがって、$x_n\in X\setminus\bigcup P_n$ なる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取れる。
点列コンパクトより、$a\in X$ に収束する部分列 $\big(x_{n(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。
今、開被覆より $\exists l\in\mathbb{N}(a\in O_l)$ であり、収束の定義から $\exists j\in\mathbb{N}\forall j'\in\mathbb{N}(j\leq j'\to x_{j'}\in O_l)$。
定義 4.4.6 より $\exists h\in\mathbb{N}(l\leq n(h))$ であり、$\forall h'\in\mathbb{N}\big(h\leq h'\to a\in X\setminus\bigcup P_{n(h')}\subset X\setminus\bigcup P_{n(l)}\subset X\setminus O_l\big)$
矛盾するので、背理法よりコンパクト。 ■

7.5 分離

***Def.* 7.5.1. T_0 空間**
位相空間 X の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ が以下を満たすとき、X を T_0 空間と呼ぶ。

$$\forall x,y\in X(x\neq y\to\exists N_x\in\mathcal{N}(x)(y\notin N_x)\lor\exists N_y\in\mathcal{N}(y)(x\notin N_y))$$

***Def.* 7.5.2.** T_1 空間

位相空間 X の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ が以下を満たすとき、X を T_1 空間と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N \in \mathcal{N}(x)(y \notin N))$$

***Thm.* 7.5.1. Frechet 性**

位相空間 X と、開基 $\mathcal{B}$ について、以下の 3 つは同値である。

1. X は T_1 空間
2. $\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists B \in \mathcal{B}(x)(y \notin B))$
3. $\forall x \in X(\{x\} \in \mathcal{F})$

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N \in \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(y \in X \setminus N \subset X \setminus B))$$

2. $\to$ 3. を示す。
2. より、$\forall y \in X(x \neq y \to \exists B \in B(y)(x \notin B))$ である。
$X \setminus \{x\} = \bigcup\{B \mid y \in X\}$ より成り立つ。

3. $\to$ 1. を示す。
$x \neq y$ について、$y \in X \setminus \{x\} \in \mathcal{O}$ である。
ゆえに、$X \setminus \{x\} \in \mathcal{N}(y)$ である。 ■

***Cor.* 7.5.2.**

位相空間 X が T_1 空間ならば、T_0 空間である。

***Def.* 7.5.3.** T_2 空間

位相空間 X の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ が以下を満たすとき、X を T_2 空間と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N_x \in \mathcal{N}(x) \exists N_y \in \mathcal{N}(y)(N_x \cap N_y = \varnothing))$$

***Lem.* 7.5.3.** T_2 ならば T_1

位相空間 X が T_2 空間ならば、T_1 空間である。

Proof.

$\forall x, y \in X(x \neq y)$ を考える。$\exists N_x \in \mathcal{N}(x) \exists N_y \in \mathcal{N}(y)(N_x \cap N_y = \varnothing)$
$y \in N_y$ より、$y \notin N_x$ ■

***Cor.* 7.5.4.**

T_2 空間の部分空間は T_2 空間である。

***Thm.* 7.5.5. Hausdorff 性**

位相空間 X と、開基 $\mathcal{B}$ について、以下の 5 つは同値である。

1. X は T_2 空間
2. $\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y = \varnothing))$
3. X 上の収束するネットの収束先は一意に定まる。
4. 直積集合 $X \times X$ について、対角集合 $\Delta \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\}$ は閉集合である。
5. $\forall x \in X\bigl(\{x\} = \bigcap\bigl\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}(x)\bigr\}\bigr)$

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N_x \in \mathcal{N}(x) \exists N_y \in \mathcal{N}(y) \exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y \subset N_x \cap N_y = \varnothing))$$

2. $\to$ 3. を示す。
2 点 $x, y \in X(x \neq y)$ に収束するとする仮定する。
仮定より $\exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y = \varnothing)$
補題 7.3.9 より $\exists \lambda_0 \in \Lambda\Bigl((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset B_x \cap B_y\Bigr)$
これは矛盾する。背理法より示される。

3. $\to$ 1. を示す。T_2 でないとすると、

$$\exists x, y \in X(x \neq y \wedge \forall N_x \in \mathcal{N}(x) \forall N_y \in \mathcal{N}(y) \exists z \in X(z \in N_x \cap N_y))$$

定理 2.1.3 より、写像 $g\colon \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y) \to X, g((N_x, N_y)) \in N_x \cap N_y$ が存在する。
$\mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ 上の半順序を以下のように定義する。

$$(N_x, N_y) \preccurlyeq \bigl(N'_x, N'_y\bigr) :\leftrightarrow N_x \supset N'_x \wedge N_y \supset N'_y$$

系 7.3.1 より、$(\mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y), \preccurlyeq)$ は有向集合である。
g の与えるネットは、順序を包含で定義したことから、x と y の双方に収束する。対偶法より示される。

2. $\to$ 4. を示す。
$\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ について、$\exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y = \varnothing)$ である。
よって $B_x \times B_y \subset (X \times X) \setminus \Delta$ であるので、$(X \times X) \setminus \Delta$ は開集合である。

4. $\to$ 2. を示す。
$\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ について、$\exists B_x, B_y \in \mathcal{B}((x, y) \in B_x \times B_y \subset (X \times X) \setminus \Delta)$ である。
よって、$B_x \in \mathcal{B}(x) \wedge B_y \in \mathcal{B}(y) \wedge B_x \cap B_y = \varnothing$ である。

2. $\to$ 5. を示す。
$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \subset X \setminus B_y \in \mathcal{F}))$
よって $\overline{B_x} \subset X \setminus B_y$ であるので、$y \notin \overline{B_x}$

5. $\to$ 2. を示す。
$\forall x, y \in X(x \neq y)$ について、$\exists B \in \mathcal{B}(x)\bigl(y \notin \overline{B}\bigr)$
$y \in X \setminus \overline{B} \in \mathcal{O}$ より、$\exists B' \in \mathcal{B}(y)\bigl(B' \subset X \setminus \overline{B}\bigr)$。
$B \cap B' = \varnothing$ より成り立つ。 ■

***Def.* 7.5.4. T_3 空間**

位相空間 X が以下を満たすとき、X を T_3 空間と呼ぶ。

$$\forall x \in X \forall F \in \mathcal{F}(x \notin F \to \exists O_x, O_F \in \mathcal{O}(x \in O_x \land F \subset O_F \land O_x \cap O_F = \varnothing))$$

***Thm.* 7.5.6. Vietoris 性**

位相空間 X と、開基 $\mathcal{B}$ について、以下の 4 つは同値である。

1. X は T_3 空間
2. $\forall x \in X \forall B \in \mathcal{B}(x) \exists D \in \mathcal{B}(x) \big(\overline{D} \subset B\big)$
3. $\forall x \in X \forall F \in \mathcal{F}\big(x \notin F \to \exists O_x, O_F \in \mathcal{O}\big(x \in O_x \land F \subset O_F \land \overline{O_x} \cap \overline{O_F} = \varnothing\big)\big)$
4. $\forall F \in \mathcal{F}\big(F = \bigcap \big\{\overline{O} \mid O \in \mathcal{O} \land F \subset O\big\}\big)$

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。
$\forall B \in \mathcal{B}(x)$ について、$x \in X \setminus B \land X \setminus B \in \mathcal{F}$ である。
仮定より、$\exists O_x, O_F \in \mathcal{O}(x \in O_x \land X \setminus B \subset O_F \land O_x \cap O_F = \varnothing)$ である。
ここで $O_x \in \mathcal{N}(x)$ であるので、$\exists D \in \mathcal{B}(x)(D \subset O_x)$ である。
$D \subset O_x \subset X \setminus O_F$ であるので、閉包の定義より $\overline{D} \subset X \setminus O_F \subset X \setminus (X \setminus B) = B$

2. $\to$ 3. を示す。
$x \in X \setminus F \in \mathcal{O}$ であるので、$X \setminus F \in \mathcal{N}(x)$ すなわち、$\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset X \setminus F)$ である。
仮定より、$\exists D \in \mathcal{B}(x)\big(\overline{D} \subset B\big)$ であり、再び仮定より、$\exists E \in \mathcal{B}(x)\big(\overline{E} \subset D\big)$
$F = X \setminus (X \setminus F) \subset X \setminus B \subset X \setminus \overline{D} \subset X \setminus D$ である。
$O_F \coloneqq X \setminus \overline{D}$ とすると、$X \setminus D \in \mathcal{F}$ より、$\overline{O_F} \subset X \setminus D \subset X \setminus \overline{E}$
$O_x \coloneqq E$ として成り立つ。

3. $\to$ 4. を示す。
$A \coloneqq \big\{\overline{O} \mid O \in \mathcal{O} \land F \subset O\big\}$ とする。$X \in A$ より、$X \neq \varnothing$ である。
定義より $F \subset \bigcap A$ である。
$\forall x \in X \setminus F$ について、仮定より $\exists O_F \in \mathcal{O}\big(F \subset O_F \land x \notin \overline{O_F}\big)$ であるので、$x \notin \bigcap A$
ゆえに、$X \setminus F \subset X \setminus \bigcap A$

4. $\to$ 1. を示す。
$\forall x \in X \forall F \in \mathcal{F}(x \notin F)$ のとき、仮定より $\exists O_F \in \mathcal{O}\big(x \notin \overline{O_F} \land F \subset O_F\big)$
$O_x \coloneqq X \setminus \overline{O_F}$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 7.5.7. 正則空間**

位相空間 X が T_1 空間かつ T_3 空間であるならば、X は T_2 空間である。

Proof.

定理 7.5.1 より、一点集合は閉集合である。
T_3 空間の定義より、T_2 空間である。 ■

***Def.* 7.5.5.** T_4 空間

位相空間 X が以下を満たすとき、X を T_4 空間と呼ぶ。

$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing \to \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}(F_1 \subset O_1 \land F_2 \subset O_2 \land O_1 \cap O_2 = \varnothing))$$

***Thm.* 7.5.8. Tietze 性**

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下の 3 つは同値である。

1. X は T_4 空間
2. $\forall O \in \mathcal{O} \forall F \in \mathcal{F}\big(F \subset O \to \exists U \in \mathcal{O}\big(F \subset U \land \overline{U} \subset O\big)\big)$
3. $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(O_1 \cup O_2 = X \to \exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \subset O_1 \land F_2 \subset O_2 \land F_1 \cup F_2 = X))$

Proof.

1. → 2. を示す。
$X \setminus O \in \mathcal{F}$ から、仮定より $\exists U, U' \in \mathcal{O}(F \subset U \land X \setminus O \subset U' \land U \cap U' = \varnothing)$ である。
$U \subset X \setminus U' \in \mathcal{F}$ であるので、$\overline{U} \subset X \setminus U' \subset X \setminus (X \setminus O) = O$

2. → 3. を示す。
$X \setminus O_1 \subset O_2 \land X \setminus O_1 \in \mathcal{F}$ より、仮定より $\exists U \in \mathcal{O}\big(X \setminus O_1 \subset U \land \overline{U} \subset O_2\big)$
$X \setminus U \subset X \setminus (X \setminus O_1) = O_1 \land (X \setminus U) \cup \overline{U} = X$ より示される。

3. → 1. を示す。
$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ とする。
$(X \setminus F_1) \cup (X \setminus F_2) = X$ であるので、仮定より $\exists H_1, H_2 \in \mathcal{F}(H_1 \subset X \setminus F_1 \land H_2 \subset X \setminus F_2 \land H_1 \cup H_2 = X)$
$F_1 = X \setminus (X \setminus F_1) \subset X \setminus H_1 \land F_2 = X \setminus (X \setminus F_2) \subset X \setminus H_2$
ここで、$O_1 \coloneqq X \setminus H_1, O_2 \coloneqq X \setminus H_2$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 7.5.9.** 正規空間

位相空間 X が T_1 空間かつ T_4 空間であるならば、X は T_3 空間である。

Proof.

定理 7.5.1 より、一点集合は閉集合である。
T_4 空間の定義より、T_3 空間である。 ■

***Lem.* 7.5.10. Lindelöf な T_3 は T_4**

T_3 空間 X が Lindelöf ならば、X は T_4 空間である。

Proof.

$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ を考える。
$\forall x \in F_1$ について、$x \in X \setminus F_2$ より、仮定から $\exists O_1(x) \in \mathcal{O}\Big(x \in O_1(x) \land \overline{O_1(x)} \cap F_2 = \varnothing\Big)$
Lindelöf より、F_1 の可算部分 A_1 が存在して、$F_1 \subset \bigcup \{O_1(x) \mid x \in A_1\}$
すなわち、写像 $\varphi_1 \colon \mathbb{N} \to \mathcal{O}$ が存在して、$F_1 \subset \bigcup \{\varphi_1(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \land \forall n \in \mathbb{N}\Big(\overline{\varphi_1(n)} \cap F_2 = \varnothing\Big)$

同様に、写像 $\varphi_2 \colon \mathbb{N} \to \mathcal{O}$ が存在して、$F_2 \subset \bigcup \{\varphi_2(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \land \forall n \in \mathbb{N}\Big(\overline{\varphi_2(n)} \cap F_1 = \varnothing\Big)$

以下に定める集合 U_1, U_2 は定義より開集合である。

$$U_1 \coloneqq \bigcup \left\{ \varphi_1(n) \setminus \bigcup \left\{ \overline{\varphi_2(m)} \mid m \in n \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$U_2 \coloneqq \bigcup \left\{ \varphi_2(n) \setminus \bigcup \left\{ \overline{\varphi_1(m)} \mid m \in s(n) \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\exists z \in U_1 \cap U_2$ とする。
$\exists n_1 \in \mathbb{N}\Big(z \in \varphi_1(n_1) \land \forall m \in n_1\Big(z \notin \overline{\varphi_2(m)}\Big)\Big) \land \exists n_2 \in \mathbb{N}\Big(z \in \varphi_2(n_2) \land \forall m \in s(n_2)\Big(z \notin \overline{\varphi_1(m)}\Big)\Big)$
$n_1 \leq n_2 \lor n_1 > n_2$ の場合分けにより、どちらの場合も矛盾。ゆえに $U_1 \cap U_2 = \varnothing$
$F_1 \subset U_1 \land F_2 \subset U_2$ より示される。 ■

7.6 連結

***Def.* 7.6.1.** 連結
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下を満たす X を連結であると呼ぶ。

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{\varnothing, X\}$$

***Thm.* 7.6.1.** 非連結
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下の 3 つは同値である。

1. X は連結でない
2. $\exists U, V \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}(X = U \cup V \land U \cap V = \varnothing)$
3. $\exists A, B \subset X \setminus \{\varnothing\}\big(X = A \cup B \land A \cap \overline{B} = \varnothing \land \overline{A} \cap B = \varnothing\big)$

Proof.
1. → 2. を考える。
開集合、閉集合の定義より $\mathcal{O} \cap \mathcal{F} \supset \{\varnothing, X\}$ であるので、非連結ならば $\exists U \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F} \setminus \{\varnothing, X\}$ である。
$V \coloneqq X \setminus U \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}$ より成り立つ。

2. → 3. を考える。
$V = X \setminus U \land U = X \setminus V$ より、$U, V \in \mathcal{F}$ である。
したがって、$U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = U \cap V = \varnothing$ である。

3. → 1. を考える。
$\overline{A} = X \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A} = \big(A \cap \overline{A}\big) \cup \big(B \cap \overline{A}\big) = A$ より、A は閉集合である。
同様に、B は閉集合であるので、A は開集合である。
$B \neq \varnothing$ より、$A \neq X$ である。したがって、$A \in (\mathcal{O} \cap \mathcal{F}) \setminus \{\varnothing, X\}$ ■

***Thm.* 7.6.2.** 連結空間の連続像は連結
連結な位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と、位相空間 $(X', \mathcal{O}')$ について、連続写像 $f\colon X \to X'$ を考える。このとき、像 $f(X)$ は連結である。

Proof.
$f(X)$ が連結でないと仮定する。
定理 7.6.1 より $\exists U, V \in \mathcal{O}'(f(X) \subset U \cup V \land U \cap V = \varnothing \land U \cap f(X) \neq \varnothing \land V \cap f(X) \neq \varnothing)$

$\exists y \in U \cap f(X) \exists x \in X(f(x) = y)$ すなわち $x \in f^{-1}(U \cap f(X)) \subset f^{-1}(U)$ であるので、$f^{-1}(U) \neq \varnothing$ となる。同様に $f^{-1}(V) \neq \varnothing$

f は連続より $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}$ である。

系 2.2.2、定理 2.2.3 より $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) \supset f^{-1}(f(X)) \supset X$

定理 2.2.3 より $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

定理 7.6.1 より X は連結でない。矛盾するので背理法より示される。 ■

7.7 可算な位相

***Def.* 7.7.1.** 第一可算

位相空間 X について、その任意の点 x に対して可算な基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が存在するとき、位相空間 X は第一可算であると呼ぶ。

***Lem.* 7.7.1.** 第一可算空間における基本近傍系の単調列

第一可算な位相空間 X とその任意の点 $x \in X$ について、以下を満たす基本近傍系 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する。

$$\forall n \in \mathbb{N}\big(B_{s(n)} \subset B_n\big)$$

Proof.

第一可算であるので、$\mathbb{N}$ からの全射 φ が存在するような基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が存在する。

以下のように定めた B_n は条件を満たす。

$$B_0 \coloneqq \varphi(0)$$
$$B_{s(n)} \coloneqq B_n \cap \varphi(s(n))$$

定義と φ の全射性より、$\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists n \in \mathbb{N}(B_n \subset \varphi(n) = B)$ である。

$\varphi(0) \subset B_0$ である。$\exists B \in \mathcal{B}(B \subset B_n)$ とすると、$\exists B' \in \mathcal{B}(x)\big(B' \subset B \cap \varphi(s(n)) \subset B_{s(n)}\big)$

定理 5.1.6 より、$\forall n \in \mathbb{N} \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B_n)$ である。

ゆえに補題 7.3.3 より、$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{B}(x)$ と同じ近傍系を与える基本近傍系である。 ■

***Thm.* 7.7.2. Bolzano-Weierstrass の定理**

第一可算でコンパクトな位相空間 X は、点列コンパクトである。

Proof.

X 上の点列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ について、$(F_k)_{k\in\mathbb{N}}, F_k = \{x_l \mid l \in \mathbb{N} \wedge l \geq k\} \subset X$ を考える。

$\bigcap\big\{\overline{F_k} \mid k \in \mathbb{N}\big\} = \varnothing$ とすると、補題 7.4.4 より $\exists n \in \mathbb{N}\big(n > 0 \wedge \bigcap\big\{\overline{F_{k_m}} \mid m \leq n\big\} = \varnothing\big)$ である。

$x_{s(k_n)} \in \bigcap\big\{\overline{F_k} \mid k \in \mathbb{N}\big\}$ であるので反する。背理法より $\bigcap\big\{\overline{F_k} \mid k \in \mathbb{N}\big\} \neq \varnothing$ を得る。

$\exists a \in X \forall k \in \mathbb{N}\big(a \in \overline{F_k}\big)$ であるので、補題 7.7.1 の点列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて $\forall j \in \mathbb{N}(F_k \cap B_j(a) \neq \varnothing)$ である。

ここで、以下の写像 $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を考える。

$$x_{\varphi(0)} \in B_0(a)$$
$$x_{\varphi(s(n))} \in F_{s(\varphi(n))} \cap B_n(a)$$

$\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ は部分列であり、a に収束する。 ■

***Thm.* 7.7.3. 第一可算空間における点連続と収束**

第一可算な位相空間 X、位相空間 X'、点 $x \in X$、写像 $f\colon X \to X'$ について、以下の 2 つは同値である。

1. f が x で連続
2. x に収束する任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する。

Proof.

1. → 2. は、定理 7.3.11 と、点列がネットであることより明らか。

2. → 1. を示す。補題 7.7.1 の与える基本近傍系を $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする。

$$\exists N' \in \mathcal{N}(f(x)) \forall n \in \mathbb{N} \exists y \in B_n(x)(f(y) \notin N')$$

定理 2.1.3 より、写像 $g\colon \mathbb{N} \to X, g(n) \in B_n(x) \setminus f^{-1}(N')$ が存在する。

今、g から構成される点列は x に収束するが、$f \circ g$ から構成される点列は $f(x)$ に収束しない。 ■

***Def.* 7.7.2. 可分**

位相空間 X について、X の可算部分 Y が存在して $\overline{Y} = X$ であるとき、X は可分であると呼ぶ。

***Def.* 7.7.3. 第二可算**

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、$\mathcal{O}$ が可算な開基から与えられるとき、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は第二可算であると呼ぶ。

***Thm.* 7.7.4. 第二可算空間の満たす性質**

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第二可算ならば、以下の 3 つを満たす。

- X は第一可算
- X は Lindelöf
- X は可分

Proof.

第一可算性を示す。
定理 7.3.5 より、開基の部分となる基本近傍系をとれる。

Lindelöf 性を示す。
第二可算性より、点列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は開基である。
開被覆 C について、定義 7.1.2 より $\forall x \in X \exists O \in C \exists n \in \mathbb{N}(x \in B_n \land B_n \subset O)$
定理 2.1.3 より $n(x)$ を考える。このとき、$\left\{B_{n(x)} \mid x \in \mathbb{N}\right\} = \{B_m \mid m \in \mathrm{Im}(n)\}$ は開被覆である。
$\forall m \in \mathrm{Im}(n) \exists O \in C(B_m \subset O)$ より定理 2.1.3 の与える $O(m)$ が与えられて、$C' \coloneqq \{O(m) \mid m \in \mathrm{Im}(n)\}$ とする。
今、$X = \bigcup \{B_m \mid m \in \mathrm{Im}(n)\} \subset \bigcup C' \subset X$ より、C' は開被覆であり、定義より C の可算部分である。

可分性を示す。
第二可算性より、可算な開基 $\mathcal{B}$ が存在する。
$\forall B \in \mathcal{B} \setminus \{\varnothing\} \exists x_B \in X(x_B \in B)$ であり、$M \coloneqq \{x_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\varnothing\}\}$ を考えると、M は可算である。
閉包は閉集合より $X \setminus \overline{M}$ は開集合である。
ここで、$\exists x \in X \setminus \overline{M}$ と仮定する。
$\exists B' \in \mathcal{B}\big(x \in B' \subset X \setminus \overline{M}\big)$ である。
したがって、$x_{B'} \in X \setminus \overline{M} \subset X \setminus M$ より矛盾。背理法より示される。 ■

7.8 順序位相

***Lem.* 7.8.1.** 順序の開基

空でない全順序集合 $(X, \leq)$ について、以下を満たす新たな 2 元 $\infty, -\infty$ を加えた集合 $\hat{X}$ を考える。

$$\forall x \in X(-\infty < x \land x < \infty)$$
$$\hat{X} \coloneqq X \cup \{\infty, -\infty\}$$

このとき、以下の集合系 $\mathcal{B}$ は X の開基である。

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{]a, b[\mid (a, b) \in \hat{X} \times \hat{X} \right\}$$

Proof.

$\forall B \in \mathcal{B}(-\infty \notin B \land \infty \notin B)$ であるので、$\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ である。

第一式を示す。$\forall x \in X(x \in]-\infty, \infty[)$ である。

第二式を示す。$\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \hat{X}$ について、$]a_1, b_1[\cap]a_2, b_2[=]\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}[\in \mathcal{B}$ である。 ■

***Lem.* 7.8.2.** 最大がない場合の順序の開基

空でない全順序集合 $(X, \leq)$ について、X が最大元、最小元をともに持たないとき、以下の集合系 $\mathcal{B}'$ は開基である。

$$\mathcal{B}' \coloneqq \{]a, b[\mid (a, b) \in X \times X\}$$

このとき、補題 7.8.1 から得る開集合系と、$\mathcal{B}'$ の定める開集合系、この 2 つは一致する。

Proof.

■

***Def.* 7.8.1.** 順序空間

補題 7.8.1 と定義 7.1.2 より定まる位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を順序空間と呼ぶ。

***Lem.* 7.8.3.**

順序空間 $(X, \mathcal{O})$ について、開区間は開集合であり、閉区間は閉集合である。

Proof.

定義より開区間は開集合である。

閉区間 $[a, b]$ を考える。$X \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[\in \mathcal{O}$ より成り立つ。 ■

***Lem.* 7.8.4.**

順序空間 $(X, \mathcal{O})$ と、X の閉集合 F_1, F_2 を考える。

$F_1 \cap F_2 = \varnothing$ であるとき、$\forall x \in F_1$ について以下の全てを満たす $a, b \in \hat{X}$ が存在する。

- $x \in]a, b[$
- $]a, b[\cap F_2 = \varnothing$
- $]a, x[= \varnothing \lor a \in F_1 \lor (a \notin F_2 \land]a, x[\cap F_1 = \varnothing)$
- $]x, b[= \varnothing \lor b \in F_1 \lor (b \notin F_2 \land]x, b[\cap F_1 = \varnothing)$

Proof.

定理 7.4.3 より、$\exists p, q \in \hat{X}(x \in]p, q[\subset X \setminus F_1)$ である。
$]p, x[= \varnothing$ のとき、$a := p$ で成り立つ。
$\exists z \in]p, x[\cap F_1$ のとき、$a := z$ で成り立つ。
$\exists z \in]p, x[\wedge]p, x[\cap F_1 = \varnothing$ のとき、$a := z$ で成り立つ。
同様に b を定めることができて、条件を満たす。 ■

***Thm.* 7.8.5.** 順序空間は正規
順序空間は T_1 空間かつ T_4 空間である。

Proof.
$\forall x \in X$ について、補題 7.8.3 より $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{F}$ である。定理 7.5.1 より、T_1 である。

$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ として、$\forall x \in F_1$ について考える。
$x \notin F_2$ より補題 7.8.4 の条件を満たす $a_x, b_x \in \hat{X}$ が存在する。
ここで、$U := \bigcup \{]a_x, b_x[\mid x \in F_1\}$ を考える。明らかに $F_1 \subset U \wedge U \in \mathcal{O}$ である。

$\forall y \in F_2$ を考える。$y \notin F_1 = \overline{F_1}$ より、$\exists (c, d) \in \hat{X} \times \hat{X}(]c, d[\cap F_1 = \varnothing)$ である。

$F_1' := \{x \in F_1 \mid x < y \wedge]a_x, b_x[\cap]c, d[\neq \varnothing\}$ とする。
$\exists x_1, x_2 \in F_1'(x_1 < x_2)$ とすると、c の定義と補題 7.8.4 第二式より $x_1 < x_2 < c < b_{x_1} \wedge b_{x_1} \notin F_1$ である。
これは補題 7.8.4 第四式に反する。ゆえに、$\forall x_1, x_2 \in F_1'(x_1 = x_2)$ である。
$\exists x \in X(F_1' = \{x\})$ のときを考える。補題 7.8.4 第四式より $b_x < y$ である。$a' := b_x$ とする。
$F_1' = \varnothing$ であるとき、$a' := c$ とする。

同様に b' を定めると、$y \notin U$ より $y \in]a', b'[\wedge]a', b'[\cap U = \varnothing$ である。定理 7.4.3 より $y \notin \overline{U}$
よって、$F_2 \subset X \setminus \overline{U}$ ■

8 一様空間

8.1 近縁

***Def.* 8.1.1.** 集合算
集合 X と、集合 $A, B \subset X \times X$ について、以下で定める略記 $A \circ B, A^{-1}$ を考える。

$$A \circ B := \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X((x, y) \in A \wedge (y, z) \in B)\}$$
$$A^{-1} := \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in A\}$$

***Def.* 8.1.2.** 基本近縁系

空でない集合 X について、以下を満たす集合系 $\mathcal{V} \subset \mathfrak{P}(X \times X)$ を基本近縁系と呼ぶ。

$$\begin{gathered}
\mathcal{V} \neq \varnothing \\
\forall V \in \mathcal{V} \forall x \in X((x,x) \in V) \\
\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V} \exists V \in \mathcal{V}(V \subset V_1 \cap V_2) \\
\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V) \\
\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}\bigl(W \subset V^{-1}\bigr)
\end{gathered}$$

***Lem.* 8.1.1.** 基本近縁系の三角性

空でない集合 X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下を満たす。

$$\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}\bigl(W \cup W^{-1} \subset W^{-1} \circ W \subset \bigl(W^{-1} \circ W\bigr) \circ W \subset V\bigr)$$

Proof.

定義 8.1.2 第四式より $\exists S \in \mathcal{V}(S \circ S \subset V)$ であり、$\exists R \in \mathcal{V}(R \circ R \subset S)$ である。

定義 8.1.2 第五式より $\exists T \in \mathcal{V}\bigl(T \subset R^{-1}\bigr)$ である。

定義 8.1.2 第三式より $\exists W \in \mathcal{V}(W \subset S \cap T)$ である。

ゆえに、$\bigl(W^{-1} \circ W\bigr) \circ W \subset \bigl(T^{-1} \circ T\bigr) \circ S \subset (R \circ R) \circ S \subset S \circ S \subset V$

定義 8.1.2 第二式より $(z,z) \in W$ であるので、その他の包含関係も成り立つ。 ■

***Def.* 8.1.3.** 近縁系

空でない集合 X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下で与える集合系 $\mathcal{U}$ を近縁系と呼ぶ。

$$\mathcal{U} \coloneqq \{U \subset X \times X \mid \exists V \in \mathcal{V}(V \subset U)\}$$

***Lem.* 8.1.2.** 近縁系の一意性

空でない集合 X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ と集合系 $\mathcal{V}' \subset \mathfrak{P}(X \times X)$ について、以下を満たすとき、$\mathcal{V}'$ は基本近縁系である。

$$\begin{gathered}
\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V}(V \subset V') \\
\forall V \in \mathcal{V} \exists V' \in \mathcal{V}'(V' \subset V)
\end{gathered}$$

さらに定義 8.1.3 の定める近縁系 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}'$ は一致する。

Proof.

第一式を考える。定義 8.1.2 第一式から $\exists V \in \mathcal{V}$ より、仮定から $\exists V' \in \mathcal{V}'$

第二式を考える。$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \forall x \in X((x,x) \in V \subset V')$ より成り立つ。

第三式を考える。仮定より $\forall V_1', V_2' \in \mathcal{V}' \exists V_1, V_2 \in \mathcal{V}(V_1 \cap V_2 \subset V_1' \cap V_2')$ である。

定義 8.1.2 第三式より $\exists V \in \mathcal{V}(V \subset V_1 \cap V_2)$ であり、仮定より $\exists V' \in \mathcal{V}'(V' \subset V \subset V_1' \cap V_2')$

第四式を考える。$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V} \exists W' \in \mathcal{V}'(W' \circ W' \subset W \circ W \subset V \subset V')$ である。

第五式を考える。$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V} \exists W' \in \mathcal{V}'\bigl(W' \subset V' \subset V^{-1} \subset V'^{-1}\bigr)$ である。

$\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} \exists V' \in \mathcal{V}'(V' \subset V \subset U)$ である。ゆえに、$U \in \mathcal{U}'$ である。

$\forall U' \in \mathcal{U}' \exists V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V}(V \subset V' \subset U')$ である。ゆえに、$U' \in \mathcal{U}$ である。 ■

***Lem.* 8.1.3. 近縁系は基本近縁系**

近縁系 $\mathcal{U}$ は基本近縁系である。さらに $\mathcal{U}$ から定義 8.1.3 より定まる近縁系は、$\mathcal{U}$ に一致する。

Proof.

定義より $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V}(V \subset U)$ である。

$\forall V \in \mathcal{V}$ について、$V \in \mathcal{U}$ である。

補題 8.1.2 より成り立つ。 ■

***Lem.* 8.1.4. 近縁系の開性**

空でない集合 X と、X の近縁系 $\mathcal{U}$ について、以下を満たす。

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U} \forall (x, y) \in V \exists W \in \mathcal{U}(W[y] \subset V[x] \land V \subset U)$$

Proof.

$V := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists S \in \mathcal{U}(S[x] \times S[y] \subset U)\}$ を考える。定義より $V \subset U$ である。

補題 8.1.1 より、$\exists T \in \mathcal{U}\big(\big(T^{-1} \circ T\big) \circ T \subset U\big)$ である。

$\forall (s, t) \in T$ について、$\forall (w, z) \in T[s] \times T[t]\big((w, z) \in \big(T^{-1} \circ T\big) \circ T \subset U\big)$ であるので、$(s, t) \in V$

$T \subset V$ より、$V \in \mathcal{U}$ である。

$\forall (x, y) \in V$ について、$\exists S \in \mathcal{U}(S[x] \times S[y] \subset U)$ である。

定義 8.1.2 第四式より $\exists W \in \mathcal{U}(W \circ W \in S)$ である。

$\forall z \in W[y]$ について $W[z] \subset S[y]$ より、$W[x] \times W[z] \subset S[x] \times S[y] \subset U$、すなわち $z \in V[x]$ である。 ■

***Def.* 8.1.4. 一様空間**

空でない集合 X と、X 上の近縁系 $\mathcal{U}$ について、順序対 $(X, \mathcal{U})$ を一様空間と呼ぶ。または単に X と書き、一様空間と集合どちらも表すものとする。

***Thm.* 8.1.5. 基本近縁系から定まる位相**

一様空間 $(X, \mathcal{U})$ と近縁系 $\mathcal{U}$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V}$ を考える。

X の任意の元 x について、以下で定める集合系 $\mathcal{B}(x)$ は基本近傍系である。

$$\mathcal{B}(x) := \{V[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \mid V \in \mathcal{V}\}$$

さらに、$\mathcal{B}(x)$ の与える近傍系 $\mathcal{N}(x)$ は、近縁系 $\mathcal{U}$ の与える基本近傍系 $\mathcal{N}'(x)$ に一致する。

この意味で、一様空間は位相空間である。

Proof.

第一式を示す。定義 8.1.2 第一式から、$\exists V \in \mathcal{V}(V[x] \in \mathcal{B}(x))$ である。

第二式を示す。定義 8.1.2 第二式から、$\forall V \in \mathcal{V}(x \in V[x])$ より成り立つ。

第三式を示す。定義 8.1.2 第三式から $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \exists V_1, V_2 \in \mathcal{V}(B_1 = V_1[x] \land B_2 = V_2[x])$ について、$\exists V \in \mathcal{V}(V[x] \subset (V_1 \cap V_2)[x] = B_1 \cap B_2 \land V[x] \in \mathcal{B}(x))$

第四式を示す。$\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists V \in \mathcal{V}(B = V[x])$ である。

定義 8.1.2 第四式から $\exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$ であり、$\exists C \coloneqq W[x] \in \mathcal{B}(x)$
$\forall y \in C \exists D = W[y] \in \mathcal{B}(y)$ である。
$\forall z \in D((x,y),(y,z) \in W)$ より $(x,z) \in V$ すなわち $z \in V[x] = B$ である。よって $D \subset B$ となる。

$\forall N \in \mathcal{N}(x)$ について $\exists V \in \mathcal{V}(V[x] \subset N)$ であり、$U = V \cup \{(x,y) \mid y \in N\} \in \mathcal{U}$ かつ $N = U[x]$ であるので、$N \in \mathcal{N}'(x)$
$\forall N' \in \mathcal{N}'(x)$ について $\exists U \subset X \times X \exists V \in \mathcal{V}(V \subset U \land U[x] = N')$ であり、$V[x] \subset U[x] = N' \in \mathcal{N}(x)$ ■

***Thm.* 8.1.6. 一様空間は T_3**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ は、T_3 空間である。

Proof.
$\forall x \in X \forall B \in \mathcal{B}(x)$ を考える。
定義より $\exists U \in \mathcal{U}(U[x] = B)$ であり、補題 8.1.1 より $\exists V \in \mathcal{U}\big(V^{-1} \circ V \subset U\big)$
定義 8.1.2 第五式より、$\exists W \in \mathcal{U}\big(W \subset V^{-1}\big)$ である。
$W[x] \in \mathcal{N}(x)$ より、$\exists D \in \mathcal{B}(x)(D \subset W[x])$ である。

$\forall y \in \overline{D}$ について考える。
定理 7.4.3 より、$\exists z \in X(z \in D \cap W[y] \subset W[x] \cap W[y])$ である。
$(x,z),(y,z) \in W$ より、$(x,y) \in U$ である。
したがって、$\overline{D} \subset U[x] = B$

定理 7.5.6 より成り立つ。 ■

***Def.* 8.1.5. 一様連続**
一様空間 $(X,\mathcal{U}),(X',\mathcal{U}')$ と写像 $f\colon X \to X'$ について、f が以下を満たすとき、f は一様連続であると呼ぶ。

$$\forall U' \in \mathcal{U}' \exists U \in \mathcal{U}((x,y) \in U \to (f(x),f(y)) \in U')$$

***Lem.* 8.1.7. 基本近縁系と一様連続**
一様空間 $(X,\mathcal{U}),(X',\mathcal{U}')$ と写像 $f\colon X \to X'$ と、$\mathcal{U},\mathcal{U}'$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V},\mathcal{V}'$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. f は一様連続
2. $\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V}((x,y) \in V \to (f(x),f(y)) \in V')$

Proof.
1. → 2. を示す。
$\forall V' \in \mathcal{V}' \subset \mathcal{U}' \exists U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V}((x,y) \in V \subset U \to (f(x),f(y)) \in V')$ より明らか。

2. → 1. を示す。
$\forall U' \in \mathcal{U}' \exists V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}((x,y) \in V \to (f(x),f(y)) \in V' \subset U')$ より明らか。 ■

***Def.* 8.1.6. 一様同型**

一様空間 X, X' と写像 $f\colon X \to X'$ について、f が全単射かつ f と f^{-1} がともに一様連続であるとき、f を一様同型写像と呼ぶ。

また、一様同型写像 $f\colon X \to X'$ が存在するとき、X と X' は一様同型であると呼ぶ。

***Thm.* 8.1.8. 一様連続は連続**

一様空間 $(X,\mathcal{U}), (X',\mathcal{U}')$ について、一様連続な写像 $f\colon X \to X'$ は連続である。

Proof.

$\forall x \in X \forall N' \in \mathcal{N}(f(x))$ について、定義より $\exists U' \in \mathcal{U}'(N' = U'[f(x)])$ である。

一様連続の定義より $\exists U \in \mathcal{U}((x, y) \in U \to (f(x), f(y)) \in U')$ である。

今、$U[x] \in \mathcal{N}(x)$ であり、$f(U[x]) \subset U'[f(x)] = N'$ より点連続。

$\forall x \in X$ で成り立つので、定理 7.3.12 より示される。 ■

***Cor.* 8.1.9.**

一様同型写像は同相写像。

***Lem.* 8.1.10.**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、X の空でない部分集合 A を考える。

$\mathcal{U}$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下の集合系 $\mathcal{V}'$ は集合 A の基本近縁系である。

$$\mathcal{V}' := \{(A \times A) \cap V \mid V \in \mathcal{V}\}$$

さらに、$\mathcal{V}'$ の与える近縁系と、$\mathcal{U}$ からこの補題により与えられる基本近縁系 $\mathcal{U}'$、この 2 つは一致する。

Proof.

明らか。 ■

***Def.* 8.1.7. 部分一様空間**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、X の空でない部分集合 A を考える。補題 8.1.10 の与える基本近縁系の与える近縁系 $\mathcal{U}'$ について、一様空間 $(A,\mathcal{U}')$ を部分一様空間と呼ぶ。

8.2 Cauchy

***Def.* 8.2.1. Cauchy**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ について、X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、Cauchy であると呼ぶ。

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}((x_\mu, x_\tau) \in U)$$

***Lem.* 8.2.1. 基本近縁系と Cauchy**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、$\mathcal{U}$ を与える X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Cauchy
2. $\forall V \in \mathcal{V} \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}((x_\mu, x_\tau) \in V)$

Proof.

1. → 2. は、$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ より明らか。

2. $\to$ 1. を示す。

$\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}((x_\mu, x_\tau) \in V \subset U)$ ■

Cor. **8.2.2.**

Cauchy ネットの部分ネットは Cauchy である。

Lem. **8.2.3. 一様連続と Cauchy**

一様空間 $(X,\mathcal{U}), (X',\mathcal{U}')$ と、一様連続写像 $f\colon X \to X'$ を考える。

このとき、X 上の Cauchy ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は Cauchy である。

Proof.

$\forall U' \in \mathcal{U}'$ を考える。

一様連続性から、$\exists U \in \mathcal{U}((x,y) \in U \to (f(x), f(y)) \subset U')$ である。

Cauchy より、$\exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_x}((x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in U)$ である。

ゆえに $(f(x_{\lambda_1}), f(x_{\lambda_2})) \in U'$ である。 ■

Thm. **8.2.4. 収束ネットは Cauchy**

収束するネットは Cauchy である。

Proof.

$\forall V \in \mathcal{V}$ について、補題 8.1.1 より $\exists W \in \mathcal{V}\big(W^{-1} \circ W \subset V\big)$

定義 7.3.3 より $\exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset W[a]\Big)$

a に収束するとすると、$\forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}((a, x_\mu), (a, x_\tau) \in W)$ であるので、$(x_\lambda, x_\tau) \in V$ ■

Lem. **8.2.5. 収束する部分を持つ Cauchy ネット**

一様空間 X と X 上の Cauchy ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$a \in X$ に収束する部分ネットを持つならば、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は a に収束する。

Proof.

定義 8.1.2 第四式より $\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$

収束より、$\exists \mu_0 \in M\Big(\big(x_{\lambda(\mu)}\big)_{\mu\in M_{\succcurlyeq\mu_0}} \subset W[a]\Big)$

Cauchy ネットより、$\exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}((\lambda_1, \lambda_2) \in W)$

定義 4.4.6 より $\exists \mu_1 \in M(\lambda_0 \preccurlyeq \lambda(\mu_1))$ であり、有向集合より $\exists \mu_2 \in M(\mu_0 \preccurlyeq \mu_2 \wedge \mu_1 \preccurlyeq \mu_2)$

よって $\lambda(\mu_2) \preccurlyeq \lambda$ ならば $(a, \lambda(\mu_2)), (\lambda(\mu_2), \lambda) \in W$ である。ゆえに $(a, x_\lambda) \in V$ すなわち $x_\lambda \in V[a]$ ■

Def. **8.2.2. 全有界**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が以下を満たすとき、全有界であると呼ぶ。

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists A \subset X\Big(|A| < \infty \wedge \bigcup \{U[x] \mid x \in A\} = X\Big)$$

Cor. **8.2.6. Cauchy 列は全有界**

Cauchy 列は全有界である。

***Thm.* 8.2.7. ネットによる全有界の特徴づけ**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、近縁系 $\mathcal{U}$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下の 4 つは同値である。

1. X は全有界
2. $\forall V \in \mathcal{V} \exists A \subset X(|A| < \infty \wedge \bigcup\{V[x] \mid x \in A\} = X)$
3. X 上の任意の普遍ネットは Cauchy である。
4. X 上の任意のネットは Cauchy な部分ネットを持つ。

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。
$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ より明らか。

2. $\to$ 3. を示す。
X 上の普遍ネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について考える。
補題 8.1.1 より $\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}\big(W^{-1} \circ W \subset V\big)$
全有界性より $\exists n \in \mathbb{N}(n \neq 0 \wedge \bigcup\{W[x(m)] \mid m \in n\} = X)$ を得る。
普遍ネットの定義より $\forall m \in \mathbb{N} \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset W[x(m)] \vee (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset X \setminus W[x(m)]\Big)$ である。
定理 6.1.12 より、$\{\lambda_0(m) \mid m \in n\}$ の上界 λ_1 が存在する。
$\forall m \in \mathbb{N}\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_1}} \subset X \setminus W[x(m)]\Big)$ とすると、全有界の定義より矛盾。
背理法より、$\exists m \in \mathbb{N}\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_1}} \subset W[x(m)]\Big)$
ゆえに $\forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_1}((x[m], x_\mu), (x[m], x_\tau))$ すなわち $(x_\mu, x_\tau) \in V$

3. $\to$ 4. を示す。
仮定と定理 4.4.8 より明らか。

4. $\to$ 1. を示す。
全有界でないと仮定する。X の任意の有限部分 A について、$\bigcup\{U[x] \mid x \in A\} \neq X$ となる近縁 U が存在する。
$P \coloneqq \{A \subset X \mid |A| < \infty \wedge A \neq \varnothing\}$ について、$(P, \subset)$ は有向集合であり、全有界でないことから $\forall A \in P \exists x \in X \setminus \bigcup\{U[x] \mid x \in A\}$ である。このようなネット $(x_A)_{A \in P}$ を考える。

仮定より Cauchy な部分ネット $\big(x_{\varphi(\mu)}\big)_{\mu \in M}$ を持つ。
ゆえに $\exists \mu_0 \in M \forall \mu \in M_{\succcurlyeq \mu_0}\big(x_{\varphi(\mu)} \in U[x_{\varphi(\mu_0)}]\big)$ である。
$\big\{x_{\varphi(\mu_0)}\big\} \in P$ であることと、定義 4.4.6 と有向性より、$\exists \mu_1 \in M\big(\mu_0 \preccurlyeq \mu_1 \wedge \big\{x_{\varphi(\mu_0)}\big\} \subset \varphi(\mu_1)\big)$ となる。
すなわち、$x_{\varphi(\mu_1)} \in U[x_{\varphi(\mu_0)}] \subset \bigcup\{U[x] \mid x \in \varphi(\mu_1)\}$ であるが、このネットの定義に反する。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 8.2.8. Heine-Cantor の定理**

全有界な一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、一様空間 $(X',\mathcal{U}')$ について、連続写像 $f\colon X \to X'$ は一様連続である。

Proof.

$\forall V' \in \mathcal{V}'$ について、補題 8.1.1 より $\exists W' \in \mathcal{V}'\big(W'^{-1} \circ W' \subset V'\big)$
定理 7.3.12 から $\forall x \in X \exists V \in \mathcal{V}(f(V[x]) \subset W'[f(x)])$ である。
定義 8.1.2 第四式より $\exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$
今、$\{W(V', x)[x] \mid x \in X\}$ は被覆である。
全有界性から $\exists Y \subset X \wedge |Y| < \infty$ であり $C \coloneqq \{W(V', x)[x] \mid x \in Y\}$ は被覆となる。
定義 8.1.2 第三式より $S \coloneqq \bigcap\{W(V', x) \mid x \in Y\} \in \mathcal{V}$ である。

$\forall(w,z)\in S(V')$ について、C は被覆より $\exists y\in Y(V')(w\in W(V',y)[y]\subset V(V',y)[y])$ である。
$(y,w),(w,z)\in W(V',y)$ であり、$(y,z)\in V(V',y)$ すなわち $z\in V(V',y)[y]$ である。
$w,z\in V(V',y)[y]$ より $f(w),f(z)\in f(V(V',y)[y])\subset W'(V')[f(y)]$ である。
したがって $(f(y),f(w)),(f(y),f(z))\in W'$ より $(f(w),f(z))\in V'$ ■

***Def.* 8.2.3. 完備**
一様空間 X について、X 上の任意の Cauchy なネットが収束するとき、X は完備であると呼ぶ。

***Thm.* 8.2.9. Heine-Borel の被覆定理**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ について、以下の 2 つは同値である。

1. X はコンパクトである。
2. X は全有界かつ完備である。

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
定理 7.4.5 より X 上の任意の普遍ネットは収束するので、定理 8.2.4 より Cauchy である。
定理 8.2.7 より全有界である。

定理 7.4.5 より X 上の任意の Cauchy なネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は収束する部分ネットを持つ。
補題 8.2.5 より $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は収束する。

2. $\to$ 1. を示す。
X 上の任意のネットについて、全有界性から定理 8.2.7 より Cauchy な部分ネットが存在して、完備性から収束する。定理 7.4.5 より示される。 ■

8.3 可算な一様構造

***Def.* 8.3.1. 可算一様空間**
一様空間 X が可算な基本近縁系 $\mathcal{V}$ もつとき、$(X,\mathcal{U})$ を可算一様空間と呼ぶ。

***Lem.* 8.3.1. 可算一様空間における基本近傍系の単調列**
可算一様空間 $(X,\mathcal{U})$ について、以下を満たす基本近縁系 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する。

$$\forall n\in\mathbb{N}\Big(\Big(V_{s(n)}^{-1}\circ V_{s(n)}\Big)\circ V_{s(n)}\subset V_n\Big)$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\forall(x,y)\in V_n\exists m\in\mathbb{N}(V_m[y]\subset V_n[x])$$

Proof.
可算であるので、$\mathbb{N}$ からの全射 φ が存在するような基本近縁系 $\mathcal{V}$ が存在する。

以下のように定めた V_n は条件を満たす。
まず $\varphi(0)$ について、補題 8.1.4 の定める近縁を V_0 とする。
次に $n\in\mathbb{N}(V_n\in\mathcal{U})$ として、補題 8.1.1 の定める近縁を W_n とする。
ここで $W_n\cap\varphi(s(n))$ は定義 8.1.2 第三式より近縁であるので、補題 8.1.4 の定める近縁が存在して $V_{s(n)}$ とする。

定義より、$\forall n \in \mathbb{N}(V_n \in \mathcal{U})$ である。

定義と φ の全射性より、$\forall V \in \mathcal{V} \exists n \in \mathbb{N}(V_n \subset \varphi(n) = V)$ である。

補題 8.1.2 より、同じ近縁系を与える基本近縁系である。 ■

***Thm.* 8.3.2. 可算一様空間の満たす性質**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が可算一様ならば、以下の 2 つを満たす。

- X は第一可算
- X は T_4

Proof.
第一可算性を示す。定理 8.1.5 より明らか。

T_4 であることを示す。$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ とする。
補題 8.3.1 の定める $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。
定理 7.4.3 より、$\forall x_1 \in F_1 \exists n_1 \in \mathbb{N}(V_{n_1}[x_1] \cap F_2 = \varnothing)$ である。
同様に、$\forall x_2 \in F_2 \exists n_2 \in \mathbb{N}(V_{n_2}[x_2] \cap F_1 = \varnothing)$ である。
以下の集合 U_1, U_2 を考える。定義より明らかに $F_1 \subset U_1 \wedge F_2 \subset U_2 \wedge U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ である。

$$U_1 \coloneqq \bigcup \left\{V_{s(s(n_1(x)))}[x] \mid x \in F_1\right\}$$
$$U_2 \coloneqq \bigcup \left\{V_{s(s(n_2(x)))}[x] \mid x \in F_2\right\}$$

$\exists y \in U_1 \cap U_2$ とすると、$\exists x_1 \in F_1 \exists x_2 \in F_2\big(y \in V_{s(s(n_1(x_1)))}[x_1] \cap V_{s(s(n_2(x_2)))}[x_2]\big)$ である。
$n_1(x_1) \leq n_2(x_2)$ とする。
$(x_1, y), (x_2, y) \in V_{s(s(n_1(x_1)))}$ より、$(x_1, y), (y, x_2) \in V_{s(n_1(x_1))}$ であるので、$(x_1, x_2) \in V_{n_1(x_1)}$ である。
$x_2 \in V_{n_1(x_1)}[x_1] \cap F_2$ より、n_1 の定義に反する。

$n_1(x_1) > n_2(x_2)$ であるときも、同様に n_1 の定義に反する。
したがって、$U_1 \cap U_2 = \varnothing$ である。 ■

***Thm.* 8.3.3. 可算一様空間について**
可算一様空間 X について、以下の 3 つは同値である。

1. X は第二可算
2. X は Lindelöf
3. X は可分

Proof.
1. $\to$ 2. は、定理 7.7.4 より成り立つ。

補題 8.3.1 の定める $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

2. $\to$ 3. を示す。
$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times X$ について、$\forall z \in V_n[x] \exists m \in \mathbb{N}(V_m[z] \subset V_n[x])$ であるので、$V_n[x] \in \mathcal{O}$ である。
$n \in \mathbb{N}$ について、集合系 $D_n \coloneqq \{V_n[x] \mid x \in X\}$
D_n は開被覆であるので、仮定より可算部分 Y_n が存在して、$\{V_n[y] \mid y \in Y\}$ は開被覆である。

$Y \coloneqq \bigcup \{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考える。定理 6.2.3 より Y は可算である。
$\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}$ について、Y_n は開被覆より $\exists y \in Y_n\bigl(x \in V_{s(n)}[y]\bigr)$ である。
ゆえに $y \in V_n[x] \cap Y$ であるので、$x \in \overline{Y}$

3. $\to$ 1. を示す。仮定より X の可算部分 Y が存在して、$\overline{Y} = X$ である。
以下の集合 $\mathcal{B}$ を考える。

$$\mathcal{B} \coloneqq \{V_n[y] \mid (n, y) \in \mathbb{N} \times Y\}$$

定理 6.2.3 より、$\mathcal{B}$ は可算。
$\forall (n, y) \in \mathbb{N} \times Y$ について、$\forall z \in V_n[y] \exists m \in \mathbb{N}(V_m[z] \subset V_n[y])$ であるので、$V_n[y] \in \mathcal{O}$ である。

$\forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O$ について、定理 7.3.6 より $\exists n \in \mathbb{N}(V_n[x] \subset O)$ である。
$x \in \overline{Y}$ より $\exists y \in Y\bigl(y \in V_{s(s(n))}[x]\bigr)$ である。
$V_{s(s(n))} \subset V_{s(n)}^{-1}$ より、$x \in V_{s(n)}[y]$ である。
$\forall z \in V_{s(n)}[y]$ について $(x, x), (x, y), (y, z) \in V_{s(n)}$ より $(x, z) \in V_n$、すなわち $V_{s(n)}[y] \subset V_n[x] \subset O$
補題 7.1.2 より、$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基である。 ■

***Thm.* 8.3.4.** **可算一様空間における完備**
可算一様空間 X について、X 上の任意の Cauchy 列が収束するならば完備である。

Proof.
補題 8.3.1 の主張する基本近縁系 $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する。
Cauchy なネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\forall n \in \mathbb{N} \exists \lambda_0(n) \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0(n)}\bigl((x_\mu, x_\tau) \in V_{s(n)}\bigr)$
$\bigl(x_{\lambda_0(k)}\bigr)_{k \in \mathbb{N}}$ は Cauchy な点列であるので、仮定より $\exists a \in X$ に収束する。
すなわち $\exists l \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}_{\geq l}\bigl((a, x_{\lambda_0(k)}) \in V_{s(n)}\bigr)$
$j \coloneqq \max\{l, n\}$ について $\forall \mu \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0(j)}\bigl((a, x_{\lambda_0(j)}), (x_{\lambda_0(j)}, x_\mu) \in V_{s(n)}\bigr)$ である。
したがって $(a, x_\mu) \in V_n$ ■

9 代数

9.1 マグマ

***Def.* 9.1.1. 二項演算**
集合 X について、写像 $\cdot\colon X^2 \to X$ を、X 上の二項演算、または X 上の演算と呼ぶ。
$\cdot(a,b)$ を誤解のない範囲で $a \cdot b$ とも表す。

***Rem.* 9.1.1. 二項演算と両立する同値関係**
集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、誘導される X^2 上の同値関係 $\sim_2$ を以下で定める。

$$(x_1, x_2) \sim_2 (y_1, y_2) :\leftrightarrow x_1 \sim y_1 \wedge x_2 \sim y_2$$

X 上の二項関係 $\cdot$ が同値関係 $\sim$ と両立するとは、$\cdot$ が $\sim, \sim_2$ と両立することである。

***Def.* 9.1.2. マグマ**
集合 M と M 上の演算 $\cdot$ について、順序対 $(M, \cdot)$ をマグマと呼ぶ。または単に M と書き、マグマを表すものとする。

***Def.* 9.1.3. 可換マグマ**
マグマ $(M, +)$ が以下を満たすとき、M を可換マグマと呼ぶ。可換であることを明示的に $+$ で表す。

$$\forall x, y \in M(x + y = y + x)$$

9.2 マグマと準同型

***Def.* 9.2.1. マグマ準同型**
マグマ $(M_1, \cdot_{M_1}), (M_2, \cdot_{M_2})$ について以下を満たす写像 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ が存在するとき、φ をマグマ準同型写像、または単にマグマ準同型と呼ぶ。

$$\forall x, y \in M_1(\varphi(x) \cdot_{M_2} \varphi(y) = \varphi(x \cdot_{M_1} y))$$

また、$(M_1, \cdot_{M_1}) = (M_2, \cdot_{M_2})$ であるとき、マグマ自己準同型と呼ぶ。

***Cor.* 9.2.1.**
マグマ M_1, M_2, M_3 と、マグマ準同型 $f\colon M_1 \to M_2, g\colon M_2 \to M_3$ について、合成写像 $g \circ f$ はマグマ準同型である。

***Def.* 9.2.2. 埋め込み**
単射なマグマ準同型を埋め込みと呼ぶ。

***Def.* 9.2.3. マグマ同型**
全単射なマグマ準同型写像を、マグマ同型写像、または単にマグマ同型と呼ぶ。

***Cor.* 9.2.2.**
マグマ M について、恒等写像 id_M はマグマ同型である。

***Def.* 9.2.4.** マグマ準同型の全体

マグマ M_1, M_2 について、M_1 から M_2 へのマグマ準同型写像全体のなす集合を、$\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ と表す。
また、自己準同型写像の全体を $\mathrm{End}(M) \coloneqq \mathrm{Hom}(M, M)$ と表す。

9.3 マグマと準同型定理

***Def.* 9.3.1.** 部分マグマ

マグマ $(M, \cdot)$ と、集合 S、以下を満たす制限写像 $\cdot$ について、順序対 $(S, \cdot)$ を M の部分マグマと呼ぶ。

$$S \subset M \land \forall x, y \in S(x \cdot y \in S)$$

***Cor.* 9.3.1.**

マグマ M_1, M_2 と、マグマ準同型 $f\colon M_1 \to M_2$ について、像 $f(M_1)$ は M_2 の部分マグマである。

***Def.* 9.3.2.** 商マグマ

マグマ $(M, \cdot)$ を考える。
演算 $\cdot$ と両立する同値関係 $\sim$ について、定理 3.3.4 より定める演算 $\cdot'$ が存在する。
このとき、マグマ $(M/\sim, \cdot')$ をマグマ M の商マグマと呼ぶ。

***Cor.* 9.3.2.**

マグマ $(M, \cdot)$ と、その商マグマ $(M/\sim, \cdot)$ について、商写像 $[]$ はマグマ準同型である。

***Thm.* 9.3.3.** マグマ準同型定理

マグマ $(M_1, \cdot_{M_1}), (M_2, \cdot_{M_2})$ とマグマ準同型 $f\colon M_1 \to M_2$、および f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、マグマ同型 $\overline{f}\colon (M_1/\sim_f, \cdot) \to (\mathrm{Im}(f), \cdot_{M_2})$ が存在する。

Proof.

定理 3.3.6 より全単射な $\overline{f}$ が存在して、$f = \overline{f} \circ []$
ゆえに、

$$\overline{f}([x] \cdot [y]) = \overline{f}([x \cdot_{M_1} y]) = f(x \cdot_{M_1} y) = f(x) \cdot_{M_2} f(y) = \overline{f}([x]) \cdot_{M_2} \overline{f}([x])$$

したがってマグマ準同型。 ■

9.4 半群

***Def.* 9.4.1.** 半群

マグマ $(S, \cdot)$ が以下を満たすとき、半群と呼ぶ。

$$\forall x, y, z \in S((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

***Thm.* 9.4.1.** 一般結合法則

半群 $(S, \times)$ について、S の 2 以上の $n \in \mathbb{N}$ コの元の演算結果 $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_{n-1}$ は、括弧の付け方によらず $(\cdots(a_0 \times a_1) \times \cdots \times a_{n-1})$ に等しい。

Proof.

帰納的に示される。 ■

***Def.* 9.4.2. 可換半群**

半群が可換マグマであるとき、可換半群と呼ぶ。

***Thm.* 9.4.2. 一般交換法則**

可換半群 $(S,+)$ と点列 $a\colon n \to S$ を考える。任意の全単射 $\sigma\colon n \to n$ について、以下が成り立つ。

$$a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n-1)} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

Proof.

帰納的に示される。 ■

***Cor.* 9.4.3.**

半群の部分マグマは半群である。

***Cor.* 9.4.4.**

半群の商マグマは半群である。

9.5 モノイド

***Def.* 9.5.1. モノイド**

半群 $(M,\cdot)$ が以下を満たすとき、モノイドと呼ぶ。

$$\exists e \in M \forall x \in M (e \cdot x = x \cdot e = x)$$

***Lem.* 9.5.1.**

上の定義の主張する e は群に対して一意に定まる。

Proof.

e_1, e_2 の二つが存在するとすると、直ちに矛盾する。

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2$$

■

***Def.* 9.5.2. 単位元**

補題 9.5.1 より一意に定まる e をモノイドの単位元と呼ぶ。

モノイド M の単位元であることを明示するために、e_M とも表す。

***Def.* 9.5.3. 可逆元の全体**

モノイド $(M,\cdot)$ について、集合 $M^\times$ を以下のように定義する。

$$M^\times = \{x \in M \mid \exists y \in M (x \cdot y = y \cdot x = e)\}$$

また、$M^\times$ の元を可逆元と呼ぶ。

***Lem.* 9.5.2.**

定義 9.5.3 の主張する元 y は元 x に対して一意に定まる。

Proof.

y_1, y_2 の二つが存在するとすると、直ちに矛盾する。

$$y_1 = e \cdot y_1 = (y_2 \cdot x) \cdot y_1 = y_2 \cdot (x \cdot y_1) = y_2 \cdot e = y_2$$

■

***Def.* 9.5.4. 逆元**

補題 9.5.2 より一意に定まる y を元 x の逆元と呼び、x^{-1} で表す。

さらに、$x \cdot y^{-1}$ を x/y と略記する。

***Cor.* 9.5.3.**

モノイド M とその単位元 e について、

$$e^{-1} = e \wedge \forall x \in M^{\times} \left(\left(x^{-1} \right)^{-1} = x \right)$$

***Def.* 9.5.5. 可換モノイド**

モノイドが可換マグマであるとき、可換モノイドと呼ぶ。

可換モノイドの場合、可換であることを明示的に、単位元を 0、逆元を $-x$、演算 x/y を $x - y$ とも表す。

9.6 モノイドと準同型

***Def.* 9.6.1. モノイド準同型**

モノイド M_1, M_2 について、マグマ準同型 $\varphi \colon M_1 \to M_2$ が以下を満たすとき、φ をモノイド準同型写像、または単にモノイド準同型と呼ぶ。

$$\varphi(e_{M_1}) = e_{M_2}$$

***Cor.* 9.6.1. モノイド準同型の合成**

モノイド M_1, M_2, M_3 と、モノイド準同型 $f \colon M_1 \to M_2, g \colon M_2 \to M_3$ について、合成写像 $g \circ f$ はモノイド準同型である。

***Def.* 9.6.2. 核**

モノイド準同型 $\varphi \colon M_1 \to M_2$ について、以下の原像を核と呼び、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ と表す。

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \coloneqq \varphi^{-1}(\{e_{M_2}\})$$

***Def.* 9.6.3. モノイド同型**

全単射なモノイド準同型写像を、モノイド同型写像、または単にモノイド同型と呼ぶ。

***Thm.* 9.6.2. 自己写像の全体**

集合 X について、順序対 $\left(X^X, \circ \right)$ はモノイドである。

Proof.

自明にマグマである。系 2.1.2 より、半群。

id_X は単位元となるので、モノイドである。 ■

***Thm.* 9.6.3. 自然数は可換モノイド**
$(\mathbb{N}, +)$ は可換モノイドである。
$(\mathbb{N}, \times)$ は可換モノイドである。

Proof.
補題 5.3.3、補題 5.3.4、補題 5.3.6 より、$(\mathbb{N}, +)$ は可換モノイドである。

補題 5.4.6、補題 5.4.3、補題 5.4.5 より、$(\mathbb{N}, \times)$ は可換モノイドである。 ■

9.7 モノイドと準同型定理

***Def.* 9.7.1. 部分モノイド**
モノイド M の部分マグマ A が、モノイドをなすとき、A を部分モノイドと呼ぶ。

***Cor.* 9.7.1. 部分モノイドの判定**
モノイド M の部分マグマ A について、A が部分モノイドであることは以下が成り立つことと必要十分である。

$$e \in A$$

***Cor.* 9.7.2.**
モノイド M について、$M^{\times}$ は部分モノイドである。

***Cor.* 9.7.3.**
モノイド準同型 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ について、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は M の部分モノイドである。

***Cor.* 9.7.4.**
モノイドの商マグマはモノイドである。$[e]$ を単位元として持つ。

***Thm.* 9.7.5. モノイド準同型定理**
モノイド M_1, M_2 と、モノイド準同型 $f\colon M_1 \to M_2$、f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、モノイド同型 $\overline{f}\colon M_1/\sim_f \to \mathrm{Im}(f)$ が存在する。

Proof.
$\mathrm{Im}(f)$ は M_2 の部分モノイドである。
定理 9.3.3 より、得る $\overline{f}$ はマグマ同型。
今、$\overline{f}([e_{M_1}]) = f(e_{M_1}) = e_{M_2}$ であるので、示される。 ■

***Thm.* 9.7.6. 自己準同型の全体**
マグマ M について、順序対 $(\mathrm{End}(M), \circ)$ はモノイド $\left(X^X, \circ\right)$ の部分モノイドである。

Proof.
自明に部分である。
系 9.6.1 よりマグマである。系 2.1.2 より、半群。
id_X は単位元となるので、モノイドである。 ■

9.8 指数と総乗

***Lem.* 9.8.1.**
モノイド $(M,\cdot)$ について、以下のように帰納的に定める部分写像 $\prod$ は $M^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}$ について左全域的である。

$$\forall(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}\Big(\prod\left((x_m)_{m\in\mathbb{N}},0\right)\coloneqq e\Big)$$
$$\forall(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}\forall n\in\mathbb{N}\Big(\prod\left((x_m)_{m\in\mathbb{N}},s(n)\right)\coloneqq\prod\left((x_m)_{m\in\mathbb{N}},n\right)\cdot x_n\Big)$$

Proof.
$\forall\big((x_m)_{m\in\mathbb{N}},n\big)\in M^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}$ に対して、$\prod\big((x_m)_{m\in\mathbb{N}},n\big)$ が存在することを示す。
$n=0$ のとき定義より成り立つ。
ある n で成り立つとすると、定義より $\prod\big((x_m)_{m\in\mathbb{N}},s(n)\big)$ でも成り立つ。
定理 5.1.6 より、任意の n について示される。 ■

***Def.* 9.8.1. 総乗記号**
補題 9.8.1 より定まる写像 $\prod\colon M^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}\to M$ を総乗記号と呼ぶ。
また、$\prod\big((x_m)_{m\in\mathbb{N}},n\big)$ を誤解のない範囲で $\prod_{m\in n}x_m$ と略記する。
書き直して再掲する。

$$\forall(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}\left(\prod_{m\in 0}x_m\coloneqq e\right)$$
$$\forall(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}\forall n\in\mathbb{N}\left(\prod_{m\in s(n)}x_m\coloneqq\left(\prod_{m\in n}x_m\right)\cdot x_n\right)$$

可換モノイドであるとき、可換であることを明示的に $\sum$ を、$\prod$ の代わりに用いる。

***Def.* 9.8.2. 総和記号**
可換モノイド $(M,+)$ と、集合 X、写像 $f\colon X\to M$ について、以下を満たすとする。ただし、0 は単位元とする。

$$\exists A\in\mathfrak{P}(X)(|A|<\infty\land\forall x\in X\setminus A(f(x)=0))$$

このとき、全単射 $\sigma\colon|A|\to A$ が存在する。集合についての総和記号を以下のように定義する。定理 9.4.2 から一意に定まる。

$$\sum_{x\in X}f(x)\coloneqq\sum_{m\in|A|}f(a_m)$$

***Def.* 9.8.3. 指数**
モノイド M について、以下の写像 $\hat{}\colon M\times\mathbb{N}\to M$ を指数と呼ぶ。

$$\hat{}(x,n)\coloneqq\prod_{m\in n}x$$

指数 $\hat{}$ は、演算 $\cdot$ よりも先に計算される。
また、$\hat{}(x,n)$ を誤解のない範囲で x^n と略記する。

***Lem.* 9.8.2.** モノイド上の指数法則

モノイド $(M,\cdot)$ について、以下の 2 つのモノイド準同型が存在する。

1. $\forall x \in M$ について、$\sigma\colon (\mathbb{N},+) \to M$ であり、$\sigma(n) = x^n$
2. $\tau \in \mathrm{End}(M)^{(\mathbb{N},\times)}$ であり、$\tau(n)(x) = x^n$

Proof.

1. を示す。

$x^{n+0} = x^n = x^n \cdot 1_M = x^n \cdot x^0$ である。

$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ であるとき、$x^{n+s(m)} = x^{s(n+m)} = x^{n+m} \cdot x = x^n \cdot x^m \cdot x = x^n \cdot x^{s(m)}$ である。

定理 5.1.6 より、任意の m について成り立つ。

$x^0 = 1_M$ より単位元を保つので、モノイド準同型。

2. を示す。

$x^{n\times 0} = x^0 = 1_M = (x^n)^0$ である。

$x^{n\times m} = (x^n)^m$ であるとき、$x^{n\times s(m)} = x^{n\times m+n} = x^{n\times m} \cdot x^n = (x^n)^m \cdot x^n = (x^n)^{s(m)}$ である。

定理 5.1.6 より、任意の m について成り立つ。

$\tau(1)$ は $\mathrm{End}(M)$ の単位元であるので、モノイドである。 ■

***Lem.* 9.8.3.** 有限集合間の写像の全体

空でない有限集合 X, Y について、Y^X は有限であり、以下が成り立つ。

$$\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}$$

Proof.

全単射 $\sigma\colon Y^{|X|} \to Y^X$ が存在する。

補題 6.3.2 と補題 6.1.11 より、数学的帰納法を用いて $\left|Y^{|X|}\right| = |Y|^{|X|}$ が成り立つ。 ■

10　群

10.1　群

***Def.* 10.1.1.** 群

モノイド $(G,\cdot)$ が以下を満たすとき、群と呼ぶ。

$$G = G^\times$$

以降、誤解のない範囲で、$x \cdot y$ を xy と略記する。

***Cor.* 10.1.1.**

モノイド M について、$M^\times$ は群である。

***Def.* 10.1.2.** 自明群

要素数が 1 の群を自明群と呼ぶ。

***Def.* 10.1.3.** 可換群

群が可換マグマであるとき、可換群と呼ぶ。

***Lem.* 10.1.2. 群の条件**

以下を満たすマグマ G は群である。

$$\exists e \in G \forall x \in G(xe = x)$$
$$\forall x \in G \exists x' \in G(xx' = e)$$

Proof.

e が単位元であることを示す。

$$ex = e(xe) = e(x(x'x'')) = e(xx')x'' = eex'' = (xx')ex'' = x(x'e)x'' = xx'x'' = x(x'x'') = xe = x$$

左逆元であることを示す。

$$x'x = x'(xe) = x'(x(x'x'')) = x'(xx')x'' = x'ex'' = x'x'' = e$$

■

***Def.* 10.1.4. 部分群**

群 G の部分モノイド H が以下を満たすとき、H は群となり、群 H を群 G の部分群と呼ぶ。

$$\forall x \in H\left(x^{-1} \in H\right)$$

***Lem.* 10.1.3. 部分群の判定**

群 G の部分集合 H が部分群であることは、以下と必要十分である。

$$H \neq \varnothing \land \forall x, y \in H\left(xy^{-1} \in H\right)$$

Proof.

必要性を示す。
空でないので、$\exists x \in H\left(e = xx^{-1} \in H\right)$
ゆえに、$\forall x \in H\left(x^{-1} = ex^{-1} \in H\right)$
したがって、$\forall x, y \in H\left(xy = x\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H\right)$
結合法則も自明に満たす。

十分性を示す。
単位元の存在より、空でない。部分群より、$\forall y \in H\left(y^{-1} \in H\right)$。ただちに、$\forall x, y \in H\left(xy^{-1}\right) \in H$ ■

***Cor.* 10.1.4. 群の共通部分**

群 G について、$A \subset G$ を考える。
$\forall H \in A$ について H が G の部分群であるとき、$\bigcap A$ は G の部分群である。

***Cor.* 10.1.5.**

群の商マグマは群である。$\left[x^{-1}\right]$ を逆元として持つ。

10.2　群と準同型

***Def.* 10.2.1.** 群準同型

　群 G_1, G_2 について以下を満たすモノイド準同型 $\varphi\colon G_1 \to G_2$ が存在するとき、φ を群準同型写像、または単に群準同型と呼ぶ。

$$\forall x \in G_1 \bigl(\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\bigr)$$

***Lem.* 10.2.1.** マグマ準同型は群準同型

　群 G_1, G_2 について、マグマ準同型 $\varphi\colon G_1 \to G_2$ は群準同型である。

Proof.

　モノイド準同型であることを示す。

$$e' = \varphi(e)\varphi(e)^{-1} = \varphi(e)\varphi(e^{-1}) = \varphi(ee^{-1}) = \varphi(e)$$

　群準同型であることを示す。

$$\varphi(x)^{-1} = \varphi(e)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}x)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\varphi(x)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\varphi(e) = \varphi(x^{-1})$$

■

***Thm.* 10.2.2.** 群準同型の単射性

　群準同型 $\varphi\colon G_1 \to G_2$ が単射であることは、以下と必要十分である。

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$$

Proof.

　十分性は、単射性より示される。

　必要性を示す。$\forall x, y \in G_1 \land \varphi(x) = \varphi(y)$ について、

$$e' = \varphi(e) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = \varphi(yx^{-1})$$

　ゆえに $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ で、$x = y$。すなわち単射。 ■

***Def.* 10.2.2.** 群同型

　群準同型 $\varphi\colon G_1 \to G_2$ が全単射であるとき、これを群同型写像、または単に群同型と呼ぶ。

　また、G_1 から G_2 への群同型写像が存在するとき、$G_1 \cong G_2$ と表す。

***Def.* 10.2.3.** 自己同型群

　マグマ M について、$\mathrm{End}(M)^{\times}$ をは群をなす。これを自己同型群と呼び、$\mathrm{Aut}(M)$ と表す。

***Thm.* 10.2.3.** 可換群上の準同型全体

　可換群 G, H について、$\mathrm{Hom}(G, H)$ 上の以下の演算 $+'$ を考える。このとき、順序対 $(\mathrm{Hom}(G, H), +')$ は可換群をなす。

$$(f +' g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$$

Proof.

H が可換マグマであることから、$\mathrm{Hom}(G, H)$ は可換マグマである。
写像 $0_{\mathrm{Hom}(G,H)} \colon G \to H, 0_{\mathrm{Hom}(G,H)}(x) = 0_H$ は群準同型であるので、単位元。
写像 $f_{\mathrm{minus}} \colon G \to H, f_{\mathrm{minus}}(x) = -f(x)$ は群準同型であるので、逆元。 ■

10.3 群の作用

***Def.* 10.3.1. 群の作用**
群 $(G, \cdot)$ について、G から、集合 X 上の全単射の全体への写像 $\varphi \colon (G, \cdot) \to \left(\left(X^X\right)^\times, \circ\right)$ が群準同型であるとき、群作用、または単に作用と呼ぶ。

***Def.* 10.3.2. 軌道**
群 G の集合 X への作用 φ と元 $x \in X$ について、以下の集合を x による G 軌道と呼び、$\varphi(G, x)$ で表す。

$$\varphi(G, x) \coloneqq \{\varphi(g, x) \mid g \in G\}$$

***Cor.* 10.3.1.**
群 G の集合 X への作用 φ について、以下が成り立つ。

$$\forall x \in X(x \in \varphi(G, x))$$

***Def.* 10.3.3. 群作用の軌道分解**
群 G の集合 X への群作用 φ について、以下で定義する同値関係 $\sim_{\varphi(G)}$ が与えられる。

$$\forall x, y \in X\bigl(x \sim_{\varphi(G)} y :\leftrightarrow \varphi(G, x) = \varphi(G, y)\bigr)$$

$X/\sim_{\varphi(G)}$ を、集合 X の群作用 φ による軌道分解と呼ぶ。

***Lem.* 10.3.2. 群作用の軌道分解**
群 G の集合 X への群作用 φ について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y \in X\bigl(x \in \varphi(G, y) \to x \sim_{\varphi(G)} y\bigr)$$

Proof.
$\exists g \in G(x = gy)$ である。
$\forall w_x \in \varphi(G, x)$ について $\exists g_x \in G(w_x = g_x x)$ であり、$w_x = (g_x g)y \in \varphi(G, y)$ であるので、$\varphi(G, x) \subset \varphi(G, y)$
$\forall w_y \in \varphi(G, y)$ について $\exists g_y \in G(w_y = g_y y)$ であり、$w_y = \bigl(g_y g^{-1}\bigr)x \in \varphi(G, x)$ であるので、$\varphi(G, y) \subset \varphi(G, x)$
■

***Lem.* 10.3.3.**
群 G の X への群作用 φ と、元 $x \in X$ について、以下で定める集合 $\mathrm{Stab}(G, x)$ を考える。このとき、以下で定める順序対 $(\mathrm{Stab}(G, x), \cdot)$ は G の部分群である。

$$\mathrm{Stab}(G, x) \coloneqq \{g \in G \mid x = \varphi(g, x)\}$$

Proof.
群準同型より、$x = \varphi(g,x) = \varphi(h,x)$ のとき、$x = \varphi(g,x) = \varphi(g,\varphi(h,x)) = \varphi(gh,x)$、ゆえに部分マグマ。
群準同型より、$\varphi(e,x) = \mathrm{id}_X(x) = x$、ゆえに部分モノイド。
群準同型より、$\varphi(g,x) = x \to x = \varphi(g^{-1}g,x) = \varphi(g^{-1},\varphi(g,x)) = \varphi(g^{-1},x)$、ゆえに部分群。 ■

***Def.* 10.3.4. 安定化部分群**
補題 10.3.3 で定める群 $\mathrm{Stab}(G,x)$ を、元 x における G の安定化部分群と呼ぶ。

***Def.* 10.3.5. 群作用の不変部分**
群 G の X への群作用 φ について、以下で定める集合 $\mathrm{Fix}(G,X)$ を、G による X の不変部分と呼ぶ。

$$\mathrm{Fix}(G,X) \coloneqq \{x \in X \mid \varphi(G,x) = \{x\}\}$$

***Thm.* 10.3.4. 類等式**
群 G の有限集合 X への群作用 φ について、$n \in \mathbb{N}$ と点列 $(x_m)_{m\in n} \in X^n$ が存在して、以下の 2 つが成り立つ。

$$|X| = |\mathrm{Fix}(G,X)| + \sum_{m\in n} |\varphi(G,x_m)|$$
$$\forall m \in n(|\varphi(G,x_m)| > 1)$$

Proof.
$X/\sim_{\varphi(G)}$ は有限である。
また、$\forall a \in X/\sim_{\varphi(G)}$ について、$|a| < \infty \land |a| \neq 0$ である。
$\left\{a \in X/\sim_{\varphi(G)} \mid |a| = 1\right\} = \{\{x\} \mid x \in \mathrm{Fix}(G,X)\}$ であることに注意して、成り立つ。 ■

10.4 部分群の群への作用

***Def.* 10.4.1. 右作用と左剰余類**
群 G とその部分群 H について、以下で定める H の G への自明な作用 φ が存在する。

$$\varphi(h,g) = gh$$

このような作用を右作用と呼び、定義 10.3.3 から定まる同値類を、左剰余類と呼ぶ。
また、軌道分解 $G/\sim_{\varphi(H)}$ を左剰余集合と呼び、G/H と表記する。

***Def.* 10.4.2. 左作用と右剰余類**
群 G とその部分群 H について、以下で定める H の G への自明な作用 φ が存在する。

$$\varphi(h,g) = hg$$

このような作用を左作用と呼び、定義 10.3.3 から定まる同値類を、右剰余類と呼ぶ。

***Thm.* 10.4.1. 軌道・安定化部分群定理**
群 G の X への群作用 φ と元 $x \in X$ について、左剰余集合 $G/\mathrm{Stab}(G,x)$ を考える。このとき、全単射 $f\colon G/\mathrm{Stab}(G,x) \to \varphi(G,x)$ が存在する。

Proof.

写像 $\hat{f}_x\colon G \to X, \hat{f}_x(g) = \varphi(g,x)$ を考える。
今 $\forall g, h \in G$ について、$g \sim_{\hat{f}_x} h \leftrightarrow \varphi(h^{-1}g, x) = x \leftrightarrow h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(G,x) \leftrightarrow g \sim_{\varphi(\mathrm{Stab}(G,x))} h$ である。
$\mathrm{Im}\left(\hat{f}_x\right) = \varphi(G,x)$ であるので、定理 3.3.6 より存在する。 ■

***Def.* 10.4.3.** 共役作用と共役類
群 G とその部分群 H について、以下で定める H の G への自明な作用 φ が存在する。

$$\varphi(h,g) = h^{-1}gh$$

このような作用を共役作用と呼び、定義 10.3.3 から定まる同値類を、共役類と呼ぶ。

10.5 群と準同型定理

***Def.* 10.5.1.** 正規部分群
群 G とその部分群 H について、以下を満たすとき、H を G の正規部分群と呼ぶ。

$$\forall g \in G \forall h \in H\left(g^{-1}hg \in H\right)$$

***Cor.* 10.5.1.**
核は正規部分群である。

***Cor.* 10.5.2.**
可換群の部分群は正規部分群である。

***Cor.* 10.5.3.**
群 G の正規部分群 N について、N の部分群 H は、G の正規部分群である。

***Cor.* 10.5.4.**
群 G の部分群 H と、G の正規部分群 N について、$N \cap H$ は H の正規部分群である。

***Lem.* 10.5.5.** 正規部分群の定める同値関係
群 G とその正規部分群 H について、定義 10.4.1 の定める H の G への自明な右作用 φ を考える。
φ が定める同値関係 $\sim_{\varphi(H)}$ は演算と両立する同値関係である。

Proof.
$x_1 \sim_{\varphi(H)} y_1, x_2 \sim_{\varphi(H)} y_2$ であるとき、$\exists h_1, h_2 \in H(y_1 = x_1h_1 \land y_2 = x_2h_2)$
正規部分群より、$\exists h \in H\left(x_2^{-1}h_1x_2 = h\right)$

$$y_1y_2 = x_1h_1x_2h_2 = x_1x_2x_2^{-1}h_1x_2h_2 = x_1x_2hh_2$$

補題 10.3.2 より、両立する。 ■

***Def.* 10.5.2.** 剰余群
群 G とその正規部分群 H について、補題 10.5.5 の定める同値関係による商マグマを、剰余群と呼び、G/H と表す。

***Cor.* 10.5.6.**
定義より、剰余群は左剰余集合である。
さらに、右剰余集合である。

***Thm.* 10.5.7. 群準同型定理**

群 G_1, G_2 と、群準同型 $f\colon G_1 \to G_2$、f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、群同型 $\overline{f}\colon G_1/\sim_f \to \mathrm{Im}(f)$ が存在する。

$G_1/\sim_f = G_1/\mathrm{Ker}(f)$ であるため、$\overline{f}\colon G_1/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ の形で書かれることが多い。

Proof.

$\mathrm{Im}(f)$ は G_2 の部分群である。

定理 9.3.3 より、得る $\overline{f}$ はマグマ同型。補題 10.2.1 より、群同型。 ■

***Lem.* 10.5.8. 剰余群の部分群は部分群の剰余群**

群 G、G の正規部分群 N、G/N の部分群 Z を考える。

このとき G の部分群 H が存在して、N は H の正規部分群となり、$H/N = Z$ が成り立つ。

Proof.

商写像 $[]$ の原像 $H := [Z]^{-1}$ を考えると、商写像の群準同型性より H は G の部分群である。

$[\{e_Z\}]^{-1} = N$ であるため、$N \subset H$ である。ゆえに N は H の正規部分群である。

商写像は全射であるため、$H/N = \left[[Z]^{-1}\right] = Z$ である。 ■

***Lem.* 10.5.9.**

群 G と G から G への共役作用 φ_C について、以下が成り立つ。

$$\mathrm{Fix}(G, G) = \{g \in G \mid \forall g' \in G(gg' = g'g)\} = \bigcap \{\mathrm{Stab}(G, g') \mid g' \in G\}$$

また、$\mathrm{Fix}(G, G)$ は G の正規部分群である。

Proof.

$\mathrm{Fix}(G, G) = \left\{g \in G \mid \forall g' \in G\Big((g')^{-1}gg' = g\Big)\right\}$ である。

$\bigcap \{\mathrm{Stab}(G, g') \mid g' \in G\} = \{g \in G \mid \forall g' \in G(g \in \mathrm{Stab}(G, g'))\} = \left\{g \in G \mid \forall g' \in G\Big((g')^{-1}gg' = g\Big)\right\}$ である。

ゆえに等号が成り立つ。

$\bigcap \{\mathrm{Stab}(G, g') \mid g' \in G\}$ より、G の部分群であり、定義より正規部分群である。 ■

***Def.* 10.5.3. 群の中心**

群 G について、補題 10.5.9 で定める正規部分群を、G の中心と呼ぶ。

***Cor.* 10.5.10.**

群の中心は可換群である。

10.6 群の生成

***Def.* 10.6.1. 群の生成**

群 G の部分集合 S について、S が生成する部分群を以下で定めて、$\langle S \rangle$ で表す。

$$\langle S \rangle := \bigcap \left\{H \subset G \mid S \subset H \land H \text{ は } G \text{ の部分群}\right\}$$

***Rem.* 10.6.1. 生成する集合が単集合であるときの略記**

群 G と元 $g \in G$ について、$\{g\}$ が生成する部分群 $\langle \{g\} \rangle$ を、誤解がない範囲で単に $\langle g \rangle$ で表す。

***Def.* 10.6.2.** 群の生成系

群 G の部分集合 S について、$G = \langle S \rangle$ であるとき、S を G の生成系と呼ぶ。

***Def.* 10.6.3.** 単生群

群 G について、以下を満たすとき、G を単生群と呼ぶ。

$$\exists g \in G(G = \langle g \rangle)$$

***Cor.* 10.6.1.**

単生群は可換群である。

10.7 半直積

***Lem.* 10.7.1.**

群 H, N と、群準同型 $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ について、$N \times H$ 上の以下で定義される演算 $\cdot$ を考える。

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) \coloneqq (n_1\varphi(h_1, n_2), h_1h_2)$$

このとき、$(N \times H, \cdot)$ は群である。

Proof.

半群であることは以下の通り。

$$\begin{aligned}((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) \cdot (n_3, h_3) &= (n_1\varphi(h_1, n_2), h_1h_2) \cdot (n_3, h_3) \\ &= (n_1\varphi(h_1, n_2)\varphi(h_1h_2, n_3), h_1h_2h_3) \\ &= (n_1\varphi(h_1, n_2)\varphi(h_1, \varphi(h_2, n_3)), h_1h_2h_3) \\ &= (n_1\varphi(h_1, n_2\varphi(h_2, n_3)), h_1h_2h_3) \\ &= (n_1, h_1)(n_2\varphi(h_2, n_3), h_2h_3) \\ &= (n_1, h_1) \cdot ((n_2, h_2) \cdot (n_3, h_3))\end{aligned}$$

$e = (e_N, e_H)$ は単位元である。

(n, h) の逆元は、$\bigl(\varphi(h^{-1}, n^{-1}), h^{-1}\bigr)$ である。 ■

***Def.* 10.7.1.** 外部半直積

補題 10.7.1 で定義される群を、N, H の φ による外部半直積と呼び、$N \rtimes_\varphi H$ と表す。

***Cor.* 10.7.2.**

外部半直積 $N \rtimes H$ について、以下が成り立つ。

$$\forall(n, h) \in N \rtimes H((n, h) = (n, e_H) \cdot (e_N, h))$$

***Cor.* 10.7.3.**

外部半直積 $N \rtimes H$ について、以下で定義する H' は $N \rtimes_\varphi H$ の部分群である。

$$H' \coloneqq \{(e_N, h) \mid h \in H\}$$

***Lem.* 10.7.4.**
外部半直積 $N \rtimes_\varphi H$ について、以下で定義する N' は $N \rtimes_\varphi H$ の正規部分群である。

$$N' \coloneqq \{(n, e_H) \mid n \in N\}$$

Proof.
明らかに部分群である。

$\forall n, n' \in N \forall h \in H$ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}(n,h)^{-1}(n', e_H)(n,h) &= \bigl(\varphi(h^{-1}, n^{-1}), h^{-1}\bigr)(n'n, h) \\ &= \bigl(\varphi(h^{-1}, n^{-1})\varphi(h^{-1}, n'n), h^{-1}h\bigr) \\ &= \bigl(\varphi(h^{-1}, n^{-1}n'n), e_H\bigr)\end{aligned}$$

よって、正規部分群である。 ■

11 有限群

11.1 有限群

***Def.* 11.1.1. 有限群**
群 G について、G が有限集合であるとき、G を有限群と呼ぶ。

***Thm.* 11.1.1. Lagrange の定理**
有限群 G と、G の部分群 H、左剰余集合 G/H について、以下が成り立つ。

$$|G| = |G/H||H|$$

Proof.
商写像 [] は全射より、定理 2.3.7 から右逆写像 r を持つ。
写像 $\varphi\colon G/H \times H \to G, \varphi([g], h) \coloneqq r([g])h$ を考える。

$\varphi([g_1], h_1) = \varphi([g_2], h_2)$ であるとき、$r([g_2]) = r([g_1])h_1h_2^{-1}$ より、補題 10.3.2 から $[g_1] = [g_2]$ であって、ただちに $h_1 = h_2$
ゆえに φ は単射。

$\forall g \in G$ について、$r([g])^{-1}g \in H$ であるので、$g = \varphi([g], r([g])^{-1}g)$ と書ける。ゆえに φ は全射。

したがって、$|G| = |G/H \times H|$ であり、補題 6.1.11 より成り立つ。 ■

***Thm.* 11.1.2. Lagrange の定理の拡張**
有限群 G と、G の部分群 H、さらに H の部分群 K について、左剰余集合 $G/H, G/K$ を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$|G/K| = |G/H||H/K|$$

Proof.

定理 11.1.1 より、$|G/K||K| = |G| = |G/H||H| = |G/H||H/K||K|$ である。
$|K| \neq 0$ より、補題 5.4.9 から成り立つ。 ■

***Lem.* 11.1.3.** 有限群の作用による軌道の大きさ
有限群 G と集合 X について、G の X への作用 φ を考える。
このとき、$\forall x \in X$ について軌道の要素数 $|\varphi(G,x)|$ は G の約数である。

Proof.
定理 11.1.1、定理 10.4.1 より以下が成り立つ。

$$\forall x \in X(|G| = |G/\operatorname{Stab}(G,x)||\operatorname{Stab}(G,x)| = |\varphi(G,x)||\operatorname{Stab}(G,x)|)$$

■

***Def.* 11.1.2.** 巡回群
群 G について以下が成り立つとき、G を巡回群と呼ぶ。

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists g \in G(G = \{g^m \mid m \in n\})$$

***Cor.* 11.1.4.**
巡回群は単生群である。

***Lem.* 11.1.5.** 位数
有限群 G と元 $g \in G$ に対して、以下の集合は空でない。

$$\{n \in \mathbb{N} \mid g^n = e_G\}$$

Proof.
定理 6.1.3 より、写像 $\tau\colon s(|G|) \to G, \tau(n) = g^n$ は単射でない。
よって、$\exists i,j \in s(|G|)\big(i < j \land g^i = g^j\big)$
したがって、$g^{j-i} = e_G$ である。 ■

***Def.* 11.1.3.** 位数
補題 11.1.5 と定理 5.2.7 より、有限群 G と元 $g \in G$ に対して $g^n = e_G$ とする最小の $n \in \mathbb{N}$ が存在する。
これを元 g の位数と呼び、$\operatorname{ord}(g)$ と表す。

***Lem.* 11.1.6.** 巡回群の位数
有限群 G と元 $g \in G$ について、$G = \langle g \rangle$ であるとき、以下が成り立つ。

$$\operatorname{ord}(g) = |G|$$

Proof.
写像 $\tau\colon \operatorname{ord}(g) \to G, \tau(n) = g^n$ を考える。
$\exists i,j \in \mathbb{N}\big(i < j \land g^i = g^j\big)$ ならば $g^{j-i} = e_G$ より位数の最小性に反する。ゆえに単射。
$\forall n \in \mathbb{Z}$ について、定義 5.5.1 より $\exists q,r \in \mathbb{N}(n = q\operatorname{ord}(g) + r \land r < \operatorname{ord}(g))$ である。
よって $g^n = g^{q\operatorname{ord}(g)+r} = \big(g^{\operatorname{ord}(g)}\big)^q g^r = g^r$、ゆえに全射。 ■

11.2 群と素数

***Lem.* 11.2.1. 素数群作用の不変部分**

有限群 G の有限集合 X への群作用 φ を考える。$|G|$ が素数であるとき、$|X| - |\mathrm{Fix}(G, X)|$ は $|G|$ の倍数である。

Proof.

補題 11.1.3 と $|G|$ が素数であることより、$|\varphi(G, x)| = 1 \vee |\varphi(G, x)| = |G|$ である。

$W \coloneqq \bigsqcup \{\varphi(G, x) \mid x \in X \wedge |\varphi(G, x)| = |G|\}$ とする。

定理 10.3.4 より、$|X| = |\mathrm{Fix}(G, X)| + |W|$ であり、$|W|$ は $|G|$ の倍数であるため成り立つ。 ■

***Lem.* 11.2.2. 素数群は巡回群**

有限群 G について、$|G|$ が素数ならば G は巡回群である。

Proof.

$|G|$ は素数より、$\exists g \in G(g \neq e_G)$ である。

今、$H \coloneqq \{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は G の部分群であり、$|H| \geq 2$ である。定理 11.1.1 より、$|H| = |G|$ である。

ゆえに、$G \setminus H = \varnothing$ であるので $G = H$、すなわち G は巡回群である。 ■

***Lem.* 11.2.3. Cauchy の定理**

有限群 G について、$|G|$ が素数 p の倍数であるならば、以下が成り立つ。

$$\exists g \in G(\mathrm{ord}(g) = p)$$

Proof.

集合 $S \coloneqq \left\{(x_n)_{n \in p} \in G^p \mid \Pi_{n \in p} x_n = e_G\right\}$ を考える。

$x_{p-1} = (\Pi_{n \in p-1} x_n)^{-1}$ であることに注目すると、全単射 $S \ni (x_n)_{n \in p} \mapsto (x_n)_{n \in p-1} \in G^{p-1}$ の存在から $|S| = |G|^{p-1}$ であり、特に $|S|$ は p の倍数である。

群 $\mathfrak{S}_p$ の S への以下を満たす群作用 φ を考える。

$$\varphi(\sigma, (x_n)_{n \in p}) = \left(x_{\sigma(n)}\right)_{n \in p}$$

以下の $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p$ は、$\mathrm{ord}(\sigma_0) = p$ を満たす。

$$\sigma_0(n) = \begin{cases} n+1 & (n \in p-1) \\ 0 & (n = p-1) \end{cases}$$

今、$\mathfrak{S}_p$ の部分群 $H \coloneqq \{\sigma_0^n \mid n \in p\}$ を考える。

補題 11.2.1 より、$|S| - |\mathrm{Fix}(H, S)|$ は p の倍数である。

今、$|S|$ は p の倍数より、$|\mathrm{Fix}(H, S)|$ も p の倍数であり、$(e_G)_{n \in p} \in \mathrm{Fix}(H, S)$ より、$\exists x \in \mathrm{Fix}(H, S) \setminus \left\{(e_G)_{n \in p}\right\}$ である。

$\sigma_0(x) = x$ であるため、$\exists g \in G \setminus \{e_G\}\left(x = (g)_{n \in p}\right)$ である。 ■

***Thm.* 11.2.4. Sylow の第一定理**

素数 p と自然数 n を考える。有限群 G について $|G|$ が p^n の倍数であるとき、G の部分群 H が存在して $|H| = p^n$ が成り立つ。

Proof.

$|G|$ が p^n の倍数である任意の有限群 G について、満たす部分群 H が存在することを $|G|$ についての数学的帰納法により示す。

$|G| = 1$ のとき、$\{e_G\}$ は G の部分群である。

ある $|G|$ 未満の全ての自然数について成り立つとする。

G の G への共役作用 φ_C と、G の中心 $\mathrm{Fix}(G, G)$ を考える。

$|\mathrm{Fix}(G, G)|$ が p の倍数でないとき、定理 10.3.4 より $\exists n \in \mathbb{N}\bigl(|G| = |\mathrm{Fix}(G, G)| + \sum_{m \in n} |\varphi(G, g_m)|\bigr)$ であるので、$\exists g \in G$ s.t. $|\varphi(G, g)| \neq 1 \wedge |\varphi(G, g)|$ は p の倍数でない、である。

定理 10.4.1、定理 11.1.1 より、$|G| = |G/\operatorname{Stab}(G, g)||\mathrm{Stab}(G, g)| = |\varphi(G, g)||\mathrm{Stab}(G, g)|$ である。

$|\varphi(G, g)| > 1$ より、$|\mathrm{Stab}(G, g)|$ は p^n の倍数であり、$|G|$ より小さい。

仮定より $\mathrm{Stab}(G, g)$ は部分群 H を持ち、$|H| = p^n$ である。H は G の部分群でもある。

$|\mathrm{Fix}(G, G)|$ が p の倍数であるときを考える。

補題 11.2.3 より、$\mathrm{Fix}(G, G)$ は部分群 N を持って $|N| = p$ であり、$\mathrm{Fix}(G, G)$ が G の正規部分群であることから、N は G の正規部分群である。

剰余群 G/N について、定理 11.1.1 より $|G| = |G/N||N|$ であり、$|G/N|$ は p^{n-1} の倍数であるので、仮定より部分群 K が存在して、$|K| = p^{n-1}$ である。

補題 10.5.8 より、G の部分群 L が存在して $L/N = K$ であり、定理 11.1.1 より $|L| = |L/N||N| = |K||N| = p^n$

■

***Def.* 11.2.1. Sylow 部分群**

素数 p、自然数 n、p の倍数ではない自然数 m を考える。有限群 G について、$|G| = mp^n$ であるとする。

このとき、以下を満たす G の部分群 H を、G の Sylow p-部分群と呼ぶ。

$$|H| = p^n$$

***Thm.* 11.2.5. Sylow の第二定理**

素数 p、自然数 n、有限群 G、G の Sylow p-部分群 H を考える。

G の部分群 K について、$|K| = p^n$ であるとき、以下が成り立つ。

$$\exists g \in G\bigl(K \subset \{g^{-1}hg \mid h \in H\}\bigr)$$

Proof.

K から G への左作用について、$\forall k \in K$ についての写像 $g \mapsto kg$ は、H から G への右作用による軌道分解と両立する。

定理 3.3.4 より、K から G/H への作用 $\overline{\varphi}$ が一意に存在する。

定理 11.1.1 より、$|G/H|$ は p を約数に持たない。

$G/H = \bigsqcup \{\overline{\varphi}(K, [g]) \mid [g] \in G/H\}$ であるので、$\exists [g] \in G/H$ s.t. $\overline{\varphi}(K, [g])$ は p を約数に持たない。

補題 11.1.3 より、$\overline{\varphi}(K, [g])$ は $|K| = p^n$ の約数である。よって、$|\overline{\varphi}(K, [g])| = 1$ である。

したがって $\forall k \in K([kg] = [g])$ である。

すなわち $\forall k \in K$ について $\exists h \in H$ であり、$kg = gh$ すなわち $k = ghg^{-1}$ である。 ■

***Thm.* 11.2.6. Sylow の第三定理**

素数 p、有限群 G を考える。

G の Sylow p-部分群の全体 $\mathcal{S}$ について、以下が成り立つ。

$$\exists n \in \mathbb{N}(|\mathcal{S}| = np + 1)$$

さらに、G の任意の Sylow p-部分群 H について、H の中心 $\mathrm{Fix}(H, H)$ を用いた以下が成り立つ。

$$|G| = |\mathcal{S}||\mathrm{Fix}(H, H)|$$

Proof.

Sylow p-部分群 H を考える。

H から??? ■

11.3 置換と対称群

***Def.* 11.3.1. 置換**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、全単射 $\sigma \colon n \to n$ を置換と呼ぶ。

***Def.* 11.3.2. 対称群**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、置換の全体は群をなす。この群を n 次対称群と呼び、$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ で表す。

***Def.* 11.3.3. 互換**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ について、以下で表される置換 τ を互換と呼ぶ。

$$\exists i, j \in n \left(i \neq j \land \tau(m) = \begin{cases} j & (m = i) \\ i & (m = j) \\ m & (\text{otherwise}) \end{cases} \right)$$

誤解のない範囲で互換を (i, j) と表す。

互換の全体を T_n とする。

***Cor.* 11.3.1.**

互換 $(i, j) = (j, i)$

***Cor.* 11.3.2.**

互換 $\tau \in T_n$ について、$\tau\tau = \mathrm{id}_n$

***Thm.* 11.3.3. 置換は互換の積**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、以下が成り立つ。

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \exists l \in \mathbb{N} \exists \tau \in T_n^l \left(\sigma = \prod_{m \in l} \tau(m) \right)$$

Proof.

$n = 1$ のとき、$\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{id}_1\}$ より成り立つ。

ある n で成り立つとする。

$\sigma \in \mathfrak{S}_{s(n)}$ について、全単射より $\exists k \in s(n)(\sigma(k) = n)$ である。

$k = n$ のとき、$\sigma|_n \in \mathfrak{S}_n$ より互換の積として表せる。

互換 $\tau \coloneqq (k, n)$ について、$\sigma' \coloneqq \tau\sigma$ を考える。

$\sigma'|_n \in \mathfrak{S}_n$ は帰納法の仮定より互換の積として表せる。

$\sigma = \tau\sigma'$ より互換の積となる。

定理 5.1.6 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Lem.* 11.3.4.**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、id_n は奇数個の互換の積で表すことはできない。

Proof.

$n = 1$ のとき明らか。

$n \geq 2$ のとき、奇数 l 個の互換の積で表すことができると仮定する。

$\mathrm{id}_n \notin T_n$ より、1 個の互換の積で恒等写像を表すことはできない。ゆえに、$l \geq 3$

id_n を互換の積で表すことができる最小の奇数 l を考える。

互換 2 つの積について、左の項の第一成分は以下の規約で右の項のみに含まれるように変形できる。

$$(i_1, j_1)(i_2, j_2) = \begin{cases} (i_2, j_2)(i_1, j_1) & (\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\} = \varnothing) \\ (j_1, j_2)(i_1, j_1) & (i_1 = i_2 \wedge j_1 \neq j_2) \\ (i_2, j_1)(i_1, i_2) & (i_1 \neq i_2 \wedge j_1 = j_2) \\ \mathrm{id}_n & (\{i_1, j_1\} = \{i_2, j_2\}) \end{cases}$$

l 個の互換の積である id_n について、上の規約により第一番目の互換の第一成分 i を右に移動させる。

このとき、l の最小性から 4 番目の場合とはならないため、帰納的に最も右の項のみに i が含まれるようにできる。

これは、$\mathrm{id}_n(i) = i$ に反する。

背理法より示される。 ■

***Lem.* 11.3.5. 置換の符号**

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ について、定理 11.3.3 の定める l（互換の個数）の偶奇は一意に定まる。

Proof.

奇数 l_1、偶数 l_0 を用いて、$\sigma = \prod_{m \in l_1} \tau_1(m) = \prod_{m \in l_2} \tau_2(m)$ とする。

$\mathrm{id}_n = \prod_{m \in l_1} \tau_1(m) \times \prod_{m \in l_2} \tau_2(l_2 - 1 - m)$ より、補題 11.3.4 に反する。

背理法より示される。 ■

***Def.* 11.3.4. 置換の符号**

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ について、補題 11.3.5 より定まる偶奇が存在する。

このとき、以下の写像 $\mathrm{sgn} \colon \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ を定義する。

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\text{偶数}) \\ -1 & (\text{奇数}) \end{cases}$$

***Cor.* 11.3.6.**

$\{-1, 1\}$ 上の乗法 $+$ を以下で導入する。

$$-1 \times -1 = 1 \times 1 = 1, \quad -1 \times 1 = 1 \times -1 = -1$$

このとき $(\{-1, 1\}, \times)$ は可換群であり、$(\{-1, 1\}, \times)^{\mathfrak{S}_n}$ は群準同型である。

Rem. **11.3.1.** -1
ここで定義した -1 は、後で定義する $\mathbb{Z}$ 上の -1 と同一視してよい。

Def. **11.3.5. 交代群**
$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、以下で定める $\mathfrak{S}_n$ の部分群 A_n を、交代群と呼ぶ。

$$A_n \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$$

Lem. **11.3.7. 交代群は対称群の正規部分群**
$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、交代群 A_n は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群である。

Proof.
$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \forall \alpha \in A_n$ について、$\operatorname{sgn}\bigl(\sigma^{-1}\alpha\sigma\bigr) = \operatorname{sgn}(\sigma)^{-1}\operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\alpha) = 1$ より、$\sigma^{-1}\alpha\sigma \in A_n$ ■

11.4 可解群

Def. **11.4.1. 可解群**
自明でない群 G について、$n \in \mathbb{N}$ と有限列 $(H_m)_{m \in s(n)}$ が存在して以下を満たすとき、G を可解群と呼ぶ。

- $H_0 = G$
- $H_n = \{e_G\}$
- $\forall m \in n$ について、$H_{s(m)}$ は H_m の正規部分群であり、剰余群 $H_m/H_{s(m)}$ が可換群

Cor. **11.4.1.**
可換群は可解群である。

Lem. **11.4.2. 可解群の部分**
可解群 G の部分群 H は可解群である。

Proof.
G は可解群より、定義 11.4.1 を満たす有限列 $(Z_m)_{m \in n}$ が存在する。
有限列 $Y_m \coloneqq Z_m \cap H$ を考える。ただちに $Y_{s(m)}$ は Y_m の正規部分群。
埋め込み $f \colon Y_m \to Z_m$ と、商写像 $[] \colon Z_m \to Z_m/Z_{s(m)}$ から、準同型 $[] \circ f \colon Y_m \to Z_m/Z_{s(m)}$ を得る。
定理 10.5.7 より、埋め込み $\overline{f} \colon Y_m/Y_{s(m)} \to Z_m/Z_{s(m)}$ が存在する。
$Z_m/Z_{s(m)}$ は可換群より、$Y_m/Y_{s(m)}$ も可換群。したがって可解群。 ■

Lem. **11.4.3. 可解群の拡大**
群 G と、G の正規部分群 N について、$N, G/N$ がともに可解群ならば、G は可解群である。

Proof.
G/N は可解群より、定義 11.4.1 を満たす有限列 $(Z_m)_{m \in n}$ が存在する。
補題 10.5.8 より、有限列 $(H_m)_{m \in n}$ で、$H_m/N = Z_m$ かつ $H_{s(m)}$ は H_m の正規部分群が成り立つ。
H_m 上の補題 10.5.5 の定める同値関係について、$a \sim_N b \to a \sim_{H_{s(m)}} b$ である。
ゆえに自明な埋め込み $f \colon H_m/H_{s(m)} \to H_m/N$ が存在する。
H_m/N は可換群より、$H_m/H_{s(m)}$ も可換群である。

N は可解群であるため、定義 11.4.1 を満たす有限列 $(I_m)_{m \in l}$ が存在する。

よって、有限列 $G = H_0, H_1, \cdots, H_{p(n)} = N = I_0, I_1, \cdots, I_{p(l)} = \{e_G\}$ が存在して定義 11.4.1 を満たす。 ■

***Lem.* 11.4.4.**

交代群 A_5 は可解群ではない。

Proof.

A_5 を可解群とする。A_5 の正規部分群 N が存在して、A_5/N は可換群となる。
$\forall i_1, j_1, i_2, j_2 \in 5 (i_1 \neq j_1 \wedge i_2 \neq j_2)$ を考える。

$\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\} = \varnothing$ のとき、A_5/N の可換性より

$$[(i_1, j_1)(i_2, j_2)] = [(i_1, j_2)(j_1, j_2)(i_1, j_2)(j_1, i_2)(j_1, j_2)(j_1, i_2)] = [\mathrm{id}_5]$$

ゆえに、$(i_1, j_1)(i_2, j_2) \in N$

$i_1 = i_2 \wedge j_1 \neq j_2$ のとき、$\{k_1, k_2\} = 5 \setminus \{i_1, j_1, j_2\}$ について、A_5/N の可換性より、

$$[(i_1, j_1)(i_1, j_2)] = [(i_1, j_1)(i_1, k_1)][(j_1, k_2)(j_1, j_2)][(i_1, k_1)(i_1, j_1)][(j_1, j_2)(j_1, k_2)] = [\mathrm{id}_5]$$

ゆえに、$(i_1, j_1)(i_1, j_2) \in N$

$\{i_1, j_1\} = \{i_2, j_2\}$ のとき、$(i_1, j_1)(i_1, j_2) = \mathrm{id}_5 \in N$

定理 11.3.3 より、$A_5 = N$ となる。
$(0, 1)(1, 2) \neq (1, 2)(0, 1)$ より、A_5 は可換群ではない。
ゆえに定義 11.4.1 を満たす有限列は存在しない。 ■

***Thm.* 11.4.5. 対称群と可解群**

$n = 2, 3, 4$ について、$\mathfrak{S}_n$ は可解群である。
$n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ について、$\mathfrak{S}_n$ は可解群ではない。

Proof.

$\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}_2, (0, 1)\}$ は可換群である。ゆえに可解群である。

$\mathfrak{S}_3, A_3, \{\mathrm{id}_3\}$ は定義 11.4.1 の主張する有限列である。ゆえに $\mathfrak{S}_3$ は可解群である。

$V_4 \coloneqq \{\mathrm{id}_4, (0, 1)(2, 3), (0, 2)(1, 3), (0, 3)(1, 2)\}$ を考える。
$\mathfrak{S}_4, A_4, V_4, \{\mathrm{id}_4\}$ は定義 11.4.1 の主張する有限列である。ゆえに $\mathfrak{S}_4$ は可解群である。

$n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ について $\mathfrak{S}_n$ が可解群と仮定する。
補題 11.4.2 より A_n も可解群となり、さらに A_5 が可解群となる。これは補題 11.4.4 に反する。
背理法より成り立つ。 ■

12　環

12.1　環

***Def.* 12.1.1.** 環

集合 R 上の 2 つの演算、加法 $+$、乗法 $\times$ が以下を満たすとき、順序対 $((R,+),\times)$ を環（ring）と呼ぶ。または単に R と書き、環と集合どちらも表すものとする。

- $(R,+)$ は可換群である。この単位元を 0_R で表す。元 a の逆元を $-a$ と表記する。
- $(R,\times)$ はモノイドである。この単位元を 1_R で表す。
- 左分配する。すなわち、$\forall x,y,z \in R(x\times(y+z) = x\times y + x\times z)$
- 右分配する。すなわち、$\forall x,y,z \in R((x+y)\times z = x\times z + y\times z)$

演算 $\times$ は、演算 $+$ よりも先に演算される。

また、$a+(-b)$、$a\times b$ を誤解のない範囲で、$a-b$、ab と略記する。

***Rem.* 12.1.1.** 単位的環

単位的環（乗法についてモノイドをなす）を環と呼ぶことは、必ずしも一般的でないことに注意されたい。

***Lem.* 12.1.1.** 環の性質

環 R について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in R(a0_R = 0_R a = 0_R)$$
$$\forall a,b \in R(a(-b) = (-a)b = -(ab))$$
$$\forall a,b \in R(ab = (-a)(-b))$$

Proof.

第一式は以下より示される。

$$a0_R = a0_R + a0_R + -(a0_R) = a(0_R+0_R) + -(a0_R) = a0_R + -(a0_R) = 0_R$$
$$0_R a = 0_R a + 0_R a + -(0_R a) = (0_R+0_R)a + -(0_R a) = 0_R a + -(0_R a) = 0_R$$

第二式は以下より示される。

$$a(-b) = a(-b) + ab + -(ab) = a((-b)+b) + -(ab) = a0_R + -(ab) = -(ab)$$
$$(-a)b = (-a)b + ab + -(ab) = ((-a)+a)b + -(ab) = 0_R b + -(ab) = -(ab)$$

第三式は以下より示される。

$$ab = a(-(-b)) = -(a(-b)) = (-a)(-b)$$

■

***Cor.* 12.1.2.**

環 $((R,+),\times)$ と乗法可逆元の全体 $R^\times$ について、順序対 $(R^\times,\times)$ は群である。

***Def.* 12.1.2.** 零環

環 R について、$R = \{0_R\}$ である環を零環と呼ぶ。

***Cor.* 12.1.3.**

環 R について、R が零環であることは、$0_R = 1_R$ であることと必要十分。

***Def.* 12.1.3.** 部分環
環 R の部分集合 S が、加法について部分群をなして、乗法について部分モノイドをなすとき、S は環となり、環 S を環 R の部分環と呼ぶ。

***Def.* 12.1.4.** 可換環
環 $((R,+),\times)$ について、$(R,\times)$ が可換モノイドであるとき、R を可換環と呼ぶ。

***Def.* 12.1.5.** 環準同型
環 R_1, R_2 について以下を満たす写像 $\varphi\colon R_1 \to R_2$ が存在するとき、φ を環準同型写像、または単に環準同型と呼ぶ。

- 群 $(R_1,+),(R_2,+)$ について、群準同型。
- モノイド $(R_1,\times),(R_2,\times)$ について、モノイド準同型。

***Def.* 12.1.6.** 環同型
全単射な環準同型を、環同型写像、または単に環同型と呼ぶ。

12.2 イデアル

***Def.* 12.2.1.** 左イデアル
環 R を考える。
$(R,+)$ の部分群 I が以下を満たすとき、I を R の左イデアルと呼ぶ。

$$\forall r \in R \forall a \in I (ra \in I)$$

***Cor.* 12.2.1.**
環 R と、その左イデアル I について、以下が成り立つ。

$$1_R \in I \to I = R$$

***Def.* 12.2.2.** 極大左イデアル
環 R の左イデアル I について、以下を満たすとき、I を極大左イデアルと呼ぶ。

- R の任意のイデアル J について、$I \subset J \to J = I \lor J = R$
- $R \neq I$

***Thm.* 12.2.2.** 極大左イデアルの存在
環 R と左イデアル I について、$I \neq R$ ならば、極大左イデアル J が存在して、$I \subset J$ である。

Proof.
$T = \left\{ J \in \mathfrak{P}(R) \mid J \text{ は左イデアル} \land I \subset J \land J \neq R \right\}$ を考える。
$I \in T$ である。
半順序集合 $(T,\subset)$ の部分 S が全順序であるとする。
このとき、$\bigcup S$ は左イデアルである。$1_R \notin \bigcup S$ より、$\bigcup S \in T$ である。
したがって、T は帰納的半順序集合である。定理 4.3.5 より極大元を持つ。 ■

12.3　環と準同型定理

***Def.* 12.3.1.** 両側イデアル

環 R とその左イデアル I について、以下を満たすとき、I を R の両側イデアルと呼ぶ。

$$\forall r \in R \forall a \in I(ar \in I)$$

***Cor.* 12.3.1.**

可換環の左イデアルは両側イデアルである。このとき、単にイデアルと呼ぶ。

***Cor.* 12.3.2.**

環準同型写像の核は両側イデアルである。

***Def.* 12.3.2.** 商環

環 $((R,+),\times)$ を考える。

演算 $+,\times$ と両立する同値関係 $\sim$ について、定理 3.3.4 より定める演算 $+',\times'$ が存在する。

このとき、環 $((R/\sim,+'),\times')$ を環 R の商環と呼ぶ。

***Lem.* 12.3.3.** 両側イデアルの定める同値関係

環 R とその両側イデアル I について、以下で定める同値関係 $\sim$ は演算 $+,\times$ と両立する同値関係である。

$$\forall x,y \in R(x \sim y :\leftrightarrow x-y \in I)$$

Proof.

可換群の部分群が正規部分群であることと、補題 10.5.5 より、加法と両立する同値関係である。

$x_1-y_1, x_2-y_2 \in I$ であるとき、

$$x_1x_2-y_1y_2 = x_1(x_2-y_2)+(x_1-y_1)y_2 \in I$$

両立する。 ■

***Def.* 12.3.3.** 剰余環

環 R とその両側イデアル I について、補題 12.3.3 の定める同値関係による商環を、剰余環と呼び、R/I と表す。

***Thm.* 12.3.4.** 環準同型定理

環 R_1,R_2 と、環準同型 $f\colon R_1 \to R_2$、f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、環同型 $\overline{f}\colon R_1/\sim_f \to \mathrm{Im}(f)$ が存在する。

Proof.

$\mathrm{Im}(f)$ は R_2 の部分環である。

定理 10.5.7 より、得る $\overline{f}$ は加法群同型。

定理 9.7.5 より、得る $\overline{f}$ は乗法モノイド同型。 ■

13　整域

13.1　倍元と約元

***Def.* 13.1.1.** 倍元

可換環 R と元 $a, b \in R$ について、以下を満たすとき、a は b の倍元、または b は a の約元と呼ぶ。

$$\exists c \in R(a = bc)$$

***Def.* 13.1.2.** 単項イデアル

可換環 R と、元 $a \in R$ について、以下で定める集合 $\langle a \rangle$ はイデアルである。

$$\langle a \rangle := \{ra \mid r \in R\}$$

このように構成されるイデアルを単項イデアルと呼ぶ。

***Lem.* 13.1.1.** 倍元と単項イデアル

可換環 R について、以下の 3 つは同値である。

1. a は b の倍元
2. $a \in \langle b \rangle$
3. $\langle a \rangle \subset \langle b \rangle$

Proof.

1. → 2. を示す。
$\exists c \in R(a = cb)$ より、$a \in \langle b \rangle$ である。

2. → 3. を示す。
$\forall a' \in \langle a \rangle \, \exists c' \in R(a' = c'a)$ である。
仮定より $\exists c \in R(a = cb)$ である。ゆえに、$a' = (c'c)b$

3. → 1. を示す。
a は b の倍元でないとする。
$a \in \langle a \rangle \setminus \langle b \rangle \neq \varnothing$ より、対偶法より満たす。 ■

***Def.* 13.1.3.** 既約元

可換環 R の元 a について、以下を満たすとき、a を既約元と呼ぶ。

$$a \neq 0_R \land \forall x, y \in R\bigl(xy = a \to x \in R^\times \lor y \in R^\times\bigr)$$

***Cor.* 13.1.2.**

可換環 R と、元 $a \in R$、イデアル I について、以下が成り立つ。

$$a \in I \to \langle a \rangle \subset I$$

13.2　整域

***Def.* 13.2.1. 整域**
　可換環 D が以下を満たすとき、D を整域と呼ぶ。

$$D \neq \{0_D\} \land \forall x, y \in D(xy = 0_D \to x = 0_D \lor y = 0_D)$$

***Cor.* 13.2.1.**
　整域 R の部分環 S は整域である。

***Lem.* 13.2.2. 簡約則**
　整域 D について以下が成り立つ。

$$\forall a, b, c \in D(c \neq 0_D \to (ac = bc \to a = b))$$

Proof.
　補題 12.1.1 より、

$$0_D = ac + -(bc) = ac + (-b)c = (a + (-b))c$$

整域より、$a + (-b) = 0_D$。ゆえに、$a = b$ ■

***Def.* 13.2.2. 素イデアル**
　可換環 R のイデアル I について、以下を満たすとき、I を素イデアルと呼ぶ。

$$R \neq I \land \forall a, b \in R(ab \in I \to a \in I \lor b \in I)$$

　問題。
　$\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ 上の演算 $+, \times$ を以下で定めると、$\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ は可換環をなす。

$$A + B \coloneqq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$A \times B \coloneqq A \cap B$$

　このとき、多項式環の剰余環 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})[X]/\langle \mathbb{Q}X + \mathbb{Z} \rangle$ は整域であるか？

***Cor.* 13.2.3.**
　整域 D のイデアル $\{0_D\}$ は素イデアルである。

***Thm.* 13.2.4. 素イデアルと整域**
　可換環 R とイデアル I について、以下の 3 つは同値である。

1. I は素イデアル
2. 差集合 $R \setminus I$ は乗法について R の部分モノイド
3. 剰余環 R/I は整域

Proof.
　1. $\to$ 2. を示す。
　$\forall a, b \in R \setminus I$ について、I は素イデアルより対偶法から $ab \in R \setminus I$ である。

素イデアルより、$1_R \notin I$ より成り立つ。

2. $\to$ 3. を示す。
$R \setminus I$ が部分モノイドであることから $1_R \notin I$ である。ゆえに $R/I \neq \{0_R\}$
$\forall a, b \in R \setminus I$ について、モノイド性より $ab \in R \setminus I$、すなわち $[a][b] = [ab] \neq 0_{R/I}$ である。
ゆえに対偶法より、$\forall a, b \in R\bigl([a][b] = 0_{R/I} \to [a] = 0_{R/I} \vee [b] = 0_{R/I}\bigr)$ である。

3. $\to$ 1. を示す。
$\forall a, b \in R(ab \in I)$ とする。
$[a][b] = [ab] = 0_{R/I}$ より、整域であることから、$[a] = 0_{R/I} \vee [b] = 0_{R/I}$ すなわち $a \in I \vee b \in I$ ■

***Thm.* 13.2.5. 極大イデアルは素イデアル**
可換環 R について、極大イデアル I は素イデアルである。

Proof.
$\forall x, y \in R(xy \in I)$ とする。
$x \in I$ のとき成り立つ。
$x \notin I$ のとき、$J \coloneqq \{rx + i \mid (r, i) \in R \times I\}$ はイデアルである。
ここで、I は極大かつ $I \subsetneq J$ より、$J = R$ である。
したがって $\exists (r, i) \in R \times I(1_R = rx + i)$ である。
ゆえに、$y = rxy + iy \in I$ である。 ■

***Def.* 13.2.3. 素元**
可換環 R と元 $a \in R \setminus \{0_R\}$ について、単項イデアル $\langle a \rangle$ が素イデアルとなるとき、a を素元と呼ぶ。

***Lem.* 13.2.6. 整域の素元は可逆でない既約元**
整域 D について、素元は可逆でない既約元である。

Proof.
素元 a が可逆とすると、$1_D = a^{-1}a \in \langle a \rangle$ であるので、$D = \langle a \rangle$ より素イデアルではない。背理法より可逆でない。

素元 a が既約元でないとする。$\exists x, y \in D \setminus D^\times (xy = a)$
$xy = a \in \langle a \rangle$ であるので、素イデアルの定義から $\exists r \in D(x = ra \vee y = ra)$ である。
$x = ra$ のとき、可換性から $a(ry - 1_D) = 0_D$ である。D は整域で $a \neq 0_D$ より、$ry = 1_D$ である。これは $y \notin D^\times$ に反する。
$y = ra$ のときも同様。背理法より既約元である。 ■

13.3 一意分解整域

***Def.* 13.3.1. 素元の全体**
可換環 R について、素元の全体を $\mathcal{P}(R)$ と表す。

***Def.* 13.3.2. 素元分解**
整域 D と元 $a \in D$ について、以下が成り立つとき、a は素元分解可能であると呼ぶ。

- $\exists n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathcal{P}(D)^n \exists u \in D^\times \bigl(a = u \prod_{m \in n} p(m)\bigr)$

***Def.* 13.3.3. 一意分解整域**

整域 D について、以下が成り立つとき、D を一意分解整域、または UFD(unique factorization domain) と呼ぶ。

- $\forall a \in D \setminus \{0_D\}$ は素元分解可能であり、各 $p(m)$ の順序交換と u および各 $p(m)$ の可逆元倍を除いて一意である。

***Lem.* 13.3.1. UFD の可逆でない既約元は素元**

一意分解整域 D について、可逆でない既約元は素元である。

Proof.

可逆でない既約元 $a \in D$ を考える。

a は既約元より $a \neq 0_D$ である。したがって、素元分解 $a = u\prod_{m \in n} p(m)$ ができる。

$n = 0$ とすると、$a = u$ より可逆でないことに反する。

$n = 2$ とすると、au^{-1} は既約であることより、$p(0)$ または $p(1)$ が可逆元であるが、補題 13.2.6 に反する。

$n \geq 3$ についても帰納的に否定される。

よって、$n = 1$ である。すなわち $a = up(0)$ と表せる。

$\langle a \rangle = \langle p(0) \rangle$ であるので、a は素元。 ■

***Def.* 13.3.4. 単項イデアル整域**

整域 D のイデアルが全て単項イデアルであるとき、D を単項イデアル整域、または PID(principal ideal domain) と呼ぶ。

***Thm.* 13.3.2. PID は Noether**

単項イデアル整域 D について、$\mathfrak{P}(D)$ 上の以下を満たす点列 $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。

- $\forall n \in \mathbb{N}$ について I_n はイデアル
- $I_n \subset I_{s(n)}$

このとき、以下が成り立つ。

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}(I_n = I_N)$$

Proof.

$J := \bigcup\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ はイデアルである。

単項イデアル整域であるので、$\exists a \in D(\langle a \rangle = J)$

$a \in J$ より、$\exists N \in \mathbb{N}(a \in I_N)$ より、$\langle a \rangle \subset I_N$

$\forall N \in \mathbb{N}_{\geq N}(\langle a \rangle \subset I_N \subset I_n \subset J = \langle a \rangle)$ ■

***Thm.* 13.3.3. PID の素イデアルは極大イデアル**

単項イデアル整域 D の素イデアルは極大イデアルである。

Proof.

極大イデアルでない素イデアル $\langle a \rangle$ を考える。

このとき $\exists b \in D(\langle a \rangle \subsetneq \langle b \rangle \neq D)$

$\exists c \in R(a = cb)$ である。$b \in \langle a \rangle$ のとき、$\langle a \rangle = \langle b \rangle$ となり仮定に反する。

素イデアルの定義より $c \in \langle a \rangle$ であるので、$\exists d \in R(c = da)$

ゆえに $a(bd - 1_D) = 0_D$ であり、整域より $bd = 1_D$

よって $\langle b \rangle = D$ となり矛盾。

背理法より示される。 ■

***Thm.* 13.3.4. PID は UFD**

単項イデアル整域 D は一意分解整域である。

Proof.

素元分解できない $a \in D \setminus \{0_D\}$ が存在すると仮定する。

$1_R \in \langle a \rangle$ とすると、a は可逆元となり、素元分解できる。ゆえに $\langle a \rangle \neq D$ である。

定理 12.2.2、定理 13.2.5 と D が単項イデアル整域であることより、素元 p_1 が存在して $a \in \langle a \rangle \subset \langle p_1 \rangle$

ゆえに $\exists a_1 \in D(a = a_1 p_1)$ と書ける。$a \neq 0_D$ より $a_1 \neq 0_D$

$\langle a \rangle \supset \langle a_1 \rangle$ とすると、$\exists b \in D(a_1 = ba)$ より $a_1(bp_1 - 1_R) = 0_R$ であり、整域と $a_1 \neq 0_R$ から $p_1 \in D^\times$

これは補題 13.2.6 に反する。ゆえに $\langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle$

a は素元分解できないので、a_1 も素元分解できない。

帰納的にイデアル列 $\langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \subsetneq \cdots$ がつくれるが、これは定理 13.3.2 に反する。

ゆえに素元分解可能である。

一意性を示す。

$a = u \prod_{m=0}^{n} p(m) = u' \prod_{m \in n'} p'(m)$ とする。$n \leq l$ とする。

$n = 0$ のとき、$a = u = u' \prod_{m \in n'} p'(m)$ である。

$n' \neq 0$ のとき、補題 13.2.6 より $\prod_{m \in n'} p'(m)$ は可逆でない。したがって u が可逆でなくなり仮定に反するので、$n' = 0$ である。ゆえに一意。

ある $n \in \mathbb{N}$ で一意とする。

$a = u \prod_{m \in s(n)} p(m) = u' \prod_{m \in n'} p'(m)$ とする。

$a \in \langle p(n) \rangle$ より、素イデアルの定義から $\exists k \in n'(p'(k) \in \langle p(n) \rangle)$ である。ゆえに $\langle p'(k) \rangle \subset \langle p(n) \rangle$

定理 13.3.3 より $\langle p'(k) \rangle = \langle p(n) \rangle$

以下の $q \in \mathcal{P}(D)^{n'}$ を考える。

$$q(m) = \begin{cases} p(m) & (m \neq k) \\ 1_D & (m = k) \end{cases}$$

整域より $u \prod_{m \in n} p(m) = u'' \prod_{m \in n'} q(m)$ が成り立つ。帰納法の仮定より一意。

定理 5.1.6 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Def.* 13.3.5. Euclid 整域**

整域 D について、以下を満たす写像 $f\colon D \setminus \{0_D\} \to \mathbb{N}$ が存在するとき、D を Euclid 整域と呼ぶ。

$$\forall a \in D \forall b \in D \setminus \{0_D\} \exists q, r \in D(a = bq + r \wedge (r = 0_D \vee f(r) < f(b)))$$
$$\forall a, b \in D \setminus \{0_D\}(f(a) \leq f(ab))$$

***Thm.* 13.3.5. ED は PID**

Euclid 整域 D は単項イデアル整域である。

Proof.

イデアル I を考える。$0_D \in I$ である。

$\{0_D\} = I$ であるとき、$\langle 0_D \rangle = I$

$\{0_D\} \subsetneq I$ であるとき、$M \coloneqq \{f(i) \mid i \in I \setminus \{0_D\}\}$ を考える。

M は空でない $\mathbb{N}$ の部分より、定理 5.2.7 から最小限が存在する。よって、$\exists m \in I(f(m) = \min M)$
$\forall i \in I$ について、$\exists q, r \in R(i = mq + r \land (r = 0_R \lor f(r) < f(m)))$
今、$r = i - mq \in I$ であるため、$r \neq 0_R$ とすると m の最小性に反する。
よって $r = 0_R$、すなわち $i \in \langle m \rangle$
$m \in I$ より $\langle m \rangle = I$ ■

13.4 体

***Def.* 13.4.1.** 体
可換環 $((F, +), \times)$ が以下を満たすとき、体と呼ぶ。

$$F^\times = F \setminus \{0_F\}$$

さらに、$x \times y^{-1}$ を x/y と略記する。

***Cor.* 13.4.1.**
体は零環ではない。

***Thm.* 13.4.2. 体は ED**
体 F は Euclid 整域である。

Proof.
まず、整域であることを示す。
整域でないとすると、$\forall x, y \in F(xy = 0_F \land x \neq 0_F \land y \neq 0_F)$ である。
$y = x^{-1}xy = x^{-1}0_F = 0_F$ より矛盾。ゆえに整域。
$\forall a \in F \forall b \in F \setminus \{0_F\}$ について、$q = ab^{-1} \land r = 0_F$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 13.4.3. 極大イデアルと体**
可換環 R とイデアル I について、以下の 2 つは同値である。

1. I は極大イデアル
2. 剰余環 R/I は体

Proof.
1. → 2. を示す。
$\forall a \in R\big([a] \neq 0_{R/I}\big)$ を考える。
$a \notin I$ である。ここで、$J \coloneqq \{ra + i \mid (r, i) \in R \times I\}$ を考える。
定義より $I \subset J$ であり、J はイデアル。ゆえに I の極大性から $J = R$
したがって $\exists (r, i) \in R \times I(ra + i = 1_R)$ である。
よって $1_{R/I} = [1_R] = [ra + i] = [r][a] + [i] = [r][a]$ より、$[r] = [a]^{-1}$

2. → 1. を示す。
I が極大イデアルでないとする。すなわちイデアル J が存在して、$I \subsetneq J \subsetneq R$ である。
$\forall a \in J \setminus I$ について、$[a] \neq 0_{R/I}$ である。
体であるので、$\exists b \in R([b][a] = [1_R])$ である。
したがって $ba - 1_R \in I \subset J$ である。ここで、$a \in J$ より $ba \in J$
イデアルは加法について群をなすので $1_R = ba - (ba - 1_R) \in J$ である。したがって $J = R$ となり矛盾。 ■

***Thm.* 13.4.4. 体準同型は単射**

体 F、零環ではない環 R について、環準同型 $\varphi \in R^F$ は単射である。

Proof.

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ はイデアルであり、$\{0_F\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ である。

$\{0_F\}$ は、定理 13.4.3 より極大イデアルであるため、$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_F\} \vee \mathrm{Ker}(\varphi) = F$

零環でない R について、$\varphi(1_F) = 1_R \neq 0_R$ より、$1_R \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$

したがって、$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_F\}$

定理 10.2.2 より単射。 ■

***Def.* 13.4.2. 部分体**

体 F の部分環 R が体をなすとき、体 R を体 F の部分体と呼ぶ。

***Def.* 13.4.3. 素体**

体 F の部分体 F がのみのとき、体 F を素体と呼ぶ。

***Lem.* 13.4.5. 部分素体の存在**

体 F について、F のある部分体 K が存在して、K は素体である。

さらに、体 F の素体である部分体は一意に定まる。

Proof.

以下の集合 K は、体をなす。

$$K \coloneqq \bigcap \left\{F' \mid F' \text{ は } F \text{ の部分体}\right\}$$

K の部分体 L は、F の部分体であるので、定義より $K \subset L$ である。ゆえに、K は素体である。

体 F の素体である部分体 K' について、$K \subset K'$ であり、K' が素体であることより $K = K'$ ■

14 多項式

14.1 多項式環

***Def.* 14.1.1. 多項式環**

可換環 R について、集合 $R[X]$ を以下のように定義する。

$$R[X] \coloneqq \left\{\varphi \in R^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} (\varphi(n) = 0_R)\right\}$$

ここで、$R[X]$ 上の加法 $+$、乗法 $\times$ を以下のように定める。

$$\forall n \in \mathbb{N}((\varphi + \psi)(n) \coloneqq \varphi(n) + \psi(n))$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\left((\varphi \times \psi)(n) \coloneqq \sum_{k \in s(n)} \varphi(k) \times \psi(n-k)\right)$$

定義 14.1.1 より定まる順序対 $((R[X], +), \times)$ は可換環である。この環を多項式環と呼ぶ。

また、多項式環の元を多項式と呼ぶ。

***Lem.* 14.1.1.**
以下で定義する写像 $\gamma \in R[X]^R$ を考える。

$$\gamma(a)(n) \coloneqq \begin{cases} a & (n=0) \\ 0_R & (n \neq 0) \end{cases}$$

このとき、γ は以下を満たす。

1. 単射
2. 加法、乗法について環準同型

Proof.
定義より明らか。 ■

***Cor.* 14.1.2.**
可換環 R と、R の部分環 S について、$S[X]$ は $R[X]$ の部分環である。

***Lem.* 14.1.3.**
可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ について、以下が成り立つ。

$$\forall \varphi \in R[X] \setminus \left\{0_{R[X]}\right\} \exists N \in \mathbb{N}(\varphi(N) \neq 0_R \land \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}(\varphi(n) = 0_R))$$

Proof.
$M \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \neq 0_R\}$ とする。
$\varphi \neq 0_{R[X]}$ より、M は空でない。
定義より M は上に有界。
定理 6.1.14 と定理 6.1.13 より、M は最大元を持つ。 ■

***Def.* 14.1.2. 多項式の次数**
可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ を考える。
$\forall \varphi \in R[X] \setminus \left\{0_{R[X]}\right\}$ について、補題 14.1.3 より定まる自然数を次数と呼び、$\deg(\varphi)$ と表す。

***Def.* 14.1.3. 多項式の値**
可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ について、以下で定める写像 $f \in \left(R^R\right)^{R[X]}$ が存在する。

$$\forall x \in R\left(f(\varphi)(x) \coloneqq \sum_{n \in s(\deg(\varphi))} \varphi(n) \times x^n\right)$$

$f(\varphi)(x)$ を $\varphi(x)$ と略記して、多項式の値と呼ぶ。

***Rem.* 14.1.1. 多項式の値**
以降、多項式 φ について、$\varphi(x)$ と書くときは、特に断らない限り、定義 14.1.1 に基づく写像の値ではなく、定義 14.1.3 多項式の値を表すものとする。

***Def.* 14.1.4. 根**
可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ と、多項式 $\varphi \in R[X]$ を考える。
$\varphi(x) = 0_R$ を満たす元 $x \in R$ を、多項式 φ の根と呼ぶ。

***Def.* 14.1.5. 次数既約**
整域 D 上の多項式環 $D[X]$ について、多項式 $f \in D[X]$ が素元であるとき、f は次数既約であると呼ぶ。

***Cor.* 14.1.4. 整域上の多項式の次数**
整域 D 上の多項式環 $D[X]$ は整域である。さらに、以下が成り立つ。

$$\forall f, g \in D[X] \setminus \left\{0_{D[X]}\right\}\left(f + g = 0_{D[X]} \wedge \deg(f+g) \leq \max\left\{\deg(f), \deg(g)\right\}\right)$$
$$\forall f, g \in D[X] \setminus \left\{0_{D[X]}\right\}(\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g))$$

14.2 体上の多項式

***Thm.* 14.2.1. 体上の多項式環は Euclid 整域**
体 F 上の多項式環 $F[X]$ は Euclid 整域である。

Proof.
F が整域であることから、系 14.1.4 より $F[X]$ は整域である。

$f \in F[X], g \in F[X] \setminus \left\{0_{F[X]}\right\}$ を考える。
$f = 0_{F[X]}$ について、$f = 0_{F[X]} \times g + 0_{F[X]}$ である。

$f \neq 0_{F[X]}$ とする。
$\deg(f) < \deg(g)$ について、$f = 0_{F[X]} \times g + f$ が成り立つ。

$\deg(f) \geq \deg(g)$ とする。
$\deg(f) = 0$ のとき $\deg(g) = 0$ より、以下の q について、$f = q \times g + 0_{F[X]}$ である。

$$q(n) = f(n)g(0)^{-1}$$

$n \geq \deg(f)$ について成り立つとき、$s(n) = \deg(f)$ でも成り立つことを示す。
以下の $h \in F[X]$ を考える。

$$h(m) = \begin{cases} f(m) - f(\deg(f))g(\deg(g))^{-1}g(m - \deg(f) + \deg(g)) & (m \geq \deg(f) - \deg(g)) \\ f(m) & (m < \deg(f) - \deg(g)) \end{cases}$$

$h = 0_{F[X]}$ のとき、以下の q について、$f = dg + 0_{F[X]}$ で成り立つ。

$$d(m) = \begin{cases} f(\deg(f))g(\deg(g))^{-1} & (m = \deg(f) - \deg(g)) \\ 0_R & (m \neq \deg(f) - \deg(g)) \end{cases}$$

$h \neq 0_{F[X]}$ のとき、$\deg(h) \leq n$ となる。帰納法の仮定より、$h = qg + r \wedge \deg(r) < \deg(g)$
ゆえに、$f = dg + h = (d+q)g + r \wedge \deg(r) < \deg(g)$
定理 5.1.6 より成り立つ。

系 14.1.4 より、$\forall f, g \in F[X] \setminus \left\{0_{F[X]}\right\}(\deg(f) \leq \deg(fg))$ より成り立つ。 ■

***Thm.* 14.2.2. 剰余の定理**
定理 14.2.1 より、体 F 上の多項式環 $F[X]$ には除法が定義される。この除法は一意である。

Proof.
体 F と、$g \in F[X] \setminus \left\{0_{F[X]}\right\}$ を考える。

$q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2 \wedge \left(r_1 = 0_{F[X]} \vee \deg(r_1) < \deg(g)\right) \wedge \left(r_2 = 0_{F[X]} \vee \deg(r_2) < \deg(g)\right)$ とする。
$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ である。
$r_2 \neq r_1$ のとき、$deg(g) > \deg(r_2 - r_1) = \deg(q_1 - q_2) + \deg(g) \geq \deg(g)$ より矛盾。
したがって $r_1 = r_2$ である。整域より $q_1 = q_2$ ■

***Def.* 14.2.1.** 代数的
体 E と、E の部分体 F、元 $x \in E$ について、以下を満たすとき、元 x が F 上代数的と呼ぶ。

$$\exists f \in F[X] \setminus \left\{0_{F[X]}\right\}(f(x) = 0_E)$$

***Thm.* 14.2.3.** 最小多項式
体 E と、E の部分体 F、F 上代数的な元 $x \in E$ について、x を根に持つ次数既約な多項式 f が存在する。

Proof.
以下を満たす環準同型 $\varphi \in E^{F[X]}$ を考える。

$$\varphi(g) = g(x)$$

ここで、E は体すなわち整域より、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は素イデアルである。
定理 13.4.2 と定理 13.3.5 より、$\langle f \rangle = \mathrm{Ker}(\varphi)$ なる多項式 $f \in F[X]$ が存在する。
定義より、$\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \left\{0_{F[X]}\right\}$ であるので、f は素元。 ■

***Def.* 14.2.2.** 代数的閉体
体 F 上の多項式環 $F[X]$ を考える。
$F[X]$ の任意の次数既約な多項式 f について、$\deg(f) = 1$ であるとき、F を代数的閉体と呼ぶ。

15　加群

15.1　環上の加群

***Thm.* 15.1.1.** 可換群上の自己準同型全体

可換群 $(V,+)$ について、$\mathrm{End}(V)$ 上の以下の演算 $+'$ を考える。このとき、順序対 $((\mathrm{End}(V),+'),\circ)$ は環をなす。

$$(f+' g)(x) \coloneqq f(x)+g(x)$$

Proof.

定理 10.2.3 より可換群をなす。定理 9.7.6 よりモノイドをなす。

準同型性から $f\circ(g+h)(x)=f(g(x)+h(x))=f(g(x))+f(h(x))=(f\circ g+f\circ h)(x)$

右分配も同様に示せる。■

***Def.* 15.1.1.** 左加群

環 R、可換群 $(V,+)$、定理 15.1.1 の主張する環 $\mathrm{End}(V)$ について、作用 $\rho\in\mathrm{End}(V)^R$ が存在して環準同型であるとき、順序対 $((V,+),\rho)$ を左 R-加群と呼ぶ。または単に V と書き、左 R-加群を表すものとする。

作用の値 $\rho(r)(x)$ を rx と略記する。

***Rem.* 15.1.1.** 左加群の補足

左 R-加群 $((V,+),\rho)$ は以下を満たす。$\forall a,b,c\in V\forall r,s\in R$ とする。

1. V のマグマ性：$a+b\in V$
2. V の半群性：$a+(b+c)=(a+b)+c$
3. V のモノイド性：$\exists 0_V\coloneqq e$
4. V の群性：$\exists(-a)$
5. V の可換群性：$a+b=b+a$
6. 自己準同型性：$r(a+b)=ra+rb$
7. ρ の群準同型性と $\mathrm{End}(V)$ の定義：$(r+s)a=ra+sa$
8. ρ のモノイド準同型性：$r(sa)=(rs)a$

***Lem.* 15.1.2.** 左加群としての環

環 $((R,+),\times)$ と、R の部分環 S を考える。

以下で定める $\rho\in\mathrm{End}(R)^S$ について、順序対 $((R,+),\rho)$ は左 S-加群である。

$$\forall s\in S\forall r\in R(\rho(s)(r)\coloneqq s\times r)$$

Proof.

環の分配法則、および積についての結合性から、ρ は環準同型である。■

***Def.* 15.1.2.** 線型

左 R-加群 V_1,V_2 について、群準同型 $f\in V_2^{V_1}$ が以下を満たすとき、f を加群準同型写像または線型写像と呼ぶ。

$$\forall v\in V_1\forall r\in R(f(rv)=rf(v))$$

***Def.* 15.1.3.** 線型写像の全体

左 R-加群 V, V' について、V から V' への線型写像全体のなす集合は定理 15.1.1 と同様の和、積について環をなす。これを $\mathrm{Hom}_R(V, V')$ と表す。

さらに $\mathrm{End}_R(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_R(V, V)$、$\mathrm{GL}(V) \coloneqq \mathrm{End}_R(V)^\times$ とする。

***Def.* 15.1.4.** 直積加群

環 R と、写像 $V \in Z^\Lambda$ を考える。$\forall\lambda \in \Lambda$ について、$V(\lambda)$ は左 R-加群であるとする。

以下で定める順序対 $((\prod V, +), \rho)$ は左加群である。

$$\forall v_1, v_2 \in \prod V \forall\lambda \in \Lambda((v_1 + v_2)(\lambda) \coloneqq v_1(\lambda) + v_2(\lambda))$$
$$\forall v \in \prod V \forall r \in R \forall\lambda \in \Lambda((rv)(\lambda) \coloneqq rv(\lambda))$$

この左 R-加群を V の直積加群または直積と呼ぶ。

***Def.* 15.1.5.** 直和加群

環 R と、写像 $V \in Z^\Lambda$ を考える。$\forall\lambda \in \Lambda$ について、$V(\lambda)$ は左 R-加群であるとする。

以下で定める順序対 $((\bigoplus V, +), \rho)$ は左加群である。

$$\bigoplus V \coloneqq \left\{v \in \prod V \mid \left|\left\{\lambda \in \Lambda \mid v(\lambda) \neq 0_{V(\lambda)}\right\}\right| < \infty\right\}$$

この左 R-加群を V の直積加群または直和と呼ぶ。

***Cor.* 15.1.3.**

直和 $\bigoplus V$ は、直積 $\prod V$ の部分加群である。

***Cor.* 15.1.4.**

$V \in Z^\Lambda$ を考える。$\forall\lambda \in \Lambda$ について、$V(\lambda)$ は左 R-加群であるとする。

$|\Lambda| < \infty$ ならば $\bigoplus V = \prod V$ である。

***Def.* 15.1.6.** 線型包

左 R-加群 V について、V の部分集合 W を考える。このとき、以下で定める集合 $\mathrm{Span}\, W$ は V の部分加群である。

$$\mathrm{Span}\, W \coloneqq \left\{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists (r_m, w_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (R \times W)^{\mathbb{N}} \left(v = \sum_{m\in n} r_m w_m\right)\right\}$$

これを W の線型包と呼ぶ。

***Def.* 15.1.7.** 生成系

左 R-加群 V について、V の部分集合 W が以下を満たすとき、W を V の生成系と呼ぶ。

$$V = \mathrm{Span}\, W$$

***Def.* 15.1.8.** 一次独立

左 R-加群 V と、V の部分集合 W が以下を満たすとき、W は一次独立であると呼ぶ。

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall (r_m, w_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (R \times W)^{\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in n} r_m w_m = 0_V \to \forall m \in n (r_m = 0_R)\right)$$

***Lem.* 15.1.5. 一次独立と一意性**

左 R-加群 V と、V の一次独立な部分集合 W について、以下が成り立つ。

$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \exists (r_{1,m}, w_{1,m})_{m \in \mathbb{N}}, (r_{2,m'}, w_{2,m'})_{m' \in \mathbb{N}} \in (R \times W)^{\mathbb{N}}$ について、

$$\sum_{m \in n_1} r_{1,m} w_{1,m} = \sum_{m' \in n_2} r_{2,m'} w_{2,m'} \to \forall m \in n_1 (r_{1,m} = 0_R \vee \exists m' \in n_2 (r_{1,m} = r_{2,m'} \wedge w_{1,m} = w_{2,m'}))$$

Proof.

$0_V = \sum_{m \in n_1} r_{1,m} w_{1,m} = \sum_{m' \in n_2} r_{2,m'} w_{2,m'}$ より、一次独立の定義から成り立つ。 ■

***Def.* 15.1.9. 基底**

左 R-加群 V と V の部分集合 B について、B が一次独立かつ V の生成系であるとき、B を V の基底と呼ぶ。

***Def.* 15.1.10. 自由加群**

基底を持つ左 R-加群を自由加群と呼ぶ。

15.2 体上の加群

***Def.* 15.2.1. 線形空間**

体 F について、左 F-加群を F-線形空間と呼ぶ。

***Thm.* 15.2.1. 基底の存在**

体 F について、$\{0_V\}$ でない F-線形空間 V は自由である。

Proof.

$\mathcal{S} \coloneqq \left\{ S \in \mathfrak{P}(V) \mid S \text{ は一次独立} \right\}$ について $(\mathcal{S}, \subset)$ は半順序集合である。

$\exists v \in V \setminus \{0_V\}$ について、$\exists r \in F(rv = 0_V)$ と仮定すると、F は体であることより $v = r^{-1} 0_V = 0_V$ となり反する。

ゆえに、$\{v\} \in \mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ の全順序部分 T を考える。

$\forall n \in \mathbb{N} \forall (x_m)_{m \in n} \in (\bigcup T)^n$ について、$\forall m \in n \exists S_m \in T(x_m \in S_m)$

$\{S_m \mid m \in n\}$ は全順序な有限集合であるので、定理 6.1.13 より最大元を持つ。

ゆえに、$\bigcup T$ は一次独立すなわち、$\bigcup T \in \mathcal{S}$

したがって $\mathcal{S}$ は帰納的である。

定理 4.3.5 より、極大元 S_0 が存在する。

S_0 が生成系でないと仮定すると、一次独立な新たな元がとれるので、極大性に反する。 ■

***Lem.* 15.2.2. 次元**

体 F について、F-線形空間 V を考える。V の任意の基底 B_1, B_2 について、全単射 $f \in B_2^{B_1}$ が存在する。

Proof.

$P \coloneqq \left\{ \varphi \in \bigcup \left\{ B_2^D \mid D \in \mathfrak{P}(B_1) \wedge B_1 \cap B_2 \subset D \right\} \mid \varphi|_{B_1 \cap B_2} = \mathrm{id}_{B_1 \cap B_2} \wedge C(\varphi) \coloneqq \mathrm{dom}(\varphi) \cup (B_2 \setminus \mathrm{Im}(\varphi)) \text{ は一次独立} \right\}$ を考える。

ここで $p \in B_2^{B_1 \cap B_2}$ について、B_2 が基底であることから $p \in P$ である。

P 上の半順序 $\preccurlyeq$ を以下のように定義する。

$$\varphi \preccurlyeq \psi :\leftrightarrow \mathrm{dom}(\varphi) \subset \mathrm{dom}(\psi) \wedge \psi|_{\mathrm{dom}(\varphi)} = \varphi$$

P の全順序部分 Q を考える。
自明な単射 $q \in B_2^{\bigcup\{\mathrm{dom}(\varphi) \mid \varphi \in Q\}}$ が存在する。
$C(q)$ が一次独立でないとすると、$\exists C' \in \mathfrak{P}(C(q))\bigl(|C'| < \infty \wedge C'$は一次独立でない$\bigr)$
$\forall c \in C' \exists \varphi_c \in Q(c \in \mathrm{dom}(\varphi_c) \cup B_2)$ であり、定理 6.1.13 より、$\{\varphi_c \mid c \in C'\} \subset Q$ は最大元 φ_q を持つ。
ここで、$\mathrm{Im}(\varphi_q) \subset \mathrm{Im}(q)$ であるので、$C' \subset C(\varphi_q)$ であり、$C(\varphi_q)$ が一次独立であることに反する。
ゆえに q は上界であり、すなわち P は帰納的である。
定理 4.3.5 より、極大元 σ が存在する。

$\exists b' \in B_2 \setminus \mathrm{Im}(\sigma)$ であるとする。このとき $b' \notin B_1$ より、$b' \notin \mathrm{dom}(\sigma)$ である。
$H \coloneqq \mathrm{Span}(C(\sigma) \setminus \{b'\})$ を考える。一次独立性から $b' \notin H$
ここで B_1 は基底より、$\exists n \in \mathbb{N} \exists (r_m, b_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (R \times B_1)^{\mathbb{N}}\bigl(b' = \sum_{m \in n} r_m b_m\bigr)$ と書ける。
$b' \notin H$ より、$\exists m \in n(b_m \notin H)$ であり、$b_m \notin \mathrm{dom}(\sigma)$ である。
今、以下を満たす写像 $\tau \in B_2^{\mathrm{dom}(\sigma) \cup \{b_m\}}$ を考える。

$$\tau|_{\mathrm{dom}(\sigma)} = \sigma \wedge \tau(b_m) = b'$$

$b' \notin \mathrm{Im}(\sigma)$ より単射。F は体より、$C(\tau) = (C(\sigma) \setminus \{b'\}) \cup \{b_m\}$ は一次独立である。
ゆえに $\tau \in P$ であり $\sigma \prec \tau$ より、σ の極大性に反する。
背理法より σ は全射である。定理 2.3.7 より、単射な右逆写像 $s \in B_1^{B_2}$ が存在する。

同様に、単射 $t \in B_2^{B_1}$ が存在する。
定理 6.3.4 より、全単射 $f \in B_2^{B_1}$ が存在する。 ■

***Def.* 15.2.2.** 有限次元線形空間
体 F について、F-線形空間 V を考える。
V について有限である基底 B が存在するとき、V を F-有限次元線形空間と呼ぶ。

***Def.* 15.2.3.** 次元
体 F について、F-有限次元線形空間 V を考える。
補題 15.2.2 より V の基底の要素数は一意に定まる。この要素数を V の次元と呼び、$\dim V$ と表す。