

さんすうのーと

わたし

2025年10月13日

目次

1	記号論理学	5
1.1	命題	5
1.2	命題結合子と推論規則	5
1.3	いくつかの重要な定理	6
1.4	同値	10
1.5	いくつかの命題結合子と重要な定理	11
1.6	意味論	14
1.7	述語論理	14
1.8	述語論理におけるいくつかの重要な概念と定理	15
1.9	類と関数クラス	18
2	集合論	19
2.1	集合論の述語	19
2.2	集合の構成	20
2.3	集合の和と幂	22
2.4	集合の置換	24
2.5	順序対と集合の直積	28
2.6	無限系譜	29
3	圏論	30
3.1	射の公理	30
3.2	双対	31
3.3	圏と関手	32
3.4	簡約と逆	34
3.5	自然変換	36
3.6	さまざまな圏	38
3.7	普遍	39
3.8	随伴	42
4	写像	45
4.1	関係	45
4.2	写像	46
4.3	集合と写像の圏	47
4.4	選択	49
4.5	像と原像	49
4.6	単射と全射	52
5	関係	53
5.1	自己関係	53
5.2	前順序	54
5.3	同値関係	56
6	順序	57
6.1	半順序	57

6.2	束	59
6.3	Zorn の補題	60
6.4	フィルターとネット	62

まえがき

さんすうの一とです。
私ではない誰かのアイデアを多分に含みます。
引用・注釈はありません。内容が正しいことを保証しません。
間違いや美しくない部分があれば教えてください。私が喜びます。

(追記) いくつかの証明を考察してくれた O 君に感謝を。

1 記号論理学

1.1 命題

Def. 1.1.1. 命題

真偽が確定している言明を、命題と呼ぶ。

Def. 1.1.2. 解釈

各命題のそれぞれに真偽を対応させる対応関係を、解釈と呼ぶ。

Def. 1.1.3. 矛盾

あらゆる解釈において偽を与える命題を、矛盾と呼ぶ。

1.2 命題結合子と推論規則

Def. 1.2.1. 推論

命題 ϕ, ψ について、 ϕ から ψ が推論されることを、 $\phi \vdash \psi$ で表す。

このとき、 ϕ を前提、 ψ を帰結と呼ぶ。

Rem. 1.2.1. 命題論理の推論体系

ここでは推論を行う上で許される規則として、後述する公理 1.2.1、公理 1.2.2、公理 1.2.3、公理 1.2.4、公理 1.2.5、公理 1.2.6、公理 1.2.7 を与える。

Rem. 1.2.2. 命題の結合順序

1つまたは2つの命題から新たな命題を作り出す記号は、命題結合子と呼ばれる。

複数の命題結合子がある場合には結合される順序により与えられる命題が変わるため、厳密さのために()によって結合順序を定める。

Ax. 1.2.1. 同一律

命題 ϕ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \phi$$

Ax. 1.2.2. カット規則

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \psi \text{ と } \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vdash \chi$$

Def. 1.2.2. 連言

命題 ϕ, ψ について、 $\phi \wedge \psi$ は命題である。「 ϕ かつ ψ 」と呼ぶ。

Ax. 1.2.3. 連言の導入則

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$\chi \vdash \phi \text{ と } \chi \vdash \psi \text{ から、 } \chi \vdash \phi \wedge \psi$$

Ax. 1.2.4. 連言の除去則

命題 ϕ, ψ について、以下の 2 つを定める。

$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi &\vdash \phi \\ \phi \wedge \psi &\vdash \psi\end{aligned}$$

Def. 1.2.3. 含意

命題 ϕ, ψ について、 $\phi \rightarrow \psi$ は命題である。「 ϕ ならば ψ 」と呼ぶ。

Ax. 1.2.5. 演繹定理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下を定める。

$$\phi \wedge \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vdash \psi \rightarrow \chi$$

Ax. 1.2.6. Modus Ponens

命題 ϕ, ψ について、以下を定める。

$$\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi) \vdash \psi$$

Ax. 1.2.7. 二重否定の除去

命題 ϕ について、以下を定める。

$$(\phi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash \phi$$

1.3 いくつかの重要な定理

Thm. 1.3.1. 連言の交換

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \phi$

1、2 行目と公理 1.2.3 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$

■

Thm. 1.3.2. 連言の結合

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi) \wedge \chi &\vdash \phi \wedge (\psi \wedge \chi) \\ \phi \wedge (\psi \wedge \chi) &\vdash (\phi \wedge \psi) \wedge \chi \end{aligned}$$

Proof.

公理 1.2.4 より、 $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi \wedge \psi$

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \phi$

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \psi$

1、2 行目と公理 1.2.2 より、 $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi$

1、3 行目と公理 1.2.2 より、 $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、 $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \chi$

5、6 行目と公理 1.2.3 より、 $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \psi \wedge \chi$ である。

4、7 行目と公理 1.2.3 より、 $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ である。

逆も同様。 ■

Thm. 1.3.3. 連言の幕等

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \wedge \phi$$

Proof.

公理 1.2.1 より $\phi \vdash \phi$

1 行目と公理 1.2.3 より成り立つ。 ■

Thm. 1.3.4. 含意の推移

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash \phi \rightarrow \chi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \phi$

公理 1.2.4 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$

公理 1.2.4 より、 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash \phi \rightarrow \psi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \phi \rightarrow \psi$

1、4 行目と公理 1.2.3 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)$

公理 1.2.6 より、 $\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi) \vdash \psi$

5、6 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \psi$

公理 1.2.4 より、 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash \psi \rightarrow \chi$

2、8 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \psi \rightarrow \chi$

7、9 行目と公理 1.2.3 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \psi \wedge (\psi \rightarrow \chi)$

公理 1.2.6 より、 $\psi \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash \chi$

10、11 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \wedge \phi \vdash \chi$

公理 1.2.5 より、 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash \phi \rightarrow \chi$ ■

Thm. 1.3.5. 逆演繹定理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \psi \rightarrow \chi \text{ から、 } \phi \wedge \psi \vdash \chi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \phi$

1 行目、所与の推論と公理 1.2.2 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \psi \rightarrow \chi$

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \psi$

2、3 行目と公理 1.2.3 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge (\psi \rightarrow \chi)$

公理 1.2.6 より、 $\psi \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash \chi$

4、5 行目と公理 1.2.2 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \chi$

■

Thm. 1.3.6. Lukasiewicz の第一公理

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \psi \rightarrow \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、 $\phi \wedge \psi \vdash \phi$

1 行目と公理 1.2.5 より、 $\phi \vdash \psi \rightarrow \phi$

■

Thm. 1.3.7. 無矛盾律

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \perp$$

■

Proof.

公理 1.2.6 より成り立つ。

Thm. 1.3.8. 不条理則

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\perp \vdash \phi$$

■

Proof.

公理 1.2.4 より、 $\perp \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \perp$

1 行目と公理 1.2.5 より、 $\perp \vdash (\phi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$

公理 1.2.7 より、 $(\phi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash \phi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、 $\perp \vdash \phi$

■

Thm. 1.3.9. Peirce 則

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi \vdash \phi$$

Proof.

公理 1.2.4 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \phi \rightarrow \perp$

定理 1.3.7 より、 $(\phi \rightarrow \perp) \wedge \phi \vdash \perp$

定理 1.3.8 より、 $\perp \vdash \psi$

2、3 行目と公理 1.2.2 より、 $(\phi \rightarrow \perp) \wedge \phi \vdash \psi$

4 行目と公理 1.2.5 より、 $\phi \rightarrow \perp \vdash \phi \rightarrow \psi$

1、5 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \phi \rightarrow \psi$

公理 1.2.4 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi$

6、7 行目と公理 1.2.3 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$

公理 1.2.6 より、 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \vdash \phi$

8、9 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \phi$

1、10 行目と公理 1.2.3 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \phi \wedge (\phi \rightarrow \perp)$

2、11 行目と公理 1.2.2 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \perp) \vdash \perp$

12 行目と公理 1.2.5 より、 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \vdash (\phi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$

公理 1.2.7 より、 $(\phi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash \phi$

13、14 行目と公理 1.2.2 より、 $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi \vdash \phi$ ■

Thm. 1.3.10. 背理法

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \wedge (\psi \rightarrow \perp) \vdash \perp \text{ から、 } \phi \vdash \psi$$

Proof.

所与の推論と公理 1.2.5 より、 $\phi \vdash (\psi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$

公理 1.2.7 より、 $(\psi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash \psi$

1、2 行目と公理 1.2.2 より、 $\phi \vdash \psi$ ■

Thm. 1.3.11. 対偶法

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\chi \wedge (\psi \rightarrow \perp) \vdash \phi \rightarrow \perp \text{ から、 } \chi \wedge \phi \vdash \psi$$

Proof.

定理 1.5.6 から、 $(\phi \wedge \chi) \wedge (\psi \rightarrow \perp) \vdash \phi \wedge (\chi \wedge (\psi \rightarrow \perp))$

所与の推論と定理 1.3.5 から、 $\phi \wedge (\chi \wedge (\psi \rightarrow \perp)) \vdash \perp$

1, 2 行目と公理 1.2.2 より、 $(\phi \wedge \chi) \wedge (\psi \rightarrow \perp) \vdash \perp$

3 行目と定理 1.3.10 より、 $\phi \wedge \chi \vdash \psi$

定理 1.3.1 より、 $\chi \wedge \phi \vdash \phi \wedge \chi$

4、5 行目と公理 1.2.2 より、 $\chi \wedge \phi \vdash \psi$ ■

1.4 同値

Rem. 1.4.1. 命題の定義記号

定義記号 \leftrightarrow を導入する。

これは左辺を用いて表現された命題は、議論において全てその左辺と一致する部分を右辺に置き換えて理解するという意味である。

以降に定義する述語の定義にも同様に用いる。

Def. 1.4.1. 同値

新たな命題結合子 \leftrightarrow を定める。

命題 ϕ, ψ について、命題 $\phi \leftrightarrow \psi$ を以下で定める。

$$\phi \leftrightarrow \psi : \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

「 ϕ と ψ は必要十分」と呼ぶ。

Lem. 1.4.1. 連言における命題の代入原理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \wedge \chi) \wedge (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \psi \wedge \chi$$

Proof.

明らか。 ■

Lem. 1.4.2. 含意の前件における命題の代入原理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \rightarrow \chi) \wedge (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \psi \rightarrow \chi$$

Proof.

定理 1.3.4 より明らか。 ■

Lem. 1.4.3. 含意の後件における命題の代入原理

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$(\chi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash \chi \rightarrow \psi$$

Proof.

定理 1.3.4 より明らか。 ■

Thm. 1.4.4. 命題の代入原理

命題 ϕ, ψ と、 \wedge, \rightarrow によって … と結合される命題 P について、以下が成り立つ。

$$P(\phi, \dots) \wedge (\phi \leftrightarrow \psi) \vdash P(\psi, \dots)$$

Proof.

補題 1.4.1、補題 1.4.2、補題 1.4.3 から、帰納的に成り立つ。 ■

1.5 いくつかの命題結合子と重要な定理

Def. 1.5.1. 定理

新たな命題 \top を以下で定める。

$$\top : \leftrightarrow \perp \rightarrow \perp$$

Rem. 1.5.1. 定理からの帰結

命題 ϕ について、簡単のために $\top \vdash \phi$ を $\vdash \phi$ で表す。

Def. 1.5.2. 左含意

新たな命題結合子 \leftarrow を定める。

命題 ϕ, ψ について、命題 $\phi \leftarrow \psi$ を以下で定める。

$$\phi \leftarrow \psi : \leftrightarrow \psi \rightarrow \phi$$

Def. 1.5.3. 否定

新たな命題結合子 \neg を定める。

命題 ϕ について、命題 $\neg\phi$ を以下で定める。

$$\neg\phi : \leftrightarrow \phi \rightarrow \perp$$

Def. 1.5.4. 選言

新たな命題結合子 \vee を定める。

命題 ϕ, ψ について、命題 $\phi \vee \psi$ を以下で定める。

$$\phi \vee \psi : \leftrightarrow \neg\phi \rightarrow \psi$$

Rem. 1.5.2. 命題結合子の優先順序

結合の順序は以下で定めるものとする。

1. 否定 \neg
2. 連言 \wedge
3. 選言 \vee
4. 含意 \rightarrow
5. 左含意 \leftarrow
6. 同値 \leftrightarrow

ただし () がある場合は、その中を先に結合する。

Thm. 1.5.1. 定理は全てに導かれる

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \top$$

Proof.

明らか。 ■

Thm. 1.5.2. 否定の導入則

命題 ϕ, χ について、以下が成り立つ。

$$\chi \wedge \phi \vdash \perp \text{ から、 } \chi \vdash \neg\phi$$

Proof.

公理 1.2.5 より明らか。 ■

Thm. 1.5.3. 選言の導入則

命題 ϕ, ψ について、以下の 2 つが成り立つ。

$$\begin{aligned}\phi &\vdash \phi \vee \psi \\ \psi &\vdash \phi \vee \psi\end{aligned}$$

Proof.

第一式を示す。

定理 1.3.7 と定理 1.3.8 より、 $\phi \wedge \neg\phi \vdash \psi$

公理 1.2.5 より成り立つ。

第二式は、定理 1.3.6 より明らか。 ■

Thm. 1.5.4. 選言の除去則

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \chi \text{ と } \psi \vdash \chi \text{ から、 } \phi \vee \psi \vdash \chi$$

Proof.

$\phi \vdash \chi$ から $\neg\chi \wedge \phi \vdash \perp$ であるので、 $\neg\chi \vdash \neg\phi$ である。

$(\phi \vee \psi) \wedge \neg\chi \vdash \psi$ である。

$\psi \vdash \chi$ から、 $(\phi \vee \psi) \wedge \neg\chi \vdash \perp$ であるので、 $\phi \vee \psi \vdash \neg\neg\chi$ である。

二重否定を除去して成り立つ。 ■

Thm. 1.5.5. 選言の交換

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi$$

Proof.

明らか。 ■

Thm. 1.5.6. 連言の結合

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\phi \vee \psi) \vee \chi &\vdash \phi \vee (\psi \vee \chi) \\ \phi \vee (\psi \vee \chi) &\vdash (\phi \vee \psi) \vee \chi \end{aligned}$$

Proof.

略。 ■

Thm. 1.5.7. 選言の幂等

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi \vdash \phi \vee \phi$$

Proof.

定理 1.5.3 より明らか。。 ■

Thm. 1.5.8. 選言三段論法

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$(\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi \vdash \psi$$

Proof.

明らか。 ■

Thm. 1.5.9. 吸収律

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \phi \vee (\phi \wedge \psi) &\vdash \phi \\ \phi &\vdash \phi \wedge (\phi \vee \psi) \end{aligned}$$

Proof.

略。 ■

Thm. 1.5.10. 分配律

命題 ϕ, ψ, χ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \vdash \phi \vee (\psi \wedge \chi) &\leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \\ \vdash \phi \wedge (\psi \vee \chi) &\leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \end{aligned}$$

Proof.

略。 ■

Thm. 1.5.11. De Morgan の法則

命題 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\vdash \neg\phi \vee \neg\psi &\leftrightarrow \neg(\phi \wedge \psi) \\ \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi &\leftrightarrow \neg(\phi \vee \psi)\end{aligned}$$

Proof.

略。 ■

Thm. 1.5.12. 排中律

命題 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\vdash \phi \vee \neg\phi$$

Proof.

明らか。 ■

1.6 意味論

Def. 1.6.1. 恒真命題

あらゆる解釈において真を与える命題を、恒真命題と呼ぶ。

Def. 1.6.2. 意味論的同値

命題 ϕ, ψ について、あらゆる解釈においてその真偽が一致するとき、 ϕ と ψ は意味論的に同値であると言う。

Def. 1.6.3. 論理的帰結

命題 ϕ, ψ について、 ϕ が真であるあらゆる解釈において ψ が真であるとき、 $\phi \models \psi$ で表す。

特に ψ が恒真命題であるとき、 $\models \psi$ で表す。

Def. 1.6.4. 健全性

ある推論体系（推論規則と命題結合子の解釈）を考える。

あらゆる命題 ϕ について、この推論体系が以下を満たすとき、その推論体系は健全であるという。

$$\vdash \phi \text{ から, } \models \phi$$

Def. 1.6.5. 完全性

ある推論体系（推論規則と命題結合子の解釈）を考える。

あらゆる命題 ϕ について、この推論体系が以下を満たすとき、その推論体系は完全であるという。

$$\models \phi \text{ から, } \vdash \phi$$

1.7 述語論理

Rem. 1.7.1. 述語論理の推論体系

ここでは推論を行う上で許される規則として、後述する公理 1.7.1、公理 1.7.2 を加える。

Def. 1.7.1. 個体

学問における対象を、個体と呼ぶ。

個体を表す記号を項と呼び、各項のそれぞれに個体を対応させる対応関係を、解釈と呼ぶ。

Def. 1.7.2. 議論領域

議論領域とは、個体の全体である。

Def. 1.7.3. 述語

0個以上の個体の列について、その全てが確定したときに命題となる言明を、述語と呼ぶ。

述語を表す記号である述語記号 ϕ と、個体を表す記号である項の列 x, \dots を用いて $\phi(x, \dots)$ で表す。

述語が要求する個体の数を、その述語のアリティと呼ぶ。

Def. 1.7.4. 全称量化子

量化子 \forall を定める。

アリティ 1 の述語 ϕ について、 $\forall x(\phi(x))$ は命題である。

Ax. 1.7.1. 全称の導入則

項 x 、項 x を出現させない命題 ϕ 、アリティ 1 の述語 ψ について、以下を定める。

$$\phi \vdash \psi(x) \text{ から、 } \phi \vdash \forall x(\psi(x))$$

Ax. 1.7.2. 全称の除去則

項 y とアリティ 1 の述語 ϕ について、以下を定める。

$$\forall x(\phi(x)) \vdash \phi(y)$$

1.8 述語論理におけるいくつかの重要な概念と定理

Thm. 1.8.1. 健全性定理

小節 1.2、小節 1.7 により得られる推論は健全である。

Proof.

$\phi \wedge \psi$ は、 ϕ と ψ がともに真であるときに真であるとして、そうでないときは偽とする。

$\phi \rightarrow \psi$ は、 ϕ が真で ψ が偽であるときに偽であるとして、そうでないときは真とする。

$\forall x(\phi(x))$ は、議論領域上のあらゆる x について $\phi(x)$ が真であるときに真であるとして、そうでないときは偽とする。

このとき各推論規則は、真の前提から真の帰結を与える。 ■

Def. 1.8.1. 存在量化子

量化子 \exists を定める。

アリティ 1 の述語 ϕ について、存在量化子 \exists を以下で定める。

$$\exists x(\phi(x)) : \leftrightarrow \neg \forall x(\neg \phi(x))$$

Thm. 1.8.2. 存在の導入則

アリティ 1 の述語 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\phi(y) \vdash \exists x(\phi(x))$$

Proof.

$\forall x(\neg\phi(x))$ を仮定する。

全称の除去則より $\neg\phi(y)$ であり、前提より $\phi(y)$ であるので、矛盾。

定理 1.3.10 より、 $\neg\forall x(\neg\phi(x))$ を得る。 ■

Thm. 1.8.3. 存在の除去則

アリティ 1 の述語 ϕ 、項 x を出現させない命題 ψ, χ について、以下を定める。

$$\chi \wedge \phi(x) \vdash \psi \text{ から、 } \chi \wedge \exists y(\phi(y)) \vdash \psi$$

Proof.

公理 1.2.5 より、 $\chi \vdash \phi(x) \rightarrow \psi$ である。

$\neg\psi$ を仮定する。

$\phi(x)$ を仮定すると、前提 χ より矛盾するので、定理 1.3.10 より $\neg\phi(x)$ である。

$\chi, \neg\psi$ は項 x を出現させないので、 $\forall x(\neg\psi(x))$ である。

$\exists y(\phi(y)) : \leftrightarrow \neg\forall x(\neg\phi(x))$ であるため、矛盾する。

定理 1.3.10 より ψ を得る。 ■

Thm. 1.8.4. 量化子と連言

アリティ 1 の述語 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\vdash \forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x(\phi(x)) \wedge \forall x(\psi(x)) \\ &\quad \exists x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x(\phi(x)) \wedge \exists x(\psi(x)) \end{aligned}$$

Proof.

略。 ■

Thm. 1.8.5. 量化子と選言

アリティ 1 の述語 ϕ, ψ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\forall x(\phi(x)) \vee \forall x(\psi(x)) \vdash \forall x(\phi(x) \vee \psi(x)) \\ &\vdash \exists x(\phi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \vee \exists x(\psi(x)) \end{aligned}$$

Proof.

略。 ■

Thm. 1.8.6. 量化子と否定

アリティ 1 の述語 ϕ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\vdash \forall x(\neg\phi(x)) &\leftrightarrow \neg\exists x(\phi(x)) \\ \vdash \exists x(\neg\phi(x)) &\leftrightarrow \neg\forall x(\phi(x))\end{aligned}$$

Proof.

定義より明らか。 ■

Def. 1.8.2. 一意存在量化子

量化子 $\exists!$ を定める。

アリティ 1 の述語 ϕ について、存在量化子 $\exists!$ を以下で定める。

$$\exists!x(\phi(x)) : \leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \wedge \forall y, z(\phi(y) \wedge \phi(z) \rightarrow y = z)$$

Def. 1.8.3. 等号

アリティ 2 の述語記号 $=$ を定める。

$= (x, y)$ を、簡単のために $x = y$ で表す。

Ax. 1.8.1. 等号の反射律

項 x について、以下を定める。

$$\vdash x = x$$

Ax. 1.8.2. 等号の代入原理

アリティ 1 の述語 ϕ 、項 x, y について、以下を定める。

$$\phi(x) \wedge x = y \vdash \phi(y)$$

Thm. 1.8.7. 等号の対称律

項 x, y について、以下が成り立つ。

$$x = y \vdash y = x$$

Proof.

$x = x \wedge x = y$ である。

左命題の左辺に、右命題から得る代入を行って、 $y = x$ を得る。 ■

Thm. 1.8.8. 等号の推移律

項 x, y, z について、以下が成り立つ。

$$x = y \wedge y = z \vdash x = z$$

Proof.

明らか。 ■

Def. 1.8.4. 等号否定

アリティ 2 の述語記号 \neq を定める。

項 x, y について、以下で定める。

$$\neq(x, y) : \leftrightarrow \neg(x = y)$$

$\neq(x, y)$ を、簡単のために $x \neq y$ で表す。

Rem. 1.8.1. 項の定義記号

定義記号 $:=$ を導入する。

これは左辺にある項は、議論において全てその左辺と一致する項を右辺に置き換えて理解するという意味である。以降に定義する関数クラスの定義にも同様に用いる。

1.9 類と関数クラス

Def. 1.9.1. 類

アリティ 1 の述語 A を、類と呼ぶ。

類であることを強調するために、 $A(x)$ を $x \in A$ と書く。

Rem. 1.9.1. 類についての略記

略記 \forall, \exists を、アリティ 2 の述語 ϕ について、以下で定める。

$$\begin{aligned}\forall x, y(\phi(x, y)) &: \leftrightarrow \forall x \forall y(\phi(x, y)) \\ \exists x, y(\phi(x, y)) &: \leftrightarrow \exists x \exists y(\phi(x, y))\end{aligned}$$

これは、3 個以上についても同様に定める。

略記 $\forall \in, \exists \in$ を、類 X とアリティ 1 の述語 ϕ について、以下で定める。

$$\begin{aligned}\forall x \in X(\phi(x)) &: \leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow \phi(x)) \\ \exists x \in X(\phi(x)) &: \leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge \phi(x))\end{aligned}$$

Rem. 1.9.2. 類は個体ではない

類は個体ではない（ある制限のもとで類を個体とみなすことはできる、集合論など）。

そのため、類の類を定義することはできない。

Def. 1.9.2. 関数クラス

以下を満たす述語 ϕ を考える。

$$\forall x \dots \exists!y(\phi(x, \dots, y))$$

この対応関係を関数クラスと呼び、関数クラスを表す記号である関数記号 F と項の列 x, \dots を用いて、 y を $F(x, \dots)$ で表す。

要求する x, \dots の個数を、関数クラス F のアリティと定める。

Def. 1.9.3. 恒等関数

アリティ 1 の関数記号 id を定める。

項 x について、以下で定める。

$$\text{id}(x) := x$$

2 集合論

2.1 集合論の述語

Def. 2.1.1. 集合

集合論では、9つの公理（公理 2.2.1、公理 2.2.2、公理 2.2.3、公理 2.2.4、公理 2.6.1、公理 2.3.1、公理 2.3.2、公理 2.4.1、公理 2.2.5）が与えられる。

項を集合と呼ぶ。

Def. 2.1.2. 所属

アリティ 2 の述語記号 \in を定める。

$\in (x, y)$ を、簡単のために $x \in y$ で表す。

Rem. 2.1.1. 集合は類

集合 y について、 $\in (, y)$ はアリティ 1 の述語、すなわち類となる。

ここで、類の \in と、所属の \in は同一視される。

一方で、類に対して対応する集合を一般には与えることができない点に注意されたい。

Def. 2.1.3. 所属否定

集合 x, X について、述語記号 \notin を以下で定める。

$$\notin (x, X) : \leftrightarrow \neg(x \in X)$$

$\notin (x, X)$ を、簡単のために $x \notin X$ で表す。

Def. 2.1.4. 要素

集合 x, X について、 $x \in X$ であるとき、 x は X の要素または元と呼ぶ。

Rem. 2.1.2. 集合系

その要素に要素があることを強調したいとき、この集合を集合系と呼ぶ。

Def. 2.1.5. 包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 \subset を以下で定める。

$$\subset (X, Y) : \leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow x \in Y)$$

$\subset (X, Y)$ を、簡単のために $X \subset Y$ で表す。

Def. 2.1.6. 真包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 \subsetneq を以下で定める。

$$\subsetneq (X, Y) : \leftrightarrow X \subset Y \wedge X \neq Y$$

$\subsetneq (X, Y)$ を、簡単のために $X \subsetneq Y$ で表す。

Def. 2.1.7. 左包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 \subset を以下で定める。

$$\subset(X, Y) : \leftrightarrow Y \subset X$$

$\subset(X, Y)$ を、簡単のために $X \subset Y$ で表す。

Def. 2.1.8. 左真包含

集合 X, Y について、アリティ 2 の述語記号 \subsetneq を以下で定める。

$$\subsetneq(X, Y) : \leftrightarrow Y \subsetneq X$$

$\subsetneq(X, Y)$ を、簡単のために $X \subsetneq Y$ で表す。

2.2 集合の構成

Ax. 2.2.1. 外延性の公理

$$\forall X \forall Y (\forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Cor. 2.2.1. 相等の定義

以下が成り立つ。

$$\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

Cor. 2.2.2. 包含の半順序性

以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \forall X (X \subset X) \\ & \forall X \forall Y (X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X = Y) \\ & \forall X \forall Y \forall Z (X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z) \end{aligned}$$

Rem. 2.2.1. 集合の外延的定義

公理 2.2.1 より、全ての要素を書き下せば集合は一意に定まる。このような全ての要素を書き下す集合の定義方法を、外延的定義と呼ぶ。

例えば、要素が x, y, z であり、かつ、それのみである集合 X に対して以下の定義をする。

$$X = \{x, y, z\}$$

Ax. 2.2.2. 空集合の公理

$$\exists A \forall x (x \notin A)$$

Def. 2.2.1. 空集合

公理 2.2.1 から、公理 2.2.2 が主張する集合が一意に定まる。この集合を空集合と呼び、 \emptyset で表す。

外延的に $\{\}$ とも表す。

Cor. 2.2.3.

$$\forall X(\emptyset \subset X)$$

Ax. 2.2.3. 対の公理

$$\forall x \forall y \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

Def. 2.2.2. 単集合

$x = y$ を考えることで、集合 $\{x, x\}$ が存在する。この集合は、公理 2.2.1 から、 $\{x\}$ とも表せる。

このような单一の元からなる集合を単集合 (singleton) と呼ぶ。

Ax. 2.2.4. 正則性の公理

$$\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall y(y \in X \rightarrow y \notin x)))$$

Lem. 2.2.4.

$$\forall x \forall y(x \notin y \vee y \notin x)$$

Proof.

公理 2.2.3 より、 $\{x, y\}$ が存在する。

公理 2.2.4 より、

$$\exists z(z \in \{x, y\} \wedge \forall t(t \in \{x, y\} \wedge t \notin z))$$

よって、

$$\forall t(t \in \{x, y\} \wedge t \notin x) \vee \forall t(t \in \{x, y\} \wedge t \notin y)$$

ゆえに、

$$(x \notin x \wedge y \notin x) \vee (x \notin y \wedge y \notin y)$$

したがって、

$$y \notin x \vee x \notin y$$

■

Cor. 2.2.5.

$$\forall x(x \notin x)$$

Ax. 2.2.5. 選択の公理

$$\forall X(\emptyset \notin X \wedge \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists A \forall x(x \in X \rightarrow \exists t(x \cap A = \{t\})))$$

2.3 集合の和と幂

Ax. 2.3.1. 和集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists B(t \in B \wedge B \in X))$$

Def. 2.3.1. 和集合

集合系 X について、公理 2.3.1 の主張する集合 A が存在して、これは公理 2.2.1 から一意に定まる。このような集合 A を、 X の和集合と呼び、 $\bigcup X$ で表す。

和集合 $\bigcup \{x, y\}$ を、簡単のために $x \cup y$ とも表す。

Cor. 2.3.1.

$$\forall X \forall x(x \in X \rightarrow x \subset \bigcup X)$$

Cor. 2.3.2.

$$\forall X \forall Y(X \subset Y \rightarrow \bigcup X \subset \bigcup Y)$$

Cor. 2.3.3.

$$\forall x \forall y \forall z(x \subset y \rightarrow x \cup z \subset y \cup z)$$

Cor. 2.3.4.

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

Cor. 2.3.5.

$$\forall x(\bigcup \{x\} = x)$$

Ax. 2.3.2. 幂集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \subset X)$$

Def. 2.3.2. 幂集合

集合 X について、公理 2.3.2 の主張する集合 A が存在して、これは公理 2.2.1 から一意に定まる。このような集合 A を、幂集合と呼び、 $\mathfrak{P}(X)$ で表す。

Rem. 2.3.1. 包含される量化子についての略記

略記 $\forall \subset, \exists \subset$ を以下で定める。

$$\begin{aligned}\forall x \subset X(p(x)) &:\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{P}(X)(p(x)) \\ \exists x \subset X(p(x)) &:\Leftrightarrow \exists x \in \mathfrak{P}(X)(p(x))\end{aligned}$$

Cor. 2.3.6.

$$\forall X(\emptyset \in \mathfrak{P}(X) \wedge X \in \mathfrak{P}(X))$$

Cor. 2.3.7.

$$\forall X(\mathfrak{P}(X) \notin X)$$

Cor. 2.3.8.

$$\forall X \forall Y(X \subset Y \rightarrow \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y))$$

Cor. 2.3.9.

$$\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

Cor. 2.3.10.

$$\forall x(\mathfrak{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\})$$

Cor. 2.3.11.

$$\forall X \left(\bigcup \mathfrak{P}(X) = X \right)$$

Def. 2.3.3. 被覆

集合 A について、以下を満たす集合 X を A の被覆と呼ぶ。

$$X \subset \mathfrak{P}(A) \wedge A = \bigcup X$$

2.4 集合の置換

Ax. 2.4.1. 置換の公理図式

アリティ 2 の述語記号 ψ をパラメータとする以下の公理図式を考える。

$$\forall x \forall y \forall z (\psi(x, y) \wedge \psi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \psi(x, t)))$$

Rem. 2.4.1. 集合の内包的定義 1

公理 2.2.1 より、公理 2.4.1 より主張される集合 A は一意に定まる。公理 2.4.1 に基づく定義方法を、内包的定義と呼び、公理 2.4.1 の前件を満たすアリティ 2 の述語記号 ψ について、以下で表す。

$$A = \{y \mid \exists x \in X (\psi(x, y))\}$$

Thm. 2.4.1. 分出の公理図式

アリティ 1 の述語記号 ψ について、以下が成り立つ。

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \in X \wedge \psi(t))$$

Proof.

アリティ 1 の述語記号 P を考える。排中律より、

$$\forall X (\exists a (a \in X \wedge P(a)) \vee \forall a \neg(a \in X \wedge P(a)))$$

$\forall a \neg(a \in X \wedge P(a))$ のとき、 $A = \emptyset$ で示される。

$\exists a (a \in X \wedge P(a))$ のとき、以下のようないアリティ 2 の述語記号 ψ を考える。

$$\psi(x, y) : \leftrightarrow (P(x) \wedge y = x) \vee (\neg P(x) \wedge y = a)$$

公理 2.4.1 より、

$$\exists A \forall y (y \in A \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge ((P(x) \wedge y = x) \vee (\neg P(x) \wedge y = a))))$$

すなわち、

$$\exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists x ((x \in X \wedge P(x) \wedge t = x) \vee (x \in X \wedge \neg P(x) \wedge t = a)))$$

\exists を除去して、

$$\exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow (t \in X \wedge P(t)) \vee t = a)$$

$t = a \rightarrow (a \in X \wedge P(a))$ より、

$$\exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \in X \wedge P(t))$$

■

Rem. 2.4.2. 集合の内包的定義 2

公理 2.2.1 より、定理 2.4.1 より主張される集合 A は一意に定まる。定理 2.4.1 に基づく定義方法も、内包的定義と呼び、以下で表す。

$$A = \{t \mid t \in X \wedge \psi(t)\}$$

簡単のために、以下でも表す。

$$A = \{t \in X \mid \psi(t)\}$$

Def. 2.4.1. 共通集合

集合系 X について、以下で定める集合を、 X の共通集合と呼び、 $\bigcap X$ で表す。

$$\bigcap X := \left\{ x \mid x \in \bigcup X \wedge \forall Y (Y \in X \rightarrow x \in Y) \right\}$$

共通集合 $\bigcap \{x, y\}$ を、簡単のために $x \cap y$ とも表す。

Rem. 2.4.3. 共通集合の定義について

本ノートにおける共通集合の定義は、 $\bigcap \emptyset$ の取り扱いにおいて一般的ではないことに注意されたい。

Cor. 2.4.2.

$$\bigcap \emptyset = \emptyset$$

Cor. 2.4.3.

$$\forall x \forall X \left(x \in X \rightarrow \bigcap X \subset x \right)$$

Cor. 2.4.4.

$$\forall x \forall y \forall z (x \subset y \rightarrow x \cap z \subset y \cap z)$$

Cor. 2.4.5.

$$\forall X \forall Y \left(X \neq \emptyset \wedge X \subset Y \rightarrow \bigcap Y \subset \bigcap X \right)$$

Cor. 2.4.6.

$$\forall x \left(\bigcap \{x\} = x \right)$$

Cor. 2.4.7. 吸収法則

$$\begin{aligned}\forall x \forall y (x \cup (x \cap y) = x) \\ \forall x \forall y (x \cap (x \cup y) = x)\end{aligned}$$

Cor. 2.4.8. 分配法則

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))\end{aligned}$$

Cor. 2.4.9.

$$\forall X (\bigcap X \subset \bigcup X)$$

Cor. 2.4.10.

$$\forall X \forall Y (\mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cap Y))$$

Def. 2.4.2. 分割

集合 A について、以下を満たす A の被覆 X を A の分割と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$$

明示的に以下で表す。

$$A = \bigsqcup X$$

Def. 2.4.3. 差集合

集合 X, Y について、以下で定める集合を、 X と Y の差集合と呼び、 $X \setminus Y$ で表す。

$$X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$$

Cor. 2.4.11.

$$\forall X \forall Y (X \setminus Y \subset X)$$

Cor. 2.4.12.

$$\begin{aligned}\forall X(X \setminus X = \emptyset) \\ \forall X(X \setminus \emptyset = X) \\ \forall X(\emptyset \setminus X = \emptyset)\end{aligned}$$

Cor. 2.4.13.

$$\forall X \forall Y \forall Z (X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z))$$

Cor. 2.4.14.

$$\forall X \forall Y \forall Z (Y \subset Z \rightarrow X \setminus Z \subset X \setminus Y)$$

Cor. 2.4.15.

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \leftrightarrow X \setminus Y = \emptyset)$$

Thm. 2.4.16. De Morgan の法則

集合 X と空でない集合系 A について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}X \setminus \bigcup A &= \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \\ X \setminus \bigcap A &= \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\end{aligned}$$

Proof.

第一の定理を示す。

$$\begin{aligned}x \in X \setminus \bigcup A &\leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcup A \\ &\leftrightarrow x \in X \wedge \forall Y (Y \in A \rightarrow x \notin Y) \leftrightarrow x \in X \wedge \forall Y (Y \in A \rightarrow x \notin X \setminus Y)\end{aligned}$$

$A \neq \emptyset$ より、

$$\leftrightarrow x \in X \wedge x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \leftrightarrow x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

第二の定理を示す。

$$\begin{aligned}x \in X \setminus \bigcap A &\leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcap A \leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin \bigcup A \vee \exists Y (Y \in A \wedge x \notin Y)) \\ &\leftrightarrow x \in X \setminus \bigcup A \vee \exists Y (Y \in A \wedge x \in X \setminus Y) \\ &\leftrightarrow x \in X \setminus \bigcup A \vee x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \\ &\leftrightarrow x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \vee x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \\ &\leftrightarrow x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\end{aligned}$$

最後から 2 行目への変形には、第一の定理を用いた。 ■

2.5 順序対と集合の直積

Def. 2.5.1. 順序対

公理 2.2.3 から、 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ が存在する。このような集合を、順序対と呼び、 (x, y) で表す。

Cor. 2.5.1. 順序対の相等

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((x_1, x_2) = (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$$

Cor. 2.5.2. 順序対の順序性

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (x, y) \neq (y, x))$$

Cor. 2.5.3. 順序対の取り出し

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (x = \bigcup \bigcap (x, y)) \\ & \forall x \forall y (y = \bigcup \bigcap (x, y) \wedge (\bigcap (x, y) = \bigcap (x, y))) \vee (y = \bigcup (\bigcup (x, y) \setminus \bigcap (x, y)) \wedge (\bigcap (x, y) \neq \bigcap (x, y))) \end{aligned}$$

Lem. 2.5.4.

$$\forall X \forall Y \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in Y \rightarrow (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)))$$

Proof.

$$\begin{aligned} & x \in X \wedge y \in Y \\ & \{x\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \wedge \{x, y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \\ & (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \end{aligned}$$

■

Def. 2.5.2. 直積集合

集合 X, Y について、以下を満たす集合を X と Y の直積集合と呼び、 $X \times Y$ で表す。

$$X \times Y := \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = (x, y))\}$$

Cor. 2.5.5.

$$\forall X (X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset)$$

Cor. 2.5.6.

$$\begin{aligned}\forall X_1, X_2, Y & ((X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)) \\ \forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 & ((X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2)) \\ \forall X_1, X_2, Y & ((X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y))\end{aligned}$$

2.6 無限系譜

Ax. 2.6.1. 無限の公理

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A))$$

Def. 2.6.1. 無限系譜

集合 X が無限系譜であるとは、以下を満たすことである。

$$\emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow x \cup \{x\} \in X)$$

公理 2.6.1 より無限系譜は存在する。

Cor. 2.6.1.

$$\forall X \forall Y (X \text{ は無限系譜である} \wedge Y \text{ は無限系譜である} \rightarrow X \cap Y \text{ は無限系譜である})$$

Lem. 2.6.2.

以下が成り立つ。

$$\forall A \left(A \neq \emptyset \wedge \forall X \in A (X \text{ は無限系譜である}) \rightarrow \bigcap A \text{ は無限系譜である} \right)$$

Proof.

空でない A を考える。

$\forall X \in A (\emptyset \in X)$ であるので、 $\emptyset \in \bigcap A$ である。

$\forall x \in \bigcap A$ について、 $\forall X \in A (x \in X)$ であり、無限系譜であることから $x \cup \{x\} \in X$ である。

ゆえに、 $x \cup \{x\} \in \bigcap A$ である。

よって、 $\bigcap A$ は無限系譜である。 ■

Lem. 2.6.3.

無限系譜 X について、以下で定める集合は無限系譜である。

$$\bigcap \{Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である}\}$$

Proof.

$A := \{Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である}\}$ とすると、 $X \in A$ より、 $A \neq \emptyset$ である。

補題 2.6.2 より成り立つ。 ■

Lem. 2.6.4. 最小無限系譜の一意性

補題 2.6.3 で定める集合は、無限系譜 X の取り方によらずに一意に定まる。

Proof.

$\omega(X) := \bigcap \{Y \subset X \mid Y \text{ は無限系譜である}\}$ とする。

X_1, X_2 の 2 つの無限系譜を考える。

補題 2.6.2 より $X_1 \cap X_2$ も無限系譜であり、定義より $\omega(X_2) \subset X_1 \cap X_2 \subset X_1$ である。

定義より、 $\omega(X_1) \subset \omega(X_2)$ である。

同様に $\omega(X_1) \supset \omega(X_2)$ であるため、示される。 ■

3 圏論

3.1 射の公理

Rem. 3.1.1. 対象と恒等射の同一視

本ノートでは、対象を恒等射と同一視するという、少数派の視点をとることに注意されたい。

Def. 3.1.1. 射

圏論では、6 つの公理（公理 3.1.1、公理 3.1.2、公理 3.1.3、公理 3.1.4、公理 3.1.5、公理 3.1.6）が与えられる。項を射と呼ぶ。

Def. 3.1.2. 始域

アリティ 1 の関数記号 $\text{dom}()$ を考える。

射 f について、 $\text{dom}(f)$ を f の始域と呼ぶ。

Ax. 3.1.1. 始域は冪等

$$\forall f (\text{dom}(\text{dom}(f)) = \text{dom}(f))$$

Def. 3.1.3. 終域

アリティ 1 の関数記号 $\text{cod}()$ を考える。

射 f について、 $\text{cod}(f)$ を f の終域と呼ぶ。

Ax. 3.1.2. 終域は冪等

$$\forall f (\text{cod}(\text{cod}(f)) = \text{cod}(f))$$

Ax. 3.1.3. 対象

$$\forall f (f = \text{dom}(f) \leftrightarrow f = \text{cod}(f))$$

Def. 3.1.4. 合成

アリティ 2 の関数記号 $\circ()$ を考える。

$\circ(f, g)$ を、簡単のために $g \circ f$ で表す。

射 f, g について、 $g \circ f$ を f と g の合成と呼ぶ。

Def. 3.1.5. 可合成

アリティ 2 の述語記号 $\text{Comp}()$ を、以下で定める。

$$\text{Comp}(f, g) : \leftrightarrow \text{cod}(f) = \text{dom}(g)$$

Ax. 3.1.4. 合成射の始域と終域

$$\forall f, g (\text{Comp}(f, g) \rightarrow \text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f) \wedge \text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g))$$

Ax. 3.1.5. 合成射の結合

$$\forall f, g, h (\text{Comp}(f, g) \wedge \text{Comp}(g, h) \rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$$

Ax. 3.1.6. 対象は恒等射

$$\forall f (f = f \circ \text{dom}(f) \wedge f = \text{cod}(f) \circ f)$$

Def. 3.1.6. 対象

以下を満たす射 a を、恒等射、または、対象と呼ぶ。

$$a = \text{dom}(a)$$

3.2 双対

Def. 3.2.1. 反対射

射 f について、以下を満たすアリティ 1 の関数記号 op を考える。簡単のために、 $\text{op}(f)$ を f^{op} で表す。

$$\begin{aligned} & \forall f ((f^{\text{op}})^{\text{op}} = f) \\ & \forall f (\text{dom}(f^{\text{op}}) = \text{cod}(f)^{\text{op}}) \\ & \forall f (\text{cod}(f^{\text{op}}) = \text{dom}(f)^{\text{op}}) \\ & \forall f, g (\text{Comp}(f, g) \rightarrow f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}} = (g \circ f)^{\text{op}}) \end{aligned}$$

Def. 3.2.2. 反対圏

圏 \mathbf{C} について、以下で定める類 \mathbf{C}^{op} は圏である。

$$f \in \mathbf{C}^{\text{op}} : \leftrightarrow f^{\text{op}} \in \mathbf{C}$$

Def. 3.2.3. 反対関手

\mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F について、以下で定める \mathbf{C}^{op} から \mathbf{D}^{op} への関手を、 F^{op} で表す。

$$F^{\text{op}}(f) := (F(f^{\text{op}}))^{\text{op}}$$

Rem. 3.2.1. 双対性

圏論における命題は、 $\text{dom}()$ と $\text{cod}()$ を入れ替えて、合成 $g \circ f$ を $f \circ g$ に置き換えるても、その真偽は変わらない。より簡単に言えば、 \mathbf{C} で成り立つ命題は、 \mathbf{C}^{op} でも成り立つ。

3.3 圏と関手

Def. 3.3.1. 圏

類 \mathbf{C} が圏であるとは、以下を満たすことである。

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathbf{C}(\text{dom}(f) \in \mathbf{C} \wedge \text{cod}(f) \in \mathbf{C}) \\ \forall f, g \in \mathbf{C}(\text{Comp}(f, g) \rightarrow g \circ f \in \mathbf{C}) \end{aligned}$$

Def. 3.3.2. 対象の類

以下で定める類 $\text{Obj}_{\mathbf{C}}$ を、圏 \mathbf{C} の対象の類と呼ぶ。

$$f \in \text{Obj}_{\mathbf{C}} : \leftrightarrow f \in \mathbf{C} \wedge f = \text{dom}(f)$$

Def. 3.3.3. 離散圏

圏 \mathbf{C} が離散であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall f(f \in \mathbf{C} \leftrightarrow f \in \text{Obj}_{\mathbf{C}})$$

このとき、 \mathbf{C} を離散圏と呼ぶ。

Def. 3.3.4. Hom 類

圏 \mathbf{C} と、 \mathbf{C} の対象 a, b について、類 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b)$ を以下で定める。

$$f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b) : \leftrightarrow f \in \mathbf{C} \wedge \text{dom}(f) = a \wedge \text{cod}(f) = b$$

Rem. 3.3.1. 射の域の明示

$f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b)$ を、簡単のため、 \mathbf{C} の射 $f: a \rightarrow b$ 、と表記する。

Def. 3.3.5. End 類

圏 \mathbf{C} と、 \mathbf{C} の対象 a について、類 $\text{End}_{\mathbf{C}}(a)$ を以下で定める。

$$f \in \text{End}_{\mathbf{C}}(a) :\leftrightarrow f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(a, a)$$

Def. 3.3.6. 関手

アリティ 1 の関数記号 F が、圏 \mathbf{C} から圏 \mathbf{D} への関手であるとは、以下の 3 つを満たすことである。

$$\begin{aligned} & \forall f \in \mathbf{C}(F(f) \in \mathbf{D}) \\ & \forall f \in \mathbf{C}(\text{dom}(F(f)) = F(\text{dom}(f)) \wedge \text{cod}(F(f)) = F(\text{cod}(f))) \\ & \forall f, g \in \mathbf{C}(\text{Comp}(f, g) \rightarrow F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)) \end{aligned}$$

Cor. 3.3.1.

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} について、 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\forall a \in \text{Obj}_{\mathbf{C}}(a = \text{dom}(a) \rightarrow F(a) = \text{dom}(F(a)))$$

Cor. 3.3.2.

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} について、 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\forall f \in \mathbf{C}(f \text{ が同型射} \rightarrow F(f) \text{ が同型射})$$

Def. 3.3.7. 関手の相等

圏 \mathbf{C} から圏 \mathbf{D} への関手 F, F' について、以下を満たすとき、 $F = F'$ と書く。

$$\forall f \in \mathbf{C}(F(f) = F'(f))$$

Def. 3.3.8. 関手の合成

圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ を考える。

\mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F と、 \mathbf{D} から \mathbf{E} への関手 G について、以下で示すアリティ 1 の関数記号 H は、 \mathbf{C} から \mathbf{E} への関手である。

$$H(f) := G(F(f))$$

この H を、 F と G の合成と呼び、 $G \circ F$ で表す。

Def. 3.3.9. 恒等関手

圏 \mathbf{C} について、関数記号 id は、 \mathbf{C} から \mathbf{C} への関手である。

圏論において、 id を恒等関手と呼ぶ。また、 \mathbf{C} から \mathbf{C} への恒等関手であることを、明示的に $\text{id}_{\mathbf{C}}$ で表す。

Def. 3.3.10. 圈同型

圈 C, D を考える。

C から D への関手 F と、 D から C への関手 G が存在して、以下が成り立つとき、 C と D は圈同型であると言ふ。

$$G \circ F = \text{id}_C \wedge F \circ G = \text{id}_D$$

3.4 簡約と逆

Def. 3.4.1. 左簡約可能

圈 C と、 C の射 f について、以下を満たすとき、 f は C において左簡約可能であるという。

$$\forall g, h \in C(\text{Comp}(g, f) \wedge \text{Comp}(h, f) \wedge f \circ g = f \circ h \rightarrow g = h)$$

左簡約可能な射を単射と呼ぶ。

Def. 3.4.2. 右簡約可能

圈 C と、 C の射 f について、 f^{op} が C^{op} で左簡約可能であるとき、 f は C において右簡約可能であるという。

右簡約可能な射を全射と呼ぶ。

Def. 3.4.3. 左可逆

圈 C と、 C の射 f について、以下を満たすとき、 f は C において左可逆であるという。

$$\exists g \in C(\text{Comp}(g, f) \wedge g \circ f = \text{dom}(f))$$

Cor. 3.4.1.

圈 C について、 C において左可逆な射は、 C において左簡約可能である。

Def. 3.4.4. 右可逆

圈 C と、 C の射 f について、 f^{op} が C^{op} で左可逆であるとき、 f は C において右可逆であるという。

Cor. 3.4.2.

圈 C について、 C において右可逆な射は、 C において右簡約可能である。

Cor. 3.4.3.

圈 C と、 C の射 f, g について、 $\text{Comp}(f, g)$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1. f, g がともに C において左簡約可能ならば、 $g \circ f$ は C において左簡約可能である。
2. f, g がともに C において右簡約可能ならば、 $g \circ f$ は C において右簡約可能である。
3. f, g がともに C において左可逆ならば、 $g \circ f$ は C において左可逆である。
4. f, g がともに C において右可逆ならば、 $g \circ f$ は C において右可逆である。

Cor. 3.4.4.

圈 C と、 C の射 f, g について、 $\text{Comp}(f, g)$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1. $g \circ f$ が C において左簡約可能ならば、 f は C において左簡約可能である。
2. $g \circ f$ が C において右簡約可能ならば、 g は C において右簡約可能である。

Def. 3.4.5. 逆射

射 f について、以下を満たす射 g を f の逆射と呼ぶ。

$$\text{Comp}(f, g) \wedge \text{Comp}(g, f) \wedge g \circ f = \text{dom}(f) \wedge f \circ g = \text{cod}(f)$$

Lem. 3.4.5. 逆射の一意性

射 g, h が f の逆射であるとき、 $g = h$ である。

Proof.

以下より成り立つ。

$$g = g \circ \text{dom}(g) = g \circ \text{cod}(f) = g \circ f \circ h = \text{dom}(f) \circ h = \text{cod}(h) \circ h = h \text{ より、成り立つ。} \blacksquare$$

Rem. 3.4.1. 逆射

f の逆射は、補題 3.4.5 より一意に定まるので、これを f^{-1} と表す。

Cor. 3.4.6.

逆射を持つ射 f について、以下が成り立つ。

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Lem. 3.4.7. 同型射

圏 C と、 C の射 f について、以下の 2 つは同値である。

1. f は、 C に逆射を持つ。
2. f は、 C において、左可逆かつ右可逆である。

Proof.

1. \rightarrow 2. は明らか。

2. \rightarrow 1. を示す。

左可逆より、射 g が存在して $g \circ f = \text{dom}(f)$ であり、右可逆より、射 h が存在して $f \circ h = \text{cod}(f)$ である。

$$g = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = h \text{ であるので、} g = h$$

ゆえに、 g は $f \circ g = \text{cod}(f)$ を満たす。 \blacksquare

Def. 3.4.6. 同型射

圏 C について、 C において左可逆かつ右可逆な射を、 C の同型射と呼ぶ。

Cor. 3.4.8. 恒等射は同型射

圏 C について、 C の恒等射 f の逆射は自身であり、ゆえに f は C の同型射である。

3.5 自然変換

Def. 3.5.1. 自然変換

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F, F' を考える。

アリティ 1 の関数記号 η が、 F から F' への自然変換であるとは、以下の 3 つ全てを満たすことである。

$$\begin{aligned} & \forall a \in \text{Obj}_{\mathbf{C}}(\eta(a) \in \mathbf{D}) \\ & \forall f \in \mathbf{C} \left(\text{Comp}(\eta(\text{dom}(f)), F'(f)) \wedge \text{Comp}(F(f), \eta(\text{cod}(f))) \right) \\ & \forall f \in \mathbf{C} \left(F'(f) \circ \eta(\text{dom}(f)) = \eta(\text{cod}(f)) \circ F(f) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{D} & \\ & F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b) & \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{f} b & \eta(a) \downarrow \qquad \qquad \downarrow \eta(b) \\ & F'(a) \xrightarrow[F'(f)]{} F'(b) & \end{array}$$

Def. 3.5.2. 自然変換の相等

圏 \mathbf{C} から圏 \mathbf{D} への関手 F, F' を考える。

F から F' への自然変換 η, θ について、以下を満たすとき、 $\eta = \theta$ と書く。

$$\forall a \in \text{Obj}_{\mathbf{C}}(\eta(a) = \theta(a))$$

Def. 3.5.3. 恒等な自然変換

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F について、関数記号 F は、 F から F への自然変換である。

F が自然変換であることを明示的に、関手 F に対する恒等な自然変換 F と呼ぶ。

Def. 3.5.4. 自然同型

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F, F' を考える。

F から F' への自然変換 η が自然同型であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall a \in \text{Obj}_{\mathbf{C}}(\eta(a) \text{ は同型射})$$

Cor. 3.5.1. 恒等な自然変換は自然同型

関手 F に対する恒等な自然変換 F は、 F から F への自然同型である。

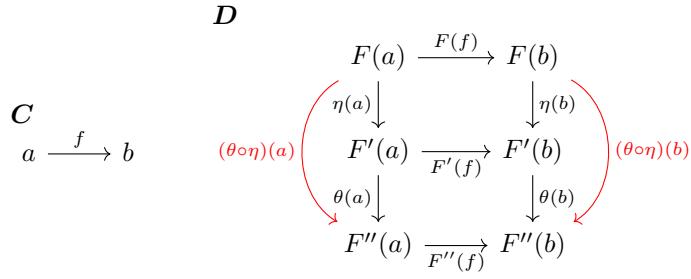
Def. 3.5.5. 自然変換の垂直合成

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 F, F', F'' を考える。

F から F' への自然変換 η と F' から F'' への自然変換 θ について、以下で定義するアリティ 1 の関数記号 $\theta \circ \eta$ は F から F'' への自然変換である。

$$(\theta \circ \eta)(a) := \theta(a) \circ \eta(a)$$

$\theta \circ \eta$ を、 η と θ の垂直合成と呼ぶ。



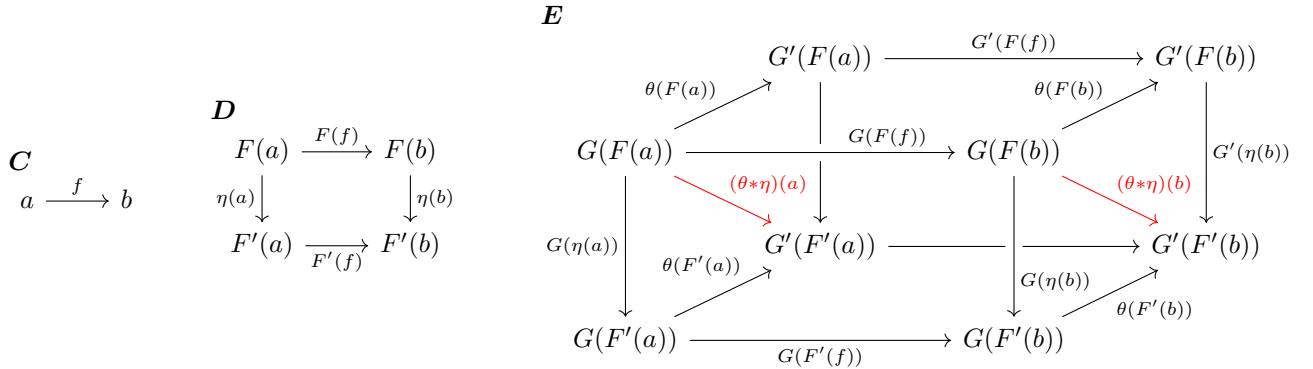
Def. 3.5.6. 自然変換の水平合成

圏 C, D, E と、 C から D への関手 F, F' 、 D から E への関手 G, G' を考える。

F から F' への自然変換 η と、 G から G' への自然変換 θ について、以下で定義するアリティ 1 の関数記号 $\theta * \eta$ は $G \circ F$ から $G' \circ F'$ への自然変換である。

$$(\theta * \eta)(a) := \theta(F'(a)) \circ G(\eta(a))$$

$\theta * \eta$ を、 η と θ の水平合成と呼ぶ。



Lem. 3.5.2.

圏 C, D, E と、 C から D への関手 F, F' 、 D から E への関手 G, G' を考える。

F から F' への自然変換 η と、 G から G' への自然変換 θ について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in C \left(\theta(F'(a)) \circ G(\eta(a)) = G'(\eta(a)) \circ \theta(F(a)) \right)$$

Proof.

θ は G から G' への自然変換であるので、明らか。 ■

Thm. 3.5.3. 相互交換法則

圏 C, D, E と、 C から D への関手 F, F', F'' 、 D から E への関手 G, G', G'' を考える。

F から F' への自然変換 σ 、 F' から F'' への自然変換 τ 、 G から G' への自然変換 η 、 G' から G'' への自然変換 θ について、以下が成り立つ。

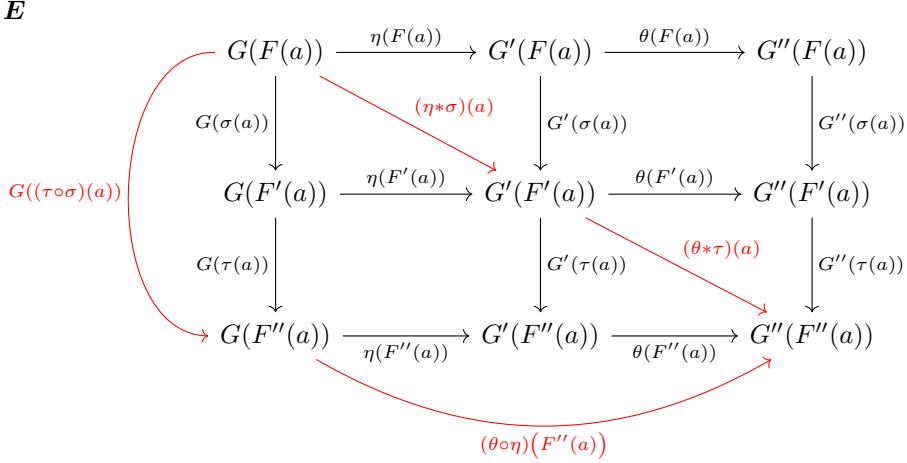
$$(\theta \circ \eta) * (\tau \circ \sigma) = (\theta * \tau) \circ (\eta * \sigma)$$

Proof.

C の任意の対象 a について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 ((\theta \circ \eta) * (\tau \circ \sigma))(a) &= (\theta \circ \eta)(F''(a)) \circ G((\tau \circ \sigma)(a)) \\
 &= \theta(F''(a)) \circ \eta(F''(a)) \circ G(\tau(a)) \circ G(\sigma(a)) \\
 &= \theta(F''(a)) \circ G'(\tau(a)) \circ \eta(F'(a)) \circ G(\sigma(a)) \\
 &= (\theta * \tau)(a) \circ (\eta * \sigma)(a) \\
 &= ((\theta * \tau) \circ (\eta * \sigma))(a)
 \end{aligned}$$

ただし第二行から第三行へは、 η が G から G' への自然変換であることを用いた。 ■



Def. 3.5.7. 圈同値

圈 C, D を考える。

C から D への関手 F と、 D から C への関手 G が存在して、 id_C から $G \circ F$ への自然同型 η と、 id_D から $F \circ G$ への自然同型 θ が存在するとき、 C と D は圈同値であると言う。

C $ \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \eta(a)^{-1} \swarrow \quad \downarrow \eta(a) & & \downarrow \eta(b) \searrow \\ (G \circ F)(a) & \xrightarrow{(G \circ F)(f)} & (G \circ F)(b) \end{array} $	D $ \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{g} & d \\ \theta(c)^{-1} \swarrow \quad \downarrow \theta(c) & & \downarrow \theta(d)^{-1} \searrow \\ (F \circ G)(c) & \xrightarrow{(F \circ G)(g)} & (F \circ G)(d) \end{array} $
---	--

Cor. 3.5.4. 圈同型ならば圈同値

圈 C, D について、 C と D が圈同型ならば、 C と D は圈同値である。

3.6 さまざまな圈

Def. 3.6.1. 圈 1

1つの対象からなる離散圏を、**1** で表す。

Def. 3.6.2. 圈 2

2つの対象からなる離散圏を、**2** で表す。

Def. 3.6.3. 圈 \Rightarrow

2つの対象 a, b と、2つの射 $f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow b$ からなる圏を、 \Rightarrow で表す。

Def. 3.6.4. 圈 \longleftrightarrow

3つの対象 a, b, c と、2つの射 $f: c \rightarrow a, g: c \rightarrow b$ からなる圏を、 \longleftrightarrow で表す。

Def. 3.6.5. 圈 $\rightarrow\leftarrow$

圏 $(\longleftrightarrow)^{\text{op}}$ を、 $\rightarrow\leftarrow$ で表す。

Rem. 3.6.1. 自然変換は射

圏 D から圏 C への関手 F, G について、 F から G への自然変換 η を考える。

$\text{dom}(\eta)$ を F に対する恒等な自然変換 F 、 $\text{cod}(\eta)$ を G に対する恒等な自然変換 G として、合成を垂直合成で定義すると、自然変換は射の公理をみたす。

Def. 3.6.6. 関手圏

圏 C, D について、自然変換を射とみなすと、 D から C への関手間の自然変換であることは、圏となる。

この圏を、 D から C への関手圏と呼び、 $\text{Func}(D, C)$ または C^D と表す。

Cor. 3.6.1. 関手圏の双対

$\text{Func}(D, C)^{\text{op}}$ と $\text{Func}(D^{\text{op}}, C^{\text{op}})$ は圏同型である。

Def. 3.6.7. 対角関手

圏 C, D について、 C から $\text{Func}(D, C)$ への以下で定める関手 Δ を考える。

$$\Delta(c)(d) := c$$

このように定めた関手 Δ を対角関手と呼ぶ。

3.7 普遍

Def. 3.7.1. 普遍射

圏 C, D と、 D から C への関手 F 、 C の対象 a を考える。

F から a への普遍射とは、 D の対象 x と圏 C の射 u の組であって、以下の 2つを満たすものである。

$$\begin{aligned} u &\in \text{Hom}_C(F(x), a) \\ \forall y \in \text{Obj}_D \forall f \in \text{Hom}_C(F(y), a) \exists! g &\in \text{Hom}_D(y, x) (f = u \circ F(g)) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & F(y) \xrightarrow{F(g)} F(x) & \\ D & y \xrightarrow[\text{red}]{} x & \\ & f \searrow & \downarrow u \\ & a & \end{array}$$

Lem. 3.7.1. 普遍射の一意性

D から C への関手 F 、 C の対象 a について、 x, u と x', u' が F から a への普遍射であるとする。

このとき、以下を満たす。

$$\exists! h \in \text{Hom}_D(x', x) (u' = u \circ F(h))$$

さらに上で与える h は同型射であり、その逆射 h^{-1} は $u = u' \circ F(h^{-1})$ を満たす。

Proof.

x, u は普遍射であるので、 x', u' について定義より、 D の射 $g: x' \rightarrow x$ であって $u' = u \circ F(g)$ なる射が一意に存

在する。

同様に x', u' は普遍射であるので、 x, u について定義より、 \mathbf{D} の射 $g': x \rightarrow x'$ であって $u = u' \circ F(g')$ なる射が一意に存在する。

ゆえに、 $u = u' \circ F(g') = u \circ F(g) \circ F(g') = u \circ F(g \circ g')$ が成り立つ。

x, u は普遍射であるので、 x, u について定義より、 \mathbf{D} の射 $i: x \rightarrow x$ であって $u = u \circ F(i)$ なる射が一意に存在する。

$x, g \circ g'$ は i の条件を満たすので、 $i = x = g \circ g'$

同様に、 $x' = g' \circ g$ である。

したがって、 g' は g の逆射である。 ■

Def. 3.7.2. 極限

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{C} から $\text{Func}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ への対角関手 Δ を考える。

\mathbf{D} から \mathbf{C} への関手 X について、 Δ から X への普遍射を X の極限と呼ぶ。

Def. 3.7.3. 積

離散圏 \mathbf{J} 、圏 \mathbf{C} と、 \mathbf{J} から \mathbf{C} への関手 X を考える。

このとき、 X の極限を X の積と呼ぶ。 X の積 x, u について、この x を $\prod X$ と表す。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & & \text{Func}(\mathbf{J}, \mathbf{C}) \\ Y & \xrightarrow{\quad q \quad} & \Delta(Y) \\ \downarrow p_j & \searrow & \downarrow \Delta(u) \\ \prod X & & \Delta(\prod X) \\ & \downarrow u_j & \downarrow u \\ X_j & & X \end{array}$$

Def. 3.7.4. 終対象

圏 \mathbf{C} を考える。

\mathbf{C} から圏 $\mathbf{1}$ への関手は一意に定まる。これを U とすると、 U から $*$ への普遍射 x, u は、 $u = *$ となる。

この x を、 \mathbf{C} の終対象と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & & \mathbf{1} \\ y & \xrightarrow{\quad g \quad} & * \end{array}$$

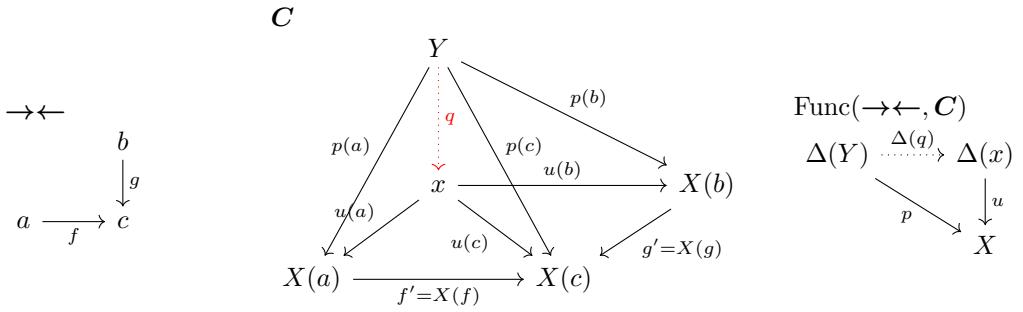
Def. 3.7.5. 引き戻し

圏 \mathbf{C} と、 \mathbf{C} の射 f', g' を考える。 $\text{cod}(f') = \text{cod}(g')$ とする。

圏 $\rightarrow \leftarrow$ (対象ではない射を f, g とする) から \mathbf{C} への関手 X であって、以下を満たす X を考える。

$$X(f) = f' \wedge X(g) = g'$$

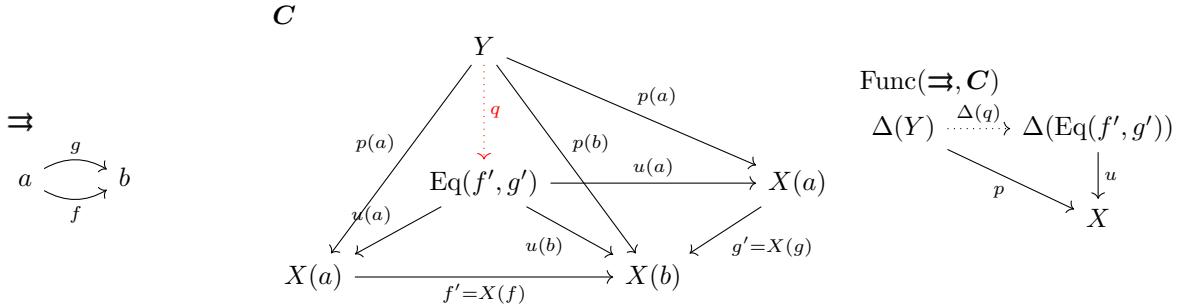
このとき、 X の極限を、 f', g' の引き戻しと呼ぶ。



Def. 3.7.6. 等化子

圏 \mathbf{C} と、 \mathbf{C} の射 f', g' を考える。 $\text{dom}(f') = \text{dom}(g') \wedge \text{cod}(f') = \text{cod}(g')$ とする。

このとき、 f', g' の引き戻し x, u を、 f', g' の等化子と呼び、この x を $\text{Eq}(f', g')$ で表す。



Lem. 3.7.2. 等化子から得る単射

f と g の等化子 $\text{Eq}(f, g)$, u について、 $u(\text{dom}(f))$ は単射である。

Proof.

$\text{cod}(h_1) = \text{cod}(h_2) = \text{Eq}(X(f), X(g))$ なる射 h_1, h_2 を考える。

$u(\text{dom}(f)) \circ h_1 = u(\text{dom}(f)) \circ h_2$ について、

■

Def. 3.7.7. 余普遍射

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{D} から \mathbf{C} への関手 F 、 \mathbf{C} の対象 a を考える。

a から F への余普遍射とは、 F^{op} から a への普遍射 x, u について、 x, u^{op} である。

\mathbf{D}	\mathbf{D}^{op}	\mathbf{C}^{op}	\mathbf{C}
$y \xleftarrow{\text{red } g} x$	$y \xrightarrow{\text{red } g^{\text{op}}} x$	$F^{\text{op}}(y) \xrightarrow{F^{\text{op}}(g^{\text{op}})} F^{\text{op}}(x)$	$F(y) \xleftarrow{F(g)} F(x)$
		$\downarrow u$	$\uparrow u^{\text{op}}$
		f	f^{op}
		a	a

Def. 3.7.8. 余極限

圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} と、 \mathbf{C} から $\text{Func}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ への対角関手 Δ を考える。

\mathbf{D} から \mathbf{C} への関手 X について、 X から Δ への余普遍射を X の余極限と呼ぶ。

Def. 3.7.9. 和

離散圏 \mathbf{J} 、圏 \mathbf{C} と、 \mathbf{J} から \mathbf{C} への関手 X を考える。

このとき、 X の余極限を X の和と呼ぶ。

Def. 3.7.10. 始対象

圏 C と、圏 $\mathbf{1}$ を考える。

C から $\mathbf{1}$ への関手は一意に定まる。これを U とすると、 $*$ から U への余普遍射は、定義 3.7.7 の条件を満たす x と $*$ の組となる。

この x を、 C の始対象と呼ぶ。

Def. 3.7.11. 押し出し

圏 C と、 C の射 f', g' を考える。 $\text{dom}(f') = \text{dom}(g')$ とする。

圏 \longleftrightarrow (対象ではない射を f, g とする) から C への関手 X であって、以下を満たす X を考える。

$$X(f) = f' \wedge X(g) = g'$$

このとき、 X の余極限を、 f', g' の押し出しと呼ぶ。

Def. 3.7.12. 余等化子

圏 C と、 C の射 f', g' を考える。 $\text{dom}(f') = \text{dom}(g') \wedge \text{cod}(f') = \text{cod}(g')$ とする。

このとき、 f', g' の押し出し x, u を、 f', g' の余等化子と呼ぶ。

Lem. 3.7.3. 余等化子から得る全射

f と g の余等化子 x, u について、 $u(\text{cod}(f))$ は全射である。

Proof.

補題 3.7.2 より、双対性から明らか。 ■

3.8 随伴

Def. 3.8.1. 左随伴関手

圏 C, D を考える。

D から C への関手 F が左随伴関手であるとは、 C の任意の対象 a について、 F から a への普遍射が存在することである。

Def. 3.8.2. 右随伴関手

圏 C, D を考える。

C から D への関手 G が右随伴関手であるとは、 G^{op} が左随伴関手であることである。

Def. 3.8.3. 随伴

圏 C, D と、 D から C への関手 F 、 C から D への関手 G を考える。

id_D から $G \circ F$ への自然変換 η と、 $F \circ G$ から id_C への自然変換 θ が存在して、以下を満たすならば、 F, G は随伴であると呼ぶ。

$$\begin{aligned} F &= (\theta * F) \circ (F * \eta) \\ G &= (G * \theta) \circ (\eta * G) \end{aligned}$$

このとき、 F を G の左随伴、 G を F の右随伴と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} \text{Func}(\mathbf{D}, C) & & \text{Func}(C, \mathbf{D}) \\ F \xrightarrow{F * \eta} F \circ G \circ F & & G \xrightarrow{\eta * G} G \circ F \circ G \\ \searrow F & \downarrow \theta * F & \searrow G \\ & F & & G \end{array}$$

Cor. 3.8.1.

系 3.6.1 より、 F, G が随伴ならば、 $G^{\text{op}}, F^{\text{op}}$ は随伴である。

Lem. 3.8.2. 随伴は随伴関手

圏 C, D と、 D から C への関手 F 、 C から D への関手 G を考える。

F, G が随伴ならば、 F は左随伴関手であり、 G は右随伴関手である。

Proof.

随伴であるので、定義 3.8.3 を満たす自然変換 η, θ が存在する。

双対性から、 F が左随伴関手であることを示せば十分である。

C の任意の対象 a について、 $G(a), \theta(a)$ が F から a への普遍射となることを示す。

D の対象 y と、 C の射 $f: F(y) \rightarrow a$ を考える。

このとき、 $g := G(f) \circ \eta(y)$ を考えると、 θ の自然性と $F = (\theta * F) \circ (F * \eta)$ より、以下が成り立つ。

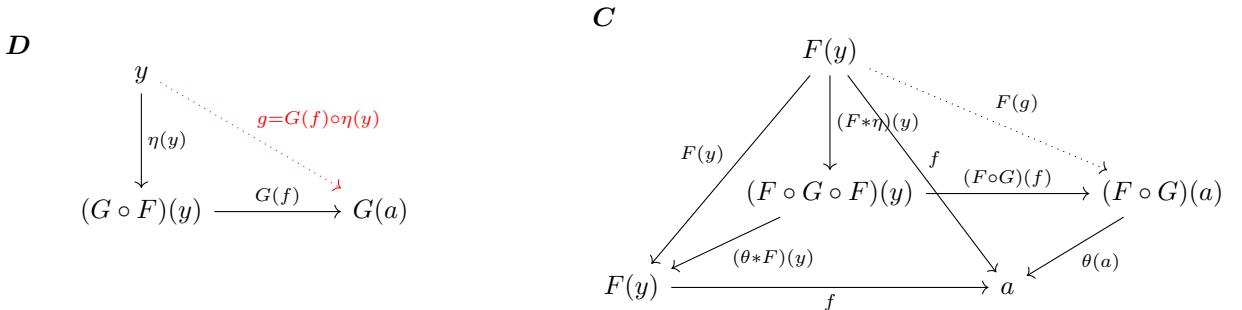
$$\begin{aligned}\theta(a) \circ F(g) &= \theta(a) \circ (F \circ G)(f) \circ (F * \eta)(y) \\ &= f \circ (\theta * F)(y) \circ (F * \eta)(y) \\ &= f \circ F(y) \\ &= f\end{aligned}$$

次に、 D の射 $g': y \rightarrow G(a)$ が存在して、 $f = \theta(a) \circ F(g')$ であるとする。

このとき、 $G = (G * \theta) \circ (\eta * G)$ と η の自然性より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}g' &= G(a) \circ g' \\ &= (G * \theta)(a) \circ (\eta * G)(a) \circ g' \\ &= (G * \theta)(a) \circ (G \circ F)(g') \circ \eta(y) \\ &= G(\theta(a) \circ F(g')) \circ \eta(y) \\ &= G(f) \circ \eta(y) \\ &= g\end{aligned}$$

ゆえに一意である。 ■



Lem. 3.8.3. 左随伴は余極限を保存する

圏 J, C, D と、 J から D への関手 X 、 D から C への関手 F 、 C から D への関手 G を考える。 F, G は随伴であるとする。

(x, u) が X の余極限であるならば、 $(F(x), F * u)$ は $F \circ X$ の余極限である。

Proof.

随伴であるので、定義 3.8.3 を満たす自然変換 η, θ が存在する。

D から $\text{Func}(J, D)$ への対角関手を Δ_D 、 C から $\text{Func}(J, C)$ への対角関手を Δ_C とする。

C の対象 y と、 $F \circ X$ から $\Delta_C(y)$ への自然変換 f を考える。

補題 3.8.2 より、 $G(y), \theta(y)$ は、 F から y への普遍射である。

したがって J の任意の対象 j について、 $\theta(y) \circ F(w(j)) = f(j)$ を満たす射 $w(j)$ が一意に存在する。

ここで、 f は $F \circ X$ から $\Delta_C(y)$ への自然性であるので、 J の任意の対象 j, j' について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\theta(y) \circ F(w(j') \circ X(i)) &= \theta(y) \circ F(w(j')) \circ (F \circ X)(i) \\ &= f(j') \circ (F \circ X)(i) \\ &= f(j) \\ &= \theta(y) \circ F(w(j))\end{aligned}$$

一意性より、 $w(j') \circ X(i) = w(j)$ である。よって、 w は X から Δ_D への自然変換である。

x, u は X から Δ_D への余普遍射であるので、 $w = \Delta_D(h) \circ u$ を満たす D の射 h が一意に存在する。

ここで、 $g := \theta(y) \circ F(h)$ とすると、 J の任意の対象 j について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}g \circ (F * u)(j) &= \theta(y) \circ F(h) \circ (F * u)(j) \\ &= \theta(y) \circ F(h \circ u(j)) \\ &= \theta(y) \circ (F * w)(j) \\ &= f(j)\end{aligned}$$

したがって、 $\Delta_C(g) \circ (F * u) = f$ である。

次に、 C の射 g' が存在して、 $\Delta_C(g') \circ (F * u) = f$ であるとする。

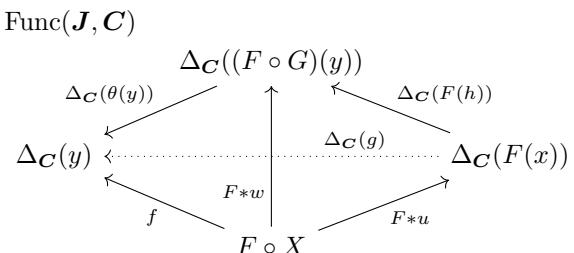
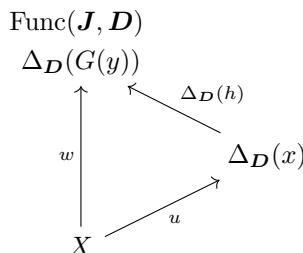
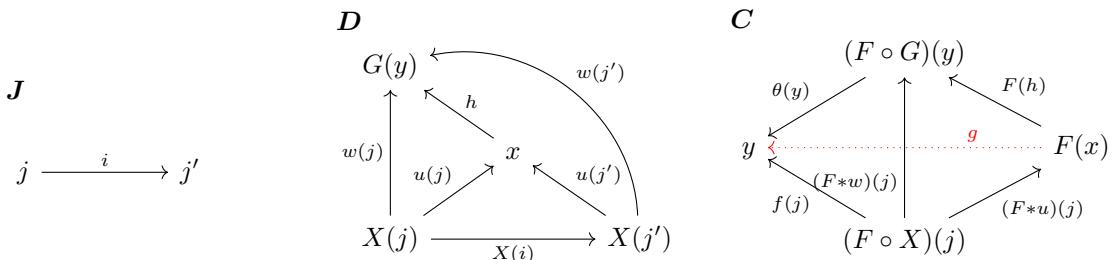
$G(y), \theta(y)$ は F から y への普遍射であるため、 $g' = \theta(y) \circ F(h')$ を満たす D の射 h' が一意に存在する。

J の任意の対象 j について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\theta(y) \circ F(h \circ u(j)) &= f(j) \\ &= g'(j) \circ (F * u)(j) \\ &= \theta(y) \circ F(h') \circ (F * u)(j) \\ &= \theta(y) \circ F(h' \circ u(j))\end{aligned}$$

再び $G(y), \theta(y)$ は F から y への普遍射であるため、一意性より $h \circ u(j) = h' \circ u(j)$ である。ゆえに、 $\Delta_D(h') \circ u = \Delta_D(h) \circ u$ である。

x, u は、 X の余極限であるため、一意性より $h = h'$ である。したがって、 $g = g'$ である。 ■



4 写像

4.1 関係

Def. 4.1.1. 関係

集合 X, Y と、集合系 $G \subset X \times Y$ について、順序対 $\mathfrak{R} := ((X, Y), G)$ を関係と呼ぶ。

記号の濫用であるが、 \mathfrak{R} を以下で定めるアリティ 2 の述語としても扱う。

$$\mathfrak{R}(x, y) : \leftrightarrow (x, y) \in G$$

Def. 4.1.2. 左一意的

関係 \mathfrak{R} が以下を満たすとき、 \mathfrak{R} は左一意的であると言う。

$$\forall w, x (\exists y \in Y (\mathfrak{R}(w, y) \wedge \mathfrak{R}(x, y)) \rightarrow w = x)$$

Def. 4.1.3. 右一意的

関係 \mathfrak{R} が以下を満たすとき、 \mathfrak{R} は右一意的であると言う

$$\forall y, z (\exists x \in X (\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(x, z)) \rightarrow y = z)$$

Def. 4.1.4. 一対一

関係 \mathfrak{R} が左一意的かつ右一意的であるとき、 \mathfrak{R} は一対一であると言う。

Def. 4.1.5. 左全域的

関係 $\mathfrak{R} = ((X, Y), G)$ が以下を満たすとき、 \mathfrak{R} は左全域的であると言う。

$$\forall x \in X \exists y \in Y (\mathfrak{R}(x, y))$$

Def. 4.1.6. 右全域的

関係 $\mathfrak{R} = ((X, Y), G)$ が以下を満たすとき、 \mathfrak{R} は右全域的であると言う。

$$\forall y \in Y \exists x \in X (\mathfrak{R}(x, y))$$

4.2 写像

Def. 4.2.1. 写像

右一意的かつ左全域的な関係 $f = ((X, Y), G)$ を写像と呼ぶ。

記号の濫用であるが、 $f()$ を以下で定める $x \in X$ についての略記としても扱う。

$$f(x) := \bigcup \{y \in Y \mid \mathfrak{R}(x, y)\}$$

$f(x)$ を x での f の値と呼ぶ。

Rem. 4.2.1. 関数クラスによる写像の定義

集合 X, Y と、関数クラス F について、順序対 $((X, Y), \{(x, F(x)) \mid x \in X\})$ は写像である。

このとき、記号の濫用であるが、この写像を F で表す。

Rem. 4.2.2. 集合の内包的定義 3

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下を満たすアリティ 2 の述語記号 $\psi(x, y)$ を考える。

$$\forall x, y (\psi(x, y) : \leftrightarrow y = f(x))$$

f が写像であることから公理 2.4.1 の主張する集合 A が存在する。

A は、より簡潔に以下でも表す。

$$A = \{f(x) \mid x \in X\}$$

Def. 4.2.2. 恒等写像

集合 X について、以下で定める集合系 Δ を考える。

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$$

写像 $((X, X), \Delta)$ を恒等写像と呼び、 id_X で表す。

Cor. 4.2.1.

集合 X, Y について、以下が成り立つ。

$$X = Y \leftrightarrow \text{id}_X = \text{id}_Y$$

Def. 4.2.3. 合成写像

写像 $f = ((X, Y), G_f), g = ((Y, Z), G_g)$ について、以下で定める集合系 G を考える。

$$G := \{(x, z) \mid \exists y \in Y (y = f(x) \wedge z = g(y))\}$$

関係 $((X, Z), G)$ は写像であり、これを f と g の合成写像、または単に合成と呼び、 $g \circ f$ で表す。

Cor. 4.2.2. 写像の合成の結合法則

写像 $f = ((X, Y), G_f), g = ((Y, Z), G_g), h = ((Z, W), G_h)$ について、以下が成り立つ。

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Rem. 4.2.3. 写像の相等

写像の相等は、集合の相等により定義される。

これは次のように言い換えることができる。写像 f, g について、 $f = g$ とは、以下を満たすことである。

$$\text{dom}(f) = \text{dom}(g) \wedge \text{cod}(f) = \text{cod}(g) \wedge \forall x \in \text{dom}(f)(f(x) = g(x))$$

Def. 4.2.4. 包含写像

集合 X と、その部分 A について、以下で定める関係 $\iota_{A,X}$ は写像である。

$$\iota_{A,X} := ((A, X), \{(x, x) \mid x \in A\})$$

この $\iota_{A,X}$ を部分写像と呼ぶ。

Def. 4.2.5. 制限写像

写像 $f = ((X, Y), G)$ と、 X の部分 A について、以下で定める写像 $f|_A$ を、 f の A への制限写像、または単に制限と呼ぶ。

$$f|_A := f \circ \iota_{A,X}$$

4.3 集合と写像の圏

Rem. 4.3.1. 写像は射

写像 $f = ((X, Y), G)$ を考える。 $\text{dom}(f)$ を id_X 、 $\text{cod}(f)$ を id_Y として、合成を定義 4.2.3 で定義すると、写像は射の公理をみたす。

ここで、記号の濫用であるが、 id_X をして X を表し、 X をして id_X を表す。

Def. 4.3.1. 集合と写像の圏

写像を射とみなすと、写像であることは、圏となる。この圏を、集合と写像の圏と呼び、**Set** と表す。

Cor. 4.3.1.

集合 X, Y について、 $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ は以下を満たす。

$$f \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) \leftrightarrow f \in \{((X, Y), G) \mid G \subset X \times Y \wedge G \text{ は右一意かつ左全域}\}$$

Def. 4.3.2. 写像の全体

記号の濫用であるが、 X から Y への写像全体がなす集合を、 $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ で表す。

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) := \{((X, Y), G) \mid G \subset X \times Y \wedge G \text{ は右一意かつ左全域}\}$$

Cor. 4.3.2.

以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \forall Y(Y^\emptyset &= \{((\emptyset, Y), \emptyset)\}) \\ \forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \emptyset^X &= \emptyset) \end{aligned}$$

Def. 4.3.3. 空写像

終域を Y としたとき、始域が空集合である写像は、一意に定まる。

このような写像を空写像と呼ぶ。

Def. 4.3.4. 小さい圏

圏 C について、以下を満たす圏 C' が存在して、 C と C' が圏同型であるとき、 C を小さいと呼ぶ。

1. 定義 3.3.1 を満たす写像からなる集合 C' が存在して、 $f \in C \leftrightarrow f \in C'$ である。

このとき、誤解のない範囲において、 C' を C で表す。

Cor. 4.3.3.

小さい圏 J について、 Obj_J は小さい。

Thm. 4.3.4. 集合と写像の圏は完備

任意の小さい圏 J と、 J から **Set** への任意の関手 X を考える。

このとき、 X の極限が存在する。

Proof.

$\forall j \in \text{Obj}_J$ について、 $X(j)$ が恒等射すなわち集合とすることに注意して、集合 P を以下で定める。

$$P := \left\{ \pi \in \text{Hom}_{\text{Set}} \left(\text{Obj}_J, \bigcup \{X(j) \mid j \in \text{Obj}_J\} \right) \mid \forall j \in \text{Obj}_J (\pi(j) \in X(j)) \right\}$$

さらに、集合 L を以下で定める。

$$L := \left\{ \pi \in P \mid \forall j, j' \in \text{Obj}_J \forall i \in \text{Hom}_J(j, j') (X(i)(\pi(j)) = \pi(j')) \right\}$$

Set から $\text{Func}(\text{Obj}_J, \text{Set})$ への対角関手 Δ について、以下で定める関数記号 u を考える。

$$u(j)(\pi) := \pi(j)$$

u は、 J の射 $i: j \rightarrow j'$ について $\forall \pi \in L ((X(i) \circ u(j))(\pi) = X(i)(u(j)(\pi)) = X(i)(\pi(j)) = \pi(j') = u(j')(\pi))$ を満たすので、 $\Delta(L)$ から X への自然変換である。

このとき、 L, u が極限となることを示す。

集合 Y と、 $\Delta(Y)$ から X への自然変換 f を考える。

このとき、写像 $g: Y \rightarrow P$ を以下で定める。

$$g(y)(j) := f(j)(y)$$

f が自然変換であるので、 $\forall y \in Y (g(y) \in L)$ となる。ゆえに、 $g: Y \rightarrow L$ として再定義する。

写像 f を、 $x \mapsto f(x)$ と表す。

J の任意の対象 j について、 $(u(j) \circ g)(y) = u(j)(g(y)) = g(y)(j) = f(j)(y)$ である。

よって、 $f = u \circ \Delta(g)$ が成り立つ。

$g': Y \rightarrow L$ が存在して、 $f = u \circ \Delta(g')$ が成り立つとする。

$g \neq g'$ とする。写像の相等より $\exists y \in Y (g(y) \neq g'(y))$ であり、再び写像の相等より $\exists j \in \text{Obj}_J \exists y \in Y (g(y)(j) \neq g'(y)(j))$ である。

g の定義より、 $\exists j \in \text{Obj}_J \exists y \in Y (g'(y)(j) \neq f(j)(y))$ である。

ゆえに、 $(u(j) \circ g')(y) = u(j)(g'(y)) = g'(y)(j) \neq f(j)(y)$ であり、 $f \neq u \circ \Delta(g')$ となって反する。

したがって、 $g = g'$ である。 ■

4.4 選択

Thm. 4.4.1. 選択公理が与える写像

集合 X, Y とアリティ 2 の述語記号 ψ について、 $\forall x \in X \exists y \in Y (\psi(x, y))$ が成り立つとする。

このとき、以下を満たす写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在する。

$$\forall x \in X \forall y \in Y (f(x) = y \rightarrow \psi(x, y))$$

Proof.

$X = \emptyset$ のとき、空写像が存在する。

$X \neq \emptyset$ のときを考える。以下の集合 Z を考える。

$$Z := \{\{(x, y) \mid y \in Y \wedge \psi(x, y)\} \mid x \in X\}$$

Z について公理 2.2.5 の主張する集合 A が存在する。

関係 $((X, Y), A)$ は、仮定より X について左全域的で、 A の定義より右一意的である。 ■

Thm. 4.4.2. 選択関数の存在

任意の集合 X について、写像 $f: X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \bigcup X$ が存在して、以下が成り立つ。

$$\forall x \in X \setminus \{\emptyset\} (f(x) \in x)$$

Proof.

$\forall x \in X \setminus \{\emptyset\}$ について、 $\exists y (y \in x)$ である。この y は、 $y \in x$ より、 $y \in \bigcup X$ である。

ゆえに、定理 4.4.1 より存在する。 ■

Thm. 4.4.3. 非空からなる積は非空

空でない集合 J から **Set** への関手 X について、以下が成り立つ。

$$\forall j \in J (X(j) \neq \emptyset) \rightarrow \prod X \neq \emptyset$$

Proof.

$Z := \{X(j) \mid j \in J\}$ について、定義より $Z \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin Z$ である。

定理 4.4.2 より、写像 $f: Z \rightarrow \bigcup Z$ が存在して、 $\forall z \in Z (f(z) \in z)$ である。

写像 $g: J \rightarrow \bigcup Z$ を $g(j) := f(X(j))$ で定義すると、 $\forall j \in J (f(j) \in X(j))$ であるので、 $f \in \prod X$ である。

ゆえに、 $\prod X \neq \emptyset$ である。 ■

4.5 像と原像

Def. 4.5.1. 像

写像 $f: X \rightarrow Y$ と、 X の部分集合 A について、以下で定める集合を A の f による像と呼び、 $f(A)$ で表す。

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

また、 $f(X)$ を $\text{Im}(f)$ でも表す。

Thm. 4.5.1. 像の性質

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \forall A_1, A_2 \subset X (A_1 \subset A_2 \rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)) \\ & \forall B \subset \mathfrak{P}(X) (f(\bigcup B) = \bigcup \{f(A) \mid A \in B\}) \\ & \forall B \subset \mathfrak{P}(X) (f(\bigcap B) \subset \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}) \\ & \forall A_1, A_2 \subset X (f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)) \end{aligned}$$

Proof.

第一式について、 $y \in f(A_1)$ のとき、 $\exists x \in A_1 (y = f(x))$ 、 $\exists x \in A_2 (y = f(x))$ 、 $\nexists x \in A_2 (y = f(x))$

第二式について、

$$\begin{aligned} & y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \\ & \exists A \in B (y \in f(A)) \\ & \exists A \in B \exists x \in A (y = f(x)) \\ & \exists x \in \bigcup B (y = f(x)) \\ & y \in f(\bigcup B) \end{aligned}$$

上からも下からも成り立つので、公理 2.2.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$\begin{aligned} & y \in f(\bigcap B) \\ & \exists x (x \in \bigcap B \wedge y = f(x)) \\ & \exists x (x \in \bigcup B \wedge \forall A (A \in B \rightarrow x \in A) \wedge y = f(x)) \\ & \exists x (x \in \bigcup B \wedge y = f(x)) \wedge \exists x (\forall A (A \in B \rightarrow x \in A) \wedge y = f(x)) \\ & y \in f(\bigcup B) \wedge \forall A (A \in B \rightarrow y \in f(A)) \\ & y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \wedge \forall A (A \in B \rightarrow y \in f(A)) \\ & y \in \bigcap \{f(A) \mid A \in B\} \end{aligned}$$

第四式について、

$$\begin{aligned} & y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \\ & \exists x (y = f(x) \wedge x \in A_1) \wedge \forall x (y = f(x) \rightarrow x \notin A_2) \\ & \exists x (y = f(x) \wedge x \in A_1 \setminus A_2) \\ & y \in f(A_1 \setminus A_2) \end{aligned}$$

■

Def. 4.5.2. 原像

写像 $f: X \rightarrow Y$ と集合 A について、以下で定める集合を、集合 A の原像と呼び、 $f^{-1}(A)$ で表す。

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

Cor. 4.5.2. 像と原像

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\forall A \subset X & (f^{-1}(f(A)) \supset A) \\ \forall B & (f(f^{-1}(B)) \subset B)\end{aligned}$$

Thm. 4.5.3. 原像の性質

写像 f について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\forall A_1, A_2 & (A_1 \subset A_2 \rightarrow f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2)) \\ \forall B & (f^{-1}(\bigcup B) = \bigcup \{f^{-1}(A) \mid A \in B\}) \\ \forall B & (f^{-1}(\bigcap B) = \bigcap \{f^{-1}(A) \mid A \in B\}) \\ \forall A_1, A_2 & (f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \setminus A_2))\end{aligned}$$

Proof.

第一式について、 $x \in f^{-1}(A_1)$ のとき、 $f(x) \in A_1 \subset A_2$ すえに $x \in f^{-1}(A_2)$

第二式について、

$$\begin{aligned}x \in \bigcup \{f^{-1}(A) \mid A \in B\} \\ \exists A \in B (x \in f^{-1}(A)) \\ \exists A \in B (f(x) \in A) \\ f(x) \in \bigcup B \\ x \in f^{-1}(\bigcup B)\end{aligned}$$

上からも下からも成り立つので、公理 2.2.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(\bigcap B) \\ f(x) \in \bigcap B \\ f(x) \in \bigcup B \wedge \forall A (A \in B \rightarrow f(x) \in A) \\ x \in f^{-1}(\bigcup B) \wedge \forall A (A \in B \rightarrow x \in f^{-1}(A)) \\ x \in \bigcup \{f^{-1}(A) \mid A \in B\} \wedge \forall A (A \in B \rightarrow x \in f^{-1}(A)) \\ x \in \bigcap \{f^{-1}(A) \mid A \in B\}\end{aligned}$$

上からも下からも成り立つので、公理 2.2.1 より成り立つ。

第四式について、

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) \\ f(x) \in A_1 \wedge f(x) \notin A_2 \\ f(x) \in A_1 \setminus A_2 \\ x \in f^{-1}(A_1 \setminus A_2)\end{aligned}$$

上からも下からも成り立つので、公理 2.2.1 より成り立つ。 ■

4.6 単射と全射

Lem. 4.6.1. 単射

写像 f について、以下の 3 つは同値である。

1. f が左簡約可能 (f が単射)
2. f が左一意的
3. f が、空写像または左可逆

Proof.

1. \rightarrow 2. を示す。

f が空写像であるとき、左一意的である。 f が空写像でないときを考える。

$x \in \text{dom}(f)$ について、写像 $g_x: \{\emptyset\} \rightarrow \text{dom}(f), g(\emptyset) := x$ を考える。

$f(x) = f(y)$ であるとき、 $f \circ g_x = f \circ g_y$ であり、左簡約可能より $g_x = g_y$ 、すなわち $x = y$ である。

2. \rightarrow 3. を示す。左一意的かつ空写像でないならば、左可逆であることを示す。

空でないので $\exists x_0 \in \text{dom}(f)$ より、以下で定める集合 G が存在する。

$$G := \{(y, x) \in \text{cod}(f) \times \text{dom}(f) \mid y = f(x)\} \cup \{(y, x_0) \mid y \in \text{cod}(f) \setminus \text{Im}(f)\}$$

写像 $g := ((\text{cod}(f), \text{dom}(f)), G)$ は、定義より f の左逆写像となる。

3. \rightarrow 1. を示す。

f が空写像であるときを考える。

f に右から合成可能、すなわち、終域を空集合とする写像は、 $g_0: \emptyset \rightarrow \emptyset$ のみであるので、左簡約可能である。

f が左可逆であるとき、左可逆ならば左簡約可能であるため、明らか。 ■

Cor. 4.6.2.

包含写像は単射である。

Lem. 4.6.3.

集合 X, Y について、単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在するならば、単射 $g: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$ が存在する。

Proof.

$g(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ で定義する写像は、単射である。 ■

Lem. 4.6.4. 全射

写像 f について、以下の 3 つは同値である。

1. f が右簡約可能 (f が全射)
2. f が右全域的
3. f が右可逆

Proof.

1. \rightarrow 2. を示す。

右全域的でないとすると、 $\exists y \in Y \forall x \in X (f(x) \neq y)$ である。

$g, h \in \text{Map}(Y, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ について、 $g(y) = \emptyset, h(y) = \{\emptyset\}$ であり、 $\forall w \in Y \setminus \{y\} (g(w) = h(w))$ とする。

$g \circ f = h \circ f$ であるが、 $g \neq h$ であり、右簡約可能ではない。

対偶法より示される。

2. \rightarrow 3. を示す。

定理 4.4.1 の与える写像は、右逆写像である。

3. \rightarrow 1. は、右可逆ならば右簡約可能であるため、明らか。 ■

Def. 4.6.1. 全単射

写像 f が同型射であるとき、 f を全単射と呼ぶ。

Def. 4.6.2. 逆写像

写像 f の逆射を逆写像と呼ぶ。

Lem. 4.6.5.

全単射 $f: X \rightarrow Y$ と Y の部分集合 A について、原像 $f^{-1}(A)$ と逆写像の像 $f^{-1}(A)$ は一致する。

Proof.

全単射より、 $\forall y \in A \exists x \in X (y = f(x))$ である。定義より明らか。 ■

Thm. 4.6.6. Cantor の対角線論法

単射 $f: \mathfrak{P}(A) \rightarrow A$ は存在しない。

Proof.

存在すると仮定する。

以下の集合 Y を考える。

$$Y := \{f(X) \mid X \subset A \wedge f(X) \notin X\}$$

このとき $Y \subset A$ である。

$f(Y) \notin Y$ とすると、定義より $f(Y) \in Y$ 。ゆえに矛盾。

$f(Y) \in Y$ とすると、 f の単射性より $Y \subset A \wedge f(Y) \notin Y$ 。ゆえに矛盾。

背理法より示される。 ■

5 関係

5.1 自己関係

Def. 5.1.1. 自己関係

関係 $((X, Y), G)$ について、 $X = Y$ であるとき、 X 上の自己関係、または単に X 上の関係と呼ぶ。

Def. 5.1.2. 反射的

集合 X 上の関係 \mathfrak{R} が反射的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x \in X (\mathfrak{R}(x, x))$$

Def. 5.1.3. 対称的

集合 X 上の関係 \mathfrak{R} が対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X (\mathfrak{R}(x, y) \rightarrow \mathfrak{R}(y, x))$$

Def. 5.1.4. 反対称的

集合 X 上の関係 \mathfrak{R} が反対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X (\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(y, x) \rightarrow x = y)$$

Def. 5.1.5. 推移的

集合 X 上の関係 \mathfrak{R} が推移的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y, z \in X (\mathfrak{R}(x, y) \wedge \mathfrak{R}(y, z) \rightarrow \mathfrak{R}(x, z))$$

Cor. 5.1.1.

\emptyset 上の関係は一意に定まり、それは、反射的、対称的、反対称的、推移的である。

Def. 5.1.6. 完全

集合 X 上の関係 \mathfrak{R} が完全であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X (\mathfrak{R}(x, y) \vee \mathfrak{R}(y, x))$$

5.2 前順序

Def. 5.2.1. 前順序

反射的かつ推移的な自己関係 $\preceq := ((X, X), G)$ を、前順序と呼ぶ。

前順序であることを明示的に記号 \preceq で表す。

簡単のため、 $\preceq(x, y)$ を $x \preceq y$ でも表す。

略記 \prec, \succ, \succsim を以下のように定める。

$$\begin{aligned} x \prec y &:\leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y \\ x \succ y &:\leftrightarrow y \preceq x \\ x \succsim y &:\leftrightarrow y \prec x \end{aligned}$$

組 (X, \preceq) を、前順序集合、または単に前順序と呼ぶ。

Rem. 5.2.1. 前順序の定義

より簡単に、 $x \preceq y :\leftrightarrow \dots$ の形式によって述語として前順序を定義できる。

Cor. 5.2.1.

前順序集合 X について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\forall x, y \in X(x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \vee x = y) \\ \forall x, y \in X(x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \succ y \vee x = y)\end{aligned}$$

Def. 5.2.2. 上界

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が上に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(a \preccurlyeq b)$$

このとき、 b を A の上界と呼ぶ。

Def. 5.2.3. 下界

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が下に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(b \preccurlyeq a)$$

このとき、 b を A の下界と呼ぶ。

Def. 5.2.4. 有界

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が有界であるとは、 A が上に有界かつ下に有界であることである。

Cor. 5.2.2.

空でない前順序集合 X について、 \emptyset は有界である。

Def. 5.2.5. 有向集合

前順序集合 Λ が以下を満たすとき、 Λ を有向集合と呼ぶ。

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda (\{\lambda, \mu\} \text{ は上に有界})$$

Def. 5.2.6. 上方集合

有向集合 Λ とその元 $\lambda_0 \in \Lambda$ について、集合 $\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}, \Lambda_{\succ \lambda_0}$ を以下で定める。

$$\begin{aligned}\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0} &:= \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \preccurlyeq \lambda\} \\ \Lambda_{\succ \lambda_0} &:= \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \prec \lambda\}\end{aligned}$$

Def. 5.2.7. 単調

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下を満たすとき、 f は単調であるという。

$$\forall x, y \in X (x \preccurlyeq_X y \rightarrow f(x) \preccurlyeq_Y f(y))$$

Def. 5.2.8. 狹義単調

前順序集合 $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$ と、写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下を満たすとき、 f は単調であるという。

$$\forall x, y \in X (x \prec_X y \rightarrow f(x) \prec_Y f(y))$$

Cor. 5.2.3.

狭義単調な写像は、単調である。

5.3 同値関係

Def. 5.3.1. 同値関係

対称的な前順序を、同値関係と呼ぶ。同値関係であることを明示的に記号 \sim で表す。

Cor. 5.3.1.

等号は同値関係である。集合 X 上の同値関係であることを明示的に、 $=_X$ で表す。

Def. 5.3.2. 同値類

空でない集合 X 上で定義された同値関係 \sim と、 X の要素 a について、以下で定める集合を a の同値類と呼び、 $[a]$ で表す。この a を特に代表元と呼ぶ。

$$[a] := \{x \in X \mid x \sim a\}$$

Cor. 5.3.2.

空でない集合 X 上で定義された同値関係 \sim について、以下が成り立つ。

$$X = \bigsqcup \{[x] \mid x \in X\}$$

Def. 5.3.3. 商集合

同値関係の定義された空でない集合 X について、以下で定める集合を商集合と呼び、 X/\sim で表す。

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

Def. 5.3.4. 商写像

写像 $\llbracket: X \rightarrow X/\sim$ を商写像と呼ぶ。

Cor. 5.3.3.

商写像は全射である。

Thm. 5.3.4. well-defined な写像

空でない集合 X 上の同値関係 \sim_X 、集合 Y 上の同値関係 \sim_Y について、写像 $f: X \rightarrow Y$ を考える。

f が \sim_X, \sim_Y と両立することは、写像 $h: X/\sim_X \rightarrow Y/\sim_Y$ が存在して以下を満たすことと必要十分である。

$$\llbracket_Y \circ f = h \circ \llbracket_X$$

さらに、上で定まる写像 h は一意である。

Proof.

\sqcup_X は全射より、右逆写像 r が存在する。

まず、必要性を示す。仮定より以下を満たす。

$$\forall x \in X / \sim_X \forall z, w \in x ([f(z)]_Y = [f(w)]_Y)$$

ゆえに $h := \sqcup_Y \circ f \circ r$ を考えると、 $\sqcup_Y \circ f = h \circ \sqcup_X$ を満たす。

十分性を示す。 $\forall x, y \in X$ について、 $x \sim_X y$ ならば、 $[f(x)]_Y = h([x]_X) = h([y]_X) = [f(y)]_Y$ である。よって、 $f(x) \sim_Y f(y)$

一意であることを示す。相異なる 2 つが存在すると仮定すると、 $h \circ \sqcup_X = h' \circ \sqcup_X$ である。右から r をかけて、 $h = h'$ であり、矛盾する。 ■

Def. 5.3.5. 写像に付随する同値関係

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下で定める X 上の関係 \sim_f は同値関係であり、これを写像 f に付随する同値関係と呼ぶ。

$$x \sim_f y : \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Cor. 5.3.5.

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、 f は $\sim_f, =_Y$ と両立する。

Thm. 5.3.6. 標準分解

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、全单射 $\bar{f}: X / \sim_f \rightarrow \text{Im}(f)$ が存在する。

Proof.

定理 5.3.4 より、写像 $\bar{f}: X / \sim_f \rightarrow Y$ が存在して、 $\text{Im}(\bar{f}) = \text{Im}(f)$ である。

单射であることを示す。 $\bar{f}([x]) = \bar{f}([y])$ のとき、 $f(x) = f(y)$ より、 $[x] = [y]$ である。 ■

6 順序

6.1 半順序

Def. 6.1.1. 半順序

反対称的な前順序を、半順序と呼ぶ。

集合 P 上の半順序 \preceq について、順序対 (P, \preceq) を半順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、半順序集合と集合どちらも表すものとする。

Cor. 6.1.1.

集合 P について、 (P, \subset) は半順序集合である。また、 (P, \supset) も半順序集合である。

Def. 6.1.2. 単調

半順序 \preceq と両立する写像を単調である、または広義単調であると呼ぶ。

特に、 \prec と両立する写像を、狭義単調であると呼ぶ。

Def. 6.1.3. 極大元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の極大元と呼ぶ。

$$b \in P \wedge \forall a \in P (\neg b \prec a)$$

Def. 6.1.4. 最大元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の最大元と呼ぶ。

$$b \in P \wedge \forall a \in P (a \preccurlyeq b)$$

Def. 6.1.5. 極小元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の極小元と呼ぶ。

$$b \in P \wedge \forall a \in P (\neg b \succ a)$$

Def. 6.1.6. 最小元

半順序集合 P について、以下の元 b を P の最小元と呼ぶ。

$$b \in P \wedge \forall a \in P (a \succcurlyeq b)$$

Cor. 6.1.2.

半順序集合 P の最大元は、極大元である。

Cor. 6.1.3. 最大元の一意性

半順序集合 P の最大元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。

ここから、半順序集合 P の最大元 b を $\max P := b$ と表す。

Cor. 6.1.4.

半順序集合 P の最小元は、極小元である。

Cor. 6.1.5. 最小元の一意性

半順序集合 P の最小元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。

ここから、半順序集合 P の最小元 b を $\min P := b$ と表す。

Def. 6.1.7. 上限

半順序集合 P について、その部分集合 A を考える。

A の上界全体の集合に最小元が存在するとき、これを A の上限と呼び、 $\sup A$ で表す。

Def. 6.1.8. 下限

半順序集合 P について、その部分集合 A を考える。

A の下界全体の集合に最大元が存在するとき、これを A の下限と呼び、 $\inf A$ で表す。

6.2 束

Def. 6.2.1. 束

以下を満たす半順序集合 P を束と呼ぶ。

$$\forall x, y \in P \exists z, w \in P (z = \sup\{x, y\} \wedge w = \inf\{x, y\})$$

Cor. 6.2.1.

束は有向集合である。

Lem. 6.2.2. 分配不等式

束 P について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sup\{x, \inf\{y, z\}\} &\preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\} \\ \inf\{x, \sup\{y, z\}\} &\succcurlyeq \sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\}\end{aligned}$$

Proof.

x は $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界であるので、 $x \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

$\inf\{y, z\}$ は、 $\{y, z\}$ の下界であり、推移性より $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界である。ゆえに、 $\inf\{y, z\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

よって $\inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ は、 $\{x, \inf\{y, z\}\}$ の上界である。

したがって第一式が成り立つ。

第二式も同様に成り立つ。 ■

Def. 6.2.2. 全順序

集合 P 上の以下を満たす半順序 \preccurlyeq を全順序と呼ぶ。全順序であることを明示的に記号 \leq で表す。

$$\forall x, y \in P (x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$$

集合 P 上の全順序 \leq について、順序対 (P, \leq) を全順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、全順序集合と集合どちらも表すものとする。

略記 $<, \geq, >$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}x < y &\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y \\ x \geq y &\Leftrightarrow y \leq x \\ x > y &\Leftrightarrow y < x\end{aligned}$$

Cor. 6.2.3.

全順序集合 P の極大元は最大元であり、極小元は最小元である。

Cor. 6.2.4.

全順序集合は束である。

Def. 6.2.3. 区間

全順序集合 P と $a, b \in P$ について、以下で定める P の部分集合をそれぞれ、開区間 $]a, b[$ 、閉区間 $[a, b]$ と呼ぶ。

$$\begin{aligned}]a, b[&:= \{x \in P \mid a < x \wedge x < b\} \\ [a, b] &:= \{x \in P \mid a \leq x \wedge x \leq b\} \end{aligned}$$

開区間、閉区間をまとめて区間と呼ぶ。

6.3 Zorn の補題

Def. 6.3.1. 帰納的

空でない半順序集合 (P, \preccurlyeq) を考える。

P の任意の部分集合 A について、順序対 (A, \preccurlyeq) が全順序集合ならば A が上に有界となるとき、 P は帰納的であると言う。

Lem. 6.3.1.

帰納的な半順序集合 (P, \preccurlyeq) について、以下の集合系 \mathcal{M} 、すなわち P の全順序部分集合の全体を考える。

$$\mathcal{M} := \{M \subset P \mid \forall x, y \in M(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)\}$$

このとき、 P が極大元を持たないならば、以下を満たす写像 $f: \mathcal{M} \rightarrow P$ が存在する。

$$\forall M \in \mathcal{M} \forall m \in M(m \prec f(M))$$

Proof.

帰納的であることより、 $\forall M \in \mathcal{M}$ に対して上界 u が存在する。

今、 u は P の極大元ではないので、 $\exists v \in P(u \prec v)$ である。 $\forall m \in M(m \preccurlyeq u \prec v)$ である。

定理 4.4.1 より存在する。 ■

Def. 6.3.2. タワー

極大元を持たない半順序集合 P を考える。

補題 6.3.1 で定めた集合系 \mathcal{M} と写像 f を考える。

以下を満たす集合系 $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ を、 P のタワーと呼ぶ。

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathcal{T} \\ \forall T \in \mathcal{T} (T \cup \{f(T)\}) &\in \mathcal{T} \\ \forall S \subset \mathcal{T} ((S, \subset) \text{ は全順序集合} \rightarrow \bigcup S \in \mathcal{T}) \end{aligned}$$

Lem. 6.3.2.

極大元を持たない半順序集合 P について、以下の集合を考える。

$$\mathcal{T}_0 := \bigcap \{\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(P) \mid \mathcal{T} \text{ は } P \text{ のタワー}\}$$

このとき、 \mathcal{T}_0 は P のタワーである。

Proof.

\mathcal{M} は P のタワーであるので、 $\{\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(P) \mid \mathcal{T} \text{ は } P \text{ のタワー}\} \neq \emptyset$ である。

タワーの定義より、明らか。 ■

Lem. 6.3.3.

極大元を持たない半順序集合 P を考える。

補題 6.3.1 で定めた f について、以下で定める写像 $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ を考える。

$$g(M) := M \cup \{f(M)\}$$

このとき、補題 6.3.2 で定めた \mathcal{T}_0 は、以下を満たす。

$$\forall T \in \mathcal{T}_0 (\forall T' \in \mathcal{T}_0 (T \subset T' \vee T' \subset T) \rightarrow \forall T' \in \mathcal{T}_0 (T' \subset T \vee g(T) \subset T'))$$

Proof.

前件を満たす T について、以下の集合系を考える。

$$\mathcal{T}_T := \{T' \in \mathcal{T}_0 \mid T' \subset T \vee g(T) \subset T'\}$$

定義より、 $\mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_0$ である。

今、 $\emptyset \subset T$ であるので、 $\emptyset \in \mathcal{T}_T$ である。

$T' \in \mathcal{T}_T$ を考える。

$g(T) \subset T'$ であるとき、 $g(T) \subset T' \subset g(T')$ より、 $g(T') \in \mathcal{T}_T$ である。

$T' \subset T$ であるとき、 $g(T') \subset T$ ならば $g(T') \in \mathcal{T}_T$ である。

$g(T') \setminus T \neq \emptyset$ ならば、 $g(T') \setminus T = \{f(T')\}$ であるため、 $T = T'$ である。ゆえに、 $g(T') = g(T) \in \mathcal{T}_T$ である。

\mathcal{T}_T の全順序部分 \mathcal{S} を考える。

$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_0$ より、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_0$ である。

$\forall S \in \mathcal{S} (S \subset T)$ ならば、 $\bigcup \mathcal{S} \subset T$ であり、 $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_T$ である。

$\exists S \in \mathcal{S} (g(T) \subset S)$ ならば、 $g(T) \subset \bigcup \mathcal{S}$ であり、 $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_T$ である。

ゆえに \mathcal{T}_T は、 P のタワーである。

よって、 $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_T$ が成り立つので、 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_T$ である。

したがって後件を満たす。 ■

Lem. 6.3.4.

極大元を持たない半順序集合 P を考える。

補題 6.3.2 で定めた \mathcal{T}_0 について、 (\mathcal{T}_0, \subset) は全順序集合である。

Proof.

以下の集合系を考える。

$$\mathcal{T}_1 := \{T \in \mathcal{T}_0 \mid \forall T' \in \mathcal{T}_0 (T \subset T' \vee T' \subset T)\}$$

定義より、 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$ である。

今、 $\emptyset \subset T$ であるので、 $\emptyset \in \mathcal{T}_1$ である。

$T \in \mathcal{T}_1$ を考える。

補題 6.3.3 より、 $\forall T' \in \mathcal{T}_0 (T' \subset T \subset g(T) \vee g(T) \subset T')$ であるため、 $g(T) \in \mathcal{T}_1$ である。

\mathcal{T}_1 の全順序部分 \mathcal{S} を考える。

$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$ より、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_0$ である。

$\forall T' \in \mathcal{T}_0$ を考える。

$\forall S \in \mathcal{S}(S \subset T')$ ならば、 $\bigcup \mathcal{S} \subset T'$ である。 $\exists S \in \mathcal{S}(T' \subset S)$ ならば、 $T' \subset \bigcup \mathcal{S}$ である。

ゆえに、 $T' \subset \bigcup \mathcal{S} \vee \bigcup \mathcal{S} \subset T'$ である。

したがって、 $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}_1$ である。

ゆえに \mathcal{T}_1 は、 P のタワーである。

よって、 $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ が成り立つので、 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$ である。 ■

Thm. 6.3.5. Zorn の補題

帰納的な半順序集合には極大元が存在する。

Proof.

極大元を持たないと仮定する。

補題 6.3.4 より (\mathcal{T}_0, \subset) は全順序であるため、タワーの定義から $\bigcup \mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_0$ である。

タワーの定義より $g(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \mathcal{T}_0$ であるので、から $f(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \bigcup \mathcal{T}_0$ である。

これは、補題 6.3.2 における f の定義に反する。

背理法より示される。 ■

6.4 フィルターとネット

Def. 6.4.1. フィルター

半順序集合 (P, \preccurlyeq) と P の空でない部分集合 F について、以下を満たすとき、 F を P のフィルターと呼ぶ。

$$\begin{aligned}\forall x, y \in F \exists z \in F (z \preccurlyeq x \wedge z \preccurlyeq y) \\ \forall x \in F \forall y \in P (x \preccurlyeq y \rightarrow y \in F)\end{aligned}$$

Cor. 6.4.1.

フィルターは逆順序について有向集合である。

Def. 6.4.2. 細分

半順序集合 P のフィルター F, G に対して、 $F \subset G$ であるとき、 G は F の細分であると呼ぶ。

Def. 6.4.3. 超フィルター

自身以外の細分を持たないフィルターを超フィルターと呼ぶ。

Thm. 6.4.2. 超フィルターの存在

半順序集合 P のフィルター F について、その細分である超フィルターが存在する。

Proof.

F の細分の全体 \mathcal{F} と半順序集合 (\mathcal{F}, \subset) を考える。

\mathcal{F} の空でない全順序部分集合 A について、上界 $\bigcup A \in \mathcal{F}$ が存在する。

\mathcal{F} の全順序部分集合 \emptyset について、 F は上界である。

ゆえに、 \mathcal{F} は帰納的である。

定理 6.3.5 より極大元が存在する。これは超フィルターである。 ■

Def. 6.4.4. 集合におけるフィルター

集合 X について、半順序集合 $(\mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}, \subset)$ のフィルターを、集合 X のフィルターと呼ぶ。

Cor. 6.4.3.

集合 X のフィルター \mathcal{F} は以下を満たす。

$$\begin{aligned} X &\in \mathcal{F} \\ \forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} &(F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Thm. 6.4.4. 集合の超フィルター

集合 X のフィルター \mathcal{F} について、以下の 2 つは同値である。

1. \mathcal{F} は超フィルターである
2. $\forall A \subset X (A \in \mathcal{F} \vee X \setminus A \in \mathcal{F})$

Proof.

1. \rightarrow 2. を示す。

$A \in \mathcal{F}$ のとき明らかであるので、 $A \notin \mathcal{F}$ のときを考える。

$\mathcal{S} := \{S \subset X \mid A \cup S \in \mathcal{F}\}$ について、定義より $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \wedge X \setminus A \in \mathcal{S}$ である。

今、 $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について、 $A \cup (S_1 \cap S_2) = (A \cup S_1) \cap (A \cup S_2) \in \mathcal{F}$ より、 $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ である。

$S \in \mathcal{S} \wedge T \subset X \wedge S \subset T$ とすると、 $A \cup S \in \mathcal{F} \rightarrow A \cup T \in \mathcal{F}$ より $T \in \mathcal{S}$

$A \cup X = X \in \mathcal{F}$ より、 $X \in \mathcal{S}$ である。すなわち、 $\mathcal{S} \neq \emptyset$

$\emptyset \notin \mathcal{S}$ より、 \mathcal{S} はフィルターでありかつ \mathcal{F} の細分である。

ここで、 \mathcal{F} は超フィルターであるので $X \setminus A \in \mathcal{S} = \mathcal{F}$

2. \rightarrow 1. を示す。

超フィルターでないとすると、 \mathcal{F} の細分 \mathcal{F}' が存在して、 $\exists A \in \mathcal{F}' (A \notin \mathcal{F} \wedge A \in \mathcal{F}')$ である。

仮定より、 $X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であり、 $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ よりフィルターの定義に矛盾。背理法より示される。

■

Def. 6.4.5. ネット

有向集合 Λ から集合 X への写像を、 X 上のネットと呼ぶ。

ネットは、明示的に $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と表す。このとき、 x_λ は X 上の元で、 $\lambda \in \Lambda$ での値を表す。

また誤解のない限り、 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で値域を表す。

Def. 6.4.6. 部分ネット

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と有向集合 M について、写像 $\varphi: M \rightarrow \Lambda$ が以下を満たすとき、 $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分ネットと呼ぶ。

$$\begin{aligned} \forall \mu_1, \mu_2 \in M (\mu_1 \preccurlyeq \mu_2 \rightarrow \varphi(\mu_1) \preccurlyeq \varphi(\mu_2)) \\ \forall \lambda \in \Lambda \exists \mu \in M (\lambda \preccurlyeq \varphi(\mu)) \end{aligned}$$

Def. 6.4.7. 普遍

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が以下を満たすとき、 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は普遍であると呼ぶ。

$$\forall A \subset X \exists \lambda_0 \in \Lambda \left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_0}} \subset A \vee (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_0}} \subset X \setminus A \right)$$

Thm. 6.4.5. ネットの定めるフィルター

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、以下で定める集合系 \mathcal{F} は X のフィルターである。

$$\mathcal{F} := \left\{ F \subset X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda \left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_0}} \subset F \right) \right\}$$

Proof.

明らかに $\emptyset \notin \mathcal{F} \wedge X \in \mathcal{F}$ である。

$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ について、定義より $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_1}} \subset F_1 \wedge (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_2}} \subset F_2 \right)$ である。 Λ が有向集合であることから、 $\exists \lambda_3 \in \Lambda (\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \wedge \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ であり、 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_3}} \subset F_1 \cap F_2$ 。ゆえに $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ である。

$\forall F \in \mathcal{F} \forall G \subset \mathfrak{P}(X)$ について、 $F \subset G$ ならば定義より明らかに $G \in \mathcal{F}$

Lem. 6.4.6.

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と定理 6.4.5 の定めるフィルター \mathcal{F} を考える。

このとき、 \mathcal{F} の任意の細分 \mathcal{F}' について、以下が成り立つ。

$$\forall F \in \mathcal{F}' \forall \lambda_0 \in \Lambda \exists \lambda \in \Lambda (\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \wedge x_\lambda \in F)$$

Proof.

$\exists F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda \in \Lambda (\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \rightarrow x_\lambda \notin F)$ とする。

今、 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_0}} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であるので、 $\emptyset = F \cap (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succ \lambda_0}} \in \mathcal{F}'$ より、フィルターの定義に矛盾。背理法より示される。

Thm. 6.4.7. フィルターの定める部分ネット

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と、定理 6.4.5 の定めるフィルター \mathcal{F} について考える。

\mathcal{F} の任意の細分 \mathcal{F}' に対して、ある部分ネット $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$ が存在して、定理 6.4.5 から定まるその部分ネットのフィルターは \mathcal{F}' の細分となる。

Proof.

$M := \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F}' \mid x_\lambda \in F\}$ を考える。

M 上の前順序 $\forall (\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M ((\lambda_1, F_1) \preccurlyeq (\lambda_2, F_2) : \leftrightarrow \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \wedge F_1 \supset F_2)$ を考える。

$(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M$ とする。

\mathcal{F}' はフィルターより $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$

Λ は有向集合であるので、 $\exists \lambda_3 \in \Lambda (\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \wedge \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ である。

補題 6.4.6 より $\exists \lambda_4 \in \Lambda (\lambda_3 \preccurlyeq \lambda_4 \wedge x_{\lambda_4} \in F_1 \cap F_2)$

$(\lambda_4, F_1 \cap F_2)$ は、 $\{(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)\}$ の上界であるので、 M は有向集合である。

ここで、写像 $\varphi: M \rightarrow \Lambda$, $\varphi(\lambda, F) := \lambda$ を定める。

補題 6.4.6 より $\forall \lambda \in \Lambda \exists F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_1 \in \Lambda (\lambda \preccurlyeq \lambda_1 = \varphi(\lambda_1, F) \wedge (\lambda_1, F) \in M)$ である。

したがって、 $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$ は部分ネットである。 ■

今、補題 6.4.6 より $\forall F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_0 \in \Lambda ((\lambda_0, F) \in M)$

$\forall (\lambda', F') \in M$ について、 $(\lambda_0, F) \preccurlyeq (\lambda', F')$ ならば、 $x_{\lambda'} \in F' \subset F$ となる。

よって、 $F \in \left\{ F \subset X \mid \exists \mu_0 \in M \left((x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M_{\succcurlyeq \mu_0}} \subset F \right) \right\}$ ■

Thm. 6.4.8. 普遍部分ネットの存在

任意のネットは、普遍な部分ネットを持つ。

Proof.

ネットに対して定理 6.4.5 の定めるフィルター \mathcal{F} が存在する。

定理 6.4.2 より \mathcal{F} の細分である超フィルター \mathcal{U} が存在する。

定理 6.4.7 より、定理 6.4.5 の定めるフィルターが \mathcal{U} に一致する部分ネットが存在する。

定理 6.4.4 より、この部分ネットは普遍である。 ■