1 関係

1.1 自己関係

***Def.* 1.1.1.** 自己関係

関係 $((X,Y),G)$ について、$X=Y$ であるとき、X 上の自己関係、または単に X 上の関係と呼ぶ。

***Def.* 1.1.2.** 反射的

集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が反射的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x\in X(\mathfrak{R}(x,x))$$

***Def.* 1.1.3.** 対称的

集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y\in X(\mathfrak{R}(x,y)\to\mathfrak{R}(y,x))$$

***Def.* 1.1.4.** 反対称的

集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が反対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y\in X(\mathfrak{R}(x,y)\wedge\mathfrak{R}(y,x)\to x=y)$$

***Def.* 1.1.5.** 推移的

集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が推移的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y,z\in X(\mathfrak{R}(x,y)\wedge\mathfrak{R}(y,z)\to\mathfrak{R}(x,z))$$

***Def.* 1.1.6.** 完全

集合 X 上の関係 $\mathfrak{R}$ が完全であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x,y\in X(x\neq y\to\mathfrak{R}(x,y)\vee\mathfrak{R}(y,x))$$

***Cor.* 1.1.1.**

$\varnothing$ 上の関係は一意に定まり、それは、反射的、対称的、反対称的、推移的、完全である。

***Def.* 1.1.7.** 写像が誘導する自己関係

写像 $f\colon X\to Y$ と、Y 上の自己関係 $\mathfrak{R}_Y$ を考える。

このとき、以下で定める X 上の自己関係 $\mathfrak{R}_X$ を考える。

$$\mathfrak{R}_X(x,y):\leftrightarrow\mathfrak{R}_Y(f(x),f(y))$$

この $\mathfrak{R}_X$ を、f が $\mathfrak{R}_Y$ から誘導する自己関係と呼ぶ。

Rem. **1.1.1.** 包含写像が誘導する自己関係

集合 X 上の自己関係 $\mathfrak{R}$ について、特に明示しなければ X の部分 A の自己関係を、包含写像が誘導する自己関係で定めるものとする。

Cor. **1.1.2.** 写像が誘導する自己関係

写像 $f\colon X \to Y$ と、Y 上の自己関係 $\mathfrak{R}_Y$ を考える。

f が $\mathfrak{R}_Y$ から誘導する自己関係 $\mathfrak{R}_X$ を考える。

このとき、以下が成り立つ。

1. $\mathfrak{R}_Y$ が反射的ならば、$\mathfrak{R}_X$ は反射的である。
2. $\mathfrak{R}_Y$ が対称的ならば、$\mathfrak{R}_X$ は対称的である。
3. f が単射かつ $\mathfrak{R}_Y$ が反対称的ならば、$\mathfrak{R}_X$ は反対称的である。
4. $\mathfrak{R}_Y$ が推移的ならば、$\mathfrak{R}_X$ は推移的である。
5. $\mathfrak{R}_Y$ が完全ならば、$\mathfrak{R}_X$ は完全である。

1.2 前順序

Def. **1.2.1.** 前順序

反射的かつ推移的な自己関係 $\preccurlyeq := ((X, X), G)$ を、前順序と呼ぶ。

前順序であることを明示的に記号 $\preccurlyeq$ で表す。

簡単のため、$\preccurlyeq (x, y)$ を $x \preccurlyeq y$ でも表す。

組 $(X, \preccurlyeq)$ を、前順序集合、または単に前順序と呼ぶ。

Rem. **1.2.1.** 前順序の定義

より簡単に、$x \preccurlyeq y :\leftrightarrow \cdots$ の形式によって述語として前順序を定義できる。

Def. **1.2.2.** 前順序に関わるいくつかの述語

アリティ 2 の述語 $\prec, \succcurlyeq, \succ$ を以下のように定める。

$$
\begin{aligned}
x \prec y &:\leftrightarrow x \preccurlyeq y \land x \neq y \\
x \succcurlyeq y &:\leftrightarrow y \preccurlyeq x \\
x \succ y &:\leftrightarrow y \prec x
\end{aligned}
$$

Cor. **1.2.1.**

前順序集合 X について、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\forall x, y \in X (x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \lor x = y) \\
&\forall x, y \in X (x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \succ y \lor x = y)
\end{aligned}
$$

***Def.* 1.2.3. 上界**

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が上に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(a \preccurlyeq b)$$

このとき、b を A の上界と呼ぶ。

***Def.* 1.2.4. 下界**

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が下に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in X \forall a \in A(b \preccurlyeq a)$$

このとき、b を A の下界と呼ぶ。

***Def.* 1.2.5. 有界**

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

A が有界であるとは、A が上に有界かつ下に有界であることである。

***Cor.* 1.2.2.**

空でない前順序集合 X について、$\varnothing$ は有界である。

***Def.* 1.2.6. 有向集合**

前順序集合 Λ が以下を満たすとき、Λ を有向集合と呼ぶ。

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda\big(\{\lambda, \mu\} \text{ は上に有界}\big)$$

***Def.* 1.2.7. 共終**

前順序集合 X について、X の部分 A が以下を満たすとき、A を共終な部分と呼ぶ。

$$\forall x \in X \exists a \in A(x \preccurlyeq a)$$

***Def.* 1.2.8. 上方集合**

前順序集合 X とその元 $x_0 \in X$ について、集合 $X_{\succcurlyeq x_0}, X_{\succ x_0}$ を以下で定める。

$$X_{\succcurlyeq x_0} \coloneqq \{x \in X \mid x_0 \preccurlyeq x\}$$
$$X_{\succ x_0} \coloneqq \{x \in X \mid x_0 \prec x\}$$

***Def.* 1.2.9. 単調**

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たすとき、f は単調であるという。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq_X y \to f(x) \preccurlyeq_Y f(y))$$

***Cor.* 1.2.3.**

単調な $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ について、$g \circ f$ は単調である。

***Def.* 1.2.10.** 狭義単調

前順序集合 $(X, \preccurlyeq_X), (Y, \preccurlyeq_Y)$ と、写像 $f\colon X \to Y$ について、以下を満たすとき、f は狭義単調であるという。

$$\forall x, y \in X(x \prec_X y \to f(x) \prec_Y f(y))$$

***Cor.* 1.2.4.**

狭義単調な写像は、単調である。

1.3 前順序と圏論

***Def.* 1.3.1.** 前順序集合の圏

単調写像を射とみなすと、単調写像であることは圏となる。

この圏を前順序集合の圏と呼び、**Ord** で表す。

***Def.* 1.3.2.** 順序同型

Ord の同型射を順序同型と呼ぶ。

***Cor.* 1.3.1.**

順序同型ならば狭義単調である。

***Def.* 1.3.3.** 前順序が誘導する圏

前順序集合 $(X, \preccurlyeq), \preccurlyeq = ((X, X), G)$ について、G の元 (x, y) を考える。$\mathrm{dom}((x, y)) = (x, x), \mathrm{cod}((x, y)) = (y, y)$ として、合成を $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$ で定義すると、G は圏となる。

このように定める圏 G を、前順序 X が誘導する圏と呼ぶ。

誤解のない範囲で、前順序 X が誘導する圏を前順序集合 X で表す。

ここで記号の濫用であるが、(x, x) をして x を表し、x をして (x, x) を表す。

***Cor.* 1.3.2.**

前順序が誘導する圏 X について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y \in X \forall f, g \in \mathrm{Hom}_X(x, y)(f = g)$$

***Def.* 1.3.4.** 最大元

前順序集合 X について、X の終対象が存在するならば、この終対象 m を X の最大元と呼ぶ。

すなわち、以下である。

$$\forall x \in X(x \preccurlyeq m)$$

***Def.* 1.3.5.** 最小元

前順序集合 X について、X の始対象が存在するならば、この始対象 m を X の最小元と呼ぶ。

すなわち、以下である。

$$\forall x \in X(m \preccurlyeq x)$$

***Def.* 1.3.6.** 下限

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

離散圏 A から前順序が誘導する圏 X への関手 id について、この積 x, u が存在するならば、x を A の下限と呼ぶ。

すなわち、以下である。

$$\forall a \in A(x \preccurlyeq a) \land \forall x' \in X(\forall a \in A(x' \preccurlyeq a) \to x' \preccurlyeq x)$$

***Def.* 1.3.7.** 上限

前順序集合 X について、その部分集合 A を考える。

離散圏 A から前順序が誘導する圏 X への関手 id について、この和 x, u が存在するならば、x を A の上限と呼ぶ。

すなわち、以下である。

$$\forall a \in A(a \preccurlyeq x) \land \forall x' \in X(\forall a \in A(a \preccurlyeq x') \to x \preccurlyeq x')$$

***Lem.* 1.3.3.** 単調像と上限

前順序集合 X, Y について、単調写像 $f \colon X \to Y$ を考える。

X の部分 A について、A の上限 x と、$f(A)$ の上限 y が存在するとする。

このとき、以下が成り立つ。

$$y \preccurlyeq f(x)$$

Proof.

x は上限より、$\forall a \in A(a \preccurlyeq x)$ であり、単調性より $\forall a \in A(f(a) \preccurlyeq f(x))$ である。

ゆえに、$f(x)$ は $f(A)$ の上界であるので、$f(x) \preccurlyeq \sup f(A) = y$ である。 ■

***Def.* 1.3.8.** 射影系

前順序集合 Λ と圏 $\boldsymbol{C}$ について、Λ^{op} から $\boldsymbol{C}$ への関手 X を、射影系と呼ぶ。

***Def.* 1.3.9.** 射影極限

射影系 X ついて、X の極限を射影極限と呼ぶ。

***Def.* 1.3.10.** 帰納極限

射影系 X ついて、X の余極限を帰納極限と呼ぶ。

1.4 同値関係

***Def.* 1.4.1.** 同値関係

対称的な前順序を、同値関係と呼ぶ。同値関係であることを明示的に記号 $\sim$ で表す。

***Cor.* 1.4.1.**

等号は同値関係である。集合 X 上の同値関係であることを明示的に、$=_X$ で表す。

***Def.* 1.4.2.** 写像が誘導する同値関係

写像 $f \colon X \to Y$ について、f が $=_Y$ から誘導する自己関係は同値関係である。

この同値関係を、写像 f が誘導する同値関係と呼ぶ。

***Cor.* 1.4.2.**

写像 $f\colon X\to Y$ について、f が誘導する同値関係 $\sim_f$ を考える。

$\sim_f=((X,X),G)$ について、$G,(\pi_0,\pi_1)$ は f の核対である。

ただし、$\pi_0((x,y))=x,\pi_1((x,y))=y$ とする。

***Def.* 1.4.3. 同値類**

集合 X 上の同値関係 $\sim$ と、X の要素 a について、集合 $X_{\sim a}$ を a の同値類と呼ぶ。

***Cor.* 1.4.3.**

集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、以下が成り立つ。

$$X=\bigsqcup\{X_{\sim x}\mid x\in X\}$$

***Def.* 1.4.4. 商集合**

集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、以下で定める集合を商集合と呼び、$X/\sim$ で表す。

$$X/\sim\coloneqq\{X_{\sim x}\mid x\in X\}$$

***Def.* 1.4.5. 商写像**

集合 X 上の同値関係 $\sim$ について、以下で定める写像 π を $\sim$ の商写像と呼ぶ。

$$\pi(x)\coloneqq X_{\sim x}$$

***Lem.* 1.4.4. 集合の圏における余等化子の存在**

写像 $f,g\colon X\to Y$ について、積 $Y\times Y,\pi$ が存在するので、一意な射 q が存在して $f=\pi(0)\circ q\land g=\pi(1)\circ q$ である。

以下の集合 G を考える。

$$G\coloneqq\bigcap\left\{G'\in Y\times Y\mid \mathrm{Im}(q)\subset G'\land((Y,Y),G')\text{ は同値関係}\right\}$$

共通部分をとられる集合は空ではないので、$\sim\coloneqq((Y,Y),G)$ は同値関係となる。

$\sim$ の商写像 u について、$Y/\sim,u$ は余等化子である。

Proof.

$\sim$ の定義より、$\forall x\in X(f(x)\sim g(x))$ である。ゆえに、$u\circ f=u\circ g$ である。

写像 $h\colon Y\to Z$ について、$h\circ f=h\circ g$ であるとする。

h が誘導する同値関係 $\sim_h=((Y,Y),S)$ について、$\forall x_0,x_1\in X((f(x_0),g(x_1))\in S)$ である。

すなわち $\mathrm{Im}(q)\subset S$ であり、G の定義より $G\subset S$ である。

したがって、$\forall y_0,y_1\in Y(y_0\sim y_1\to h(y_0)=h(y_1))$ である。

写像 $k\coloneqq((Y/\sim,Z),\{(Y_{\sim y},h(y))\mid y\in Y\})$ は、$k\circ u=h$ を満たす。

$k'\colon Y/\sim\to Z,k'\neq k$ を考えると明らかに満たさないので、k は一意である。 ■

$$
\textbf{Set}
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dotted, "q"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & & \\
& Y \times Y \arrow[r, "\pi(0)"] \arrow[d, "\pi(1)"'] & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
& Y \arrow[r, "u"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y/\sim \arrow[dr, dotted, "k"] & \\
& & & Z
\end{tikzcd}
$$

***Cor.* 1.4.5. 商集合は余等化子**

集合 X 上の同値関係 $\sim = ((X, X), G)$、$\sim$ の商写像 u、積 $X \times X, \pi$ を考える。

$X/\sim, u$ は、$\pi_0, \pi_1 \colon G \to X$ の余等化子である。

***Thm.* 1.4.6. 写像の標準分解**

写像 $f \colon X \to Y$ と、$\sim_f$ の商写像 u を考える。

このとき一意な単射 $g \colon X/\sim_f \to Y$ が存在して、$f = g \circ u$ が成り立つ。

Proof.

写像 f が誘導する同値関係 $\sim_f = ((X, X), G)$ とする。

このとき、$G, (\pi_0, \pi_1)$ は f の核対であり、$X/\sim_f, u$ は π_0, π_1 の余等化子である。

余等化子の普遍性より、写像 $g \colon X/\sim_f \to Y$ が一意に存在して、$f = g \circ u$ である。

$g(x) = g(y)$ とする。

u は右簡約可能であり、補題 **??**より全射であるため、$\exists z, w \in X (x = u(z) \wedge y = u(w))$ である。

今、$f(z) = g(u(z)) = g(x) = g(y) = g(u(w)) = f(w)$ であるので、$z \sim_f w$ である。

したがって、$x = u(z) = X_{\sim_f z} = X_{\sim_f w} = u(w) = y$ が成り立つ。

ゆえに単射である。 ■

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
X \arrow[r, "u"'] \arrow[dr, bend right, "f"'] & X/\sim_f \arrow[d, dotted, "g"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

2 順序

2.1 半順序

***Def.* 2.1.1. 半順序**

反対称的な前順序を、半順序と呼ぶ。

集合 P 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、順序対 $(P, \preccurlyeq)$ を半順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、半順序集合と集合どちらも表すものとする。

Rem. **2.1.1. 狭義半順序による定義**
集合 P 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、誤解のない範囲において順序対 $(P, \prec)$ で半順序集合を表すものとする。

Cor. **2.1.1.**
集合 P について、$(P, \subset)$ は半順序集合である。また、$(P, \supset)$ も半順序集合である。

Def. **2.1.2. 極大元**
半順序集合 P について、P の元 b を P の極大元と呼ぶ。

$$\forall a \in P(\neg b \prec a)$$

Def. **2.1.3. 極小元**
半順序集合 P について、P の元 b を P の極小元と呼ぶ。

$$\forall a \in P(\neg b \succ a)$$

Cor. **2.1.2.**
半順序集合 P について、最大元は極大元であり、最小元は極小元である。

Cor. **2.1.3. 半順序における諸概念**
半順序が誘導する圏 P について、同型射は恒等射である。したがって、以下が成り立つ。

1. P の最大元は、存在するならば一意である。これを、$\max P$ で表す。
2. P の最小元は、存在するならば一意である。これを、$\min P$ で表す。
3. P の部分 A について、A の下限は、存在するならば一意である。これを、$\inf A$ で表す。
4. P の部分 A について、A の上限は、存在するならば一意である。これを、$\sup A$ で表す。

Def. **2.1.4. 束**
以下を満たす半順序集合 L を束と呼ぶ。

$$\forall x, y \in L \exists z, w \in L(z = \sup\{x, y\} \wedge w = \inf\{x, y\})$$

Cor. **2.1.4.**
束は有向集合である。

Lem. **2.1.5. 分配不等式**
束 L について、以下が成り立つ。

$$\forall x, y, z \in L(\sup\{x, \inf\{y, z\}\} \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\})$$
$$\forall x, y, z \in L(\inf\{x, \sup\{y, z\}\} \succcurlyeq \sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\})$$

Proof.
x は $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界であるので、$x \preccurlyeq \inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。
$\inf\{y, z\}$ は、$\{y, z\}$ の下界であり、推移性より $\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ の下界である。ゆえに、$\inf\{y, z\} \preccurlyeq$

$\inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ である。

よって $\inf\{\sup\{x, y\}, \sup\{x, z\}\}$ は、$\{x, \inf\{y, z\}\}$ の上界である。

したがって第一式が成り立つ。

第二式も同様に成り立つ。 ■

***Def.* 2.1.5. 完備束**

束 L について、L の任意の部分が上限と下限を持つとき、L を完備束と呼ぶ。

***Cor.* 2.1.6.**

空でない完備束 L は最大元と最小元を持つ。

***Cor.* 2.1.7.**

集合 X について、$(\mathfrak{P}(X), \subset)$ は完備束である。

***Def.* 2.1.6. 全順序**

完全な半順序を、全順序と呼ぶ。全順序であることを明示的に記号 $\leq$ で表す。

集合 P 上の全順序 $\leq$ について、順序対 $(P, \leq)$ を全順序集合と呼ぶ。または単に P と書き、全順序集合と集合どちらも表すものとする。

略記 $<, \geq, >$ を以下のように定める。

$$x < y :\leftrightarrow x \leq y \land x \neq y$$
$$x \geq y :\leftrightarrow y \leq x$$
$$x > y :\leftrightarrow y < x$$

***Cor.* 2.1.8.**

全順序集合 P の極大元は最大元であり、極小元は最小元である。

***Cor.* 2.1.9.**

全順序集合は束である。

***Def.* 2.1.7. 区間**

全順序集合 P と $a, b \in P$ について、以下で定める P の部分集合をそれぞれ、開区間 $]a, b[$、閉区間 $[a, b]$ と呼ぶ。

$$]a, b[\coloneqq \{x \in P \mid a < x \land x < b\}$$
$$[a, b] \coloneqq \{x \in P \mid a \leq x \land x \leq b\}$$

開区間、閉区間をまとめて区間と呼ぶ。

***Def.* 2.1.8. 整列集合**

全順序集合 $(S, \leq)$ について、S の任意の空でない部分が最小元を持つとき、S を整列集合と呼ぶ。

***Cor.* 2.1.10.**

整列集合 $(S, \leq)$ とその部分 A について、$(A, \leq)$ は整列集合である。

2.2　順序数

***Def.* 2.2.1.** **順序数**

以下が成り立つ集合 α を考える。

$$\forall x \in \alpha (x \subset \alpha)$$

このとき $(\alpha, \in)$ が整列集合であるとき、α を順序数と呼ぶ。

***Lem.* 2.2.1.**

空でない順序数 α について、$\varnothing \in \alpha$ である。

Proof.

$\varnothing \notin \alpha$ とする。

整列集合より、最小元 $\min \alpha$ が存在する。

$\min \alpha \neq \varnothing$ より、$\exists \beta (\beta \in \min \alpha)$ である。

$\min \alpha \subset \alpha$ であるので、$\beta \in \alpha$ より最小性に反する。 ■

***Lem.* 2.2.2.** **順序数の元は順序数**

順序数 α について、α の元 β は順序数である。

特に、$\beta = \alpha_{<\beta}$ が成り立つ。

Proof.

$\beta \subset \alpha$ より、$\in$ は狭義全順序である。

β の任意の空でない部分は、α の空でない部分であるので、$(\beta, \in)$ は整列集合である。

$\gamma \in \beta$ について、$\gamma \in \beta \subset \alpha$ であるため、$\gamma \in \alpha$ である。

$\delta \in \gamma$ を考えると、同様に $\delta \in \alpha$ である。

今、推移的であるため、$\delta \in \gamma \wedge \gamma \in \beta \to \delta \in \beta$ である。

任意の $\delta \in \gamma$ について成り立つので、$\gamma \subset \beta$ である。

定義より、$\alpha_{<\beta} = \{x \in \alpha \mid x \in \beta\} = \alpha \cap \beta$ である。

$\beta \in \alpha$ より $\beta \subset \alpha$ であるので、$\alpha \cap \beta = \beta$ である。 ■

***Cor.* 2.2.3.**

空集合は順序数である。

***Cor.* 2.2.4.**

順序数 α, β について、$\alpha \cap \beta$ は順序数である。

***Cor.* 2.2.5.**

順序数 α について、α^{+} は順序数である。

***Cor.* 2.2.6.**

集合 α について、$(\alpha^{+}, \in)$ が順序数ならば $(\alpha, \in)$ は順序数である。

***Lem.* 2.2.7.**
順序数 α, β について、以下の 2 つは同値である。

1. $\alpha \in \beta$
2. $\alpha \subsetneq \beta$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
順序数の定義より $\alpha \subset \beta$ である。
$\alpha = \beta$ とすると、$\alpha \in \alpha$ より系 **??**に反する。
ゆえに、$\alpha \subsetneq \beta$ である。

2. $\to$ 1. を示す。
$\beta = \varnothing$ のとき、明らか。
$\beta \neq \varnothing$ について、$\beta \setminus \alpha$ は整列集合の空でない部分であるので、$\min(\beta \setminus \alpha)$ が存在する。これを γ とする。
定義より、$\gamma \in \beta \setminus \alpha$ すなわち $\gamma \notin \alpha$ である。

任意の $x \in \gamma$ について、$\gamma \subset \beta$ より $x \in \beta$ である。
$x \notin \alpha$ とすると、$x \in \beta \setminus \alpha$ より、$\gamma = x \vee \gamma \in x$ であり、補題 **??**に反する。
ゆえに $x \in \alpha$ であるので、$\gamma \subset \alpha$ である。

任意の $y \in \alpha$ について、$\alpha \subset \beta$ より $y \in \beta$ であるため、β が全順序より $y \in \gamma \vee y = \gamma \vee \gamma \in y$ である。
$y = \gamma$ のとき、$\gamma \in \alpha$ であるが γ の定義に反する。
$\gamma \in y$ ならば、$y \in \alpha$ より、$\gamma \in \alpha$ となり、同様に反する。
ゆえに $y \in \gamma$ であるので、$\alpha \subset \gamma$ である。

したがって $\alpha = \gamma$ であり、$\gamma \in \beta$ より成り立つ。 ■

***Lem.* 2.2.8.** 順序数の比較可能性
順序数 α, β について、以下が成り立つ。

$$\alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

補題 2.2.7 より特に以下が成り立つ。

$$\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$$

Proof.
成り立たないとすると、$\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha \wedge \alpha \cap \beta \subsetneq \beta$ である。
補題 2.2.7 より、$\alpha \cap \beta \in \alpha \wedge \alpha \cap \beta \in \beta$ である。
したがって、$\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$ となるが、系 **??**に反する。 ■

***Lem.* 2.2.9.** 順序数からなる整列集合
集合 A について、その元が全て順序数ならば、$(A, \in)$ は整列集合である。

Proof.
補題 2.2.8 より、$(A, \in)$ は全順序集合である。
A の空でない部分 B を考える。
空でないので、$b \in B$ が存在する。

$b \cap B = \varnothing$ のとき、$b = \min B$ である。

$b \cap B \neq \varnothing$ のとき、$b \cap B \subset b$ であり、b は整列集合であるため、$\min(b \cap B)$ が存在する。これは、B の最小元である。 ■

***Lem.* 2.2.10.**

順序数 α について、以下が成り立つ。

$$\forall \beta \in \alpha \bigl(\beta^+ \in \alpha \vee \beta^+ = \alpha\bigr)$$

Proof.

$\beta \in \alpha \wedge \beta^+ \notin \alpha$ とする。

補題 **??**より、$\beta \in \alpha$ から $\beta \subsetneq \alpha$ すなわち $\beta \subset \alpha \wedge \beta \neq \alpha$ を得る。

補題 2.2.8 より、$\alpha \subset \beta^+$ を得る。

補題 **??**より、$\alpha = \beta \vee \alpha = \beta^+$ であるので、$\beta \neq \alpha$ から $\alpha = \beta^+$ である。 ■

***Lem.* 2.2.11. 順序数の類別**

順序数 α について、以下が成り立つ。

$$\exists \beta \bigl(\alpha = \beta^+\bigr) \vee \alpha = \bigcup \alpha$$

Proof.

第一命題について $\forall \beta(\alpha \neq \beta^+) \to \alpha = \bigcup \alpha$ を示すことで示す。

任意の $x \in \bigcup \alpha$ について、$\exists \beta \in \alpha(x \in \beta)$ であり、$\beta \subset \alpha$ から $x \in \alpha$ である。

ゆえに、$\bigcup \alpha \subset \alpha$ である。

任意の $x \in \alpha$ について、補題 2.2.10 より $x^+ \in \alpha \vee x^+ = \alpha$ であり、仮定より $x^+ \neq \alpha$ であるので、$x^+ \in \alpha$ である。

$x \in x^+ \wedge x^+ \in \alpha$ より、$\exists \beta \in \alpha(x \in \beta)$ すなわち $x \in \bigcup \alpha$ である。

したがって $\alpha \subset \bigcup \alpha$ である。 ■

***Thm.* 2.2.12. 超限帰納法**

以下が成り立つアリティ 1 の述語記号 ψ を考える。

$$\forall \beta \Bigl(\beta \text{ が順序数} \to \Bigl(\forall \gamma \in \beta(\psi(\gamma)) \to \psi(\beta)\Bigr)\Bigr)$$

このとき任意の順序数 α について、$\psi(\alpha)$ が成り立つ。

Proof.

ある順序数 α が存在して、成り立たないとする。

$A \coloneqq \{\beta \in \alpha^+ \mid \neg\psi(\beta)\}$ とする。

A は順序数 α^+ の部分であり、$\alpha \in A$ より A は空でない。ゆえに最小元 $\min A$ が存在する。

$\min A \subset \alpha^+$ と、最小性より $\forall \gamma \in \min A(\psi(\gamma))$ である。

仮定より $\psi(\min \alpha)$ が成り立つので、反する。 ■

***Thm.* 2.2.13.** 超限再帰

順序数 α と集合 A について、写像 $G\colon \bigcup\left\{A^\xi \mid \xi \in \alpha\right\} \to A$ が与えられている。

このとき、以下を満たす写像 $f\colon \alpha \to A$ は一意に定まる。

$$\forall \xi \in \alpha(f(\xi) = G(f \circ \iota_{\xi,\alpha}))$$

Proof.

順序数 $\beta \subset \alpha$ について、以下を満たす写像 $f_\beta\colon \beta \to A$ の存在して、これが一意であることを示す。

$$\forall \xi \in \beta(f_\beta(\xi) = G(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta}))$$

$\beta = \varnothing$ のとき、空写像 $f_\varnothing\colon \varnothing \to A$ は条件を満たす。

空写像は一意であるので、$f_\varnothing$ は一意である。

$\beta = \gamma^+$ なる順序数 γ が存在するとき、$\xi \in \beta$ について f_ξ が一意に存在するとする。

このとき、以下で定める $f_\beta\colon \beta \to A$ を考える。

1. $\xi \in \gamma$ について $f_\beta(\xi) = f_\gamma(\xi)$
2. $f_\beta(\gamma) = G(f_\gamma)$

$\xi \in \gamma$ について、f_γ の条件と定義より $f_\beta(\xi) = f_\gamma(\xi) = G(f_\gamma \circ \iota_{\xi,\gamma}) = G(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})$ である。

また、定義より $f_\beta(\gamma) = G(f_\gamma) = G(f_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta})$ である。

ゆえに条件を満たす。

f'_β も成り立つとすると、条件と f_γ の一意性より $f'_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta} = f_\gamma = f_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}$ である。

また、条件より $f'_\beta(\gamma) = G(f'_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}) = G(f_\gamma) = f_\beta(\gamma)$ である。

ゆえに $f_\beta = f'_\beta$ である。

空でない β について $\beta = \bigcup \beta$ であり、任意の $\xi \in \beta$ について f_ξ が一意に存在するとする。

このとき、以下で定める $f_\beta\colon \beta \to A$ を考える。

1. $\xi \in \beta$ について $f_\beta(\xi) = f_{\xi^+}(\xi)$

$\xi \in \beta$ について、$\exists \gamma \in \xi(f_\xi(\gamma) \neq (f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})(\gamma))$ とする。

$\gamma^+ \in \beta$ より f_{γ^+} の一意性から $f_{\gamma^+} = f_\xi \circ \iota_{\gamma^+,\xi}$ であり、定義より $(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})(\gamma) = f_{\gamma^+}(\gamma)$ であるので、一致する。

ゆえに、$f_\xi = f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta}$ である。

f_{ξ^+} の条件と f_ξ の一意性より $f_\beta(\xi) = f_{\xi^+}(\xi) = G(f_{\xi^+} \circ \iota_{\xi,\xi^+}) = G(f_\xi) = G(f_\beta \circ \iota_{\xi,\beta})$ である。

f'_β が成り立ちとすると、$\gamma \in \beta$ について、条件と f_γ の一意性から $f_\beta(\gamma) = G(f_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}) = G(f_\gamma) = G(f'_\beta \circ \iota_{\gamma,\beta}) = f'_\beta(\gamma)$ であるので、$f_\beta = f'_\beta$ である。

定理 2.2.12 より成り立つ。 ■

2.3 いくつかの重要な定理

***Lem.* 2.3.1.** 整列集合の自己単調単射は増大

整列集合 $(S, \leq)$ と、狭義単調写像 $f\colon S \to S$ について、以下が成り立つ。

$$\forall x \in S(x \leq f(x))$$

Proof.

$A \coloneqq \{x \in X \mid f(x) < x\}$ を考える。

$A \neq \varnothing$ とすると、定義より $\min A$ が存在する。

A の定義より $f(\min A) < \min A$ であり、狭義単調より $f(f(\min A)) < f(\min A)$ であるので、$f(\min A) \in A$ であり、$\min A \leq f(\min A)$ である。これは反する。 ■

***Lem.* 2.3.2. 切片からの狭義単調は存在しない**

空でない整列集合 $(S, \leq)$ と $a \in S$ について、狭義単調な $f\colon X_{<a} \to X$ は存在しない。

Proof.

存在するとする。

$\iota_{X_{<a},X}$ は狭義単調より、$\iota_{X_{<a},X} \circ f$ は狭義単調である。

補題 2.3.1 より、$a \leq (\iota_{X_{<a},X} \circ f)(a)$ である。

$\iota_{X_{<a},X}$ は包含写像より、$\forall x \in S(\iota_{X_{<a},X}(x) < a)$ より反する。 ■

***Cor.* 2.3.3.**

順序数 α, β について、$\alpha \neq \beta$ ならば、任意の写像 $f\colon \alpha \to \beta$ は順序同型とならない。

***Lem.* 2.3.4. 整列集合は順序型を持つ**

整列集合 W について、W と順序同型な順序数が一意に存在する。

Proof.

補題 2.2.8、補題 2.2.2、補題 2.3.2 より、存在すれば一意である。

存在することを示す。

以下で定める集合 X を考える。

$$X \coloneqq \left\{w \in W \mid \text{ある順序数 } \alpha \text{ が存在して、順序同型 } \alpha \to W_{<w} \text{ が存在する。}\right\}$$

一意性と公理 **??**より、集合 A が存在して、以下を満たす。

$$A = \left\{\alpha \mid w \in X \land \text{順序同型 } \alpha \to W_{<w} \text{ が存在する。}\right\}$$

補題 2.2.9 より、$(A, \in)$ は整列集合である。

$\alpha \in A$ について、定義よりある $w \in X$ が存在して順序同型 $f\colon \alpha \to W_{<w}$ が存在する。

任意の $\beta \in \alpha$ について、写像 $f \circ \iota_{\beta,\alpha}\colon \beta \to W_{<f(\beta)}$ が順序同型であるため、$\beta \in A$ である。

ゆえに、$\alpha \subset A$ である。

したがって、A は順序数である。

順序同型を与える写像 $\varphi\colon (X, \leq) \to (A, \in)$ は、明らかに単調であり、補題 2.3.2 より全単射である。すなわち順序同型である。

$W \neq X$ とする。

$x \coloneqq \min(W \setminus X)$ について $X = W_{<x}$ であるので、上の議論より $x \in X$ となり反する。

したがって、$W = X$ である。 ■

***Lem.* 2.3.5. Hartogs の補題**

集合 X について、順序数 α が存在して、任意の写像 $f\colon \alpha \to X$ が単射とならない。

Proof.

$W \coloneqq \left\{(S, R) \mid S \subset X \land R \subset S \times S \land (S, R) \text{ は整列集合}\right\}$ を考える。

補題 2.3.4 と公理 **??**より、以下で定める集合 A が存在する。

$$A \coloneqq \left\{ w \text{ と順序同型な順序数} \mid w \in W \right\}$$

補題 2.2.9 より、$(A, \in)$ は整列集合である。

$\alpha \in A$ を考えると、$S \subset X$ について整列集合 (S, R) が存在して、順序同型 $f\colon (\alpha, \in) \to (S, R)$ が存在する。

任意の $\beta \in \alpha$ について、$f \circ \iota_{\beta,\alpha}\colon \beta \to \mathrm{Im}(f)$ は順序同型であるので、$\beta \in A$ である。

ゆえに、$\alpha \subset A$ である。

したがって、A は順序数である。

順序数 γ について、単射 $g\colon \gamma \to X$ が存在するとする。

このとき、g の左逆写像 h を用いて、$\mathrm{Im}(f)$ 上に以下の整列順序 $\leq$ を定義できる。

$$x < y :\leftrightarrow h(x) \in h(y)$$

ゆえに、$\gamma \in A$ である。

したがって、$\alpha \notin A$ ならば、単射 $\alpha \to X$ は存在しない。

$A \notin A$ より、単射 $A \to X$ は存在しない。 ■

***Thm.* 2.3.6. Bourbaki-Witt の定理**

空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、P の任意の空でない全順序部分が上限を持つとする。

以下を満たす写像 $f\colon P \to P$ を考える。

$$\forall x \in P(x \preccurlyeq f(x))$$

このとき、以下を満たす。

$$\exists x_1 \in P(x_1 = f(x_1))$$

Proof.

補題 2.3.5 より、P への単射が構成できない順序数 α が存在する。

P は空でないので、$\exists x_0 \in P$ である。

以下で与える写像 $G\colon \left\{ \bigcup P^{\xi} \mid \xi \in \alpha \right\} \to P$ を考える。

$$G(h) \coloneqq \begin{cases} x_0 & \mathrm{dom}(h) = \varnothing \\ f(h(\beta)) & \exists \beta(\beta^+ = \mathrm{dom}(h)) \\ \sup \mathrm{Im}(h) & \mathrm{dom}(h) = \bigcup \mathrm{dom}(h) \wedge (\mathrm{Im}(h), \preccurlyeq) \text{ は全順序} \\ x_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 2.2.13 より、以下を満たす $g\colon \alpha \to P$ が一意に定まる。

$$\forall \xi \in \alpha(g(\xi) = G(g \circ \iota_{\xi,\alpha}))$$

$\forall \eta \in \alpha \forall \xi \in \eta(g(\xi) \preccurlyeq g(\eta))$ を超限帰納法で示す。

$\eta = \varnothing$ のとき、明らか。

$\exists \beta(\eta = \beta^+)$ のとき、以下が成り立つ。

$$g(\beta) \preccurlyeq f(g(\beta)) = f\big((g \circ \iota_{\beta^+,\alpha})(\beta)\big) = G(g \circ \iota_{\beta^+,\alpha}) = g(\beta^+) = g(\eta)$$

仮定より $\forall \xi \in \beta(g(\xi) \preccurlyeq g(\beta))$ であるので、$\forall \xi \in \eta(g(\xi) \preccurlyeq g(\eta))$

$\eta = \bigcup \eta \wedge \eta \neq \varnothing$ のときを考える。

仮定より、$\mathrm{Im}(g \circ \iota_{\eta,\alpha})$ は全順序である。

ゆえに、$g(\eta) = G(g \circ \iota_{\eta,\alpha}) = \sup \mathrm{Im}(g \circ \iota_{\eta,\alpha})$ であるので、$\forall \xi \in \eta(g(\xi) \preccurlyeq g(\eta))$ である。
定理 2.2.12 より成り立つ。

α の定義より、$g\colon \alpha \to P$ は単射ではない。
ゆえに、$\exists \beta, \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma \land g(\beta) = g(\gamma))$ である。
$\beta^+ \in \gamma \lor \beta^+ = \gamma$ より、$g(\beta) \preccurlyeq g(\beta^+) \preccurlyeq g(\gamma)$ であるので、$g(\beta) = g(\beta^+)$ である。
したがって、$g(\beta) = g(\beta^+) = f(g(\beta))$ である。 ■

***Lem.* 2.3.7. Amann の不動点定理**
空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、P の任意の空でない全順序部分が上限を持つとする。
以下を満たす単調写像 $f\colon P \to P$ を考える。

$$\exists x_0 \in P(x_0 \preccurlyeq f(x_0))$$

このとき、以下の集合 S について、$(S, \preccurlyeq)$ は最小元を持つ。

$$S = \{x \in P_{\succcurlyeq x_0} \mid x = f(x)\}$$

Proof.
$M \coloneqq \{x \in P_{\succcurlyeq x_0} \mid x \preccurlyeq f(x)\}$ を考える。
$x_0 \in M$ より、$M \neq \varnothing$ である。
$x \in M$ について、$x_0 \preccurlyeq x \preccurlyeq f(x)$ より、単調性から $x_0 \preccurlyeq f(x) \preccurlyeq f(f(x))$ である。ゆえに $f(x) \in M$ である。

M の空でない全順序部分 C について、仮定より $\sup C \in P$ が存在する。
$\exists c_0 \in C(x_0 \preccurlyeq c_0 \preccurlyeq \sup C)$ より、$x_0 \preccurlyeq \sup C$ である。
$\forall c \in C(c \preccurlyeq \sup C)$ より、$\forall c \in C(c \preccurlyeq f(c) \preccurlyeq f(\sup C))$ である。
ゆえに $f(\sup C)$ は C の上界であるので、$\sup C \preccurlyeq f(\sup C)$ である。
したがって、$\sup C \in M$ である。

よって、$(M, \preccurlyeq)$ は空でない半順序集合であり、任意の空でない全順序部分が M に上限を持つ。
また、以下で定める $g\colon M \to M$ が存在して、$\forall x \in M(x \preccurlyeq g(x))$ である。

$$g(x) \coloneqq f(x)$$

定理 2.3.6 より、$\exists x \in M(x = g(x) = f(x))$ である。
したがって、S は非空集合である。

$N \coloneqq \{x \in M \mid \forall y \in S(x \preccurlyeq y)\}$ を考える。
$x_0 \in N$ より、$N \neq \varnothing$ である。
$x \in N$ について、$f(x) \in f(N) \subset f(M) \subset M$ である。
$\forall y \in S(x \preccurlyeq y)$ より、単調性から $\forall y \in P_{\succcurlyeq x_0}(y = f(y) \to f(x) \preccurlyeq f(y) = y)$ である。
したがって、$f(x) \in N$ である。

N の空でない全順序部分 C について、$N \subset M$ より $\sup C \in M$ が存在する。
$C \subset N$ より、任意の $y \in S$ について、$\forall c \in C(c \preccurlyeq y)$ すなわち y は C の上界である。
ゆえに $\sup C \preccurlyeq y$ である。
したがって、$\sup C \in N$ である。

よって、$(N, \preccurlyeq)$ は空でない半順序集合であり、任意の空でない全順序部分が N に上限を持つ。

また、以下で定める $h\colon N \to N$ が存在して、$\forall x \in N(x \preccurlyeq h(x))$ である。

$$h(x) \coloneqq f(x)$$

定理 2.3.6 より、$\exists x_1 \in N(x_1 = h(x_1) = f(x_1))$ である。

$x_1 \in N$ より、x_1 は S の最小元である。 ■

Thm. 2.3.8. Knaster-Tarski の不動点定理

完備束 $(L, \preccurlyeq)$ と、単調写像 $f\colon L \to L$ を考える。

このとき、以下の集合 S について、$(S, \preccurlyeq)$ は空でない完備束である。

$$S = \{x \in L \mid x = f(x)\}$$

Proof.

完備束は最小元を持つので、$\min L \preccurlyeq f(\min L)$ である。

完備性から補題 2.3.7 より、S は最小元を持つ。

同様に、S は最大元を持つ。

S の部分集合 A について、完備性より $\sup A \in L$ が存在する。

補題 1.3.3 より、$\sup A = \sup f(A) \preccurlyeq f(\sup A)$ である。

$P \coloneqq \{x \in L \mid \forall a \in A(a \preccurlyeq x) \land f(x) \preccurlyeq x\}$ を考える。

$\max S \in P$ より、P は空ではない。

$\inf P$

???

したがって、$\sup A = f(\sup A)$ であるので、$\sup A \in S$ である。

同様に $\inf A \in L$ である。 ■

Thm. 2.3.9. Cantor-Schröder-Bernstein の定理

集合 A, B について、単射 $f\colon A \to B$ と単射 $g\colon B \to A$ が存在するならば、全単射 $h\colon A \to B$ が存在する。

Proof.

B が空のとき、f の存在から A も空となり、空写像が条件を満たす。

B が空でないとする。

以下の写像 $F\colon \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$ を考える。

$$F(X) \coloneqq A \setminus g(B \setminus f(X))$$

$X \subset Y \subset A$ について、補題 **??**より $f(X) \subset f(Y)$ であり、$B \setminus f(X) \supset B \setminus f(Y)$ であり、補題 **??**より $g(B \setminus f(X)) \supset g(B \setminus f(Y))$ であり、$F(X) \subset F(Y)$ である。

ゆえに、F は完備束 $(\mathfrak{P}(A), \subset)$ 上の単調写像である。

定理 2.3.8 より、$\exists X_0 \subset A(X_0 = F(X_0))$ である。

g は空写像でない単射より補題 **??**から左逆写像 g^{-1} を持つため、以下の写像 $h\colon A \to B$ が存在する。

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & (x \in X_0) \\ g^{-1}(x) & (x \notin X_0) \end{cases}$$

$h(x)=h(y)$ とする。

$x \in X_0 \wedge y \notin X_0$ のとき、$h(x) \in f(X_0) \wedge h(y) \in B \setminus f(X_0)$ より、$h(x) \neq h(y)$ となるので、$x, y \in X_0 \vee x, y \notin X_0$ である。

$x, y \in X_0$ のとき、f の単射性から $x = y$ である。

$x, y \notin X_0$ のとき、$x, y \in g(B \setminus f(X_0))$ より $\exists x', y' \in B(x = g(x') \wedge y = g(y'))$ である。

$x = g(x') = g(g^{-1}(g(x'))) = g(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(y)) = g(g^{-1}(g(y'))) = g(y') = y$ である。

したがって、h は単射である。

$z \in f(X_0)$ について、$\exists z_0 \in X_0(z = f(z_0) = h(z_0))$ である。

$z \notin f(X_0)$ について、$g(z) \notin X_0$ であり、$g(z) \in g(B \setminus f(X_0)) = A \setminus X_0$ より、$z = g^{-1}(g(z)) = h(g(z))$ である。

ゆえに h は全射である。 ■

2.4 順序と選択

***Lem.* 2.4.1.**

空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、以下で定める半順序集合 $(M, \subset)$ を考える。

$$M \coloneqq \left\{C \subset P \mid C \neq \varnothing \wedge (C, \preccurlyeq) \text{ は全順序集合}\right\}$$

このとき、$M \neq \varnothing$ であり、M の任意の空でない全順序部分 A は上限 $\bigcup A$ を M に持つ。

Proof.

空でないので、$\exists x(x \in P)$ であり、$\{x\} \in M$ より、$M \neq \varnothing$ である。

$\bigcup A \in M$ を示す。

$x, y \in \bigcup A$ について、定義より P の全順序部分 C_x, C_y が存在して $x \in C_x \wedge y \in C_y$ である。

A は全順序集合より、$C_x \subset C_y \vee C_y \subset C_x$ である。

$C_x \subset C_y$ であるとき、$x, y \in C_y$ より、$x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$ である。

$C_y \subset C_x$ であるときも同様である。

$A \neq \varnothing$ より $\bigcup A \neq \varnothing$ である。

$\bigcup A$ は A の上界であり、A の任意の上界 U について、$\forall C \in A(C \subset U)$ から $\bigcup A \subset U$ であるため、$\bigcup A$ は A の上限である。 ■

***Thm.* 2.4.2. Zorn の補題**

空でない半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、P の任意の空でない全順序部分が上界を持つとする。

このとき、P は極大元を持つ。

Proof.

$M \coloneqq \left\{C \subset P \mid C \neq \varnothing \wedge (C, \preccurlyeq) \text{ は全順序集合}\right\}$ を考える。

補題 2.4.1 より、半順序集合 $(M, \subset)$ は空でないかつ任意の空でない全順序部分は上限を持つ。

M が極大元を持たないとする。

このとき $\forall C \in M \exists C' \in M(C \subsetneq C')$ である。

補題 **??**より、$f \colon M \to M$ であって、$\forall C \in M(C \subsetneq f(C))$ が存在する。

定理 2.3.6 より、$\exists C_0 \in M(C_0 = f(C_0))$ であるが、f の定義より反する。

ゆえに、M は極大元を持つ。

M の極大元 C_1 について、上界 u が存在する。
u が極大元でない、すなわち $\exists a \in P(u \prec a)$ とする。
a は C_1 の上界であるので、$(C_1 \cup \{a\}, \preccurlyeq)$ は空でない全順序集合である。
$a \in C_1$ とすると、u が C_1 の上界であることに反するので、$a \notin C_1$ である。
ゆえに $C_1 \subsetneq C_1 \cup \{a\}$ となり、C_1 の極大性に反する。
したがって、u は極大元である。 ■

***Thm.* 2.4.3.** 整列可能定理
集合 X について、X 上の自己関係 $\leq$ が存在して、$(X, \leq)$ は整列集合となる。

Proof.
??? ■

***Thm.* 2.4.4.** 濃度の比較可能定理
集合 A, B について、単射 $f\colon A \to B$ または単射 $g\colon B \to A$ のいずれかが存在する。

Proof.
定理 2.4.3 と補題 2.3.4 より、順序数 α, β が存在して、全単射 $\psi_a\colon \alpha \to A, \psi_b\colon \beta \to B$ が存在する。
補題 2.2.8 より、$\alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$ である。
$\alpha \subset \beta$ のとき、$\psi_b \circ \iota_{\alpha,\beta} \circ \psi_a^{-1}$ は A から B への単射である。
$\beta \subset \alpha$ も同様である。 ■

2.5 フィルターとネット

***Def.* 2.5.1.** フィルター
半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ について、以下の 2 つを満たす P の空でない部分 F を、P のフィルターと呼ぶ。

$$\forall x, y \in F \exists z \in F(z \preccurlyeq x \wedge z \preccurlyeq y)$$
$$\forall x \in F \forall y \in P(x \preccurlyeq y \to y \in F)$$

***Cor.* 2.5.1.**
フィルターは逆順序について有向集合である。

***Def.* 2.5.2.** 細分
半順序集合 P のフィルター F, G に対して、$F \subset G$ であるとき、G は F の細分であると呼ぶ。

***Def.* 2.5.3.** 超フィルター
自身以外の細分を持たないフィルターを超フィルターと呼ぶ。

***Thm.* 2.5.2.** 超フィルターの存在
半順序集合 P のフィルター F について、その細分である超フィルターが存在する。

Proof.
F の細分の全体 $\mathcal{F}$ と半順序集合 $(\mathcal{F}, \subset)$ を考える。
$\mathcal{F}$ の空でない全順序部分集合 A について、上界 $\bigcup A \in \mathcal{F}$ が存在する。
$\mathcal{F}$ の全順序部分集合 $\varnothing$ について、F は上界である。
ゆえに、$\mathcal{F}$ は帰納的である。

定理 2.4.2 より極大元が存在する。これは超フィルターである。 ■

***Def.* 2.5.4. 集合におけるフィルター**
集合 X について、半順序集合 $(\mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, \subset)$ のフィルターを、集合 X のフィルターと呼ぶ。

***Cor.* 2.5.3.**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$X \in \mathcal{F}$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$$

***Thm.* 2.5.4. 集合の超フィルター**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ について、以下の 2 つは同値である。

1. $\mathcal{F}$ は超フィルターである
2. $\forall A \subset X(A \in \mathcal{F} \vee X \setminus A \in \mathcal{F})$

Proof.
1. $\rightarrow$ 2. を示す。
$A \in \mathcal{F}$ のとき明らかであるので、$A \notin \mathcal{F}$ のときを考える。
$\mathcal{S} \coloneqq \{S \subset X \mid A \cup S \in \mathcal{F}\}$ について、定義より $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \wedge X \setminus A \in \mathcal{S}$ である。
今、$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について、$A \cup (S_1 \cap S_2) = (A \cup S_1) \cap (A \cup S_2) \in \mathcal{F}$ より、$S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ である。
$S \in \mathcal{S} \wedge T \subset X \wedge S \subset T$ とすると、$A \cup S \in \mathcal{F} \rightarrow A \cup T \in \mathcal{F}$ より $T \in \mathcal{S}$
$A \cup X = X \in \mathcal{F}$ より、$X \in \mathcal{S}$ である。すなわち、$\mathcal{S} \neq \varnothing$
$\varnothing \notin \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S}$ はフィルターでありかつ $\mathcal{F}$ の細分である。
ここで、$\mathcal{F}$ は超フィルターであるので $X \setminus A \in \mathcal{S} = \mathcal{F}$

2. $\rightarrow$ 1. を示す。
超フィルターでないとすると、$\mathcal{F}$ の細分 $\mathcal{F}'$ が存在して、$\exists A \in \mathcal{F}'(A \notin \mathcal{F} \wedge A \in \mathcal{F}')$ である。
仮定より、$X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であり、$\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ よりフィルターの定義に矛盾。背理法より示される。
■

***Def.* 2.5.5. ネット**
有向集合 Λ から集合 X への写像を、X 上のネットと呼ぶ。
ネットは、明示的に $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と表す。このとき、x_λ は X 上の元で、$\lambda \in \Lambda$ での値を表す。
また誤解のない限り、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で値域を表す。

***Def.* 2.5.6. 部分ネット**
集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と有向集合 M について、写像 $\varphi\colon M \rightarrow \Lambda$ が以下を満たすとき、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分ネットと呼ぶ。

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in M(\mu_1 \preccurlyeq \mu_2 \rightarrow \varphi(\mu_1) \preccurlyeq \varphi(\mu_2))$$
$$\forall \lambda \in \Lambda \exists \mu \in M(\lambda \preccurlyeq \varphi(\mu))$$

***Def.* 2.5.7. 普遍**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は普遍であると呼ぶ。

$$\forall A \subset X \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset A \vee (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset X \setminus A\Big)$$

***Thm.* 2.5.5. ネットの定めるフィルター**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、以下で定める集合系 $\mathcal{F}$ は X のフィルターである。

$$\mathcal{F} \coloneqq \Big\{F \subset X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset F\Big)\Big\}$$

Proof.

明らかに $\varnothing \notin \mathcal{F} \wedge X \in \mathcal{F}$ である。

$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ について、定義より $\exists \lambda_1, \lambda_2 \subset \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}} \subset F_1 \wedge (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_2}} \subset F_2\Big)$ である。
Λ が有向集合であることから、$\exists \lambda_3 \in \Lambda(\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \wedge \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ であり、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_3}} \subset F_1 \cap F_2$。
ゆえに $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ である。

$\forall F \in \mathcal{F} \forall G \subset \mathfrak{P}(X)$ について、$F \subset G$ ならば定義より明らかに $G \in \mathcal{F}$ ■

***Lem.* 2.5.6.**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と定理 2.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ を考える。
このとき、$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ について、以下が成り立つ。

$$\forall F \in \mathcal{F}' \forall \lambda_0 \in \Lambda \exists \lambda \in \Lambda(\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \wedge x_\lambda \in F)$$

Proof.

$\exists F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda \in \Lambda(\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \to x_\lambda \notin F)$ とする。
今、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であるので、$\varnothing = F \cap (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \in \mathcal{F}'$ より、フィルターの定義に矛盾。
背理法より示される。 ■

***Thm.* 2.5.7. フィルターの定める部分ネット**

集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、定理 2.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ について考える。
$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ に対して、ある部分ネット $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ が存在して、定理 2.5.5 から定まるその部分ネットのフィルターは $\mathcal{F}'$ の細分となる。

Proof.

$M \coloneqq \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F}' \mid x_\lambda \in F\}$ を考える。
M 上の前順序 $\forall(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M((\lambda_1, F_1) \preccurlyeq (\lambda_2, F_2) :\leftrightarrow \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \wedge F_1 \supset F_2)$ を考える。

$(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M$ とする。
$\mathcal{F}'$ はフィルターより $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$
Λ は有向集合であるので、$\exists \lambda_3 \in \Lambda(\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \wedge \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ である。
補題 2.5.6 より $\exists \lambda_4 \in \Lambda(\lambda_3 \preccurlyeq \lambda_4 \wedge x_{\lambda_4} \in F_1 \cap F_2)$
$(\lambda_4, F_1 \cap F_2)$ は、$\{(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)\}$ の上界であるので、M は有向集合である。

ここで、写像 $\varphi\colon M \to \Lambda, \varphi(\lambda, F) \coloneqq \lambda$ を定める。
補題 2.5.6 より $\forall \lambda \in \Lambda \exists F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_1 \in \Lambda(\lambda \preccurlyeq \lambda_1 = \varphi(\lambda_1, F) \wedge (\lambda_1, F) \in M)$ である。
したがって、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M}$ は部分ネットである。

今、補題 2.5.6 より $\forall F \in \mathcal{F}' \exists \lambda_0 \in \Lambda((\lambda_0, F) \in M)$
$\forall (\lambda', F') \in M$ について、$(\lambda_0, F) \preccurlyeq (\lambda', F')$ ならば、$x_{\lambda'} \in F' \subset F$ となる。
よって、$F \in \left\{F \subset X \mid \exists \mu_0 \in M\left(\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu \in M_{\succcurlyeq \mu_0}} \subset F\right)\right\}$ ■

***Thm.* 2.5.8.** 普遍部分ネットの存在

任意のネットは、普遍な部分ネットを持つ。

Proof.

ネットに対して定理 2.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ が存在する。
定理 2.5.2 より $\mathcal{F}$ の細分である超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する。
定理 2.5.7 より、定理 2.5.5 の定めるフィルターが $\mathcal{U}$ に一致する部分ネットが存在する。
定理 2.5.4 より、この部分ネットは普遍である。 ■