さんすうのーと

わたし

2024 年 6 月 14 日

目次

まえがき

さんすうのーとです。
私ではない誰かのアイデアを多分に含みます。
引用・注釈はありません。内容が正しいことを保証しません。
聡明なる読者の皆さんが、間違いやナンセンスな部分を修正しながら読んでください。
その際に、修正点があれば教えてください。私が喜びます。

（追記）いくつかの証明を考察してくれた O 君に感謝を。

0 論理学

並列 , を断りなく用いる。
() で定める順序を断りなく用いる。

0.1 命題と命題結合子

***Def.* 0.1.1. 命題**
真偽が確定している言明のことを、命題と呼ぶ。

***Def.* 0.1.2. 否定**
命題 ϕ について、$\neg\phi$ は命題である。
ϕ でない、と呼ぶ。

以下の約束をすることにする。

- ϕ が真であるとき、$\neg\phi$ は偽である。
- ϕ が偽であるとき、$\neg\phi$ は真である。

***Def.* 0.1.3. 含意**
命題 ϕ, ψ について、$\phi \to \psi$ は命題である。このとき、ϕ を前件 ψ を後件と呼ぶ。
ϕ ならば ψ、ϕ は ψ に十分、ψ は ϕ に必要、と呼ぶ。

以下の約束をすることにする。

- ϕ が偽であるとき、$\phi \to \psi$ は真である。
- ψ が真であるとき、$\phi \to \psi$ は真である。
- ϕ が真であり、ψ が偽であるとき、$\phi \to \psi$ は偽である。

必要に応じて、$\psi \leftarrow \phi$ の表記をすることがある。

***Rem.* 0.1.1. 命題の定義記号**
定義記号 $:\leftrightarrow$ を導入する。これは左辺を用いて表現された命題は、全てその左辺と一致する部分を右辺に置き換えて理解するという意味である。

***Def.* 0.1.4. 連言**
命題 ϕ, ψ について、$\phi \wedge \psi$ は以下で定義される命題である。

$$\phi \wedge \psi :\leftrightarrow (\neg\phi) \to \psi$$

ϕ かつ ψ、と呼ぶ。

***Def.* 0.1.5. 選言**

命題 ϕ, ψ について、$\phi \lor \psi$ は以下で定義される命題である。

$$\phi \lor \psi :\leftrightarrow \neg((\neg\phi) \land (\neg\psi))$$

ϕ または ψ、と呼ぶ。

***Def.* 0.1.6. 同値**
命題 ϕ, ψ について、$\phi \leftrightarrow \psi$ は以下で定義される命題である。

$$\phi \leftrightarrow \psi :\leftrightarrow (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$$

ϕ と ψ は同値、ϕ と ψ は必要十分、と呼ぶ。

***Rem.* 0.1.2. 順序**
特に () で定められていなければ、否定 $\neg$、連言 $\land$、選言 $\lor$、含意 $\to$、同値 $\leftrightarrow$ の順で優先されるものとする。

0.2 トートロジー

***Def.* 0.2.1. トートロジー**
命題結合子により結合されている命題 ψ を考える。
結合されている各命題の真偽によらず、ψ が真となるような命題結合子の組み合わせを、トートロジーと呼ぶ。
$\top$ で表す。

***Def.* 0.2.2. 矛盾**
命題 $\bot$ を以下のように定める。

$$\bot :\leftrightarrow \neg\top$$

***Cor.* 0.2.1.**
以下の全ては、トートロジーである。
命題 ϕ, ψ, χ について、

1. 同一律
   - $\phi \to \phi$
2. 冪等律
   - $\phi \leftrightarrow \phi \land \phi$
   - $\phi \leftrightarrow \phi \lor \phi$
3. *Łukasiewicz* の第一公理
   - $\phi \to (\psi \to \phi)$
4. 結合律
   - $\phi \land (\psi \land \chi) \leftrightarrow (\phi \land \psi) \land \chi$
   - $\phi \lor (\psi \lor \chi) \leftrightarrow (\phi \lor \psi) \lor \chi$
5. 交換律

- $\phi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \phi$
- $\phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi$

6. 吸収律

- $\phi \vee (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \phi$
- $\phi \wedge (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \phi$

7. 分配律

- $\phi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$
- $\phi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$

8. 推移律

- $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$

9. *De Morgan* の法則

- $\neg\phi \vee \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$
- $\neg\phi \wedge \neg\psi \leftrightarrow \neg(\phi \vee \psi)$

10. 無矛盾律

- $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$

11. 不条理則

- $\bot \to \phi$

12. 二重否定除去

- $\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$

13. 排中律

- $\phi \vee \neg\phi$

14. *Peirce* 則

- $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

15. 背理法

- $(\phi \wedge \neg\psi \to \bot) \to (\phi \to \psi)$

16. 対偶法

- $(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)$

17. 選言三段論法

- $(\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi \to \psi$

上に述べたのは、代表的なトートロジーであり、全てでないことに注意すること。

0.3 推論と推論規則

古典論理 NK の推論規則を導入する。

***Def.* 0.3.1. 演繹関係**

命題 ϕ, ψ について、演繹関係 $\phi \vdash \psi$ を「ϕ から ψ が証明される」「ϕ から ψ が推論される」と定義する。

命題 ϕ について、$\vdash \phi$「前提なく ϕ が証明される」は ϕ と略記されることもある。また、改行により演繹関係を表す場合もある。

***Ax.* 0.3.1. 連言の導入則**

命題 ϕ, ψ, χ について、

$$((\chi \vdash \phi), (\chi \vdash \psi)) \vdash (\chi \vdash \phi \wedge \psi)$$

***Ax.* 0.3.2. 連言の除去則**
命題 ϕ, ψ について、

$$\phi \wedge \psi \vdash \phi$$
$$\phi \wedge \psi \vdash \psi$$

***Ax.* 0.3.3. 選言の導入則**
命題 ϕ, ψ について、

$$\phi \vdash \phi \vee \psi$$
$$\psi \vdash \phi \vee \psi$$

***Ax.* 0.3.4. 選言の除去則**
命題 ϕ, ψ, χ について、

$$((\phi \vdash \chi), (\psi \vdash \chi)) \vdash (\phi \vee \psi \vdash \chi)$$

***Ax.* 0.3.5. 含意の導入則**
命題 ϕ, ψ, χ について、

$$(\chi \wedge \phi \vdash \psi) \vdash (\chi \vdash (\phi \to \psi))$$

いわゆる演繹定理である。

***Ax.* 0.3.6. 含意の除去則**
命題 ϕ, ψ について、

$$\phi \wedge (\phi \to \psi) \vdash \psi$$

含意の導入、除去則より、演繹と含意を似たような意味で扱うことができる。

***Ax.* 0.3.7. 否定の導入則**
命題 ϕ, ψ について、

$$(\phi \wedge \psi \vdash \bot) \vdash (\phi \vdash \neg\psi)$$

***Ax.* 0.3.8. 否定の除去則**
命題 ϕ について、

$$\neg\neg\phi \vdash \phi$$

二重否定除去である。

0.4 述語論理

***Def.* 0.4.1. 述語**
一つないし複数の変項を持ち、その変項の全てが確定した時には命題となる言明。
例えば、述語記号 ϕ と変項 x を用いて $\phi(x)$ で表す。述語記号の要求する変項の数をアリティと呼ぶ。

***Def.* 0.4.2. 全称量化子**
述語 $\phi(x)$ について、$\forall x(\phi(x))$ は命題である。

***Def.* 0.4.3. 存在量化子**
述語 $\phi(x)$ について、$\exists x(\phi(x))$ は命題である。

***Def.* 0.4.4. 等号**
アリティ $\mathit{2}$ の述語記号 $=$ を定める。$x = y$ と表す。

***Ax.* 0.4.1. 全称量化子の導入則**
変項 x を出現させない述語 ψ と述語記号 ϕ について、

$$(\psi \vdash \phi(x)) \vdash (\psi \vdash \forall x(\phi(x)))$$

***Ax.* 0.4.2. 全称量化子の除去則**
述語記号 ϕ について、

$$\forall x(\phi(x)) \vdash \phi(y)$$

***Ax.* 0.4.3. 存在量化子の導入則**
述語記号 ϕ について、

$$\phi(y) \vdash \exists x(\phi(x))$$

***Ax.* 0.4.4. 存在量化子の除去則**

述語記号 ϕ、変項 y を出現させない述語 ψ、命題 χ について、

$$(\chi \wedge \phi(y) \vdash \psi) \vdash (\chi \wedge \exists x(\phi(x)) \vdash \psi)$$

***Cor.* 0.4.1. 量化子と連言**

述語記号 ϕ について、

$$\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x(\phi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \exists x(\phi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))$$

***Cor.* 0.4.2. 量化子と選言**

述語記号 ϕ について、

$$\forall x(\phi(x) \vee \psi(x)) \leftarrow \forall x(\phi(x)) \vee \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\phi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\phi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$$

***Cor.* 0.4.3. 量化子と否定**

述語記号 ϕ について、

$$\forall x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(\phi(x))$$
$$\exists x(\neg\phi(x)) \leftrightarrow \neg\forall x(\phi(x))$$

***Ax.* 0.4.5. 等号の導入則**

変項 x について、

$$x = x$$

いわゆる反射律である。

***Ax.* 0.4.6. 等号の除去則**

述語記号 ϕ、変項 x, y について、

$$\phi(x) \wedge x = y \vdash \phi(y)$$

いわゆる代入原理である。

***Cor.* 0.4.4. 等号の対称律**

$$x = y \vdash y = x$$

この証明は、等号の除去則が全てではなく一部の変項の除去のみで良いことを明示的に用いる。

***Cor.* 0.4.5. 等号の推移律**

$$x = y \wedge y = z \vdash x = z$$

***Def.* 0.4.5. 等号否定**

略記 $\neq$ を以下のように定義する。

$$a \neq b :\leftrightarrow \neg(a = b)$$

1　集合論

述語記号 $\in$ を定義する。

略記 $\notin$ を以下のように定義する。

$$x \notin X :\leftrightarrow \neg(x \in X)$$

略記 $\forall \in, \exists \in$ を以下のように定義する。

$$\forall x \in X(p(x)) :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to p(x))$$
$$\exists x \in X(p(x)) :\leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge p(x))$$

否定については、量化子の否定と同様の規則が課される。

***Def.* 1.0.1. 集合**

本節 *1* の全ての公理を満たすものを集合（*set*、集まり *collection* とは区別される）と呼ぶ。

以下、変項は集合であり、集合は変項である。

***Def.* 1.0.2. 要素**

集合 x, X について、$x \in X$ であるとき、x は X の要素または元と言う。

***Def.* 1.0.3. 集合系**

集合を要素としている集合であることを強調したい時、この集合を集合系と呼ぶ。

***Def.* 1.0.4. 包含**

集合 X, Y が以下を満たす時、X は Y の部分集合であると言い、$X \subset Y$ と表す。

$$\forall X \forall Y(X \subset Y :\leftrightarrow \forall x(x \in X \to x \in Y))$$

略記 $\supset, \subsetneq, \supsetneq$ を以下のように定義する。

$$\forall X \forall Y(X \subsetneq Y :\leftrightarrow X \subset Y \wedge X \neq Y)$$
$$\forall X \forall Y(X \supset Y :\leftrightarrow Y \subset X)$$
$$\forall X \forall Y(X \supsetneq Y :\leftrightarrow Y \subsetneq X)$$

1.1　外延性の公理

***Ax.* 1.1.1. 外延性の公理**

$$\forall X \forall Y(\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \to X = Y)$$

***Cor.* 1.1.1. 相当の定義**

$$\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

***Cor.* 1.1.2. 包含の半順序性**

以下を全て満たす。

$$\forall X (X \subset X)$$
$$\forall X \forall Y (X \subset Y \land Y \subset X \to X = Y)$$
$$\forall X \forall Y \forall Z (X \subset Y \land Y \subset Z \to X \subset Z)$$

***Rem.* 1.1.1. 集合の外延的定義**

公理 *1.1.1* より、全ての要素を書き下せば集合は一意に定まる。全ての要素を書き下す集合の定義方法を、外延的定義と呼ぶ。具体的には、要素が x, y, z であり、かつそれのみである集合 X に対して以下のような定義をする。

$$X = \{x, y, z\}$$

1.2 空集合の公理

***Ax.* 1.2.1. 空集合の公理**

$$\exists A \forall x (x \notin A)$$

***Def.* 1.2.1. 空集合**

公理 *1.1.1* から、公理 *1.2.1* が主張する集合が一意であることが言えて、空集合 $\varnothing$ と呼ぶ。外延的に $\{\}$ とも表す。

***Cor.* 1.2.1.**

$$\forall X (\varnothing \subset X)$$

1.3 対の公理

***Ax.* 1.3.1. 対の公理**

$$\forall x \forall y \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t = x \lor t = y)$$

***Def.* 1.3.1. 単集合**

$x = y$ を考えることで、集合 $\{x, x\}$ が存在することが言える。公理 *1.1.1* から、$\{x\}$ と表記して良い。
このような単一の元からなる集合を単集合（*singleton*）と呼ぶ。

***Def.* 1.3.2. 順序対**

公理 *1.3.1* から、$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ が存在する。
このような集合を、順序対 $(x, y) \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}$ と呼ぶ。

***Cor.* 1.3.1. 順序対の相等**

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((x_1, x_2) = (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 = y_1 \land x_2 = y_2)$$

***Cor.* 1.3.2. 順序対の順序性**

$$\forall x \forall y (x \neq y \to (x, y) \neq (y, x))$$

1.4 和集合の公理

***Ax.* 1.4.1. 和集合の公理**

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists Y (t \in Y \land Y \in X))$$

***Def.* 1.4.1. 和集合**

集合系 X について、公理 *1.4.1* の主張する集合 A が存在して、これは公理 *1.1.1* から一意に定まる。
このような集合 A を、和集合 $\bigcup X$ と呼ぶ。特に、$X = \{x, y\}$ のとき、この和集合を $x \cup y$ とも表す。

***Cor.* 1.4.1.**

$$\forall X \forall x \Big(x \in X \to x \subset \bigcup X \Big)$$

***Cor.* 1.4.2.**

$$\forall X \forall Y \Big(X \subset Y \to \bigcup X \subset \bigcup Y \Big)$$

***Cor.* 1.4.3.**

$$\forall x \forall y \forall z (x \subset y \to x \cup z \subset y \cup z)$$

***Cor.* 1.4.4.**

$$\bigcup \varnothing = \varnothing$$

***Cor.* 1.4.5.**

$$\forall x \Big(\bigcup \{x\} = x \Big)$$

1.5 無限の公理

***Ax.* 1.5.1. 無限の公理**

$$\exists A (\varnothing \in A \land \forall x \in A (x \cup \{x\} \in A))$$

1.6 冪集合の公理

***Ax.* 1.6.1. 冪集合の公理**

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow t \subset X)$$

***Def.* 1.6.1. 冪集合**

集合 X について、公理 *1.6.1* の主張する集合 A が存在して、これは公理 *1.1.1* から一意に定まる。このような集合 A を、冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ と呼ぶ。

***Cor.* 1.6.1.**

$$\forall X(\varnothing \in \mathfrak{P}(X) \land X \in \mathfrak{P}(X))$$

***Cor.* 1.6.2.**

$$\forall X \forall Y(X \subset Y \to \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y))$$

***Cor.* 1.6.3.**

$$\mathfrak{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

***Cor.* 1.6.4.**

$$\forall x(\mathfrak{P}(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\})$$

***Cor.* 1.6.5.**

$$\forall X\left(\bigcup \mathfrak{P}(X) = X\right)$$

***Def.* 1.6.2. 被覆**

集合 A について、以下を満たす集合 X を A の被覆と呼ぶ。

$$X \subset \mathfrak{P}(A) \land A = \bigcup X$$

1.7 置換の公理

***Ax.* 1.7.1. 置換の公理図式**

アリティ 2 の述語記号 ψ をパラメータとする以下の公理図式を考える。

$$\forall x \forall y \forall z(\psi(x,y) \land \psi(x,z) \to y = z) \to \forall X \exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \land \psi(x,y)))$$

***Rem.* 1.7.1. 集合の内包的定義１**

公理 *1.1.1* より、公理 *1.7.1* より主張される集合 A は一意に定まる。公理 *1.7.1* に基づく定義方法を、内包的定義と呼び以下のように表す。

公理 *1.7.1* の前件を満たすアリティ *2* の述語記号 ψ について、以下のように表す。

$$A = \{y \mid \exists x \in X(\psi(x, y))\}$$

***Thm.* 1.7.1. 分出の公理図式**

アリティ *1* の述語記号 ψ をパラメータとする以下の公理図式を考える。

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \wedge \psi(t))$$

Proof.

アリティ 1 の述語記号 P を考える。排中律より、

$$\forall X(\exists a(a \in X \wedge P(a)) \vee \forall a \neg(a \in X \wedge P(a)))$$

$\exists a(a \in X \wedge P(a))$ のとき、以下のようなアリティ 2 の述語記号 ψ を考える。

$$\psi(x, y) :\leftrightarrow (P(x) \wedge y = x) \vee (\neg P(x) \wedge y = a)$$

公理 1.7.1 より、

$$\exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge ((P(x) \wedge y = x) \vee (\neg P(x) \wedge y = a))))$$

すなわち、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow \exists x((x \in X \wedge P(x) \wedge t = x) \vee (x \in X \wedge \neg P(x) \wedge t = a)))$$

$\exists$ を除去して、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow (t \in X \wedge P(t)) \vee t = a)$$

$t = a \to (a \in X \wedge P(a))$ より、

$$\exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \in X \wedge P(t))$$

$\forall a \neg(a \in X \wedge P(a))$ のとき、$A = \varnothing$ で示される。 ■

***Rem.* 1.7.2. 集合の内包的定義２**

公理 *1.1.1* より、定理 *1.7.1* より主張される集合は一意に定まる。定理 *1.7.1* に基づく定義方法も、内包的定義と呼び以下のように表す。

$$A = \{t \mid t \in X \wedge \psi(t)\}$$

または、以下のようにも表す。

$$A = \{t \in X \mid \psi(t)\}$$

***Def.* 1.7.1. 共通集合**

集合系 X について、以下のように定義された集合を共通集合と呼ぶ。

$$\bigcap X \coloneqq \left\{x \mid x \in \bigcup X \land \forall Y(Y \in X \to x \in Y)\right\}$$

特に、$X = \{x, y\}$ のとき、この共通集合を $x \cap y$ とも表す。

共通集合のこの定義は一般的ではないことに注意せよ。

***Thm.* 1.7.2. 共通集合**

$$\bigcap \varnothing = \varnothing$$
$$X \neq \varnothing \to \bigcap X = \{x \mid \forall Y(Y \in X \to x \in Y)\}$$

Proof.

第 1 式は、定義より自明。

第 2 式について考える。以下が成り立つ。

$$\forall X \forall x \forall Y(Y \in X \to x \in Y)$$
$$\forall X \forall x(X = \varnothing \lor \exists Y(Y \in X \land x \in Y))$$
$$\forall X \forall x\left(X = \varnothing \lor x \in \bigcup X\right)$$

ゆえに示される。 ■

***Cor.* 1.7.3.**

$$\forall x \forall X\left(x \in X \to \bigcap X \subset x\right)$$

***Cor.* 1.7.4.**

$$\forall x \forall y \forall z(x \subset y \to x \cap z \subset y \cap z)$$

***Cor.* 1.7.5.**

$$\forall X \forall Y\left(X \neq \varnothing \land X \subset Y \to \bigcap Y \subset \bigcap X\right)$$

***Cor.* 1.7.6.**

$$\forall x\left(\bigcap \{x\} = x\right)$$

***Cor.* 1.7.7. 吸収法則**

$$\forall x \forall y (x \cup (x \cap y) = x)$$
$$\forall x \forall y (x \cap (x \cup y) = x)$$

***Cor.* 1.7.8. 分配法則**

$$\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$$

***Cor.* 1.7.9.**

$$\forall X \left(\bigcap X \subset \bigcup X \right)$$

***Cor.* 1.7.10.**

$$\forall X \forall Y (\mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cap Y))$$

***Def.* 1.7.2. 差集合**

集合 X, Y について、以下のように定義された集合を X と Y の差集合と呼ぶ。

$$X \setminus Y \coloneqq \{x \mid x \in X \land x \notin Y\}$$

***Cor.* 1.7.11.**

$$\forall X \forall Y (X \setminus Y \subset X \land X \setminus Y \in \mathfrak{P}(X))$$

***Cor.* 1.7.12.**

$$\forall X(X \setminus X = \varnothing)$$
$$\forall X(X \setminus \varnothing = X)$$
$$\forall X(\varnothing \setminus X = \varnothing)$$

***Cor.* 1.7.13.**

$$\forall X \forall Y \forall Z(X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z))$$

***Cor.* 1.7.14.**

$$\forall X \forall Y \forall Z(Y \subset Z \to X \setminus Z \subset X \setminus Y)$$

***Thm.* 1.7.15. *De Morgan* の法則**

集合 X と空でない集合系 A について、以下が成り立つ。

$$X \setminus \bigcup A = \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$
$$X \setminus \bigcap A = \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

Proof.

第一の定理を示す。

$$x \in X \setminus \bigcup A \leftrightarrow \left(x \in X \wedge x \notin \bigcup A\right) \leftrightarrow (x \in X \wedge \forall Y(Y \in A \to x \notin Y)) \leftrightarrow (x \in X \wedge \forall Y(Y \in A \to x \notin X \setminus Y))$$

$A \neq \varnothing$ より、

$$\leftrightarrow \left(x \in X \wedge x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\right) \leftrightarrow x \in \bigcap \{X \setminus Y \mid Y \in A\}$$

第二の定理を示す。

$$\begin{aligned} x \in X \setminus \bigcap A &\leftrightarrow \left(x \in X \wedge x \notin \bigcap A\right) \leftrightarrow \left(x \in X \wedge \left(x \notin \bigcup A \vee \exists Y(Y \in A \wedge x \notin Y)\right)\right) \\ &\leftrightarrow \left(x \in X \setminus \bigcup A \vee \exists Y(Y \in A \wedge x \in X \setminus Y)\right) \\ &\leftrightarrow \left(x \in X \setminus \bigcup A \vee x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\}\right) \\ &\leftrightarrow x \in \bigcup \{X \setminus Y \mid Y \in A\} \end{aligned}$$

最後の変形には、第一の定理を用いた。 ■

Cor. 1.7.16. 順序対の取り出し

$$\forall x \forall y \Big(x = \bigcup \bigcap (x, y) \Big)$$
$$\forall x \forall y \Big(y = \bigcup \bigcap (x, y) \land \Big(\bigcap (x, y) = \bigcap (x, y) \Big) \Big) \lor \Big(y = \bigcup \Big(\bigcup (x, y) \setminus \bigcap (x, y) \Big) \land \Big(\bigcap (x, y) \neq \bigcap (x, y) \Big) \Big)$$

Lem. 1.7.17.

$$\forall X \forall Y \forall x \forall y (x \in X \land y \in Y \to (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)))$$

Proof.

$$\begin{gathered} x \in X \land y \in Y \\ \{x\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \land \{x, y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \\ (x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \end{gathered}$$

よって従う。 ■

Def. 1.7.3. 直積集合

集合 X, Y について、以下を満たす集合を X と Y の直積集合と呼ぶ。

$$X \times Y \coloneqq \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \exists y (x \in X \land y \in Y \land z = (x, y))\}$$

Cor. 1.7.18.

$$\forall X (X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing)$$

Cor. 1.7.19.

$$\begin{gathered} \forall X_1, X_2, Y ((X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)) \\ \forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 ((X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2)) \\ \forall X_1, X_2, Y ((X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y)) \end{gathered}$$

***Def.* 1.7.4. 分割**

集合 A について、以下を満たす A の被覆 X を A の分割と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$$

分割であることを示すために、以下のような記号を用いる。

$$A = \bigsqcup X$$

1.8 正則性の公理

***Ax.* 1.8.1. 正則性の公理**

$$\forall X(X \neq \varnothing \to \exists x(x \in X \land \forall t(t \in X \land t \notin x)))$$

***Lem.* 1.8.1.**

$$\forall x \forall y \neg(x \in y \land y \in x)$$

Proof.

対の公理より、$\{x, y\}$ が存在する。

公理 1.8.1 より、

$$\exists z(z \in \{x, y\} \land \forall t(t \in \{x, y\} \land t \notin z))$$

よって、

$$\forall t(t \in \{x, y\} \land t \notin x) \lor \forall t(t \in \{x, y\} \land t \notin y)$$

ゆえに、

$$(x \notin x \land y \notin x) \lor (x \notin y \land y \notin y)$$

したがって、

$$y \notin x \lor x \notin y$$

示される。 ■

***Cor.* 1.8.2.**

$$\forall x(x \notin x)$$

1.9 選択公理

***Ax.* 1.9.1. 選択公理**

$$\forall X(\varnothing \notin X \land \forall x \forall y(x \in X \land y \in X \land x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to \exists A \forall x(x \in X \to \exists t(x \cap A = \{t\})))$$

2　写像

2.1　関係

***Def.* 2.1.1. 二項関係**
　集合系 G について、以下のように定義されるアリティ *2* の述語記号 R_G を、集合系 G によって特徴づけられた二項関係と呼ぶ。

$$\forall x, y(R_G(x, y) :\leftrightarrow (x, y) \in G)$$

$R_G(x, y)$ は誤解のない範囲において、xR_Gy とも表す。
　また、二項関係は単に関係とも呼ぶ。

***Def.* 2.1.2. 集合間の関係**
　集合 X, Y, G について、関係 R_G が以下を満たすとき、R_G を X と Y の間の関係と呼ぶ。

$$G \in \mathfrak{P}(X, Y)$$

***Def.* 2.1.3. 定義域**
　公理 *1.7.1* より定まる以下の集合を定義域 $\mathrm{dom}(R_G)$ と呼ぶ。

$$\mathrm{dom}(R_G) \coloneqq \{x \mid (x, y) \in G\}$$

***Def.* 2.1.4. 値域**
　関係 R について、公理 *1.7.1* より定まる以下の集合を値域 $\mathrm{ran}(R_G)$ と呼ぶ。

$$\mathrm{ran}(R_G) \coloneqq \{y \mid (x, y) \in G\}$$

***Cor.* 2.1.1.**
　任意の関係 R は、$\mathrm{dom}(R)$ と $\mathrm{ran}(R)$ の間の関係である。

***Def.* 2.1.5. 逆**
　関係 R_G について、以下で定まる関係 $R_{\{G^{-1}\}}$ が一意に存在する。

$$G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$$

***Def.* 2.1.6. 左一意的**

関係 R が左一意的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall w, x(\exists y(R(w,y) \land R(x,y)) \to w = x)$$

Def. **2.1.7. 右一意的**

関係 R が右一意的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall y, z(\exists x(R(x,y) \land R(x,z)) \to y = z)$$

Def. **2.1.8. 一対一**

関係 R が左一意的かつ右一意的であるとき、R は一対一であると言う。

Def. **2.1.9. 左全域的**

関係 R が、集合 X について左全域的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x \in X \exists y(R(x,y))$$

Def. **2.1.10. 右全域的**

関係 R が、集合 Y について右全域的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall y \in Y \exists x(R(x,y))$$

2.2 写像

Def. **2.2.1. 部分写像**

集合 X, Y について、X と Y の間の右一意的な関係 R_G を考える。

$x \in X$ について $\{y \in Y \mid R_G(x,y)\} \neq \varnothing$ であるとき、以下の略記 f を考える。

$$f(x) \coloneqq \bigcup \{y \in Y \mid R_G(x,y)\}$$

右一意的であることから以下を満たす。

$$f(x) = y \leftrightarrow R_G(x,y)$$

この略記 f を、順序対 $((X,Y),G)$ によって特徴づけられた部分写像と呼ぶ。

また、$f(x)$ を x での f の値と呼ぶ。

Def. **2.2.2. 写像**

集合 X, Y と、X と Y の間の右一意的な関係 R_G について、R_G が X について左全域的であるとする。

このとき、順序対 $((X,Y),G)$ によって特徴づけられた部分写像 f を写像と呼ぶ。

***Def.* 2.2.3. 写像の全体**
集合 X, Y について、集合 Y^X を以下のように定める。

$$Y^X \coloneqq \{((X,Y),G) \text{ の特徴づける写像} \mid G \in \mathfrak{P}(X \times Y) \wedge G \text{ の特徴づける関係は、右一意的かつ } X \text{ について左全域的 }\}$$

***Cor.* 2.2.1.**

$$\forall Y\bigl(Y^{\varnothing} = \{\varnothing\}\bigr)$$
$$\forall X\bigl(X \neq \varnothing \to \varnothing^X = \varnothing\bigr)$$

***Def.* 2.2.4. 制限写像**
写像 $f \in Y^X$ と、X の部分集合 A を考える。
f を特徴づける集合系 G について、以下の集合系 G_A を考える。

$$G_A \coloneqq \{(x,y) \in G \mid x \in A\}$$

$((A,Y),G_A)$ に特徴づけられた写像 $f|_A$ を f の A への制限写像、または単に制限と呼ぶ。
誤解のない限り、制限 $f|_A$ を同様に f で表記する。

***Rem.* 2.2.1. 集合の内包的定義３**
写像 $f \in Y^X$ について、以下を満たすアリティ *2* の述語記号 $\psi(x,y)$ を考える。

$$\forall x, y(\psi(x,y) :\leftrightarrow y = f(x))$$

f が写像であることから公理 *1.7.1* の主張する集合 A が存在する。これをより簡潔に以下のように表すものとする。

$$A = \{f(x) \mid x \in X\}$$

***Def.* 2.2.5. 恒等写像**
集合 X について、以下で定める集合系 Δ を考える。$((X,X),\Delta)$ により特徴づけられる写像 id_X を恒等写像と呼ぶ。

$$\Delta \coloneqq \{(x,x) \mid x \in X\}$$

***Def.* 2.2.6. 合成写像**
写像 $f \in Y^X, g \in Z^Y$ について、以下で定める集合系 G を考える。

$$G \coloneqq \{(x,z) \mid \exists y \in Y(y = f(x) \wedge z = g(y))\}$$

$((X,Z),G)$ によって特徴づけられる写像 h が存在する。
この写像 h を f と g の合成写像と呼び、$g \circ f$ と表す。

***Cor.* 2.2.2. 写像の合成の結合法則**
写像 $f \in Y^X, g \in Z^Y, h \in W^Z$ について、以下が成り立つ。

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

***Thm.* 2.2.3. 選択公理が与える写像**
アリティ 2 の述語記号 ψ について、$\forall x \in X \exists y \in Y(\psi(x,y))$ が成り立つとする。
このとき、以下を満たす写像 $f \in Y^X$ が存在する。

$$\forall x \in X \forall y \in Y(f(x) = y \to \psi(x,y))$$

Proof.
以下の集合 Z を考える。

$$Z \coloneqq \{\{(x,y) \mid y \in Y \land \psi(x,y)\} \mid x \in X\}$$

Z について公理 1.9.1 の主張する集合 A が存在する。A の特徴づける関係は、仮定より X について左全域的で、A の定義より右一意的である。
$((X,Y),A)$ により特徴づけられる写像 f が存在する。 ■

***Def.* 2.2.7. 像**
写像 $f \in Y^X$ の値域を、f の像と呼び、$\mathrm{Im}(f)$ と表す。
また、X の部分集合 A について、A の f による像 $f(A)$ を以下のように定める。

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$$

***Thm.* 2.2.4. 像の性質**
写像 $f \in Y^X$ について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)(A_1 \subset A_2 \to f(A_1) \subset f(A_2))$$
$$\forall B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))\left(f\left(\bigcup B\right) = \bigcup \{f(A) \mid A \in B\}\right)$$
$$\forall B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))\left(f\left(\bigcap B\right) \subset \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}\right)$$
$$\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)(f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2))$$

Proof.
第一式について、$y \in f(A_1)$ のとき、$\exists x \in A_1(y = f(x))$、$\exists x \in A_2(y = f(x))$、ゆえに $y \in f(A_2)$

第二式について、

$$
\begin{gathered}
y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \\
\exists A \in B (y \in f(A)) \\
\exists A \in B \exists x \in A (y = f(x)) \\
\exists x \in \bigcup B (y = f(x)) \\
y \in f(\bigcup B)
\end{gathered}
$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$
\begin{gathered}
y \in f(\bigcap B) \\
\exists x \Big(x \in \bigcap B \land y = f(x) \Big) \\
\exists x \Big(x \in \bigcup B \land \forall A (A \in B \to x \in A) \land y = f(x) \Big) \\
\exists x \Big(x \in \bigcup B \land y = f(x) \Big) \land \exists x (\forall A (A \in B \to x \in A) \land y = f(x)) \\
y \in f(\bigcup B) \land \forall A (A \in B \to y \in f(A)) \\
y \in \bigcup \{f(A) \mid A \in B\} \land \forall A (A \in B \to y \in f(A)) \\
y \in \bigcap \{f(A) \mid A \in B\}
\end{gathered}
$$

第四式について、

$$
\begin{gathered}
y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \\
\exists x (y = f(x) \land x \in A_1) \land \forall x (y = f(x) \to x \notin A_2) \\
\exists x (y = f(x) \land x \in A_1 \setminus A_2) \\
y \in f(A_1 \setminus A_2)
\end{gathered}
$$

■

***Def.* 2.2.8. 原像**

写像 f について、集合 A の原像とは、以下を満たす集合 $f^{-1}(A)$ である。

$$
f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}
$$

***Cor.* 2.2.5. 像と原像**

写像 $f \in Y^X$、X の部分集合 A、集合 B について、

$$
\begin{gathered}
f^{-1}(f(A)) \supset A \\
f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B
\end{gathered}
$$

***Thm.* 2.2.6. 原像の性質**

写像 $f \in Y^X$ について、以下が成り立つ。

$$\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(Y)\bigl(A_1 \subset A_2 \to f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2)\bigr)$$
$$\forall B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(Y))\Bigl(f^{-1}(\bigcup B) = \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr)$$
$$\forall B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(Y))\Bigl(f^{-1}(\bigcap B) = \bigcap\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}\Bigr)$$
$$\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(Y)\bigl(f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \setminus A_2)\bigr)$$

Proof.

第一式について、$x \in f^{-1}(A_1)$ のとき、$f(x) \in A_1 \subset A_2$ ゆえに $x \in f^{-1}(A_2)$

第二式について、

$$x \in \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}$$
$$\exists A \in B\bigl(x \in f^{-1}(A)\bigr)$$
$$\exists A \in B(f(x) \in A)$$
$$f(x) \in \bigcup B$$
$$x \in f^{-1}(\bigcup B)$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。

第三式について、第二式を用いて、

$$x \in f^{-1}(\bigcap B)$$
$$f(x) \in \bigcap B$$
$$f(x) \in \bigcup B \land \forall A(A \in B \to f(x) \in A)$$
$$x \in f^{-1}(\bigcup B) \land \forall A\bigl(A \in B \to x \in f^{-1}(A)\bigr)$$
$$x \in \bigcup\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\} \land \forall A\bigl(A \in B \to x \in f^{-1}(A)\bigr)$$
$$x \in \bigcap\bigl\{f^{-1}(A) \mid A \in B\bigr\}$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。

第四式について、

$$x \in f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2)$$
$$f(x) \in A_1 \land f(x) \notin A_2$$
$$f(x) \in A_1 \setminus A_2$$
$$x \in f^{-1}(A_1 \setminus A_2)$$

上からも下からも成り立つので、公理 1.1.1 より成り立つ。 ■

***Def.* 2.2.9. 一般の直積集合**

写像 $A \in Z^\Lambda$ について、以下を満たす集合を写像 A の直積集合と呼ぶ。

$$\prod A \coloneqq \left\{f \in \left(\bigcup\{A(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}\right)^\Lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda(f(\lambda) \in A(\lambda))\right\}$$

Cor. **2.2.7.**
集合 X, Y について、写像 $A \in \{Y\}^X, \forall x \in X(A(x) \coloneqq Y)$ を考える。
このとき、$\prod A = Y^X$ である。

2.3 単射と全射

Def. **2.3.1. 単射**
写像 f が左一意的であるとき、f は単射であると言う。単射な写像を、誤解のない範囲で単射と呼ぶ。

Cor. **2.3.1.**
単射 $f \in Y^X, g \in Z^Y$ について、$g \circ f$ は単射である。

Cor. **2.3.2.**
集合 X, Y について、単射 $f \in Y^X$ が存在するならば、単射 $g \in \mathfrak{P}(Y)^{\mathfrak{P}(X)}$ が存在する。

Def. **2.3.2. 全射**
写像 f が右全域的であるとき、f は全射であると言う。全射な写像を、誤解のない範囲で全射と呼ぶ。

Cor. **2.3.3.**
全射 $f \in Y^X, g \in Z^Y$ について、$g \circ f$ は全射である。

Def. **2.3.3. 全単射**
写像 f が単射かつ全射であるとき、f は全単射であると言う。全単射な写像を、誤解のない範囲で全単射と呼ぶ。

Cor. **2.3.4.**
恒等写像は全単射である。

Def. **2.3.4. 左逆写像**
写像 $f \in Y^X$ について、以下を満たす写像 $g \in X^Y$ を左逆写像と呼ぶ。

$$g \circ f = \mathrm{id}_X$$

Cor. **2.3.5.**
左逆写像は全射である。

***Thm.* 2.3.6. 単射と左逆写像**
空でない集合 X と集合 Y、写像 $f \in Y^X$ について、f が単射であることは、写像 f が左逆写像 g を持つことと同値である。

Proof.
必要性を示す。
空でないので $\exists x_0 \in X$ より、以下で定める集合 G が存在する。

$$G \coloneqq \{(y,x) \in Y \times X \mid y = f(x)\} \cup \{(y,x_0) \mid y \in Y \setminus \mathrm{Im}(f)\}$$

$((X,Y),G)$ により特徴づけられる全射 g は、定義より f の左逆写像となる。

十分性を示す。
単射でないとすると、$\exists x,y \in X(x \neq y \wedge f(x) = f(y))$ で定義より、$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$ より矛盾。背理法より示される。 ■

***Def.* 2.3.5. 右逆写像**
写像 $f \in Y^X$ について、以下を満たす写像 $g \in X^Y$ を右逆写像と呼ぶ。

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

***Cor.* 2.3.7.**
右逆写像は単射である。

***Thm.* 2.3.8. 全射と右逆写像**
集合 X,Y、写像 $f \in Y^X$ について、f が全射であることは、写像 f が右逆写像 g を持つことと同値である。

Proof.
必要性を示す。定理 2.2.3 の与える写像は、右逆写像である。

十分性を示す。
全射でないとすると、$\exists y \in Y \forall x \in X(f(x) \neq y)$ で仮定に反する。背理法より示される。 ■

***Def.* 2.3.6. 逆写像**
写像 $f \in Y^X$ について、写像 $g \in X^Y$ が f の左逆写像かつ右逆写像であるとき、逆写像と呼ぶ。

***Cor.* 2.3.9.**
逆写像は全単射である。

***Thm.* 2.3.10. 全単射と逆写像**
集合 X, Y、写像 $f \in Y^X$ について、f が全単射であることは、写像 f が逆写像 g を持つことと同値である。

Proof.
必要性を示す。f は全射より、$\mathrm{Im}(f) = Y$
以下のような集合系 G が存在する。

$$G \coloneqq \{(y, x) \in Y \times X \mid y = f(x)\}$$

$((X, Y), G)$ により特徴づけられる写像 g は定義より f の逆写像となる。

十分性を示す。
X が空のとき、逆写像を持つので Y は空である。ゆえに全単射。
X が空でないとき、定理 2.3.6 と定理 2.3.8 より f は全単射。 ■

***Lem.* 2.3.11.**
写像 $f \in Y^X$ について、f の逆写像が存在するならば、一意に定まる。
ここから、f の逆写像を f^{-1} と表す。

Proof.
逆写像 g, h について、$g(y) = h \circ f \circ g(y) = h(y)$。ゆえに一意。 ■

***Cor.* 2.3.12.**
全単射 $f \in Y^X$ について、

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

***Lem.* 2.3.13.**
全単射 $f \in Y^X$ と Y の部分集合 A について、原像 $f^{-1}(A)$ と逆写像の像 $f^{-1}(A)$ は一致する。

Proof.
全単射より、$\forall y \in A \exists x \in A (y = f(x))$。ゆえに定義より明らか。 ■

***Thm.* 2.3.14. *Cantor* の対角線論法**
集合 A について、単射 $f \in A^{\mathfrak{P}(A)}$ は存在しない。

Proof.
存在するとする。
以下の集合 Y を考える。

$$Y \coloneqq \{f(X) \mid X \in \mathfrak{P}(A) \wedge f(X) \notin X\}$$

このとき $Y \in \mathfrak{P}(A)$ である。
$f(Y) \notin Y$ とすると、定義より $f(Y) \in Y$。ゆえに矛盾。
$f(Y) \in Y$ とすると、f の単射性より $Y \in \mathfrak{P}(A) \wedge f(Y) \notin Y$。ゆえに矛盾。
背理法より示される。 ■

3 順序

3.1 自己関係

***Def.* 3.1.1. 自己関係**
空でない集合 X について、X と X の間の関係を、明示的に X 上の自己関係、または単に X 上の関係と呼ぶ。

***Def.* 3.1.2. 反射的**
空でない集合 X 上の関係 R が反射的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x \in X(R(x,x))$$

***Def.* 3.1.3. 対称的**
空でない集合 X 上の関係 R が対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(R(x,y) \to R(y,x))$$

***Def.* 3.1.4. 反対称的**
空でない集合 X 上の関係 R が反対称的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(R(x,y) \land R(y,x) \to x = y)$$

***Def.* 3.1.5. 推移的**
空でない集合 X 上の関係 R が推移的であるとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y, z \in X(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$$

3.2 前順序

***Def.* 3.2.1. 前順序**
反射的かつ推移的な関係を、前順序と呼ぶ。
空でない集合 X と X 上の前順序 $\preccurlyeq$ について、順序対 $(X, \preccurlyeq)$ を前順序集合と呼ぶ。または単に X と書き、前順序集合と集合どちらも表すものとする。
略記 $\prec, \succcurlyeq, \succ$ を以下のように定める。

$$x \prec y :\leftrightarrow x \preccurlyeq y \land x \neq y$$
$$x \succcurlyeq y :\leftrightarrow y \preccurlyeq x$$
$$x \succ y :\leftrightarrow y \prec x$$

***Cor.* 3.2.1.**

$$x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \lor x = y$$
$$x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \succ y \lor x = y$$

***Def.* 3.2.2. 上界**

前順序集合 P について、その部分集合 A を考える。
A が上に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in P \forall a \in A (a \preccurlyeq b)$$

このとき、b を A の上界と呼ぶ。

***Def.* 3.2.3. 下界**

前順序集合 P について、その部分集合 A を考える。
A が下に有界であるとは、以下を満たすことである。

$$\exists b \in P \forall a \in A (b \preccurlyeq a)$$

このとき、b を A の下界と呼ぶ。

***Def.* 3.2.4. 有界**

前順序集合 P について、その部分集合 A を考える。
A が有界であるとは、A が上に有界かつ下に有界であることである。

***Def.* 3.2.5. 有向集合**

前順序集合 Λ について、任意の二元 $\lambda, \mu \in \Lambda$ から成る集合 $\{\lambda, \mu\}$ が上に有界であるとき、前順序集合 Λ を有向集合と呼ぶ。

***Def.* 3.2.6. 上方集合**

有向集合 Λ とその元 $\lambda_0 \in \Lambda$ について、集合 $\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}, \Lambda_{\succ \lambda_0}$ を以下のように定める。

$$\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0} \coloneqq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \preccurlyeq \lambda\}$$
$$\Lambda_{\succ \lambda_0} \coloneqq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0 \prec \lambda\}$$

***Def.* 3.2.7. 前順序との両立**

集合 X と X 上の前順序 $\preccurlyeq_X$、集合 Y と Y 上の前順序 $\preccurlyeq_Y$ について、写像 $f \in Y^X$ が $\preccurlyeq_X, \preccurlyeq_Y$ と両立するとは、以下を満たすことである。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq_X y \to f(x) \preccurlyeq_Y f(y))$$

3.3 半順序

***Def.* 3.3.1. 半順序**

反対称的な前順序を、半順序と呼ぶ。

空でない集合 A と A 上の半順序 $\preccurlyeq$ について、順序対 $(A, \preccurlyeq)$ を半順序集合と呼ぶ。または単に A と書き、半順序集合と集合どちらも表すものとする。

***Cor.* 3.3.1.**

空でない集合 A について、$(A, \subset)$ は半順序集合である。また、$(A, \supset)$ も半順序集合である。

***Def.* 3.3.2. 単調**

半順序と両立する写像を単調である、または広義単調であると呼ぶ。

***Def.* 3.3.3. 極大元**

半順序集合 A について、以下の元 b を A の極大元と呼ぶ。

$$b \in A \land \forall a \in A(\neg b \prec a)$$

***Def.* 3.3.4. 最大元**

半順序集合 A について、以下の元 b を A の最大元と呼ぶ。

$$b \in A \land \forall a \in A(a \preccurlyeq b)$$

***Def.* 3.3.5. 極小元**

半順序集合 A について、以下の元 b を A の極小元と呼ぶ。

$$b \in A \land \forall a \in A(\neg b \succ a)$$

***Def.* 3.3.6. 最小元**

半順序集合 A について、以下の元 b を A の最小元と呼ぶ。

$$b \in A \land \forall a \in A(a \succcurlyeq b)$$

***Cor.* 3.3.2.**
半順序集合 A の最大元は、極大元である。

***Cor.* 3.3.3. 最大元の一意性**
半順序集合 A の最大元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。
ここから、半順序集合 A の最大元 b を $\max A \coloneqq b$ と表す。

***Cor.* 3.3.4.**
半順序集合 A の最小元は、極小元である。

***Cor.* 3.3.5. 最小元の一意性**
半順序集合 A の最小元は存在するならば一意である。これは半順序の反対称性から従う。
ここから、半順序集合 A の最小元 b を $\min A \coloneqq b$ と表す。

***Def.* 3.3.7. 上限**
半順序集合 P について、その部分集合 A を考える。
定理 *1.7.1* より定まる、A の上界全体の集合について、最小元が存在するとき、これを A の上限と呼び $\sup A$ と表す。

***Def.* 3.3.8. 下限**
半順序集合 P について、その部分集合 A を考える。
定理 *1.7.1* より定まる、A の下界全体の集合について、最大元が存在するとき、これを A の下限と呼び $\inf A$ と表す。

***Def.* 3.3.9. 束**
以下を満たす半順序集合 P を束と呼ぶ。

$$\forall x, y \in P \exists z, w \in P(z = \sup\{x, y\} \land w = \inf\{x, y\})$$

***Cor.* 3.3.6.**
束は有向集合である。

***Def.* 3.3.10. 全順序**

以下を満たす空でない集合 X 上の半順序 $\preccurlyeq$ を全順序と呼ぶ。全順序であることを明示的に記号 $\leq$ で表す。

$$\forall x, y \in X(x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x)$$

空でない集合 X と X 上の全順序 $\leq$ について、順序対 $(X, \leq)$ を全順序集合と呼ぶ。または単に X と書き、全順序集合と集合どちらも表すものとする。

略記 $<, \geq, >$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} x < y &:\leftrightarrow x \leq y \land x \neq y \\ x \geq y &:\leftrightarrow y \leq x \\ x > y &:\leftrightarrow y < x \end{aligned}$$

***Cor.* 3.3.7.**

全順序集合 A の極大元は最大元であり、極小元は最小元である。

***Cor.* 3.3.8.**

全順序集合は束である。

***Def.* 3.3.11. 区間**

全順序集合 P と $a, b \in P$ について、以下で定める P の部分集合をそれぞれ、開区間 $]a, b[$、閉区間 $[a, b]$ と呼ぶ。

$$\begin{aligned}]a, b[&\coloneqq \{x \in P \mid a < x \land x < b\} \\ [a, b] &\coloneqq \{x \in P \mid a \leq x \land x \leq b\} \end{aligned}$$

開区間、閉区間をまとめて区間と呼ぶ。

3.4 *Zorn* の補題

***Def.* 3.4.1. 帰納的**

半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ を考える。P の任意の空でない部分集合 A について、順序対 $(A, \preccurlyeq)$ が全順序集合ならば A が上に有界となるとき、P は帰納的であると呼ぶ。

***Lem.* 3.4.1.**

帰納的な半順序集合 $(X, \preccurlyeq)$ について、以下の集合 $\mathcal{T}$、すなわち X の全順序部分集合の全体を考える。

$$\mathcal{T} \coloneqq \{T \in \mathfrak{P}(X) \mid T \neq \varnothing \land \forall x, y \in T(x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x)\}$$

以下の写像 $U \in \mathfrak{P}(X)^{\mathcal{T}}$ を考える。

$$\forall T \in \mathcal{T}(U(T) \coloneqq \{u \in X \mid \forall t \in T(t \prec u)\})$$

このとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \forall S \in \mathfrak{P}(X) \forall T \in \mathcal{T}(S \neq \varnothing \land S \subset T \to S \in \mathcal{T}) \\ \forall T \in \mathcal{T}(U(T) \cap T = \varnothing) \end{aligned}$$

Proof.

第一式は明らか。

第二式について考える。

$\exists u \in U(T) \cap T$ であるならば、$(u \prec u)$ より矛盾。背理法より、成り立つ。 ■

Lem. 3.4.2.

帰納的な半順序集合 X が極大元を持たないならば、以下を満たす写像 $f \in X^{\{U(T) \mid T \in \mathcal{T}\}}$ が存在する。

$$f(U) \in U$$

Proof.

帰納的であることより、$\forall T \in \mathcal{T}$ に対して上界 u_T が存在する。

今、u_T は極大元でないので、$\exists v \in X(u_T \prec v)$ である。推移律から、$v \in U(T)$ である。

$\forall U \in \{U(T) \mid T \in \mathcal{T}\} \exists T \in \mathcal{T} \exists v \in X(v \in U(T) \land U(T) = T)$ であるので、定理 2.2.3 より存在する。 ■

Lem. 3.4.3.

帰納的な半順序集合 X が極大元を持たないとき、以下の集合を考える。

$$\mathcal{T}_0 \coloneqq \{T \in \mathcal{T} \mid \forall S \in \mathfrak{P}(T) \setminus \{\varnothing\}(U(S) \setminus U(T) \neq \varnothing \to f(U(S)) \in T)\}$$
$$\mathcal{T}_1 \coloneqq \{T \in \mathcal{T}_0 \mid \forall S \in \mathcal{T}_0(T \setminus S \subset U(S))\}$$
$$T^* \coloneqq \bigcup \mathcal{T}_1$$

このとき、$T^* \in \mathcal{T}_1$ である。

Proof.

$\forall S \in \mathcal{T}_0$ について、$\forall x \in T^* \setminus S \exists T \in \mathcal{T}_1(x \in T \setminus S \subset U(S))$ である。

すなわち、$\forall S \in \mathcal{T}_0(T^* \setminus S \subset U(S))$

$\forall x, y \in T^*$ について、$\exists T \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}(x \in T)$ である。

$y \in T$ のとき、$x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x$ である。

$y \notin T$ のとき、$y \in T^* \setminus T \subset U(T)$ より、$x \preccurlyeq y$ である。

したがって、$T^* \in \mathcal{T}$ である。

$R \in \mathfrak{P}(T^*) \setminus \{\varnothing\}$ について、$\exists v \in U(R) \setminus U(T^*)$ とする。

$\exists w \in T^* \exists T \in \mathcal{T}_1(\neg w \prec v \land w \in T)$ より、$\exists T \in \mathcal{T}_1(v \in U(R) \setminus U(T))$

$y \in R \cap U(T)$ とすると、$v \in U(R)$ より $y \prec v$ であり、推移律から $v \in U(T)$ となり矛盾。したがって、$R \cap U(T) = \varnothing$ である。

$R \setminus T = R \cap (R \setminus T) \subset R \cap (T^* \setminus T) \subset R \cap U(T) = \varnothing$ より、$R \setminus T = \varnothing$、すなわち $R \subset T$ である。

$T \in \mathcal{T}_0$ より、$f(U(R)) \in T \subset T^*$ である。したがって、$T^* \in \mathcal{T}_0$ であり、ただちに $T^* \in \mathcal{T}_1$ を得る。 ■

Lem. 3.4.4.

帰納的な半順序集合 X が極大元を持たないとき、補題 *3.4.3* より $T^* \in \mathcal{T}$ であるので、以下の集合を考える。

$$T' \coloneqq T^* \cup \{f(U(T^*))\}$$

このとき、$T' \in \mathcal{T}_1$ である。

Proof.
簡単のため、$u \coloneqq f(U(T^*))$ と置く。
今、u は定義より T' の最大元となるので、$T' \in \mathcal{T}$ である。

$S \in \mathfrak{P}(T') \setminus \{\varnothing\}$ について、$U(S) \setminus U(T') \neq \varnothing$ とする。
$u \in S$ とすると、$U(S) = U(\{u\}) = U(T')$ より矛盾。したがって、$u \notin S$ より、$S \subset T^*$ を得る。
ゆえに、$U(T^*) \subset U(S)$ であり、$U(S) \setminus U(T^*) \neq \varnothing$ のとき、$f(U(S)) \in T^* \subset T'$ を得る。
$U(S) \subset U(T^*)$ のとき、$U(S) = U(T^*)$ より、$f(U(S)) = u \in T'$
したがって、$T' \in \mathcal{T}_0$ である。

$\forall R \in \mathcal{T}_0$ について考える。
$\exists v \in T^* \cap U(R)$ のとき、$v \prec u$ より $u \in U(R)$ である。
補題 3.4.3 より $T' \setminus R \subset (T^* \setminus R) \cup \{u\} \subset U(R)$ を得る。
$T^* \cap U(R) = \varnothing$ のとき、補題 3.4.3 より $T^* \setminus R \subset U(R)$ であるので $T^* \subset R$ である。
$R \in \mathcal{T}_0$ より、$U(T^*) \subset U(R) \vee u = f(U(T^*)) \in R$、すなわち $u \in U(R) \cup R$ となる。
したがって、$T' \setminus R = \{u\} \setminus R \subset U(R)$ を得る。
$\forall R \in \mathcal{T}_0(T' \setminus R \subset U(R))$ である。 ■

***Thm.* 3.4.5. *Zorn* の補題**
帰納的な半順序集合には極大元が存在する。

Proof.
極大元を持たないとすると、補題 3.4.4 より $T' \in \mathcal{T}_1$ から $T' \subset \bigcup \mathcal{T}_1 = T^*$
定義より $u \in T' \setminus T^*$ であり、矛盾する。
背理法より示される。 ■

3.5 フィルターとネット

***Def.* 3.5.1. フィルター**
半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ と P の空でない部分集合 F について、以下を満たすとき F を P のフィルターと呼ぶ。

$$\forall x, y \in F \exists z \in F(z \preccurlyeq x \wedge z \preccurlyeq y)$$
$$\forall x \in F \forall y \in P(x \preccurlyeq y \rightarrow y \in F)$$

***Cor.* 3.5.1.**
フィルターは逆順序について有向集合である。

***Def.* 3.5.2. 細分**
半順序集合 P 上のフィルター F, G に対して、$F \subset G$ であるとき、G は F の細分であると呼ぶ。

***Def.* 3.5.3. 超フィルター**
自身以外の細分を持たないフィルターを超フィルターと呼ぶ。

***Thm.* 3.5.2. 超フィルターの存在**
任意のフィルターに対して、その細分である超フィルターが存在する。

Proof.
フィルター F に対して、その細分の全体 $\mathcal{F}$ を考える。半順序集合 $(\mathcal{F}, \subset)$ を考える。
$\mathcal{F}$ の全順序部分集合 A に対して、$\bigcup A \in \mathcal{F}$ である。
ゆえに、$\mathcal{F}$ は帰納的である。
定理 3.4.5 より極大元が存在する。これは超フィルターである。 ■

***Def.* 3.5.4. 集合におけるフィルター**
集合 X について、半順序集合 $(\mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, \subset)$ のフィルターを、集合 X のフィルターと呼ぶ。

***Cor.* 3.5.3.**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$X \in \mathcal{F}$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$$

***Thm.* 3.5.4. 集合の超フィルター**
集合 X のフィルター $\mathcal{F}$ について、以下の 2 つは同値である。

1. $\mathcal{F}$ は超フィルターである
2. $\forall A \in \mathfrak{P}(X)(A \in \mathcal{F} \vee X \setminus A \in \mathcal{F})$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$A \in \mathcal{F}$ のとき明らかであるので、$A \notin \mathcal{F}$ のときを考える。
$\mathcal{S} \coloneqq \{S \in \mathfrak{P}(X) \mid A \cup S \in \mathcal{F}\}$ について、定義より $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \wedge X \setminus A \in \mathcal{S}$ である。
今、$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について、$A \cup (S_1 \cap S_2) = (A \cup S_1) \cap (A \cup S_2) \in \mathcal{F}$ より、$S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ である。
$S \in \mathcal{S} \wedge T \in \mathfrak{P}(X) \wedge S \subset T$ とすると、$A \cup S \in \mathcal{F} \to A \cup T \in \mathcal{F}$ より $T \in \mathcal{S}$
$A \cup X = X \in \mathcal{F}$ より、$X \in \mathcal{S}$ である。すなわち、$\mathcal{S} \neq \varnothing$
$\varnothing \notin \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S}$ はフィルターでありかつ $\mathcal{F}$ の細分である。
ここで、$\mathcal{F}$ は超フィルターであるので $X \setminus A \in \mathcal{S} = \mathcal{F}$

2. $\to$ 1. を示す。
超フィルターでないとすると、$\mathcal{F}$ の細分 $\mathcal{F}'$ が存在して、$\exists A \in \mathcal{F}'(A \notin \mathcal{F} \wedge A \in \mathcal{F}')$ である。
仮定より、$X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であり、$\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ よりフィルターの定義に矛盾。背理法より示される。
■

***Def.* 3.5.5. ネット**
有向集合 Λ から集合 X への写像を、X 上のネットと呼ぶ。
ネットは、明示的に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と表す。このとき、x_λ は X 上の元で、$\lambda\in\Lambda$ での値を表す。
また誤解のない限り、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で値域を表す。

***Def.* 3.5.6. 部分ネット**
集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と有向集合 M について、写像 $\varphi\in\Lambda^M$ が以下を満たすとき、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネットと呼ぶ。

$$\forall\mu_1,\mu_2\in M(\mu_1\preccurlyeq\mu_2\to\varphi(\mu_1)\preccurlyeq\varphi(\mu_2))$$
$$\forall\lambda\in\Lambda\exists\mu\in M(\lambda\preccurlyeq\varphi(\mu))$$

***Def.* 3.5.7. 普遍**
集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は普遍であると呼ぶ。

$$\forall A\in\mathfrak{P}(X)\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset A\vee(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset X\setminus A\Big)$$

***Thm.* 3.5.5. ネットの定めるフィルター**
集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、以下で定める集合系 $\mathcal{F}$ は X のフィルターである。

$$\mathcal{F}:=\Big\{F\in\mathfrak{P}(X)\mid\exists\lambda_0\in\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}}\subset F\Big)\Big\}$$

Proof.
明らかに $\varnothing\notin\mathcal{F}\wedge X\in\mathcal{F}$ である。

$F_1,F_2\in\mathcal{F}$ について、定義より $\exists\lambda_1,\lambda_2\subset\Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}}\subset F_1\wedge(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_2}}\subset F_2\Big)$ である。
Λ が有向集合であることから、$\exists\lambda_3\in\Lambda(\lambda_1\preccurlyeq\lambda_3\wedge\lambda_2\preccurlyeq\lambda_3)$ であり、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_3}}\subset F_1\cap F_2$。
ゆえに $F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$ である。

$\forall F\in\mathcal{F}\forall G\subset\mathfrak{P}(X)$ について、$F\subset G$ ならば定義より明らかに $G\in\mathcal{F}$ ■

***Lem.* 3.5.6.**
集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と定理 *3.5.5* の定めるフィルター $\mathcal{F}$ を考える。
このとき、$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ について、以下が成り立つ。

$$\forall F\in\mathcal{F}'\forall\lambda_0\in\Lambda\exists\lambda\in\Lambda(\lambda_0\preccurlyeq\lambda\wedge x_\lambda\in F)$$

Proof.
$\exists F\in\mathcal{F}'\exists\lambda_0\in\Lambda\forall\lambda\in\Lambda(\lambda_0\preccurlyeq\lambda\to x_\lambda\notin F)$ とする。

今、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であるので、$\varnothing = F \cap (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \in \mathcal{F}'$ より、フィルターの定義に矛盾。
背理法より示される。 ■

***Thm.* 3.5.7. フィルターの定める部分ネット**
集合 X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、定理 *3.5.5* の定めるフィルター $\mathcal{F}$ について考える。
$\mathcal{F}$ の任意の細分 $\mathcal{F}'$ に対して、ある部分ネット $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ が存在して、その部分ネットの定理 *3.5.5* から定まるフィルターは $\mathcal{F}'$ の細分となる。

Proof.
$M \coloneqq \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F}' \mid x_\lambda \in F\}$ を考える。
M 上の前順序 $\forall(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M((\lambda_1, F_1) \preccurlyeq (\lambda_2, F_2) :\leftrightarrow \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \land F_1 \supset F_2)$ を考える。

$(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2) \in M$ とする。
$\mathcal{F}'$ はフィルターより $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$
Λ は有向集合であるので、$\exists\lambda_3 \in \Lambda(\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3 \land \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3)$ である。
補題 3.5.6 より $\exists\lambda_4 \in \Lambda(\lambda_3 \preccurlyeq \lambda_4 \land x_{\lambda_4} \in F_1 \cap F_2)$
$(\lambda_4, F_1 \cap F_2)$ は、$\{(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)\}$ の上界であるので、M は有向集合である。

ここで、写像 $\varphi \in \Lambda^M$ を $\varphi(\lambda, F) \coloneqq \lambda$ として定める。
補題 3.5.6 より $\forall\lambda \in \Lambda\exists F \in \mathcal{F}'\exists\lambda_1 \in \Lambda(\lambda \preccurlyeq \lambda_1 = \varphi(\lambda_1, F) \land (\lambda_1, F) \in M)$ である。
したがって、$\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ は部分ネットである。

今、補題 3.5.6 より $\forall F \in \mathcal{F}'\exists\lambda_0 \in \Lambda((\lambda_0, F) \in M)$
$\forall(\lambda', F') \in M$ について、$(\lambda_0, F) \preccurlyeq (\lambda', F')$ ならば、$x_{\lambda'} \in F' \subset F$ となる。
よって、$F \in \left\{F \in \mathfrak{P}(X) \mid \exists\mu_0 \in M\left(\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M_{\succcurlyeq\mu_0}} \subset F\right)\right\}$ ■

***Thm.* 3.5.8. 普遍部分ネットの存在**
任意のネットは、普遍な部分ネットを持つ。

Proof.
ネットに対して定理 3.5.5 の定めるフィルター $\mathcal{F}$ が存在する。
定理 3.5.2 より $\mathcal{F}$ の細分である超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する。
定理 3.5.7 より、定理 3.5.5 の定めるフィルターが $\mathcal{U}$ に一致する部分ネットが存在する。
定理 3.5.4 より、この部分ネットは普遍である。 ■

4　自然数

4.1　自然数の構成

***Def.* 4.1.1. 無限系譜**
集合 X が無限系譜であるとは、以下を満たすことである。

$$\varnothing \in X \land \forall x(x \in X \to x \cup \{x\} \in X)$$

公理 *1.5.1* より無限系譜は存在する。集合 X が無限系譜であることをアリティ *1* の述語記号 $M(X)$ で表す。

***Cor.* 4.1.1.**

$$\forall X \forall Y(M(X) \land M(Y) \to M(X \cap Y))$$

***Def.* 4.1.2. 後者関数**
無限系譜 X について、以下のように定める写像 $s \in X^X$ を後者関数（*successor*）と呼ぶ。

$$s(x) \coloneqq x \cup \{x\}$$

***Cor.* 4.1.2.**

$$\forall x(x \in s(x) \land x \neq s(x))$$

***Lem.* 4.1.3.**

$$\forall A\Big(A \neq \varnothing \land \forall X \in A(M(X)) \to M(\bigcap A)\Big)$$

Proof.
まず、以下が成り立つ。

$$A \neq \varnothing \land \forall X \in A(\varnothing \in X) \to \varnothing \in \bigcap A$$

次に、以下が成り立つ。$A \neq \varnothing$ のとき、$\forall x \in \bigcap A \forall X \in A$ について、$x \in X$ であり、無限系譜であることから $s(x) \in X$。ゆえに、$s(x) \in \bigcap A$
よって、$\bigcap A$ は無限系譜である。　■

***Lem.* 4.1.4.**

$$\forall X\Big(M(X) \to \exists Y\Big(M(Y) \land Y = \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}\Big)\Big)$$

Proof.

公理 1.6.1、および定理 1.7.1 より、

$$\exists Y\Big(Y = \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}\Big)$$

ここで $X \in \{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}$ より、$\{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\} \neq \varnothing$

補題 4.1.3 より、Y は無限系譜である。 ■

***Lem.* 4.1.5.**

$$\forall X \forall Y\Big(M(X) \land M(Y) \to \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\} = \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(Y) \mid M(Z)\}\Big)$$

Proof.

$\omega(X) \coloneqq \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}$ とする。

補題 4.1.3 より、$M(X \cap Y)$ で、$\omega(X) \subset \omega(X \cap Y)$

今、

$$\begin{gathered}\forall Z(Z \in \{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}) \\ \forall Z(M(Z) \land Z \subset X) \\ \forall Z(M(Z \cap Y) \land Z \cap Y \subset X \cap Y) \\ \forall Z(Z \cap Y \in \{Z \in \mathfrak{P}(X \cap Y) \mid M(Z)\})\end{gathered}$$

ゆえに、

$$\begin{gathered}\forall z \forall Z(z \in \omega(X \cap Y) \land Z \in \{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}) \\ \forall z \forall Z(z \in Z \cap Y) \\ \forall z \forall Z(z \in Z)\end{gathered}$$

よって、

$$\forall z(z \in \omega(X \cap Y) \to z \in \omega(X))$$

したがって、

$$\omega(X) = \omega(X \cap Y)$$

Y についても同様より、示される。 ■

***Def.* 4.1.3. 自然数**

補題 *4.1.5* より、無限系譜 X の取り方によらず $\bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(X) \mid M(Z)\}$ が一意に定まり、これを自然数 $\mathbb{N}$（または ω）と呼ぶ。誤解のない範囲で、自然数 $\mathbb{N}$ の要素も自然数と呼ぶ。

***Def.* 4.1.4. 数字**

数字を定義する。

$$0 \coloneqq \{\}, 1 \coloneqq \{0\}, 2 \coloneqq \{0, 1\}, 3 \coloneqq \{0, 1, 2\}, \cdots$$

***Thm.* 4.1.6. *Peano* の公理**
以下の全てを満たす。

$$0 \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}(s(n) \in N)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}(S(n) \neq 0)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(S(n) = S(m) \to n = m)$$
$$\forall E(E \subset N \land 0 \in E \land \forall n(n \in E \to S(n) \in E) \to E = \mathbb{N})$$

Proof.
第一、第二の公理は自明。

第三の公理は $n \in s(n)$ と、空集合は要素を持たないことから示される。

第四の公理を示す。
$n \in s(n) \to n \in s(m)$ であり、$n \in s(m) \to n = m \lor n \in m$
よって、$(n = m \lor n \in m) \land (m = n \lor m \in n)$
公理 1.8.1 より示される。

第五の公理を示す。
$0 \in E \land \forall n(n \in E \to s(n) \in E)$ より、E は無限系譜である。
定理より、$\mathbb{N} = \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(E) \mid M(Z)\}$
$\forall n(n \in \mathbb{N} \to n \in \bigcap\{Z \in \mathfrak{P}(E) \mid M(Z)\})$
すなわち、$\forall n(n \in \mathbb{N} \to n \in E)$
今、$E \subset \mathbb{N}$ は仮定より、示される。 ■

***Thm.* 4.1.7. 数学的帰納法**
アリティ *1* の述語記号 P について、

$$\forall n(n \in \mathbb{N} \to P(n)) \leftrightarrow P(0) \land \forall n(n \in \mathbb{N} \land P(n) \to P(s(n)))$$

Proof.
右は自明。

左は、$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ として定理 4.1.6 第五式から示される。 ■

***Def.* 4.1.5. 前者関数**
後者関数 s は、定理 *4.1.6* の第四式より単射であるため、左逆写像を持つ。これを前者関数 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ と呼ぶ。

***Lem.* 4.1.8.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(n \neq 0 \to s(p(n)) = n)$$

Proof.
$n = 0$ のとき前件否定より成り立つ。
ある n で成り立つとき、p が s の左逆写像より $s(p(s(n))) = s(n)$ が成り立つ。
定理 4.1.7 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Lem.* 4.1.9.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(m \in n \to m \in \mathbb{N})$$

Proof.
$n = 0 = \varnothing$ のとき自明。
ある n で成り立つとき、$s(n) = n \cup \{n\}$ より、$s(n)$ で成り立つ。
定理 4.1.7 より、任意の n について成り立つ。 ■

4.2 自然数の順序

***Def.* 4.2.1. 自然数の順序**
自然数 $\mathbb{N}$ 上で二項関係 $\leq$ を以下のように定める。包含の半順序性より、$\leq$ は半順序である。

$$n \leq m :\leftrightarrow n \subset m$$

***Cor.* 4.2.1.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n)$$

***Cor.* 4.2.2.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(n < s(n))$$

***Lem.* 4.2.3. 自然数の順序の要素のよる特徴づけ**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \subsetneq m \leftrightarrow n \in m)$$

Proof.

0 は空集合より、$\neg(n \in 0) \wedge \neg(n \subsetneq 0)$ ゆえに、$n \subsetneq 0 \leftrightarrow n \in 0$

ある m で成り立つとする。

左について、仮定より、

$$n \in s(m)$$
$$n \in m \cup \{m\}$$
$$n \in m \vee n = m$$
$$n \subsetneq m \vee n = m$$
$$n \subset m$$

$m \notin m$ より、

$$n \subsetneq m \cup \{m\} = s(m)$$

定理 4.1.7 より、左が成り立つ。

右について、既に示した左を用いて、

$$m \in n \wedge n \subsetneq s(m)$$
$$m \subsetneq n \wedge n \subsetneq s(m)$$
$$\perp$$
$$n \subsetneq s(m) \to m \notin n$$

ゆえに、

$$n \subsetneq s(m) = m \cup \{m\}$$
$$n \subset m$$
$$n \subsetneq m \vee n = m$$

選言の一つ目について、仮定より、

$$n \subsetneq m$$
$$n \in m$$
$$n \in s(m)$$

選言の二つ目について、

$$n = m \to n \in s(m)$$

定理 4.1.7 より左が成り立つ。 ■

***Lem.* 4.2.4. 後者と順序**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \to s(n) \leq m)$$

Proof.

$n \leq m \wedge n \neq m$ より、$n \subsetneq m$

補題 4.2.3 より、$n \in m$。ゆえに、$s(n) = n \cup \{n\} \subset m$ ■

***Thm.* 4.2.5. 自然数の全順序**
$(\mathbb{N}, \leq)$ は全順序集合、すなわち以下を満たす。

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \leq m \vee m \leq n)$$

Proof.
$n = 0$ について、$\forall m(n \leq m)$ である。
ある $n \in \mathbb{N}$ で成り立つとすると、
$m \leq n$ のとき、$m \leq n \leq s(n)$
$n \leq m \wedge \neg(m \leq n)$ すなわち $n \leq m \wedge n \neq m$ のとき、補題 4.2.4 より、$s(n) \leq m$
定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 4.2.6. 自然数の順序の後者による保存**

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \to s(n) < s(m))$$

Proof.
$n < m \wedge s(m) \leq s(n)$ を仮定する。
$m < s(m)$ であるので、$m < s(n)$
ゆえに、$m \in s(n) = n \cup \{n\}$
したがって、$m \in n \vee m = n$
補題 4.2.3 より、$m \leq n$。矛盾する。
背理法より示される。 ■

***Thm.* 4.2.7. 最小値原理**
自然数 $\mathbb{N}$ の空でない部分集合 A は最小元を持つ。

Proof.
持たないと仮定する。
このとき、$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}(m \leq n \to m \notin A)$ を示す。
$n = 0$ のとき、$n \in A$ ならば仮定に反するので明らか。
ある n で成り立つとする。$s(n) \in A$ ならば $s(n)$ は A の最小元となるので、$s(n) \notin A$。
定理 4.1.7 を用いて上の命題が示されるので、$\forall n \in \mathbb{N}(n \notin A)$ が直ちに言える。
これは A が空でないことに反する。背理法より、示される。 ■

***Thm.* 4.2.8. 無限降下法**
アリティ *1* の述語記号 P について、

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}(m < n \wedge P(n) \to P(m)) \to \forall n \in \mathbb{N}(\neg P(n))$$

Proof.
$\exists n \in \mathbb{N}(P(n))$ とすると、$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ は空でない。定理 4.2.7 より、最小値 n_0 を持つ。
これは仮定に反するので、背理法より示される。 ■

4.3 自然数の加法

***Lem.* 4.3.1.**
以下で定める部分写像 $+$ は $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ について左全域的である。

$$\forall n\in\mathbb{N}(+((n,0)) \coloneqq n)$$
$$\forall n,m\in\mathbb{N}(+((n,s(m))) \coloneqq s(n+m))$$

Proof.
$\forall(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して、$+((n,m))$ が存在することを示す。
$m=0$ のとき定義より成り立つ。
ある m で成り立つとすると、定義より $(n,s(m))$ でも成り立つ。
定理 4.1.7 より、任意の m について示される。 ■

***Def.* 4.3.1. 自然数の加法**
補題 *4.3.1* より定まる写像を加法と呼び、$+$ で表す。
書き直して再掲する。

$$\forall n\in\mathbb{N}(n+0 \coloneqq n)$$
$$\forall n,m\in\mathbb{N}(n+s(m) \coloneqq s(n+m))$$

***Cor.* 4.3.2. *1* の和**

$$\forall n\in\mathbb{N}(s(n)=n+1)$$

***Lem.* 4.3.3. 自然数の加法の結合法則**

$$\forall n,m,l\in\mathbb{N}((n+m)+l=n+(m+l))$$

つまり上の等式の両辺は、$n+m+l$ と表記してもよい。

Proof.
$l=0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n+m)+0=(n+m)=n+m=n+(m+0)$$

ある l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n+m)+s(l)&=s((n+m)+l)\\&=s(n+(m+l))\\&=n+s((m+l))\\&=n+(m+s(l))\end{aligned}$$

定理 4.1.7 より、任意の l について示される。 ■

Lem. 4.3.4. 自然数の加法の単位元

$$\forall n \in \mathbb{N}(n + 0 = 0 + n = n)$$

Proof.

定義より、

$$n + 0 = n$$

$\forall n \in \mathbb{N}(0 + n = n)$ を示す。

$n = 0$ のとき、$0 + 0 = 0$ より満たす。

ある n で成り立つとき、

$$0 + s(n) = s(0 + n) = s(n)$$

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

Lem. 4.3.5.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(s(n) + m = s(n + m))$$

Proof.

$m = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$s(n) + 0 = s(n) = s(n + 0)$$

ある m について成り立つとき、

$$s(n) + s(m) = s(s(n) + m) = s(s(n + m)) = s(n + s(m))$$

定理 4.1.7 より、任意の m について示される。 ■

Lem. 4.3.6. 自然数の加法の交換法則

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n + m = m + n)$$

Proof.

$m = 0$ のとき、補題 4.3.4 より示される。

ある m で成り立つとき、補題 4.3.5 より、

$$n + s(m) = s(n + m) = s(m + n) = s(m) + n$$

定理 4.1.7 より、任意の m について示される。 ■

Lem. 4.3.7. 自然数の順序の加法による保存

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n < m \to n + l < m + l)$$

Proof.

$l = 0$ のとき、明らか。

ある l で成り立つとき、補題 4.2.6 より、

$$n + s(l) = s(n + l) < s(m + l) = m + s(l)$$

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

Lem. 4.3.8. 自然数の順序の加法による特徴づけ

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(m \leq n \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(m + k = n))$$

右について、この k は一意に定まる。

Proof.

左は、全順序性、補題 4.3.7、$\forall k \in \mathbb{N}(0 \leq k)$ を用いて、背理法より示される。

右について考える。

$n = 0$ のとき、$m = 0$ ならば $k = 0$ が存在。$m \neq 0$ ならば前件否定。

ある n で成り立つときを考える。$n < m \vee m \leq n$ である。

$n < m$ のとき、補題 4.2.4 より $s(n) \leq m$ である。$s(n) < m$ のとき前件否定より自明。$s(n) = m$ のとき、$k = 0$ で存在。

$m \leq n$ のとき、仮定より $\exists k \in \mathbb{N}(m + k = n)$

ゆえに、$m \leq s(n)$ かつ $s(n) = s(m + k) = m + s(k)$ となる。

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。

$k < k'$ とすると、補題 4.3.7 より矛盾。$k > k'$ でも同様より、示される。 ■

Def. 4.3.2. 自然数の減法

自然数 n, m について、$m \leq n$ であるとき、補題 *4.3.8* より一意に定まる k を $n - m$ と表す。

4.4 自然数の乗法

Lem. 4.4.1.

以下で定める部分写像 $\times$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について左全域的である。

$$\forall n \in \mathbb{N}(\times((n, 0)) \coloneqq 0)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}(\times((n, s(m))) \coloneqq n + \times((n, m)))$$

Proof.

$\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対して、$\times((n, m))$ が存在することを示す。

$m=0$ のとき定義より成り立つ。
ある m で成り立つとすると、定義と加法の定義より $(n,s(m))$ でも成り立つ。
定理 4.1.7 より、任意の m について示される。 ■

***Def.* 4.4.1. 自然数の乗法**
補題 *4.4.1* より定まる二項演算を乗法と呼び、$\times$ で表す。
書き直して再掲する。

$$\forall n \in \mathbb{N}(n \times 0 \coloneqq 0)$$
$$\forall n,m \in \mathbb{N}(n \times s(m) \coloneqq n + n \times m)$$

乗法 $\times$ は、加法 $+$ よりも先に演算される。
また、$m \times n$ を誤解のない範囲で mn と略記する。

***Lem.* 4.4.2. 左零元**

$$\forall n \in \mathbb{N}(0 \times n = 0)$$

Proof.
$n=0$ のとき、$0 \times 0 = 0$
ある n で成り立つとき、

$$0 \times s(n) = 0 + 0 \times n = 0 + 0 = 0$$

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 4.4.3. 自然数の乗法の単位元**

$$\forall n \in \mathbb{N}(n = n \times 1 = 1 \times n)$$

Proof.
左について $1 = s(0)$ より、

$$n \times 1 = n \times s(0) = n + n \times 0 = n + 0 = n$$

右について考える。
$n=0$ のとき、$1 \times 0 = 0$
ある n で成り立つとき、

$$1 \times s(n) = 1 + 1 \times n = 1 + n = s(n)$$

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

***Lem.* 4.4.4. 自然数の右分配法則**

$$\forall n,m,l \in \mathbb{N}((n+m) \times l = n \times l + m \times l)$$

Proof.

$l = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n + m) \times 0 = 0 = 0 + 0 = n \times 0 + m \times 0$$

あるlで成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n + m) \times s(l) &= n + m + (n + m) \times l \\ &= n + m + n \times l + m \times l \\ &= n \times s(l) + m \times s(l)\end{aligned}$$

定理 4.1.7 より、任意の l について示される。 ■

Lem. 4.4.5. 自然数の乗法の交換法則

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times m = m \times n)$$

Proof.

補題 4.4.2 より、$m = 0$ について、$n \times 0 = 0 \times n$

ある m で成り立つとき、

$$\begin{aligned}n \times s(m) &= n + n \times m \\ &= n + m \times n \\ &= m \times n + n \\ &= m \times n + 1 \times n \\ &= (m + 1) \times n \\ &= s(m) \times n\end{aligned}$$

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

Lem. 4.4.6. 自然数の乗法の結合法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n \times m) \times l = n \times (m \times l))$$

つまり上の等式の両辺は、$n \times m \times l$ と表記してもよい。

Proof.

$l = 0$ のとき、以下より成り立つ。

$$(n \times m) \times 0 = 0 = n \times 0 = n \times (m \times 0)$$

ある l で成り立つとき、

$$\begin{aligned}(n \times m) \times s(l) &= n \times m + (n \times m) \times l \\ &= n \times m + n \times (m \times l) \\ &= m \times n + (m \times l) \times n \\ &= (m + m \times l) \times n \\ &= n \times (m + m \times l) \\ &= n \times (1 \times m + l \times m) \\ &= n \times (s(l) \times m) \\ &= n \times (m \times s(l))\end{aligned}$$

定理 4.1.7 より、任意の l について示される。 ■

Lem. 4.4.7. 自然数の分配法則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n+m) \times l = n \times l + m \times l)$$
$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n \times (m+l) = n \times m + n \times l)$$

Proof.
右分配法則と交換法則より示される。 ■

Lem. 4.4.8. 自然数の順序の乗法による保存

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}((n \neq 0 \land m < l) \to n \times m < n \times l)$$

Proof.
$n = 0$ のとき、前件否定より明らか。
$n = 1$ のとき、1 が乗法の単位元であることから明らか。
ある $n \geq 1$ で成り立つとき、

$$s(n) \times m = n \times m + m < n \times m + l < n \times l + l = s(n) \times l$$

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

Lem. 4.4.9. 自然数の乗法の簡約則

$$\forall n, m, l \in \mathbb{N}(n \times m = n \times l \land n \neq 0 \to m = l)$$

Proof.
$m < l$ のとき、補題 4.4.8 より $n \times m < n \times l$。ゆえに、$n \times m \neq n \times l$。
$l < m$ のとき、同様に $n \times m \neq n \times l$。
背理法より示される。 ■

Lem. 4.4.10.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n \times m = 0 \to n = 0 \lor m = 0)$$

Proof.
$n = 0$ のとき自明。
$n \neq 0$ のとき、$n \times m = n \times 0$ より、自然数の乗法の簡約則から $m = 0$。 ■

4.5 自然数の除法

***Lem.* 4.5.1.**

$$\forall a, b \in \mathbb{N}(b \neq 0 \to \exists q, r \in \mathbb{N}(a = bq + r \wedge r < b))$$

Proof.
$a = 0$ のとき、$q = r = 0$ で成り立つ。
ある a で成り立つとき、すなわち n_a, r_a が存在するときを考える。
$r_a < b$ より、$s(r_a) \leq b$ である。
$s(r_a) < b$ のとき、$q_{s(a)} = n_a, r_{s(a)} = s(r_a)$ は仮定より満たす。
$s(r_a) = b$ のとき、$q_{s(a)} = s(n_a), r_{s(a)} = 0$ は仮定より満たす。
定理 4.1.7 より、任意の a について成り立つ。 ■

***Lem.* 4.5.2.**

$$\forall a, b \in \mathbb{N}(b \neq 0 \to \forall q, r, q', r' \in \mathbb{N}(a = qb + r \wedge r < b \wedge a = q'b + r' \wedge r' < b \to q = q' \wedge r = r'))$$

Proof.
$q < q'$ とすると補題 4.3.8 より、$\exists q_d \in \mathbb{N}(q + q_d = q' \wedge q_d \geq 1)$
このとき $a = bq + r = bq' + r'$ より、自然数の加法の簡約則から $r = bq_d + r'$
これは $r < b \leq bq_d \leq bq_d + r$ より矛盾。よって $q \geq q'$
同様に $q \leq q'$。したがって、$q = q'$
自然数の加法の簡約則から、$r = r'$
よって示される。 ■

***Def.* 4.5.1. 自然数の除法**
補題 *4.5.1*、補題 *4.5.2* より、以下の写像 $\div \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})}$ を定義できる。

$$a \div b = q \cdots r :\leftrightarrow a = bq + r$$

$\div((a, b))$ を $a \div b$ と、値域の元 (q, r) を $q \cdots r$ と表記するものとする。
特に、q を商、r を余りと呼ぶ。

***Def.* 4.5.2. 倍数**
自然数 n, m について、$n \div m$ の余りが 0 のとき、n は m の倍数、または m は n の約数と言う。

***Cor.* 4.5.3.**
任意の自然数 n について、0 は n の倍数であり、1 は n の約数である。また、n は n の倍数でも約数でもある。

5 集合論の補足

5.1 直積

***Thm.* 5.1.1.**
集合 X について、具体的な全単射 $\sigma \in \left(2^X\right)^{\mathfrak{P}(X)}$ が存在する。

Proof.
$x \in X$ について、以下のように σ を定める。

$$\sigma(A)(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

以下で定める σ^{-1} は逆写像である。

$$\sigma^{-1}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

定理 2.3.10 より全単射である。 ■

***Thm.* 5.1.2.**
集合 X, Y について、以下を満たす写像 $A \in \{X, Y\}^2$ を考える。

$$A(0) = X \wedge A(1) = Y$$

このとき具体的な全単射 $\sigma \in (\prod A)^{X \times Y}$ が存在する。

Proof.
$x \in X$ について、以下のように σ を定める。

$$\sigma(x, y)(n) = \begin{cases} x & (n = 0) \\ y & (n = 1) \end{cases}$$

以下で定める σ^{-1} は逆写像である。

$$\sigma^{-1}(f) = (f(0), f(1))$$

定理 2.3.10 より全単射である。 ■

***Thm.* 5.1.3.**
集合 X, Y, Z について、具体的な全単射 $\sigma \in (X \times (Y \times Z))^{((X \times Y) \times Z)}$ が存在する。

Proof.
$\sigma((x, y), z) = (x, (y, z))$ は全単射である。 ■

5.2 同値関係

***Def.* 5.2.1. 同値関係**
対称的な前順序を、同値関係と呼ぶ。同値関係であることを明示的に記号 $\sim$ で表す。

***Cor.* 5.2.1.**
等号は同値関係である。集合 X 上の同値関係であることを明示的に、$=_X$ で表す。

***Def.* 5.2.2. 同値類**

空でない集合 X 上で定義された同値関係 $\sim$ と、X の要素 a について、以下で定義された集合を a の同値類と呼ぶ。この a を特に代表元と呼ぶ。

$$[a] \coloneqq \{x \in X \mid x \sim a\}$$

***Cor.* 5.2.2.**

空でない集合 X 上で定義された同値関係 $\sim$ について、以下が成り立つ。

$$X = \bigsqcup \{[x] \mid x \in X\}$$

***Cor.* 5.2.3. 直積集合と自明な同値関係**

写像 $A \in Z^{\Lambda}$ について考える。

任意の λ について $A(\lambda)$ 上に同値関係 $\sim_{\lambda}$ が存在するとき、写像 A の直積集合 $\prod A$ 上の以下で定める関係 $\sim$ は、同値関係である。

$$f \sim f' :\leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda (f(\lambda) \sim_{\lambda} f'(\lambda))$$

***Def.* 5.2.3. 商集合**

同値関係の定義された空でない集合 X について、商集合を以下のように定める。

$$X/\sim \coloneqq \{[x] \mid x \in X\}$$

***Cor.* 5.2.4.**

集合 X について、以下が成り立つ。

$$(X/=_X) = X$$

***Def.* 5.2.4. 商写像**

写像 $[] \in (X/\sim)^X$ を商写像と呼ぶ。

***Cor.* 5.2.5.**

商写像は全射である。

***Def.* 5.2.5. 写像と同値関係の両立**

空でない集合 X と X 上の同値関係 $\sim_X$、集合 Y と Y 上の同値関係 $\sim_Y$ を考える。

写像 $f \in Y^X$ が同値関係 $\sim_X, \sim_Y$ と両立するとは、以下を満たすことである。

$$\forall x_1, x_2 \in X(x_1 \sim x_2 \to f(x_1) \sim_Y f(x_2))$$

***Def.* 5.2.6. 写像に付随する同値関係**

写像 $f \in Y^X$ について、以下で定める X 上の関係 $\sim_f$ は同値関係であり、これを写像 f に付随する同値関係と呼ぶ。

$$x \sim_f y :\leftrightarrow f(x) = f(y)$$

***Cor.* 5.2.6.**

写像 $f \in Y^X$ について、f は $\sim_f, =_Y$ と両立する。

***Thm.* 5.2.7. 両立**

空でない集合 X と X 上の同値関係 $\sim_X$、空でない集合 Y と Y 上の同値関係 $\sim_Y$ について、写像 $f \in Y^X$ が $\sim_X, \sim_Y$ と両立することは、以下と必要十分である。

$$\exists h \in (Y/\sim_Y)^{X/\sim_X}([]_Y \circ f = h \circ []_X)$$

さらに、上で定まる写像 h は一意である。

Proof.

$[]_X$ は全射より、右逆写像 r が存在する。

まず、必要性を示す。$h := []_Y \circ f \circ r$ を考える。

今、仮定より以下を満たす。

$$\forall x \in X/\sim_X \ \forall z, w \in x([f(z)]_Y = [f(w)]_Y)$$

ゆえに、$[]_Y \circ f = h \circ []_X$ を満たす。

十分性を示す。$\forall x, y \in X$ について、$x \sim_X y$ ならば、$[f(x)]_Y = h([x]_X) = h([y]_X) = [f(y)]_Y$

よって、$f(x) \sim_Y f(y)$

一意であることを示す。2 つ存在すると仮定すると、$h \circ []_X = h' \circ []_X$

右から r をかけて、$h = h'$。 ■

***Thm.* 5.2.8. 標準分解**

写像 $f \in Y^X$ について、全単射 $\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{X/\sim_f}$ が存在する。

Proof.

定理 5.2.7 より、写像 $h \in Y^{X/\sim_f}$ が存在して、$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(f)$。

単射であることを示す。$h([x]) = h([y])$ のとき、$f(x) = f(y)$ より、$[x] = [y]$

写像 $\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{X/\sim_f}$ は全射となる。 ■

5.3 有限

***Def.* 5.3.1. 有限集合**

集合 X について、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して全単射 $f \in X^n$ が構成できるとき、X を有限集合と呼ぶ。または、単に X は有限であると呼ぶ。

***Lem.* 5.3.1. 全射と要素数**

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ について、n から m への全射が存在するならば、$m \leq n$

Proof.

$n = 0$ のとき、$m \neq 0$ ならば全射が存在しない。$m = 0$ より示される。

ある n で成り立つとき、全射 $f \in m^{s(n)}$ が存在することを考える。
$0^{s(n)} = \varnothing$ より、$m \neq 0$ である。
$\exists k \in n(f(k) = f(n))$ のとき、自明な全射 $f|_n$ を構成できて、仮定より $m \leq n \leq s(n)$
$\forall k \in n(f(k) \neq f(n))$ のとき、以下のような全射 $g \in p(m)^n$ を構成できる。

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) < f(n)) \\ p(f(x)) & (f(x) > f(n)) \end{cases}$$

仮定より $p(m) \leq n$ より、$m = s(p(m)) \leq s(n)$

定理 4.1.7 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Lem.* 5.3.2. 単射と要素数**

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ について、n から m への単射が存在するならば、$n \leq m$

Proof.

$n = 0$ のとき、明らか。
$n \neq 0$ のとき、定理 2.3.6 より m から n への左逆写像すなわち全射を構成できて、補題 5.3.1 より $n \leq m$ ■

***Thm.* 5.3.3. 鳩の巣原理**

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ について、$m < n$ ならば n から m への単射が存在しない。

Proof.

補題 5.3.2 の対偶である。 ■

***Lem.* 5.3.4.**

有限集合 X について、全単射 $f \in X^n$ が構成できる自然数 $n \in \mathbb{N}$ は一意に定まる。

Proof.

補題 5.3.1、補題 5.3.2 より、背理法より示される。 ■

***Def.* 5.3.2. 要素数**

有限集合 X について、補題 *5.3.4* より主張される自然数を要素数 $|X|$ と呼ぶ。

また、集合 X が有限集合であることを主張するときは、アリティ *1* の述語記号 $|X| < \infty$ を用いる。

***Lem.* 5.3.5. 単射と有限**

自然数 n と集合 A について、以下の 2 つは同値である。

1. A は有限集合であり、$|A| \leq n$

2. 単射 $f \in n^A$ が存在する。

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

全単射 $f_1 \in |A|^A$ が存在して、単射 $f_2 \in n^{|A|}$ が存在する。

ゆえに、単射 $f_2 \circ f_1 \in n^A$ が存在する。

2. $\to$ 1. を示す。

$n = 0$ のとき、$n^A \neq \varnothing$ より、$A = \varnothing$ である。

ある n について成り立つとする。

$\forall a \in A(f(a) \neq n)$ のとき、自明な単射 $\widetilde{f} \in n^A$ が存在する。よって $|A| \leq n \leq s(n)$

$\exists a \in A(f(a) = n)$ のとき、単射 $\widetilde{f} \in n^{A \setminus \{a\}}$ が構成できる。

仮定より $\exists m \in \mathbb{N}(m \leq n)$ であり、全単射 $g \in m^{A \setminus \{a\}}$ が存在する。

ここで、以下のような全単射 $h \in s(m)^A$ を構成できる。

$$h(x) = \begin{cases} m & (x = a) \\ g(f(x)) & (x \neq a) \end{cases}$$

$|A| = s(m) \leq s(n)$ を得るので成り立つ。 ■

***Cor.* 5.3.6.**

有限集合の像は有限集合である。

有限集合の部分集合は有限集合である。

有限集合の商集合は有限集合である。

有限集合の冪集合は有限集合である。

有限集合の直積集合は有限集合である。

***Lem.* 5.3.7. 要素数の和**

有限集合 X, Y について、$X \cap Y = \varnothing$ ならば、$X \cup Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|$$

Proof.

X, Y は有限より、全単射 $f \in X^{|X|}, f' \in Y^{|Y|}$ が存在する。

ゆえに、以下のような全単射 $g \in (X \cup Y)^{|X|+|Y|}$ を構成できる。

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & (x < |X|) \\ g'(x - |X|) & (|X| \leq x < |X| + |Y|) \end{cases}$$

■

***Lem.* 5.3.8. 要素数の和**

有限集合 X, Y について、$X \cup Y, X \cap Y$ は有限集合となり、以下が成り立つ。

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$$

Proof.

単射 $f \in X^{X \cap Y}$ が構成できるので、補題 5.3.5 より $X \cap Y$ は有限集合である。

補題 5.3.8 より、$|X| = |X \cap Y| + |X \setminus Y|$

補題 5.3.8 より、$|X \cup Y| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y|$

したがって、$|X \cup Y| + |X \cap Y| + |X \setminus Y| = |X \setminus Y| + |Y| + |X|$

定義 4.3.2 より成り立つ。 ■

***Thm.* 5.3.9. 有限有向集合の上界**

空でない有向集合の有限部分集合 A は、上界を持つ。

Proof.

$|A| = 1$ のとき、A は唯一つの元を持ち、上界である。

$|A| = 2$ のとき、$a_0 \neq a_1$ を用いて $A = \{a_0, a_1\}$ と書ける。有向集合であることより上界が存在する。

$|A| = n$ のとき成り立つとする。

$|A| = s(n)$ について、A のある元 a を考える。集合 $A \setminus \{a\}$ は要素数が n であるため、仮定より上界 a_n を持つ。

ゆえに、今、集合 $\{a, a_n\}$ は上界 $a_{s(n)}$ を持ち、推移律から A の上界となる。

要素数 $|A|$ について、定理 4.1.7 より示される。 ■

***Thm.* 5.3.10. 有限全順序集合の最大元**

空でない全順序集合の有限部分集合 A は、最大元と最小元を持つ。

Proof.

$|A| = 1$ のとき、A は唯一つの元を持ち、最大元かつ最小元である。

$|A| = 2$ のとき、$a_0 \neq a_1$ を用いて $A = \{a_0, a_1\}$ と書ける。全順序性より $a_0 > a_1 \vee a_0 < a_1$ である。

$a_0 > a_1$ のとき、最大元 a_0、最小元 a_1 である。$a_0 < a_1$ のとき、最大元 a_1、最小元 a_0 である。

$|A| = n$ のとき成り立つとする。

$|A| = s(n)$ について、A のある元 a を考える。集合 $A \setminus \{a\}$ は要素数が n であるため、仮定より最大元 $a_{\max}$ と最小元 $a_{\min}$ を持つ。

ゆえに、A は最大元 $\max\{a, a_{\max}\}$ を持ち、A は最小元 $\min\{a, a_{\min}\}$ を持つ。

要素数 $|A|$ について、定理 4.1.7 より示される。 ■

***Thm.* 5.3.11. 自然数の上界と有限**

$\mathbb{N}$ の部分集合 A について、A が上に有界ならば A は有限である。

Proof.

上界 n について考える。

$n=0$ のとき、$A \neq \varnothing$ ならば全射が存在しないので、示される。
ある n で成り立つとき、A が有限であることを考える。
$s(n)$ が上界で、n が上界でないとき、$s(n) \in A$ である。
仮定より、$\exists m \in \mathbb{N}$ で、全単射 $f_0 \in (A \setminus \{s(n)\})^m$ が存在する。
したがって、以下のような全単射 $f \in A^{s(m)}$ を構成できる。

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & (x \neq m) \\ s(n) & (x = m) \end{cases}$$

定理 4.1.7 より、任意の n について成り立つ。 ■

5.4 可算

***Def.* 5.4.1. 可算**
集合 X について、X が空集合または全射 $f \in X^{\mathbb{N}}$ が存在するとき、X を可算集合と呼ぶ。または、単に X は可算であると呼ぶ。
また、集合 X が可算集合であることを主張するときは、アリティ *1* の述語記号 $|X| \leq \aleph_0$ を用いる。

***Cor.* 5.4.1.**
可算集合の部分集合は可算集合である。

***Def.* 5.4.2. 有限列**
自然数 $n \in \mathbb{N}$ から集合 X へのネットを、X 上の有限列、または組、n-組と呼ぶ。

***Def.* 5.4.3. 点列**
自然数 $\mathbb{N}$ から集合 X へのネットを、X 上の点列と呼ぶ。

***Def.* 5.4.4. 点列の部分列**
単射な写像 $\varphi\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を用いて表せる部分ネット $\left(x_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ を点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列と呼ぶ。

***Def.* 5.4.5. 単調列**
全順序集合 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、以下のいずれかを満たす点列を単調列と呼ぶ。

$$\forall n \in \mathbb{N}\bigl(x_n < x_{s(n)}\bigr)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\bigl(x_n \leq x_{s(n)}\bigr)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\bigl(x_n > x_{s(n)}\bigr)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\bigl(x_n \geq x_{s(n)}\bigr)$$

特にそれぞれ、第一式を満たす点列を狭義単調増加列、第二式を広義単調増加列、第三式を狭義単調減少列、第四式を広義単調減少列と呼ぶ。

***Thm.* 5.4.2. 無限集合は可算部分を含む**

有限でない集合 X について、単射 $a \in X^{\mathbb{N}}$ が存在する。

Proof.

$\forall A \in \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \exists a \in A (a \in A)$ である。

定理 2.2.3 より定まる写像 $f \in X^{\mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}}, f(X) \in A$ を考える。

X は空でないので、$\exists a_0 \in X$ である。

$\forall n \in \mathbb{N}$ について、点列 $a_{s(n)} \coloneqq f(X \setminus \{a_0, \cdots, a_n\})$ を考えることができる。

なぜなら、$\exists n \in \mathbb{N}(X \setminus \{a_0, \cdots, a_n\} = \varnothing)$ とすると、X は有限となり仮定に反する。

定義より $\forall n, m \in \mathbb{N}(a_n \neq a_m)$

単射 $a \in X^{\mathbb{N}}$ を持つ。 ■

***Thm.* 5.4.3. 自然数の直積は可算**

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算である。

Proof.

全単射 $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}, \varphi(n, m) = ((n+m) \times (n+m+1)) \div 2 + n$ が存在する。

ただし、$a \div b$ を除算の商を表すものとする。 ■

***Thm.* 5.4.4. *Bernstein* の定理**

集合 A, B について、A から B への単射 f が存在して、B から A の単射 g が存在するならば、A から B への全単射が存在する。

Proof.

以下のような点列 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。

$$\begin{cases} C_0 \coloneqq A \setminus g(B) \\ C_{s(n)} \coloneqq g(f(C_n)) \end{cases}$$

点列の値域全体の和集合 $C \coloneqq \bigcup \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考える。

今、定理 1.7.15 より $A \setminus C \subset g(B)$ と、g の単射性から、以下のような写像 $h \in B^A$ が構成できる。

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & (x \in C) \\ g^{-1}(x) & (x \in A \setminus C) \end{cases}$$

単射でないと仮定すると、$x \in C_n \land y \in A \setminus C$ について、

$$h(x) = h(y) \to g(f(x)) = y \in C_{s(n)}$$

矛盾するので、背理法より単射。

$D \coloneqq \bigcup \left\{C_{s(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ について、$D \subset g(B)$ であり、定理 2.2.4 より、

$$g^{-1}(D) = \bigcup \left\{g^{-1}(C_{s(n)}) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup \{f(C_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = f(C)$$

今、$g(B) \subset A$ より、

$$A \setminus C = A \setminus (C_0 \cup D) = (A \setminus C_0) \setminus D = (A \setminus (A \setminus g(B))) \setminus D = g(B) \setminus D$$

したがって g の単射性と定理 2.2.6 より

$$h(A \setminus C) = g^{-1}(A \setminus C) = g^{-1}(g(B) \setminus D) = B \setminus g^{-1}(D) = B \setminus f(C)$$

ゆえに全射。 ■

***Thm.* 5.4.5. 濃度の比較可能定理**
集合 A, B について、単射 $f \in B^A$ または単射 $f' \in A^B$ が存在する。

Proof.
以下で定義する半順序集合 $(\mathcal{M}, \subset)$ を考える。

$$\mathcal{M} \coloneqq \{G \in \mathfrak{P}(X \times Y) \mid \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(x_1 = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2)\}$$

$\mathcal{M}$ の全順序部分 C を考える。
$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bigcup C \exists G_1, G_2 \in C((x_1, y_1) \in G_1 \wedge (x_2, y_2) \in G_2)$ である。
ここで $G_1 \subset G_2 \vee G_2 \subset G_1$ より、$x_1 = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2$ である。
ゆえに、$\bigcup C \in \mathcal{M}$ は上界である。
したがって、$\mathcal{M}$ は帰納的である。

定理 3.4.5 より、極大元 G_0 が存在する。
G_0 によって特徴づけられる二項関係 R_0 を考える。
$\exists (x, y) \in (A \setminus \mathrm{dom}(R)) \times (B \setminus \mathrm{ran}(R))$ とする。
このとき、$G_1 = \{(x, y)\} \cup G_0 \in \mathcal{M}$ となるので、G_0 の極大性に反する。

ゆえに、$A = \mathrm{dom}(R) \vee B = \mathrm{ran}(R)$ である。
$A = \mathrm{dom}(R)$ のとき、G_0 の特徴づける写像は単射である。
$B = \mathrm{ran}(R)$ のとき、G_0 の特徴づける写像は全射である。定理 2.3.8 より単射な右逆写像が存在する。 ■

6 代数

6.1 マグマ

***Def.* 6.1.1. 二項演算**

集合 X について、写像 $\cdot \in X^{X^2}$ を、X 上の二項演算、または X 上の演算と呼ぶ。
$\cdot(a,b)$ を誤解のない範囲で $a \cdot b$ とも表す。

***Def.* 6.1.2. マグマ**

集合 M と M 上の演算 $\cdot$ について、順序対 $(M,\cdot)$ をマグマと呼ぶ。または単に M と書き、マグマを表すものとする。

***Def.* 6.1.3. 可換マグマ**

マグマ $(M,+)$ が以下を満たすとき、M を可換マグマと呼ぶ。可換であることを明示的に $+$ で表す。

$$\forall x, y \in M(x + y = y + x)$$

6.2 マグマと準同型

***Def.* 6.2.1. マグマ準同型**

マグマ $(M_1, \cdot_{M_1}), (M_2, \cdot_{M_2})$ について以下を満たす写像 $\varphi \in M_2^{M_1}$ が存在するとき、φ をマグマ準同型写像、または単にマグマ準同型と呼ぶ。

$$\forall x, y \in M_1(\varphi(x) \cdot_{M_2} \varphi(y) = \varphi(x \cdot_{M_1} y))$$

また、$(M_1, \cdot_{M_1}) = (M_2, \cdot_{M_2})$ であるとき、マグマ自己準同型と呼ぶ。

***Cor.* 6.2.1.**

マグマ M_1, M_2, M_3 と、マグマ準同型 $f \in M_2^{M_1}, g \in M_3^{M_2}$ について、合成写像 $g \circ f$ はマグマ準同型である。

***Def.* 6.2.2. 埋め込み**

単射なマグマ準同型を埋め込みと呼ぶ。

***Def.* 6.2.3. マグマ同型**

全単射なマグマ準同型写像を、マグマ同型写像、または単にマグマ同型と呼ぶ。

***Cor.* 6.2.2.**

マグマ M について、恒等写像 id_M はマグマ同型である。

***Def.* 6.2.4. マグマ準同型の全体**

マグマ M_1, M_2 について、M_1 から M_2 へのマグマ準同型写像全体のなす集合を、$\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ と表す。
また、自己準同型写像の全体を $\mathrm{End}(M) \coloneqq \mathrm{Hom}(M, M)$ と表す。

6.3 マグマと準同型定理

***Def.* 6.3.1. 部分マグマ**

マグマ $(M, \cdot)$ と、集合 S、以下を満たす制限写像 $\cdot$ について、順序対 $(S, \cdot)$ を M の部分マグマと呼ぶ。

$$S \subset M \wedge \forall x, y \in S(x \cdot y \in S)$$

***Cor.* 6.3.1.**

マグマ M_1, M_2 と、マグマ準同型 $f \in M_2^{M_1}$ について、像 $f(M_1)$ は M_2 の部分マグマである。

***Def.* 6.3.2. 商マグマ**

マグマ $(M, \cdot)$ を考える。
系 *5.2.3* の意味で演算 $\cdot$ と両立する同値関係 $\sim$ について、定理 *5.2.7* より定める演算 $\cdot'$ が存在する。
このとき、マグマ $(M/\sim, \cdot')$ をマグマ M の商マグマと呼ぶ。

***Cor.* 6.3.2.**

マグマ $(M, \cdot)$ と、その商マグマ $(M/\sim, \cdot)$ について、商写像 $[]$ はマグマ準同型である。

***Thm.* 6.3.3. マグマ準同型定理**

マグマ $(M_1, \cdot_{M_1}), (M_2, \cdot_{M_2})$ とマグマ準同型 $f \in M_2^{M_1}$、および f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、マグマ同型 $\overline{f} \in (\mathrm{Im}(f), \cdot_{M_2})^{(M_1/\sim_f, \cdot)}$ が存在する。

Proof.

定理 5.2.8 より全単射な $\overline{f}$ が存在して、$f = \overline{f} \circ []$
ゆえに、

$$\overline{f}([x] \cdot [y]) = \overline{f}([x \cdot_{M_1} y]) = f(x \cdot_{M_1} y) = f(x) \cdot_{M_2} f(y) = \overline{f}([x]) \cdot_{M_2} \overline{f}([x])$$

したがってマグマ準同型。 ■

6.4 半群

***Def.* 6.4.1. 半群**

マグマ $(S, \cdot)$ が以下を満たすとき、半群と呼ぶ。

$$\forall x, y, z \in S((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

***Thm.* 6.4.1. 一般結合法則**
半群 $(S,\times)$ について、S の 2 以上の $n\in\mathbb{N}$ コの元の演算結果 $a_0\times a_1\times\cdots\times a_{n-1}$ は、括弧の付け方によらず $(\cdots(a_0\times a_1)\times\cdots\times a_{n-1})$ に等しい。

Proof.
帰納的に示される。 ■

***Def.* 6.4.2. 可換半群**
半群が可換マグマであるとき、可換半群と呼ぶ。

***Thm.* 6.4.2. 一般交換法則**
可換半群 $(S,+)$ と点列 $a\in S^n$ を考える。任意の全単射 $\sigma\in n^n$ について、以下が成り立つ。

$$a_{\sigma(0)}+a_{\sigma(1)}+\cdots+a_{\sigma(n-1)}=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$$

Proof.
帰納的に示される。 ■

***Cor.* 6.4.3.**
半群の部分マグマは半群である。

***Cor.* 6.4.4.**
半群の商マグマは半群である。

6.5 モノイド

***Def.* 6.5.1. モノイド**
半群 $(M,\cdot)$ が以下を満たすとき、モノイドと呼ぶ。

$$\exists e\in M\forall x\in M(e\cdot x=x\cdot e=x)$$

***Lem.* 6.5.1.**
上の定義の主張する e は群に対して一意に定まる。

Proof.
e_1,e_2 の二つが存在するとすると、直ちに矛盾する。

$$e_1=e_1e_2=e_2$$

■

***Def.* 6.5.2. 単位元**

補題 *6.5.1* より一意に定まる e をモノイドの単位元と呼ぶ。
モノイド M の単位元であることを明示するために、e_M とも表す。

***Def.* 6.5.3. 可逆元の全体**

モノイド $(M, \cdot)$ について、集合 $M^\times$ を以下のように定義する。

$$M^\times = \{x \in M \mid \exists y \in M(x \cdot y = y \cdot x = e)\}$$

また、$M^\times$ の元を可逆元と呼ぶ。

***Lem.* 6.5.2.**

定義 *6.5.3* の主張する元 y は元 x に対して一意に定まる。

Proof.

y_1, y_2 の二つが存在するとすると、直ちに矛盾する。

$$y_1 = e \cdot y_1 = (y_2 \cdot x) \cdot y_1 = y_2 \cdot (x \cdot y_1) = y_2 \cdot e = y_2$$

■

***Def.* 6.5.4. 逆元**

補題 *6.5.2* より一意に定まる y を元 x の逆元と呼び、x^{-1} で表す。
さらに、$x \cdot y^{-1}$ を x/y と略記する。

***Cor.* 6.5.3.**

モノイド M とその単位元 e について、

$$e^{-1} = e \wedge \forall x \in M^\times \left(\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \right)$$

***Def.* 6.5.5. 可換モノイド**

モノイドが可換マグマであるとき、可換モノイドと呼ぶ。
可換モノイドの場合、可換であることを明示的に、単位元を 0、逆元を $-x$、演算 x/y を $x - y$ とも表す。

6.6 モノイドと準同型

***Def.* 6.6.1. モノイド準同型**

モノイド M_1, M_2 について、マグマ準同型 $\varphi \in M_2^{M_1}$ が以下を満たすとき、φ をモノイド準同型写像、または単にモノイド準同型と呼ぶ。

$$\varphi(e_{M_1}) = e_{M_2}$$

***Cor.* 6.6.1. モノイド準同型の合成**
モノイド M_1, M_2, M_3 と、モノイド準同型 $f \in M_2^{M_1}, g \in M_3^{M_2}$ について、合成写像 $g \circ f$ はモノイド準同型である。

***Def.* 6.6.2. 核**
モノイド準同型 $\varphi \in M_2^{M_1}$ について、以下の原像を核と呼び、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ と表す。

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \coloneqq \varphi^{-1}(\{e_{M_2}\})$$

***Def.* 6.6.3. モノイド同型**
全単射なモノイド準同型写像を、モノイド同型写像、または単にモノイド同型と呼ぶ。

***Thm.* 6.6.2. 自己写像の全体**
集合 X について、順序対 $\left(X^X, \circ\right)$ はモノイドである。

Proof.
自明にマグマである。系 2.2.2 より、半群。
id_X は単位元となるので、モノイドである。 ■

***Thm.* 6.6.3. 自然数は可換モノイド**
$(\mathbb{N}, +)$ は可換モノイドである。
$(\mathbb{N}, \times)$ は可換モノイドである。

Proof.
補題 4.3.3、補題 4.3.4、補題 4.3.6 より、$(\mathbb{N}, +)$ は可換モノイドである。

補題 4.4.6、補題 4.4.3、補題 4.4.5 より、$(\mathbb{N}, \times)$ は可換モノイドである。 ■

6.7 モノイドと準同型定理

***Def.* 6.7.1. 部分モノイド**
モノイド M の部分マグマ A が、モノイドをなすとき、A を部分モノイドと呼ぶ。

***Cor.* 6.7.1. 部分モノイドの判定**
モノイド M の部分マグマ A について、A が部分モノイドであることは以下が成り立つことと必要十分である。

$$e \in A$$

***Cor.* 6.7.2.**

モノイド M について、$M^\times$ は部分モノイドである。

***Cor.* 6.7.3.**

モノイド準同型 $\varphi \in M_2^{M_1}$ について、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は M の部分モノイドである。

***Cor.* 6.7.4.**

モノイドの商マグマはモノイドである。$[e]$ を単位元として持つ。

***Thm.* 6.7.5. モノイド準同型定理**

モノイド M_1, M_2 と、モノイド準同型 $f \in M_2^{M_1}$、f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、モノイド同型 $\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{M_1/\sim_f}$ が存在する。

Proof.

$\mathrm{Im}(f)$ は M_2 の部分モノイドである。

定理 6.3.3 より、得る $\overline{f}$ はマグマ同型。

今、$\overline{f}([e_{M_1}]) = f(e_{M_1}) = e_{M_2}$ であるので、示される。 ■

***Thm.* 6.7.6. 自己準同型の全体**

マグマ M について、順序対 $(\mathrm{End}(M), \circ)$ はモノイド $\left(X^X, \circ\right)$ の部分モノイドである。

Proof.

自明に部分である。

系 6.6.1 よりマグマである。系 2.2.2 より、半群。

id_X は単位元となるので、モノイドである。 ■

6.8 指数と総乗

***Lem.* 6.8.1.**

モノイド $(M, \cdot)$ について、以下のように帰納的に定める部分写像 $\prod$ は $M^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ について左全域的である。

$$\forall (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} \left(\prod \left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, 0\right) \coloneqq e \right)$$
$$\forall (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} \forall n \in \mathbb{N} \left(\prod \left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, s(n)\right) \coloneqq \prod \left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, n\right) \cdot x_n \right)$$

Proof.

$\forall \left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, n\right) \in M^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ に対して、$\prod \left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, n\right)$ が存在することを示す。

$n = 0$ のとき定義より成り立つ。

ある n で成り立つとすると、定義より $\prod \left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, s(n)\right)$ でも成り立つ。

定理 4.1.7 より、任意の n について示される。 ■

Def. 6.8.1. 総乗記号

補題 *6.8.1* より定まる写像 $\prod \in M^{M^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}}$ を総乗記号と呼ぶ。
また、$\prod\left((x_m)_{m\in\mathbb{N}}, n\right)$ を誤解のない範囲で $\prod_{m\in n} x_m$ と略記する。
書き直して再掲する。

$$\forall (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}\left(\prod_{m\in 0} x_m \coloneqq e\right)$$

$$\forall (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} \forall n \in \mathbb{N}\left(\prod_{m\in s(n)} x_m \coloneqq \left(\prod_{m\in n} x_m\right) \cdot x_n\right)$$

可換モノイドであるとき、可換であることを明示的に $\sum$ を、$\prod$ の代わりに用いる。

Def. 6.8.2. 総和記号

可換モノイド $(M, +)$ と、その部分集合 X について、以下を満たすとする。ただし、0 は単位元とする。

$$\exists A \in \mathfrak{P}(X)(|A| < \infty \wedge \forall x \in X \setminus A(x = 0))$$

このとき、全単射 $\sigma \in A^{|A|}$ が存在する。集合についての総和記号を以下のように定義する。定理 *6.4.2* から一意に定まる。

$$\sum X \coloneqq \sum_{m\in|A|} a_m$$

Def. 6.8.3. 指数

モノイド M について、以下の写像 $\hat{} \in M^{M\times\mathbb{N}}$ を指数と呼ぶ。

$$\hat{}(x, n) \coloneqq \prod_{m\in n} x$$

指数 $\hat{}$ は、演算 $\cdot$ よりも先に計算される。
また、$\hat{}(x, n)$ を誤解のない範囲で x^n と略記する。

Lem. 6.8.2. モノイド上の指数法則

モノイド $(M, \cdot)$ について、以下の 2 つのモノイド準同型が存在する。

1. $\forall x \in M$ について、$\sigma \in M^{(\mathbb{N},+)}$ であり、$\sigma(n) = x^n$
2. $\tau \in \mathrm{End}(M)^{(\mathbb{N},\times)}$ であり、$\tau(n)(x) = x^n$

Proof.

1. を示す。
$x^{n+0} = x^n = x^n \cdot 1_M = x^n \cdot x^0$ である。
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ であるとき、$x^{n+s(m)} = x^{s(n+m)} = x^{n+m} \cdot x = x^n \cdot x^m \cdot x = x^n \cdot x^{s(m)}$ である。
定理 4.1.7 より、任意の m について成り立つ。
$x^0 = 1_M$ より単位元を保つので、モノイド準同型。

2. を示す。

$x^{n\times 0} = x^0 = 1_M = (x^n)^0$ である。

$x^{n\times m} = (x^n)^m$ であるとき、$x^{n\times s(m)} = x^{n\times m+n} = x^{n\times m}\cdot x^n = (x^n)^m \cdot x^n = (x^n)^{s(m)}$ である。

定理 4.1.7 より、任意の m について成り立つ。

$\tau(1)$ は $\mathrm{End}(M)$ の単位元であるので、モノイドである。 ■

7 群論

7.1 群

***Def.* 7.1.1. 群**
モノイド $(G, \cdot)$ が以下を満たすとき、群と呼ぶ。

$$G = G^\times$$

以降、誤解のない範囲で、$x \cdot y$ を xy と略記する。

***Cor.* 7.1.1.**
モノイド M について、$M^\times$ は群である。

***Def.* 7.1.2. 自明群**
要素数が 1 の群を自明群と呼ぶ。

***Def.* 7.1.3. 可換群**
群が可換マグマであるとき、可換群と呼ぶ。

***Lem.* 7.1.2. 群の条件**
以下を満たすマグマ G は群である。

$$\exists e \in G \forall x \in G (xe = x)$$
$$\forall x \in G \exists x' \in G (xx' = e)$$

Proof.
e が単位元であることを示す。

$$ex = e(xe) = e(x(x'x'')) = e(xx')x'' = eex'' = (xx')ex'' = x(x'e)x'' = xx'x'' = x(x'x'') = xe = x$$

左逆元であることを示す。

$$x'x = x'(xe) = x'(x(x'x'')) = x'(xx')x'' = x'ex'' = yz = e$$

■

7.2 群と準同型

***Def.* 7.2.1. 群準同型**
群 G_1, G_2 について以下を満たすモノイド準同型 $\varphi \in G_2^{G_1}$ が存在するとき、φ を群準同型写像、または単に群準同型と呼ぶ。

$$\forall x \in G_1 \big(\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\big)$$

***Lem.* 7.2.1. マグマ準同型は群準同型**

群 G_1, G_2 について、マグマ準同型 $\varphi \in G_2^{G_1}$ は群準同型である。

Proof.

モノイド準同型であることを示す。

$$e' = \varphi(e)\varphi(e)^{-1} = \varphi(e)\varphi(e^{-1}) = \varphi(ee^{-1}) = \varphi(e)$$

群準同型であることを示す。

$$\varphi(x)^{-1} = \varphi(e)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}x)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\varphi(x)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\varphi(e) = \varphi(x^{-1})$$

■

***Thm.* 7.2.2. 群準同型の単射性**

群準同型 $\varphi \in G_2^{G_1}$ が単射であることは、以下と必要十分である。

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$$

Proof.

十分性は、単射性より示される。

必要性を示す。$\forall x, y \in G_1 \land \varphi(x) = \varphi(y)$ について、

$$e' = \varphi(e) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = \varphi(yx^{-1})$$

ゆえに $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ で、$x = y$。すなわち単射。 ■

***Def.* 7.2.2. 群同型**

群準同型 $\varphi \in G_2^{G_1}$ が全単射であるとき、これを群同型写像、または単に群同型と呼ぶ。

また、G_1 から G_2 への群同型写像が存在するとき、$G_1 \cong G_2$ と表す。

***Def.* 7.2.3. 自己同型群**

マグマ M について、$\mathrm{End}(M)^\times$ をは群をなす。これを自己同型群と呼び、$\mathrm{Aut}(M)$ と表す。

***Thm.* 7.2.3. 可換群上の準同型全体**

可換群 G, H について、$\mathrm{Hom}(G, H)$ 上の以下の演算 $+'$ を考える。このとき、順序対 $(\mathrm{Hom}(G, H), +')$ は可換群をなす。

$$(f +' g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$$

Proof.

H が可換マグマであることから、$\mathrm{Hom}(G, H)$ は可換マグマである。

写像 $0_{\mathrm{Hom}(G,H)} \in H^G, 0_{\mathrm{Hom}(G,H)}(x) = 0_H$ は群準同型であるので、単位元。

写像 $f_{\mathrm{minus}} \in H^G, f_{\mathrm{minus}}(x) = -f(x)$ は群準同型であるので、逆元。 ■

7.3 群と準同型定理

***Def.* 7.3.1. 部分群**
群 G の部分モノイド H が以下を満たすとき、H は群となり、群 H を群 G の部分群と呼ぶ。

$$\forall x \in H\bigl(x^{-1} \in H\bigr)$$

***Lem.* 7.3.1. 部分群の判定**
群 G の部分集合 H が部分群であることは、以下と必要十分である。

$$H \neq \varnothing \land \forall x, y \in H\bigl(xy^{-1} \in H\bigr)$$

Proof.
必要性を示す。
空でないので、$\exists x \in H\bigl(e = xx^{-1} \in H\bigr)$
ゆえに、$\forall x \in H\bigl(x^{-1} = ex^{-1} \in H\bigr)$
したがって、$\forall x, y \in H\Bigl(xy = x\bigl(y^{-1}\bigr)^{-1} \in H\Bigr)$
結合法則も自明に満たす。

十分性を示す。
単位元の存在より、空でない。部分群より、$\forall y \in H\bigl(y^{-1} \in H\bigr)$。ただちに、$\forall x, y \in H\bigl(xy^{-1}\bigr) \in H$ ■

***Cor.* 7.3.2.**
群の商マグマは群である。$\bigl[x^{-1}\bigr]$ を逆元として持つ。

***Lem.* 7.3.3. 部分群の定める同値関係**
群 G とその部分群 H について、以下で定める関係 $\sim$ は同値関係である。

$$\forall x, y \in G\bigl(x \sim y :\leftrightarrow x^{-1}y \in H\bigr)$$

Proof.
$x^{-1}x = e \in H$ より反射律を満たす。
$x^{-1}y \in H \to y^{-1}x = \bigl(x^{-1}y\bigr)^{-1} \in H$ より対称律を満たす。
$x^{-1}y, y^{-1}z \in H \to x^{-1}z = \bigl(x^{-1}y\bigr)\bigl(y^{-1}z\bigr) \in H$ より推移律を満たす。 ■

***Def.* 7.3.2. 正規部分群**
群 G とその部分群 H について、以下を満たすとき、H を G の正規部分群と呼ぶ。

$$\forall g \in G \forall h \in H\bigl(g^{-1}hg \in H\bigr)$$

***Cor.* 7.3.4.**
核は正規部分群である。

***Cor.* 7.3.5.**
可換群の部分群は正規部分群である。

***Cor.* 7.3.6.**
群 G の正規部分群 N について、N の部分群 H は、G の正規部分群である。

***Cor.* 7.3.7.**
群 G の部分群 H と、G の正規部分群 N について、$N \cap H$ は H の正規部分群である。

***Lem.* 7.3.8. 正規部分群の定める同値関係**
群 G とその正規部分群 H について、補題 *7.3.3* の定める同値関係 $\sim$ は系 *5.2.3* の意味で演算と両立する同値関係である。

Proof.
$x_1^{-1}y_1, x_2^{-1}y_2 \in H$ であるとき、

$$(x_1x_2)^{-1}y_1y_2 = x_2^{-1}x_1^{-1}y_1y_2 = \left(x_2^{-1}\left(x_1^{-1}y_1\right)x_2\right)\left(x_2^{-1}y_2\right) \in H$$

両立する。 ■

***Def.* 7.3.3. 剰余群**
群 G とその正規部分群 H について、補題 *7.3.8* の定める同値関係による商マグマを、剰余群と呼び、G/H と表す。

***Thm.* 7.3.9. 群準同型定理**
群 G_1, G_2 と、群準同型 $f \in G_2^{G_1}$、f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、群同型 $\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{G_1/\sim_f}$ が存在する。

Proof.
$\mathrm{Im}(f)$ は G_2 の部分群である。
定理 6.3.3 より、得る $\overline{f}$ はマグマ同型。補題 7.2.1 より、群同型。 ■

$G_1/\sim_f = G_1/\mathrm{Ker}(f)$ であるため、$\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{G_1/\mathrm{Ker}(f)}$ の形で書かれることが多い。

***Lem.* 7.3.10. 剰余群の正規部分群は剰余群**
群 G、G の正規部分群 N、G/N の正規部分群 Z について、G の正規部分群 H が存在して、$H/N = Z$ である。

Proof.
$H \coloneqq \{g \in G \mid [g] \in Z\}$ を考える。商写像の群準同型性より H は G の部分群であり、$H/N = Z$

$\forall g \in G \forall h \in H$ について、H/N は G/N の正規部分群より $\left[g^{-1}hg\right] = [g]^{-1}[h][g] \in H/N$
よって、$g^{-1}hg \in H$ より正規部分群。 ■

7.4 群と作用

***Def.* 7.4.1. 作用**
集合 S, X について、写像 $\varphi \in \left(X^X\right)^S$ を S の X への作用と呼ぶ。

***Def.* 7.4.2. 群と作用**
集合 X を考える。
マグマ $(S, \cdot)$ について、S の X への作用 $\varphi \in \left(X^X, \circ\right)^{(S,\cdot)}$ がマグマ準同型であるとき、マグマ作用と呼ぶ。
モノイド $(S, \cdot)$ について、S の X への作用 $\varphi \in \left(X^X, \circ\right)^{(S,\cdot)}$ がモノイド準同型であるとき、モノイド作用と呼ぶ。
群 $(S, \cdot)$ について、S の X への作用 $\varphi \in \left(\left(X^X\right)^\times, \circ\right)^{(S,\cdot)}$ が群準同型であるとき、群作用と呼ぶ。

***Def.* 7.4.3. 軌道**
S の X への作用 φ と元 $x \in X$ について、以下の集合を x による S 軌道と呼び、$\varphi(S, x)$ で表す。

$$\varphi(S, x) \coloneqq \{\varphi(s, x) \mid s \in S\}$$

***Def.* 7.4.4. 安定化部分群**
群 G の X への群作用 φ と元 $x \in X$ について、以下の集合を x における G の安定化部分群と呼び、$\mathrm{Stab}(G, x)$ で表す。

$$\mathrm{Stab}(G, x) \coloneqq \{g \in G \mid x = \varphi(g, x)\}$$

***Lem.* 7.4.1.**
群 $(G, \cdot)$ の X への群作用 φ と、x における G の安定化部分群 $\mathrm{Stab}(G, x)$ について、順序対 $(\mathrm{Stab}(G, x))$ は G の部分群である。

Proof.
群準同型より、$x = \varphi(g, x) = \varphi(h, x)$ のとき、$x = \varphi(g, x) = \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$、ゆえに部分マグマ。
群準同型より、$\varphi(e, x) = \mathrm{id}_X(x) = x$、ゆえに部分モノイド。
群準同型より、$\varphi(g, x) = x \to x = \varphi(g^{-1}g, x) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1}, x)$、ゆえに部分群。 ■

***Lem.* 7.4.2.**
群 G の X への群作用 φ と元 $x \in X$ について、以下で定める関係 $\sim_{\mathrm{Stab}(G,x)}$ は同値関係である。

$$\forall g, h \in G\left(g \sim_{\mathrm{Stab}(G,x)} h :\leftrightarrow g^{-1}h \in \mathrm{Stab}(G, x)\right)$$

Proof.

補題 7.4.1 より、$\mathrm{Stab}(G,x)$ は G の部分群。

補題 7.3.3 より同値関係である。 ■

***Thm.* 7.4.3. 軌道・安定化部分群定理**

群 G の X への群作用 φ と元 $x \in X$ について、全単射 $f \in \varphi(G,x)^{G/\sim_{\mathrm{Stab}(G,x)}}$ が存在する。

Proof.

写像 $\hat{f}_x \in \varphi(G,x)^G, \hat{f}_x(g) = \varphi(g,x)$ を考える。

今、$\sim_{\hat{f}_x} = \sim_{\mathrm{Stab}(G,x)}$ であり、$\mathrm{Im}(\hat{f}_x) = \varphi(G,x)$ であるので、定理 5.2.8 より存在する。 ■

8　環論

8.1　環

単位的環を環として扱う。

***Def.* 8.1.1. 環**
集合 R 上の 2 つの演算、加法 $+$、乗法 $\times$ が以下を満たすとき、順序対 $((R,+),\times)$ を環（*ring*）と呼ぶ。または単に R と書き、環と集合どちらも表すものとする。

- $(R,+)$ は可換群である。この単位元を 0_R で表す。元 a の逆元を $-a$ と表記する。
- $(R,\times)$ はモノイドである。この単位元を 1_R で表す。
- 左分配する。すなわち、$\forall x,y,z\in R(x\times(y+z)=x\times y+x\times z)$
- 右分配する。すなわち、$\forall x,y,z\in R((x+y)\times z=x\times y+x\times z)$

演算 $\times$ は、演算 $+$ よりも先に演算される。
また、$a+(-b)$、$a\times b$ を誤解のない範囲で、$a-b$、ab と略記する。

***Lem.* 8.1.1. 環の性質**
環 R について、以下が成り立つ。

$$\forall a\in R(a0_R=0_Ra=0_R)$$
$$\forall a,b\in R(a(-b)=(-a)b=-(ab))$$
$$\forall a,b\in R(ab=(-a)(-b))$$

Proof.
第一式は以下より示される。

$$a0_R=a0_R+a0_R+-(a0_R)=a(0_R+0_R)+-(a0_R)=a0_R+-(a0_R)=0_R$$
$$0_Ra=0_Ra+0_Ra+-(0_Ra)=(0_R+0_R)a+-(0_Ra)=0_Ra+-(0_Ra)=0_R$$

第二式は以下より示される。

$$a(-b)=a(-b)+ab+-(ab)=a((-b)+b)+-(ab)=a0_R+-(ab)=-(ab)$$
$$(-a)b=(-a)b+ab+-(ab)=((-a)+a)b+-(ab)=0_Rb+-(ab)=-(ab)$$

第三式は以下より示される。
$$ab=a(-(-b))=-(a(-b))=(-a)(-b)$$

■

***Cor.* 8.1.2.**
環 $((R,+),\times)$ と乗法可逆元の全体 $R^\times$ について、順序対 $(R^\times,\times)$ は群である。

***Def.* 8.1.2. 零環**
環 R について、$R=\{0_R\}$ である環を零環と呼ぶ。

***Cor.* 8.1.3.**
環 R について、R が零環であることは、$0_R = 1_R$ であることと必要十分。

***Def.* 8.1.3. 可換環**
環 $((R,+),\times)$ について、$(R,\times)$ が可換モノイドであるとき、R を可換環と呼ぶ。

8.2 環と準同型

***Def.* 8.2.1. 環準同型**
環 R_1, R_2 について以下を満たす写像 $\varphi \in R_2^{R_1}$ が存在するとき、φ を環準同型写像、または単に環準同型と呼ぶ。

- 群 $(R_1,+),(R_2,+)$ について、群準同型。
- モノイド $(R_1,\times),(R_2,\times)$ について、モノイド準同型。

***Def.* 8.2.2. 環同型**
全単射な環準同型を、環同型写像、または単に環同型と呼ぶ。

***Thm.* 8.2.1. 可換群上の自己準同型全体**
可換群 $(G,+)$ について、$\mathrm{End}(G)$ 上の以下の演算 $+'$ を考える。このとき、順序対 $((\mathrm{End}(G),+'),\circ)$ は環をなす。

$$(f +' g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$$

Proof.
定理 7.2.3 より可換群をなす。
定理 6.7.6 よりモノイドをなす。
準同型性から $f \circ (g+h)(x) = f(g(x)+h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f\circ g + f\circ h)(x)$
右分配も同様に示せる。 ■

8.3 イデアル

***Def.* 8.3.1. 左イデアル**
環 R とその空でない部分集合 I について、以下を満たすとき、I を R の左イデアルと呼ぶ。

$$\forall a,b \in I(a-b \in I)$$
$$\forall r \in R \forall a \in I(ra \in I)$$

***Lem.* 8.3.1. 左イデアルは加法正規部分群**

環 R と、その左イデアル I について、I は R の加法について、正規部分群である。

Proof.
R が可換群であることと補題 7.3.1 より、空でないことと定義 8.3.1 第一式から示される。 ■

***Cor.* 8.3.2.**
環 R と、その左イデアル I について、以下が成り立つ。

$$1_R \in I \to I = R$$

***Def.* 8.3.2. 両側イデアル**
環 R とその左イデアル I について、以下を満たすとき、I を R の両側イデアルと呼ぶ。

$$\forall r \in R \forall a \in I(ar \in I)$$

***Cor.* 8.3.3.**
可換環の左イデアルは両側イデアルである。このとき、単にイデアルと呼ぶ。

***Cor.* 8.3.4.**
環準同型写像の核は両側イデアルである。

***Def.* 8.3.3. 極大左イデアル**
環 R の左イデアル I について、以下を満たすとき、I を極大左イデアルと呼ぶ。

- R の任意のイデアル J について、$I \subset J \to J = I \vee J = R$
- $R \neq I$

***Thm.* 8.3.5. 極大左イデアルの存在**
環 R と左イデアル I について、$I \neq R$ ならば、極大左イデアル J が存在して、$I \subset J$ である。

Proof.
$T = \{J \in \mathfrak{P}(R) \mid J$ は左イデアル $\wedge I \subset J \wedge J \neq R\}$ を考える。
$I \in T$ である。
半順序集合 $(T, \subset)$ の部分 S が全順序であるとする。
このとき、$\bigcup S$ は左イデアルである。$1_R \notin \bigcup S$ より、$\bigcup S \in T$ である。
したがって、T は帰納的半順序集合である。定理 3.4.5 より極大元を持つ。 ■

8.4 環と準同型定理

***Def.* 8.4.1. 部分環**

環 R の部分集合 S が、加法について部分群をなして、乗法について部分モノイドをなすとき、S は環となり、環 S を環 R の部分環と呼ぶ。

***Def.* 8.4.2. 商環**

環 $((R, +), \times)$ を考える。

系 *5.2.3* の意味で演算 $+, \times$ と両立する同値関係 $\sim$ について、定理 *5.2.7* より定める演算 $+', \times'$ が存在する。

このとき、環 $((R/\sim, +'), \times')$ を環 R の商環と呼ぶ。

***Lem.* 8.4.1. 両側イデアルの定める同値関係**

環 R とその両側イデアル I について、以下で定める同値関係 $\sim$ は系 *5.2.3* の意味で演算 $+, \times$ と両立する同値関係である。

$$\forall x, y \in R(x \sim y :\leftrightarrow x - y \in I)$$

Proof.

補題 8.3.1 と補題 7.3.8 より、加法と両立する同値関係である。

$x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in I$ であるとき、

$$x_1x_2 - y_1y_2 = x_1(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)y_2 \in I$$

両立する。 ■

***Def.* 8.4.3. 剰余環**

環 R とその両側イデアル I について、補題 *8.4.1* の定める同値関係による商環を、剰余環と呼び、R/I と表す。

***Thm.* 8.4.2. 環準同型定理**

環 R_1, R_2 と、環準同型 $f \in R_2^{R_1}$、f に付随する同値関係 $\sim_f$ について、環同型 $\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{R_1/\sim_f}$ が存在する。

Proof.

$\mathrm{Im}(f)$ は R_2 の部分環である。

定理 7.3.9 より、得る $\overline{f}$ は加法群同型。

定理 6.7.5 より、得る $\overline{f}$ は乗法モノイド同型。

■

9　可換環論

9.1　倍元と約元

***Def.* 9.1.1. 倍元**

可換環 R と元 $a, b \in R$ について、以下を満たすとき、a は b の倍元、または b は a の約元と呼ぶ。

$$\exists c \in R(a = bc)$$

***Lem.* 9.1.1. 倍元と単項イデアル**

可換環 R について、以下の 3 つは同値である。

1. a は b の倍元
2. $a \in b\Big|$
3. $a\Big| \subset b\Big|$

Proof.

1. → 2. を示す。
$\exists c \in R(a = cb)$ より、$a \in b\Big|$ である。

2. → 3. を示す。
$\forall a' \in a\Big| \exists c' \in R(a' = c'a)$ である。
仮定より $\exists c \in R(a = cb)$ である。ゆえに、$a' = (c'c)b$

3. → 1. を示す。
a は b の倍元でないとする。
$a \in a\Big| \setminus b\Big| \neq \varnothing$ より、対偶法より満たす。　■

***Def.* 9.1.2. 既約元**

可換環 R の元 a について、以下を満たすとき、a を既約元と呼ぶ。

$$a \neq 0_R \wedge \forall x, y \in R\bigl(xy = a \to x \in R^\times \vee y \in R^\times\bigr)$$

***Def.* 9.1.3. 単項イデアル**

可換環 R と、元 $a \in R$ について、以下で定まる集合 $a\Big|$ はイデアルである。

$$a\Bigg| := \{ra \mid r \in R\}$$

このように構成されるイデアルを単項イデアルと呼ぶ。

***Cor.* 9.1.2.**
可換環 R と、元 $a \in R$、イデアル I について、以下が成り立つ。

$$a \in I \to a\Bigg| \subset I$$

9.2 整域

***Def.* 9.2.1. 整域**
可換環 D が以下を満たすとき、D を整域と呼ぶ。

$$D \neq \{0_D\} \wedge \forall x, y \in D(xy = 0_D \to x = 0_D \vee y = 0_D)$$

***Cor.* 9.2.1.**
整域 R の部分環 S は整域である。

***Lem.* 9.2.2. 簡約則**
整域 D について以下が成り立つ。

$$\forall a, b, c \in D(c \neq 0_D \to (ac = bc \to a = b))$$

Proof.
補題 8.1.1 より、

$$0_D = ac + -(bc) = ac + (-b)c = (a + (-b))c$$

整域より、$a + (-b) = 0_D$。ゆえに、$a = b$ ■

***Def.* 9.2.2. 素イデアル**
可換環 R のイデアル I について、以下を満たすとき、I を素イデアルと呼ぶ。

$$R \neq I \wedge \forall a, b \in R(ab \in I \to a \in I \vee b \in I)$$

***Cor.* 9.2.3.**
整域 D のイデアル $\{0_D\}$ は素イデアルである。

***Thm.* 9.2.4. 素イデアルと整域**
可換環 R とイデアル I について、以下の 3 つは同値である。

1. I は素イデアル

2. 差集合 $R \setminus I$ は乗法について R の部分モノイド
3. 剰余環 R/I は整域

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。
$\forall a, b \in R \setminus I$ について、I は素イデアルより対偶法から $ab \in R \setminus I$ である。
素イデアルより、$1_R \notin I$ より成り立つ。

2. $\to$ 3. を示す。
$R \setminus I$ が部分モノイドであることから $1_R \notin I$ である。ゆえに $R/I \neq \{0_R\}$
$\forall a, b \in R$ について、$[ab] = [a][b] = 0_{R/I}$ とする。
$R \setminus I$ のモノイド性と対偶法より $[a] = 0_{R/I} \vee [b] = 0_{R/I}$ である。

3. $\to$ 1. を示す。
$\forall a, b \in R (ab \in I)$ とする。
$[a][b] = [ab] = 0_{R/I}$ より、整域であることから、$[a] = 0_{R/I} \vee [b] = 0_{R/I}$ すなわち $a \in I \vee b \in I$ ■

***Thm.* 9.2.5. 極大イデアルは素イデアル**

可換環 R について、極大イデアル I は素イデアルである。

Proof.

$\forall x, y \in R (xy \in I)$ とする。
$x \in I$ のとき成り立つ。
$x \notin I$ のとき、$J \coloneqq \{rx + i \mid (r, i) \in R \times I\}$ はイデアルである。
ここで、I は極大かつ $I \subsetneq J$ より、$J = R$ である。
したがって $\exists (r, i) \in R \times I (1_R = rx + i)$ である。
ゆえに、$y = rxy + iy \in I$ である。 ■

***Def.* 9.2.3. 素元**

可換環 R と元 $a \in R \setminus \{0_R\}$ について、単項イデアル $a\big|$ が素イデアルとなるとき、a を素元と呼ぶ。

***Lem.* 9.2.6. 整域の素元は可逆でない既約元**

整域 D について、素元は可逆でない既約元である。

Proof.

素元 a が可逆とすると、$1_D = a^{-1}a \in a\big|$ であるので、$D = a\big|$ より素イデアルではない。背理法より可逆でない。

素元 a が既約元でないとする。$\exists x, y \in D \setminus D^{\times} (xy = a)$
$xy = a \in a\big|$ であるので、素イデアルの定義から $\exists r \in D (x = ra \vee y = ra)$ である。
$x = ra$ のとき、可換性から $a(ry - 1_D) = 0_D$ である。D は整域で $a \neq 0_D$ より、$ry = 1_D$ である。これは $y \notin D^{\times}$ に反する。
$y = ra$ のときも同様。背理法より既約元である。 ■

9.3 一意分解整域

***Def.* 9.3.1. 素元の全体**

可換環 R について、素元の全体を $\mathcal{P}(R)$ と表す。

***Def.* 9.3.2. 素元分解**

整域 D と元 $a \in D$ について、以下が成り立つとき、a は素元分解可能であると呼ぶ。

- $\exists n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathcal{P}(D)^n \exists u \in D^\times (a = u \prod_{m=0}^{n} p(m))$

***Def.* 9.3.3. 一意分解整域**

整域 D について、以下が成り立つとき、D を一意分解整域、または *UFD(unique factorization domain)* と呼ぶ。

- $\forall a \in D \setminus \{0_D\}$ は素元分解可能であり、各 $p(m)$ の順序交換と u および各 $p(m)$ の可逆元倍を除いて一意である。

***Lem.* 9.3.1. *UFD* の可逆でない既約元は素元**

一意分解整域 D について、可逆でない既約元は素元である。

Proof.

可逆でない既約元 $a \in D$ を考える。
a は既約元より $a \neq 0_D$ である。したがって、素元分解 $a = u \prod_{m=0}^{n} p(m)$ ができる。
$n = 0$ とすると、$a = u$ より可逆でないことに反する。
$n = 2$ とすると、au^{-1} は既約であることより、$p(0)$ または $p(1)$ が可逆元であるが、補題 9.2.6 に反する。
$n \geq 3$ についても帰納的に否定される。
よって、$n = 1$ である。すなわち $a = up(0)$ と表せる。
$a\Big| = p(0)\Big|$ であるので、a は素元。 ■

***Def.* 9.3.4. 単項イデアル整域**

整域 D のイデアルが全て単項イデアルであるとき、D を単項イデアル整域、または *PID(principal ideal domain)* と呼ぶ。

Thm.* 9.3.2. *PID* は *Noether

単項イデアル整域 D について、$\mathfrak{P}(D)$ 上の以下を満たす点列 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

- $\forall n \in \mathbb{N}$ について I_n はイデアル
- $I_n \subset I_{s(n)}$

このとき、以下が成り立つ。

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} (I_n = I_N)$$

Proof.
$J \coloneqq \bigcup\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ はイデアルである。
単項イデアル整域であるので、$\exists a \in D\big(a\big| = J\big)$
$a \in J$ より、$\exists N \in \mathbb{N}(a \in I_N)$ より、$a\big| \subset I_N$
$\forall N \in \mathbb{N}_{\geq N}\big(a\big| \subset I_N \subset I_n \subset J = a\big|\big)$ ■

Thm. 9.3.3. PID の素イデアルは極大イデアル
単項イデアル整域 D の素イデアルは極大イデアルである。

Proof.
極大イデアルでない素イデアル $a\big|$ を考える。
このとき $\exists b \in D\big(a\big| \subsetneq b\big| \neq D\big)$
$\exists c \in R(a = cb)$ である。$b \in a\big|$ のとき、$a\big| = b\big|$ となり仮定に反する。
素イデアルの定義より $c \in a\big|$ であるので、$\exists d \in R(c = da)$
ゆえに $a(bd - 1_D) = 0_D$ であり、整域より $bd = 1_D$
よって $b\big| = D$ となり矛盾。
背理法より示される。 ■

Thm. 9.3.4. PID は UFD
単項イデアル整域 D は一意分解整域である。

Proof.
素元分解できない $a \in D \setminus \{0_D\}$ が存在すると仮定する。
$1_R \in a\big|$ とすると、a は可逆元となり、素元分解できる。ゆえに $a\big| \neq D$ である。

定理 8.3.5、定理 9.2.5 と D が単項イデアル整域であることより、素元 p_1 が存在して $a \in a\big| \subset p_1\big|$
ゆえに $\exists a_1 \in D(a = a_1 p_1)$ と書ける。$a \neq 0_D$ より $a_1 \neq 0_D$
$a\big| \supset a_1\big|$ とすると、$\exists b \in D(a_1 = ba)$ より $a_1(bp_1 - 1_R) = 0_R$ であり、整域と $a_1 \neq 0_R$ から $p_1 \in D^\times$
これは補題 9.2.6 に反する。ゆえに $a\big| \subsetneq a_1\big|$
a は素元分解できないので、a_1 も素元分解でもない。

帰納的にイデアル列 $a\big| \subset a_1\big| \subset \cdots$ がつくれるが、これは定理 9.3.2 に反する。
ゆえに素元分解可能である。

一意性を示す。
$a = u\prod_{m=0}^{n} p(m) = u'\prod_{m=0}^{n'} p'(m)$ とする。$n \leq l$ とする。

$n = 0$ のとき、$a = u = u'\prod_{m=0}^{n'} p'(m)$ である。
$n' \neq 0$ のとき、補題 9.2.6 より $\prod_{m=0}^{n'} p'(m)$ は可逆でない。したがって u が可逆でなくなり仮定に反するので、$n' = 0$ である。ゆえに一意。

ある $n \in \mathbb{N}$ で一意とする。
$a = u\prod_{m=0}^{s(n)} p(m) = u'\prod_{m=0}^{n'} p'(m)$ とする。
$a \in p(n)\big|$ より、素イデアルの定義から $\exists k \in n'\big(p'(k) \in p(n)\big|\big)$ である。ゆえに $p'(k)\big| \subset p(n)\big|$
定理 9.3.3 より $p'(k)\big| = p(n)\big|$

以下の $q \in \mathcal{P}(D)^{n'}$ を考える。

$$q(m) = \begin{cases} p(m) & (m \neq k) \\ 1_D & (m = k) \end{cases}$$

整域より $u \prod_{m=0}^{n} p(m) = u'' \prod_{m=0}^{n'} q(m)$ が成り立つ。帰納法の仮定より一意。

定理 4.1.7 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Def.* 9.3.5. *Euclid* 整域**
整域 D について、以下を満たす写像 $f \in \mathbb{N}^{D \setminus \{0_D\}}$ が存在するとき、D を *Euclid* 整域と呼ぶ。

$$\forall a \in D \forall b \in D \setminus \{0_D\} \exists q, r \in D(a = bq + r \land (r = 0_D \lor f(r) < f(b)))$$
$$\forall a, b \in D \setminus \{0_D\}(f(a) \leq f(ab))$$

Thm.* 9.3.5. *ED* は *PID
Euclid 整域 D は単項イデアル整域である。

Proof.
イデアル I を考える。$0_D \in I$ である。
$\{0_D\} = I$ であるとき、$0_D\big| = I$
$\{0_D\} \subsetneq I$ であるとき、$M \coloneqq \{f(i) \mid i \in I \setminus \{0_D\}\}$ を考える。
M は空でない $\mathbb{N}$ の部分より、定理 4.2.7 から最小限が存在する。よって、$\exists m \in I(f(m) = \min M)$
$\forall i \in I$ について、$\exists q, r \in R(i = mq + r \land (r = 0_R \lor f(r) < f(m)))$
今、$r = i - mq \in I$ であるため、$r \neq 0_R$ とすると m の最小性に反する。
よって $r = 0_R$、すなわち $i \in m\big|$
$m \in I$ より $m\big| = I$ ■

9.4 多項式環

***Def.* 9.4.1. 多項式環**
可換環 R について、集合 $R[X]$ を以下のように定義する。

$$R[X] \coloneqq \left\{\varphi \in R^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}(\varphi(n) = 0_R)\right\}$$

ここで、$R[X]$ 上の加法 $+$、乗法 $\times$ を以下のように定める。

$$\forall n \in \mathbb{N}((\varphi + \psi)(n) \coloneqq \varphi(n) + \psi(n))$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\left((\varphi \times \psi)(n) \coloneqq \sum_{k \in s(n)} \varphi(k) \times \psi(n-k)\right)$$

定義 *9.4.1* より定まる順序対 $((R[X], +), \times)$ は可換環である。この環を多項式環と呼ぶ。
また、多項式環の元を多項式と呼ぶ。

***Lem.* 9.4.1.**
以下で定義する写像 $\gamma \in R[X]^R$ を考える。

$$\gamma(a)(n) := \begin{cases} a & (n = 0) \\ 0_R & (n \neq 0) \end{cases}$$

このとき、γ は以下を満たす。

1. 単射
2. 加法、乗法について環準同型

Proof.
定義より明らか。 ■

***Cor.* 9.4.2.**
可換環 R と、R の部分環 S について、$S[X]$ は $R[X]$ の部分環である。

***Lem.* 9.4.3. 多項式の次数**
可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ について、以下が成り立つ。

$$\forall \varphi \in R[X] \setminus \left\{0_{R[X]}\right\} \exists N \in \mathbb{N}(\varphi(N) \neq 0_R \wedge \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}(\varphi(n) = 0_R))$$

Proof.
$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \neq 0_R\}$ とする。
$\varphi \neq 0_{R[X]}$ より、M は空でない。
定義より M は上に有界。
定理 5.3.11 と定理 5.3.10 より、M は最大元を持つ。 ■

***Def.* 9.4.2. 多項式の次数**
可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ を考える。
$\forall \varphi \in R[X] \setminus \left\{0_{R[X]}\right\}$ について、補題 *9.4.3* より定まる自然数を次数と呼び、$\deg(\varphi)$ と表す。

***Cor.* 9.4.4. 整域上の多項式の次数**
整域 D 上の多項式環 $D[X]$ は整域である。さらに、以下が成り立つ。

$$\forall f, g \in D[X] \setminus \left\{0_{D[X]}\right\} \left(f + g = 0_{D[X]} \wedge \deg(f+g) \leq \max\left\{\deg(f), \deg(g)\right\}\right)$$
$$\forall f, g \in D[X] \setminus \left\{0_{D[X]}\right\} (\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g))$$

***Def.* 9.4.3. 次数既約**
整域 D 上の多項式環 $D[X]$ について、多項式 $f \in D[X]$ が素元であるとき、f は次数既約であると呼ぶ。

***Def.* 9.4.4. 多項式の値**

可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ について、以下で定める写像 $f \in \left(R^R\right)^{R[X]}$ が存在する。

$$\forall x \in R \left(f(\varphi)(x) \coloneqq \sum_{n \in s(\deg \varphi)} \varphi(n) \times x^n \right)$$

$f(\varphi)(x)$ を $\varphi(x)$ と略記して、多項式の値と呼ぶ。

以降、多項式 φ について、$\varphi(x)$ と書くときは、特に断らない限り、定義 9.4.1 に基づく写像の値ではなく、定義 9.4.4 多項式の値を表すものとする。

***Def.* 9.4.5. 根**

可換環 R 上の多項式環 $R[X]$ と、多項式 $\varphi \in R[X]$ を考える。

$\varphi(x) = 0_R$ を満たす元 $x \in R$ を、多項式 φ の根と呼ぶ。

10 整数

10.1 整数の構成

***Lem.* 10.1.1. 整数の準備：前順序**
直積集合 $\mathbb{N}^2$ 上で以下の自己関係 $\preccurlyeq_Z$ は前順序である。

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2 ((a_1, a_2) \preccurlyeq_Z (b_1, b_2) :\leftrightarrow a_1 + b_2 \leq b_1 + a_2)$$

Proof.
反射的である。

推移的であることを示す。

$$a_1 + b_2 \leq b_1 + a_2 \land b_1 + c_2 \leq c_1 + b_2 \to a_1 + b_2 + b_1 + c_2 \leq b_1 + a_2 + c_1 + b_2$$

補題 4.3.7 の対偶をとって、

$$a_1 + c_2 \leq c_1 + a_2$$

したがって、前順序である。 ■

***Lem.* 10.1.2. 整数の準備：前順序の全域性**
直積集合 $\mathbb{N}^2$ 上で補題 *10.1.1* の前順序 $\preccurlyeq_Z$ は以下を満たす。

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^2 (a \preccurlyeq_Z b \lor b \preccurlyeq_Z a)$$

Proof.
定理 4.2.5 より明らか。 ■

***Lem.* 10.1.3. 整数の準備：加法可換群**
直積集合 $\mathbb{N}^2$ 上の以下の演算 $+$ は可換群をなす。

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2 ((a_1, a_2) + (b_1, b_2) :\leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2))$$

Proof.
結合法則は、定理 6.6.3 より明らか。
$(0, 0)$ は単位元である。
(a_1, a_2) に対して、(a_2, a_1) は逆元である。
交換法則は、定理 6.6.3 より明らか。 ■

***Lem.* 10.1.4. 整数の準備：可換環**
補題 *10.1.3* の定める可換群 $\left(\mathbb{N}^2, +\right)$ 上の以下の演算 $\times$ は可換環をなす。

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2 ((a_1, a_2) \times (b_1, b_2) :\leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1))$$

Proof.

結合法則を示す。

$$\begin{aligned}(a_1,a_2)\times((b_1,b_2)\times(c_1,c_2)) &= (a_1,a_2)\times(b_1c_1+b_2c_2, b_1c_2+b_2c_1)\\ &= (a_1(b_1c_1+b_2c_2)+a_2(b_1c_2+b_2c_1), a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1+b_2c_2))\\ &= ((a_1b_1+a_2b_2)c_1+(a_1b_2+a_2b_1)c_2, (a_1b_1+a_2b_2)c_2+(a_1b_2+a_2b_1)c_1)\\ &= ((a_1,a_2)\times(b_1,b_2))\times(c_1,c_2)\end{aligned}$$

$(1,0)$ は単位元である。

交換法則は、定理 6.6.3 より明らか。

右分配法則を示す。

$$\begin{aligned}((a_1,a_2)+(b_1,b_2))\times(c_1,c_2) &= (a_1+b_1, a_2+b_2)\times(c_1,c_2)\\ &= ((a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2, (a_1+b_1)c_2+(a_2+b_2)c_1)\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2, a_1c_2+a_2c_1+b_1c_2+b_2c_1)\\ &= (a_1,a_2)\times(c_1,c_2)+(b_1,b_2)\times(c_1,c_2)\end{aligned}$$

左分配法則は、右分配法則と交換法則より示される。 ■

***Lem.* 10.1.5. 整数の準備：同値類**

直積集合 $\mathbb{N}^2$ 上で以下の自己関係 $\sim_Z$ は同値類である。

$$\forall (a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{N}^2((a_1,a_2)\sim_Z(b_1,b_2) :\leftrightarrow (a_1,a_2)\preccurlyeq(b_1,b_2)\wedge(b_1,b_2)\preccurlyeq(a_1,a_2))$$

Proof.

補題 10.1.1 より前順序。明らかに対称的であるので、同値類である。 ■

***Lem.* 10.1.6. 整数の準備：両立**

直積集合 $\mathbb{N}^2$ 上で補題 *10.1.5* の同値類 $\sim_Z$ は、補題 *10.1.1* の前順序、補題 *10.1.3* の加法、補題 *10.1.4* の乗法のそれぞれと両立する。

Proof.

前順序と両立することは、$\sim_Z$ の定義と前順序の推移性より明らか。

$(a_1,a_2)\sim_Z(a'_1,a'_2)\wedge(b_1,b_2)\sim_Z(b'_1,b'_2)$ とする。
$(a_1+b_1)+(a'_2+b'_2)=(a_1+a'_2)+(b_1+b'_2)=(a'_1+a_2)+(b'_1+b_2)=(a'_1+b'_1)+(a_2+b_2)$ より成り立つ。

$(a_1, a_2) \sim_Z (a_1', a_2') \wedge (b_1, b_2) \sim_Z (b_1', b_2')$ とする。

$$\begin{aligned}
a_2(b_2 + b_1') &= a_2(b_1 + b_2') \\
a_2(b_2 + b_1') + a_1'b_1' &= a_2(b_1 + b_2') + a_1'b_1' \\
a_2b_2 + (a_2 + a_1')b_1' &= a_2(b_1 + b_2') + a_1'b_1' \\
a_2b_2 + (a_1 + a_2')b_1' &= a_2(b_1 + b_2') + a_1'b_1' \\
a_2b_2 + (a_1 + a_2')b_1' + a_1b_2 + a_1'b_2' &= a_2(b_1 + b_2') + a_1'b_1' + a_1b_2 + a_1'b_2' \\
a_2b_2 + a_1(b_1' + b_2) + a_2'b_1' + a_1'b_2' &= a_2b_1 + (a_1' + a_2)b_2' + a_1'b_1' + a_1b_2 \\
a_2b_2 + a_1(b_1 + b_2') + a_2'b_1' + a_1'b_2' &= a_2b_1 + (a_1 + a_2')b_2' + a_1'b_1' + a_1b_2 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2' + a_1'b_2' + a_2'b_1' &= a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_1b_2' + a_1b_2 + a_2b_1
\end{aligned}$$

定義 4.3.2 より

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_1'b_2' + a_2'b_1' = a_1b_2 + a_2b_1 + a_1'b_1' + a_2'b_2'$$

■

***Def.* 10.1.1. 整数**

補題 *10.1.6* より定まる商マグマ $\mathbb{N}^2/\sim_Z$ を整数と呼び、$\mathbb{Z}$ で表す。また、その元も整数と呼ぶ。
定義より $\mathbb{Z}$ は可換環である。

10.2 整数の性質

***Lem.* 10.2.1.**

可換環 $\mathbb{Z}$ は零環でない。

Proof.

$0_{\mathbb{Z}} = [(0,0)], 1_{\mathbb{Z}} = [(1,0)]$ より明らか。 ■

***Lem.* 10.2.2. 整数の全順序**

補題 *10.1.6* より与えられる $\mathbb{Z}$ 上の前順序 $\leq$ は全順序である。

Proof.

$\sim_Z$ の定義より反対称的である。
補題 10.1.2 より全順序である。 ■

***Thm.* 10.2.3. 順序環としての整数**

$(\mathbb{Z}, \leq)$ は順序環である。すなわち $\mathbb{Z}$ は零環でない可換環で、$\leq$ は全順序であり、かつ以下を満たす。

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}(a \leq b \to a + c \leq b + c)$$
$$\forall a, b \in \mathbb{Z}(0_{\mathbb{Z}} < a \wedge 0_{\mathbb{Z}} < b \to 0_{\mathbb{Z}} < ab)$$

Proof.

補題 10.2.2 より全順序。補題 10.2.1 より零環でない。

第一式について、$a=[(a_1,a_2)], b=[(b_1,b_2)], c=[(c_1,c_2)]$ として、補題 4.3.7 より、

$$a_1+b_2<a_2+b_1 \to (a_1+c_1)+(b_2+c_2)<(a_2+c_2)+(b_1+c_1)$$

第二式について、$0_{\mathbb{Z}}<a, 0_{\mathbb{Z}}<b$ より、定義 4.3.2 より $a=[(a',0)], b=[(b',0)]$ と置ける。

$$ab=[(a',0)]\times[(b',0)]=[(a'b',0)]>0$$

■

Lem. **10.2.4.**
写像 $\varphi \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \varphi(n)=[(n,0)]$ は以下を満たす。

1. 単射
2. 加法についてモノイド準同型
3. 乗法についてモノイド準同型
4. 全順序と両立

Proof.
定義より明らか。 ■

Def. **10.2.1. 自然数の整数への埋め込み**
補題 *10.2.4* の写像 φ について、像 $\varphi(\mathbb{N})$ を誤解のない範囲で自然数 $\mathbb{N}$ と呼ぶ。

Cor. **10.2.5.**

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$$

Thm. **10.2.6. 整数は *Euclid* 整域**
整数 $\mathbb{Z}$ は *Euclid* 整域である。

Proof.
以下で定める写像 $\mathrm{sign}\in\{1,-1\}^{\mathbb{Z}}$ を考える。

$$\mathrm{sign}(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

写像 $||\in\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, |x|=x\,\mathrm{sign}(x)$ を考える。
ここで、$|\mathbb{Z}|=\mathbb{N}$ である。
$\forall a\in\mathbb{Z}\forall b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ について、定義 4.5.1 より以下が成り立つ。

$$\exists q,r\in\mathbb{N}(|a|=|b|q+r\land r<|b|)$$

ゆえに、

$$a=b(\mathrm{sign}(a)\,\mathrm{sign}(b)q)+(\mathrm{sign}(a)r)\land|\mathrm{sign}(a)r|<|b|$$

また、$\forall a,b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ について、$1\leq|a|\leq|ab|$ ■

***Lem.* 10.2.7. 整数の乗法の簡約則**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}(c \neq 0 \land ac = bc \to a = b)$$

Proof.

定理 10.2.6 および補題 9.2.2 より明らか。 ■

11　群論の補足

11.1　有限群

***Def.* 11.1.1. 有限群**
群 G について、G が有限集合であるとき、G を有限群と呼ぶ。

***Thm.* 11.1.1. *Lagrange* の定理**
有限群 G と、G の部分群 H について、補題 *7.3.3* より定まる同値関係 $\sim_H$ を考える。このとき、以下が成り立つ。

$$|G| = |G/\sim_H||H|$$

Proof.
$\forall g \in G$ について考える。
写像 $f \in [g]^H, f(h) \coloneqq gh$ は全単射である。
H は有限より、$|[g]| = |H|$
$[g_1] \neq [g_2] \to [g_1] \cap [g_2] = \varnothing$ より、成り立つ。　■

***Def.* 11.1.2. 巡回群**
群 G と元 $a \in G$ について、以下で定義する集合 $a\Big|$ は群をなす。これを巡回群と呼ぶ。

$$a\Bigg| \coloneqq \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

***Cor.* 11.1.2.**
巡回群は可換群である。

***Lem.* 11.1.3. 位数**
有限群 G と元 $g \in G$ に対して、以下の集合は空でない。

$$\{n \in \mathbb{N} \mid g^n = e\}$$

Proof.
定理 5.3.3 より、写像 $\tau \in G^s(|G|), \tau(n) = g^n$ は単射でない。
よって、$\exists i, j \in s(|G|)\big(i < j \land g^i = g^j\big)$
したがって、$g^{j-i} = e$ である。　■

***Def.* 11.1.3. 位数**
補題 *11.1.3* と定理 *4.2.7* より、有限群 G と元 $g \in G$ に対して $g^n = e$ とする最小の $n \in \mathbb{N}$ が存在する。
これを元 g の位数と呼び、$\mathrm{ord}(g)$ と表す。

***Thm.* 11.1.4. 巡回群の位数**

有限群 G と元 $g \in G$ について、以下が成り立つ。

$$\mathrm{ord}(g) = \left|\left\langle g \right\rangle\right|$$

Proof.

写像 $\tau \in \langle g\rangle^{\mathrm{ord}(g)}, \tau(n) = g^n$ を考える。

$\exists i, j \in \mathbb{N}\big(i < j \wedge g^i = g^j\big)$ ならば $g^{j-i} = e$ より位数の最小性に反する。ゆえに単射。

$\forall n \in \mathbb{Z}$ について、定理 10.2.6 より $\exists q, r \in \mathbb{Z}(n = q\,\mathrm{ord}(g) + r \wedge |r| < \mathrm{ord}(g))$ である。

よって $g^n = g^{q\,\mathrm{ord}(g)+r} = \big(g^{\mathrm{ord}(g)}\big)^q g^r = g^r$

今、$0 \leq r$ のとき、$g^r = g^n$ である。$r < 0$ のとき、$g^{r+\mathrm{ord}(g)} = g^n \wedge 0 \leq r + \mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(g)$

ゆえに全射。 ■

11.2 置換

***Def.* 11.2.1. 偶奇**

定理 *10.2.6* の主張する除法について、整数 n を 2 で割った余りが 0 であるとき、n を偶数と呼ぶ。

そうでないとき、n を奇数と呼ぶ。

***Def.* 11.2.2. 置換**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、全単射 $\sigma \in n^n$ を置換と呼ぶ。

***Def.* 11.2.3. 対称群**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、置換の全体は群をなす。この群を n 次対称群と呼び、$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ で表す。

***Def.* 11.2.4. 互換**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ について、以下で表される置換 τ を互換と呼ぶ。

$$\exists i, j \in n\left(i \neq j \wedge \tau(m) = \begin{cases} j & (m = i) \\ i & (m = j) \\ m & (otherwise) \end{cases}\right)$$

誤解のない範囲で互換を (i, j) と表す。

互換の全体を T_n とする。

***Cor.* 11.2.1.**

互換 $(i, j) = (j, i)$

***Cor.* 11.2.2.**

互換 $\tau \in T_n$ について、$\tau\tau = \mathrm{id}_n$

***Thm.* 11.2.3. 置換は互換の積**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、以下が成り立つ。

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \exists l \in \mathbb{N} \exists \tau \in T_n^l \left(\sigma = \prod_{m \in l} \tau(m) \right)$$

Proof.

$n = 1$ のとき、$\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{id}_1\}$ より成り立つ。
ある n で成り立つとする。
$\sigma \in \mathfrak{S}_{s(n)}$ について、全単射より $\exists k \in s(n)(\sigma(k) = n)$ である。
$k = n$ のとき、$\sigma|_n \in \mathfrak{S}_n$ より互換の積として表せる。
互換 $\tau := (k, n)$ について、$\sigma' := \tau\sigma$ を考える。
$\sigma'|_n \in \mathfrak{S}_n$ は帰納法の仮定より互換の積として表せる。
$\sigma = \tau\sigma'$ より互換の積となる。
定理 4.1.7 より、任意の n について成り立つ。 ■

***Lem.* 11.2.4.**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、id_n は奇数個の互換の積で表すことはできない。

Proof.

$n = 1$ のとき明らか。

$n \geq 2$ のとき、奇数 l 個の互換の積で表すことができると仮定する。
$\mathrm{id}_n \notin T_n$ より、1 個の互換の積で恒等写像を表すことはできない。ゆえに、$l \geq 3$
id_n を互換の積で表すことができる最小の奇数 l を考える。
互換 2 つの積について、左の項の第一成分は以下の規約で右の項のみに含まれるように変形できる。

$$(i_1, j_1)(i_2, j_2) = \begin{cases} (i_2, j_2)(i_1, j_1) & (\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\} = \varnothing) \\ (j_1, j_2)(i_1, j_1) & (i_1 = i_2 \land j_1 \neq j_2) \\ (i_2, j_1)(i_1, i_2) & (i_1 \neq i_2 \land j_1 = j_2) \\ \mathrm{id}_n & (\{i_1, j_1\} = \{i_2, j_2\}) \end{cases}$$

l 個の互換の積である id_n について、上の規約により第一番目の互換の第一成分 i を右に移動させる。
このとき、l の最小性から 4 番目の場合とはならないため、帰納的に最も右の項のみに i が含まれるようにできる。
これは、$\mathrm{id}_n(i) = i$ に反する。
背理法より示される。 ■

***Lem.* 11.2.5. 置換の符号**

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ について、定理 *11.2.3* の定める l（互換の個数）の偶奇は一意に定まる。

Proof.

奇数 l_1、偶数 l_0 を用いて、$\sigma = \prod_{m \in l_1} \tau_1(m) = \prod_{m \in l_2} \tau_2(m)$ とする。
$\mathrm{id}_n = \prod_{m \in l_1} \tau_1(m) \times \prod_{m \in l_2} \tau_2(l_2 - 1 - m)$ より、補題 11.2.4 に反する。
背理法より示される。 ■

Def. **11.2.5. 置換の符号**

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ について、補題 *11.2.5* より定まる偶奇が存在する。

このとき、以下の写像 $\mathrm{sign} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{S}_n}$ を定義する。

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\text{偶数}) \\ -1 & (\text{奇数}) \end{cases}$$

Cor. **11.2.6.**

$\mathrm{sign} \in (\mathbb{Z}, \times)^{\mathfrak{S}_n}$ は群準同型である。

Def. **11.2.6. 交代群**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、以下で定める $\mathfrak{S}$ の部分群 A_n を、交代群と呼ぶ。

$$A_n \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$$

Lem. **11.2.7. 交代群は対称群の正規部分群**

$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ について、交代群 A_n は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群である。

Proof.

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \forall \alpha \in A_n$ について、$\mathrm{sign}(\sigma^{-1}\alpha\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)^{-1}\,\mathrm{sign}(\alpha)\,\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\alpha) = 1$ より、$\sigma^{-1}\alpha\sigma \in A_n$ ■

11.3 可解群

Def. **11.3.1. 可解群**

自明でない群 G について、$n \in \mathbb{N}$ と有限列 $(H_m)_{m \in s(n)}$ が存在して以下を満たすとき、G を可解群と呼ぶ。

- $H_0 = G$
- $H_n = \{e\}$
- $\forall m \in n$ について、$H_{s(m)}$ は H_m の正規部分群であり、剰余群 $H_m / H_{s(m)}$ が可換群

Cor. **11.3.1.**

可換群は可解群である。

Lem. **11.3.2. 可解群の部分**

可解群 G の部分群 H は可解群である。

Proof.

G は可解群より、定義 11.3.1 を満たす有限列 $(Z_m)_{m \in n}$ が存在する。

有限列 $Y_m \coloneqq Z_m \cap H$ を考える。ただちに $Y_{s(m)}$ は Y_m の正規部分群。
埋め込み $f \in Z_m^{Y_m}$ と、商写像 $[] \in \left(Z_m/Z_{s(m)}\right)^{Z_m}$ から、準同型 $[] \circ f \in \left(Z_m/Z_{s(m)}\right)^{Y_m}$ を得る。
定理 7.3.9 より、埋め込み $\overline{f} \in \left(Z_m/Z_{s(m)}\right)^{Y_m/Y_{s(m)}}$ が存在する。
$Z_m/Z_{s(m)}$ は可換群より、$Y_m/Y_{s(m)}$ も可換群。したがって可解群。 ■

Lem. 11.3.3. 可解群の拡大
群 G と、G の正規部分群 N について、$N, G/N$ がともに可解群ならば、G は可解群である。

Proof.
G/N は可解群より、定義 11.3.1 を満たす有限列 $(Z_m)_{m\in n}$ が存在する。
補題 7.3.10 より、有限列 $(H_m)_{m\in n}$ で、$H_m/N = Z_m$ かつ $H_{s(m)}$ は H_m の正規部分群が成り立つ。
H_m 上の補題 7.3.8 の定める同値関係について、$a \sim_N b \to a \sim_{H_{s(m)}} b$ である。
ゆえに自明な埋め込み $f \in (H_m/N)^{H_m/H_{s(m)}}$ が存在する。
H_m/N は可換群より、$H_m/H_{s(m)}$ も可換群である。

N は可解群であるため、定義 11.3.1 を満たす有限列 $(I_m)_{m\in l}$ が存在する。
よって、有限列 $G = H_0, H_1, \cdots, H_{p(n)} = N = I_0, I_1, \cdots, I_{p(l)} = \{e\}$ が存在して定義 11.3.1 を満たす。 ■

Lem. 11.3.4.
交代群 A_5 は可解群ではない。

Proof.
A_5 を可解群とする。A_5 の正規部分群 N が存在して、A_5/N は可換群となる。
$\forall i_1, j_1, i_2, j_2 \in 5(i_1 \neq j_1 \land i_2 \neq j_2)$ を考える。

$\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\} = \varnothing$ のとき、A_5/N の可換性より

$$[(i_1, j_1)(i_2, j_2)] = [(i_1, j_2)(j_1, j_2)(i_1, j_2)(j_1, i_2)(j_1, j_2)(j_1, i_2)] = [\mathrm{id}_5]$$

ゆえに、$(i_1, j_1)(i_2, j_2) \in N$

$i_1 = i_2 \land j_1 \neq j_2$ のとき、$\{k_1, k_2\} = 5 \setminus \{i_1, j_1, j_2\}$ について、A_5/N の可換性より、

$$[(i_1, j_1)(i_1, j_2)] = [(i_1, j_1)(i_1, k_1)][(j_1, k_2)(j_1, j_2)][(i_1, k_1)(i_1, j_1)][(j_1, j_2)(j_1, k_2)] = [\mathrm{id}_5]$$

ゆえに、$(i_1, j_1)(i_1, j_2) \in N$

$\{i_1, j_1\} = \{i_2, j_2\}$ のとき、$(i_1, j_1)(i_1, j_2) = \mathrm{id}_5 \in N$

定理 11.2.3 より、$A_5 = N$ となる。
$(0, 1)(1, 2) \neq (1, 2)(0, 1)$ より、A_5 は可換群ではない。
ゆえに定義 11.3.1 を満たす有限列は存在しない。 ■

Thm. 11.3.5. 対称群と可解群
$n = 2, 3, 4$ について、$\mathfrak{S}_n$ は可解群である。
$n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ について、$\mathfrak{S}_n$ は可解群ではない。

Proof.

$\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}_2, (0,1)\}$ は可換群である。ゆえに可解群である。

$\mathfrak{S}_3, A_3, \{\mathrm{id}_3\}$ は定義 11.3.1 の主張する有限列である。ゆえに $\mathfrak{S}_3$ は可解群である。

$V_4 \coloneqq \{\mathrm{id}_4, (0,1)(2,3), (0,2)(1,3), (0,3)(1,2)\}$ を考える。
$\mathfrak{S}_4, A_4, V_4, \{\mathrm{id}_4\}$ は定義 11.3.1 の主張する有限列である。ゆえに $\mathfrak{S}_4$ は可解群である。

$n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ について $\mathfrak{S}_n$ が可解群と仮定する。
補題 11.3.2 より A_n も可解群となり、さらに A_5 が可解群となる。これは補題 11.3.4 に反する。
背理法より成り立つ。 ■

12　加群

12.1　加群

***Def.* 12.1.1. 左加群**

環 R、可換群 $(V,+)$、定理 *8.2.1* の主張する環 $\mathrm{End}(V)$ について、環準同型 $\rho \in \mathrm{End}(V)^R$ が存在するとき、順序対 $((V,+),\rho)$ を左 R-加群と呼ぶ。または単に V と書き、左 R-加群を表すものとする。

作用の値 $\rho(r)(x)$ を rx と略記する。

***Rem.* 12.1.1. 左加群の補足**

左 R-加群 $((V,+),\rho)$ は以下を満たす。$\forall a,b,c \in V \forall r,s \in R$ とする。

1. V のマグマ性：$a+b \in V$
2. V の半群性：$a+(b+c)=(a+b)+c$
3. V のモノイド性：$\exists 0_V \coloneqq e$
4. V の群性：$\exists(-a)$
5. V の可換群性：$a+b=b+a$
6. 自己準同型性：$r(a+b)=ra+rb$
7. ρ の群準同型性と $\mathrm{End}(V)$ の定義：$(r+s)a=ra+sa$
8. ρ のモノイド準同型性：$r(sa)=(rs)a$

***Def.* 12.1.2. 加群**

左 R-加群について、R が可換環であるとき、R-加群と呼ぶ。

***Lem.* 12.1.1. 加群の性質**

左 R-加群 V について、以下が成り立つ。

$$\forall v \in V(0_R v = 0_V)$$
$$\forall r \in R \forall v \in V(r(-v) = (-r)v = -(rv))$$
$$\forall r \in R \forall v \in V(rv = (-r)(-v))$$

Proof.

補題 8.1.1 と同様に示される。　■

***Def.* 12.1.3. 線型**

左 R-加群 V_1, V_2 について、群準同型 $f \in V_2^{V_1}$ が以下を満たすとき、f を加群準同型写像または線型写像と呼ぶ。

$$\forall v \in V_1 \forall r \in R(f(rv) = rf(v))$$

***Def.* 12.1.4. 加群同型**
全単射な線型写像を、加群同型写像、または単に加群同型と呼ぶ。

***Def.* 12.1.5. 線型写像の全体**
左 R-加群 V, V' について、V から V' への線型写像全体のなす集合は群をなす。これを $\mathrm{Hom}_R(V, V')$ と表す。
さらに $\mathrm{End}_R(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_R(V, V)$、$\mathrm{GL}(V) \coloneqq \mathrm{End}_R(V)^\times$ とする。

***Thm.* 12.1.2. 左加群としての環**
環 $((R, +), \times)$ と、R の部分環 S を考える。
以下で定める $\rho \in \mathrm{End}(R)^S$ について、順序対 $((R, +), \rho)$ は左 S-加群である。

$$\forall s \in S \forall r \in R (\rho(s)(r) \coloneqq s \times r)$$

Proof.
環の分配法則、および積についての結合性から、ρ は環準同型である。 ■

***Thm.* 12.1.3. $\mathbb{Z}$-加群としての可換群**
可換群 $(G, +)$ を考える。以下で定める $\rho \in \mathrm{End}(G)^{\mathbb{Z}}$ について、順序対 $((G, +), \rho)$ は $\mathbb{Z}$-加群である。

$$\rho(n)(g) \coloneqq \begin{cases} \sum_{m \in n} g & (0 \leq n) \\ \sum_{m \in (-n)} (-g) & (n < 0) \end{cases}$$

Proof.
正負の場合の場合分けを考えて、補題 6.8.2 より、成り立つ。 ■

12.2 加群と準同型定理

***Def.* 12.2.1. 部分加群**
左 R-加群 $((V, +), \rho)$ と V の部分群 $(W, +)$ について、以下が成り立つとき $((W, +), \rho')$ を $((V, +), \rho)$ の部分加群と呼ぶ。

$$\forall v \in W \forall r \in R (rv \in W)$$

***Def.* 12.2.2. 商加群**
左 R-加群 $((V, +), \rho)$ 上の同値関係 $\sim$ を考える。
系 *5.2.3* の意味で演算 $+$ と $\sim$ が両立かつ、$\forall r \in R$ について写像 $\rho(r)$ が $\sim$ と両立するとき、
定理 *5.2.7* より定める演算 $+'$ および環準同型 ρ' が存在する。
このとき、左 R-加群 $((V/\sim, +'), \rho')$ を左 R-加群 V の商加群と呼ぶ。

***Lem.* 12.2.1.**

左 R-加群 V とその部分加群 W について、以下で定める関係 $\sim$ は系 *5.2.3* の意味で演算 $+$ と両立かつ、$\forall r \in R$ について写像 $\rho(r)$ が $\sim$ と両立する同値関係である。

$$\forall x, y \in V(x \sim y :\leftrightarrow x + (-y) \in W)$$

Proof.

補題 7.3.3 より、$+$ と両立する同値関係である。

$x + (-y) \in W$ のとき、補題 12.1.1 より、$\forall r \in R(rx + (-(ry)) = rx + r(-y) = r(x + (-y)) \in W)$

ゆえに両立する。 ■

***Def.* 12.2.3. 剰余加群**

左 R-加群 V とその部分加群 W について、補題 *12.2.1* の定める同値関係による剰余群を、剰余加群と呼び、V/W と表す。

***Thm.* 12.2.2. 加群の準同型定理**

左 R-加群 V_1, V_2 と、線型写像 $f \in V_2^{V_1}$ に付随する同値関係 $\sim_f$ について、加群同型 $\overline{f} \in \mathrm{Im}(f)^{V/\sim_f}$ が存在する。

Proof.

$\mathrm{Im}(f)$ は V_2 の部分左加群である。

定理 7.3.9 より、得る $\overline{f}$ は群同型である。

今、$\overline{f}([rv]) = f(rv) = rf(v) = r\overline{f}([v])$ であるので線型である。 ■

12.3 自由加群

***Def.* 12.3.1. 線型包**

左 R-加群 V について、V の部分集合 W を考える。このとき、以下で定める集合 $\mathrm{Span}\, W$ は V の部分加群である。

$$\mathrm{Span}\, W := \left\{ v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists (r_m, w_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (R \times W)^{\mathbb{N}} \left(v = \sum_{m \in n} r_m w_m \right) \right\}$$

これを線型包と呼ぶ。

***Def.* 12.3.2. 生成系**

左 R-加群 V について、V の部分集合 W が以下を満たすとき、W を V の生成系と呼ぶ。

$$V = \mathrm{Span}\, W$$

***Def.* 12.3.3. 一次独立**

左 R-加群 V と、V の部分集合 W が以下を満たすとき、W は一次独立であると呼ぶ。

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall (r_m, w_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (R \times W)^{\mathbb{N}} \left(\sum_{m \in n} r_m w_m = 0_V \to \forall m \in n (r_m = 0_R) \right)$$

***Lem.* 12.3.1. 一次独立と一意性**

左 R-加群 V と、V の一次独立な部分集合 W について、以下が成り立つ。

$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \exists (r_{1,m}, w_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}, (r_{2,m'}, w_{2,m'})_{m'\in\mathbb{N}} \in (R \times W)^{\mathbb{N}}$ について、

$$\sum_{m\in n_1} r_{1,m} w_{1,m} = \sum_{m'\in n_2} r_{2,m'} w_{2,m'} \to \forall m \in n_1 (r_{1,m} = 0_R \vee \exists m' \in n_2 (r_{1,m} = r_{2,m'} \wedge w_{1,m} = w_{2,m'}))$$

Proof.

$0_V = \sum_{m\in n_1} r_{1,m} w_{1,m} = \sum_{m'\in n_2} r_{2,m'} w_{2,m'}$ より、一次独立の定義から成り立つ。 ■

***Def.* 12.3.4. 基底**

左 R-加群 V と V の部分集合 B について、B が一次独立かつ V の生成系であるとき、B を V の基底と呼ぶ。

***Def.* 12.3.5. 自由加群**

基底を持つ左 R-加群を自由加群と呼ぶ。

12.4 加群の双対

***Lem.* 12.4.1.**

可換環 R と、R-加群 (V, ρ) について、以下で定める順序対 $(\mathrm{Hom}_R(V, R), \rho')$ は R-加群である。

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_R(V, R) \forall r \in R \forall v \in V (\rho'(r)(f)(v) \coloneqq f \circ \rho(r)(v))$$

Proof.

定理 7.2.3 より、$\mathrm{Hom}_R(V, R)$ は可換群である。

ρ の環準同型性より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\rho'(r+s)(f)(v) &= f \circ \rho(r+s)(v) \\
&= f(\rho(r)(v) + \rho(s)(v)) \\
&= f \circ \rho(r)(v) + f \circ \rho(s)(v) \\
&= (\rho'(r)(f) + \rho'(r)(g))(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho'(sr)(f)(v) &= \rho'(rs)(f)(v) \\
&= f \circ \rho(rs)(v) \\
&= f \circ \rho(r) \circ \rho(s)(v) \\
&= \rho'(r)(f) \circ \rho(s)(v) \\
&= \rho'(s) \circ \rho'(r)(f)(v)
\end{aligned}$$

■

***Def.* 12.4.1. 双対加群**

補題 *12.4.1* より定まる加群を V の双対と呼び、V^* で表す。

***Def.* 12.4.2. 標準双線型式**

R-加群 V について、以下で定まる写像 $\langle | \rangle \in R^{V^* \times V}$ を標準双線形式と呼ぶ。

$$\forall (f, x) \in V^* \times V(\langle f | x \rangle \coloneqq f(x))$$

***Rem.* 12.4.1. 双対加群の補足**

R-加群 V は以下を満たす。$\forall x, y \in V \forall f, g \in V^* \forall r \in R$ とする。

1. f の線型性：$\langle f | x + y \rangle = \langle f | x \rangle + \langle f | y \rangle$
2. f の線型性：$\langle f | rx \rangle = r \langle f | x \rangle$
3. 定理 *7.2.3* より：$\langle f + g | x \rangle = \langle f | x \rangle + \langle g | x \rangle$
4. 双対加群の定義：$\langle rf | x \rangle = r \langle f | x \rangle$

***Def.* 12.4.3. 双対写像**

R-加群 V, W を考える。線型写像 $u \in W^V$ について、以下で定まる写像 $u^* \in (V^*)^{W^*}$ を双対写像と呼ぶ。

$$\forall f \in W^*(u^*(f) \coloneqq f \circ u)$$

ゆえに、$\langle f | u(x) \rangle = \langle u^*(f) | v \rangle$ が直ちに求まる。

12.5 加群の積

***Def.* 12.5.1. 直積加群**

環 R と、写像 $V \in Z^\Lambda$ を考える。$\forall \lambda \in \Lambda$ について、$V(\lambda)$ は左 R-加群であるとする。
以下で定める順序対 $((\prod V, +), \rho)$ は左加群である。

$$\forall v_1, v_2 \in \prod V \forall \lambda \in \Lambda((v_1 + v_2)(\lambda) \coloneqq v_1(\lambda) + v_2(\lambda))$$
$$\forall v \in \prod V \forall r \in R \forall \lambda \in \Lambda((rv)(\lambda) \coloneqq rv(\lambda))$$

この左 R-加群を V の直積加群または直積と呼ぶ。

***Def.* 12.5.2. 直和加群**

環 R と、写像 $V \in Z^\Lambda$ を考える。$\forall \lambda \in \Lambda$ について、$V(\lambda)$ は左 R-加群であるとする。
以下で定める順序対 $((\bigoplus V, +), \rho)$ は左加群である。

$$\bigoplus V \coloneqq \left\{ v \in \prod V \mid \left| \left\{ \lambda \in \Lambda \mid v(\lambda) \neq 0_{V(\lambda)} \right\} \right| < \infty \right\}$$

この左 R-加群を V の直積加群または直和と呼ぶ。

***Cor.* 12.5.1.**
直和 $\bigoplus V$ は、直積 $\prod V$ の部分加群である。

***Cor.* 12.5.2.**
$V \in Z^{\Lambda}$ を考える。$\forall \lambda \in \Lambda$ について、$V(\lambda)$ は左 R-加群であるとする。
$|\Lambda| < \infty$ ならば $\bigoplus V = \prod V$ である。

***Lem.* 12.5.3.**
可換環 R と、R-加群 V_1, V_2、写像 $A \in \{R\}^{V_1 \times V_2}$ を考える。
以下で定める単射 $\varphi \in (\bigoplus A)^{V_1 \times V_2}$ を考える。

$$\varphi(x,y)(x',y') = \begin{cases} 1_R & (x = x' \wedge y = y') \\ 0_R & (otherwise) \end{cases}$$

さらに以下で定める B は、$\bigoplus A$ の部分加群である。

$$\begin{aligned} B_1 &\coloneqq \{\varphi(x_1 + x_2, y) - \varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y) \mid x_1, x_2 \in V_1, y \in V_2\} \\ B_2 &\coloneqq \{\varphi(x, y_1 + y_2) - \varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2) \mid x \in V_1, y_1, y_2 \in V_2\} \\ B_3 &\coloneqq \{r\varphi(x,y) - \varphi(rx, y) \mid r \in R, x \in V_1, y \in V_2\} \\ B_4 &\coloneqq \{r\varphi(x,y) - \varphi(x, ry) \mid r \in R, x \in V_1, y \in V_2\} \\ B &\coloneqq \mathrm{Span}\left(\bigcup \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right) \end{aligned}$$

Proof.
$\bigcup \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \subset \bigoplus A$ より明らか。 ■

***Def.* 12.5.3. テンソル積**
可換環 R と、R-加群 V_1, V_2、写像 $A \in \{R\}^{V_1 \times V_2}$ を考える。
補題 *12.5.3* の主張する R-加群 B について、剰余加群 $(\bigoplus A)/B$ をテンソル積と呼び、$V_1 \bigotimes V_2$ と表す。
さらに補題 *12.5.3* の定める φ について、$[\varphi(x,y)]$ を $x \otimes y$ と表す。

***Rem.* 12.5.1. テンソル積の補足**
可換環 R と、R-加群 V_1, V_2 は以下を満たす。$\forall x, x_1, x_2 \in V_1 \forall y, y_1, y_2 \in V_2 \forall r \in R$ とする。

1. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$
2. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$
3. $r(x \otimes y) = (rx) \otimes y = x \otimes (ry)$

13　体論

13.1　体

***Def.* 13.1.1. 体**
可換環 $((F,+),\times)$ が以下を満たすとき、体と呼ぶ。

$$F^\times = F\setminus\{0_F\}$$

さらに、$x\times y^{-1}$ を x/y と略記する。

***Cor.* 13.1.1.**
体は零環ではない。

***Def.* 13.1.2. 部分体**
体 F の部分環 R が、体をなすとき、体 R を体 F の部分体と呼ぶ。

Thm.* 13.1.2. 体は *ED
体 F は *Euclid* 整域である。

Proof.
まず、整域であることを示す。
整域でないとすると、$\forall x,y\in F(xy=0_F\land x\neq 0_F\land y\neq 0_F)$ である。
$y=x^{-1}xy=x^{-1}0_F=0_F$ より矛盾。ゆえに整域。
$\forall a\in F\forall b\in D\setminus\{0_D\}$ について、$q=ab^{-1}\land r=0_D$ として成り立つ。　■

***Thm.* 13.1.3. 極大イデアルと体**
可換環 R とイデアル I について、以下の 2 つは同値である。

1. I は極大イデアル
2. 剰余環 R/I は体

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$\forall a\in R\bigl([a]\neq 0_{R/I}\bigr)$ を考える。
$a\notin I$ である。ここで、$J\coloneqq\{ra+i\mid (r,i)\in R\times I\}$ を考える。
定義より $I\subset J$ であり、J はイデアル。ゆえに I の極大性から $J=R$
したがって $\exists(r,i)\in R\times I(ra+i=1_R)$ である。
よって $1_{R/I}=[1_R]=[ra+i]=[r][a]+[i]=[r][a]$ より、$[r]=[a]^{-1}$

2. $\to$ 1. を示す。
I が極大イデアルでないとする。すなわちイデアル J が存在して、$I\subsetneq J\subsetneq R$ である。
$\forall a\in J\setminus I$ について、$[a]\neq 0_{R/I}$ である。
体であるので、$\exists b\in R([b][a]=[1_R])$ である。

したがって $ba - 1_R \in I \subset J$ である。ここで、$a \in J$ より $ba \in J$

イデアルは加法について群をなすので $1_R = ba - (ba - 1_R) \in J$ である。したがって $J = R$ となり矛盾。 ■

***Thm.* 13.1.4. 体準同型は単射**

体 F、零環ではない環 R について、環準同型 $\varphi \in R^F$ は単射である。

Proof.

$\{0_F\}$ は、定理 13.1.3 より、極大イデアルである。

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ はイデアルであり、$\{0_F\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ である。

ゆえに、$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_F\} \vee \mathrm{Ker}(\varphi) = F$

零環でない R について、$\varphi(1_F) = 1_R \neq 0_R$ より、$1_R \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$

したがって、$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_F\}$

定理 7.2.2 より単射。 ■

13.2 体上の加群

***Thm.* 13.2.1. 基底の存在**

体 F について、$\{0_V\}$ でない F-加群 V は自由加群である。

Proof.

$\mathcal{S} \coloneqq \{S \in \mathfrak{P}(V) \mid S \text{ は一次独立 }\}$ について $(\mathcal{S}, \subset)$ は半順序集合である。

$\exists v \in V \setminus \{0_V\}$ について、$\exists r \in F(rv = 0_V)$ と仮定すると、F は体であることより $v = r^{-1}0_V = 0_V$ となり反する。

ゆえに、$\{v\} \in \mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ の全順序部分 T を考える。

$\forall n \in \mathbb{N} \forall (x_m)_{m \in n} \in \left(\bigcup T\right)^n$ について、$\forall m \in n \exists S_m \in T(x_m \in S_m)$

$\{S_m \mid m \in n\}$ は全順序な有限集合であるので、定理 5.3.10 より最大元を持つ。

ゆえに、$\bigcup T$ は一次独立すなわち、$\bigcup T \in \mathcal{S}$

したがって $\mathcal{S}$ は帰納的である。

定理 3.4.5 より、極大元 S_0 が存在する。

S_0 が生成系でないと仮定すると、一次独立な新たな元がとれるので、極大性に反する。 ■

***Lem.* 13.2.2. 次元**

体 F について、F-加群 V を考える。V の任意の基底 B_1, B_2 について、全単射 $f \in B_2^{B_1}$ が存在する。

Proof.

$P \coloneqq \left\{\varphi \in \bigcup \left\{B_2^D \mid D \in \mathfrak{P}(B_1) \wedge B_1 \cap B_2 \subset D\right\} \mid \varphi|_{B_1 \cap B_2} = \mathrm{id}_{B_1 \cap B_2} \wedge C(\varphi) \coloneqq \mathrm{dom}(\varphi) \cup (B_2 \setminus \mathrm{Im}(\varphi)) \text{ は一次独立}\right\}$ を考える。

ここで $p \in B_2^{B_1 \cap B_2}$ について、B_2 が基底であることから $p \in P$ である。

P 上の半順序 $\preccurlyeq$ を以下のように定義する。

$$\varphi \preccurlyeq \psi :\leftrightarrow \mathrm{dom}(\varphi) \subset \mathrm{dom}(\psi) \wedge \psi|_{\mathrm{dom}(\varphi)} = \varphi$$

P の全順序部分 Q を考える。

自明な単射 $q \in B_2^{\bigcup \{\mathrm{dom}(\varphi) | \varphi \in Q\}}$ が存在する。
$C(q)$ が一次独立でないとすると、$\exists C' \in \mathfrak{P}(C(q))(|C'| < \infty \land C'$は一次独立でない)
$\forall c \in C' \exists \varphi_c \in Q(c \in \mathrm{dom}(\varphi_c) \cup B_2)$ であり、定理 5.3.10 より、$\{\varphi_c \mid c \in C'\} \subset Q$ は最大元 φ_q を持つ。
ここで、$\mathrm{Im}(\varphi_q) \subset \mathrm{Im}(q)$ であるので、$C' \subset C(\varphi_q)$ であり、$C(\varphi_q)$ が一次独立であることに反する。
ゆえに q は上界であり、すなわち P は帰納的である。
定理 3.4.5 より、極大元 σ が存在する。

$\exists b' \in B_2 \setminus \mathrm{Im}(\sigma)$ であるとする。このとき $b' \notin B_1$ より、$b' \notin \mathrm{dom}(\sigma)$ である。
$H \coloneqq \mathrm{Span}\,(C(\sigma) \setminus \{b'\})$ を考える。一次独立性から $b' \notin H$
ここで B_1 は基底より、$\exists n \in \mathbb{N} \exists (r_m, b_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (R \times B_1)^{\mathbb{N}} \left(b' = \sum_{m \in n} r_m b_m\right)$ と書ける。
$b' \notin H$ より、$\exists m \in n(b_m \notin H)$ であり、$b_m \notin \mathrm{dom}(\sigma)$ である。
今、以下を満たす写像 $\tau \in B_2^{\mathrm{dom}(\sigma) \cup \{b_m\}}$ を考える。

$$\tau|_{\mathrm{dom}(\sigma)} = \sigma \land \tau(b_m) = b'$$

$b' \notin \mathrm{Im}(\sigma)$ より単射。F は体より、$C(\tau) = (C(\sigma) \setminus \{b'\}) \cup \{b_m\}$ は一次独立である。
ゆえに $\tau \in P$ であり $\sigma \prec \tau$ より、σ の極大性に反する。
背理法より σ は全射である。定理 2.3.8 より、単射な右逆写像 $s \in B_1^{B_2}$ が存在する。

同様に、単射 $t \in B_2^{B_1}$ が存在する。
定理 5.4.4 より、全単射 $f \in B_2^{B_1}$ が存在する。 ■

***Def.* 13.2.1. 次元**
体 F について、F-加群 V について考える。
定理 *13.2.1* より、V は基底 B を持つ。B が有限であるとき、補題 *13.2.2* より、V の基底の要素数は一意に定まる。この要素数を、V の次元 $\dim V$ と呼ぶ。

13.3 体上の多項式

***Thm.* 13.3.1. 体上の多項式環は *Euclid* 整域**
体 F 上の多項式環 $F[X]$ は *Euclid* 整域である。

Proof.
F が整域であることから、系 9.4.4 より $F[X]$ は整域である。

$f \in F[X], g \in F[X] \setminus \left\{0_{F[X]}\right\}$ を考える。
$f = 0_{F[X]}$ について、$f = 0_{F[X]} \times g + 0_{F[X]}$ である。

$f \neq 0_{F[X]}$ とする。
$\deg(f) < \deg(g)$ について、$f = 0_{F[X]} \times g + f$ が成り立つ。

$\deg(f) \geq \deg(g)$ とする。
$\deg(f) = 0$ のとき $\deg(g) = 0$ より、以下の q について、$f = q \times g + 0_{F[X]}$ である。

$$q(n) = f(n)g(0)^{-1}$$

$n \geq \deg(f)$ について成り立つとき、$s(n) = \deg(f)$ でも成り立つことを示す。

以下の $h \in F[X]$ を考える。

$$h(m) = \begin{cases} f(m) - f(\deg(f))g(\deg(g))^{-1}g(m - \deg(f) + \deg(g)) & (m \geq \deg(f) - \deg(g)) \\ f(m) & (m < \deg(f) - \deg(g)) \end{cases}$$

$h = 0_{F[X]}$ のとき、以下の q について、$f = dg + 0_{F[X]}$ で成り立つ。

$$d(m) = \begin{cases} f(\deg(f))g(\deg(g))^{-1} & (m = \deg(f) - \deg(g)) \\ 0_R & (m \neq \deg(f) - \deg(g)) \end{cases}$$

$h \neq 0_{F[X]}$ のとき、$\deg(h) \leq n$ となる。帰納法の仮定より、$h = qg + r \wedge \deg(r) < \deg(g)$
ゆえに、$f = dg + h = (d + q)g + r \wedge \deg(r) < \deg(g)$
定理 4.1.7 より成り立つ。

系 9.4.4 より、$\forall f, g \in F[X] \setminus \{0_{F[X]}\}(\deg(f) \leq \deg(fg))$ より成り立つ。 ■

***Thm.* 13.3.2. 剰余の定理**
定理 *13.3.1* より、体 F 上の多項式環 $F[X]$ には除法が定義される。この除法は一意である。

Proof.
体 F と、$g \in F[X] \setminus \{0_{F[X]}\}$ を考える。
$q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2 \wedge (r_1 = 0_{F[X]} \vee \deg(r_1) < \deg(g)) \wedge (r_2 = 0_{F[X]} \vee \deg(r_2) < \deg(g))$ とする。
$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ である。
$r_2 \neq r_1$ のとき、$deg(g) > \deg(r_2 - r_1) = \deg(q_1 - q_2) + \deg(g) \geq \deg(g)$ より矛盾。
したがって $r_1 = r_2$ である。整域より $q_1 = q_2$ ■

***Def.* 13.3.1. 代数的**
体 E と、E の部分体 F、元 $x \in E$ について、以下を満たすとき、元 x が F 上代数的と呼ぶ。

$$\exists f \in F[X] \setminus \{0_{F[X]}\}(f(x) = 0_E)$$

***Thm.* 13.3.3. 最小多項式**
体 E と、E の部分体 F、F 上代数的な元 $x \in E$ について、x を根に持つ次数既約な多項式 f が存在する。

Proof.
以下を満たす環準同型 $\varphi \in E^{F[X]}$ を考える。

$$\varphi(g) = g(x)$$

ここで、E は体すなわち整域より、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は素イデアルである。
定理 13.1.2 と定理 9.3.5 より、$f\big| = \mathrm{Ker}(\varphi)$ なる多項式 $f \in F[X]$ が存在する。
定義より、$\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{F[X]}\}$ であるので、f は素元。 ■

***Def.* 13.3.2. 代数的閉体**
体 F 上の多項式環 $F[X]$ を考える。
$F[X]$ の任意の次数既約な多項式 f について、$\deg(f) = 1$ であるとき、F を代数的閉体と呼ぶ。

14　代数上の順序

14.1　順序群

***Def.* 14.1.1. 順序群**
　非自明な可換群 $(G, +)$ 上の全順序 $\leq$ が以下を満たすとき、順序対 $((G, +), \leq)$ を順序群と呼ぶ。または単に G と書いて順序群を表す。

$$\forall a, b, c \in G(a \leq b \to a + c \leq b + c)$$

***Cor.* 14.1.1.**
　順序群 G について、以下が成り立つ。

$$\forall a, b, c \in G(a < b \to a + c < b + c)$$

***Lem.* 14.1.2.**
　順序群 G は最大元と最小元を持たない。

Proof.
　非自明性から $\exists a \in G(a \neq 0_G)$ であり、全順序性から $0_G < a \vee a < 0_G$ である。
　$0_G = (-a) + a < 0_G + a = a$ であるとき、定義 14.1.1 より $-a < 0_G$ である。
　任意の元 $b \in G$ について、$b < b + a$ より最大元ではなく、$b + (-a) < b$ より最小元でもない。
　$a < 0_G$ についても同様である。　■

***Def.* 14.1.2. 正錐**
　順序群 G について、以下の集合を G^+ で表す。

$$G^+ := \{g \in G \mid 0_G < g\}$$

***Def.* 14.1.3. *Archimedes* の原理**
　順序群 G が以下を満たすとき、G は *Archimedes* 的であると呼ぶ。

$$\forall x, y \in G^+ \exists n \in \mathbb{Z}^+(x < ny)$$

　ただし ny の表記は、定理 *12.1.3* による。

***Lem.* 14.1.3. 順序群の三角性**
　順序群 G について、G^+ が最小元を持たないとき以下が成り立つ。

$$\forall g \in G^+ \exists g' \in G^+(g' + g' \leq g)$$

Proof.
最小元を持たないので、$\exists g_1 \in G^+(g_1 < g)$ である。
$g_1 + g_1 \leq g$ のとき、$g' = g_1$ として明らか。
$g_1 + g_1 > g$ のとき、$g' \coloneqq g - g_1$ について、$g' + g' = g + g - g_1 - g_1 < g$ ■

14.2 順序環

***Def.* 14.2.1. 順序環**
順序群 $((R,+),\leq)$ について、順序対 $((R,+),\times)$ が可換環でありかつ以下を満たすとき、順序対 $(((R,+),\times),\leq)$ を順序環と呼ぶ。

$$\forall a,b \in R(0_R < a \land 0_R < b \to 0_R < a \times b)$$

***Lem.* 14.2.1. 順序環の性質**
順序環 R について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in R(a \neq 0_R \to 0_R < aa)$$
$$0_R < 1_R$$
$$\forall a \in R^\times\left(0_R < a \to 0_R < a^{-1}\right)$$

Proof.
$0_R < a$ のとき順序環の定義より明らか。$a < 0_R$ のとき $0_R < -a$ であり、補題 8.1.1 より $aa = (-a)(-a)$ であるので示される。

零環でないので、$0_R \neq 1_R$ である。すでに示した第一式より $0_R < 1_R 1_R = 1_R$

$a^{-1} \leq 0_R$ とすると、$0_R \leq a(-a^{-1}) = -1_R$ ゆえに $1_R \leq 0_R$ となりすでに示した第二式に矛盾。 ■

***Lem.* 14.2.2. 順序環の三角性**
順序環 R について、以下が成り立つ。

$$\forall r \in R^+ \exists r' \in R^+(r' \times r' \leq r)$$

Proof.
$1_R \leq r$ のとき、$r' = 1_R$ として成り立つ。
$0_R < r < 1_R$ のとき、$rr < r$ より、$r' = r$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 14.2.3. 順序環は整域**
順序環は整域である。

Proof.

整域でないとすると、$\exists a, b \in R(ab = 0_R \wedge a \neq 0_R \wedge b \neq 0_R)$
$r \coloneqq a, b \in R$ について、$0_R < r \vee r < 0_R$ で場合分けすることにより矛盾を得る。背理法より示される。 ■

Def. **14.2.2. 順序体**
順序環が体であるとき、順序体と呼ぶ。

Thm. **14.2.4. 順序体の稠密性**
順序体 F について、

$$\forall a, b \in F(a < b \to \exists c \in F(a < c \wedge c < b))$$

Proof.
$a, b \in F$ として、$0_F < 1_F + 1_F$ より、

$$c \coloneqq (a + b) \times (1_F + 1_F)^{-1}$$

は条件を満たす。 ■

15　有理数

15.1　有理数の構成

***Lem.* 15.1.1. 有理数の準備：前順序**
直積集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上で以下の自己関係 $\preccurlyeq_Q$ は前順序である。

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})((a_1, a_2) \preccurlyeq_Q (b_1, b_2) :\leftrightarrow a_1a_2b_2b_2 \leq b_1a_2a_2b_2)$$

Proof.
反射的である。

推移的であることを示す。

$$\begin{gathered} a_1a_2b_2b_2 \leq a_2a_2b_1b_2 \land b_1b_2c_2c_2 \leq b_2b_2c_1c_2 \\ a_1a_2b_2b_2c_2c_2 \leq a_2a_2b_1b_2c_2c_2 \land a_2a_2b_1b_2c_2c_2 \leq a_2a_2b_2b_2c_1c_2 \\ a_1a_2b_2b_2c_2c_2 \leq a_2a_2b_2b_2c_1c_2 \\ a_1a_2c_2c_2 \leq a_2a_2c_1c_2 \end{gathered}$$

したがって、前順序である。　■

***Lem.* 15.1.2. 有理数の準備：前順序の全域性**
直積集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上で補題 *15.1.1* の前順序 $\preccurlyeq_Q$ は以下を満たす。

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})(a \preccurlyeq_Q b \lor b \preccurlyeq_Q a)$$

Proof.
整数の全順序性より明らか。　■

***Lem.* 15.1.3. 有理数の準備：加法可換群**
直積集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上の以下の演算 $+$ は可換群をなす。

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})((a_1, a_2) + (b_1, b_2) :\leftrightarrow (a_1b_2 + b_1a_2, a_2b_2))$$

Proof.
$\mathbb{Z}$ は整域よりマグマである。

結合法則を示す。

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a_1, a_2) + (b_1c_2 + c_1b_2, b_2c_2) \\ &= ((b_1c_2 + c_1b_2)a_2 + a_1(b_2c_2), a_2b_2c_2) \\ &= (a_2b_2c_1 + (b_1a_2 + a_1b_2)c_2, a_2b_2c_2) \\ &= (a_1b_2 + b_1a_2, a_2b_2) + (c_1, c_2) \\ &= ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) \end{aligned}$$

$(0,1)$ は単位元である。
(a_1,a_2) に対して、$(-a_1,a_2)$ は逆元である。
交換法則は、整数の可換環としての性質より明らか。 ■

Lem. 15.1.4. 有理数の準備：乗法可換モノイド
直積集合 $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ 上の以下の演算 $\times$ について、可換モノイドをなす。

$$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})((a_1,a_2)\times(b_1,b_2):\leftrightarrow(a_1b_1,a_2b_2))$$

Proof.
$\mathbb{Z}$ は整域より $\times$ はマグマであり、$\mathbb{Z}$ が環であることから半群である。

$(1,1)$ は単位元である。

$\mathbb{Z}$ が可換環であることから可換である。 ■

Lem. 15.1.5. 有理数の準備：同値類
直積集合 $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ 上で以下の自己関係 $\sim_Q$ は同値類である。

$$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})((a_1,a_2)\sim_Q(b_1,b_2):\leftrightarrow(a_1,a_2)\preccurlyeq(b_1,b_2)\land(b_1,b_2)\preccurlyeq(a_1,a_2))$$

Proof.
補題 15.1.1 より前順序。明らかに対称的であるので、同値類である。 ■

Lem. 15.1.6. 約分

$$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}((a_1,a_2)\sim_Q(b_1,b_2)\leftrightarrow a_1b_2=a_2b_1)$$

Proof.
補題 10.2.7 より明らか。 ■

Lem. 15.1.7. 有理数の準備：両立
直積集合 $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ 上で補題 *15.1.5* の同値類 $\sim_Q$ は、補題 *15.1.1* の前順序、補題 *15.1.3* の加法、補題 *15.1.4* の乗法のそれぞれと両立する。

Proof.
前順序と両立することは、$\sim_Q$ の定義と前順序の推移性より明らか。

$(a_1, a_2) \sim_Q (a'_1, a'_2) \wedge (b_1, b_2) \sim_Q (b'_1, b'_2)$ とする。

$$
\begin{gathered}
a_1 a'_2 b_2 b'_2 = a_2 a'_1 b_2 b'_2 \wedge a_2 a'_2 b_1 b'_2 = a_2 a'_2 b_2 b'_1 \\
a_1 a'_2 b_2 b'_2 + a_2 a'_2 b_1 b'_2 = a_2 a'_1 b_2 b'_2 + a_2 a'_2 b_2 b'_1 \\
(a_1 b_2 + a_2 b_1) a'_2 b'_2 = (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1) a_2 b_1 \\
(a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_2) \sim_Q (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1, a'_2 b'_2)
\end{gathered}
$$

$(a_1, a_2) \sim_Q (a'_1, a'_2) \wedge (b_1, b_2) \sim_Q (b'_1, b'_2)$ とする。補題 10.2.7 より、

$$
\begin{gathered}
a_1 a'_2 b_1 b'_2 = a'_1 a_2 b'_1 b_2 \\
(a_1 b_1)(a'_2 b'_2) = (a'_1 b'_1)(a_2 b_2)
\end{gathered}
$$

■

***Def.* 15.1.1. 有理数**

補題 *15.1.7* より定まる商マグマ $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim_Q$ を有理数と呼び、$\mathbb{Q}$ で表す。また、その元も有理数と呼ぶ。

定義より $\mathbb{Q}$ は可換群である。

15.2 有理数の性質

***Lem.* 15.2.1. 体としての有理数**

可換群 $(\mathbb{Q}, +)$ 上の補題 *15.1.7* より定まる演算 $\times$ は、体をなす。

Proof.

右分配法則を示す。補題 15.1.6 より、

$$
\begin{aligned}
([(a_1, a_2)] + [(b_1, b_2)]) \times [(c_1, c_2)] &= [(a_1 b_2 + b_1 a_2, a_2 b_2)] \times [(c_1, c_2)] \\
&= [((a_1 b_2 + b_1 a_2) c_1, a_2 b_2 c_2)] \\
&= [(a_1 c_1 b_2 + b_1 c_1 a_2, a_2 b_2 c_2)] \\
&= [(a_1, a_2)] \times [(c_1, c_2)] + [(b_1, b_2)] \times [(c_1, c_2)]
\end{aligned}
$$

左分配法則は、右分配法則と交換法則より示される。

(a_1, a_2) について、$a_1 \neq 0$ ならば逆元 (a_2, a_1) が存在する。

$a_1 = 0$ のとき、$[(0, a_2)] = [(0, 0)] = 0_{\mathbb{Q}}$

ゆえに、$\mathbb{Q}^{\times} = \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ ■

***Lem.* 15.2.2. 有理数の準備：全順序**

補題 *15.1.7* より与えられる $\mathbb{Q}$ 上の前順序 $\leq$ は全順序である。

Proof.

$\sim_Q$ の定義より反対称的である。

補題 15.1.2 より全順序である。 ■

***Thm.* 15.2.3. 順序体としての有理数**

$(\mathbb{Q}, \leq)$ は順序体である。

Proof.
補題 15.2.2 より全順序。

第一式について、$a = [(a_1, a_2)], b = [(b_1, b_2)], c = [(c_1, c_2)]$ として、$\mathbb{Z}$ が順序環であることより、

$$\begin{aligned}
a_1a_2b_2b_2 &< a_2a_2b_1b_2 \\
a_1a_2b_2b_2c_2c_2 &< a_2a_2b_1b_2c_2c_2 \\
a_1a_2b_2b_2c_2c_2 + a_2a_2b_2b_2c_1c_2 &< a_2a_2b_1b_2c_2c_2 + a_2a_2b_2b_2c_1c_2 \\
(a_1c_2 + a_2c_1)a_2b_2b_2c_2 &< (b_1c_2 + b_2c_1)a_2a_2b_2c_2 \\
(a_1c_2 + a_2c_1)a_2b_2b_2c_2c_2c_2 &< (b_1c_2 + b_2c_1)a_2a_2b_2c_2c_2c_2 \\
(a_1c_2 + a_2c_1)(a_2c_2)(b_2c_2)(b_2c_2) &< (b_1c_2 + b_2c_1)(a_2c_2)(a_2c_2)(b_2c_2) \\
[(a_1c_2 + a_2c_1, a_2c_2)] &< [(b_1c_2 + b_2c_1, b_2c_2)]
\end{aligned}$$

第二式について、$a = [(a_1, a_2)], b = [(b_1, b_2)]$ とすると、$0 < a_1a_2 \land 0 < b_1b_2$ である。
ゆえに、$0_{\mathbb{Z}} < (a_1b_1)(a_2b_2)$ であるので、$0_{\mathbb{Q}} < ab$ ■

***Lem.* 15.2.4.**
写像 $\varphi \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}, \varphi(a) = [(a, 1)]$ は以下を満たす。

1. 単射
2. 加法、乗法について環準同型
3. 全順序と両立

Proof.
定義より明らか。 ■

***Def.* 15.2.1. 整数の有理数への埋め込み**
補題 *15.2.4* の写像 φ について、像 $\varphi(\mathbb{Z})$ を誤解のない範囲で整数 $\mathbb{Z}$ と呼ぶ。

***Cor.* 15.2.5.**

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

***Thm.* 15.2.6. $\mathbb{Q}$ 上の *Archimedes* の原理**
順序体 $\mathbb{Q}$ は *Archimedes* 的である。

Proof.
$a = [(a_1, a_2)]$ とする。
$a_2 < 0$ のとき、補題 15.1.6 より $a_2 > 0$ とする a_1, a_2 をとることができる。
$a > 0$ のとき、$a_1a_2 > 0$ であるので、背理法から $a_1 > 0$ である。
また、以下を満たす。

$$2a_1 > a$$

$a \leq 0$ のとき、$n = 1$ は満たす。

よって示される。　■

16 位相空間

16.1 位相

***Def.* 16.1.1. 開基**

空でない集合 X について、以下を満たす集合系 $\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ を開基と呼ぶ。

$$\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}(x \in B)$$
$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B_1 \cap B_2)$$

***Def.* 16.1.2. 開集合系**

空でない集合 X の開基 $\mathcal{B}$ について、以下で与える集合系 $\mathcal{O}$ を開集合系と呼ぶ。

$$\mathcal{O} := \{O \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset O)\}$$

また、$\mathcal{O}$ の要素を開集合と呼ぶ。

***Cor.* 16.1.1.**

空でない集合 X の開基 $\mathcal{B}$ と、$\mathcal{B}$ の与える開集合系 $\mathcal{O}$ は、以下を満たす。

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$$

***Lem.* 16.1.2. 開集合系の一意性**

集合 X の開基 $\mathcal{B}$ と集合系 $\mathcal{B}' \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ について、以下を満たすとき、$\mathcal{B}'$ は開基である。

$$\forall B' \in \mathcal{B}' \forall x \in B' \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B')$$
$$\forall B \in \mathcal{B} \forall x \in B \exists B' \in \mathcal{B}'(x \in B' \land B' \subset B)$$

さらに $\mathcal{B}$ の定める開集合系と、$\mathcal{B}'$ の定める開集合系、この 2 つは一致する。

Proof.

第一式を考える。定義 16.1.1 第一式から $\exists B \in \mathcal{B}$ であり、$\exists x \in X$ より、仮定から $\exists B' \in \mathcal{B}'$

第二式を考える。仮定より $\forall B_1', B_2' \in \mathcal{B}' \forall x \in B_1' \cap B_2' \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x \in B_1 \cap B_2 \subset B_1' \cap B_2')$ である。
定義 16.1.1 第二式から $\exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset B_1 \cap B_2)$ である。再び仮定より、$\exists B' \in \mathcal{B}(x \in B' \subset B \subset B_1' \cap B_2')$

$\forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B} \exists B' \in \mathcal{B}'(x \in B' \subset B \subset O)$ である。ゆえに、$O \in \mathcal{O}'$ である。
同様に $\forall O' \in \mathcal{O}'(O \in \mathcal{O}')$ である。 ■

***Thm.* 16.1.3. 開集合系の公理**

空でない集合 X の開集合系 $\mathcal{O}$ について、以下が成り立つ。

$$X \in \mathcal{O}$$
$$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O})$$
$$\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{O})\Bigl(\bigcup A \in \mathcal{O}\Bigr)$$

Proof.
第一式を示す。
定義 16.1.1 第一式より、$\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \wedge B \subset X)$ であるので、$X \in \mathcal{O}$

第二式を示す。$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ について、$\forall x \in O_1 \cap O_2 \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x \in B_1 \cap B_2 \wedge B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2)$
定義 16.1.1 第二式より、$\exists B \in \mathcal{B}(x \in B \wedge B \subset B_1 \cap B_2)$ であるので、$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

第三式を示す。$A \in \mathfrak{P}(\mathcal{O})$ について、$\forall x \in \bigcup A \exists O \in \mathcal{O} \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \wedge B \subset O \wedge O \subset \bigcup A)$ であるので $\bigcup A \in \mathcal{O}$
■

***Lem.* 16.1.4. 開集合系の公理を満たす集合系**
空でない集合 X と、定理 *16.1.3* を満たす集合系 $\mathcal{O}$ を考える。
このとき $\mathcal{O}$ は開基であり、さらに、$\mathcal{O}$ の定める開集合系 $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ に一致する。

Proof.
定理 16.1.3 第一式、第二式より、開基である。

定義 16.1.2 より $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ を得る。
定義 16.1.2 より $\forall O' \in \mathcal{O}' \forall x \in O' \exists O_x \in \mathcal{O}(x \in O_x \wedge O_x \subset O')$ である。
$O' = \bigcup\{O_x \mid x \in O'\} \in \mathcal{O}$ である。 ■

***Def.* 16.1.3. 位相空間**
空でない集合 X と、X 上の開集合系 $\mathcal{O}$ について、順序対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間と呼ぶ。または単に X と書き、位相空間と集合どちらも表すものとする。
$\mathcal{O}$ をとくに位相と呼ぶ。また、位相空間の元を点と呼ぶ。

***Def.* 16.1.4. 連続**
位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$ について、写像 $f \in (X')^X$ が以下を満たすとき、f は連続であると呼ぶ。

$$\forall O' \in \mathcal{O}'\bigl(f^{-1}(O') \in \mathcal{O}\bigr)$$

***Lem.* 16.1.5. 開基と連続**
位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$ と X' の開基 $\mathcal{B}'$、および写像 $f \in (X')^X$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. f は連続。

2. $\forall B' \in \mathcal{B}'\bigl(f^{-1}(B') \in \mathcal{O}\bigr)$

Proof.

1. $\to$ 2. は、$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ より明らか。

2. $\to$ 1. を示す。$O' \in \mathcal{O}'$ について考える。
定理 16.1.3 より $\forall x \in O' \exists B' \in \mathcal{B}'(x \in B' \land B' \subset O')$ である。
ゆえに、$O' = \bigcup\{B'(x) \mid x \in O'\}$ である。。
定理 2.2.6 より $f^{-1}(O') = \bigcup\bigl\{f^{-1}(B'(x)) \mid x \in O'\bigr\}$ であるので、定理 16.1.3 第三式より示される。 ■

***Thm.* 16.1.6. 連続写像の合成**
位相空間 X, Y, Z について、写像 $f \in Y^X, g \in Z^Y$ がともに連続であるとき、合成 $g \circ f$ は連続である。

Proof.
$\forall O_Z \in \mathcal{O}_Z\bigl(g^{-1}(O_Z) \in \mathcal{O}_Y\bigr)$ であり、$f^{-1}(g^{-1}(O_Z)) \in \mathcal{O}_X$ である。 ■

***Def.* 16.1.5. 同相**
位相空間 X, X' と写像 $f \in (X')^X$ について、f が全単射かつ f と f^{-1} がともに連続であるとき、f を同相写像と呼ぶ。
また、同相写像 $f \in Y^X$ が存在するとき、X と Y は位相同型または同相であると呼ぶ。

16.2 誘導位相

***Lem.* 16.2.1.**
空でない集合 X と、位相空間 $(X', \mathcal{O}')$、$\mathcal{O}'$ を与える X の開基 $\mathcal{B}'$、写像 $f \in (X')^X$ を考える。
このとき、以下の集合系 $\mathcal{B}$ は X の開基である。

$$\mathcal{B} \coloneqq \bigl\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}'\bigr\}$$

さらに、$\mathcal{B}$ の与える開集合系 $\mathcal{O}_1$ と、$\mathcal{O}'$ からこの補題により与える開基 $\mathcal{O}_2$ は一致する。

Proof.
第一式を考える。$\forall x \in X$ について、定義 16.1.1 第一式より $\exists B' \in \mathcal{B}'(f(x) \in B')$ であるので、$x \in f^{-1}(B')$

第二式を考える。$\forall B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}'$ について考える。
$\forall x \in f^{-1}(B'_1) \cap f^{-1}(B'_2)$ について、定理 2.2.6 より $f(x) \in B'_1 \cap B'_2$ である。
ゆえに定義 16.1.1 第二式より $\exists B' \in \mathcal{B}'(f(x) \in B' \land B' \subset B'_1 \cap B'_2)$ である。
定理 2.2.6 より $x \in f^{-1}(B') \land f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B'_1 \cap B'_2) = f^{-1}(B'_1) \cap f^{-1}(B'_2)$

補題 16.1.4 を用いて、$\mathcal{O}_2$ が開集合であることを示す。
第一式を考える。定理 16.1.3 第一式より $X' \in \mathcal{O}'$ であるので、$X = f^{-1}(X') \in \mathcal{O}_2$
第二式を考える。定理 2.2.6 と定理 16.1.3 第二式より $\forall O'_1, O'_2 \in \mathcal{O}'\bigl(f^{-1}(O'_1) \cap f^{-1}(O'_2) = f^{-1}(O'_1 \cap O'_2) \in \mathcal{O}_2\bigr)$
第三式を考える。定理 2.2.6 と定理 16.1.3 第三式より $\forall A' \in \mathfrak{P}(\mathcal{O}')\bigl(\bigcup\bigl\{f^{-1}(O') \mid O' \in A'\bigr\} = f^{-1}(\bigcup A') \in \mathcal{O}_2\bigr)$
ゆえに $\mathcal{O}_2$ は開集合系である。

$\forall B' \in \mathcal{B}' \forall x \in f^{-1}(B') \big(f^{-1}(B') \in \mathcal{O}_2 \land x \in f^{-1}(B') \big)$ である。

$\forall O' \in \mathcal{O}' \forall x \in f^{-1}(O')$ について、$\exists B' \in \mathcal{B}' (f(x) \in B' \land B' \subset O')$ である。

よって、定理 2.2.6 より $x \in f^{-1}(B') \land f^{-1}(B') \subset f^{-1}(O')$

補題 16.1.2 より成り立つ。 ■

***Def.* 16.2.1. 誘導空間**

空でない集合 X と、位相空間 $(X', \mathcal{O}')$、写像 $f \in (X')^X$ について、補題 *16.2.1* より定まる開集合系 $\mathcal{O}$ が存在する。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を誘導空間と呼ぶ。

***Def.* 16.2.2. 部分空間**

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と、X の空でない部分集合 A を考える。

$f = \mathrm{id}_X|_A$ により定まる誘導空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ を部分空間と呼ぶ。

***Lem.* 16.2.2.**

位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ と $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を与える開基 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を考える。

このとき、$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ は $X_1 \times X_2$ の開基である。

さらに、$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ の与える開集合系と、$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ からこの補題により与える開基の定める開集合系、この 2 つは一致する。

Proof.

第一式を考える。

定義 16.1.1 第一式より $\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \exists (B_1, B_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 (x_1 \in B_1 \land x_2 \in B_2)$ である。

第二式を考える。$\forall (B_{11}, B_{21}), (B_{12}, B_{22}) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \forall (x_1, x_2) \in (B_{11} \cap B_{12}, B_{21} \cap B_{22})$ を考える。

定義 16.1.1 第二式より $\exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 (x_1 \in B_1 \subset B_{11} \cap B_{12} \land x_2 \in B_2 \subset B_{21} \cap B_{22})$

$(B_{11} \cap B_{12}, B_{21} \cap B_{22}) = (B_{11}, B_{21}) \cap (B_{12}, B_{22})$ であるので成り立つ。

$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ である。

$\forall (O_1, O_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ について考える。

定義 16.1.2 より $\exists (B_1, B_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 (x_1 \in B_1 \land B_1 \subset O_1 \land x_2 \in B_2 \land B_2 \subset O_2)$

$(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \land B_1 \times B_2 \subset O_1 \times O_2$ である。

したがって、補題 16.1.2 より成り立つ。 ■

***Def.* 16.2.3. 直積空間**

位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ について、補題 *16.2.2* より定まる位相空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ を直積空間と呼ぶ。また位相 $\mathcal{O}$ を箱位相と呼ぶ。

***Lem.* 16.2.3. 直積と連続**

位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), (Y, \mathcal{O})$ について、連続写像 $f \in Y^{X_1 \times X_2}$ を考える。

このとき、$\forall w \in X_1$ について写像 $f_w \in Y^{X_2}, f_w(x) = f(w, x)$ は連続である。

Proof.

$\forall O \in \mathcal{O}$ について、$f_w^{-1}(O) = \{x \in X_2 \mid f(w,x) \in O\}$ である。

f は連続より $\forall x \in f_w^{-1}(O) \exists (O_1, O_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \big((w,x) \in O_1 \times O_2 \wedge O_1 \times O_2 \subset f^{-1}(O)\big)$

$\forall z \in O_2$ について、$(w,z) \in O_1 \times O_2 \subset f^{-1}(O)$ より、$f(w,z) \in O$ である。したがって $O_2 \subset f_w^{-1}(O)$ である。

$f_w^{-1}(O) = \bigcup \big\{O_2 \mid x \in f_w^{-1}(O)\big\} \in \mathcal{O}_2$ より連続。 ■

16.3 近傍

***Def.* 16.3.1. 基本近傍系**

空でない集合 X とその任意の点 x について、以下を満たす集合系 $\mathcal{B}(x) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ を基本近傍系と呼ぶ。

$$\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$$
$$\forall B \in \mathcal{B}(x)(x \in B)$$
$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B_1 \cap B_2)$$
$$\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists B' \in \mathcal{B}(x) \forall y \in B' \exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B)$$

***Cor.* 16.3.1. 有向集合としての基本近傍系**

空でない集合 X とその点 $x \in X$ について、$(\mathcal{B}(x), \supset)$ は有向集合である。

***Def.* 16.3.2. 近傍系**

空でない集合 X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下で与える集合系 $\mathcal{N}(x)$ を近傍系と呼ぶ。

$$\mathcal{N}(x) \coloneqq \{N \in \mathfrak{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset N)\}$$

***Cor.* 16.3.2.**

空でない集合 X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ と、$\mathcal{B}(x)$ の与える開集合系 $\mathcal{N}(x)$ は、以下を満たす。

$$\forall x \in X(\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x))$$

***Lem.* 16.3.3. 近傍系の一意性**

空でない集合 X の基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ と集合系 $\mathcal{B}'(x) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ について、以下を満たすとき、$\mathcal{B}'(x)$ は基本近傍系である。

$$\forall B' \in \mathcal{B}'(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$$
$$\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists B' \in \mathcal{B}'(x)(B' \subset B)$$

さらに $\mathcal{B}(x)$ の定める近傍系と、$\mathcal{B}'(x)$ の定める近傍系、この 2 つは一致する。

Proof.

第一式を考える。定義 16.3.1 第一式から $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ より、仮定から $\exists B' \in \mathcal{B}'(x)$

第二式を考える。定義 16.3.1 第二式より $\forall B' \in \mathcal{B}'(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(x \in B \subset B')$

第三式を考える。定義 16.3.1 第三式より $\forall B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}'(x) \exists B_1, B_2, B \in \mathcal{B}(x) \exists B' \in \mathcal{B}'(x)(B' \subset B \subset B_1 \cap B_2 \subset B'_1 \cap B'_2)$

第四式を考える。仮定より $\forall B' \in \mathcal{B}'(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$ である。
定義 16.3.1 第四式より $\exists C \in \mathcal{B}(x) \forall y \in C \exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B)$ である。
仮定より $\exists C' \in \mathcal{B}'(x)(C' \subset C)$ より、$\forall y \in C' \exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B)$ である。
仮定より $\exists D' \in \mathcal{B}'(y)(D' \subset D)$ であり、$D' \subset D \subset B' \subset B$ より成り立つ。

$\forall N \in \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x) \exists B' \in \mathcal{B}'(x)(B' \subset B \subset N)$ である。ゆえに、$N \in \mathcal{N}'(x)$ である。
$\forall N' \in \mathcal{N}'(x) \exists B' \in \mathcal{B}'(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B' \subset N')$ である。ゆえに、$N' \in \mathcal{N}(x)$ である。 ■

***Lem.* 16.3.4. 近傍系は基本近傍系**
近傍系 $\mathcal{N}(x)$ は基本近傍系である。さらに $\mathcal{N}(x)$ から定義 *16.3.2* より定まる近傍系は、$\mathcal{N}(x)$ に一致する。

Proof.
定義より $\forall \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset N)$ である。
$\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ である。
補題 16.3.3 より成り立つ。 ■

***Thm.* 16.3.5. 開基の定める基本近傍系**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と、$\mathcal{O}$ を与える X' の開基 $\mathcal{B}$ を考える。
X の任意の点 x について、以下を満たす集合系 $\mathcal{B}(x)$ は基本近傍系である。

$$\mathcal{B}(x) \coloneqq \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

さらに $\mathcal{B}(x)$ の与える近傍系と、$\mathcal{O}$ からこの定理の与える基本近傍系 $\mathcal{B}'(x)$ が与える近傍系、この 2 つは一致する。

Proof.
第一式を考える。定義 16.1.1 第一式と定義より成り立つ。

第二式は定義より明らか。

第三式を考える。定義 16.1.1 第二式より $\exists B \in \mathcal{B}(x \in B \wedge B \subset B_1 \cap B_2)$ が成り立つ。
ゆえに、$B \in \mathcal{B}(x)$

第四式を考える。定義より $B = B' = D$ として成り立つ。

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ より、$\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}'(x)$ である。
$\forall B' \in \mathcal{B}'(x)$ について、$x \in B' \wedge \forall y \in B' \exists B \in \mathcal{B}(y \in B \wedge B \subset B')$ である。ゆえに、$\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$
補題 16.3.3 より成り立つ。 ■

***Thm.* 16.3.6. 基本近傍系の定める位相**

空でない集合 X とその任意の点 x について、基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が与えられているとする。

このとき、以下の集合 $\mathcal{O}$ は X の開基であり、かつ $\mathcal{O}$ の定める開集合系は $\mathcal{O}$ である。

$$\mathcal{O} \coloneqq \{O \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset O)\}$$

さらに $\mathcal{O}$ と、$\mathcal{N}(x)$ からこの定理の与える開集合系 $\mathcal{O}'$、この 2 つは一致する。

Proof.

補題 16.1.4 を用いて示す。

第一式を考える。定義 16.3.1 第一式より $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset X)$ であるので、$X \in \mathcal{O}$

第二式を考える。$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ とする。

$\forall x \in O_1 \cap O_2$ について、定義より $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)(B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2)$ である。

定義 16.3.1 第三式より $\exists B \in \mathcal{B}(B \subset B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2)$ であるので、$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{N}(x)$ である。

第三式を考える。$A \in \mathfrak{P}(\mathcal{O})$ を考える。

$A = \varnothing$ のとき、$\bigcup A = \bigcup \varnothing = \varnothing \in \mathcal{O}$ より成り立つ。

$A \neq \varnothing$ のとき、$\forall x \in \bigcup A$ について、$\exists O \in \mathcal{O}(x \in O \subset \bigcup A)$ である。

定義より $\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset O \subset \bigcup A)$ である。定義より示される。

$\forall x \in X(\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x))$ より、$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ である。

$\forall O' \in \mathcal{O}' \forall y \in O' \exists N \in \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(N \subset B \subset O)$ より、$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ である。 ■

***Lem.* 16.3.7.**

空でない集合 X を考える。

開基 $\mathcal{B}$ の定める開集合系 $\mathcal{O}$ と、定理 *16.3.5* と定理 *16.3.6* により定まる開集合系 $\mathcal{O}'$ は、一致する。

基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、定理 *16.3.6* と定理 *16.3.5* の定める基本近傍系 $\mathcal{B}'(x)$ を考える。

$\mathcal{B}(x)$ の定める近傍系と、$\mathcal{B}'(x)$ の定める近傍系は、一致する。

Proof.

以下より一致する。

$$\mathcal{O}' = \{O \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset O)\} = \{O \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \land B \subset O)\} = \mathcal{O}$$

定義より、以下である。

$$\mathcal{B}'(x) = \{B' \in \mathfrak{P}(X) \mid x \in B' \land \forall y \in B' \exists D \in \mathcal{B}(y)(D \subset B')\}$$

$\forall B' \in \mathcal{B}'(x)$ について、定義 16.3.1 第二式より $x \in B'$ であるので、定義から $\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset B')$ である。

$\forall B \in \mathcal{B}(x)$ について、$B' \coloneqq \{y \in X \mid \exists E \in \mathcal{B}(y)(E \subset B)\}$ を考える。定義より $B' \subset B$ であり、$x \in B'$ である。

$\forall y \in B' \exists E \in \mathcal{B}(y)(E \subset B)$ について、定義 16.3.1 第四式より $\exists C \in \mathcal{B}(y) \forall z \in C \exists D \in \mathcal{B}(z)(D \subset E \subset B)$ である。

定義より $z \in B'$ である。したがって $C \subset B'$ である。
よって $B' \subset B$ である。

補題 16.3.3 より成り立つ。 ■

Def. 16.3.3. 収束

位相空間 X と X 上の点 a について、X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は a に収束すると呼ぶ。

$$\forall N \in \mathcal{N}(a) \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset N\Big)$$

また、この a を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の収束先と呼び、一意に定まるとき $\lim_{\lambda\to\infty}(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \coloneqq a$ と表す。

Cor. 16.3.8.

位相空間 X について、X 上の点 a に収束するネットの部分ネットは a に収束する。

Lem. 16.3.9. 基本近傍系と収束

位相空間 X と X 上の点 a と、$\mathcal{N}(a)$ を与える X の基本近傍系 $\mathcal{B}(a)$、および X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は a に収束する。
2. $\forall B \in \mathcal{B}(a) \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset B\Big)$

Proof.

1. → 2. は、$\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{N}(a)$ より明らか。

2. → 1. を示す。
$\forall N \in \mathcal{N}(a) \exists B \in \mathcal{B}(a) \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset B \subset N\Big)$ ■

Def. 16.3.4. 点連続

位相空間 X, X' と点 $x \in X$、写像 $f \in (X')^X$ について、以下を満たすとき、写像 f は点 x で連続であると言う。

$$\forall N' \in \mathcal{N}(f(x)) \exists N \in \mathcal{N}(x)(f(N) \subset N')$$

Cor. 16.3.10.

位相空間 X_1, X_2, X_3 と点 $x \in X_1$、写像 $f \in X_2^{X_1}, g \in X_3^{X_2}$ について、f は点 x で連続であり、g が点 $f(x)$ で連続であるとき、合成写像 $g \circ f$ は点 x で連続である。

Thm. 16.3.11. 点連続と収束

位相空間 X, X' と点 $x \in X$、写像 $f \in (X')^X$ と、近傍系 $\mathcal{N}(x)$ を与える基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下の 3 つは同値である。

1. f が x で連続

2. $\forall B' \in \mathcal{B}(f(x)) \exists B \in \mathcal{B}(x)(f(B) \subset B')$

3. x に収束する任意のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、ネット $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ は $f(x)$ に収束する。

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。

$$\forall B' \in \mathcal{B}(f(x)) \subset \mathcal{N}(f(x)) \exists N \in \mathcal{N}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)(f(B) \subset f(N) \subset B')$$

2. $\to$ 3. を示す。

$$\forall B' \in \mathcal{B}(f(x)) \exists B \in \mathcal{B}(x) \exists \lambda_0 \in \Lambda \Big((f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \in f(B) \subset B' \Big)$$

3. $\to$ 1. を示す。f が x で連続でないと仮定する。

$$\exists N' \in \mathcal{N}(f(x)) \forall N \in \mathcal{N}(x) \exists y \in N(f(y) \notin N')$$

定理 2.2.3 より、写像 $g \in X^{\mathcal{N}(x)}, f(g(N)) \notin N'$ が存在して、$(\mathcal{N}(x), \supset)$ は系 16.3.1 より有向集合である。

今、g から構成されるネットは、順序を包含で定義したことから x に収束するが、$f \circ g$ から構成されるネットは $f(x)$ に収束しない。背理法より示される。 ■

***Thm.* 16.3.12. 連続と点連続**

位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O})$ と写像 $f \in (X')^X$ について、以下の 2 つは同値である。

1. f は X 上の任意の点 x で連続

2. f は連続

Proof.

$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を与える開基 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を考える。

1. $\to$ 2. を示す。

$B' \in \mathcal{B}'$ について、$f^{-1}(B') = \varnothing$ のとき明らか。$f^{-1}(B') \neq \varnothing$ のときを考える。

$\forall x \in f^{-1}(B')$ について、$B' \in \mathcal{B}(f(x))$ であるので点連続性から $\exists B \in \mathcal{B}(x)(f(B) \subset B')$ となる。

系 2.2.5 より $B \subset f^{-1}(f(B)) \subset f^{-1}(B')$ であるので、定理 16.3.6 より、$f^{-1}(B')$ は開集合である。

2. $\to$ 1. を示す。

$\forall x \in X \forall B' \in \mathcal{B}(f(x))$ について、$B' \in \mathcal{B}'$ より、$f^{-1}(B') \in \mathcal{O}$ である。

今、$x \in f^{-1}(B')$ であるので、定義 16.1.2 より $\exists B \in \mathcal{B}(x) \big(B \subset f^{-1}(B') \big)$ となる。

したがって、系 2.2.5 より $f(B) \subset f(f^{-1}(B')) \subset B'$ ■

16.4 閉集合

***Def.* 16.4.1. 閉集合系**

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下を満たす集合系 $\mathcal{F}$ を閉集合系と呼ぶ。

$$\mathcal{F} \coloneqq \{F \in \mathfrak{P}(X) \mid X \setminus F \in \mathcal{O}\}$$

また、$\mathcal{F}$ の要素を閉集合と呼ぶ。

Thm. 16.4.1. 閉集合系
位相空間 X について、閉集合系 $\mathcal{F}$ は以下を満たす。

$$\varnothing, X \in \mathcal{F}$$
$$\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{F})\Big(A \neq \varnothing \to \bigcap A \in \mathcal{F}\Big)$$
$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F})$$

Proof.
定理 1.7.15 と定理 16.1.3 より示される。 ■

Def. 16.4.2. 閉包
位相空間 X と X の部分集合 A について、以下で定義する集合を閉包と呼び、$\overline{A}$ で表す。

$$\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} \mid A \subset F\}$$

Cor. 16.4.2.
位相空間 X について、以下が成り立つ。

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(X)\big(A \subset B \to \overline{A} \subset \overline{B}\big)$$
$$\forall D \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))\Big(\bigcup \{\overline{A} \mid A \in D\} \subset \overline{\bigcup D}\Big)$$

Thm. 16.4.3. 閉包
位相空間 X と X の部分集合 A と、近傍系 $\mathcal{N}(x)$ を与える基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下の 4 つは同値である。

1. $x \in \overline{A}$
2. $\forall N \in \mathcal{N}(x)(A \cap N \neq \varnothing)$
3. $\forall B \in \mathcal{B}(x)(A \cap B \neq \varnothing)$
4. x に収束する A 上のネットが存在する。

Proof.
1. $\to$ 2. を考える。
$\exists N \in \mathcal{N}(x)(A \cap N = \varnothing)$ と仮定する。
$\exists O \in \mathcal{O}(x \in O \land O \subset N)$ であるので、$x \notin X \setminus O$
$X \setminus O \in \mathcal{F}$ であり、$A \subset X \setminus N \subset X \setminus O$

$x \in \overline{A}$ とすると、$x \in X \setminus O$ となり矛盾。背理法より示される。

2. $\rightarrow$ 3. は $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ より明らか。

3. $\rightarrow$ 4. を考える。
仮定より $\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists y \in A(y \in B)$ である。
系 16.3.1 より、$(\mathcal{B}(x), \supset)$ は有向集合である。
ネット $(y_B)_{B \in \mathcal{B}(x)}$ は、順序を包含で定義したことから x に収束する。

4. $\rightarrow$ 1. を考える。
$x \notin \overline{A}$ に収束するネット $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$ が存在すると仮定する。
$\exists F \in \mathcal{F}(x \notin F \cap A \subset F)$ より、$\exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset X \setminus F \subset X \setminus A\Big)$
これは A 上のネットであることに反する。背理法より示される。 ■

Def. 16.4.3. 開被覆
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその被覆 C について、以下が成り立つとき、C を開被覆と呼ぶ。

$$C \subset \mathcal{O}$$

Def. 16.4.4. コンパクト
位相空間 X について、その任意の開被覆が、開被覆となる有限部分集合を持つとき、X はコンパクトであると呼ぶ。

Lem. 16.4.4. コンパクトの言い換え
コンパクトな位相空間について、以下が成り立つ。

$$\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{F})\Big(A \neq \varnothing \wedge \bigcap A = \varnothing \rightarrow \exists A' \in \mathfrak{P}(A)\Big(A' \neq \varnothing \wedge \bigcap A' = \varnothing \wedge |A'| < \infty\Big)\Big)$$

Proof.
コンパクトの定義と定理 1.7.15 より成り立つ。 ■

Thm. 16.4.5. ネットによるコンパクトの特徴づけ
位相空間 X について、以下の 3 つは同値である。

1. X はコンパクトである。
2. X 上の任意の普遍ネットは収束する。
3. X 上の任意のネットは収束する部分ネットを持つ。

Proof.
1. $\rightarrow$ 2. を示す。

X 上の普遍ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$F \coloneqq \bigcap\left\{\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}} \mid \lambda\in\Lambda\right\}$ を考える。

$F=\varnothing$ とすると、補題 16.4.4 より $\exists n\in\mathbb{N}\Big(n>0\land\bigcap\left\{\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda(m)}}} \mid m<n\right\}=\varnothing\Big)$ である。
ここで定理 5.3.9 から $\exists\mu'\in\Lambda\forall m\in n(\mu'\succcurlyeq\lambda_m)$ であり、$x_{\mu'}\in\bigcap\left\{\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}} \mid m\leq n\right\}$ より反する。
背理法より $\exists a\in F$ である。

$\forall\lambda\in\Lambda\Big(a\in\overline{(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}}\Big)$ であるので、閉包の定義より $\forall N\in\mathcal{N}(a)\forall\lambda\in\Lambda\Big(N\cap(x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}\neq\varnothing\Big)$ である。
すなわち、$\forall N\in\mathcal{N}(a)\forall\lambda\in\Lambda\exists\mu\in\Lambda(\lambda\preccurlyeq\mu\land x_\mu\in N)$
普遍ネットの定義とあわせて、$\forall N\in\mathcal{N}(a)\exists\lambda\in\Lambda\Big((x_\mu)_{\mu\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda}}\subset N\Big)$

2. $\to$ 3. を示す。
仮定と定理 3.5.8 より明らか。

3. $\to$ 1. を示す。
コンパクトでないと仮定する。その任意の有限部分集合が開被覆とならない X の開被覆 C が存在する。
$P\coloneqq\{A\in\mathfrak{P}(C)\mid |A|<\infty\land A\neq\varnothing\}$ について $(P,\subset)$ は有向集合であり、
コンパクトでないことから $\forall A\in P\exists x\in X\setminus\bigcup A$ である。このようなネット $(x_A)_{A\in P}$ を考える。

仮定より、$a\in X$ に収束する部分ネット $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in M}$ を持つ。
開被覆であることより $\exists C_0\in C(a\in C_0\land\{C_0\}\in P)$ であり、定義 3.5.6 より $\exists\mu_0\in M(\{C_0\}\subset\varphi(\mu_0))$ である。
$a\in\bigcup\varphi(\mu_0)\in\mathcal{O}$ であり、収束することと有向性より $\exists\mu_1\in M\big(\varphi(\mu_0)\subset\varphi(\mu_1)\land x_{\varphi(\mu_1)}\in\bigcup\varphi(\mu_0)\subset\bigcup\varphi(\mu_1)\big)$ であるが、このネットの定義に反する。

背理法より示される。 ■

Thm. 16.4.6. Tychonoff の定理
コンパクトな位相空間 X,Y について、位相空間 $X\times Y$ はコンパクトである。

Proof.
$X\times Y$ 上の普遍ネット $((x_\lambda,y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。
今、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は普遍ネットである。これは定理 16.4.5 より収束する。収束先を x_0 とする。
同様に $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ も y_0 に収束する。
したがって、もとの普遍ネットは (x_0,y_0) に収束する。定理 16.4.5 より示される。 ■

Thm. 16.4.7. コンパクト空間の連続像はコンパクト
コンパクトな位相空間 $(X,\mathcal{O})$ と、位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ について、連続写像 $f\in(X')^X$ を考える。このとき、像 $f(X)$ はコンパクトである。

Proof.
$f(X)$ の任意の開被覆 C' について、$C\coloneqq\left\{f^{-1}(O')\mid O'\in C'\right\}$ を考える。
連続性より $\forall O'\in C'\big(f^{-1}(O')\in\mathcal{O}\big)$ である。
$\forall x\in X\exists O'\in C'(f(x)\in O')$ より、C は X の開被覆である。
コンパクト性から、$\exists A'\in\mathfrak{P}(C')\big(|A'|<\infty\land X=\bigcup\left\{f^{-1}(O')\mid O'\in A'\right\}\big)$
定理 2.2.4、系 2.2.5 から $f(X)=\bigcup\left\{f(f^{-1}(O'))\mid O'\in A'\right\}\subset\bigcup\{O'\mid O'\in A'\}$ より A' は有限開被覆である。

■

Def.* 16.4.5. *Lindelöf
位相空間 X について、その任意の開被覆が、開被覆となる可算部分集合を持つとき、X は $Lindelöf$ であると呼ぶ。

***Cor.* 16.4.8.**
位相空間 X について、X がコンパクトならば X は $Lindelöf$ である。

***Def.* 16.4.6. 点列コンパクト**
位相空間 X について、X 上の任意の点列が収束する部分列を持つとき、X は点列コンパクトであると呼ぶ。

***Thm.* 16.4.9.**
$Lindelöf$ で点列コンパクトな位相空間 X は、コンパクトである。

Proof.
コンパクトでないと仮定する。その任意の有限部分集合が開被覆とならない X の開被覆 C が存在する。
仮定より可算な部分開被覆 $C' \coloneqq \{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する。
$n \in \mathbb{N}$ について、$P_n \coloneqq \{O_m \mid m \in \mathbb{N} \land m \leq n\}$ を考える。
C の定義より $\bigcup P_n \neq X$ である。
したがって、$x_n \in X \setminus \bigcup P_n$ なる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取れる。
点列コンパクトより、$a \in X$ に収束する部分列 $\left(x_{n(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。
今、開被覆より $\exists l \in \mathbb{N}(a \in O_l)$ であり、収束の定義から $\exists j \in \mathbb{N}\forall j' \in \mathbb{N}(j \leq j' \to x_{j'} \in O_l)$。
定義 3.5.6 より $\exists h \in \mathbb{N}(l \leq n(h))$ であり、$\forall h' \in \mathbb{N}\big(h \leq h' \to a \in X \setminus \bigcup P_{n(h')} \subset X \setminus \bigcup P_{n(l)} \subset X \setminus O_l\big)$
矛盾するので、背理法よりコンパクト。 ■

16.5 分離

***Def.* 16.5.1. T_0 空間**
位相空間 X の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ が以下を満たすとき、X を T_0 空間と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N_x \in \mathcal{N}(x)(y \notin N_x) \lor \exists N_y \in \mathcal{N}(y)(x \notin N_y))$$

***Def.* 16.5.2. T_1 空間**
位相空間 X の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ が以下を満たすとき、X を T_1 空間と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N \in \mathcal{N}(x)(y \notin N))$$

***Thm.* 16.5.1. *Fréchet* 性**

位相空間 X と、開基 $\mathcal{B}$ について、以下の 3 つは同値である。

1. X は T_1 空間
2. $\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists B \in \mathcal{B}(x)(y \notin B))$
3. $\forall x \in X(\{x\} \in \mathcal{F})$

Proof.

1. → 2. を示す。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N \in \mathcal{N}(x)\exists B \in \mathcal{B}(x)(y \in X \setminus N \subset X \setminus B))$$

よって示される。

2. → 3. を示す。
2. より、$\forall y \in X(x \neq y \to \exists B \in B(y)(x \notin B))$ である。
$X \setminus \{x\} = \bigcup\{B \mid y \in X\}$ より成り立つ。

3. → 1. を示す。
$x \neq y$ について、$y \in X \setminus \{x\} \in \mathcal{O}$ である。
ゆえに、$X \setminus \{x\} \in \mathcal{N}(y)$ である。 ■

***Thm.* 16.5.2.**

位相空間 X が T_1 空間ならば、T_0 空間である。

Proof.

明らか。 ■

***Def.* 16.5.3. T_2 空間**

位相空間 X の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ が以下を満たすとき、X を T_2 空間と呼ぶ。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N_x \in \mathcal{N}(x)\exists N_y \in \mathcal{N}(y)(N_x \cap N_y = \varnothing))$$

***Thm.* 16.5.3.**

位相空間 X が T_2 空間ならば、T_1 空間である。

Proof.

$\forall x, y \in X(x \neq y)$ を考える。$\exists N_x \in \mathcal{N}(x)\exists N_y \in \mathcal{N}(y)(N_x \cap N_y = \varnothing)$
$y \in N_y$ より、$y \notin N_x$ ■

***Cor.* 16.5.4.**

T_2 空間の部分空間は T_2 空間である。

***Thm.* 16.5.5. *Hausdorff* 性**

位相空間 X と、開基 $\mathcal{B}$ について、以下の５つは同値である。

1. X は T_2 空間
2. $\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y = \varnothing))$
3. X 上の収束するネットの収束先は一意に定まる。
4. 直積集合 $X \times X$ について、対角集合 $\Delta \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\}$ は閉集合である。
5. $\forall x \in X\bigl(\{x\} = \bigcap \bigl\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}(x)\bigr\}\bigr)$

Proof.

1. → 2. を示す。

$$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists N_x \in \mathcal{N}(x) \exists N_y \in \mathcal{N}(y) \exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y \subset N_x \cap N_y = \varnothing))$$

よって示される。

2. → 3. を示す。

２点 $x, y \in X(x \neq y)$ に収束するとする仮定する。

仮定より $\exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y = \varnothing)$

補題 16.3.9 より $\exists \lambda_0 \in \Lambda\Bigl((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset B_x \cap B_y\Bigr)$

これは矛盾する。背理法より示される。

3. → 1. を示す。T_2 でないとすると、

$$\exists x, y \in X(x \neq y \land \forall N_x \in \mathcal{N}(x) \forall N_y \in \mathcal{N}(y) \exists z \in X(z \in N_x \cap N_y))$$

定理 2.2.3 より、写像 $g \in X^{\mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)}, g((N_x, N_y)) \in N_x \cap N_y$ が存在する。

$\mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ 上の半順序を以下のように定義する。

$$(N_x, N_y) \preccurlyeq \left(N'_x, N'_y\right) :\leftrightarrow N_x \supset N'_x \land N_y \supset N'_y$$

系 16.3.1 より、$(\mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y), \preccurlyeq)$ は有向集合である。

g の与えるネットは、順序を包含で定義したことから、x と y の双方に収束する。対偶法より示される。

2. → 4. を示す。

$\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ について、$\exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \cap B_y = \varnothing)$ である。

よって $B_x \times B_y \subset (X \times X) \setminus \Delta$ であるので、$(X \times X) \setminus \Delta$ は開集合である。

4. → 2. を示す。

$\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ について、$\exists B_x, B_y \in \mathcal{B}((x, y) \in B_x \times B_y \subset (X \times X) \setminus \Delta)$ である。

よって、$B_x \in \mathcal{B}(x) \land B_y \in \mathcal{B}(y) \land B_x \cap B_y = \varnothing$ である。

2. → 5. を示す。

$\forall x, y \in X(x \neq y \to \exists B_x \in \mathcal{B}(x) \exists B_y \in \mathcal{B}(y)(B_x \subset X \setminus B_y \in \mathcal{F}))$

よって $\overline{B_x} \subset X \setminus B_y$ であるので、$y \notin \overline{B_x}$

5. → 2. を示す。

$\forall x, y \in X(x \neq y)$ について、$\exists B \in \mathcal{B}(x)\bigl(y \notin \overline{B}\bigr)$

$y \in X \setminus \overline{B} \in \mathcal{O}$ より、$\exists B' \in \mathcal{B}(y)\bigl(B' \subset X \setminus \overline{B}\bigr)$。

$B \cap B' = \varnothing$ より成り立つ。 ■

***Def.* 16.5.4.** T_3 **空間**

位相空間 X が以下を満たすとき、X を T_3 空間と呼ぶ。

$$\forall x \in X \forall F \in \mathcal{F}(x \notin F \to \exists O_x, O_F \in \mathcal{O}(x \in O_x \land F \subset O_F \land O_x \cap O_F = \varnothing))$$

***Thm.* 16.5.6. *Vietoris* 性**

位相空間 X と、開基 $\mathcal{B}$ について、以下の４つは同値である。

1. X は T_3 空間
2. $\forall x \in X \forall B \in \mathcal{B}(x) \exists D \in \mathcal{B}(x) \big(\overline{D} \subset B\big)$
3. $\forall x \in X \forall F \in \mathcal{F}\big(x \notin F \to \exists O_x, O_F \in \mathcal{O}\big(x \in O_x \land F \subset O_F \land \overline{O_x} \cap \overline{O_F} = \varnothing\big)\big)$
4. $\forall F \in \mathcal{F}\big(F = \bigcap \big\{\overline{O} \mid O \in \mathcal{O} \land F \subset O\big\}\big)$

Proof.

1. $\to$ 2. を示す。
$\forall B \in \mathcal{B}(x)$ について、$x \in X \setminus B \land X \setminus B \in \mathcal{F}$ である。
仮定より、$\exists O_x, O_F \in \mathcal{O}(x \in O_x \land X \setminus B \subset O_F \land O_x \cap O_F = \varnothing)$ である。
ここで $O_x \in \mathcal{N}(x)$ であるので、$\exists D \in \mathcal{B}(x)(D \subset O_x)$ である。
$D \subset O_x \subset X \setminus O_F$ であるので、閉包の定義より $\overline{D} \subset X \setminus O_F \subset X \setminus (X \setminus B) = B$

2. $\to$ 3. を示す。
$x \in X \setminus F \in \mathcal{O}$ であるので、$X \setminus F \in \mathcal{N}(x)$ すなわち、$\exists B \in \mathcal{B}(x)(B \subset X \setminus F)$ である。
仮定より、$\exists D \in \mathcal{B}(x)\big(\overline{D} \subset B\big)$ であり、再び仮定より、$\exists E \in \mathcal{B}(x)\big(\overline{E} \subset D\big)$
$F = X \setminus (X \setminus F) \subset X \setminus B \subset X \setminus \overline{D} \subset X \setminus D$ である。
$O_F := X \setminus \overline{D}$ とすると、$X \setminus D \in \mathcal{F}$ より、$\overline{O_F} \subset X \setminus D \subset X \setminus \overline{E}$
$O_x := E$ として成り立つ。

3. $\to$ 4. を示す。
$A := \big\{\overline{O} \mid O \in \mathcal{O} \land F \subset O\big\}$ とする。$X \in A$ より、$X \neq \varnothing$ である。
定義より $F \subset \bigcap A$ である。
$\forall x \in X \setminus F$ について、仮定より $\exists O_F \in \mathcal{O}\big(F \subset O_F \land x \notin \overline{O_F}\big)$ であるので、$x \notin \bigcap A$
ゆえに、$X \setminus F \subset X \setminus \bigcap A$

4. $\to$ 1. を示す。
$\forall x \in X \forall F \in \mathcal{F}(x \notin F)$ のとき、仮定より $\exists O_F \in \mathcal{O}\big(x \notin \overline{O_F} \land F \subset O_F\big)$
$O_x := X \setminus \overline{O_F}$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 16.5.7. 正則空間**

位相空間 X が T_1 空間かつ T_3 空間であるならば、X は T_2 空間である。

Proof.

定理 16.5.1 より、一点集合は閉集合である。
T_3 空間の定義より、T_2 空間である。 ■

***Def.* 16.5.5.** T_4 **空間**
位相空間 X が以下を満たすとき、X を T_4 空間と呼ぶ。

$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing \to \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}(F_1 \subset O_1 \land F_2 \subset O_2 \land O_1 \cap O_2 = \varnothing))$$

***Thm.* 16.5.8. *Tietze* 性**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下の 3 つは同値である。

1. X は T_4 空間
2. $\forall O \in \mathcal{O} \forall F \in \mathcal{F}\big(F \subset O \to \exists U \in \mathcal{O}\big(F \subset U \land \overline{U} \subset O\big)\big)$
3. $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(O_1 \cup O_2 = X \to \exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \subset O_1 \land F_2 \subset O_2 \land F_1 \cup F_2 = X))$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$X \setminus O \in \mathcal{F}$ から、仮定より $\exists U, U' \in \mathcal{O}(F \subset U \land X \setminus O \subset U' \land U \cap U' = \varnothing)$ である。
$U \subset X \setminus U' \in \mathcal{F}$ であるので、$\overline{U} \subset X \setminus U' \subset X \setminus (X \setminus O) = O$

2. $\to$ 3. を示す。
$X \setminus O_1 \subset O_2 \land X \setminus O_1 \in \mathcal{F}$ より、仮定より $\exists U \in \mathcal{O}\big(X \setminus O_1 \subset U \land \overline{U} \subset O_2\big)$
$X \setminus U \subset X \setminus (X \setminus O_1) = O_1 \land (X \setminus U) \cup \overline{U} = X$ より示される。

3. $\to$ 1. を示す。
$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ とする。
$(X \setminus F_1) \cup (X \setminus F_2) = X$ であるので、仮定より $\exists H_1, H_2 \in \mathcal{F}(H_1 \subset X \setminus F_1 \land H_2 \subset X \setminus F_2 \land H_1 \cup H_2 = X)$
$F_1 = X \setminus (X \setminus F_1) \subset X \setminus H_1 \land F_2 = X \setminus (X \setminus F_2) \subset X \setminus H_2$
ここで、$O_1 \coloneqq X \setminus H_1, O_2 \coloneqq X \setminus H_2$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 16.5.9. 正規空間**
位相空間 X が T_1 空間かつ T_4 空間であるならば、X は T_3 空間である。

Proof.
定理 16.5.1 より、一点集合は閉集合である。
T_4 空間の定義より、T_3 空間である。 ■

***Thm.* 16.5.10.**
T_3 空間 X が *Lindelöf* ならば、X は T_4 空間である。

Proof.
$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ を考える。
$\forall x \in F_1$ について、$x \in X \setminus F_2$ より、仮定から $\exists O_1(x) \in \mathcal{O}\Big(x \in O_1(x) \land \overline{O_1(x)} \cap F_2 = \varnothing\Big)$
Lindelöf より、F_1 の可算部分 A_1 が存在して、$F_1 \subset \bigcup\{O_1(x) \mid x \in A_1\}$

すなわち、写像 $\varphi_1 \in \mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ が存在して、$F_1 \subset \bigcup\{\varphi_1(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \land \forall n \in \mathbb{N}\Big(\overline{\varphi_1(n)} \cap F_2 = \varnothing\Big)$

同様に、写像 $\varphi_2 \in \mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ が存在して、$F_2 \subset \bigcup\{\varphi_2(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \land \forall n \in \mathbb{N}\Big(\overline{\varphi_2(n)} \cap F_1 = \varnothing\Big)$

以下に定める集合 U_1, U_2 は定義より開集合である。

$$U_1 \coloneqq \bigcup\left\{\varphi_1(n) \setminus \bigcup\left\{\overline{\varphi_2(m)} \mid m \in n\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$U_2 \coloneqq \bigcup\left\{\varphi_2(n) \setminus \bigcup\left\{\overline{\varphi_1(m)} \mid m \in s(n)\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\exists z \in U_1 \cap U_2$ とする。
$\exists n_1 \in \mathbb{N}\Big(z \in \varphi_1(n_1) \land \forall m \in n_1\Big(z \notin \overline{\varphi_2(m)}\Big)\Big) \land \exists n_2 \in \mathbb{N}\Big(z \in \varphi_2(n_2) \land \forall m \in s(n_2)\Big(z \notin \overline{\varphi_1(m)}\Big)\Big)$
$n_1 \leq n_2 \lor n_1 > n_2$ の場合分けにより、どちらの場合も矛盾。ゆえに $U_1 \cap U_2 = \varnothing$
$F_1 \subset U_1 \land F_2 \subset U_2$ より示される。 ■

16.6 連結

***Def.* 16.6.1. 連結**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下を満たす X を連結であると呼ぶ。

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{\varnothing, X\}$$

***Thm.* 16.6.1. 非連結**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、以下の 3 つは同値である。

1. X は連結でない
2. $\exists U, V \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}(X = U \cup V \land U \cap V = \varnothing)$
3. $\exists A, B \in \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big(X = A \cup B \land A \cap \overline{B} = \varnothing \land \overline{A} \cap B = \varnothing\big)$

Proof.
1. → 2. を考える。
開集合、閉集合の定義より $\mathcal{O} \cap \mathcal{F} \supset \{\varnothing, X\}$ であるので、非連結ならば $\exists U \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F} \setminus \{\varnothing, X\}$ である。
$V \coloneqq X \setminus U \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}$ より成り立つ。

2. → 3. を考える。
$V = X \setminus U \land U = X \setminus V$ より、$U, V \in \mathcal{F}$ である。
したがって、$U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = U \cap V = \varnothing$ である。

3. → 1. を考える。
$\overline{A} = X \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A} = \big(A \cap \overline{A}\big) \cup \big(B \cap \overline{A}\big) = A$ より、A は閉集合である。
同様に、B は閉集合であるので、A は開集合である。
$B \neq \varnothing$ より、$A \neq X$ である。したがって、$A \in (\mathcal{O} \cap \mathcal{F}) \setminus \{\varnothing, X\}$ ■

***Thm.* 16.6.2. 連結空間の連続像は連結**

連結な位相空間 $(X,\mathcal{O})$ と、位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ について、連続写像 $f\in(X')^X$ を考える。このとき、像 $f(X)$ は連結である。

Proof.
$f(X)$ が連結でないと仮定する。
定理 16.6.1 より $\exists U,V\in\mathcal{O}'(f(X)\subset U\cup V\wedge U\cap V=\varnothing\wedge U\cap f(X)\neq\varnothing\wedge V\cap f(X)\neq\varnothing)$
$\exists y\in U\cap f(X)\exists x\in X(f(x)=y)$ すなわち $x\in f^{-1}(U\cap f(X))\subset f^{-1}(U)$ であるので、$f^{-1}(U)\neq\varnothing$ となる。同様に $f^{-1}(V)\neq\varnothing$
f は連続より $f^{-1}(U),f^{-1}(V)\in\mathcal{O}\setminus\{\varnothing\}$ である。
系 2.2.5、定理 2.2.6 より $f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cup V)\supset f^{-1}(f(X))\supset X$
定理 2.2.6 より $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$
定理 16.6.1 より X は連結でない。矛盾するので背理法より示される。 ■

16.7 可算な位相

***Def.* 16.7.1. 第一可算**
位相空間 X について、その任意の点 x に対して可算な基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が存在するとき、位相空間 X は第一可算であると呼ぶ。

***Lem.* 16.7.1. 第一可算空間における基本近傍系の単調列**
第一可算な位相空間 X とその任意の点 $x\in X$ について、以下を満たす基本近傍系 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する。

$$\forall n\in\mathbb{N}\big(B_{s(n)}\subset B_n\big)$$

Proof.
第一可算であるので、$\mathbb{N}$ からの全射 φ が存在するような基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が存在する。
以下のように定めた B_n は条件を満たす。

$$B_0\coloneqq\varphi(0)$$
$$B_{s(n)}\coloneqq B_n\cap\varphi(s(n))$$

定義と φ の全射性より、$\forall B\in\mathcal{B}(x)\exists n\in\mathbb{N}(B_n\subset\varphi(n)=B)$ である。

$\varphi(0)\subset B_0$ である。$\exists B\in\mathcal{B}(B\subset B_n)$ とすると、$\exists B'\in\mathcal{B}(x)\big(B'\subset B\cap\varphi(s(n))\subset B_{s(n)}\big)$
定理 4.1.7 より、$\forall n\in\mathbb{N}\exists B\in\mathcal{B}(x)(B\subset B_n)$ である。

ゆえに補題 16.3.3 より、$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{B}(x)$ と同じ近傍系を与える基本近傍系である。 ■

***Thm.* 16.7.2. *Bolzano-Weierstrass* の定理**
第一可算でコンパクトな位相空間 X は、点列コンパクトである。

Proof.
X 上の点列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ について、$(F_k)_{k\in\mathbb{N}},F_k=\{x_l\mid l\in\mathbb{N}\wedge l\geq k\}\in\mathfrak{P}(X)$ を考える。

$\bigcap\big\{\overline{F_k}\mid k\in\mathbb{N}\big\}=\varnothing$ とすると、補題 16.4.4 より $\exists n\in\mathbb{N}\big(n>0\wedge\bigcap\big\{\overline{F_{k_m}}\mid m\leq n\big\}=\varnothing\big)$ である。

$x_{s(k_n)} \in \bigcap\left\{\overline{F_k} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ であるので反する。背理法より $\bigcap\left\{\overline{F_k} \mid k \in \mathbb{N}\right\} \neq \varnothing$ を得る。

$\exists a \in X \forall k \in \mathbb{N}\left(a \in \overline{F_k}\right)$ であるので、補題 16.7.1 の点列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて $\forall j \in \mathbb{N}(F_k \cap B_j(a) \neq \varnothing)$ である。
ここで、以下の写像 $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を考える。

$$x_{\varphi(0)} \in B_0(a)$$
$$x_{\varphi(s(n))} \in F_{s(\varphi(n))} \cap B_n(a)$$

$\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は部分列であり、a に収束する。 ■

***Thm.* 16.7.3. 第一可算空間における点連続と収束**
第一可算な位相空間 X、位相空間 X'、点 $x \in X$、写像 $f \in (X')^X$ について、以下の 2 つは同値である。

1. f が x で連続
2. x に収束する任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する。

Proof.
1. → 2. は、定理 16.3.11 と、点列がネットであることより明らか。

2. → 1. を示す。補題 16.7.1 の与える基本近傍系を $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする。

$$\exists N' \in \mathcal{N}(f(x)) \forall n \in \mathbb{N} \exists y \in B_n(x)(f(y) \notin N')$$

定理 2.2.3 より、写像 $g \in X^{\mathbb{N}}, g(n) \in B_n(x) \setminus f^{-1}(N')$ が存在する。
今、g から構成される点列は x に収束するが、$f \circ g$ から構成される点列は $f(x)$ に収束しない。 ■

***Def.* 16.7.2. 可分**
位相空間 X について、X の可算部分 Y が存在して $\overline{Y} = X$ であるとき、X は可分であると呼ぶ。

***Def.* 16.7.3. 第二可算**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、$\mathcal{O}$ が可算な開基から与えられるとき、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は第二可算であると呼ぶ。

***Thm.* 16.7.4. 第二可算空間の満たす性質**
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第二可算ならば、以下の 3 つを満たす。

- X は第一可算
- X は *Lindelöf*
- X は可分

Proof.
第一可算性を示す。
定理 16.3.5 より、開基の部分となる基本近傍系をとれる。

Lindelöf 性を示す。
第二可算性より、点列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は開基である。

開被覆 C について、定義 16.1.2 より $\forall x \in X \exists O \in C \exists n \in \mathbb{N}(x \in B_n \wedge B_n \subset O)$

定理 2.2.3 より $n(x)$ を考える。このとき、$\left\{B_{n(x)} \mid x \in \mathbb{N}\right\} = \{B_m \mid m \in \mathrm{Im}(n)\}$ は開被覆である。

$\forall m \in \mathrm{Im}(n) \exists O \in C(B_m \subset O)$ より定理 2.2.3 の与える $O(m)$ が与えられて、$C' \coloneqq \{O(m) \mid m \in \mathrm{Im}(n)\}$ とする。

今、$X = \bigcup\{B_m \mid m \in \mathrm{Im}(n)\} \subset \bigcup C' \subset X$ より、C' は開被覆であり、定義より C の可算部分である。

可分性を示す。

第二可算性より、可算な開基 $\mathcal{B}$ が存在する。

$\forall B \in \mathcal{B} \setminus \{\varnothing\} \exists x_B \in X(x_B \in B)$ であり、$M \coloneqq \{x_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\varnothing\}\}$ を考えると、M は可算である。

閉包は閉集合より $X \setminus \overline{M}$ は開集合である。

ここで、$\exists x \in X \setminus \overline{M}$ と仮定する。

$\exists B' \in \mathcal{B}\big(x \in B' \subset X \setminus \overline{M}\big)$ である。

したがって、$x_{B'} \in X \setminus \overline{M} \subset X \setminus M$ より矛盾。背理法より示される。 ■

16.8 順序位相

***Lem.* 16.8.1. 順序の開基**

空でない全順序集合 $(X, \leq)$ について、以下を満たす新たな 2 元 $\infty, -\infty$ を加えた集合 $\hat{X}$ を考える。

$$\forall x \in X(-\infty < x \wedge x < \infty)$$
$$\hat{X} \coloneqq X \cup \{\infty, -\infty\}$$

このとき、以下の集合系 $\mathcal{B}$ は X の開基である。

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{]a, b[\mid (a, b) \in \hat{X} \times \hat{X}\right\}$$

Proof.

$\forall B \in \mathcal{B}(-\infty \notin B \wedge \infty \notin B)$ であるので、$\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ である。

第一式を示す。$\forall x \in X(x \in]-\infty, \infty[)$ である。

第二式を示す。$\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \hat{X}$ について、$]a_1, b_1[\cap]a_2, b_2[=]\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}[\in \mathcal{B}$ である。 ■

***Cor.* 16.8.2.**

空でない全順序集合 $(X, \leq)$ について、X が最大元、最小元をともに持たないとき、以下の集合系 $\mathcal{B}'$ は開基である。

$$\mathcal{B}' \coloneqq \{]a, b[\mid (a, b) \in X \times X\}$$

このとき、補題 *16.8.1* から得る開集合系と、$\mathcal{B}'$ の定める開集合系、この 2 つは一致する。

***Def.* 16.8.1. 順序空間**

補題 *16.8.1* と定義 *16.1.2* より定まる位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を順序空間と呼ぶ。

***Lem.* 16.8.3.**

順序空間 $(X, \mathcal{O})$ について、開区間は開集合であり、閉区間は閉集合である。

Proof.

定義より開区間は開集合である。

閉区間 $[a, b]$ を考える。$X \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[\in \mathcal{O}$ より成り立つ。 ■

***Lem.* 16.8.4.**

順序空間 $(X, \mathcal{O})$ と、X の閉集合 F_1, F_2 を考える。

$F_1 \cap F_2 = \varnothing$ であるとき、$\forall x \in F_1$ について以下の全てを満たす $a, b \in \hat{X}$ が存在する。

- $x \in]a, b[$
- $]a, b[\cap F_2 = \varnothing$
- $]a, x[= \varnothing \lor a \in F_1 \lor (a \notin F_2 \land]a, x[\cap F_1 = \varnothing)$
- $]x, b[= \varnothing \lor b \in F_1 \lor (b \notin F_2 \land]x, b[\cap F_1 = \varnothing)$

Proof.

定理 16.4.3 より、$\exists p, q \in \hat{X}(x \in]p, q[\subset X \setminus F_1)$ である。

$]p, x[= \varnothing$ のとき、$a := p$ で成り立つ。

$\exists z \in]p, x[\cap F_1$ のとき、$a := z$ で成り立つ。

$\exists z \in]p, x[\land]p, x[\cap F_1 = \varnothing$ のとき、$a := z$ で成り立つ。

同様に b を定めることができて、条件を満たす。 ■

***Thm.* 16.8.5. 順序空間は正規**

順序空間は T_1 空間かつ T_4 空間である。

Proof.

$\forall x \in X$ について、補題 16.8.3 より $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{F}$ である。定理 16.5.1 より、T_1 である。

$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ として、$\forall x \in F_1$ について考える。

$x \notin F_2$ より補題 16.8.4 の条件を満たす $a_x, b_x \in \hat{X}$ が存在する。

ここで、$U := \bigcup \{]a_x, b_x[\mid x \in F_1\}$ を考える。明らかに $F_1 \subset U \land U \in \mathcal{O}$ である。

$\forall y \in F_2$ を考える。$y \notin F_1 = \overline{F_1}$ より、$\exists (c, d) \in \hat{X} \times \hat{X}(]c, d[\cap F_1 = \varnothing)$ である。

$F_1' := \{x \in F_1 \mid x < y \land]a_x, b_x[\cap]c, d[\neq \varnothing\}$ とする。

$\exists x_1, x_2 \in F_1'(x_1 < x_2)$ とすると、c の定義と補題 16.8.4 第二式より $x_1 < x_2 < c < b_{x_1} \land b_{x_1} \notin F_1$ である。

これは補題 16.8.4 第四式に反する。ゆえに、$\forall x_1, x_2 \in F_1'(x_1 = x_2)$ である。

$\exists x \in X(F_1' = \{x\})$ のときを考える。補題 16.8.4 第四式より $b_x < y$ である。$a' := b_x$ とする。

$F_1' = \varnothing$ であるとき、$a' := c$ とする。

同様に b' を定めると、$y \notin U$ より $y \in]a', b'[\land]a', b'[\cap U = \varnothing$ である。定理 16.4.3 より $y \notin \overline{U}$

よって、$F_2 \subset X \setminus \overline{U}$ ■

17　一様空間

17.1　近縁

***Def.* 17.1.1. 集合算**

集合 X と、集合 $A, B \in \mathfrak{P}(X \times X)$ について、以下で定める略記 $A \circ B, A^{-1}$ を考える。

$$A \circ B := \{(x,z) \in X \times X \mid \exists y \in X((x,y) \in A \wedge (y,z) \in B)\}$$
$$A^{-1} := \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in A\}$$

***Def.* 17.1.2. 基本近縁系**

空でない集合 X について、以下を満たす集合系 $\mathcal{V} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times X))$ を基本近縁系と呼ぶ。

$$\mathcal{V} \neq \varnothing$$
$$\forall V \in \mathcal{V} \forall x \in X((x,x) \in V)$$
$$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V} \exists V \in \mathcal{V}(V \subset V_1 \cap V_2)$$
$$\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$$
$$\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}\bigl(W \subset V^{-1}\bigr)$$

***Lem.* 17.1.1. 基本近縁系の三角性**

空でない集合 X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下を満たす。

$$\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}\bigl(W \subset W^{-1} \circ W \subset \bigl(W^{-1} \circ W\bigr) \circ W \subset V\bigr)$$

Proof.

定義 17.1.2 第四式より $\exists S \in \mathcal{V}(S \circ S \subset V)$ であり、$\exists R \in \mathcal{V}(R \circ R \subset S)$ である。
定義 17.1.2 第五式より $\exists T \in \mathcal{V}\bigl(T \subset R^{-1}\bigr)$ である。
定義 17.1.2 第三式より $\exists W \in \mathcal{V}(W \subset S \cap T)$ である。
ゆえに、$\bigl(W^{-1} \circ W\bigr) \circ W \subset \bigl(T^{-1} \circ T\bigr) \circ S \subset (R \circ R) \circ S \subset S \circ S \subset V$

定義 17.1.2 第二式より $(z,z) \in W$ であるので、その他の包含関係も成り立つ。　■

***Def.* 17.1.3. 近縁系**

空でない集合 X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下で与える集合系 $\mathcal{U}$ を近縁系と呼ぶ。

$$\mathcal{U} := \{U \in \mathfrak{P}(X \times X) \mid \exists V \in \mathcal{V}(V \subset U)\}$$

***Lem.* 17.1.2. 近縁系の一意性**

空でない集合 X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ と集合系 $\mathcal{V}' \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times X))$ について、以下を満たすとき、$\mathcal{V}'$ は基本近縁系である。

$$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V}(V \subset V')$$
$$\forall V \in \mathcal{V} \exists V' \in \mathcal{V}'(V' \subset V)$$

さらに定義 *17.1.3* の定める近縁系 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}'$ は一致する。

Proof.
第一式を考える。定義 17.1.2 第一式から $\exists V \in \mathcal{V}$ より、仮定から $\exists V' \in \mathcal{V}'$

第二式を考える。$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \forall x \in X((x,x) \in V \subset V')$ より成り立つ。

第三式を考える。仮定より $\forall V_1', V_2' \in \mathcal{V}' \exists V_1, V_2 \in \mathcal{V}(V_1 \cap V_2 \subset V_1' \cap V_2')$ である。
定義 17.1.2 第三式より $\exists V \in \mathcal{V}(V \subset V_1 \cap V_2)$ であり、仮定より $\exists V' \in \mathcal{V}'(V' \subset V \subset V_1' \cap V_2')$

第四式を考える。$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V} \exists W' \in \mathcal{V}'(W' \circ W' \subset W \circ W \subset V \subset V')$ である。

第五式を考える。$\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V} \exists W' \in \mathcal{V}'\left(W' \subset V' \subset V^{-1} \subset V'^{-1}\right)$ である。

$\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} \exists V' \in \mathcal{V}'(V' \subset V \subset U)$ である。ゆえに、$U \in \mathcal{U}'$ である。
$\forall U' \in \mathcal{U}' \exists V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V}(V \subset V' \subset U')$ である。ゆえに、$U' \in \mathcal{U}$ である。 ■

***Lem.* 17.1.3. 近縁系は基本近縁系**
近縁系 $\mathcal{U}$ は基本近縁系である。さらに $\mathcal{U}$ から定義 *17.1.3* より定まる近縁系は、$\mathcal{U}$ に一致する。

Proof.
定義より $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V}(V \subset U)$ である。
$\forall V \in \mathcal{V}$ について、$V \in \mathcal{U}$ である。
補題 17.1.2 より成り立つ。 ■

***Lem.* 17.1.4. 近縁系の開性**
空でない集合 X と、X の近縁系 $\mathcal{U}$ について、以下を満たす。

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U} \forall (x,y) \in V \exists W \in \mathcal{U}(W[y] \subset V[x] \wedge V \subset U)$$

Proof.
$V \coloneqq \{(x,y) \in X \times X \mid \exists S \in \mathcal{U}(S[x] \times S[y] \subset U)\}$ を考える。定義より $V \subset U$ である。
補題 17.1.1 より、$\exists T \in \mathcal{U}\left(\left(T^{-1} \circ T\right) \circ T \subset U\right)$ である。
$\forall (s,t) \in T$ について、$\forall (w,z) \in T[s] \times T[t]\left((w,z) \in \left(T^{-1} \circ T\right) \circ T \subset U\right)$ であるので、$(s,t) \in V$
$T \subset V$ より、$V \in \mathcal{U}$ である。

$\forall (x,y) \in V$ について、$\exists S \in \mathcal{U}(S[x] \times S[y] \subset U)$ である。
定義 17.1.2 第四式より $\exists W \in \mathcal{U}(W \circ W \in S)$ である。
$\forall z \in W[y]$ について $W[z] \subset S[y]$ より、$W[x] \times W[z] \subset S[x] \times S[y] \subset U$、すなわち $z \in V[x]$ である。 ■

***Def.* 17.1.4. 一様空間**

空でない集合 X と、X 上の近縁系 $\mathcal{U}$ について、順序対 $(X,\mathcal{U})$ を一様空間と呼ぶ。または単に X と書き、一様空間と集合どちらも表すものとする。

***Thm.* 17.1.5. 基本近縁系から定まる位相**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と近縁系 $\mathcal{U}$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V}$ を考える。

X の任意の元 x について、以下で定める集合系 $\mathcal{B}(x)$ は基本近傍系である。

$$\mathcal{B}(x) \coloneqq \{V[x] \coloneqq \{y \in X \mid (x,y) \in V\} \mid V \in \mathcal{V}\}$$

さらに、$\mathcal{B}(x)$ の与える近傍系 $\mathcal{N}(x)$ は、近縁系 $\mathcal{U}$ の与える基本近傍系 $\mathcal{N}'(x)$ に一致する。

この意味で、一様空間は位相空間である。

Proof.

第一式を示す。定義 17.1.2 第一式から、$\exists V \in \mathcal{V}(V[x] \in \mathcal{B}(x))$ である。

第二式を示す。定義 17.1.2 第二式から、$\forall V \in \mathcal{V}(x \in V[x])$ より成り立つ。

第三式を示す。定義 17.1.2 第三式から $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \exists V_1, V_2 \in \mathcal{V}(B_1 = V_1[x] \land B_2 = V_2[x])$ について、

$\exists V \in \mathcal{V}(V[x] \subset (V_1 \cap V_2)[x] = B_1 \cap B_2 \land V[x] \in \mathcal{B}(x))$

第四式を示す。$\forall B \in \mathcal{B}(x) \exists V \in \mathcal{V}(B = V[x])$ である。

定義 17.1.2 第四式から $\exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$ であり、$\exists C \coloneqq W[x] \in \mathcal{B}(x)$

$\forall y \in C \exists D = W[y] \in \mathcal{B}(y)$ である。

$\forall z \in D((x,y),(y,z) \in W)$ より $(x,z) \in V$ すなわち $z \in V[x] = B$ である。よって $D \subset B$ となる。

$\forall N \in \mathcal{N}(x)$ について $\exists V \in \mathcal{V}(V[x] \subset N)$ であり、$U = V \cup \{(x,y) \mid y \in N\} \in \mathcal{U}$ かつ $N = U[x]$ であるので、$N \in \mathcal{N}'(x)$

$\forall N' \in \mathcal{N}'(x)$ について $\exists U \in \mathfrak{P}(X \times X) \exists V \in \mathcal{V}(V \subset U \land U[x] = N')$ であり、$V[x] \subset U[x] = N' \in \mathcal{N}(x)$ ■

***Thm.* 17.1.6. 一様空間は T_3**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ は、T_3 空間である。

Proof.

$\forall x \in X \forall B \in \mathcal{B}(x)$ を考える。

定義より $\exists U \in \mathcal{U}(U[x] = B)$ であり、補題 17.1.1 より $\exists V \in \mathcal{U}\big(V^{-1} \circ V \subset U\big)$

定義 17.1.2 第五式より、$\exists W \in \mathcal{U}\big(W \subset V^{-1}\big)$ である。

$W[x] \in \mathcal{N}(x)$ より、$\exists D \in \mathcal{B}(x)(D \subset W[x])$ である。

$\forall y \in \overline{D}$ について考える。

定理 16.4.3 より、$\exists z \in X(z \in D \cap W[y] \subset W[x] \cap W[y])$ である。

$(x,z),(y,z) \in W$ より、$(x,y) \in U$ である。

したがって、$\overline{D} \subset U[x] = B$

定理 16.5.6 より成り立つ。 ■

***Def.* 17.1.5. 一様連続**
一様空間 $(X,\mathcal{U}),(X',\mathcal{U}')$ と写像 $f \in (X')^X$ について、f が以下を満たすとき、f は一様連続であると呼ぶ。

$$\forall U' \in \mathcal{U}' \exists U \in \mathcal{U}((x,y) \in U \to (f(x),f(y)) \in U')$$

***Lem.* 17.1.7. 基本近縁系と一様連続**
一様空間 $(X,\mathcal{U}),(X',\mathcal{U}')$ と写像 $f \in (X')^X$ と、$\mathcal{U},\mathcal{U}'$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V},\mathcal{V}'$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. f は一様連続
2. $\forall V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V}((x,y) \in V \to (f(x),f(y)) \in V')$

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$\forall V' \in \mathcal{V}' \subset \mathcal{U}' \exists U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V}((x,y) \in V \subset U \to (f(x),f(y)) \in V')$ より明らか。

2. $\to$ 1. を示す。
$\forall U' \in \mathcal{U}' \exists V' \in \mathcal{V}' \exists V \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}((x,y) \in V \to (f(x),f(y)) \in V' \subset U')$ より明らか。 ■

***Def.* 17.1.6. 一様同型**
一様空間 X,X' と写像 $f \in (X')^X$ について、f が全単射かつ f と f^{-1} がともに一様連続であるとき、f を一様同型写像と呼ぶ。
また、一様同型写像 $f \in Y^X$ が存在するとき、X と Y は一様同型であると呼ぶ。

***Thm.* 17.1.8. 一様連続は連続**
一様空間 $(X,\mathcal{U}),(X',\mathcal{U}')$ について、一様連続な写像 $f \in (X')^X$ は連続である。

Proof.
$\forall x \in X \forall N' \in \mathcal{N}(f(x))$ について、定義より $\exists U' \in \mathcal{U}'(N' = U'[f(x)])$ である。
一様連続の定義より $\exists U \in \mathcal{U}((x,y) \in U \to (f(x),f(y)) \in U')$ である。
今、$U[x] \in \mathcal{N}(x)$ であり、$f(U[x]) \subset U'[f(x)] = N'$ より点連続。
$\forall x \in X$ で成り立つので、定理 16.3.12 より示される。 ■

***Cor.* 17.1.9.**
一様同型写像は同相写像。

***Lem.* 17.1.10.**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、X の空でない部分集合 A を考える。

$\mathcal{U}$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下の集合系 $\mathcal{V}'$ は集合 A の基本近縁系である。

$$\mathcal{V}' := \{(A \times A) \cap V \mid V \in \mathcal{V}\}$$

さらに、$\mathcal{V}'$ の与える近縁系と、$\mathcal{U}$ からこの補題により与えられる基本近縁系 $\mathcal{U}'$、この 2 つは一致する。

Proof.

明らか。 ■

***Def.* 17.1.7. 部分一様空間**

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、X の空でない部分集合 A を考える。補題 *17.1.10* の与える基本近縁系の与える近縁系 $\mathcal{U}'$ について、一様空間 $(A,\mathcal{U}')$ を部分一様空間と呼ぶ。

17.2 *Cauchy*

Def.* 17.2.1. *Cauchy

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ について、X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき、*Cauchy* であると呼ぶ。

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}((x_\mu, x_\tau) \in U)$$

Lem.* 17.2.1. 基本近縁系と *Cauchy

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と X 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、$\mathcal{U}$ を与える X の基本近縁系 $\mathcal{V}$ を考える。このとき、以下の 2 つは同値である。

1. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は *Cauchy*
2. $\forall V \in \mathcal{V} \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}((x_\mu, x_\tau) \in V)$

Proof.

1. $\to$ 2. は、$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ より明らか。

2. $\to$ 1. を示す。

$\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} \exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}((x_\mu, x_\tau) \in V \subset U)$ ■

***Cor.* 17.2.2.**

Cauchy ネットの部分ネットは *Cauchy* である。

Thm.* 17.2.3. 収束ネットは *Cauchy

収束するネットは *Cauchy* である。

Proof.

$\forall V \in \mathcal{V}$ について、補題 17.1.1 より $\exists W \in \mathcal{V}\bigl(W^{-1} \circ W \subset V\bigr)$

定義 16.3.3 より $\exists \lambda_0 \in \Lambda\Bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset W[a]\Bigr)$

a に収束するとすると、$\forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}((a, x_\mu), (a, x_\tau) \in W)$ であるので、$(x_\lambda, x_\tau) \in V$ ■

***Lem.* 17.2.4. 収束する部分を持つ *Cauchy* ネット**
一様空間 X と X 上の *Cauchy* ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$a \in X$ に収束する部分ネットを持つならば、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は a に収束する。

Proof.
定義 17.1.2 第四式より $\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$
収束より、$\exists \mu_0 \in M\Big(\big(x_{\lambda(\mu)}\big)_{\mu\in M_{\succcurlyeq \mu_0}} \subset W[a]\Big)$
Cauchy ネットより、$\exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}((\lambda_1, \lambda_2) \in W)$
定義 3.5.6 より $\exists \mu_1 \in M(\lambda_0 \preccurlyeq \lambda(\mu_1))$ であり、有向集合より $\exists \mu_2 \in M(\mu_0 \preccurlyeq \mu_2 \wedge \mu_1 \preccurlyeq \mu_2)$
よって $\lambda(\mu_2) \preccurlyeq \lambda$ ならば $(a, \lambda(\mu_2)), (\lambda(\mu_2), \lambda) \in W$ である。ゆえに $(a, x_\lambda) \in V$ すなわち $x_\lambda \in V[a]$ ■

***Def.* 17.2.2. 完備**
一様空間 X について、X 上の任意の *Cauchy* なネットが収束するとき、X は完備であると呼ぶ。

***Def.* 17.2.3. 全有界**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が以下を満たすとき、全有界であると呼ぶ。

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists A \in \mathfrak{P}(X)\Big(|A| < \infty \wedge \bigcup \{U[x] \mid x \in A\} = X\Big)$$

***Cor.* 17.2.5. *Cauchy* 列は全有界**
Cauchy 列は全有界である。

***Thm.* 17.2.6. ネットによる全有界の特徴づけ**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と、近縁系 $\mathcal{U}$ を与える基本近縁系 $\mathcal{V}$ について、以下の４つは同値である。

1. X は全有界
2. $\forall V \in \mathcal{V} \exists A \in \mathfrak{P}(X)(|A| < \infty \wedge \bigcup \{V[x] \mid x \in A\} = X)$
3. X 上の任意の普遍ネットは *Cauchy* である。
4. X 上の任意のネットは *Cauchy* な部分ネットを持つ。

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ より明らか。

2. $\to$ 3. を示す。
X 上の普遍ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について考える。
補題 17.1.1 より $\forall V \in \mathcal{V} \exists W \in \mathcal{V}\big(W^{-1} \circ W \subset V\big)$
全有界性より $\exists n \in \mathbb{N}(n \neq 0 \wedge \bigcup \{W[x(m)] \mid m \in n\} = X)$ を得る。
普遍ネットの定義より $\forall m \in \mathbb{N} \exists \lambda_0 \in \Lambda\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset W[x(m)] \vee (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}} \subset X \setminus W[x(m)]\Big)$ である。
定理 5.3.9 より、$\{\lambda_0(m) \mid m \in n\}$ の上界 λ_1 が存在する。

$\forall m \in \mathbb{N}\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}} \subset X \setminus W[x(m)]\Big)$ とすると、全有界の定義より矛盾。
背理法より、$\exists m \in \mathbb{N}\Big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}} \subset W[x(m)]\Big)$
ゆえに $\forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq\lambda_1}((x[m], x_\mu), (x[m], x_\tau))$ すなわち $(x_\mu, x_\tau) \in V$

3. $\to$ 4. を示す。
仮定と定理 3.5.8 より明らか。

4. $\to$ 1. を示す。
全有界でないと仮定する。X の任意の有限部分 A について、$\bigcup\{U[x] \mid x \in A\} \neq X$ となる近縁 U が存在する。
$P := \{A \in \mathfrak{P}(X) \mid |A| < \infty \wedge A \neq \varnothing\}$ について、$(P, \subset)$ は有向集合であり、
全有界でないことから $\forall A \in P \exists x \in X \setminus \bigcup\{U[x] \mid x \in A\}$ である。このようなネット $(x_A)_{A\in P}$ を考える。

仮定より *Cauchy* な部分ネット $\big(x_{\varphi(\mu)}\big)_{\mu\in M}$ を持つ。
ゆえに $\exists \mu_0 \in M \forall \mu \in M_{\succcurlyeq\mu_0}\big(x_{\varphi(\mu)} \in U[x_{\varphi(\mu_0)}]\big)$ である。
$\big\{x_{\varphi(\mu_0)}\big\} \in P$ であることと、定義 3.5.6 と有向性より、$\exists \mu_1 \in M\big(\mu_0 \preccurlyeq \mu_1 \wedge \big\{x_{\varphi(\mu_0)}\big\} \subset \varphi(\mu_1)\big)$ となる。
すなわち、$x_{\varphi(\mu_1)} \in U[x_{\varphi(\mu_0)}] \subset \bigcup\{U[x] \mid x \in \varphi(\mu_1)\}$ であるが、このネットの定義に反する。

背理法より示される。 ■

Thm. 17.2.7. _Heine-Borel_ の被覆定理
一様空間 $(X, \mathcal{U})$ について、以下の 2 つは同値である。

1. X はコンパクトである。
2. X は全有界かつ完備である。

Proof.
1. $\to$ 2. を示す。
定理 16.4.5 より X 上の任意の普遍ネットは収束するので、定理 17.2.3 より *Cauchy* である。
定理 17.2.6 より全有界である。

定理 16.4.5 より X 上の任意の *Cauchy* なネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は収束する部分ネットを持つ。
補題 17.2.4 より $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は収束する。

2. $\to$ 1. を示す。
X 上の任意のネットについて、全有界性から定理 17.2.6 より *Cauchy* な部分ネットが存在して、完備性から収束する。定理 16.4.5 より示される。 ■

Thm. 17.2.8. _Heine-Cantor_ の定理
全有界な一様空間 $(X, \mathcal{U})$ と、一様空間 $(X', \mathcal{U}')$ について、連続写像 $f \in (X')^X$ は一様連続である。

Proof.
$\forall V' \in \mathcal{V}'$ について、補題 17.1.1 より $\exists W' \in \mathcal{V}'\big(W'^{-1} \circ W' \subset V'\big)$
定理 16.3.12 から $\forall x \in X \exists V \in \mathcal{V}(f(V[x]) \subset W'[f(x)])$ である。
定義 17.1.2 第四式より $\exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$

今、$\{W(V',x)[x] \mid x \in X\}$ は被覆である。
全有界性から $\exists Y \subset X \wedge |Y| < \infty$ であり $C \coloneqq \{W(V',x)[x] \mid x \in Y\}$ は被覆となる。
定義 17.1.2 第三式より $S \coloneqq \bigcap \{W(V',x) \mid x \in Y\} \in \mathcal{V}$ である。

$\forall (w,z) \in S(V')$ について、C は被覆より $\exists y \in Y(V')(w \in W(V',y)[y] \subset V(V',y)[y])$ である。
$(y,w),(w,z) \in W(V',y)$ であり、$(y,z) \in V(V',y)$ すなわち $z \in V(V',y)[y]$ である。
$w,z \in V(V',y)[y]$ より $f(w),f(z) \in f(V(V',y)[y]) \subset W'(V')[f(y)]$ である。
したがって $(f(y),f(w)),(f(y),f(z)) \in W'$ より $(f(w),f(z)) \in V'$ ■

17.3 可算な一様構造

***Def.* 17.3.1. 可算一様空間**
一様空間 X が可算な基本近縁系 $\mathcal{V}$ もつとき、$(X,\mathcal{U})$ を可算一様空間と呼ぶ。

***Lem.* 17.3.1. 可算一様空間における基本近傍系の単調列**
可算一様空間 $(X,\mathcal{U})$ について、以下を満たす基本近縁系 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する。

$$\forall n \in \mathbb{N}\left(\left(V_{s(n)}^{-1} \circ V_{s(n)}\right) \circ V_{s(n)} \subset V_n\right)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\forall (x,y) \in V_n \exists m \in \mathbb{N}(V_m[y] \subset V_n[x])$$

Proof.
可算であるので、$\mathbb{N}$ からの全射 φ が存在するような基本近縁系 $\mathcal{V}$ が存在する。

以下のように定めた V_n は条件を満たす。
まず $\varphi(0)$ について、補題 17.1.4 の定める近縁を V_0 とする。
次に $n \in \mathbb{N}(V_n \in \mathcal{U})$ として、補題 17.1.1 の定める近縁を W_n とする。
ここで $W_n \cap \varphi(s(n))$ は定義 17.1.2 第三式より近縁であるので、補題 17.1.4 の定める近縁が存在して $V_{s(n)}$ とする。

定義より、$\forall n \in \mathbb{N}(V_n \in \mathcal{U})$ である。

定義と φ の全射性より、$\forall V \in \mathcal{V}\exists n \in \mathbb{N}(V_n \subset \varphi(n) = V)$ である。

補題 17.1.2 より、同じ近縁系を与える基本近縁系である。 ■

***Thm.* 17.3.2. 可算一様空間の満たす性質**
一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が可算一様ならば、以下の 2 つを満たす。

- X は第一可算
- X は T_4

Proof.

第一可算性を示す。定理 17.1.5 より明らか。

T_4 であることを示す。$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ とする。
補題 17.3.1 の定める $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。
定理 16.4.3 より、$\forall x_1 \in F_1 \exists n_1 \in \mathbb{N}(V_{n_1}[x_1] \cap F_2 = \varnothing)$ である。
同様に、$\forall x_2 \in F_2 \exists n_2 \in \mathbb{N}(V_{n_2}[x_2] \cap F_1 = \varnothing)$ である。
以下の集合 U_1, U_2 を考える。定義より明らかに $F_1 \subset U_1 \land F_2 \subset U_2 \land U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ である。

$$U_1 \coloneqq \bigcup \left\{V_{s(s(n_1(x)))}[x] \mid x \in F_1\right\}$$
$$U_2 \coloneqq \bigcup \left\{V_{s(s(n_2(x)))}[x] \mid x \in F_2\right\}$$

$\exists y \in U_1 \cap U_2$ とすると、$\exists x_1 \in F_1 \exists x_2 \in F_2\big(y \in V_{s(s(n_1(x_1)))}[x_1] \cap V_{s(s(n_2(x_2)))}[x_2]\big)$ である。
$n_1(x_1) \leq n_2(x_2)$ とする。
$(x_1, y), (x_2, y) \in V_{s(s(n_1(x_1)))}$ より、$(x_1, y), (y, x_2) \in V_{s(n_1(x_1))}$ であるので、$(x_1, x_2) \in V_{n_1(x_1)}$ である。
$x_2 \in V_{n_1(x_1)}[x_1] \cap F_2$ より、n_1 の定義に反する。

$n_1(x_1) > n_2(x_2)$ であるときも、同様に n_1 の定義に反する。
したがって、$U_1 \cap U_2 = \varnothing$ である。 ■

***Thm.* 17.3.3. 可算一様空間について**
可算一様空間 X について、以下の 3 つは同値である。

1. X は第二可算
2. X は *Lindelöf*
3. X は可分

Proof.
1. → 2. は、定理 16.7.4 より成り立つ。

補題 17.3.1 の定める $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

2. → 3. を示す。
$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times X$ について、$\forall z \in V_n[x] \exists m \in \mathbb{N}(V_m[z] \subset V_n[x])$ であるので、$V_n[x] \in \mathcal{O}$ である。
$n \in \mathbb{N}$ について、集合系 $D_n \coloneqq \{V_n[x] \mid x \in X\}$
D_n は開被覆であるので、仮定より可算部分 Y_n が存在して、$\{V_n[y] \mid y \in Y\}$ は開被覆である。

$Y \coloneqq \bigcup \{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考える。定理 5.4.3 より Y は可算である。
$\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}$ について、Y_n は開被覆より $\exists y \in Y_n\big(x \in V_{s(n)}[y]\big)$ である。
ゆえに $y \in V_n[x] \cap Y$ であるので、$x \in \overline{Y}$

3. → 1. を示す。仮定より X の可算部分 Y が存在して、$\overline{Y} = X$ である。
以下の集合 $\mathcal{B}$ を考える。
$$\mathcal{B} \coloneqq \{V_n[y] \mid (n, y) \in \mathbb{N} \times Y\}$$
定理 5.4.3 より、$\mathcal{B}$ は可算。
$\forall (n, y) \in \mathbb{N} \times Y$ について、$\forall z \in V_n[y] \exists m \in \mathbb{N}(V_m[z] \subset V_n[y])$ であるので、$V_n[y] \in \mathcal{O}$ である。

$\forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O$ について、定理 16.3.6 より $\exists n \in \mathbb{N}(V_n[x] \subset O)$ である。
$x \in \overline{Y}$ より $\exists y \in Y\big(y \in V_{s(s(n))}[x]\big)$ である。
$V_{s(s(n))} \subset V_{s(n)}^{-1}$ より、$x \in V_{s(n)}[y]$ である。
$\forall z \in V_{s(n)}[y]$ について $(x,x),(x,y),(y,z) \in V_{s(n)}$ より $(x,z) \in V_n$、すなわち $V_{s(n)}[y] \subset V_n[x] \subset O$
補題 16.1.2 より、$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基である。 ■

***Thm.* 17.3.4. 可算一様空間における完備**
可算一様空間 X について、X 上の任意の *Cauchy* 列が収束するならば完備である。

Proof.
補題 17.3.1 の主張する基本近縁系 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する。
Cauchy なネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\forall n \in \mathbb{N} \exists \lambda_0(n) \in \Lambda \forall \mu, \tau \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0(n)}\big((x_\mu, x_\tau) \in V_{s(n)}\big)$
$\big(x_{\lambda_0(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ は *Cauchy* な点列であるので、仮定より $\exists a \in X$ に収束する。
すなわち $\exists l \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}_{\geq l}\big(\big(a, x_{\lambda_0(k)}\big) \in V_{s(n)}\big)$
$j := \max\{l, n\}$ について $\forall \mu \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0(j)}\big(\big(a, x_{\lambda_0(j)}\big), \big(x_{\lambda_0(j)}, x_\mu\big) \in V_{s(n)}\big)$ である。
したがって $(a, x_\mu) \in V_n$ ■

18　代数上の位相

18.1　位相群

***Def.* 18.1.1. 位相群**

群 $(G,\cdot)$ と、X の開集合系 $\mathcal{O}$ が以下が成り立つとき、順序対 $((G,\cdot),\mathcal{O})$ を位相群と呼ぶ。

1. $\cdot \in G^{G\times G}$ が連続
2. $-1 \in G^G$ が連続

***Def.* 18.1.2. 部分位相群**

位相群 $((G,\cdot),\mathcal{O})$ の部分群 $(H,\cdot)$ について、$((H,+),\{H\cap O \mid O\in\mathcal{O}\})$ は位相群である。これを位相群 G の部分位相群である。

***Lem.* 18.1.1. 位相群の収束ネットの積と逆**

位相群 G 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が、$x,y\in G$ に収束するならば、$(x_\lambda y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\left(x_\lambda^{-1}\right)_{\lambda\in\Lambda}$ は xy,x^{-1} に収束するネットである。

Proof.

定義 18.1.1 と定理 16.3.11 より成り立つ。　■

***Lem.* 18.1.2. 位相群と連続写像**

位相空間 X と位相群 G について、連続写像 $f\in G^X,g\in G^X$ を考える。

このとき、写像 $f\cdot g\in G^X,(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ と、写像 $\hat{f}\in G^X,\hat{f}(x)0f(x)^{-1}$ は連続である。

Proof.

定義 18.1.1 と定理 16.1.6 より成り立つ。　■

***Thm.* 18.1.3. 位相群と分離**

位相群 G について、以下の 3 つは同値である。このとき、G は *Hausdorff* であると呼ぶ。

1. G は T_2 空間
2. G は T_1 空間
3. $\{e\}$ は閉集合

Proof.

1. $\to$ 2. は明らか。

2. $\to$ 3. は、定理 16.5.1 より明らか。

3. $\to$ 1. を示す。

$\{(x,x)\mid x\in G\}=\cdot^{-1}(\{e\})\in\mathcal{O}$ より定理 16.5.5 から示される。　■

***Thm.* 18.1.4. 位相群の左一様構造**
位相群 G と基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ について、以下で定める集合系 $\mathcal{V}$ は基本近縁系である。

$$\mathcal{V} \coloneqq \left\{ \widetilde{B} \coloneqq \left\{ (x,y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in B \right\} \mid B \in \mathcal{B}(e) \right\}$$

さらに、基本近縁系 $\mathcal{V}$ の定める近傍系 $\mathcal{N}'(x)$ は、基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ の定める近傍系 $\mathcal{N}(x)$ に一致する。

Proof.
定義 16.3.1 第一式から $\mathcal{V} \neq \varnothing$

$\forall V \in \mathcal{V}$ について定義 16.3.1 第二式から $\forall x \in G \forall B \in \mathcal{B}(e)\big(x^{-1}x = e \in B\big)$ である。ゆえに $(x,x) \in V$

$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ について、$\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(e)\Big(V_1 = \widetilde{B_1} \land V_2 = \widetilde{B_2}\Big)$ である。
定義 16.3.1 第三式より $\exists B \in \mathcal{B}(e)(B \subset B_1 \cap B_2)$ であり、定義より $\widetilde{B} \subset V_1 \cap V_2 \land \widetilde{B} \in \mathcal{V}$

$\forall V \in \mathcal{V} \exists B \in \mathcal{B}(e)\Big(V = \widetilde{B}\Big)$ である。
定義 18.1.1 第一式と定理 16.3.12 より $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(e)(\cdot(B_1 \times B_2) \subset B)$
定義 16.3.1 第三式より $\exists B' \in \mathcal{B}(e)(\cdot(B' \times B') \subset \cdot(B_1 \times B_2) \subset B)$
定義より $\widetilde{B'} \circ \widetilde{B'} \subset \widetilde{\cdot(B' \times B')} \subset \widetilde{B} = V$

$\forall V \in \mathcal{V} \exists B \in \mathcal{B}(e)\Big(V = \widetilde{B}\Big)$ である。
定義 18.1.1 第二式と定理 16.3.12 より $\exists B' \in \mathcal{B}(e)(-1(B') \subset B)$ となるので、$\widetilde{B'} \subset V^{-1}$

$\mathcal{V}$ の与える基本近傍系は $\mathcal{B}'(x) = \left\{ \widetilde{B}[x] \mid B \in \mathcal{B}(e) \right\}$ である。

定義 18.1.1 第一式と補題 16.2.3 より $\forall D \in \mathcal{B}(x) \exists B \in \mathcal{B}(e)(\{xy \mid y \in B\} \subset D)$
$\widetilde{B}[x] = \left\{ y \in G \mid x^{-1}y \in B \right\} = \{xz \mid z \in B\} \subset D$

定義 18.1.1 第一式と補題 16.2.3 より $\forall B \in \mathcal{B}(e) \exists D \in \mathcal{B}(x)\big(\left\{x^{-1}y \mid y \in D\right\} \subset B\big)$
$\widetilde{B}[x] = \left\{ y \in G \mid x^{-1}y \in B \right\} \supset \left\{ z \in G \mid x^{-1}z \in \left\{ x^{-1}y \mid y \in D \right\} \right\} = D$
ゆえに補題 16.3.3 より成り立つ。 ■

***Lem.* 18.1.5. 位相群の *Cauchy* ネットの積**
位相群 G 上の *Cauchy* ネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、$(x_\lambda y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は *Cauchy* ネットである。

Proof.
$\forall V \in \mathcal{V}$ について、$\exists W \in \mathcal{V}(W \circ W \subset V)$
Cauchy より、$\exists \lambda_x \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_x}((x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in W)$ かつ $\exists \lambda_y \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_y}((y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}) \in W)$
有向性より、$\exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succcurlyeq \lambda_0}((x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}), (y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}) \in W)$
定理 18.1.4 の定義より $(x_{\lambda_1} y_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} y_{\lambda_1}), (x_{\lambda_2} y_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} y_{\lambda_2}) \in W$ より、$(x_{\lambda_1} y_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} y_{\lambda_2}) \in V$ ■

***Lem.* 18.1.6. 可換位相群の *Cauchy* ネットの逆**
可換位相群 G 上の *Cauchy* ネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\left(x_\lambda^{-1}\right)_{\lambda \in \Lambda}$ は *Cauchy* ネットである。

Proof.

$\forall V \in \mathcal{V}$ について、$\exists W \in \mathcal{V}\bigl(W \subset V^{-1}\bigr)$

Cauchy より、$\exists \lambda_0 \in \Lambda \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\succeq \lambda_x} ((x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in W)$ である。

$(x_{\lambda_2}, x_{\lambda_1}) \in V$ である。可換性と定理 18.1.4 の定義より $\left(x_{\lambda_1}^{-1}, x_{\lambda_2}^{-1}\right) \in V$ ■

***Def.* 18.1.3. 総和可能**

Hausdorff な可換位相群 G について、G 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

点列 $(\sum_{m=0}^{n} x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ が、G 上の点 s に収束するとき、点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は総和可能と呼ぶ。

このとき、$\sum_{m=0}^{\infty} x_m \coloneqq s$ と表記する。

18.2 位相環

***Def.* 18.2.1. 位相環**

環 $((R,+),\times)$ と、X の開集合系 $\mathcal{O}$ が以下が成り立つとき、順序対 $(((R,+),\times),\mathcal{O})$ を位相環と呼ぶ。

1. $((R,+),\mathcal{O})$ は位相群
2. $\times \in R^{R\times R}$ が連続

***Lem.* 18.2.1. 位相環の条件**

位相群 $(R,+)$ について、R が位相環であることは、以下の 3 つを満たすことと同値である。

- $\times \in R^{R\times R}$ は、$(0_R, 0_R)$ で連続。
- $\forall x_0 \in R$ について、$l \in R^R, l(x) = x_0 x$ は、0_R で連続。
- $\forall x_0 \in R$ について、$r \in R^R, r(x) = x x_0$ は、0_R で連続。

Proof.

必要性は明らか。

十分性を示す。

$\forall (x_0, y_0) \in R \times R$ について、$xy = x_0y_0 + (x-x_0)(y-y_0) + (x-x_0)y_0 + x_0(x-y)$ より、(x_0, y_0) で連続。 ■

***Lem.* 18.2.2. 位相環の収束ネットの積**

位相環 R 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が、$x, y \in R$ に収束するならば、$(x_\lambda y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は xy に収束するネットである。

Proof.

定義 18.2.1 と定理 16.3.11 より成り立つ。 ■

***Lem.* 18.2.3. 位相環と連続写像**

位相空間 X と位相環 R について、連続写像 $f \in R^X, g \in R^X$ を考える。

このとき、写像 $f \times g \in G^X, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ は連続である。

Proof.

定義 18.2.1 と定理 16.1.6 より成り立つ。 ■

***Def.* 18.2.2. 位相体**

体 $((F,+),\times)$ と、X の開集合系 $\mathcal{O}$ が以下が成り立つとき、順序対 $(((F,+),\times),\mathcal{O})$ を位相体と呼ぶ。

1. $(((F,+),\times),\mathcal{O})$ は位相環
2. $-1 \in (F^\times)^{F^\times}$ が連続

***Lem.* 18.2.4. 位相体の収束ネットの逆**

Hausdorff な位相体 F 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $x \in F^\times$ に収束するならば、以下で定めるネット $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $1_F/x$ に収束するネットである。

$$y_\lambda = \begin{cases} 1_F/x_\lambda & (x_\lambda \neq 0_F) \\ 0_F & (x_\lambda = 0_F) \end{cases}$$

Proof.

Hausdorff と収束の定義より $\exists B_0 \in \mathcal{B}(x)\exists\lambda_0 \in \Lambda\Big(0_F \notin B_0 \wedge (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_{\succcurlyeq\lambda_0}} \subset B_0\Big)$

定義 18.2.2 と定理 16.3.11 より成り立つ。 ■

18.3 位相群としての順序群

***Thm.* 18.3.1. 順序群は位相群**

順序群 $((G,+),\leq)$ 上の以下の 2 つの演算は連続である。

1. $+ \in G^{G\times G}$
2. $- \in G^G$

Proof.

補題 16.8.1 の定める開基 $\mathcal{B}$ を考える。

$\forall(x,y) \in G$ について考える。

G^+ が最小元 m を持つならば $\{x\} =]x-m, x+m[\in \mathcal{B}(x)$ である。同様に $\{y\} \in \mathcal{B}(y)$

$\forall B \in \mathcal{B}(x+y)(+(\{x\}\times\{y\}) = \{x+y\} \subset B)$

G^+ が最小元を持たないならば $\forall B \in \mathcal{B}(x+y)\exists a,b \in G(x+y \in]a,b[= B)$ である。

補題 14.1.3 より $\exists g \in G^+(g+g \leq \min\{x+y-a, b-(x+y)\})$ である。

$B' \coloneqq]x-g, x+g[\times]y-g, y+g[\in \mathcal{B}\times\mathcal{B}$ であり、$+(B') \subset B$

定理 16.3.12 より成り立つ。

$\forall B \coloneqq]a,b[\in \mathcal{B}$ について考える。$f = -$ とする。

$f^{-1}(B) =]-b,-a[\in \mathcal{B}$ であるので連続。 ■

***Def.* 18.3.1. 絶対値**

順序群 G について、以下で定める写像を絶対値と呼ぶ。

$$|a| \coloneqq \max\{a, -a\}$$

***Lem.* 18.3.2. 順序群のノルム**

順序群 G について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in G(|a| = 0_G \leftrightarrow a = 0_G)$$
$$\forall a, b \in G(|a + b| \leq |a| + |b|)$$
$$\forall a \in G(|a| = |-a|)$$

Proof.

$g \coloneqq a, b \in G$ について、$0_G \leq g \vee g < 0_G$ で場合分けすることにより得る。 ■

***Cor.* 18.3.3.**

順序群 G について以下が成り立つ。

$$\forall a \in G(0_G \leq |a|)$$

***Lem.* 18.3.4. 絶対値は連続**

順序群 $((G, +), \leq)$ 上の演算 $||$ は連続である。

Proof.

補題 16.8.1 の定める開基 $\mathcal{B}$ を考える。

$\forall B \coloneqq \{x \in G \mid a < x \wedge x < b\} \in \mathcal{B}$ について考える。

$b \leq a \vee b < 0_G$ ならば、$||^{-1}(B) = ||^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{O}$ である。

$a < 0_G \leq b$ であるとき、$||^{-1}(B) =]-b, b[\in \mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ である。

$0_G \leq a$ であるとき、$||^{-1}(B) =]-b, -a[\cup]a, b[\in \mathcal{O}$ である。

補題 16.1.5 より連続である。 ■

***Thm.* 18.3.5. 順序群の一様構造**

順序群 G について、以下で定める集合系 $\mathcal{V}$ は基本近縁系である。

$$\mathcal{V} \coloneqq \left\{V_g \coloneqq \{(x, y) \in G \times G \mid |x - y| < g\} \mid g \in G^+\right\}$$

さらに、基本近縁系 $\mathcal{V}$ の定める近縁系 $\mathcal{U}'$ は、定理 *18.1.4* の定める近縁系 $\mathcal{U}$ に一致する。

Proof.

$\forall g \in G^+ \exists B \in \mathcal{B}(0_G)\left(B =]-g, g[\wedge \widetilde{B} \subset V_g\right)$ である。

$\forall B \in \mathcal{B}(0_G)$ について、$B =]a, b[\wedge a < 0_G < b$ である。$g = \min\{-a, b\} \in G^+$ について、$V_g \subset \widetilde{B}$ である。

補題 17.1.2 より成り立つ。 ■

***Thm.* 18.3.6. 順序群では全有界ならば有界**

順序群 G の部分集合 A について、A が全有界ならば有界である。

Proof.

非自明性より $\exists g \in G^+$ である。

全有界より $\exists Y \in \mathfrak{P}(A)(|Y| < \infty \land A \subset \{B(g)[y] \mid y \in Y\})$ である。

定理 5.3.10 より $\exists u, d \in G(u = \max Y \land d = \min Y)$ である。

全有界性より $\forall a \in A(d - g < a \land a < u + g)$ ■

***Thm.* 18.3.7. ϵ-δ 論法**

順序群 G 上の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $r \in G$ に収束することは、以下を満たすことと必要十分である。

$$\forall \epsilon \in G^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(N \leq n \to |a_n - r| < \epsilon)$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が *Cauchy* であることは、以下を満たすことと必要十分である。

$$\forall \epsilon \in G^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}(N \leq n \land N \leq m \to |a_n - a_m| < \epsilon)$$

Proof.

定理 18.3.5 より明らか。 ■

***Lem.* 18.3.8. 順序群上の *Cauchy* 列の絶対値**

順序群 G 上の *Cauchy* 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は *Cauchy* 列となる。

さらに、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束するとき、$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は $|a|$ に収束する。

Proof.

補題 18.3.2 より $||x_n| - |x_m|| \leq |x_n - x_m|$ であるので *Cauchy* 列である。

補題 18.3.2 より $||x_n| - |a|| \leq ||x_n - a|| = |x_n - a|$ であるので、$|a|$ に収束する。 ■

18.4 位相環としての順序環

***Thm.* 18.4.1. 順序環のノルム**

順序環 R について、以下が成り立つ。

$$\forall a \in G(|a| = 0_R \leftrightarrow a = 0_R)$$
$$\forall a, b \in G(|a + b| \leq |a| + |b|)$$
$$\forall a, b \in G(|a||b| = |ab|)$$

Proof.

補題 18.3.2 より、第一式、第二式は成り立つ。

第三式について考える。$r := a, b \in R$ について、$0_R \leq r \lor r < 0_R$ で場合分けすることにより得る。 ■

***Thm.* 18.4.2.**
順序環 R は位相環である。すなわち、R 上の以下の演算は連続である。

- $\times \in R^{R\times R}$

Proof.
$(0_R, 0_R)$ について考える。
$\forall B \in \mathcal{B}(0_R)\exists a, b \in R(0_R \in]a, b[= B)$ である。
補題 14.2.2 より、$\exists r \in R^+(r \times r \leq \min\{-a, b\})$ である。
$B' \coloneqq]-r, r[\times]-r, r[\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ であり、$\times(B') \subset B$

$\forall x_0 \in R$ について、$f \in R^R, f(x) = x \times x_0$ を考える。
$x_0 = 0_R$ のとき、定値写像より連続。
$x_0 \neq 0_R$ のとき、点 0_R について考える。$\forall B \in \mathcal{B}(0_R)\exists a, b \in R(0_R \in]a, b[= B)$ である。
$r \coloneqq \min\{-a, b\}/|x_0|$ について、$B' \coloneqq]-r, r[$ であり、$f(B') \subset B$

可換性と補題 18.2.1 より位相環である。 ■

***Thm.* 18.4.3.**
順序体 F は位相体である。すなわち、F 上の以下の演算は連続である。

- $-1 \in (F^\times)^{F^\times}$

Proof.
開基 $B =]a, b[\cap F^\times$ を考える。
$B = \varnothing$ のとき、$-1^{-1}(B) = \varnothing \in \mathcal{O}$ である。
$0 < a < b$ のとき、$-1^{-1}(B) =]1/b, 1/a[\in \mathcal{O}$ である。
$0 = a < b$ のとき、$-1^{-1}(B) = \{x \in F \mid 1/b < x\} \in \mathcal{O}$ である。
その他の場合も同様。ゆえに位相体である。 ■

***Lem.* 18.4.4. 順序体上の *Cauchy* 列の積**
順序体 F 上の *Cauchy* 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、$(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は *Cauchy* 列となる。

Proof.
系 17.2.5 と定理 18.3.6 より、2 つの *Cauchy* 列は有界、すなわち $\exists K \in F^+\forall n \in \mathbb{N}(|x_n| \leq K \land |y_n| \leq K)$ である。
$2_F \coloneqq 1_F + 1_F$ として、$\forall \epsilon \in F^+$ について、

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\big(n, m > N_1(\epsilon \times 2_F^{-1} \times K^{-1}) \to |x_n - x_m| < \epsilon \times 2_F^{-1} \times K^{-1}\big)$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N}\big(n, m > N_2(\epsilon \times 2_F^{-1} \times K^{-1}) \to |y_n - y_m| < \epsilon \times 2_F \times K^{-1}\big)$$

ゆえに、

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\big(n, m > \max\big\{N_1(\epsilon \times 2_F^{-1} \times K^{-1}), N_2(\epsilon \times 2_F^{-1} \times K^{-1})\big\} \to |x_n y_n - x_m y_m| \leq |x_n||y_n - y_m| + |y_m||x_n - x_m| < \epsilon\big)$$

■

18.5 有理数の位相と一様構造

***Thm.* 18.5.1.** **$\mathbb{Q}$ は第二可算**

$\mathbb{Q}$ は第二可算である。

Proof.

$\mathcal{B} \coloneqq \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ は開基である。

定理 5.4.3 より、$\mathcal{B}$ は可算。 ■

***Thm.* 18.5.2.** **$\mathbb{Q}$ は完全不連結**

$\mathbb{Q}$ の部分 S が 2 点以上を含むならば、S は連結でない。

Proof.

$a, b \in S (a < b)$ とする。

$U \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \left(1 + \frac{x-a}{b-a}\right)^2 < 2 \right\}$ とする。$a \in U \wedge b \notin U$ である。

U は開かつ閉集合より、成り立つ。 ■

19　実数

19.1　実数の構成

***Rem.* 19.1.1. 実数の準備**
　$\mathbb{Q}$ 上の *Cauchy* 列全体の集合 A を考える。

***Lem.* 19.1.1. 実数の準備：前順序**
　A 上の自己関係 $\preccurlyeq_R$ は前順序である。

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \preccurlyeq_R (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\leftrightarrow \forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}_{\geq N}(x_n - y_n < \epsilon)$$

Proof.
　$x_n - x_n = 0 < \epsilon$ より、反射的である。
　$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \preccurlyeq_R (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \wedge (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \preccurlyeq_R (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のとき、

$$\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}_{\geq N}(x_n - y_n < \epsilon/2 \wedge y_n - z_n < \epsilon/2)$$

ゆえに、$x_n - z_n < \epsilon$ を得る。推移的である。　■

***Lem.* 19.1.2. 実数の準備：前順序の全域性**
　A 上で補題 *19.1.1* の前順序 $\preccurlyeq_R$ は以下を満たす。

$$\forall x, y\in A(x \preccurlyeq_R y \vee y \preccurlyeq_R x)$$

Proof.
　成り立たないと仮定する。
　$\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ について、

$$\exists\epsilon_1\in\mathbb{Q}^+\forall N\in\mathbb{N}\exists n\in\mathbb{N}_{\geq N}(x_n - y_n \geq \epsilon_1)$$
$$\exists\epsilon_2\in\mathbb{Q}^+\forall N\in\mathbb{N}\exists m\in\mathbb{N}_{\geq N}(x_m - y_m \leq -\epsilon_2)$$

　よって、$\epsilon = 2\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ として、

$$\forall N\in\mathbb{N}\exists n, m\in\mathbb{N}_{\geq N}((x_n - y_n) - (x_m - y_m) \geq \epsilon)$$

　$(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は、補題 18.1.5 より *Cauchy* 列であるので、

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n, m\in\mathbb{N}_{\geq N}(|(x_n - y_n) - (x_m - y_m)| < \epsilon)$$

　矛盾する。背理法より示される。　■

***Lem.* 19.1.3. 実数の準備：前順序の補足**
　A 上で補題 *19.1.1* の前順序 $\preccurlyeq_R$ は以下を満たす。

$$\forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A\big(\neg x \preccurlyeq y \leftrightarrow \exists\epsilon\in\mathbb{Q}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}_{\geq N}(x_n - y_n \geq \epsilon)\big)$$

Proof.

右を示す。

補題 18.1.5 より $(x_l - y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ は *Cauchy* 的である。

したがって $\exists N \in \mathbb{N}\forall m \in \mathbb{N}_{\geq N}$ について、$|(x_n - y_n) - (x_m - y_m)| < \epsilon/2$

ゆえに、$x_m - y_m > x_n - y_n - \epsilon/2 \geq \epsilon/2$

左を示す。

$x \preccurlyeq y$ とすると定義より矛盾。背理法より示される。 ■

Lem. 19.1.4. 実数の準備：加法可換群

A 上の以下の演算 $+$ は可換群をなす。

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\leftrightarrow (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$$

Proof.

補題 18.1.5 よりマグマである。

結合法則は、有理数の可換体としての性質より明らか。

$(0)_{n\in\mathbb{N}}$ は単位元である。

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、補題 18.1.6 より $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は逆元である。

交換法則は、有理数の可換体としての性質より明らか。 ■

Lem. 19.1.5. 実数の準備：可換環

補題 *19.1.4* の定める可換群 $(A, +)$ 上の以下の演算 $\times$ は可換環をなす。

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\leftrightarrow (x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$$

Proof.

補題 18.4.4 よりマグマである。

結合法則は、有理数の可換体としての性質より明らか。

$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ は単位元である。

交換法則は、有理数の可換体としての性質より明らか。

分配法則は、有理数の可換体としての性質より明らか。 ■

Lem. 19.1.6. 実数の準備：同値類

A 上で以下の自己関係 $\sim_R$ は同値類である。

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \preccurlyeq (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \land (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \preccurlyeq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$$

さらに、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であるとき、$(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束して以下を満たす。

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

Proof.

補題 19.1.1 より前順序。明らかに対称的であるので、同値類である。

定理 18.3.7 より明らか。 ■

Lem. 19.1.7. 実数の準備：両立

A 上で補題 *19.1.6* の同値類 $\sim_R$ は、補題 *19.1.1* の前順序、補題 *19.1.4* の加法、補題 *19.1.5* の乗法のそれぞれと両立する。

Proof.

前順序と両立することは、$\sim_R$ の定義と前順序の推移性より明らか。

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \wedge (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする。
$(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) = (x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)$ であるので、補題 18.1.1 より 0 に収束する。

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \wedge (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする。

$$|(x_n y_n) - (x'_n y'_n)| = |(x_n - x'_n)y_n + x'_n(y_n - y'_n)|$$

ここで、系 17.2.5 と定理 18.3.6 より 2 つの *Cauchy* 列は有界で、定理 18.4.1 より、

$$\exists K \in \mathbb{Q}^+(|(x_n y_n) - (x'_n y'_n)| \leq K(|x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|))$$

ゆえに 0 に収束する。 ■

Def. 19.1.1. 実数

補題 *19.1.7* より定まる商マグマ $A/\sim_R$ を実数と呼び、$\mathbb{R}$ と表す。またその元も実数と呼ぶ。

定義より $\mathbb{R}$ は可換体である。

Lem. 19.1.8. 実数の準備：可換体としての実数

可換環 $((\mathbb{R}, +), \times)$ は体である。

Proof.

$x = \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ について、以下の点列を考える。

$$y_n = \begin{cases} 0 & (x_n = 0) \\ 1/x_n & (x_n \neq 0) \end{cases}$$

全順序性より、$x < 0 \vee 0 < x$

$0 < x$ のとき、

$$\exists \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}_{\geq N}(\epsilon \leq x_n)$$

Cauchy 列であることより、

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}_{\geq N}(|x_n - x_m| < \epsilon/2)$$

したがって、

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}_{\geq N}(\epsilon/2 < x_m)$$

今、$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について考える。

$k, l \geq N$ について、$|y_k - y_l| = |1/x_k - 1/x_l| \leq |x_k - x_l|/|x_k x_l|$

定義より、$\epsilon' \in \mathbb{Q}^+$ に対して $k, l \geq N' \to |x_k - x_l| < \epsilon' \epsilon^2/4$ とする $N' > N$ が存在するので *Cauchy*

$x < 0$ のときも同様に示される。 ■

***Lem.* 19.1.9. 実数の準備：全順序**
補題 *19.1.7* より与えられる $\mathbb{R}$ 上の前順序 $\leq$ は全順序である。

Proof.
$\sim_R$ の定義より反対称的である。
補題 19.1.2 より全順序である。 ■

***Thm.* 19.1.10. 順序体としての実数**
$(\mathbb{R}, \leq)$ は順序体である。すなわち $\mathbb{R}$ は体で、$\leq$ は全順序であり、かつ以下を満たす。

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}(x \leq y \to x + z \leq y + z)$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}(0_{\mathbb{R}} < x \wedge 0_{\mathbb{R}} < y \to 0_{\mathbb{R}} < xy)$$

Proof.
補題 19.1.9 より全順序。

第一式について、$x_n - y_n < \epsilon \to (x_n + z_n) - (y_n + z_n) < \epsilon$ より明らか。

第二式について、$x = \left[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right], y = \left[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}\right]$ とする。
補題 19.1.3 より、

$$\exists \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{Q}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}_{\geq N}(\epsilon_1 \leq x_k \wedge \epsilon_2 \leq y_k)$$

$(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は補題 18.4.4 より *Cauchy* 列であり、補題 19.1.3 より $\neg(0)_{n \in \mathbb{N}} \succeq (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$
補題 19.1.9 より示される。 ■

***Lem.* 19.1.11.**
写像 $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}, \varphi(a) = \left[(a)_{n \in \mathbb{N}}\right]$ は以下を満たす。

1. 単射
2. 加法、乗法について環準同型
3. 全順序と両立
4. 一様連続

Proof.
定義より明らか。 ■

***Def.* 19.1.2. 有理数の実数への埋め込み**
補題 *19.1.11* の写像 φ について、像 $\varphi(\mathbb{Q})$ を誤解のない範囲で有理数 $\mathbb{Q}$ と呼ぶ。

***Cor.* 19.1.12.**

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

19.2 実数の性質

***Thm.* 19.2.1. 実数の有理数による近似**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}(x < y \to \exists a \in \mathbb{Q}(x < a < y))$$

Proof.
$x = \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], y = \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ とする。
$x < y$ より補題 19.1.3 より

$$\exists \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}(x_n - y_n \geq \epsilon)$$

Cauchy 列の定義より、

$$\exists M \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq M}(|x_n - x_m| < \epsilon/4 \land |y_n - y_m| < \epsilon/4)$$

ゆえに $K = \max\{M, N\}$ について、$a = x_{s(K)} + \epsilon/2 \in \mathbb{Q}$ が存在して

$$\forall n \in \mathbb{N}(n > K \to x_n + \epsilon/4 < a \land a + \epsilon/4 < y_n)$$

■

***Thm.* 19.2.2. $\mathbb{R}$ 上の *Archimedes* の原理**

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}(n > x)$$

Proof.
定理 19.2.1 より、有理数 a が存在して、

$$x < a < x + 1$$

定理 15.2.6 より示される。 ■

***Thm.* 19.2.3. $\mathbb{R}$ は可算一様**
$\mathbb{R}$ は可算一様である。

Proof.
定理 19.2.2 より、$\mathcal{U} \coloneqq \{\{(x, y) \mid |x - y| < 1/s(n)\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ は基本近縁系である。 ■

***Lem.* 19.2.4.**
全単射 $\varphi \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ が存在する。

Proof.

以下の写像は、全単射 $f \in \mathbb{R}^{]0,1[}$ である。

$$f(x) \coloneqq \frac{1/2 - x}{x(x-1)}$$

以下の写像は、全単射 $g \in]0,1[^{[0,1]}$ である。

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} 1/2 + 1/2^{s(n)} & (\exists n \in \mathbb{N}(1/2 + 1/2^n = x)) \\ 1/2 - 1/2^{s(n)} & (\exists n \in \mathbb{N}(1/2 - 1/2^n = x)) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\varphi = f \circ g$ として成り立つ。 ■

***Thm.* 19.2.5. 連続体濃度**

全単射 $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ が存在する。

Proof.

$f \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q})^{\mathbb{R}}, f(r) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$ は定理 19.2.1 より単射である。

以下で定める写像 $g \in [0,1]^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ を考える。

$A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ について以下の点列 $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が与えられる。

$$y_m \coloneqq \begin{cases} 1 & (m \in A) \\ 0 & (m \notin A) \end{cases}$$

$x_n \coloneqq \sum_{m=0}^{n} (y_m/2^m)$ とすると、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{Q}$ 上の *Cauchy* 列である。

A に対して $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ を定める写像 g は単射である。

補題 19.2.4 より単射 φ が存在して、単射 $\varphi \circ g \in \mathbb{R}^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ が存在する。

定理 5.4.4 より成り立つ。 ■

***Thm.* 19.2.6. 実数の直積は連続体濃度**

全単射 $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ が存在する。

Proof.

?? ■

***Thm.* 19.2.7. 有界と全有界**

$\mathbb{R}$ の部分集合 A について、以下の 2 つは同値である。

1. A は全有界
2. A が有界

Proof.

1. → 2. は、定理 18.3.6 より成り立つ。

2. → 1. を考える。

有界ならば $\exists d, u \in \mathbb{R} \forall a \in A(d \leq a \wedge a \leq u)$

定理 19.2.2 より $\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+\exists n\in\mathbb{N}((u-d)/\epsilon<n)$

定理 18.3.5 より $A\subset\{B(\epsilon)[d+m\times\epsilon]\mid m\in s(n)\}$ である。 ■

19.3 実数の完備性

***Lem.* 19.3.1.**

$\mathbb{Q}$ 上の *Cauchy* 列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は以下を満たす。

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}_{\geq N}\left(\left|x_n-\left[(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\right]\right|<\epsilon\right)$$

Proof.

Cauchy 列より $\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N}_{\geq N}(\epsilon-|x_n-x_m|\geq\epsilon/2)$

補題 19.1.3 より $\left|x_n-\left[(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\right]\right|<\epsilon$ ■

***Lem.* 19.3.2.**

$\mathbb{Q}$ 上の *Cauchy* 列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ について、以下を満たす部分 *Cauchy* 列 $\left(x_{N_0(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ を持つ。

$$\left(x_{N_0(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}\sim_R(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\left(\left|x_{N_0(n)}-\left[(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\right]\right|<1/s(n)\right)$$

Proof.

Cauchy 列より $\forall n\in\mathbb{N}\exists N\in\mathbb{N}\forall m,l\in\mathbb{N}_{\geq N}(|x_m-x_l|<1/(2s(n)))$ である。

以下のような写像 $N_0\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を考える。

$$N_0(0):=N(0)$$
$$N_0(s(n)):=\max\{N(s(n)),s(N_0(n))\}$$

ここから得る点列 $\left(x_{N_0(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ について考える。

定義より部分列である。さらに *Cauchy* 列の部分列より *Cauchy* 列である。

$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\exists N_1\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}_{\geq N_1}\left(\left|x_n-x_{N_0(n)}\right|<\epsilon\right)$ より第一式を満たす。

$\forall m,l\in\mathbb{N}$ について $n:=\min\{m,l\}$ とすると $N_0(m),N_0(l)\geq N_0(n)$ より、$\left|x_{N_0(m)}-x_{N_0(l)}\right|<1/(2s(n))=1/(2\min\{s(m),s(l)\})$ である。

ゆえに $\forall m\in\mathbb{N}_{\geq n}(1/s(n)-|x_n-x_m|>1/(2s(n)))$

補題 19.1.3 より $\left|x_n-\left[(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\right]\right|<1/s(n)$ ■

***Lem.* 19.3.3.**

$\mathbb{R}$ 上の *Cauchy* 列 $\left(\left[(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

このとき補題 *19.3.2* の主張する N_0 について、$\mathbb{Q}$ 上の点列 $\left(x_{n,N_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は *Cauchy* 列である。

Proof.

$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+$ を考える。

定理 15.2.6 より、$\exists N_1 \in \mathbb{N}(8/\epsilon < N_1 < s(N_1))$

補題 19.3.2 より、$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq N_2}(|x_n - x_m| < \epsilon/2)$

ゆえに $N := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ として $\forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq N}$ について、

$\left|x_{n,N_0(n)} - x_{m,N_0(m)}\right| \leq \left|x_{n,N_0(n)} - x_n\right| + |x_n - x_m| + \left|x_m - x_{m,N_0(m)}\right| < 2/s(n) + \epsilon/2 + 2/s(m) \leq 4/s(N) + \epsilon/2 < \epsilon$ である。 ■

***Lem.* 19.3.4. $\mathbb{R}$ 上の *Cauchy* 列は収束する**

$\mathbb{R}$ 上の *Cauchy* 列は収束する。

Proof.

$\mathbb{R}$ 上の *Cauchy* 列を考える。補題 19.3.2 より $\left(\left[\left(x_{n,N_0(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ と表せる。

補題 19.3.3 より得る $y := \left[\left(x_{n,N_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \mathbb{R}$ を考える。

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ を考える。

補題 19.3.1 より $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N_1}\left(\left|x_{n,N_0(n)} - y\right| < \epsilon/2\right)$

定理 19.2.2 より、$\exists N_2 \in \mathbb{N}(2/\epsilon < N_2 < s(N_2))$

補題 19.3.2 より $\left|x_n - x_{n,N_0(n)}\right| < 1/s(n)$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とする。

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}\left(|x_n - y| \leq \left|x_n - x_{n,N_0(n)}\right| + \left|x_{n,N_0(n)} - y\right| < 1/s(n) + \epsilon/2 \leq 1/s(N) + \epsilon/2 < \epsilon\right)$ ■

***Thm.* 19.3.5. 実数の完備性**

$\mathbb{R}$ は完備である。

Proof.

補題 19.3.4 定理 19.2.3 定理 17.3.4 より完備である。 ■

19.4 実数の連続性

***Thm.* 19.4.1. 区間縮小法**

以下を満たす広義単調増加列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、広義単調減少列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

$$\forall n \in \mathbb{N}(a_n < b_n)$$
$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

このとき、$\bigcap\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ は単集合である。

Proof.

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq N}(|a_n - a_m| < b_N - a_N < \epsilon)$

よって、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は *Cauchy* 列である。

定理 19.3.5 より $c \in \mathbb{R}$ に収束する。

$\exists n \in \mathbb{N}(c < a_n)$ とすると、$\forall m \in \mathbb{N}_{\geq n}(c < a_n \leq a_m)$ であり c に収束しない。反する。

$\exists n \in \mathbb{N}(b_n < c)$ とすると、$\forall m \in \mathbb{N}_{\geq n}(a_m < b_m \leq b_n < c)$ であり c に収束しない。反する。

ゆえに $c \in \bigcap\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\exists c_1, c_2 \in \bigcap\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}(c_1 < c_2)$ とすると、$\forall n \in \mathbb{N}(|b_n - a_n| \geq b_n - a_n \geq c_2 - c_1)$ より $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ に反する。

背理法より示される。 ■

***Cor.* 19.4.2.**

$$\forall n \in \mathbb{N}(s(n) \leq 2^n)$$

***Thm.* 19.4.3. 上限の存在**

$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A について、上に有界ならば上限を持つ。

Proof.

A の上界の全体 U を考える。

A は空でないので $\exists a \in A$ である。$a \in U$ ならば a は上限である。

$a \notin U$ を考える。上界を持つので $\exists u \in U$

以下の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。

$$(a_0, b_0) = (a, u) \qquad \left(a_{s(n)}, b_{s(n)}\right) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \left(\frac{a_n+b_n}{2} \in U\right) \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \left(\frac{a_n+b_n}{2} \notin U\right) \end{cases}$$

定義より定理 4.1.7 から $\forall n \in \mathbb{N}(a_n < b_n)$ であり、定理 19.2.2 より $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する。

定理 19.4.1 より $\exists r \in \mathbb{R}(\{r\} = \bigcap\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\})$ である。

$\forall c \in \mathbb{R}(r < c \to \exists n \in \mathbb{N}(r < b_n < c))$ である。$b_n \in U$ より $c \notin A$、ゆえに r は上界である。

$\forall c \in \mathbb{R}(c < r \to \exists n \in \mathbb{N}(c < a_n < r))$ である。$a_n \in X \setminus U$ より $c \notin U$、ゆえに r は上限である。 ■

***Lem.* 19.4.4.**

$\mathbb{R}$ の上に有界な空でない部分集合 A について、$\sup A \in \overline{A}$

Proof.

$\sup A \notin \overline{A}$ と仮定する。

定理 16.4.3 より $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+(A \cap]\sup A - \epsilon, \sup A + \epsilon[= \varnothing)$ である。

$\sup A - \epsilon/2$ も上界となり、上限の定義に反する。

背理法より $\sup A \in \overline{A}$ ■

***Thm.* 19.4.5. 有界な単調列は収束する**

$\mathbb{R}$ 上の上に有界な広義単調増加列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

Proof.

定理 19.4.3 より、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は上限 s を持つ。

今、単調性と上界集合の最小元であることから

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}(s - \epsilon < x_n \leq s)$$

■

***Thm.* 19.4.6. $\mathbb{R}$ は連結**

$\mathbb{R}$ は連結である。また、$\mathbb{R}$ 上の区間は連結である。

Proof.

連結でないと仮定する。$\exists U, V \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}(U \cup V = \mathbb{R} \wedge U \cap V = \varnothing)$
U, V は空でないので $\exists u \in U \exists v \in V(u \neq v)$ である。

$u < v$ とする。$B \coloneqq \{x \in U \mid x < v\}$ を考える。
$x \in B$ であり、v は B の上界であるので、定理 19.4.3 から上限 $b \coloneqq \sup B$ を持つ。
$b \in V$ とすると、V は開集合であるので $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+(]b - \epsilon, b + \epsilon[\subset V)$
このとき $b - \epsilon$ も B_1 の上界となり矛盾。ゆえに $b \notin V$ よって $b < v$ である。
$b \in U$ とすると、U は開集合であるので $\exists \epsilon' \in \mathbb{R}^+(]b - \epsilon', b + \epsilon'[\subset U)$
$b < b + \min\{\epsilon', v - b\}/2 \in B$ より b は上界でない。ゆえに $b \notin U$

$U \cup V = \mathbb{R}$ に反する。背理法より連結。$v < u$ の場合も同様である。
区間についても同様に示される。 ■

***Thm.* 19.4.7. 有界閉集合とコンパクト**

$\mathbb{R}$ 上の部分集合 A について、以下は同値である。

1. A は有界閉集合
2. A はコンパクト

Proof.

1. $\to$ 2. を考える。
定理 19.2.7 より全有界。
A 上の *Cauchy* ネットは定理 19.3.5 と定理 16.4.3 より A に収束する。すなわち A は完備である。
定理 17.2.7 より成り立つ。

2. $\to$ 1. を考える。
定理 17.2.7 より全有界かつ完備。定理 19.2.7 より有界。
A が閉集合でないとすると、あるネットが存在して $\mathbb{R} \setminus A$ に収束する。
収束ネットは *Cauchy* より A は完備でない。
背理法より、A は閉集合である。 ■

19.5 実一変数関数

***Def.* 19.5.1. 関数**

集合 X について、写像 $f \in X^{\mathbb{R}}$ を関数と呼ぶ。

***Thm.* 19.5.1. 最大値の定理**

空でないコンパクト空間 X 上で定義された連続関数 $f \in \mathbb{R}^X$ は最大値を持つ。

Proof.

定理 16.4.7 より、$f(X)$ はコンパクト。
定理 19.4.7 より $f(X)$ は有界閉集合である。したがって上に有界。
$f(X)$ は空でないので、定理 19.4.3 より上限 $\sup f(X)$ が存在する。
閉集合より $\sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$ であるので、$\exists x \in X(f(x) = \sup f(X))$ ■

***Thm.* 19.5.2. 中間値の定理**
連結空間 X 上で定義された連続関数 $f \in \mathbb{R}^X$ について、以下が成り立つ。

$$\forall x_1, x_2 \in X \forall y \in [f(x_1), f(x_2)] \exists x \in X(f(x) = y)$$

Proof.
$\exists x_1, x_2 \in X \exists y \in [f(x_1), f(x_2)] \forall x \in X(f(x) \neq y)$ とする。
定義より、$y \in]f(x_1), f(x_2)[$
$R_1 := \{r \in \mathbb{R} \mid r < y\}, R_2 := \{r \in \mathbb{R} \mid y < r\}$ は開集合であり、$R_1 \cup R_2 \supset f(X) \wedge R_1 \cap R_2 = \varnothing$ である。
$f(x_1) \in R_1 \cap f(X) \neq \varnothing \wedge f(x_2) \in R_2 \cap f(X) \neq \varnothing$ より $f(X)$ は連結でない。
定理 16.6.2 より $f(X)$ が連結であることに反する。背理法より示される。 ■